Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 297-304

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__297_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MANNHEIM (A.). — ÉTUDE SUR LE DÉPLACEMENT D'UNE FIGURE DE FORME INVARIABLE. NOUVELLE MÉTHODE DES NORMALES. APPLICATIONS DIVERSES. — *Journal de l'École Polytechnique*, XLIII[e] cahier (*).

On attribue généralement à Ampère l'idée féconde de séparer l'étude du mouvement de celle des forces qui le produisent. Un passage du *Rapport de M. Chasles sur les progrès de la Géométrie* rectifie les idées généralement admises sur ce point. Voici comment s'exprime l'éminent géomètre :

« L'idée d'étudier *les mouvements indépendamment des forces*, qui aurait pu être suscitée depuis fort longtemps par l'objet même de la *Statique*, où l'on traite *de l'équilibre*, c'est-à-dire *des forces, indépendamment des mouvements*, fut émise, il y a trois quarts de siècle, par un jeune capitaine du génie, Carnot, dans son *Essai sur les machines en général*, et reproduite par l'auteur dans sa *Géométrie de position*, puis dans un Rapport à l'Institut. Cependant elle était restée inféconde, ou du moins dans l'oubli, quand Ampère, qui en comprit le caractère, dans son *Essai sur la philosophie des sciences*, regarda l'étude *des mouvements considérés en eux-mêmes* comme devant être le sujet d'une des divisions distinctes de la Mécanique, et associa cette étude à la *Statique*, sous le nom de *Cinématique*. »

Ainsi, pour la millième fois peut-être, c'est à celui qui a trouvé le mot qu'on a attribué l'idée. Quoi qu'il en soit, l'idée de Carnot a déjà porté ses fruits : on connaît maintenant de très-importants théorèmes sur le déplacement d'un corps solide dans l'espace; on doit même penser que la considération du déplacement d'une figure, déjà employée par les anciens, n'a pas dans la science toute la place qu'elle mérite. Heureusement de récents travaux sont venus rappeler et augmenter l'intérêt qui s'attache à ces questions, et prouver que l'étude du déplacement d'une figure invariable peut conduire les géomètres habiles aux résultats les plus dignes d'interêt.

C'est dans le *Bulletin des sciences mathématiques* du baron de Férussac (t. XIV, p. 321-326; 1830) qu'ont paru, croyons-nous, les

(*) Voir *Bulletin*, p. 269.

premiers travaux de M. Chasles sur cette question. C'est dans cette Note que l'auteur donne les propriétés, maintenant bien connues, du centre de rotation. Passant ensuite au déplacement d'une figure dans l'espace, M. Chasles énonce cette proposition fondamentale, que :

Tout déplacement fini d'un corps dans l'espace peut s'effectuer par le mouvement d'une vis dans son écrou.

Cette propriété, à laquelle parvient aussi Poinsot, dans son *Mémoire sur la théorie de la rotation des corps* (*) était ignorée, mais n'était pas nouvelle; c'était, à proprement parler, un théorème retrouvé. Dans une *Notice historique* sur le déplacement d'une figure de forme invariable (**), M. Chasles indique le titre d'un ouvrage italien : *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Florence, 1763), dû à *Giulio Mozzi,* et dans lequel se trouve énoncée la proposition relative au déplacement hélicoïdal. Mais c'est dans un Mémoire de 1843, inséré aux *Comptes rendus* (***), que M. Chasles a donné les propriétés les plus importantes, celles qui sont relatives aux foyers et aux caractéristiques des plans. Définissons d'abord ces éléments géométriques.

Si, dans un déplacement du corps solide, on considère les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan, ces plans normaux passent tous par un point fixe du plan. Ce point fixe s'appelle le *foyer du plan.* C'est le seul point dans le plan dont la trajectoire soit normale au plan.

