BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 265-273

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__265_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

FORTI (Dott. A.), professore titolare di Matematiche al R. Liceo Galilei, e di Matematiche e Meccanica alle Scuole Tecniche comunali di Pisa, ecc. — TAVOLE DEI LOGARITMI DE' NUMERI E DELLE FUNZIONI CIRCOLARI ED IPERBOLICHE; *precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente.* — Torino, Firenze e Milano, G.-B. Paravia e Comp., 1870. 2 vol. in-16 (270-576 p.). Prix : 8 fr.

L'ouvrage que nous annonçons est une seconde édition, considérablement augmentée, du volume publié par le même auteur dans les *Annali delle Università toscane* (*). Ce volume ne contenait que la Table des logarithmes des fonctions circulaires et hyperboliques, avec cinq décimales seulement. C'était le premier essai qui eût été fait hors d'Allemagne pour propager l'usage pratique de ces combinaisons d'exponentielles réelles connues depuis plus d'un siècle (**) sous le nom général de *fonctions hyperboliques,* et que l'on a distinguées par des noms particuliers rappelant leur analogie avec les fonctions circulaires formées suivant les mêmes lois au moyen d'exponentielles imaginaires

L'introduction de ces fonctions, ou, si l'on veut, de ces notations dans l'analyse offre l'immense avantage de conserver la même forme à des résultats qui ne diffèrent entre eux que par la réalité ou l'imaginarité de certaines quantités, et de permettre de traiter uniformément les divers cas que présente une même formule, au lieu de distinguer entre les valeurs circulaires et les valeurs logarithmiques. La similitude qui existe, à quelques changements de signes près, entre les formules relatives aux fonctions circulaires et aux fonctions hyperboliques fournit le moyen d'effectuer à l'aide de celles-ci les mêmes transformations qu'avec les premières, et d'opérer ainsi des simplifications importantes dans les calculs.

Les premiers auteurs de Tables de fonctions hyperboliques, Lam-

(*) T. VI, 1863. Pisa. In-4°.

(**) *Voir* le *Cours de Mathématiques* de l'abbé SAURI. Paris, 1774.

bert (*), Gudermann (**), Gronau (***) ont ramené ces Tables à celles des fonctions circulaires, en profitant de la propriété qu'ont les fonctions hyperboliques d'avoir les mêmes valeurs, mais dans un autre ordre, que les fonctions circulaires d'un certain angle τ, que Lambert a proposé d'appeler l'*angle transcendant* de l'argument hyperbolique, et qui est lié à cet argument ω par les formules

$$\tau = 2 \operatorname{arc\,tang} e^{\omega} - \frac{\pi}{4}, \quad \sin\tau = \operatorname{tangh}\omega, \quad \operatorname{séc}\tau = \cosh\omega, \quad \operatorname{tang}\tau = \sinh\omega.$$

Dès lors, il suffit, pour obtenir une Table complète des fonctions hyperboliques, d'accoler à l'argument τ d'une Table trigonométrique ordinaire la valeur correspondante de la fonction

$$\omega = \log \operatorname{nat} \operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

dont τ est l'angle transcendant.

Ce mode de construction des Tables est non-seulement le plus simple à réaliser, mais encore, suivant notre conviction intime, c'est de beaucoup le plus commode pour la pratique des calculs numériques. M. Gronau, au lieu de l'argument ω lui-même, ou du logarithme *naturel* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, a eu l'heureuse idée d'introduire le produit de ω par le module des logarithmes décimaux, c'est-à-dire le logarithme *vulgaire* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; de sorte que la colonne additionnelle peut être tirée de la Table trigonométrique elle-même; et, de plus, cette disposition facilite extrêmement le calcul des fonctions hyperboliques pour de grandes valeurs de l'argument, c'est-à-dire dans le voisinage de $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Dans la seconde édition de son ouvrage comme dans la première, M. Forti a préféré suivre une autre voie, celle que lui avait tracée son illustre maître, Mossotti; il a pris pour point de départ une définition géométrique qu'il regarde comme plus simple et plus

(*) *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen.* Berlin, 1770. In-12.

(**) *Theorie der Potenzial- oder Cyklisch-hyperbolischen Functionen.* Berlin, 1833. In-4°.

