JEAN-MARC RINKEL

Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier

Thèses d'Orsay, 2001

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2001__0608__P0_0>

63833

ORSAY
N° d'ordre : 6660

UNIVERSITÉ de PARIS–SUD
Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences
de l'Université Paris XI Orsay
Spécialité : Mathématiques

par

Jean-Marc RINKEL

Sujet :

Inverses et propriétés spectrales des matrices de Toeplitz à symbole singulier

soutenue le : 23 octobre 2001 devant la Commission d'examen

Jury : Didier DACUNHA-CASTELLE
Aline BONAMI
Fabrice GAMBOA
Charles DELORME
Karim DROUICHE
Abdellatif SEGHIER

Rapporteurs : Estelle BASOR
Aline BONAMI
Sergei TREIL

À Hélène
mère des hiboux;
à Séverin, Jean,
Maud et Pierre,
les hiboux

На назначенное свиданье
Опоздаю. Весну в придачу
Захвативши – приду седой
Ты его высоко назначил!

Марина Цветаева

Je tiens à remercier tout d'abord les membres de mon jury :
M. Dacunha-Castelle qui me fait l'honneur d'en être le président,
Mme Bonami parce que son exigence bienveillante a permis à cette thèse d'être ce qu'elle est,
M. Gamboa pour l'intérêt qu'il porte à ce travail,
M. Drouiche, responsable d'une partie de ce texte.

Ma reconnaissance va également à Mme Basor et à M. Treil, rapporteurs de la thèse. Leurs remarques et encouragements me furent précieux.

Ma dette envers toi, Charles, est grande : il y a eu bien sûr les discussions mathématiques, les exposés au sein de notre groupe de travail; en plus tu as permis par ton immense gentillesse que ce document prenne, par le miracle du LaTeXsa forme dans des délais à échelle humaine.

À Philippe Rambour : merci à toi, Philippe; nous travaillons ensemble depuis de nombreuses années; avec Abdellatif Seghier, tu es auteur d'une partie de ce travail. Puisse notre complicité durer encore !

Abdellatif, mon maître et mon ami, si tu n'étais venu toi-même me proposer de me lancer dans un travail de thèse, rien de ce travail n'existerait.

Je te remercie, Hélène, pour ton soutien et ta patience.

Résumé

Ce travail concerne le comportement de l'inverse asymptotique et exact des matrices de Toeplitz, ainsi que le développement asymptotique des valeurs propres extrêmes de ces matrices. Il est fondé sur une géométrie hilbertienne, consistant à interpréter l'opérateur de Toeplitz comme projecteur : cette idée est développée et appliquée.

Mots-Clefs Matrices et opérateurs de Toeplitz, valeurs propres extrêmes, opérateurs de Green, développement asymptotiques.

Abstract

This work is about the behaviour of asymptotic and exact inverses of Toeplitz matrices, and also about asymptotic expansion of their extremal eigenvalues. It is based on hilbertian geometry: we interpret Toeplitz operator as a projector. This idea is developed and applied.

Keywords Toeplitz operators and matrices, extremal eigenvalues, Green operators, asymptotic expansions.

AMS Classification 47B35 47A75 47A70 41A10 42A99 42B30 60J99

Table des matières

Chapitre 1

Compte-rendu des résultats

1.1 Introduction Générale

Ce travail concerne le comportement asymptotique de l'opérateur de Toeplitz $T_N(f)$, où f est une fonction dotée de propriétés de régularité adéquates, définie sur le tore $\mathbb{T}^1$, noté simplement $\mathbb{T}$ dans ce qui suit. Ce comportement asymptotique concernera dans la première partie de cette étude l'inverse de $T_N(f)$, dans la seconde partie les valeurs propres extrêmes de $T_N(f)$.

La première partie est la synthèse de deux articles réalisés en commun pour le premier avec Philippe Rambour et Abdellatif Seghier et pour le second avec Karim Drouiche, Philippe Rambour et Abdellatif Seghier; ces deux articles sont actuellement soumis à publication; un résumé du premier a donné lieu à un compte rendu à l'Académie des sciences paru en décembre 2000.

Dans le premier article, on établit un inverse asymptotique de $T_N(f)$ pour un symbole f de la forme :

$$f = (1 - \cos\theta) f_1$$

où f_1 est une fonction strictement positive sur $\mathbb{T}$, avec des conditions de régularité précisées plus loin. Ce résultat permet de retrouver, mais dans un cadre plus large, le célèbre théorème de Spitzer-Stone [SpSt](1960). Dans le cas où f_1 est l'inverse d'un polynôme trigonométrique positif à zéros extérieurs au disque unité , on obtient un inverse exact de $T_N(f)$.

Le deuxième article élargit la partie singulière du symbole f : à la place de $(1 - \cos\theta)$ on s'autorisera des expressions de la forme

$$|1 - \chi|^{2\alpha} \text{ où } \alpha \in \mathbb{N}, \quad \chi(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

ou bien de la forme

$$|(1 - \chi_1\chi)(1 - \chi_2\chi)|^2, \quad \chi_1, \chi_2 \in \mathbb{T}, \quad \chi_1 \neq \chi_2.$$

La partie régulière, par contre, se restreindra à l'inverse d'un polynôme strictement positif sur le disque unité fermé. Cela permet de mettre en évidence des structures algébriques, dont l'exploitation conduit à des inverses exacts des opérateurs de Toeplitz. Cette voie permet lorsqu'on adopte une asymptotique introduite par Kesten de mettre en évidence, à partir de l'inverse exact, des formules asymptotiques dont la partie principale est un noyau de Green.

La deuxième partie est constituée par un article écrit par Jean-Marc Rinkel sur les valeurs propres extrêmes des opérateurs de Toeplitz, à la suite de la lecture de deux articles de H. Widom et de Seymour Parter. Ce travail est soumis à publication et prépublié à l'Université Paris-Sud. Dans leur article, H. Widom et à sa suite S. Parter donnent un développement asymptotique des valeurs propres extrêmes de $T_N(f)$ lorsque f équivaut au voisinage de zéro à $|1 - \chi|^4$. Nous introduisons une approche basée sur une géométrie hilbertienne pour l'étude du spectre de $T_N(f)$. Nous montrons dans une première partie que les résultats de H. Widom et S. Parter peuvent être retrouvés en totalité. Précisons que c'est le cas où le symbole présente exactement un minimum. Dans une seconde partie, nos méthodes nous permettrons d'aborder le problème des valeurs propres extrêmes lorsque le symbole présente plusieurs minima, puis de mesurer des perturbations du spectre inférieur en fonction d'une perturbation polynomiale du symbole f. Pour finir, cet article étend la structure géométrique du calcul spectral en dimension 1 à la dimension d finie quelconque.

Examinons à présent de façon plus précise les problèmes posés dans chaque partie, leur situation dans le contexte scientifique et les résultats obtenus.

1.2 Inverse asymptotique et inverse exact de $T_N(f)$

1.2.1 Aspect analytique

On se donne une fonction réelle f définie sur $[0, 2\pi[$, positive de la forme

$$f(e^{i\theta}) = \left|1 - e^{i\theta}\right|^2 f_1(e^{i\theta})$$

où f_1 et $\log f_1$ sont dans $L^1(\mathbb{T})$.

À cette fonction f, qu'on appelle symbole, on associe une famille d'opérateurs de Toeplitz $T_N(f)$ de rang $N+1$, dont les matrices représentatives sont données par :

$$T_N(f) = (\widehat{f}(m-n))_{0 \leq m,n \leq N}$$

où $\widehat{f}(k)$ est le k-ième coefficient de Fourier de f, $k \in \mathbb{Z}$.

Nous proposons dans ce paragraphe un développement asymptotique de l'inverse $T_N(f)^{-1}$. L'approche de ce travail est basée sur l'interprétation de $T_N(f)$ comme projecteur de $L^2(\mathbb{T})$, ce qui donne lieu à la formule d'inversion que nous allons énoncer dans le paragraphe suivant.

Une formule d'inversion

Notations :

$$\begin{aligned} H^+ &= \left\{h \in L^2(\mathbb{T});\quad \widehat{h}(s) = 0, \quad s < 0\right\}, \\ H^- &= L^2(\mathbb{T}) \ominus H^+ . \end{aligned}$$

H^- est le supplémentaire orthogonal de H^+.