La *caractéristique* du plan est une droite définie par la propriété suivante. Elle est le lieu des points dont les trajectoires sont tangentes au plan, mais elle n'est pas tangente aux trajectoires de tous ses points. Un seul de ses points, le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la caractéristique, jouit de cette propriété; sa trajectoire est tangente à la *caractéristique.*

Tous les plans passant par une droite D ont leurs foyers sur une droite Δ, et réciproquement, le lieu des foyers des plans passant par Δ est la droite D. Ces deux droites D, Δ sont appelées *droites conjuguées* ou *axes de rotation conjugués.*

Les propriétés des droites conjuguées sont très-nombreuses, elles

(*) *Journal de Liouville,* t. XVI, p. 9; 1851.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LII, p. 487-501.

(***) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XVI, p. 1420-1432.

ont été étudiées par M. Chasles. Deux des plus utiles et des plus importantes sont les suivantes :

Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées est normale aux trajectoires de tous ses points ;

On peut effectuer le déplacement infiniment petit de la figure par deux rotations successives autour de deux axes conjugués ;

Deux couples de droites conjuguées sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, etc., etc.

Ces propriétés sont celles dont M. Mannheim a fait surtout usage dans son Mémoire ; aussi les avons-nous remises de préférence sous les yeux de nos lecteurs.

Enfin M. Chasles a publié en 1861 (*) un *Mémoire* sur les propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. C'est à la fin de ce Mémoire qu'est placée une *Notice historique sur la question du déplacement d'une figure de forme invariable,* qui nous dispense d'entrer dans un examen historique plus complet de la question du déplacement d'un corps solide.

Le travail de M. Mannheim fait suite aux Mémoires précédents ; mais l'auteur a surtout traité un problème négligé par presque tous les géomètres qui ont écrit sur la question. Son but n'a pas été de donner seulement des propriétés nouvelles du déplacement d'un corps solide. M. Mannheim considérant, non plus un corps solide, mais une figure assujettie, dans son déplacement, à des conditions très-diverses, s'est proposé de donner une méthode pour construire les normales aux trajectoires, de même que M. Chasles avait déduit, de l'étude du mouvement dans le plan, un moyen nouveau et important de construire, par la géométrie, les tangentes à un grand nombre de courbes remarquables.

Dans la résolution de ce problème, une première difficulté se présentait, qui pouvait rendre la solution très-longue et très-pénible. Les conditions auxquelles on peut assujettir une figure dans son déplacement sont très-variées : comment les considérer toutes et ramener la solution à un principe uniforme ? C'est une difficulté que M. Mannheim écarte d'abord d'une manière très-ingénieuse. Voici

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences :* t. LI, p. 855-863, 905-914 ; t. LII, p. 77-85, 189-197 et 487-501.

les principales conditions descriptives qu'on rencontre dans les problèmes :

1° Un point a de la figure mobile est assujetti à rester sur une surface fixe A, ou, inversement, une surface B de la figure mobile doit toujours passer par un point b;

2° Une courbe C de la figure mobile est assujettie à toucher une surface S, ou inversement;

3° Une courbe C doit rencontrer une courbe fixe M;

4° Une surface S est assujettie à toucher une surface S'.

Il faut cinq conditions de cette nature pour définir et diriger le déplacement d'un corps solide. M. Mannheim substitue à chacune de ces conditions simples une condition unique : *un point doit rester sur une surface,* et, dès lors, le seul problème à traiter est le suivant :

Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° *le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile;* 2° *la normale en un point arbitraire de la surface engendrée par une courbe quelconque;* 3° *la ligne suivant laquelle une surface entraînée touche son enveloppe;* 4° *l'axe du déplacement de la figure mobile;* 5° *le pas réduit des hélices infiniment petites décrites.*

A cet effet, soient A, B, C, E, K les surfaces données, et soient a, b, c, e, k les cinq points de la figure mobile assujettis à rester sur les cinq surfaces. Si l'on construit les deux droites qui s'appuient sur quatre des normales en quatre des points a, b, c, e, k, ces deux droites seront des *droites conjuguées.* On pourra ainsi obtenir, avec les cinq combinaisons quatre à quatre des normales, cinq couples de droites conjuguées.

