BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 1 (1870), p. 105-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1870__1__105_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

VALSON (C.-A.), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble. — LA VIE ET LES TRAVAUX DU BARON CAUCHY, membre de l'Académie des Sciences; avec une Préface de M. HERMITE, membre de l'Académie des Sciences. — 2 vol. in-8; 1868. Paris, Gauthiers-Villars. Prix : 8 francs.

Le premier volume de M. Valson raconte, avec de minutieux détails, la vie de l'illustre géomètre, considéré comme chrétien fervent plus encore que comme savant. Nous nous proposons ici de rendre compte du second, spécialement consacré à l'œuvre scientifique de Cauchy. En présence de sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires relatifs aux théories les plus diverses incessamment abordées, abandonnées et reprises, M. Valson a renoncé à la tâche de tout analyser, même sommairement, mais il a tout énuméré et tout classé ; nous ne pouvons avoir la prétention d'en faire autant, et nous nous bornerons à signaler les traits principaux de l'Œuvre dont l'importance, qui grandit chaque jour, assure à Cauchy l'un des plus grands noms que puisse citer l'histoire des Mathématiques.

Augustin-Louis Cauchy, né à Paris, le 21 août 1789, entra à l'École Polytechnique à l'âge de seize ans. Quatre ans plus tard, en 1811, il débutait avec éclat dans la science par la solution aussi simple qu'élégante d'une question proposée par Poinsot. Tout en rendant justice au consciencieux et utile travail de M. Valson, je dois signaler l'absence regrettable du nom de l'illustre géomètre dans l'analyse de ce premier Mémoire, aussi bien que dans le récit des circonstances qui s'y rapportent. Poinsot et Cauchy ne s'aimaient pas; leurs contemporains ne l'ont pas ignoré. Candidats tous deux à la succession de Lagrange dans la Section de Géométrie, ils étaient dignes l'un et l'autre d'un tel héritage. Ampère, dont le nom est resté tout au moins l'égal de celui de Cauchy, était au nombre des concurrents, et l'échec du jeune géomètre, âgé alors de vingt-quatre ans, n'autorisait nullement son trop enthousiaste biographe à écrire : « S'il ne fut pas nommé, c'est qu'au scrutin des considérations d'un autre ordre furent mises en balance avec le mérite. » La question ne vaut pas qu'on l'étudie; mais, en se reportant en 1813, pour comparer les travaux publiés par Cauchy à ceux de Poinsot et d'Ampère, âgés, l'un de trente-quatre ans, l'autre de trente-huit, il semble qu'un jugement équitable pouvait alors les préférer tous deux à leur jeune et brillant concurrent.

La Section, il est vrai, plaçait au premier rang un quatrième candidat; mais à quoi bon le rappeler? L'histoire des méprises académiques est un lieu commun inépuisable qui n'étonne plus maintenant et n'instruit personne. Quoi qu'il en soit, je ne rattache nullement à l'avantage obtenu par Poinsot l'inexplicable absence de son nom dans le livre de M. Valson. Poinsot avait fait en Géométrie une découverte véritable, celle de quatre nouveaux polyèdres réguliers; il s'était demandé s'il en existe d'autres, et le Mémoire présenté par Cauchy à la première Classe de l'Institut était la réponse à cette question.

« Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe, disait le jeune auteur, contient diverses recherches sur la Géométrie des solides; la première partie offre la solution de la question proposée par M. Poinsot sur le nombre des polyèdres réguliers que l'on peut construire. »

Le doute n'est donc pas possible, et l'histoire de la question n'exigeait aucune érudition.

Cauchy, dans son premier Mémoire, montrait d'éminentes qualités devenues chez lui de plus en plus rares. La forme est aussi excellente que le fond, et la rigueur des raisonnements semble s'allier sans effort à la plus lumineuse clarté. Les deux Mémoires de 1811 et de 1812, sur la théorie des polyèdres et les premières études sur le nombre des valeurs d'une fonction montrent que Cauchy, en arrêtant plus longtemps son esprit sur chacune de ses découvertes, aurait pu, s'il l'eût voulu, leur imprimer ce cachet de perfection définitive que, trop souvent depuis, il n'a pas eu le loisir de chercher. C'est par sa grande hâte de produire que Cauchy a été si loin de mériter l'éloge que lui décerne cependant M. Valson :

« Il ne quittait pas un sujet avant de l'avoir complétement approfondi et élucidé, de manière à satisfaire les exigences des esprits les plus difficiles. »

S'il est un nom illustre dans l'histoire de la science, auquel cette louange ne soit pas applicable, c'est, sans contredit, celui de Cauchy, et, lorsque l'on peut louer en lui tant de rares et exceptionnels mérites, c'est un tort véritable envers sa mémoire de citer précisément celui qui, de l'aveu de tous et évidemment par sa faute, lui a complétement fait défaut.

La théorie des intégrales doubles, et leur application à la recherche des intégrales définies, fut pour Cauchy l'occasion d'un succès plus brillant encore, et, pour les géomètres les plus illustres, l'objet d'un véritable étonnement.

Une intégrale simple ou double est la limite d'une somme d'éléments infiniment petits, et les géomètres jusqu'alors, si l'on en excepte l'illustre Gauss, admettaient que, sans en changer la valeur, on peut intervertir les opérations et ajouter les mêmes éléments dans un autre ordre.

