

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

## Revue des publications périodiques

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2  
(1871), p. 173-184

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1871\\_\\_2\\_\\_173\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__173_0)

© Gauthier-Villars, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par MM. CLEBSCH et NEUMANN (1).

T. II, 1870. 1<sup>er</sup> Cahier.

CLEBSCH (A.). — *Sur les complexes de Plücker.* (8 p.)

Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  et  $y_1, y_2, y_3, y_4$  les coordonnées de deux points; les coordonnées de la droite qui les joint sont données par six déterminants  $x_i y_k - y_i x_k$  formés avec les  $x$  et les  $y$ ; l'équation d'un complexe est une fonction homogène de ces quantités. Mais entre celles-ci a lieu une équation identique du second degré, au moyen de laquelle on peut changer l'équation d'un complexe, sans que ce complexe lui-même change. Dans le présent Mémoire, l'auteur fait voir qu'il y a toujours une seule manière de modifier l'équation du complexe d'ordre  $n (> 1)$  de telle façon qu'entre les coefficients de cette équation il y ait les mêmes relations linéaires qu'entre ceux de l'expression symbolique  $(a_x b_y - b_x a_y)^n$ . Cette *forme normale*, très-commode dans certaines recherches, est appliquée aux complexes du second degré.

OKATOW (M.). — *Sur l'équilibre d'un fil pesant, dont l'axe forme une hélice.* (4 p.)

La forme et l'état intérieur du fil sont déterminés conformément à la théorie des tiges très-minces de Kirchhoff.

KORKINE (A.). — *Sur les intégrales des équations du mouvement d'un point matériel.* (28 p.; fr.)

L'auteur donne une étude complète de la question relative à l'ensemble des problèmes du mouvement d'un point sur une surface, qui admettent deux intégrales premières données. Il fait voir que ces intégrales et les forces agissantes se composent au moyen de certaines équations aux dérivées partielles. Ces dernières sont résolues dans le cas où les forces ne dépendent que des coordonnées du point.

KORNDÖRFER (G.). — *Représentation d'une surface du quatrième degré ayant une ligne double du second degré et un ou plusieurs points singuliers.* (24 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 124.

Ce Mémoire, comme celui du même auteur (T. I des *Annalen*), traite de quelques cas particuliers assez étendus des surfaces du quatrième ordre, à ligne double du second degré, dont M. Clebsch a donné la représentation pour le cas général, dans le T. 69 du *Journal de Borchardt*. Les cas étudiés sont ceux où la surface a, en outre, deux, trois ou quatre points singuliers, mais où la ligne double n'est pas spécialisée.

GÜSSFELDT (P.). — *Sur les courbes qui ont un pôle harmonique et une droite harmonique.* (63 p.)

Steiner a donné, dans le 47<sup>e</sup> volume du *Journal de Crelle*, une longue suite de propositions relatives en partie aux courbes algébriques à un centre, en partie à l'emploi de ces courbes dans la théorie des courbes en général, et en particulier de celles du troisième, du quatrième et du cinquième degré. M. Güssfeldt ayant entrepris de démontrer ces propositions, en tant du moins qu'elles sont nécessaires pour l'application aux courbes du troisième ordre, fait usage d'une méthode où sont mêlées les considérations purement géométriques avec les applications de la théorie des invariants et un emploi remarquable de la méthode de la notation symbolique. Pour rendre ces applications possibles, la condition du centre d'une courbe est généralisée projectivement, et remplacée par la suivante : il existe un point M et une droite G, tels que tout rayon mené par M coupe la courbe en deux points qui forment avec M et l'intersection des rayons avec G, pris comme points conjugués, un système harmonique. M est alors le pôle harmonique et G la droite harmonique.

Le travail se compose de trois Parties. Dans la première, l'auteur s'occupe du nombre des conditions auxquelles sont assujettis les coefficients d'une courbe douée d'un pôle harmonique M et d'une droite harmonique G, de la polaire du point M, des singularités d'une telle courbe, et de l'intersection de deux courbes qui ont le même point M et la même droite G. Enfin, il étudie le faisceau des premières polaires correspondantes aux points de G, et fait voir que  $2n - 2$  courbes de ce faisceau ont un point double sur G.