π_+ et π_- désignent les projections orthogonales de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^+ et H^-.

Les hypothèses sur f sont inspirées du théorème de décomposition suivant, dû à Grenander et Szegö [GS] :

> Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est à valeurs réelles, positive sur $\mathbb{T}$ presque partout avec l'hypothèse supplémentaire que $\log f \in L^1(\mathbb{T})$, il existe une fonction g de H^+ telle que
>
> $$f = |g|^2 \qquad (1.1)$$

Chaque fois que l'on a pour f une décomposition de type 1.1, on définit des opérateurs de Hankel H_{Φ_N} et $H^*_{\Phi_N}$ associés à cette décomposition, de la façon suivante :

On pose

$$\Phi_N = \frac{g}{\bar{g}} \chi^{N+1} \qquad (\chi = e^{i\theta}).$$

Alors

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N} &: H^+ \to H^-, \quad H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-(\Phi_N \psi), \\ H^*_{\Phi_N} &: H^- \to H^+, \quad H^*_{\Phi_N}(\varphi) = \pi_+(\bar{\Phi}_N \varphi). \end{aligned}$$

Les conditions imposées à f impliquent : $\left\|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right\| < 1$. On trouvera une démonstration de cette inégalité dans [S, proposition 1].

Pour finir, nous noterons $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel complexe $\mathrm{vect}\{1, \chi, \ldots, \chi^N\}$.

Théorème 1 (formule d'inversion) *On suppose que le symbole f possède les propriétés suivantes:*

$$f > 0,$$

f admet la décomposition suivante :

$$f = g\bar{g}, \quad g \in H^\infty = H^+ \cap L^\infty(\mathbb{T}), \quad g^{-1} \in H^\infty.$$

Alors :

(i) $T_N(f) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{P}_N)$

(ii) si p est un polynôme de type analytique, de degré inférieur ou égal à N, on a :

$$T_N(f)^{-1}(p) = \frac{1}{g}\pi_+\left(\frac{p}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g}\pi_+\left(\Phi_N(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1}\pi_+\left[\bar{\Phi}_N\, \pi_+\left(\frac{p}{\bar{g}}\right)\right]\right).$$

La démonstration est rappelée au chapitre 3

Cette formule est utilisée dans plusieurs travaux, depuis 1954.

L'article de Widom en 1973 [W2] s'en inspire largement pour étudier le comportement asymptotique des déterminants de Toeplitz à symboles singuliers. On peut la retrouver à partir d'une formule algébrique d'inversion d'opérateurs sur des espaces vectoriels, due à Kozak, et citée dans [BS, prop. 7.15]. La forme utilisée ici est celle établie dans l'article de Seghier [S].

Remarque : Dans tout le travail qui suit nous aurons en fait à utiliser cette formule dans le cas où le symbole f est singulier, au sens où il admet des zéros sur $\mathbb{T}$. Dans, ce cas, la formule d'inversion ne s'applique pas directement. Nous paramétrons le symbole par un réel r de $[0,1[$, obtenant ainsi une famille de symboles réguliers. Il en résulte un développement asymptotique des éléments de $T_N(f)^{-1}$ lorsque $N \to +\infty$ et $r \to 1$. Cette méthode permet d'obtenir un premier théorème d'inversion exacte, pour une famille spécifique de symboles(voir ci-dessous).

Inverse exact de $T_N(f)$ pour $f = \frac{|1-\chi|^2}{|P|^2}$, où P est un polynôme. Conséquences.

Dans ce paragraphe P désigne un polynôme sans zéro sur le disque unité fermé.

Notations:

$$P(\chi) = \sum_{s=0}^{m} \beta_s \chi^s \text{ avec } \forall t \in [0,1], \forall \chi \in \mathbb{T} \quad P(t\chi) \neq 0.$$

On a ici

$$f_1 = \frac{1}{|P|^2} = g_1\bar{g}_1 \text{ avec } g_1 = \frac{1}{P} \in H^\infty.$$

Notons

$$\frac{g_1}{\bar{g}_1}(\chi) = \sum_{u \geq -m} \gamma_u \chi^u.$$

Théorème 2 *$T_N(f)$ est inversible. Si l'on suppose $m \leq N$, l'élément de $T_N(f)^{-1}$ d'indice $(k+1, l+1)$, où $0 \leq k \leq N$ et $0 \leq l \leq N$, est donné par*

$$\begin{aligned}
[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1} &= \sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1) - \frac{d(k)\bar{d}(l)}{N+2+A(P)} \\
&+ \sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \sum_{p=N+2-m}^{s+1} \sum_{p'=N+2-m}^{s'+1} \gamma_{p'-(N+2)}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\alpha_{s,s',p,p'}
\end{aligned}$$

où

$$d(k) = \sum_{s'=0}^{k} \left[\bar{\beta}_{k-s} \left(\sum_{p=1}^{s'+1} p\bar{\gamma}_{p-(N+2)} - (s+1) \sum_{p=s+2}^{+\infty} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \right) \right],$$

$$A(P) = -2\Re\left(\frac{P(1)\bar{P}'(1)}{|P(1)|^2}\right),$$

$$\alpha_{s,s',p,p'} = \min(-p+s+1, -p'+s'+1).$$

L'expression précédente se simplifie pour les termes centraux.

Corollaire 1 (absence d'effets de bord) *On suppose $m < k < l < N-m+1$. Alors*

$$[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1} = \sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1) - \frac{d(k)\bar{d}(l)}{(N+2)+A(P)},$$

avec

$$d(k) = -(k+1)\bar{P}(1) + \frac{P'(1)\bar{P}(1)}{P(1)}.$$

Une application simple de ces résultats : si X désigne une variable aléatoire discrète telle que $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\mathrm{Prob}(X=k) = c_k$ avec $\begin{cases} c_k = c_{-k} = \frac{1}{2}p(1-p)^k & \text{si } k>0 \\ c_0 = p \end{cases}$ et $0 < p \leq 1$, alors Φ étant la fonction caractéristique associée à X, et $f(\theta)$ désignant le symbole $f(\theta) = 1 - \Phi(e^{i\theta})$, on a $f(\theta) = \frac{p(1+p)}{2}\frac{|1-e^{i\theta}|^2}{|1-pe^{i\theta}|^2}$.

Les résultats précédents fournissent l'espérance du nombre de passages au point l d'une particule animée d'un mouvement aléatoire qui se trouve en k à l'instant 0, pour k et l dans le réseau $\{0, 1, \ldots, N\}$, avant de quitter ce réseau, là où Spitzer et Stone ne proposent qu'une évaluation asymptotique [SpSt].

L'inverse exact établi dans le théorème précédent permet un calcul de la trace de $T_N(f)^{-1}$ sous la forme

$$\mathrm{Tr}\left(T_N(f)^{-1}\right) = aN^2 + bN + o(N),$$

où a et b sont indépendants de N pour N assez grand.

Corollaire 2 (Théorème de trace) *Notons*

$$C(P) = -\sum_{u=0}^{m}\sum_{u'=0}^{m} \beta_u\beta_{u'}\max(u,u'),$$

$$D(k) = 2\sum_{u=0}^{m}\bar{\beta}_u\left(\sum_{p=-N-1}^{k-u-N-1}\bar{\gamma}_p\right),$$

$$B(P) = \sum_{k=N-m}^{N}\left(|D(k)|^2 - 2\Re(P(1)\overline{D(k)})\right),$$

$$R(P) = C(P) - B(P).$$

Alors, pour N assez grand, $D(k)$ ne dépend que de P, de même que $R(P)$, et on a dans ce cas

$$\mathrm{Tr}\left(T_N(f)^{-1}\right) = N^2\frac{|P(1)|^2}{6} + N\left[\frac{2+A(P)}{3}|P(1)|^2 + \Re(P'(1)P(1)) + R(P)\right] + o(N).$$

Observons que dans le cas où f est régulière (en particulier $1/f$ intégrable), la formule de trace est de la forme

$$\mathrm{Tr}(T_N(f)^{-1}) = (N+1)\widehat{\left(\frac{1}{f}\right)}(0) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|\widehat{\left(\frac{1}{f}\right)}(k)\widehat{\ln f}(k) + o(1)$$

ce qui est d'une nature différente du cas singulier (voir le corollaire 2).