Il faut exclure le cas où certains éléments deviennent infinis. Gauss, dans un beau Mémoire, avait remarqué que, réciproquement, quand l'ordre des intégrations change la valeur d'une intégrale double, l'élément intégré devient nécessairement infini. Cauchy, conduit par ses propres recherches au même résultat, en a su déduire des conséquences plus importantes et plus précises. Non content d'affirmer que l'ordre des intégrations peut influer sur la valeur d'une intégrale, il calcule dans un cas étendu la différence des deux résultats, et, par un de ces artifices élégants qui, chez lui, semblent naturels, en déduit, pour le calcul des intégrales définies, la méthode la plus ingénieuse et la plus féconde qui eût été donnée jusque-là.

Legendre s'est montré strictement et un peu sèchement juste lorsque, en rendant compte de ce beau Mémoire, il écrivit :

« Nous n'examinons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pourraient donner les méthodes connues ; car, quand même on répondrait négativement à ces questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite :

» 1° D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite de formules propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination ;

» 2° D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double prise entre des limites données pour chaque variable n'offre pas toujours le même résultat dans les deux manières d'effectuer les intégrations ;

» 3° D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte au moyen des intégrales singulières, dont l'idée appartient à l'auteur et qui peuvent être regardées comme une découverte en Analyse;

» 4° Enfin d'avoir donné par ses méthodes de nouvelles formules intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des formules connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

» Il nous paraît, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné, dans ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve de la sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productions. »

Legendre aurait pu, sans exagération, hausser de plusieurs tons la note de ses louanges. En signalant une erreur commise jusque-là par les maîtres de la science, Cauchy avait fait preuve de sagacité; mais, en cherchant et trouvant l'expression précise de l'erreur, en poussant à bout les conséquences de cette remarque, en se rendant maître d'un sujet aussi délicat sans en restreindre la généralité, en y rattachant enfin tant de conséquences éloignées et imprévues, il prenait rang, à l'âge de vingt-trois ans, parmi les géomètres inventifs de son époque. Les Commissaires de l'Académie auraient pu le proclamer plus nettement.

L'idée absolument nouvelle contenue dans le Mémoire sur les intégrales doubles devait être mise dans tout son jour par les écrits ultérieurs de l'illustre analyste; elle forme, pour ainsi dire, le motif dominant et le ressort aussi simple que précieux de ses plus admirables découvertes.

En étudiant les intégrales doubles, Cauchy avait aperçu le rôle considérable des valeurs infinies d'une fonction. La suite des mêmes idées appliquées à la recherche des intégrales imaginaires devait bientôt après lui fournir la remarque la plus importante peut-être aux progrès de la science analytique. La définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires, sa valeur indépendante de la route suivant laquelle on intègre, son changement brusque lorsque cette route franchit certains points pour lesquels la fonction devient infinie ou mal déterminée, les conséquences relatives au calcul des intégrales définies, aux racines des équations, au développement en séries et à la périodicité des intégrales, forment une longue chaîne de vérités nouvelles que l'on ne saurait trop admirer, et dont il faut renoncer à louer dignement la découverte; aucun géomètre, à aucune époque, n'a fait faire à l'Analyse pure un progrès plus considérable.

Cette grande théorie n'est pas née tout d'un coup : qui pourrait s'en étonner? Elle s'est lentement ordonnée et développée dans l'esprit de l'illustre inventeur, et je reproche à M. Valson de n'en pas avoir suffisamment marqué les phases et signalé le progrès. Les premiers Mémoires contiennent des imperfections et des inexactitudes, corrigées plus tard par Cauchy lui-même. Les fonctions imaginaires n'y sont pas distinctement définies, et l'intervention de leurs valeurs multiples semble n'y jouer aucun rôle. Sans rien enlever à la gloire de Cauchy, cela importe au lecteur, que l'admiration uniforme de M. Valson ne saurait guider. J'ajouterai que les indications du savant auteur sont parfois entachées de graves inexactitudes et de singulières inadvertances. La définitition du *résidu*, ce fondement de tant de travaux de Cauchy, n'est pas exacte. Quand une fonction $f(x)$ devient infinie pour la valeur $x = a$, a est racine de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, et, si le degré de multiplicité de cette racine est m, le produit $(x - a)^m f(x)$ a pour $x = a$ une valeur finie. En la nommant C on peut, pour les valeurs de x voisines de a, assimiler la fonction $f(x)$ à $\frac{C}{(x-a)^m}$; l'erreur commise sera infiniment petite par rapport à la grandeur évaluée; mais cette substitution, qui semble si naturelle, est absolument inféconde; Cauchy a donné, en s'en apercevant, une grande preuve de pénétration, et le *résidu*, qui joue un si grand rôle, n'est pas, comme le dit M. Valson, la valeur de la constante C. Le calcul des résidus, créé en apparence pour donner plus d'élégance et de simplicité aux résultats relatifs à la théorie des intégrales définies, s'applique avec grand avantage à toutes les parties de la science; Cauchy l'a introduit très-utilement dans l'étude des équations différentielles. Le rôle de Cauchy dans cette partie de la science, comme dans presque toutes ses branches d'ailleurs, est considérable. La théorie, si complétement étudiée avant lui, des équations linéaires à coefficients constants lui doit une forme nouvelle, dans laquelle le cas particulier où les racines de l'équation caractéristique deviennent égales est compris dans les mêmes formules que le cas général. J'attache, je l'avouerai, moins de prix que M. Valson à l'idée d'introduire dans les intégrales, pour remplacer les constantes arbitraires, les valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées. Si l'on veut, en effet, pousser les calculs jusqu'au bout, les opérations exigées par les diverses formules sont non-seulement équivalentes, mais identiques :

c'est par l'élégance seule de la forme que l'emportent les formules de Cauchy, et c'est le seul progrès en effet dont parût susceptible la solution d'un problème si bien étudié par ses devanciers.