(***) *Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren.* Danzig, 1863. Grand in-8°.

naturelle que celle qui correspond à la conception analytique de Lambert. Considérons une hyperbole équilatère de demi-axe transverse $= 1$ et un cercle concentrique ayant ce demi-axe pour rayon. Un rayon faisant avec l'axe un angle φ, déterminera avec le cercle et avec l'hyperbole deux secteurs dont les aires seront $\frac{1}{2}\varphi$ et $\frac{1}{2}\omega$. Au lieu de l'angle φ, on peut donc considérer l'argument des fonctions circulaires qui représentent les coordonnées du cercle comme exprimant l'aire du *double secteur circulaire*. Par analogie, on considérera les coordonnées du point où l'hyperbole est rencontrée par le même rayon vecteur comme des fonctions du *double secteur hyperbolique* ω, et l'on trouvera aisément que les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée sont exprimées par les formules

$$\cosh\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad \sinh\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}.$$

Les *doubles secteurs*, circulaire et hyperbolique, φ et ω sont liés par la relation

$$\operatorname{tangh}\omega = \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang} e^{2\omega} - \frac{\pi}{4},$$

$$\cosh\omega = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \sinh\omega = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

ω varie de 0 à ∞, en même temps que φ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Ces relations sont, comme on le voit, moins simples que celles qui se rapportent à l'angle τ de Lambert.

Les nouvelles Tables que M. Forti a construites d'après ce système diffèrent des anciennes en ce qu'elles contiennent sept décimales au lieu de cinq, et aussi par quelques détails de disposition. Chaque ensemble de deux pages en regard comprend, à gauche, la Table trigonométrique proprement dite, disposée à la manière ordinaire; à droite, la Table des fonctions hyperboliques. Cette dernière se compose de cinq colonnes, dont les deux premières donnent, pour chaque valeur de $\varphi < 45°$, le *double secteur hyperbolique* correspondant ω et son logarithme; les deux colonnes suivantes contiennent les logarithmes du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique de ω; la cinquième, enfin, renferme les valeurs de l'*angle transcendant* τ avec l'approximation nécessaire pour en calculer les fonctions trigonométriques avec cinq décimales.

Pour rendre l'interpolation toujours possible, l'auteur a dû diminuer les intervalles de l'argument φ vers les deux extrémités de la Table. Ainsi pour les valeurs de φ, de $0^\circ 0'$ à $0^\circ 12'$ et de $44^\circ 55'$ à $45^\circ 0'$, la Table procède de seconde en seconde; de 0° à 5° et de $40^\circ 0'$ à $44^\circ 55'$, de 10 en 10 secondes; dans le reste du demi-quadrant, de minute en minute. Cela n'empêche pas le calcul des fonctions sinh et cosh d'être assez pénible pour les valeurs très-grandes de ω, tout au contraire de ce qui a lieu dans le système de M. Gronau.

Malgré ces inconvénients et quelques autres que nous pourrions signaler, mais à la plupart desquels un calculateur exercé peut remédier, du moins en partie, les Tables hyperboliques de M. Forti n'en sont pas moins précieuses, comme étant les plus étendues que l'on possède jusqu'à ce jour.

Outre cette partie principale, sur laquelle nous nous sommes étendu avec plus de détails, l'ouvrage de M. Forti comprend d'autres parties dont nous allons indiquer le contenu.

Le premier volume se divise en cinq Sections, dont la première (p. 1-32) présente un historique très-complet de la théorie des fonctions hyperboliques, de leurs principales applications et de leur réduction en Tables.

La deuxième Section (p. 33-52) contient les formules théoriques dont l'auteur s'est servi pour la construction de ses Tables.

Dans la troisième Section, M. Forti expose d'abord (p. 53-74) les principes de la Gnomonique. Il donne ensuite (p. 75-194) une série d'exemples très-bien choisis de l'application des fonctions circulaires et hyperboliques à un grand nombre de questions relatives à la géographie, à l'astronomie, à la physique mathématique, ainsi qu'à l'algèbre, à la trigonométrie, à la théorie des fonctions elliptiques.

La quatrième Section renferme les Tables des logarithmes d'addition et de soustraction à cinq décimales, précédées d'une Introduction qui en explique l'usage.

Enfin, la cinquième Section se compose de diverses Tables usuelles : parallaxe du soleil, réfractions atmosphériques, sinus des multiples de l'arc de 3 degrés, poids spécifiques, nombres de vibrations pour les divers tons, vitesse du son, chaleurs spécifiques, force élastique de la vapeur d'eau, indices de refraction

Outre les grandes Tables de fonctions circulaires et hyperboliques dont nous avons parlé en commençant, le second volume renferme une Table des logarithmes vulgaires des 10800 premiers nombres avec sept décimales.

On voit par cette analyse combien le Recueil de M. Forti est riche en précieux renseignements, que l'on trouverait difficilement ailleurs rassemblés sous une forme plus commode. Ajoutons que l'exécution typographique est très-satisfaisante, bien qu'il soit à regretter que l'auteur n'ait pas adopté le format in-8°, qui aurait diminué l'épaisseur un peu gênante du second volume, tout en permettant d'employer un caractère moins fin et moins fatigant pour la vue.