La seconde Partie du travail établit l'équation de la courbe désignée par Steiner sous le nom de *polaire interne*. Cette courbe passe par les  $\frac{n(n-1)}{2}$  couples de points d'une courbe générale du  $n^{\text{ième}}$

degré qui sont conjugués par rapport à un point  $M$  et à une droite  $G$  choisis à volonté. Elle est du  $(n - 1)^{\text{ième}}$  ordre, et ces couples de points forment son intersection complète avec la courbe donnée. Les coefficients de l'équation de cette courbe sont, comme ceux de la polaire ordinaire (externe), linéaires par rapport aux coefficients de la courbe donnée, de sorte qu'à un faisceau de courbes correspond aussi un faisceau de polaires internes. A cela se rattache la démonstration des plus importantes propositions données par Steiner sur ces courbes.

La troisième Partie est la partie principale du Mémoire, et contient la démonstration de presque tous les remarquables théorèmes que Steiner a déduits de ces considérations relativement aux courbes du troisième ordre (§ 15 du Mémoire de Steiner). Les courbes du troisième ordre ont encore, en général, la propriété d'admettre un point  $M$  et une droite  $G$ , et ceux-ci peuvent être choisis de neuf manières différentes; on peut prendre pour  $M$  chacun des points d'inflexion, et pour  $G$  la droite harmonique correspondante, qui joint les points de contact des tangentes menées à la courbe par le point d'inflexion. Si l'on considère, d'autre part, la courbe par rapport à un point  $M$  et à une droite  $G$  choisis à volonté, la polaire interne de  $M$  sera une conique. La droite  $G$  restant fixe, il y a une conique particulière  $\theta = 0$ , sur laquelle  $M$  doit être situé, pour que la polaire interne se décompose en deux. Les droites dans lesquelles elle se décompose enveloppent une courbe de sixième classe  $S_1 = 0$ . De plus, les points de  $G$  jouissent encore eux-mêmes de cette propriété, que leur polaire interne se décompose en deux, et les droites dans lesquelles elle se décompose enveloppent une seconde courbe de sixième classe  $F_1 = 0$ .

A ces courbes s'en joignent encore quelques autres, moins faciles à définir, dont la classe, l'ordre et les relations mutuelles sont discutés. Ces courbes sont d'un haut intérêt, tant au point de vue géométrique qu'à celui de l'algèbre nouvelle. Comme elles contiennent les coordonnées d'une droite fixe, leurs équations sont des contrevariants (*Zwischenformen*), dans le sens employé par M. Aronhold, lorsqu'elles interviennent comme exprimées en coordonnées ponctuelles; en coordonnées tangentielles, ce sont des formes adjointes à deux séries de coordonnées tangentielles. Ainsi  $\theta = 0$  est exactement la forme ainsi désignée par M. Aronhold dans le tome 55 du *Journal de Crelle*. Soit  $F = 0$  l'équation de la courbe du troisième ordre en coor-

données tangentielles,  $a_{ikh}$  un coefficient de son équation en coordonnées ponctuelles, et soient  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  les coordonnées de G; alors  $S_1 = 0$  prend la forme remarquable

$$\sum \frac{\partial F}{\partial a_{ikh}} \gamma_i \gamma_k \gamma_h = 0.$$

DRACH (V.). — *Sur la théorie de la droite dans l'espace et des complexes linéaires.* (12 p.)

Ce Mémoire traite des complexes plückériens du premier degré, en vue de quelques relations *métriques* qui s'y rencontrent.

WEBER (H.). — *Sur un problème de représentation conforme.* (3 p.)

Ce problème, résolu avec une remarquable simplicité, est celui de la représentation, avec similitude dans les éléments infinitésimaux, de la surface de la lemniscate sur un cercle, en faisant correspondre au centre du cercle, tantôt le centre de la lemniscate, tantôt un de ses foyers.

MAYER (A.). — *Le théorème du Calcul des variations qui correspond au principe de la moindre action.* (7 p.)

Les problèmes du Calcul des variations où l'on n'a à considérer que des intégrales simples peuvent toujours se ramener au cas où, sous le signe d'intégration aussi bien que dans les équations de condition, il n'entre que les *premières* dérivées des fonctions cherchées. Si en même temps la variable indépendante elle-même ne se présente nulle part explicitement, et que les équations de condition ne contiennent pas les dérivées, on voit alors que les équations différentielles du problème admettent une intégrale analogue à celle du principe des forces vives. Si, à l'aide de cette intégrale, on élimine de partout la différentielle elle-même de la variable indépendante, les équations différentielles du problème se trouvent encore des équations isopérimétriques; mais elles se rapportent à un autre problème, dans lequel une des anciennes fonctions inconnues joue maintenant le rôle de variable indépendante. En appliquant ces considérations à la Mécanique, on est conduit par l'intégrale  $\int (T + U) dt$ , au principe de la moindre action.