Inverse asymptotique

On étend à présent les résultats précédents en remplaçant la partie régulière du symbole par une fonction f_1. On obtient alors un développement asymptotique de l'inverse.

Soit

$$A(\mathbb{T}) = \left\{ \psi \in L^1(\mathbb{T}); \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}(k)\right| < +\infty \right\}.$$

Théorème 3 *Soit un symbole*

$$f = |1-\chi|^2 f_1,$$

où f_1 vérifie :

$$f_1 > 0, \quad f_1' \in A(\mathbb{T}), \quad f_1 \in C^1(\mathbb{T}).$$

Alors f_1 a une décomposition de la forme

$$f_1 = |g_1|^2, \quad g_1 \in H^\infty, \quad \frac{1}{g_1} \in H^\infty.$$

Si on pose

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_1} &= \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \chi^s, \\
a_{k,l} &= \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s} \beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1), \\
b(k) &= \sum_{s=0}^{k} (s+1)\bar{\beta}_{k-s},
\end{aligned}$$

alors $T_N(f)$ est inversible et

$$\frac{1}{N+2}[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1} = \frac{a_{k,l}}{N+2} - \frac{b(k)\bar{b}(l)}{(N+2)^2} + o(1),$$

avec

$$\lim_{N\to+\infty} o(1) = 0$$

uniformément par rapport à k et l.

Ce résultat est réellement un prolongement du résultat "polynomial" du paragraphe précédent, car l'idée est d'utiliser une approximation de f_1 par l'inverse d'un polynôme, en maîtrisant le reste.

On peut alors énoncer un théorème à la façon de Spitzer-Stone, sous la forme du corollaire suivant:

Corollaire 3 (formule de Spitzer-Stone) *Si f vérifie les hypothèses du théorème et si l'on suppose de plus*

$$\sum_{u\in\mathbb{N}} |u\beta_u| < +\infty,$$

alors:

$$\frac{\sigma^2}{2(N+2)}[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1} = \min\left(\frac{k+1}{N+2}, \frac{l+1}{N+2}\right) - \frac{(k+1)(l+1)}{(N+2)^2} + o(1),$$

avec

$$\lim_{N\to+\infty} o(1) = 0$$

uniformément par rapport à k et l et

$$\sigma^2 = \frac{2}{\left|\sum_{s=0}^{+\infty} \beta_s\right|^2}.$$

On rappelle que Spitzer et Stone ont établi la formule énoncée dans le corollaire 3, avec des hypothèses de nature différente et d'origine probabiliste. Plus précisément, ces hypothèses sont :

$$f = 1 - \Phi, \quad \Phi(e^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i\theta}, \quad \sigma^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 c_k < +\infty,$$

$$c_k = c_{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\; c_k \geq 0, \quad \text{pgcd}\{k;\; k > 0 \text{ et } c_k > 0\} = 1.$$

Précisons que les symboles positifs singuliers figurant dans nos résultats font intervenir des coefficients de Fourier de signe quelconque, contrairement à Spitzer-Stone. Ce qui nous permet de sortir du cadre probabiliste. Le théorème de trace de l'inverse ne peut être obtenu par les méthodes spectrales développées par M. Kac, W. L. Murdock, G. Szegö [KMS], d'une part et H. Widom [W3] d'autre part. En effet ces méthodes spectrales ne fournissent que des valeurs propres extrêmes, ce qui est insuffisant pour l'obtention d'une trace de l'inverse. Par ailleurs, l'énoncé exact de l'inverse, outre son intérêt propre, nous permet d'obtenir un calcul de trace et la possibilité d'énoncer l'expression exacte du déterminant de telles matrices ainsi qu'une expression asymptotique. Mais en ce qui concerne l'expression du déterminant, ces énoncés ne seraient qu'un cas particulier du travail de H. Widom.

Ces résultats participent à un ensemble de travaux antérieurs consacrés aux problèmes relatifs à l'inversion asymptotique et au comportement spectral des matrices de Toeplitz. On pourra se reporter à [BL], [Kes], [Wat], [W3].

Widom traite le cas des symboles de zéros d'ordre α complexe de partie réelle strictement entre 1 et -1. Son objectif n'est pas le contrôle des éléments de l'inverse. L'opérateur inverse se trouve approché dans ce cas par un opérateur intégral continu et connu. H. Kesten a considéré le cas où le symbole est d'ordre α réel compris strictement entre 1 et 2.

Dans un autre cadre, P. M. Bleher a étudié le comportement asymptotique des inverses de matrices de Toeplitz où le symbole est réel et d'ordre β inférieur strictement à 1. Enfin Watanabé a proposé une démonstration d'une partie du théorème de Spitzer-Stone à l'aide d'une approche purement probabiliste basée sur les chaînes de Markov : il obtient ainsi la partie principale du noyau de Green.

Les démonstrations des résultats exposés dans ce chapitre sont, sauf avis contraire, détaillées au chapitre 2

1.2.2 Aspect algébrique

Les démonstrations des résultats qui suivent sont développées au chapitre 3. Conformément au programme de l'introduction générale, le symbole considéré dans ce chapitre est de la forme :

$$f(\chi) = \frac{\prod_{k=1}^{p} |\chi - \chi_k|^{2\alpha}}{|P(\chi)|^2},$$

avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$, χ_k constante complexe de module 1 et $P(\chi) = \sum_{l=0}^{m} \beta_l \chi^l$, un polynôme de degré m, dont les racines sont à l'extérieur du cercle unité. La partie régulière du symbole est donc constituée par l'inverse d'un polynôme trigonométrique positif, sa partie singulière admet des zéros d'ordre multiple et des zéros distincts.

La restriction à ce type de symbole conduit à des théorèmes algébriques de structure, dont le but est l'évaluation des deux termes de la formule d'inversion,introduite au chapitre précédent (théorème 1). Selon cette formule, on peut écrire, pour un symbole $f > 0$, vérifiant les hypothèses adéquates, pour lesquelles f admet la décomposition $f = |g|^2$, $g \in H^+$:

$$[T_N(f)]^{-1}_{k,l} = (T_1)_{k,l} - (T_2)_{k,l}$$

où

$$
\begin{aligned}
(T_1)_{k,l} &= \left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar g}\right)\right\rangle, \\
(T_2)_{k,l} &= \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \pi_+\left(\bar\Phi_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)\right), \pi_+\left(\bar\Phi_N \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar g}\right)\right)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

L'idée de l'ensemble des théorèmes de structure développés dans ce chapitre est la suivante : le terme $(T_2)_{k,l}$ fait apparaître le vecteur $X_k = \pi_+\left(\bar\Phi_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)\right)$. Il se trouve que ce vecteur appartient à un espace vectoriel de petite dimension, stable par l'opérateur $H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$. Par conséquent toute l'information nécessaire se trouve contenue dans cet espace, ce qui donne accès aux éléments $(T_2)_{k,l}$ par un calcul matriciel. Cependant, bien que l'ordre des matrices (carrées) intervenant soit petit, les résultats ne sont accessibles qu'à l'aide de logiciels de calcul formel (voir par exemple le corollaire 4). Les résultats obtenus à partir de ces théorèmes semblent mettre en évidence une généralisation de la formule de Spitzer-Stone, en faisant apparaître asymptotiquement des noyaux de Green. Ces noyaux sont associés à des inverses d'opérateurs différentiels dont l'ordre est manifestement lié à l'ordre de la singularité du symbole. C'est là un phénomène à explorer dans des travaux ultérieurs. Ces théorèmes de structure généralisent directement la démarche utilisée dans le paragraphe 1.2.1, où nous avions calculé un inverse exact pour le symbole $f = \frac{|1-\chi|^2}{|P|^2}$.

Quand le symbole est singulier, comme ici, on le régularise par

$$f_r(\chi) = f(r\chi)$$

et on applique la formule d'inversion à $T_N(f_r)$.

On montre alors (cf. Chapitre 2) que

$$\lim [T_N(f_r)^{-1}]_{k,l} = [T_N(f)^{-1}]_{k,l}$$

quand r tend vers 1.