J. Hoüel.

JOURNAL de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. Quarante-troisième Cahier, t. XXVI, in-4°, 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs (*).

Rolland (E.). — *Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, solution rigoureuse du problème de l'isochronisme par les régulateurs à boules conjuguées, sans emploi de ressorts, ni de contre-poids variables; influence du moment d'inertie sur les oscillations à longue période.*

Voici le préambule de cet important travail :

« Convaincu par une longue expérience de l'insuffisance des règles données jusqu'ici aux constructeurs pour assurer la transmission régulière du travail dans les machines, je me suis livré, sur la question si délicate de la réglementation de leur vitesse, à des études approfondies dont je me propose d'exposer successivement les résultats. Mais en attendant qu'il me soit possible de le faire avec les développements convenables, j'ai pensé devoir en extraire une partie essentielle et particulièrement intéressante pour les applications pratiques. Tel est le but du présent Mémoire.

« On admet, en général, que la sensibilité d'un régulateur est caractérisée par la quantité à laquelle on donne le nom d'*écart propor-*

(*) Le *Journal de l'École Polytechnique* paraît à intervalles indéterminés.

tionnel de la vitesse, quantité égale à une fraction dont le numérateur est la différence des vitesses extrêmes sous l'action desquelles l'appareil peut rester en équilibre, et dont le dénominateur est le double de la vitesse de règle, ou, plus exactement, la somme des vitesses extrêmes.

» En cherchant la valeur analytique de cet *écart proportionnel* pour un dispositif quelconque de la famille des régulateurs, on trouve qu'elle est la somme de deux quantités, dont la première est indépendante des résistances passives du système et dont la seconde est, au contraire, proportionnelle à leur résultante.

» Les résistances passives agissent toujours en sens inverse du mouvement; cette seconde quantité ne peut jamais être annulée : il est possible seulement de la rendre suffisamment petite. Mais il n'en est plus de même pour la première, et rien ne s'oppose à ce qu'elle soit égale à zéro, en disposant convenablement les diverses parties du mécanisme.

» Les régulateurs dans lesquels cette annulation a été réalisée sont ceux auxquels nous donnerons, avec Léon Foucault, la qualification d'*isochrones*. Ils sont doués, sous la rapport de la sensibilité, de qualités analogues à celles d'une balance dont le centre de gravité coïnciderait avec celui de rotation, et, par ce motif, leur réalisation a été le but des efforts d'un grand nombre d'inventeurs (*). »

HATON DE LA GOUPILLIÈRE (J.-N.). — *Recherches sur les centres de gravité.*

« Ce travail est consacré à l'étude du centre de gravité dans des conditions nouvelles. Il comprend deux parties distinctes. Dans la première, je me propose la détermination du centre dans des cas qui échapperaient complétement aux anciennes méthodes par la complication inabordable des intégrations. L'artifice fondamental consiste dans l'emploi des variables d'Euler pour représenter les courbes au moyen d'une équation entre la longueur de l'arc et l'angle de contingence. On arrive ainsi à traiter avec facilité un grand nombre de

(*) M. Delaunay, dans un Rapport sur ce Mémoire présenté à l'Académie, a conclu de la manière suivante, le 23 mars 1868 :

« En résumé, le Mémoire de M. Rolland renferme une excellente étude de la question des régulateurs isochrones et fait connaître plusieurs solutions nouvelles, à la fois nettes et simples, de cette intéressante question. Nous proposons à l'Académie d'ordonner l'insertion de ce Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

questions générales, par exemple le cas des arcs de courbe homogènes, ceux dont la densité varie en raison de la courbure et auxquels les théorèmes de Steiner, de Raabe et de Wetzig donnent beaucoup d'intérêt, les surfaces de révolution, les troncs de cylindre, etc. L'application que j'ai eue particulièrement en vue concerne les épicycloïdes, dont le centre de gravité donne lieu à plusieurs propriétés curieuses.

» La seconde partie comprend des recherches barocentriques inverses, dans lesquelles il s'agit de déterminer la figure elle-même, courbe ou surface, d'après des propriétés imposées à l'avance à son centre de gravité; non des propriétés de maximum comme celles que l'on a déjà résolues par le calcul des variations, mais des relations entre les coordonnées terminales du corps et celles de son centre de gravité. »

Maurice Levy. — *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales et en particulier sur celles qui comprennent une famille quelconque de surfaces du second degré.*