Si les équations de condition contiennent aussi les dérivées, l'intégrale en question n'existe plus; mais on peut alors employer une des équations de condition pour éliminer la différentielle de la va-

riable indépendante ; les équations du problème conservent ainsi leur caractère isopérimétrique, et correspondent encore, après l'élimination, à un problème dans lequel une des anciennes fonctions inconnues joue le rôle de variable indépendante.

LINDELÖF (L.). — *Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume* (10 p. ; fr.)

L'auteur commence par donner une démonstration élégante de cette proposition, que, parmi tous les polyèdres entièrement convexes dont la direction des faces est donnée, celui qui a le plus grand volume, entre tous ceux de surface donnée, est circonscrit à une sphère. A cette proposition se rattache la démonstration du théorème énoncé par Steiner, que, si l'on fait varier aussi la direction des faces, le polyèdre de volume maximum sous une surface donnée a pour points de contact avec la sphère inscrite les centres de gravité de ses faces.

LINDELÖF (L.). — *Sur les limites entre lesquelles la caténoïde est une surface minima*. (7 p. ; fr.)

L'auteur établit d'une manière élémentaire les limites entre lesquelles la chaînette, par sa révolution autour de sa directrice, engendre une surface minimum <sup>(1)</sup>. On obtient ces limites, lorsque les tangentes menées aux extrémités de l'arc générateur se coupent sur la directrice.

RADAU (R.). — *Les équations différentielles de la Dynamique*. (15 p.)

L'auteur traite des avantages qui peuvent résulter des théories de Hamilton, de Jacobi, de Bertrand, dans l'étude du mouvement des planètes et dans le problème des trois corps.

NEUMANN (C.). — *Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux*. (5 p.)

Note sur le Mémoire publié par l'auteur. (*Math. Ann.*, T. I.) <sup>(2)</sup>.

HEINE (E.). — *Extraits de deux lettres*. (5 p.)

Le premier de ces Extraits est relatif au développement de  $\cos n\varphi$  suivant les puissances de  $\cos \varphi$  ; le second à une démonstration rigoureuse des principes du calcul des variations.

<sup>(1)</sup> Voir LINDELÖF et MOIGNO, *Leçons sur le calcul des variations*, p. 209.

<sup>(2)</sup> Voir *Bulletin*, t. I, p. 132.

NEUMANN (C.). — *Sur les produits et les carrés des fonctions de Bessel.* (1 p.)

L'auteur donne trois théorèmes, au moyen desquels une fonction uniforme et continue à l'intérieur d'une certaine région peut, suivant qu'elle est paire ou impaire, se développer suivant les carrés ou les produits des fonctions de Bessel; et il détermine, en même temps, la limite de la région de convergence de ces développements.

2° Cahier.

CLEBSCH (A.). — *Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre, et sur la trisection des fonctions hyperelliptiques.* (5 p.)

L'auteur donne un extrait d'un Mémoire plus développé, qui a paru dans le tome XIV des *Mémoires de la Société des Sciences de Göttingue*, et dont nous pouvons rendre compte en même temps que de l'extrait.

La question de ramener une forme binaire du sixième ordre  $f$  à la forme  $u^3 - v^3$  est un problème déterminé; M. Cayley a établi complètement les équations qui ont lieu entre les invariants de  $f$  et les invariants simultanés de  $u$  et de  $v$ . Mais il s'agit ici du nombre et du groupement des solutions de ce problème. Il se trouve ici que ce problème coïncide avec celui de la trisection des fonctions hyperelliptiques dont l'irrationalité est  $\sqrt{f}$ . Pour cette trisection, M. Camille Jordan a fait voir qu'elle conduit à une équation du 40° degré, qui se résout au moyen d'une équation du 27° degré. La même chose est démontrée ici algébriquement pour le problème de transformation de  $f = u^3 - v^3$ . Ce problème a 80 solutions qui, prises deux à deux, ne diffèrent que par le signe de  $v$ , et qui n'en forment ainsi, à proprement parler, que 40. Si l'une d'elles est donnée, la recherche des autres n'exige plus qu'une équation Hessienne du 9° degré, et peut se faire, par conséquent, à l'aide de radicaux. En étudiant de plus près ces relations, on voit que les racines de l'équation du 40° degré admettent un groupement de 2.45 groupes de quatre, que, par suite, l'équation du 40° degré conduit à une autre du 45°, qui donne les couples de groupes quadruples; mais les 40 racines de la première équation peuvent en même temps être formées de 27 manières au moyen de cinq couples de groupes quadruples, ce qui donne une réduction de l'équation du 40° degré à une du 27°.