Cela posé, soit i le point dont on demande le plan normal. De ce point menons une droite rencontrant deux droites conjuguées : cette droite est normale à la trajectoire de tous ses points, et en particulier à celle du point i; elle fait donc partie du plan normal cherché; en considérant les quatre autres couples de droites conjuguées, on déterminera le plan normal par cinq droites, correspondant aux cinq couples de droites conjuguées; on retrouve ainsi un théorème dû à M. Sylvester (*).

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1861, t. LII, p. 742.

Après la résolution de ce premier problème, le savant professeur à l'École Polytechnique aborde une question d'une tout autre nature, mais non moins intéressante. Supposons que le corps solide soit assujetti dans son déplacement à quatre conditions seulement. Alors il pourra recevoir une infinité de déplacements dans des sens différents, compatibles avec ces conditions. Les points seront assujettis à rester, non plus sur une courbe, mais sur une surface. Il y a donc lieu de se proposer le problème suivant :

Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° la normale à la surface sur laquelle se déplace nécessairement, en général, un point de la figure mobile; 2° les points où une surface entraînée touche le lieu de ses intersections successives.

La solution est donnée par le théorème suivant :

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales issues de tous les points de la figure aux surfaces trajectoires de ces points rencontrent deux mêmes droites.

A ce théorème, M. Mannheim ajoute beaucoup d'autres propriétés, que le défaut d'espace nous empêche seul de signaler.

Le Mémoire contient, après ces propositions générales, une série d'applications au déplacement d'une droite, d'un dièdre, d'un trièdre et d'une surface, applications dont nous allons dire quelques mots.

Dans l'étude sur les surfaces réglées et le déplacement d'une droite sont abordés plusieurs problèmes, parmi lesquels nous citerons le suivant :

Recherche de la normale en un point d'une surface gauche, engendrée par une droite assujettie à des conditions multiples.

Une droite G *se déplace en restant surosculatrice d'une surface donnée* A; *construire en un point quelconque de cette droite la normale à la surface* G *qu'elle engendre, et le plan normal en un point de la courbe de contact de* G *et de* A.

Ce Mémoire se termine par une étude sur les conditions multiples, auxquelles on peut assujettir un corps solide, et sur l'hélicoïde réglé. Cette étude très-simple d'une surface remarquable a déjà pris place dans l'enseignement de l'École Polytechnique.

Nous ne devons pas terminer ce trop court article, sans signaler un très-important Rapport que M. Chasles a consacré au Mémoire de M. Mannheim. A la suite de ce Rapport (*), l'Académie a ordonné l'insertion du Mémoire précédent dans le tome XX du *Recueil des Savants étrangers*. G. D.

KLINKERFUES (Dr W.), Professor, Director der Königl. Sternwarte zu Göttingen. — THEORETISCHE ASTRONOMIE. *Erste Abtheilung.* — Braunschweig; Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1871.

Après l'apparition récente des ouvrages de Watson et d'Oppolzer (**) sur l'astronomie théorique, nous avons aujourd'hui à signaler un nouveau travail sur le même sujet, ce qui montre jusqu'à quel point se faisait sentir le manque d'un livre qui résumât sous une forme commode les nombreux travaux épars dont la science astronomique s'est enrichie dans ces dix dernières années au point de vue théorique, et qui rendît ces travaux accessibles à un plus grand nombre de lecteurs. Comme le traité d'Oppolzer, celui que nous avons sous les yeux n'est pas encore un ouvrage complet, mais seulement le premier des deux volumes, dont l'ensemble doit comprendre tout ce qui peut servir à la détermination des orbites des corps qui se meuvent suivant des sections coniques autour d'un centre commun d'attraction. Le volume qui vient de paraître se compose de quatre sections :

I. Calcul des éphémérides, les orbites étant connues;

II. Calcul d'une orbite circulaire au moyen de deux observations;

III. Calcul d'une orbite de comète au moyen de trois observations;

IV. Calcul d'une orbite elliptique (de planète) au moyen de trois observations.

Le second volume contiendra, outre la suite de la section IV, les cinq sections suivantes :

V. Calcul d'une orbite elliptique au moyen de quatre observations;

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 591.