L'auteur débute par la démonstration géométrique d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système triplement orthogonal. On sait, en effet (c'est M. Bouquet qui a le premier attiré l'attention sur ce point), qu'une famille de surfaces définie par l'équation $\alpha = \varphi(x, y, z)$ n'est pas nécessairement une des trois familles d'un système triplement orthogonal. M. Bouquet a mis ce fait en évidence en montrant que les surfaces particulières dont l'équation est

$$\alpha = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \mathrm{Z},$$

ne font partie d'un système orthogonal que si X, Y, Z satisfont à certaines conditions (*). M. Darboux, dans un travail inséré au tome III des *Annales de l'École Normale supérieure*, avait montré que, pour que les surfaces $\alpha = \varphi(x, y, z)$ fassent partie d'un système orthogonal, il *faut* et il *suffit* que α satisfasse à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Quand cette condition est remplie, les deux autres systèmes s'obtiennent par l'intégration d'une équation de la forme

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}\,dz = 0.$$

(*) *Journal de M. Liouville*, t. XI, 1re série.

Déjà, il est vrai, en 1862, M. Bonnet avait réalisé le progrès le plus important et ramené la solution du problème à l'intégration d'une équation aux différences partielles du troisième ordre. Il avait ainsi indiqué nettement et précisé l'ordre de difficulté de la question, mais sa méthode exigeait encore l'intégration de plusieurs équations simultanées du second ordre auxquelles doit satisfaire une fonction de trois variables.

M. Levy examine successivement les familles de surfaces moulures, de surfaces de révolution, de cônes, de cylindres, etc.

Après avoir étudié tous ces systèmes particuliers, M. Levy donne le théorème suivant :

« Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système triplement orthogonal, il est nécessaire que la ligne des ombilics de cette famille soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui la composent. »

M. Levy recherche ensuite les systèmes orthogonaux formés de surfaces du second degré, et il montre que, dans ce cas, le théorème précédent donne une condition non-seulement nécessaire, mais suffisante. Le travail se termine par diverses applications et une généralisation de la méthode employée.

Tissot (A.). — *Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.*

Ce Mémoire très-élégant a pour objet l'intégration des transcendantes de la forme $e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}}$.

« Dans les six premiers paragraphes, on suppose que $f(x)$ et X sont des fonctions entières, et l'on donne la forme que doit affecter l'intégrale lorsqu'elle existe sous forme finie, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de l'exprimer à l'aide des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques, auxquelles il est inutile de joindre les fonctions circulaires directes ou inverses, puisque ces dernières ne sont autre chose que des logarithmes ou des exponentielles d'imaginaires. Cette forme une fois trouvée, il suffit, pour obtenir la valeur de l'intégrale et appliquer à un polynôme de degré connu la méthode des coefficients indéterminés. Le mode d'analyse dont nous avons fait usage pour traiter cette première question a été emprunté à un Mémoire de M. Liouville sur les intégrales dont la valeur est algébrique (*).

Dans le cinquième paragraphe, on démontre que, si l'intégrale proposée existe sous forme finie, elle s'annule quand on la prend entre deux limites respectivement égales à $-\infty$ et à l'une des racines de l'équation $X = 0$.

Dans le sixième, on considère le cas où $f(x)$ serait une fonction rationnelle non entière et celui où l'expression proposée ne contiendrait plus de radical.

Dans les trois suivants, on donne un autre procédé pour reconnaître si la valeur de l'intégrale $\int e^x \frac{f(x)dx}{\sqrt[n]{X}}$ existe sous forme finie, et pour trouver alors sa valeur. Ce procédé repose sur l'emploi de formules qui permettent de la décomposer en deux parties, dont l'une est une fonction connue de X, et dont l'autre est une intégrale qui n'existe jamais sous forme finie, de sorte que l'on a simplement à constater si la dérivée de cette dernière est ou non identiquement nulle.

Enfin, il importait de démontrer que les conditions données comme nécessaires dans le cinquième paragraphe pour l'existence de l'intégrale sous forme finie sont aussi suffisantes. C'est à quoi l'on parvient, en remarquant que les diverses transcendantes que l'on produirait en faisant varier le degré de $f(x)$ dans $\int e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}} dx$ dépendent linéairement d'un certain nombre d'entre elles, et en formant les équations différentielles linéaires dont ces dernières permettent de trouver les solutions générales. Pour obtenir ces équations différentielles, nous n'avons eu qu'à imiter un procédé déjà employé par M. Hermite à propos des intégrales abéliennes (**).

La démonstration exige aussi que l'on établisse, entre certaines intégrales définies, une relation analogue à celle que fournit le théorème de Legendre sur les intégrales elliptiques de premiere et de seconde espèce à modules complémentaires; mais, sur ce sujet, nous pouvons renvoyer à une Note que nous avons publiée ultérieurement (***). »

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII^e Cahier.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1^er semestre 1844.

(***) *Journal de M. Liouville*, 2^e série, t. XVII.