Enonçons maintenant les principaux résultats obtenus

Etude avec le symbole $f = \frac{|1-\chi|^4}{|P(\chi)|^2}$

Nous avons le théorème de structure suivant:

Théorème 4 *Lorsque $f = \frac{|1-r\chi|^4}{|P(\chi)|^2}$, $0 < r < 1$, on a :*

- *Une évaluation du premier terme, $(T_1)_{k,l}$ pour $k < l$, pour $r = 1$ est donnée par :*

$$(T_1)_{k,l} = \sum_{q=0}^{k} \left[\left(\sum_{j=0}^{q} \bar\beta_j (q - j + 1) \right) \left(\sum_{j=0}^{l-k+q} \bar\beta_j (q + (l-k) - j + 1) \right) \right],$$

  avec $\bar\beta_j = 0$ si $j > m$;

- $X_k = \pi_+\left(\bar\Phi_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)\right) \in \mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}$.

- *La dimension de $\mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}$ est égale à l'ordre de la singularité, c'est-à-dire 2; une base naturelle de $\mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}$ est $\left\{\frac{1}{1-\chi}, \frac{\chi}{(1-\chi)^2}\right\}$;*

- $\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}}$ *est un automorphisme de l'espace $\mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}$.*

L'application de ce théorème de structure au cas où $f = |g|^2$ avec

$$g = \frac{(1-\chi)^2}{1+\beta\chi}, \quad |\beta| < 1$$

permet d'établir les corollaires suivants:

Corollaire 4 *Supposons que* $f = |g|^2$ *où* $g = \frac{(1-\chi)^2}{1+\beta\chi}, \quad |\beta| < 1$. *Alors :*

- $\left[T_N\left(\frac{|1-\chi|^4}{|1+\beta\chi|^2}\right)\right]^{-1}_{k,l} = \frac{A_N(k,\,l,\,\beta)}{B_N(\beta)}, \quad |\beta| < 1,$

$$\begin{aligned}
& A_N\,(k,\, l,\, \beta) \\
= \quad & -(k+1)(l-N-1)k(1+N)(-N+l)(-3Nl+2kl-2l-N+Nk-2+2k)\beta^5 \\
- \quad & (k+1)(l-N-1)(-6N^2l^2+10Nk^2l^2-5N^3k^2-14kl^2+14Nk-5N^2k^2l \\
- \quad & 23N^2k^2+6N^3l-14kl+5N^3k-6Nl^2+15N^3kl-20Nk^2 \\
+ \quad & 6N^2l+32N^2kl+11N^2k+3Nk^2l-31Nkl^2+14k^2l^2+9Nkl \\
- \quad & 15N^2kl^2+14k^2l)\beta^4 \\
- \quad & (k+1)(l-N-1)(12k-6N^2-12l+64Nkl-12l^2+6N^3-12k^2-36kl^2+36k^2l \\
+ \quad & 36k^2l^2+88N^2kl-30N^2kl^2+14N^2k+54N^2l-24N^2l^2-62N^2k^2 \\
- \quad & 10N^2k^2l+10N^3k+24N^3l-10N^3k^2+6Nk+18Nl-48Nl^2 \\
+ \quad & 30N^3kl-84Nk^2-74Nkl^2+2Nk^2l+20Nk^2l^2)\beta^3 \\
- \quad & (k+1)(l-N-1)(-12k+30N^2+12l+128Nkl-48N-60l^2+18N^3-60k^2+64kl \\
- \quad & 44kl^2+44k^2l+44k^2l^2+112N^2kl-30N^2kl^2+6N^2k \\
+ \quad & 126N^2l-36N^2l^2-78N^2k^2-10N^2k^2l+10N^3k+36N^3l \\
- \quad & 10N^3k^2-46Nk+102Nl-108Nl^2+30N^3kl-152Nk^2 \\
- \quad & 86Nkl^2-2Nk^2l+20Nk^2l^2)\beta^2 \\
- \quad & (k+1)(l-N-1)(-60k+78N^2-72+60l+105Nkl+48N-84l^2+18N^3-84k^2+82kl \\
- \quad & 26kl^2+26k^2l+26k^2l^2+68N^2kl-15N^2kl^2-N^2k \\
+ \quad & 114N^2l-24N^2l^2-47N^2k^2-5N^2k^2l+5N^3k+24N^3l \\
- \quad & 5N^3k^2-64Nk+150Nl-96Nl^2+15N^3kl-122Nk^2-49Nkl^2 \\
- \quad & 3Nk^2l+10Nk^2l^2)\beta \\
- \quad & (k+1)(l-N-1)(3+N)(l-N-2)(k+2)(2kl+Nk+6k-6l-3Nl-3N-6)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B_N\,(\beta) \quad = \quad & 6N(N+1)^2(N+2)\beta^3 \\
+ \quad & 6N(1+N)(N+2)(3N+11)\beta^2 \\
+ \quad & 6(N+2)(3+N)((N+4)(3N+1)\beta \\
+ \quad & 6(N+2)(N+3)^2(N+4).
\end{aligned}$$

- *On obtient également la trace exacte de* $T_N(f)^{-1}$ *:*

$$\mathrm{Tr}\left[T_N\left(\frac{|1-\chi|^4}{|1+\beta\chi|^2}\right)^{-1}\right] = \frac{C_N(\beta)}{D_N(\beta)}, \; |\beta| < 1,$$

où

$$\begin{aligned}C_N(\beta) &= N(N-1)(N+1)^2(N+2)(N+3)(N^2+2N+6)\beta^5\\&+(N-1)(3+N)(N+2)(5N^3+31N^2+44N+42)\beta^4\\&+2(N-1)(5N^5+72N^4+383N^3+912N^2+698N+240)\beta^3\\&+2(N-1)(5N^5+88N^4+607N^3+2048N^2+2742N+480)\beta^2\\&+(N+2)(N+3)(5N^4+74N^3+397N^2+862N-918)\beta\\&+(N+2)(N+3)(N^4+18N^3+133N^2+510N+598)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}D_N(\beta) &= 420N(N+1)^2(N+2)\beta^3\\&+ 420N(N+1)(N+2)(3N+11)\beta^2\\&+ 420(N+2)(3+N)(N+4)(3N+1)\beta\\&+ 420(N+2)(N+3)^2(N+4).\end{aligned}$$

Supposons que x et y soient liés de sorte que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{k}{N}=x \text{ et } \lim_{N\to\infty}\frac{l}{N}=y$$

où x et $y\in[0,1]$. Alors :

Corollaire 5

$$\frac{1}{N^3}\left[T_N(f)^{-1}\right]_{x,y}=G_4(x,y)+o\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$G_4(x,y)=(\beta+1)^2\left(\frac{-x^3}{6}+\frac{x^2y}{2}-x^2y^2+\frac{x^3y^2}{2}+\frac{x^2y^3}{2}-\frac{x^3y^3}{3}\right)\quad si\ x\le y,$$

$$G_4(x,y)=(\beta+1)^2\left(\frac{-y^3}{6}+\frac{y^2x}{2}-x^2y^2+\frac{x^3y^2}{2}+\frac{x^2y^3}{2}-\frac{x^3y^3}{3}\right)\quad si\ x\ge y.$$

Étude pour le symbole $f=|1-\chi|^{2\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$

Par la suite nous désignerons ce symbole comme le **cas multicanonique** (canonique pour $\alpha 1$). Comme précédemment, nous commençons par établir un théorème de structure.

Théorème 5 *Soit $f=|1-r\chi|^{2\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $0<r<1$. Alors, pour $r=1$:*

- $$\begin{aligned}(T_1)_{kl} = \frac{1}{((\alpha-1)!)^2}\Bigg((\alpha-1)!\frac{(\alpha-1+l-k)!}{(l-k)!}+\alpha!\frac{(\alpha+l-k)!}{(l-k+1)!}\\+\cdots\\+\frac{(\alpha+k-2)!}{(k-1)!}\frac{(\alpha+l-2)!}{(l-1)!}+\frac{(\alpha+l-1)!}{k!}\frac{(\alpha+k-1)!}{l!}\Bigg).\end{aligned}$$
- $X_k=\pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right)\in \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$.
- *La dimension de l'espace $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ est égale à α, une base naturelle de $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ étant $\left\{\frac{\chi^j}{(1-\chi)^{j+1}}\right\}_{j=0\ldots\alpha-1}$.*

- $\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im} H^*_{\Phi_N}}$ *est un automorphisme de* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$.