Cauchy a étudié, à plusieurs reprises, des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants, et ses formules, remarquables par leur élégance et leur généralité, ont été pour lui l'occasion de ces transformations ingénieuses et imprévues dont il avait le secret. Le *Journal de l'École Polytechnique* contient un beau Mémoire de lui sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. En le mentionnant avec les louanges qu'il mérite, pourquoi ne pas rappeler le nom de Fourier, qui a découvert la formule sur laquelle il repose, et celui de Poisson, qui, dans un cas particulier, avait trouvé longtemps avant Cauchy le plus remarquable des résultats qui s'en déduisent?

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, la part de Cauchy est considérable, et l'un des progrès les plus importants lui est dû incontestablement. Mais Hamilton, à son tour, l'a devancé en lui inspirant de nouvelles recherches, dans lesquelles il a été moins heureux que Jacobi. De telles rencontres n'enlèvent rien à la gloire de Cauchy, mais il importe de les signaler, et, pour justifier entièrement son titre, une étude complète sur les travaux de Cauchy devrait être, à bien peu de chose près, l'histoire du progrès des Sciences mathématiques pendant quarante ans. M. Valson, dont le but paraît être de louer Cauchy plus encore que de le juger, pouvait, en élargissant sa tâche, lui décerner l'hommage le plus précieux et le plus juste à la fois. Poinsot et Poisson, Jacobi et Abel, Gauss et Dirichlet, ont été, comme Cauchy, les chefs et les modèles des géomètres contemporains, et leurs noms auraient pu briller à côté du sien sans que les avantages de détail obtenus souvent par chacun d'eux laissassent dans l'esprit du lecteur une impression d'infériorité. Le génie de Cauchy est digne de tous nos respects; mais pourquoi s'abstenir de rappeler que la trop grande abondance de ses travaux, en diminuant souvent leur précision, en a plus d'une fois caché la force? La dangereuse facilité d'une publicité immédiate a été pour Cauchy une tentation irrésistible et souvent un écueil. Son esprit, toujours en mouvement, apportait chaque semaine à l'Académie ses travaux à peine ébauchés, des projets de Mémoire et des tentatives parfois infructueuses, et, lors même qu'une brillante découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir. Prenons pour exemple la théorie des substitutions et du nombre de valeurs d'une fonction. A qui doit-elle ses plus grands progrès? A Cauchy sans aucun doute, et il est véritable que son nom, dans l'histoire de cette belle question, s'élève à une grande hauteur au-dessus de tous les autres. Mais, sur cette théorie qui lui doit tant, Cauchy a composé plus de vingt Mémoires. Deux d'entre eux sont des chefs-d'œuvre. Que dire des dix-huit autres? rien, sinon que l'auteur y cherche une voie nouvelle, la suit quelque temps, entrevoit la lumière, s'efforce inutilement de l'atteindre et quitte enfin, sans marquer aucun embarras, les avenues de l'édifice qu'il renonce à construire.

Les efforts des plus grands géomètres pour démontrer les théorèmes laissés par Fermat comme autant d'énigmes à la postérité mériteraient peut-être un exact historien. Dans cette lice glorieuse où sont descendus tour à tour Euler et Lagrange, Gauss et Dirichlet, Legendre et Kummer, M. Lamé enfin, dont les efforts ont été dignement jugés par Cauchy, on pourrait sans injustice accorder la palme à l'auteur des *Exercices de Mathématiques*, et la preuve du théorème sur les nombres polygones était peut-être la plus difficile à découvrir. Mais est-il possible de cacher qu'en revenant, à bien des reprises, sur un autre théorème de Fermat, il en a remué les difficultés sans en avoir résolu une seule? Les habitués de l'Académie des Sciences n'ont pas oublié avec quelle ardeur, pendant plusieurs semaines, Cauchy, préoccupé de cette question et toujours plein d'espoir, apportait à chaque séance des principes nouveaux entrevus la veille et dont il n'avait pu encore pénétrer toutes les suites. Combien de fois, dans son empressement, l'ont-ils vu déposer sur le bureau le titre d'un Mémoire inachevé qu'il envoyait à l'imprimerie à la dernière heure, en achetant la chance d'antidater de quelques jours une découverte importante par la certitude d'attacher son grand nom à un travail hâtif et imparfait? De tels souvenirs sont caractéristiques; ils ne prouvent nullement qu'inférieur à lui-même Cauchy fût quelquefois abandonné de sa rare perspicacité : l'appréciation serait très-injuste. Cauchy, pendant toute sa carrière, a conservé, avec la rapidité de la pensée, la même puissance d'invention et de pénétration. Son génie toujours prêt le rendait maître en peu d'instants des plus difficiles problèmes. Mais toute recherche exige des tâtonnements et des essais infructueux, que Lagrange, Jacobi et Gauss ont connus sans aucun doute tout autant que lui. Ce qui distingue Cauchy, dont le génie a égalé le leur, c'est d'en avoir longuement et minutieusement informé le public.

Cauchy, en s'exerçant à bien des reprises sur la théorie de la lumière, a montré sous une forme nouvelle toutes les ressources de son esprit d'invention, et la théorie créée par Fresnel lui doit de véritables progrès; bien souvent, il ne faut nullement s'en étonner, sur de tels sujets on le voit, il est vrai, tâtonner, revenir sur ses assertions, et changer avec grand profit pour la science le principe de ses méthodes.

