HERMITE

Sur l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 320-323

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__320_1>

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

PAR M. HERMITE.

Soit

$$f(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2};$$

il est d'abord aisé de voir que l'on a

$$f(\alpha + \pi) = -f(\alpha);$$

car, en faisant, dans l'expression

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

la substitution $x=-t$, nous obtiendrons sur le champ

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dt}{1-2t\cos\alpha+t^2}=-f(\alpha).$$

La fonction $f(\alpha)$ est donc périodique, et il suffit, pour en obtenir la valeur générale, de la déterminer en supposant α compris entre zéro et π. Faisant à cet effet

$$x-\cos\alpha=u\sin\alpha,$$

ce qui donnera

$$\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

nous écrirons

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\int_0^{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2},$$

de sorte que, dans le second membre, les deux intégrales représentent les arcs les plus petits, renfermés entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ayant respectivement pour tangentes les quantités

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\quad\text{et}\quad\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{2}.$$

Or, α étant moindre que π par hypothèse, la première intégrale sera par conséquent $\frac{\alpha}{2}$, mais la seconde aura pour valeur l'arc $\frac{\pi+\alpha}{2}$ diminué de π, c'est-à-dire $\frac{\alpha-\pi}{2}$; nous aurons donc

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

entre les limites indiquées pour la variable α. Maintenant la relation

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha)$$

donne cette conséquence, qu'entre les limites π et 2π, $f(\alpha)$ a pour valeur $-\frac{\pi}{2}$, de sorte que nous nous trouvons amené à l'expression analytique, par une intégrale définie, d'une fonction *discontinue* égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, selon que la variable est renfermée entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, ou entre les limites $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre quelconque.

On voit donc comment on peut être amené, par les considérations les plus élémentaires du calcul intégral à la considération si importante en analyse des fonctions discontinues, et j'ajoute que l'expression en série trigonométrique de cette fonction particulière qui s'est ainsi offerte se tire facilement de l'intégrale définie.

Il suffit, en effet, d'employer ce développement connu, savoir :

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \sin\alpha + x\sin 2\alpha + x^2\sin 3\alpha + \ldots + x^{n-1}\sin n\alpha + \ldots,$$

et d'observer qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} x^{n-1}\,dx = 0 \quad \text{ou} \quad = \frac{2}{n},$$

suivant que n est pair ou impair, pour parvenir au résultat que donnerait la formule de Fourier, savoir :

$$f(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2} = 2\left[\sin\alpha + \frac{\sin 3\alpha}{3} + \frac{\sin 5\alpha}{5} + \ldots\right].$$

Il serait même possible d'établir la convergence de la série, en limitant le développement de la fonction $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ à ses n premiers termes, et considérant le reste qu'on trouvera sous cette forme, savoir :

$$R_n = \sin(n+1)\alpha \int_{-1}^{+1} \frac{x^n\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$
$$- \sin n\alpha \int_{-1}^{+1} \frac{x^{n+1}\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

mais je ne m'y arrêterai point.

Une autre intégrale définie élémentaire conduit encore à la même fonction discontinue, c'est celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur est $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ou $-\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, suivant que la constante a, qui, en valeur absolue, doit être supposée supérieure à l'unité, est positive ou négative. Il en résulte, si l'on fait $a = \frac{1}{\cos\alpha}$, qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{(1-x\cos\alpha)\sqrt{1-x^2}} = +\pi \quad \text{ou} \quad -\pi,$$

suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif; mais cette expression ne diffère pas au fond de celle dont nous venons de nous occuper, elle s'y ramène en effet par la substitution $x = \frac{2z}{1+z^2}$, qui sert en général à l'intégration des radicaux de la forme $\sqrt{1-x^2}$. Sous une forme ou sous l'autre, le passage brusque de $f(\alpha)$ d'une valeur nulle à $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$, semble moins caché dans l'intégrale que dans la série trigonométrique; car, en supposant α infiniment petit, elles offrent, sous le signe d'intégration, aux infiniment petits près du second ordre, l'une le facteur $\frac{1}{(1-x)^2}$, l'autre le facteur $\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, qui, à la limite supérieure $x=1$, rendent les intégrales infinies; c'est du moins par l'intermédiaire de cette forme, du produit d'une quantité infiniment petite par une quantité infiniment grande, que se trouve réalisé le passage brusque d'une valeur nulle à une valeur finie.

Je remarque enfin qu'on a

$$f'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos\alpha(1+x^2)-2x}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}\, dx = \int_{-1}^{+1} d\left(\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\right),$$

et l'intégrale est nulle, en général, puisque la fonction $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ prend la même valeur aux deux limites; toutefois, pour $\cos\alpha = \pm 1$, elle est infinie, l'expression à intégrer entre les limites $+1$ et -1 étant $\frac{1}{1\pm x}$.