Nous allons appliquer ce théorème au cas $\alpha = 2$.

Corollaire 6 *Soit* $f = |1-\chi|^4$.
Alors le terme général de $T_N(f)^{-1}$ *est donné par :*

$$\begin{aligned}\left[T_N\left(|1-\chi|^4\right)^{-1}\right]_{k,l} &= \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(3k-l+3)\\ &- \frac{1}{6}(k+1)(l+1)(k+2)(l+2)\\ &\times \frac{(6N^2-3Nk-3Nl+27N+2kl-6k-6l+30)}{(N+2)(N+3)(N+4)}.\end{aligned}$$

Remarque : On peut également retrouver ce résultat à partir du corollaire 4 en faisant $\beta = 0$.

Corollaire 7 *La trace exacte de* $T_N\left(|1-\chi|^4\right)^{-1}$ *est*

$$\mathrm{Tr}\left[T_N\left(|1-\chi|^4\right)^{-1}\right] = \frac{1}{420}(N+1)(N+5)(N^2+6N+14).$$

Si l'on suppose que k, l et N sont liés par

$$\lim_{N\to\infty}\frac{k}{N} = x, \lim_{N\to\infty}\frac{l}{N} = y$$

on obtient:

Corollaire 8

$$\frac{1}{N^3}\left[T_N\left(|1-\chi|^4\right)^{-1}\right]_{k,l} = G_4(x,y) + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

$$G_4(x,y) = \frac{-x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} - x^2y^2 + \frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^2y^3}{2} - \frac{x^3y^3}{3} \;\; si\ x \le y$$
$$G_4(x,y) = \frac{-y^3}{6} + \frac{y^2x}{2} - x^2y^2 + \frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^2y^3}{2} - \frac{x^3y^3}{3} \;\; si\ x \ge y.$$

$G_4(x,y)$ est le noyau de Green associé à l'opérateur dérivée 4-ième sur $[0,1]$, ($f^{(4)} = g$) avec les conditions limites données par :

$$0 = f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1)$$

Etude pour le symbole $f = |(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)|^2$ où $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$ et $\chi_1 \neq \chi_2$.

Nous commençons avec le théorème de structure suivant:

Théorème 6 *Lorsque* $f_r = |(1-r\chi_1\chi)(1-r\chi_2\chi)|^2$ *où* $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$, $0 < r < 1$ *et* $\rho = \dfrac{1}{\chi_1 - \chi_2}$.

- *Une évaluation du premier terme* $(T_1)_{k,l}$ *pour* $k \le l$, *est donnée par:*

$$(T_1)_{k,l} = |\rho|^2 \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \bar{\alpha}_{j+(l-k)} \;\; où\ \alpha_j = \chi_1^{j+1} - \chi_2^{j+1},\ pour\ r = 1. \tag{1.2}$$

- *L'espace* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ *est de dimension 2, une base étant* $\left\{\frac{1}{1-r\chi_1\chi}, \frac{1}{1-r\chi_2\chi}\right\}$.

- $X_k(r) = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{g_r}\right)\right)$ *est donné par :*

$$\begin{aligned} X_k(r) &= |\rho|^2\sum_{j=0}^{k}\left(1+(-1)^j\right)(1-r^4)r^{N+2j-k+3}\frac{1}{1-r\chi_1\chi} \\ &\quad -|\rho|^2\sum_{j=0}^{k}(-1)^{N+2j-k+2}\left(1+(-1)^j\right)(1-r^4)r^{N+2j-k+3}\frac{1}{1-r\chi_2\chi}. \end{aligned}$$

- $\left(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}}$ *est un automorphisme de* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$.

Corollaire 9 *Soit* $f = |g|^2$ *où* $g = 1-\chi^2$*. Alors pour* $k \leq l$*, on a :*

$$\left[T_N(f)^{-1}\right]_{k,l} = \begin{cases} l+1-2\dfrac{(k+1)(l+1)(5+2N+(-1)^{(1+N)})}{(2N^2+12N-(-1)^N+17)} & \text{si } k \text{ et } l \text{ pairs} \\ 0 & \text{si } k+l \text{ est impair} \\ k+1-2\dfrac{lk((-1)^N+7+2N)}{(2N^2+12N-(-1)^N+17)} & \text{si } k \text{ et } l \text{ impairs} \end{cases}$$

Corollaire 10 *Un développement exact de la trace est donné par :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left[T_N(f)^{-1}\right] &= \frac{1}{24}(N+4)(N+2)\frac{(2N^2+2N(-1)^N+14N+3(-1)^N+21)}{2N^2+12N+17-(-1)^N} \\ &+ \frac{1}{24}N(N+2)\frac{(2N^2+18N+2N(-1)^{(1+N)}+5(-1)^{(1+N)}+37)}{2N^2+12N+17-(-1)^N} \\ &= \frac{1}{12}(N+2)\frac{(2N^3+20N^2+3N(-1)^N+57N+6(-1)^N+42)}{2N^2+12N+17-(-1)^N}. \end{aligned}$$

Corollaire 11 *Si l'on suppose que* $\lim_{N\to\infty}\frac{k}{N} = x$ *et* $\lim_{N\to\infty}\frac{l}{N} = y$*, alors,*

$$\frac{1}{N}\left[T_N(|1-\chi^2|)\right]_{k,l} = 8xy - \min(x,y) + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

C'est à notre connaissance, la première fois que ces formules apparaissent. Toutes les formules exactes ont été vérifiées numériquement.

Parmi les auteurs dont les travaux concernent l'inverse exacte des matrices de Toeplitz, il faut citer en particulier Trench dont la bibliographie sur le sujet est impressionnante. Trench a établi des formules récursives qui permettent le calcul de l'inverse des matrices de Toeplitz bandes, et il traite ce problème de façon exhaustive. Cependant sa méthode ne considère pas le cas d'un symbole singulier et ne permet donc pas de mettre en évidence des noyaux de Green associés au type de singularité du symbole. Remarquons enfin que par exemple dans le cas d'un symbole à singularités multiples; nous sortons des hypothèses du théorème de Spitzer-Stone, mettant en évidence un noyau de Green associé à un opérateur dérivée seconde sur $[0,1]$, avec cependant des conditions limites différentes.

1.3 Spectre extrême des opérateurs de Toeplitz

Dans [GS], Grenander et Szegö établissent le résultat suivant : si $f \in L^1(\mathbb{T})$, f étant essentiellement bornée par $m_f = \inf_{\mathbb{T}} f$ et $M_f = \sup_{\mathbb{T}} f$, alors

i) $\mathrm{Spec}(T_N(f) \subset [m_f, M_f]$
ii) Si $\lambda_0(N) < \lambda_1(N) < \cdots < \lambda_N(N)$ sont les valeurs propres de $T_N(f)$, alors $\lim_{N\to\infty} \lambda_0(N) = m_f$ et $\lim_{N\to\infty} \lambda_N(N) = M_f$.

Le comportement asymptotique des valeurs propres extrêmes se trouve au centre d'une série de travaux, que je vais tenter de décrire en donnant leur rapport avec mes résultats.

Ce chapitre a pour origine la lecture de deux articles de H. Widom et S. Parter, cités en [W1] et [SP]. S. Parter, dans son article, énonce un théorème donnant une évaluation asymptotique des valeurs propres extrêmes d'un opérateur de Toeplitz $T_N(f)$ associé à un symbole f vérifiant les hypothèses

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est une fonction réelle, continue de période } 2\pi \text{ dont le minimum } m \text{ est atteint au seul point } 0; \\ \text{la dérivée } f^{(2\alpha)}(0) = \sigma^2 \text{ est la première dérivée non nulle.} \end{array} \right. \tag{1.3}$$

Nous avons le théorème suivant dû à S. Parter:

Théorème 7 (S. Parter) *Considérons les hypothèses 1.3 avec $\alpha = 2$. Alors si $\lambda_k(N)$ est la k-ième plus petite valeur propre de $T_N(f)$, on a:*

$$\lambda_k(N) = m + \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{2(N+3)}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

E_k est déterminé par

$$\tan\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) = (-1)^k \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right)$$

On peut considérer que les idées aboutissant à la méthode mise en œuvre par Seymour Parter remontent à l'article de Kac, Murdock et Szegö [KMS], datant de 1953.