KLEIN (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et du second degré.* (29 p.)

L'équation de condition du second degré, qui existe entre les six coordonnées de la ligne droite dans l'espace, peut se ramener, par des transformations linéaires, à la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les variables  $x$ , égales à zéro, représentent ici six complexes linéaires, qui se groupent ensemble d'une manière remarquable. Relativement à ces complexes, les droites s'assemblent 32 à 32, savoir, celles dont les coordonnées  $x$  ne diffèrent que par le signe. Si l'une de ces 32 droites tourne autour d'un point, la même chose a lieu pour 15 des autres; les 16 restantes se meuvent dans des plans. On rencontre un exemple de cette sorte de groupement dans les 16 points doubles et les 16 plans doubles des surfaces de quatrième ordre et de quatrième classe étudiées par Kummer.

Soit donné maintenant un complexe de lignes du second degré. On peut alors, en général, déterminer une certaine transformation linéaire, qui ramène l'équation de condition existant entre les coordonnées à la forme précédente et, en même temps, l'équation du complexe à une équation correspondante. De là résulte qu'un complexe du second degré est réciproque à lui-même par rapport à un système de six complexes linéaires de l'espèce considérée. Une équation a lieu pour les figures covariantes appartenant au complexe et, en particulier, pour la surface de Kummer, qui est le lieu des points dont le cône complexe se décompose en deux plans, et qui, en même temps, est enveloppée par deux plans dont les courbes complexes se décomposent en deux points. On obtient par là une série de théorèmes sur les complexes du second degré, et en particulier aussi sur la surface de Kummer. Par exemple, on a ces deux propositions :

« Le rapport anharmonique de quatre plans tangents d'une surface de Kummer passant par une droite donnée quelconque est égal au rapport anharmonique des points d'intersection de cette ligne avec la surface. »

« Si d'un point de la surface de Kummer on mène les six tangentes possibles à la courbe d'intersection; que pour chacun des points de contact on répète cette construction, et ainsi de suite; on n'obtient pas ainsi une suite infinie de points, mais un système ren-



trant sur lui-même de 32 points jouissant de propriétés identiques, dont chacun est lié avec six des autres par des tangentes doubles de la surface. »

La représentation algébrique des figures en question s'établit très-simplement dans le système de variables pris pour base.

GORDAN (P.). — *Les systèmes simultanés de formes binaires.* (54 p.)

Ce Mémoire est un des plus importants qui aient paru jusqu'ici sur l'algèbre des formes binaires. La question de savoir si, au moyen d'un nombre fini d'invariants et de covariants, on peut former rationnellement sans dénominateurs tous les autres appartenant à une certaine forme, a été déjà traitée par M. Cayley dans ses *Memoirs upon Quantics*, et ce géomètre a cru devoir se prononcer pour la négative. Dans le tome 69 du *Journal de Crelle*, M. Gordan a repris cette question, en tant qu'elle concernait les formes binaires, et a fait voir qu'il y a au moins un système de formes, au moyen desquelles tous les invariants et covariants d'une forme binaire peuvent se représenter par des fonctions entières à coefficients numériques.