Cauchy, par exemple, affirmait, au début de ses recherches, que les vibrations de la lumière polarisée sont dans le plan même de polarisation, auquel peu de temps après il les suppose perpendiculaires, pour renoncer plus tard à cette hypothèse et revenir à sa première assertion, qui est celle de Fresnel. On retrouve les mêmes incertitudes et les mêmes variations relativement à la densité variable de l'éther dans les divers milieux, et, chaque fois qu'une opinion est adoptée, elle est présentée comme certaine et rigoureusement démontrée. Quoi qu'il en soit, les résultats énoncés par Cauchy sur la réflexion, la double réfraction et la polarisation des rayons réfléchis et transmis par un corps cristallisé d'une manière quelconque sont justement placés par les physiciens au nombre des lois les plus complexes et les plus nettes à la fois que leur fournisse l'analyse mathématique; susceptibles, par leur précision, d'être vérifiés expérimentalement, ils ont trouvé dans les belles recherches de M. Jamin une confirmation éclatante. De telles rencontres sont dignes d'admiration; il ne faut pas toutefois en exagérer la portée, et l'on doit, au point de vue mathématique, apporter de nombreuses restrictions à la rigueur des démonstrations. Cauchy, après avoir établi les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules qu'il assimilait à l'éther, avait commencé par en chercher l'intégrale générale en assignant à la fonction inconnue la forme d'une intégrale définie quadruple. Les analystes seuls pouvaient apprécier, dans ce résultat qui devait renfermer implicitement la science entière, le mérite d'une grande difficulté vaincue. Mais c'est souvent ne rien voir que de tout voir à la fois : dans cette belle formule les lois physiques du phénomène restent tellement cachées, qu'on ne peut, jusqu'ici, concevoir aucun espoir de les en dégager. Cauchy n'a pas tenté une si grande entreprise. Non-seulement l'intégrale générale, mais les équations différentielles du mouvement ne jouent aucun rôle dans ses recherches, où plus d'une hypothèse arbitrairement acceptée sépare les principes de leurs conséquences. Après avoir défini ce qu'il nomme un *mouvement simple,* Cauchy, par une conséquence naturelle, donne le nom de *rayon simple* à celui qui résulte d'un tel mouvement de l'éther. Il admet ensuite, comme l'avaient fait avant lui Mac Cullagh et Neumann, qu'un rayon simple tombant sur la surface qui sépare deux milieux peut donner naissance, dans le cas le plus général, à deux rayons réfléchis et à deux rayons réfractés, qui sont comme lui des rayons simples. Tout cela étant admis sans démonstration, Cauchy utilise habilement les conditions qui doivent être remplies à la surface pour déterminer les constantes et parvenir aux formules précises que l'expérience a heureusement confirmées, et qu'il applique à tous les rayons sans aucune restriction.

La Mécanique céleste ne pouvait manquer d'attirer l'attention de Cauchy, et il y a marqué glorieusement sa trace. La théorie des perturbations planétaires lui doit une ingénieuse méthode dont l'application très-facile et très-simple n'a pas moins frappé les géomètres par sa valeur propre que par les circonstances remarquables dans lesquelles elle s'est produite. M. Le Verrier avait présenté à l'Académie des Sciences un important Mémoire sur la théorie de la planète Pallas. Plus désireux d'obtenir des résultats exacts et complets que de perfectionner les méthodes, le savant astronome avait employé avec une patience sans égale toutes les ressources connues de la science, en utilisant avec autant de prudence que d'habileté les méthodes que la grande inclinaison de l'orbite rendait d'une application fort difficile. Le Mémoire fut renvoyé à Cauchy. Fallait-il, pour en vérifier les conclusions, recommencer d'aussi pénibles calculs? L'Académie n'entendait pas évidemment imposer une telle tâche à son illustre rapporteur; Cauchy cependant, sans s'étonner de ces immenses calculs, voulut juger non-seulement la méthode, mais les résultats; la difficulté particulière du problème devint pour lui une ressource nouvelle, et, par la richesse toujours prête de ses inventions, il sut vérifier minutieusement l'exactitude des chiffres en marquant une fois de plus, par la promptitude du travail simplifié, son incontestable supériorité.

La science fut enrichie d'un Chapitre réellement nouveau, et la méthode de Cauchy, commentée depuis avec beaucoup de sagacité et de science par d'habiles et profonds géomètres, doit prendre rang parmi les théories classiques de la Mécanique céleste.