Les auteurs traitent le cas où $\alpha = 1$ et démontrent qu'avec les hypothèses (1.3) on obtient l'équivalence

$$\lambda_k(N) - m \simeq \frac{\sigma^2\pi^2}{2}\frac{k^2}{N^2}. \tag{1.4}$$

L'idée qui sous-tend ce résultat est la suivante:

> Il suffit de démontrer 1.4 par récurrence pour des symboles f qui sont soit des polynômes trigonométriques de degré 1, soit des inverses de tels polynômes.

Le cas des polynômes trigonométriques d'ordre 1 a déjà été traité dans l'article de M. Kac [K] en 1946.

L'idée nouvelle est ici que si l'on peut encadrer les fonctions vérifiant (1.3) par des symboles spéciaux précédents et utiliser alors le théorème de Weyl-Courant (cité dans [SP] par exemple) pour en déduire (1.4) pour tous les symboles vérifiant (1.3).

En 1956, Widom dans [W1] améliore l'approximation (1.4) quitte à renforcer légèrement l'hypothèse (1.3) qui est remplacée par (1.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est une fonction réelle, continue de période } 2\pi \\ f(0) = M \text{ est l'unique valeur où le maximum de } f \text{ est atteint} \\ f(\theta) \text{ est paire et dérivable jusqu'à l'ordre 4 avec } \sigma^2 = -f''(0) \neq 0. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Alors si k est fixé, on a

$$\lambda_k(N) = M - \frac{\sigma^2\pi^2 k^2}{2(N+1)^2}\left(1 + \frac{a}{N+1}\right) + o\left(\frac{1}{N^3}\right), \tag{1.6}$$

où a est une constante dépendant de f que l'on peut calculer (cf. [W1]).

Widom reprend de [KMS] l'idée qu'il suffit de montrer (1.6) pour une classe particulière de symboles, en l'occurrence pour les polynômes trigonométriques vérifiant (1.5) et dont les zéros complexes de $f(\theta) - M$ sont simples. Par des encadrements de fonctions vérifiant (1.5) au moyen des polynômes précédents, et avec l'argument de Courant-Weyl, il en déduit (1.6) pour la classe de symboles vérifiant (1.5).

Mais l'idée nouvelle de Widom est de remarquer que les valeurs propres $\lambda_k(N)$ de $T_N(f)$ vérifient

$$\lambda_k(N) = f(\theta_k)$$

et puis de caractériser les θ_k pour lesquels $f(\theta_k)$ est valeur propre. Précisons rapidement ce point.

Si f est un polynôme trigonométrique vérifiant (1.5)

$$f(\theta) = \sum_{j=-k}^{k} c_j e^{ij\theta} \text{ avec } c_j = c_{-j},$$

on forme le polynôme caractéristique

$$P(z,\ \lambda) = z^k\left(\sum_{j=-k}^{k} c_j z^j - \lambda\right).$$

Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour $\lambda \in]M-\delta,\ M[= I$, les racines de $f(\theta) - \lambda$ et les racines correspondantes $\rho_j = e^{i\theta_j}$ de $P(z,\ \lambda)$ sont simples. De plus λ est une valeur propre de $T_N(f)$ si et seulement si les ρ_j satisfont à

$$D = 0 \text{ avec } D = \sum_{\widetilde{\rho}_1, \widetilde{\rho}_2, \ldots, \widetilde{\rho}_k} \frac{(\widetilde{\rho}_1 \cdots \widetilde{\rho}_k)^{k+N+1}}{P'(\widetilde{\rho}_1)\cdots P'(\widetilde{\rho}_k)} \prod_{s<t}(\widetilde{\rho}_s - \widetilde{\rho}_t)^2,$$

où la sommation a lieu sur toutes les combinaisons de k racines de $P(z,\ \lambda)$.

Remarquons que Widom s'intéresse aux grandes valeurs propres ce qui est théoriquement équivalent à l'étude des petites valeurs propres. On peut donc énoncer les résultats de Widom en termes de petites valeurs propres .

En améliorant la condition $D = 0$ de Widom, Seymour Parter donne une équation aux valeurs propres valable pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$ et dont l'exploitation permet le développement asymptotique des petites valeurs propres pour $\alpha = 2$, donné par le théorème énoncé au début de ce chapitre.

Nous proposons dans cet article un point de vue radicalement différent basé sur une idée géométrique. Cette idée est que l'on peut interpréter $T_N(f)$, sous certaines hypothèses de régularité de f, comme un projecteur d'un espace de Hilbert (à un facteur multiplicatif près).

Cela conduit à une formule d'inversion analogue à celle du paragraphe 1.2.1, mais avec des hypothèses différentes concernant la factorisation de f. Nous indiquerons par ailleurs au chapitre 4.1 une démonstration basée sur une formule de Kozak, qui m'a été communiquée par Estelle Basor.

Des formules d'inversion des opérateurs de Toeplitz apparaissent dans [RRS], [KS] ou [W2].

La formule d'inversion utilisée dans cette thèse permet l'estimation asymptotique des valeurs propres extrêmes et l'on retrouve ainsi le théorème de Seymour Parter.

Cependant les hypothèses présidant à la formule d'inversion utilisée sont plus générales que les hypothèses (1.3). Nous illustrons dans ce travail cette généralisation par deux exemples.

Dans le premier, nous donnons 2 théorèmes de structure qui montrent que lorsque le symbole possède un minimum multiple (comme $1 - \cos p\theta,\ p \in \mathbb{N}$), l'information sur les valeurs propres extrêmes de $T_N(1-\cos p\theta)$ est contenue dans la restriction des opérateurs de Hankel à un sous-espace vectoriel de dimension p de $L^2(\mathbb{T})$. Citons de façon précise le deuxième de ces théorèmes (l'énoncé du premier est donné dans le chapitre 4), utile pour le symbole $f = |1-\chi^{2p}|^2$

Théorème 8 *Soit $f_{\lambda,r} = g_{1,r}g_{2,r}$ où $r \in [0,\ 1[$, soit*

$$\left\{\begin{array}{l} g_{1,r} = \prod\limits_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i\bar{\chi}_0 - r\chi)(\varepsilon_i\chi_0 - r\chi) \\ g_{2,r} = \prod\limits_{\varepsilon_i \in N_p} (\varepsilon_i\bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})(\varepsilon_i\chi_0 - r\bar{\chi}) \end{array}\right. ,$$

où U_p désigne l'ensemble des racines p-ièmes de -1, et où N_p est le groupe des racines p-ièmes de 1. Si on pose

$$\Phi_N = \frac{g_{1,r}}{g_{2,r}}\chi^{N+1} \text{ et } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_{2,r}}{g_{1,r}}\bar{\chi}^{N+1},$$

et si on définit les opérateurs de Hankel H_{Φ_N} et $H_{\tilde{\Phi}_N}$ par $T_\Lambda(f)$:

$$\forall\psi \in H^{2+} \quad H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-(\Phi_N\psi),$$

$$\forall\varphi \in H^{2-} \quad H_{\tilde{\Phi}_N}(\varphi) = \pi_+(\tilde{\Phi}_N\varphi),$$

alors :

(i) l'espace

$$F = \mathrm{vect}\left\{\frac{1}{\varepsilon_i\bar{\chi}_0 - r\chi},\ \frac{1}{\varepsilon_i\chi_0 - r\chi}\right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$$

est stable par $I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}$. On note A_{2p} la matrice représentant $(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N})\big|_F$ dans la base $\left\{\frac{1}{\varepsilon_i\bar{\chi}_0 - r\chi},\ \frac{1}{\varepsilon_i\chi_0 - r\chi}\right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$.