La démonstration compliquée, donnée dans ce premier Mémoire, a été simplifiée et rendue plus claire par l'auteur dans son nouveau travail, et il a en même temps étendu son théorème à un système quelconque de formes binaires *simultanées*. Il prend pour point de départ la définition des invariants et des covariants au moyen du théorème démontré par M. Clebsch, que tout invariant ou covariant rationnel peut se représenter par une somme de produits de déterminants symboliques et d'expressions linéaires symboliques. Cette proposition rend tout à fait inutile l'usage des équations aux différentielles partielles, et l'on n'a besoin d'employer que des méthodes élémentaires. Le théorème conduit en outre à démontrer que tous ces invariants et covariants résultent de superpositions répétées de formes simples. Par la  $k^{\text{ième}}$  superposition (*Uebereinanderschlebung*) de deux formes, M. Gordan entend l'opération connue par laquelle, au moyen des deux formes  $f, \varphi$ , dont les expressions symboliques sont

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n, \quad \varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^y,$$

on forme l'expression

$$(a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1)^k (a_1 x_1 + a_2 x_2)^{n-k} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{y-k}.$$

La conception d'un *système de formes complet* joue dans cette étude un rôle des plus importants. Un tel système jouit de la propriété que, de quelque manière que l'on opère les superpositions des formes du système, on retrouve toujours une fonction rationnelle et entière des formes elles-mêmes. La question est de montrer que, pour un système quelconque de formes fondamentales, on peut toujours construire un système de formes complet et fini. M. Gordan démontre d'abord l'existence de ce système de formes fondamentales, toutes les fois que, pour chaque forme fondamentale en particulier, il existe un système de formes complet et fini; puis, pour une seule forme fondamentale donnée quelconque de l'ordre  $n$ , et ici le cas où le nombre  $n$  est divisible par 4 exige des considérations particulières.

Dans les applications qui viennent ensuite, M. Gordan établit les systèmes de formes complets pour les formes isolées du deuxième, du troisième, du quatrième, du cinquième, du sixième degré, puis aussi pour des combinaisons de formes du premier, du deuxième, du troisième, du quatrième degré, et, en général, pour les combinaisons de systèmes complets donnés arbitrairement avec les formes du premier et du deuxième degré.

MÜLLER (H.). — *Sur une affinité géométrique du cinquième degré* (12 p.)

Étant donnés deux plans, on prend sur chacun d'eux cinq points  $p_1, p_2, \dots, p_5, q_1, q_2, \dots, q_5$ . Si l'on choisit sur le premier un nouveau point  $p$ , sur le second un nouveau point  $q$ ,  $q$  sera associé d'une manière *uniforme* (*eindeutig*) à  $p$ , si l'on exige que le faisceau des rayons menés de  $p$  aux points  $p_1, p_2, \dots, p_5$  soit projectif de celui des rayons menés de  $q$  à  $q_1, q_2, \dots, q_5$ . Cela détermine une relation mutuelle entre les points des deux plans. Si  $p$  se meut en ligne droite,  $q$  décrit une courbe du cinquième ordre, qui aura  $q_1, q_2, \dots, q_5$  pour points doubles, et de plus un certain sixième point, auquel alors correspond uniquement la conique déterminée par cinq points  $p_1, p_2, \dots, p_5$ .

En poursuivant l'étude de cette relation, on rencontre une suite de remarques intéressantes, qui sont, en partie, étroitement liées à la théorie des courbes du troisième ordre.

NÖTHER (M.). — *Sur la théorie de la correspondance uniforme des formes algébriques d'un nombre quelconque de dimensions.* (24 p.)

La division, donnée par Riemann, des équations algébriques entre deux variables suivant la classe  $p$  des fonctions abéliennes correspondantes, nous apprend que les courbes de même nombre  $p$  (de même genre) peuvent être rapportées uniformément l'une à l'autre. M. Clebsch a énoncé, sans démonstration, comme extension de cette proposition, un théorème analogue pour les surfaces à courbes doubles quelconques, dans les *Comptes rendus* de décembre 1868.

Le Mémoire de M. Nöther complète d'abord ce théorème, en prenant aussi en considération les points singuliers d'ordre supérieur de la surface, et en donnant la démonstration du théorème. Mais il va beaucoup plus loin. Il considère des équations algébriques entre des variables en nombre quelconque et montre comment on peut dans chaque cas les classer. C'est ce qu'il exprime par le théorème suivant :

« Le genre d'une équation homogène  $f(z_1, z_2, \dots, z_{r+2}) = 0$  est le nombre des constantes arbitraires qui demeurent dans une fonction  $\theta(z_1, z_2, \dots, z_{r+2})$  de degré  $n - r - 2$ , qui s'annule, ainsi que ses  $(\mu - r + h - 1)^{\text{ièmes}}$  dérivées pour toutes les figures algébriques contenues dans  $f = 0$ , pour lesquelles  $h + 1$  des quantités  $z$  restent arbitraires, et les dérivées de  $f$ , jusqu'à la  $(\mu - 1)^{\text{ième}}$  inclusivement, s'annulent. Pour  $\mu + h \geq r$ , il n'y a aucune condition à remplir. »

L'égalité du nombre  $p$  est la condition préalable nécessaire pour que deux figures algébriques se correspondent d'une manière uniforme.