L'admiration de M. Valson pour l'illustre géomètre est absolue et sans réserve, et l'absence, peut-être volontaire, de toute critique, diminue à mes yeux, je l'avoue, le mérite considérable pourtant d'un travail où s'allie, à une science très-exacte, un esprit méthodique et soigneux. Cauchy, dit M. Valson, était un éminent professeur; la louange est méritée, mais, si l'on veut la développer, il ne faut pas, à l'exemple du savant auteur, énumérer, sans en omettre un seul, tous les mérites de méthode et de diction, qu'un maître plein de zèle puisse unir à la science la plus profonde, pour les attribuer sans distinction à Cauchy. L'illustre inventeur a grandement contribué par son enseignement à l'École Polytechnique aux progrès des hautes études mathématiques. Il a laissé dans la mémoire des élèves d'élite, tels que MM. Combes et de Senarmont, une juste et reconnaissante admiration. Il a formé au Collége de France des savants qui, devenus célèbres, se plaisaient à reporter vers lui la meilleure part de leurs succès et l'origine de leurs plus beaux travaux; il a permis enfin à l'Université de France, aussi longtemps que son nom a brillé sur les affiches de la Sorbonne, de l'opposer, sans accepter d'infériorité, aux noms de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet, dont s'enorgueillissaient les Universités allemandes. Tout cela est strictement vrai, il est juste et bon de le dire; mais ces louanges s'adressent au savant éminent bien plus encore qu'au professeur habile, et, s'il m'est permis d'en juger par les leçons que j'ai entendues à une époque où l'illustre maître avait conservé toute la vigueur de son talent, l'enseignement de Cauchy, si précieux pour les vrais géomètres, n'était nullement fait pour instruire et surtout pour développer les esprits ordinaires. Lorsqu'en 1849, aux applaudissements de tous les amis de la science, Cauchy fut appelé à occuper à la Faculté des Sciences de Paris la chaire de Mécanique céleste, ses premières leçons, il faut l'avouer, trompèrent complétement l'espoir d'un auditoire d'élite plus surpris que charmé par la variété un peu confuse des sujets abordés. La troisième, il m'en souvient, fut presque entièrement consacrée à l'extraction de la racine carrée, et, le nombre 17 étant pris pour exemple, les calculs furent poussés jusqu'à la dixième décimale par des méthodes connues de tous les auditeurs, et que Cauchy croyait nouvelles parce que la veille sans doute elles avaient spontanément traversé son esprit. Je ne revins plus et j'eus grand tort, car les leçons suivantes m'auraient initié dix ans plus tôt aux plus brillantes découvertes de l'illustre maître. Me contestera-t-on le droit d'ajouter que je n'aurais pas à exprimer un tel regret, si à ses éminentes qualités comme géomètre Cauchy avait ajouté le talent et l'art du professeur ?

M. Valson, dans l'un des Chapitres du premier volume, a assigné à Cauchy parmi les géomètres contemporains un rang tout singulier, qui ne souffre que pour le seul Gauss la possibilité d'une comparaison. C'est de quoi je ne saurais convenir; mais le parallèle de Cauchy et de Gauss serait intéressant. Si, sans craindre de commettre ces deux grandes renommées, j'osais un jour le tenter, je voudrais, par des études préalables, raviver dans mon esprit et préciser les souvenirs d'admiration qu'elles doivent réveiller l'une et l'autre.

Mais il ne faudrait pas, pour tous deux, procéder de même façon, et cela seul est une indication. Les écrits de Gauss sont classiques, les découvertes seules de Cauchy le deviennent peu à peu, et le temps, qui n'enlèvera rien à la gloire de l'un, doit, sans aucun doute, accroître celle de l'autre; ce n'est donc pas en relisant les ouvrages de Cauchy que je voudrais me préparer à le louer, c'est en repassant dans mon esprit les derniers progrès de la science, en y retrouvant dans plus d'une théorie renouvelée le souvenir et la marque de son génie, en contemplant son influence croissante sur d'éminents disciples, en songeant à la source féconde d'études et de recherches qu'il leur a léguée, que je m'efforcerais de comprendre l'importance de son rôle et de l'exprimer dignement. Pour accroître, au contraire, la juste admiration qu'éveille le seul nom de Gauss, il suffirait d'étudier, sans en passer une page, l'un quelconque de ses beaux Mémoires, si bien caractérisés par lui-même dans la courte, expressive et modeste devise : *Pauca sed matura*. La balance, cela n'est pas douteux, pencherait du côté de Gauss : c'est le sentiment unanime des géomètres. La comparaison, sur plus d'un point, tournerait cependant à l'avantage de son rival, et c'est une grande gloire pour Cauchy. Mais, lorsqu'en remontant la série des siècles pour découvrir un émule à l'illustre analyste français, M. Valson a intitulé le dernier Chapitre de son premier volume : *Parallèle de Cauchy et de Pascal*, il a préparé à son lecteur une impression de surprise sans mélange, sur laquelle je ne veux pas insister.

J. BERTRAND.

Nous croyons faire plaisir à nos lecteurs en ajoutant à l'article si intéressant qu'on vient de lire, et qui est extrait du *Journal des Savants* (avril 1869), le tableau résumé des travaux d'Augustin Cauchy qu'on trouve dans le second volume de M. Valson, p. 16.

OUVRAGES DÉTACHÉS (*).

Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique. 1er Partie (seule publiée). *Analyse algébrique;* 1 vol. in-8°; 1821.
Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal; 1 vol. in-4°; 1823.
Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 vol. in-4°; 1826-1828.
Leçons sur le Calcul différentiel; 1 vol. in-4°; 1829.
Exercices de Mathématiques; 51 livraisons in-4°; 1826-1830.
Résumés analytiques; 5 livraisons in-4°; Turin, 1833.
Nouveaux Exercices de Mathématiques (Mémoire sur la dispersion de la lumière); 8 cahiers in-4°; Prague, 1835-1836.
Exercices d'Analyse et de Physique mathématique; 4 vol. in-4°; 1840-1847.

MÉMOIRES.

Sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires, Rapports, Notes, etc., répartis comme il suit :

Mémoires détachés	18
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences	549
Mémoires de l'Institut	23
Mémoires des Savants étrangers	3
Journal de l'École Polytechnique	14
Annales de Gergonne	4
Bulletin de Férussac	15
Bulletin de la Société Philomathique	15
Journal de M. Liouville	7

MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

Anciens *Exercices de Mathématiques*	88
Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*	53
Total	789

Si l'on classe les mêmes Mémoires par ordre de matière, sans tenir compte de ceux qui font double emploi comme se rapportant à la fois à plusieurs sujets

(*) Nous avons complété la liste donnée par M. Valson.

distincts, on obtient le résultat suivant :

Arithmétique, théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. — Résidus	81
Fonctions symétriques. — Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	72

Espérons que ces Mémoires, dont plusieurs sont devenus extrêmement rares, seront tous réimprimés, et que la France élèvera à Cauchy, une de ses gloires mathématiques, un monument digne de lui, en publiant la Collection complète de ses œuvres. Cauchy ne manque pas chez nous de disciples zélés, d'admirateurs dévoués. Plusieurs, peut-être, hésiteraient à diriger l'ensemble d'une publication aussi considérable. Aucun, nous en sommes convaincu, ne refusera ses soins et ses conseils pour la branche de la science dont il s'est plus particulièrement occupé à la suite de Cauchy. G. D.

HANKEL (Dr Hermann), ordentlicher professor der Mathematik. — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. *Ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt.* Universitätsprogramm zum 6 Merz 1870. — In-4°, 51 S.; 1870. Tübingen, Druck von L. F. Fues (*).

Pour donner un aperçu du contenu de cet intéressant Mémoire, nous allons reproduire les principaux passages de l'*Introduction.*

Ce qui manquait surtout aux mathématiciens de l'antiquité, c'était l'idée de *variabilité*. S'ils étaient forcés de l'introduire un instant pour définir certaines courbes engendrées par le mouvement, ils s'empressaient d'abandonner les considérations cinématiques, dès qu'ils voulaient établir en toute rigueur les propriétés de ces courbes. C'est Descartes qui a ouvert le premier l'ère des Mathématiques mo-

(*) *Recherches sur les fonctions oscillantes et discontinues un nombre infini de fois. Étude pour contribuer à fixer la notion de fonction ;* par le Dr Hankel, professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Tubingue.

dernes, en représentant par des courbes les valeurs variables des racines d'une équation entre deux grandeurs. Pour désigner une telle dépendance, Leibnitz et Jean Bernoulli adoptèrent la dénomination de *fonction*.

Pour Euler et les autres géomètres du XVIII[e] siècle, *fonction* fut synonyme d'*expression analytique,* explicite ou implicite. On commença par considérer ces expressions comme déterminées au moyen des opérations algébriques (addition, multiplication, etc.), et les fonctions étaient dites *algébriques* ou *transcendantes,* suivant que le nombre des opérations était fini ou infini. On admettait la possibilité générale d'un tel développement des transcendantes, et on leur attribuait sans hésitation toutes les propriétés des fonctions algébriques indépendantes du nombre des opérations. On fut longtemps avant de remarquer que certaines expressions purement analytiques, telles que

$$\sin\frac{1}{x},\quad e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad \int_x^{\infty}\frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

pour $x = 0$, présentent des singularités essentiellement différentes de celles qui se rencontrent dans les fonctions algébriques (*).

Lorsque des courbes tracées arbitrairement différaient par un caractère quelconque des courbes algébriques, on les appelait *curvæ discontinuæ*, *seu mixtæ*, *seu irregulares* (**), par opposition aux *curvæ continuæ*, déterminées par des équations, et l'on était convaincu de l'impossibilité de représenter les courbes discontinues par des équations analytiques. Lorsque, dans le problème des cordes vibrantes, on introduisit, comme fonction arbitraire, la dépendance entre l'abscisse et l'ordonnée de pareilles courbes, ce fut une première dérogation à la définition admise jusque-là de l'idée de fonction, et d'Alembert était en droit de soutenir que c'était « contre les règles de l'Analyse » (***). La polémique qui s'éleva à ce sujet entre d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange, a été admirablement résumée par Riemann, dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, § I (****).

(*) *Voyez* D'ALEMBERT, *Histoire de l'Académie de Berlin pour l'année* 1747, p. 236.

(**) EULER, *Introductio in Analysin infinitorum,* t. II, p. 6.

(***) *Opuscules mathématiques,* t. I, p. 32.

(****) *Abhandlungen der Göttingischen Gesellschaft,* t. XIII, 1867.

La difficulté s'accrut encore bien davantage, lorsque, en traitant des fonctions bien définies *entre certaines limites seulement*, on fut amené à les considérer *en dehors* de ces limites, et à déterminer leurs valeurs correspondantes à toutes les valeurs de la variable. Le premier exemple de ce cas embarrassant fut la célèbre question des logarithmes des nombres négatifs, qui donna lieu à de vifs débats entre Euler et d'Alembert. On s'en tira au moyen d'un nouveau principe, que l'on pourrait appeler *principe de continuation* (*Princip der Fortsetzung*), et qui s'énoncerait ainsi : « Deux fonctions définies par des développements différents de forme, et relatifs à deux intervalles différents, mais contigus, doivent être considérées comme ne formant qu'une seule et même fonction, lorsqu'elles jouissent, chacune dans son intervalle, de propriétés identiques. »

Tout en admettant tacitement ce principe, les géomètres du siècle dernier ne le formulèrent jamais explicitement, et ne cherchèrent nullement à préciser les conditions sous lesquelles deux développements différents, correspondants à des suites différentes de valeurs de la variable, pouvaient être regardés comme appartenant à une même fonction.