(ii) $\lambda \in [0,\ 4]$ tel que $\lambda = \left|1-\chi_0^{2p}\right|^2$ est une valeur propre de $T_N\left(\left|1-\chi^{2p}\right|^2\right)$ si et seulement si $\chi_0 = e^{i\theta_0}$ vérifie :

$$\lim_{r\to 1} \det(A_{2p}) = 0 \text{ et } \lambda = 2(1-\cos 2p\theta_0).$$

En appliquant ce théorème pour $p = 2$, nous obtenons le théorème suivant:

Théorème 9 *Soit $\lambda_k(N)$ la k-ième valeur propre de $T_N\left(|1-\chi^2|^2\right)$, on a*

$$\lambda_k(2N) = \lambda_k(2N-1) = \left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5}\right).$$

Dans le second exemple, nous montrons comment cette idée géométrique permet le calcul de la perturbation des valeurs propres en fonction de celle du symbole: cela s'avère possible dès qu'on a accès à la perturbation des opérateurs de Hankel, définis ci-dessus.

A titre d'illustration, nous considérons le symbole

$$f(\theta) = \frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2},\ |\beta| < 1$$

comme perturbation du symbole $|1-\chi|^2$. Nous établissons alors le théorème de perturbation suivant:

Théorème 10 *Notons $\lambda_k(N)$ la k-ième valeur propre de $T_N\left(|1-\chi|^2\right)$ et $\lambda_{k,\,\beta}(N)$ la k-ième valeur propre de $T_N\left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}\right)$ alors on obtient alors :*

$$\lambda_{k,\,\beta}(N) = \lambda_k(N) p_k(N,\beta)$$

où

$$p_{2k}(N,\beta) = \frac{1 + \dfrac{\left[\beta\frac{\Phi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{N+2}+\xi\right)}{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}+\xi\right)}}{1 + \dfrac{2\beta\left[\beta\frac{\Phi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{N+2}+\xi\right)}{1+\beta^2-2\beta\cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)}}$$

et

$$p_{2k+1}(N,\beta) = \frac{1 + \dfrac{\left[\beta\frac{\psi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{N+2}+\xi\right)}{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}+\xi\right)}}{1 + \dfrac{2\beta\left[\beta\frac{\psi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{N+2}+\xi\right)}{1+\beta^2-2\beta\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{N+2}\right)}},$$

où

$$\phi(N,k) = (-1)^k 2\sin\left(k\frac{N+4}{N+2}\pi\right),$$

$$\psi(N,k) = (-1)^k 2\cos\left((2k+1)\frac{N+4}{N+2}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$|\xi| < \left|\beta\frac{\alpha(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right|, \text{ } \alpha \textit{ étant } \phi \textit{ ou } \psi \textit{ suivant la parité de } k$$

$$o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ à } \beta \text{ fixé,}$$

$$o_N(\beta) = o(\beta) \text{ à } N \text{ fixé.}$$

Parmi les travaux récents sur le sujet, on se doit de citer ceux de Stefano Serra [StSe]. Cet auteur retrouve entre autres le comportement asymptotique de la plus petite valeur propre de $T_N(f)$, autrement dit $\lambda_0(N)$, en ayant comme seule hypothèse sur f :
$f \in L^1(\mathbb{T})$ et $f - \inf_{\mathbb{T}} f \sim |x-x_0|^{2k}$ au voisinage de la position x_0 du minimum de f impliquent $\lambda_0(N) - \inf_{\mathbb{T}} f = O(1/N^{2k})$.

Enfin nous achevons ce travail comme nous l'avons commencé, par la géométrie.

Soit $\widetilde{\Lambda}$ un polytope de $\mathbb{R}^d$ et Λ sa trace sur $\mathbb{Z}^d$. Si Π_Λ représente la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}^d)$, $\mathbb{T}^d$ étant le tore de dimension d, $H^2(\Lambda)$, on définit l'opérateur de Toeplitz associé à Λ et au symbole f par $T_\Lambda(f) = \Pi_\Lambda(T(f))\Pi_\Lambda$. Là encore, comme en dimension 1, sous certaines hypothèses de régularité de f, l'opérateur $T_\Lambda(f)$ est un projecteur d'un certain espace de Hilbert. Cette interprétation donne lieu à deux théorèmes d'inversion adaptés au calcul du spectre de $T_\Lambda(f)$ en dimension d. Cela représente une ouverture essentielle : avoir une méthode qui résiste au passage aux dimensions supérieures à 1, tout en permettant de traiter la dimension 1, cadre de l'exposé des premiers chapitres.

Les différentes formules d'inversion, (théorèmes 12, 16) ainsi que les démonstrations de ces théorèmes sont rédigées dans le Chapitre 4.

Chapitre 2

Inverse asymptotique de la matrice de Toeplitz à symbole singulier et noyau de Green

2.1 Développement exact pour $f = |1-\chi|^2/|P|^2$

On se propose dans cette partie de donner des expressions exactes des éléments de $(T_N(f))^{-1}$ avec $f = |1-\chi|^2/|P|^2$, où P est un polynôme trigonométrique de la forme $P = \sum_{s=0}^{m} \beta_s \chi^s,\ \ P \neq 0$.

Ces expressions sont données par le théorème 2 et son corollaire 1 énoncés au chapitre 1.

Remarque : La démonstration de ce théorème repose principalement sur la formule d'inversion (théorème 1) donnée au chapitre précédent. On procède en deux étapes, la formule d'inversion ne s'appliquant qu'à des symboles réguliers. On considère dans un premier temps une famille de symboles "réguliers" obtenus à partir de f par une approximation que l'on précisera.

Démonstration du théorème 2 :

On utilisera dans la suite la formule d'inversion énoncée dans le théorème 1, dont une conséquence est :

Si $f > 0$, si $f = g\bar{g}$, $\quad g, g^{-1} \in H^\infty$, alors

$$[T_N(f)^{-1}]_{k,l} = (T_1)_{k,l} - (T_2)_{k,l}$$

où

$$(T_1)_{k,l} = \langle \pi_+(\chi^k/\bar{g}), \pi_+(\chi^l/\bar{g})\rangle$$

et

$$(T_2)_{k,l} = \langle (I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} \pi_+ \bar{\Phi}_N \pi_+(\chi^k/\bar{g}), \pi_+ \bar{\Phi}_N \pi_+(\chi^l/\bar{g})\rangle$$

Dans la suite, on fera allusion à $(T_1)_{k,l}$ et $(T_2)_{k,l}$ sous le nom de premier terme et deuxième terme de la formule d'inversion.

On va évaluer ces deux termes pour le symbole régularisé $f_r(e^{i\theta}) = \dfrac{|1-re^{i\theta}|^2}{|P(e^{i\theta})|^2}$ avec $0 < r < 1$.

Calcul du premier terme de la formule d'inversion.

Calcul de $\pi_+(\chi^k/\bar{g})$.

On a

$$\pi_+(\chi^k/\bar{g}) \quad = \quad \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \pi_+(\chi^{k-u}/(1-r\bar{\chi}))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=0}^{m} \bar\beta_u \bar\chi(\chi^{k-u+1} - r^{k-u+1})/(1-r\bar\chi) \\
&= \sum_{s=0}^{k-m} \bar\beta_{k-s} \bar\chi(\chi^{s+1} - r^{s+1})/(1-r\bar\chi).
\end{aligned}$$

En effet:

$$\begin{aligned}
\pi_+(\chi^s/(1-r\bar\chi) &= \chi^s/(1-r\bar\chi) - \pi_-(\chi^s/(1-r\bar\chi) \\
&= \chi^s/(1-r\bar\chi) - \bar\chi(r^{s+1}\bar\chi/(1-r\bar\chi)) \\
&= \bar\chi(\chi^{s+1} - r^{s+1})/(1-r\bar\chi).
\end{aligned}$$

Le premier terme de la formule d'inversion est alors, en posant $\beta_u = 0$ si $u > m$:

$$\begin{aligned}
A &= \langle \pi_+(\chi^k/\bar g), \pi_+(\chi^l/\bar g)\rangle \\
&= \sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k} \bar\beta_{k-s}\beta_{l-s'} \langle (\chi^{s+1} - r^{s+1})/(1-r\bar\chi), (\chi^{s'+1} - r^{s'+1})/(1-r\bar\chi)\rangle.
\end{aligned}$$

On a $\langle (\chi^{s+1}-r^{s+1})/(1-r\bar\chi), (\chi^{s'+1}-r^{s'+1})/(1-r\bar\chi)\rangle = r^{|s-s'|}\left(1 - r^{2\min(s+1,s'+1)}/(1-r^2)\right)$.