(**) Voir *Bulletin*, p. 201.

VI. Calcul d'une orbite au moyen d'un plus grand nombre d'observations, d'après la méthode des moindres carrés;

VII. Calcul des orbites des étoiles doubles;

VIII. Calcul des orbites des météorites;

IX. Tables et vérifications.

L'ouvrage est rédigé par leçons, forme très-avantageuse pour l'usage du livre dans l'enseignement et pour l'étude personnelle. Nous espérons voir s'accomplir le vœu exprimé par l'auteur, que son livre engage un plus grand nombre de personnes à se livrer à l'astronomie théorique, et un traité écrit avec la clarté qui distingue celui-ci ne contribuera pas peu à cet heureux résultat.

(Extrait des *Astronomische Nachrichten*, t. LXXVII, n° 1830.)

HESSE (Otto), ordentl. Professor an dem K. Polytechnicum zu München. — Die Determinanten, elementar behandelt. — Leipzig; Druck und Verlag von B.-G. Teubner, 1871 (*).

Cet opuscule a été composé par l'auteur à l'occasion d'un arrêté ministériel du 5 octobre 1870, prescrivant l'étude des déterminants dans les six colléges scientifiques (*Real-Gymnasien*) du royaume de Bavière.

Le premier chapitre, intitulé *Équations linéaires*, signale d'abord les inconvénients de la méthode ancienne de résolution de ces équations par éliminations successives. En premier lieu, on ne parvient à connaître la composition des deux termes de la valeur de chaque inconnue qu'après avoir effectué complétement de longs et pénibles calculs. Ensuite cette méthode ne donne pas immédiatement les résultats sous la forme la plus simple, les deux termes de la fraction se présentant affectés d'un facteur commun, dont le degré croît rapidement avec le nombre des équations et des inconnues. Enfin cette méthode a le défaut de ne pas permettre de traiter symétriquement les équations.

On écarte ce dernier inconvénient par la méthode des multiplicateurs indéterminés, employée déjà par Bézout au siècle dernier, et par laquelle on élimine toutes les inconnues à la fois, excepté une

---

(*) Hesse (O.) — *Traité élémentaire des Déterminants.* — Leipzig, B.-G. Teubner. Brochure in-8°, 46 pages. Prix : ½ thaler.

seule, en ramenant le problème à la résolution d'un nombre d'équations moindre d'une unité.

L'auteur expose les liaisons qui existent entre deux systèmes d'équations linéaires dans lesquels les lignes verticales des coefficients de l'un seraient les lignes horizontales des coefficients de l'autre.

Il donne ensuite les expressions des numérateurs et du dénominateur commun des valeurs des inconnues sous forme de produits symboliques.

Le second chapitre traite des *Fonctions alternées*, dont le type est le produit formé avec toutes les différences deux à deux de $n+1$ éléments. La considération de ce produit, qui, pris dans le sens symbolique, par le changement des exposants en indices, représente précisément les termes des valeurs des inconnues dans la résolution de $n+1$ équations linéaires, fait connaître déjà les propriétés essentielles des *déterminants*, dont l'étude fait l'objet du troisième et dernier chapitre.

Dans ce chapitre, l'auteur expose les propriétés connues, au point de vue purement théorique, et sans indiquer d'applications. La notation qu'il emploie est celle de Jacobi, qui consiste à placer les deux indices de chaque élément l'un en bas, l'autre en haut de la lettre, ce qui nous paraît préférable, sous plusieurs rapports, au mode plus généralement adopté, suivant lequel les deux indices sont placés au bas de la lettre.