Le même auteur a traité dans une Note <sup>(1)</sup> les surfaces du genre  $p = 0$ , qui possèdent aussi des courbes du genre  $p = 0$ ; et il fait connaître dans quels cas ces surfaces peuvent être représentées uniformément sur un plan, en indiquant un théorème général pour effectuer cette représentation.

SCHRÖDER (E.). — *Sur des algorithmes en nombre infini pour la résolution des équations.* (49 p.)

Ce Mémoire contient une théorie générale des méthodes de résolution des équations algébriques ou transcendentes, pourvu que la racine, réelle ou complexe, que l'on cherche jouisse de cette propriété, que le premier membre de l'équation soit continu dans le

(<sup>1</sup>) *Göttinger Nachrichten*, 1870, n<sup>o</sup> 1.

voisinage immédiat de cette racine. Le caractère particulier de la méthode considérée consiste en ce que l'on part d'un nombre quelconque, et que l'on va en s'approchant de la racine cherchée par une suite d'opérations telles, par exemple, que celles de la méthode connue de Newton. L'auteur, entre autres, reproduit sous une forme concise une formule pour le développement en série d'une racine, qui avait été déjà donnée par Theremin, du moins pour les équations algébriques. Comparé aux séries de Lagrange et de Bürmann, ce développement a l'avantage de contenir une quantité arbitraire, par le changement de laquelle on peut obtenir *toutes* les racines.

Il faut distinguer entre la représentation des racines par des séries et par des expressions analogues (valeurs-limites, etc.), et les algorithmes proprement dits par lesquels on obtient des valeurs approchées par une suite de substitutions successives. L'auteur discute les espèces les plus remarquables de ces algorithmes, qui semblent avoir en grande partie échappé à l'attention des géomètres.

KLEIN (F.). — *La transformation linéaire générale des coordonnées de la ligne droite.* (5 p.)

Les coordonnées de la ligne droite dans l'espace peuvent toujours être considérées comme des variables quelconques, liées entre elles par une équation de condition du second degré. D'après cela, on peut se demander quelle est la signification d'une transformation linéaire générale de ces variables. La réponse se tire de la forme que prend, dans chaque cas, l'équation de condition.

KLEIN (F.). — *Sur la représentation des surfaces complexes de quatrième ordre et de quatrième classe.* (2 p.)

Ces surfaces constituent un cas particulier des surfaces de quatrième ordre à une droite double, dont M. Clebsch a donné la représentation dans le tome I des *Annalen*. La modification que subit ici la représentation générale est indiquée dans ce travail.

CLEBSCH (A.). — *Sur la possibilité de transformer linéairement l'une dans l'autre deux formes linéaires données.* (9 p.)

Le problème exige l'égalité des invariants simultanés; mais cette égalité n'est pas suffisante. L'auteur fait voir comment on peut effectuer la transformation :

1° Lorsque, jusqu'à un ordre impair  $2n + 1$ , les deux formes ont des couples correspondants de covariants linéaires,  $a, b$  pour  $f$ , et

$\alpha$ ,  $\beta$  pour  $\varphi$ , et que ni le déterminant de  $a$ ,  $b$ , ni celui de  $\alpha$ ,  $\beta$  ne s'évanouissent ;

2° Lorsque, jusqu'à un ordre pair  $2n$ , il existe des couples correspondants de covariants quadratiques,  $a$ ,  $b$  pour  $f$ , et  $\alpha$ ,  $\beta$  pour  $\varphi$ , et que ni la résultante de  $a$ ,  $b$ , ni celle de  $\alpha$ ,  $\beta$  ne s'évanouissent.

L'auteur indique alors quels sont les cas, dans les formes du cinquième et du sixième ordre, qui restent exclus de ces considérations.

CLEBSCH (A.). — *Sur la détermination des points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre.* (3 p.)