On peut citer bon nombre de démonstrations insuffisantes ou inexactes, de propositions mal déterminées ou même tout à fait fausses, présentées par les géomètres les plus illustres, et qui témoignent de l'incertitude qui régnait alors sur les fondements de la théorie des fonctions. Lagrange donnait encore en 1813, dans la seconde édition de sa *Théorie des fonctions analytiques*, une démonstration défectueuse du théorème de Taylor. C'est en 1829 (*), que Cauchy a fait remarquer, pour la première fois, que ce théorème pouvait être en défaut, malgré la convergence de la série. Gauss a le premier énoncé, d'une manière expresse, en 1816 (**), qu'il n'est pas permis de prendre en général l'intégrale d'une fonction entre des limites qui comprennent entre elles une valeur pour laquelle la fonction devient infinie. En 1826, Abel a établi la vraie définition d'une puissance et les règles de convergence de la série du binôme (***) ; avant lui, Poisson signalait

---

(*) *Leçons sur le Calcul différentiel*, 10e Leçon, p. 105.

(**) *Theorematis de resolubilitate functionum, etc. demonstratio tertia* (Gauss *Werke*, t. III, p. 63).

(***) *Journal de Crelle*, t. I, p. 311. — *Œuvres complètes*, t. I, p. 66.

dans cette théorie, divers paradoxes, dont Poinsot lui-même n'avait pu trouver l'explication (*). Mentionnons encore les nombreuses tentatives pour étendre la définition des facultés numériques au cas des valeurs négatives ou fractionnaires de la variable; c'est à Weierstrass qu'il était réservé de mener cette entreprise à bonne fin (**).

Cette conception des fonctions, d'après Euler et ses contemporains, reçut une rude atteinte lorsque Fourier démontra, en 1807 (***), la possibilité de développer en séries périodiques, non-seulement des fonctions *analytiques* admettant parallèlement un autre développement suivant les puissances de la variable, mais encore des fonctions entièrement arbitraires et n'étant assujetties à aucune loi simple, c'est-à-dire celles qu'Euler appelait *functiones discontinuæ*, et que M. Hankel désigne sous le nom de *fonctions illégitimes* (*illegitime Functionen*).

Il s'ensuivait de là forcément que l'ancienne idée de fonction n'était plus admissible. En effet, puisque ces fonctions discontinues pouvaient, elles aussi, être représentées par des expressions analytiques, on n'avait plus le droit de regarder les propriétés des fonctions algébriques comme étant des propriétés typiques, applicables à toutes les transcendantes. Et d'autre part, si une seule et même série, pour des valeurs de la variable comprises dans deux intervalles contigus, pouvait représenter des lois analytiques différentes, le *principe de continuation* était par cela même ruiné.

Dirichlet, dans ses travaux sur les séries de Fourier (****), remplaça les anciennes définitions par une autre, aussi générale que possible, en appelant *fonction* de x toute quantité y qui, dans un certain intervalle, prend, pour chaque valeur attribuée à x, une valeur déterminée, la loi de dépendance pouvant, dans cet intervalle, varier d'une manière arbitraire, et n'être exprimable par aucune des opérations mathématiques. Mais cette définition pèche à son tour par excès de généralité, les fonctions ainsi conçues ne conservant plus aucune propriété générale, et les valeurs d'une fonction pour les différentes valeurs de la variable n'ayant plus entre elles aucune espèce de relation.

(*) *Recherches sur l'Analyse des sections angulaires;* 1825.

(**) *Journal de Crelle*, t. LI, 1856, p. 1.

(***) *Bulletin de la Société Philomathique*, t. I, p. 112.

(****) *Repertorium der Physik, herausgegeben von* Dove, t. I, 1837, p. 152.

Il fallait donc compléter la conception de Dirichlet, et Cauchy avait déjà travaillé dans ce sens dès l'année 1815. C'est Riemann qui est enfin parvenu à fonder cette notion sur une base solide (*). Prenant pour point de départ la conception de Dirichlet, il établit celle d'une fonction (monogène) d'une variable complexe, et donna ainsi un corps à une définition trop vague, en se rapprochant de l'ancien point de vue.

Malheureusement il ne fut pas donné au fondateur de la théorie des fonctions de variables complexes d'édifier son système d'après un plan complet et uniforme; il n'a pu nous en laisser que des fragments, qui nous en font apprécier toute la grandeur. Les fondements du nouveau système ne sont pas encore assez à l'abri de toute objection, pour que l'on puisse asseoir sur eux l'ensemble de l'édifice analytique. Par exemple, le principe auquel Riemann a attaché le nom de Dirichlet a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses controverses. Les objections s'appuient sur certains cas d'exception que l'on peut imaginer *a priori*, et dans lesquels les fonctions présentent des discontinuités que l'on ne peut exclure sans discussion, et qui invalident cependant les conclusions que l'on comptait appliquer à toutes les fonctions qui répondent à la définition.

M. Hankel a pensé que le seul moyen d'éclaircir ce qui concerne ces discontinuités, et de préparer la solution du problème de la nature des fonctions, c'était de s'affranchir de toutes les représentations que les mathématiciens les plus récents rattachent encore à la conception d'Euler, et d'établir des distinctions parmi la multitude des relations possibles entre les grandeurs de deux variables, qui sont renfermées dans la pure conception de la fonction d'après Dirichlet, en portant principalement son attention sur les fonctions *illégitimes*, si peu étudiées jusqu'ici. L'objet de son Mémoire est de traiter ces cas paradoxaux des fonctions, en considérant d'abord les variables *réelles* et les valeurs *réelles et finies* des fonctions d'une variable indépendante.

Après avoir établi, dans le § I[er], le sens qu'il attache dans ce Mémoire au mot *fonction*, l'auteur énumère (§ II) les différentes espèces

(*) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse;* Göttingen, 1851. — Une traduction italienne de ce Mémoire a paru dans les *Annali di Matematica pura ed applicata,* t. II; 1859.

possibles de continuité et de discontinuité des fonctions en certains points. Il considère ensuite (§ III) les fonctions continues en général, et fait voir que, outre les fonctions analytiques ordinaires à oscillations finies, en nombre fini dans un intervalle donné, on peut aussi concevoir des fonctions offrant un nombre infini d'oscillations d'amplitude infiniment petite. Jusqu'à présent, on n'avait représenté analytiquement que des fonctions ayant un nombre infini d'oscillations dans le voisinage seulement de certains points particuliers. A l'aide d'un principe dont l'auteur a puisé l'idée dans un exemple donné par Riemann (*), et auquel il donne le nom de *principe de la condensation des singularités* (§ IV), il est parvenu (§ V) à former des séries absolument convergentes, et oscillant en chaque point dans toute l'étendue d'un intervalle fini (**).

Ces fonctions sont toujours susceptibles d'intégration; mais la question de savoir si elles ont une *dérivée* est sujette à des difficultés particulières. Cette question n'a été que très-rarement traitée, l'exis-

---

(*) *Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*, art. 6.

(**) Pour éclairer toutes ces discussions, il ne sera pas inutile de citer au moins un des exemples donnés par M. Hankel.

Soit $\varphi(y)$ une fonction remplissant entre $y = -1$ et $y = +1$, excepté pour $y = 0$, les conditions de continuité qui permettent le développement par la série de Taylor, et qui, pour $x = +\varepsilon$, converge vers $+1$, et, pour $x = -\varepsilon$, vers -1, ε étant infiniment petit. On sait qu'une telle fonction peut se représenter par une série trigonométrique ou par une intégrale de Fourier.

La série

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

qui s'en déduit est alors continue pour toutes les valeurs irrationnelles de x, et admet une dérivée si l'on fait tendre l'accroissement vers 0 par des valeurs irrationnelles.

Pour x rationnel égal à $\frac{\nu}{\mu}$, on a, abstraction faite des termes qui s'évanouissent avec ε,

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

De plus

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

Ainsi, quand x tend vers $\frac{\nu}{\mu}$, la valeur de la fonction est différente suivant que x reste inférieur ou supérieur à sa limite. Il y a discontinuite pour toutes les valeurs commensurables.

tence d'une tangente en chaque point d'une courbe étant considérée comme d'une évidence géométrique immédiate et comme une conséquence forcée de la *loi de continuité*, devant laquelle on s'inclinait comme devant une nécessité naturelle, inhérente aux lois mathématiques. La tentative faite par Ampère en 1806 (*) n'est rien moins que satisfaisante. La question a été reprise en 1861 par M. Lamarle (**); toutefois sa démonstration, malgré l'approbation de géomètres éminents, n'a pas encore réuni l'assentiment universel. Mais lors même que cette mystérieuse loi de continuité régirait en réalité tous les mouvements dans la nature, ce ne serait pas une raison pour restreindre, en aucune façon, le domaine des mathématiques pures, et cette sorte d'évidence intuitive que l'on invoque a déjà conduit, dans les recherches géométriques, à trop de conclusions erronées pour que l'on soit en droit de la placer sur la même ligne qu'une démonstration scientifique. L'opinion qui semble prévaloir aujourd'hui, et qui fut celle de Gauss, de Dirichlet et de Jacobi, est que l'existence de la dérivée d'une fonction continue n'est pas une *conséquence nécessaire* de la continuité, mais constitue une hypothèse particulière, qui se trouve naturellement satisfaite par les fonctions définies au moyen de l'intégration; et, bien qu'il y ait encore plus d'un mathématicien qui fasse profession de ne pas croire aux fonctions continues sans dérivées, le travail de M. Hankel, qui nous montre des fonctions exprimées *analytiquement* par des séries absolument convergentes, et n'admettant pas néanmoins de dérivée, nous semble devoir modifier ces convictions.

Les §§ VI et VII sont consacrés à l'étude des fonctions *linéairement* discontinues, c'est-à-dire des fonctions qui présentent, dans un intervalle fini, un nombre infini de solutions de continuité. Ces fonctions se partagent en deux classes essentiellement distinctes : celles qui forment une discontinuité *ponctuée*, et celles qui sont *totalement* discontinues. Ces deux classes ne se comportent pas de la même manière au point de vue de l'intégrabilité, les premières étant toujours intégrables, les secondes jamais. Dans le § IX, des fonctions discontinues des deux classes sont représentées par des expressions analytiques.

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XIII^e Cahier, p. 148.

(**) *Exposé géométrique du Calcul différentiel*, t. I, p. 96.

Le paragraphe final est consacré à la discussion de la notion de fonction, et conclut à la nécessité d'adopter la définition donnée par Riemann.

C'est l'étude des précieux écrits de Riemann, et surtout de son beau Mémoire déjà cité (*Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*) qui a inspiré à M. Hankel son travail sur ces questions délicates, qui, comme le dit Riemann, d'après Dirichlet, « sont intimement liées avec les principes du Calcul infinitésimal, et servent à y introduire plus de précision et de clarté. »

J. Hoüel.