En effet le produit scalaire ci-dessus peut s'écrire:

$$\langle \chi^{s+1}(1-(r\bar\chi)^{s+1})/(1-r\bar\chi), (\chi^{s'+1}(1-(r\bar\chi)^{s'+1})/(1-r\bar\chi)\rangle.$$

Un calcul élémentaire donne $r^{s-s'}(1-r^{2(s'+1)})/(1-r^2)$ si $s \geq s'$, et donc A.

Calcul du deuxième terme de la formule d'inversion.

Calcul de $\pi_+\bar\Phi_N\pi_+\left(\dfrac{\chi^k}{\bar g}\right) = x_k$.

Compte tenu de la formule d'inversion, l'idée est de calculer x_k en le décomposant dans une somme de deux espaces adaptés à l'opérateur $(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})^{-1}$. Le calcul repose sur le lemme suivant.

Lemme 1 *Le vecteur* $\frac{1}{1-r\chi}$ *est propre pour l'opérateur* $(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N})^{-1}$.

<u>Démonstration</u> : Pour montrer que $\dfrac{1}{1-r\chi}$ est un vecteur propre de $\left(I - H_{\Phi^*_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}$, il suffit, en utilisant la formule de Von Neumann, d'établir que $\dfrac{1}{1-r\chi}$ est un vecteur propre de $\left(H_{\Phi^*_N}H_{\Phi_N}\right)$.

Il faut calculer :

$$\pi_-\left(\chi^{N+1}\frac{g_1(\chi)}{\bar g_1(\chi)}\frac{1-r\chi}{1-r\bar\chi}\frac{1}{1-r\chi}\right) = \pi_-\left(\frac{g_1(\chi)}{\bar g_1(\chi)}\frac{\chi^{N+1}}{1-r\bar\chi}\right) =$$

$$\pi_-\left(\sum_{u\geq -m}\frac{\gamma_u\chi^{u+N+1}}{1-r\bar\chi}\right) = \sum_{u\geq -m}\gamma_u\frac{r^{u+N+2}\bar\chi}{1-r\bar\chi} = \frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\frac{\bar\chi r^{N+2}}{1-r\bar\chi}.$$

$$H_{\Phi^*_N}H_{\Phi_N}\left(\frac{1}{1-r\chi}\right) = \pi_+\left(\bar\chi^{N+1}\frac{\bar g_1(\chi)}{g_1(\chi)}\frac{1-r\bar\chi}{1-r\chi}\frac{\bar\chi}{1-r\bar\chi}r^{N+2}\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\right) =$$

$$r^{N+2}\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\pi_+\left(\sum_{u\geq -m}^{\infty}\bar\gamma_u\frac{\chi^{u+N+2}}{1-r\chi}\right) =$$

$$r^{N+2}\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\left(\sum_{u\geq -m}^{\infty}\bar\gamma_u\frac{r^{u+N+2}}{1-r\chi}\right) = r^{N+2}\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\left(\sum_{u\geq -m}^{\infty}\bar\gamma_u r^u\right)\frac{1}{1-r\chi} =$$

$$r^{2(N+2)}\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\frac{\bar g_1(r)}{g_1(1/r)}\frac{1}{1-r\chi}=r^{2(N+2)}\frac{1}{1-r\chi}G(r),$$

où l'on a posé $\frac{g_1(r)}{\bar g_1(1/r)}\frac{\bar g_1(r)}{g_1(1/r)}=G(r)$.

(On remarque que $G(1)=1$ et que $G'(1)=2A(P)=-4\Re\left(P(1)\bar P(1)/|P(1)|^2\right)$.)

Nous allons décomposer x_k sous la forme $x_k=x'_k+y_k$, où $x'k$ et y_k sont respectivement proportionnel et orthogonal au vecteur $\frac{1}{1-r\chi}$.

On a:

$$\pi_+(\chi^k/\bar g)=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\bar\chi(\chi^{s+1}-r^{s+1})/(1-r\bar\chi).$$

et

$$\bar\Phi_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)=\bar\chi^{(N+2)}\sum_{u\geq -m}\bar\gamma_u\,\bar\chi^u(1-r\bar\chi)/(1-r\chi)\left(\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(\chi^{s+1}-r^{s+1})/(1-r\bar\chi)\right),$$

finalement

$$\pi_+\bar\Phi_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)=\sum_{u\geq -m}\pi_+\left(\bar\chi^{N+2+u}\bar\gamma_u\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(\chi^{s+1}-r^{s+1})/(1-r\chi)\right)$$

et en développant on obtient:

$$\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\left(\sum_{u=-m}^{-N-2+s+1}\bar\gamma_u(\chi^{-(N+2+u)+s+1}-r^{N+2+u+s+1})/(1-r\chi)\right.$$
$$\left.+\sum_{u\geq\max(-m,-N-2+s+1)}\bar\gamma_u(r^{N+2+u-s-1}-r^{N+2+u+s+1})/(1-r\chi)\right).$$

Ce qui donne, si $p=N+2+u$:

$$x_k=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{p=N+2-m}^{s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}\frac{\chi^{p-s-1}-r^{p+s+1}}{1-r\chi}+\sum_{p=s+2}^{\infty}\bar\gamma_{p-(N+2)}\frac{r^{p-s-1}-r^{p+s+1}}{1-r\chi}.$$

Posons $x_k=x'_k+y_k$ avec $x'_k=(A_{k,N,r})/(1-r\chi)$ où

$$y_k=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\sum_{p=N+2-m}^{s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}\frac{\bar\chi^{s+1-p}-r^{s+1-p}}{1-r\chi}$$

et où l'on a posé :

$$\begin{aligned}A_{N,k,r}&=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\Big(r^{s+1}\sum_{p=N+2-m}^{s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}(r^{-p}-r^{p})\\&\quad+\Big(\sum_{p>s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}r^{p}(r^{-(s+1)}-r^{s+1})\Big).\end{aligned}$$

Un calcul direct montre que :

$$\left\langle\frac{1}{1-r\chi},y_k\right\rangle=y_k(r)=0.$$

La décomposition annoncée est donc réalisée.

Lemme 2 *Le deuxième terme s'écrit:*

$$\left\langle \left(I - H_{\Phi_N^*} H_{\Phi_N}\right)^{-1} x_k', x_l' \right\rangle + \langle y_k, y_l \rangle .$$

Démonstration : Calculons : $H_{\Phi_N}(y_k) = \pi_-(\Phi_N y_k)$. Pour cela il faut, par linéarité de la projection, évaluer :

$$\pi_- \left(\left(\sum_{u \geq -m} \gamma_u \chi^u \chi^{N+1} \frac{1 - r\chi}{1 - r\bar{\chi}} \right) \left(\frac{\bar{\chi}^{s+1-p} - r^{s+1-p}}{1 - r\chi} \right) \right)$$

ou encore :

$$\pi_- \left(\left(\sum_{u \geq -m} \gamma_u \frac{\chi^{N+1+u}}{1 - r\bar{\chi}} \right) \left(\bar{\chi}^{s+1-p} - r^{s+1-p} \right) \right);$$

avec $-p+s+1>0$, $N+2+u>0$, $N+2+u-p+s+1>0$. Or:

$$\begin{aligned} \pi_- \left((\chi^{N+2+u-p+s} - r^{-p+s+1} \chi^{N+1+u}) / (1 - r\bar{\chi}) \right) &= \\ \bar{\chi} \left((r^{N+2+u-p+s+1} - r^{-p+s+1} r^{N+2+u}) / (1 - r\bar{\chi}) \right) &= 0. \end{aligned}$$

Le deuxième terme vaut donc :

$$\pi_- \left\langle \left(I - H_{\Phi_N^*} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (x_k') + y_k, (x_l' + y_l) \right\rangle .$$

On conclut avec le lemme 1

Nous sommes en mesure maintenant d'établir le résultat annoncé (théorème 2) par un calcul direct.

$\dfrac{1}{1 - r\chi}$ étant vecteur propre de l'opérateur $H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}$ associé à la valeur propre $r^{2(N+2)} G(r)$, on peut écrire :

$$\left\langle \left(I - H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^{-1} (x_k'), (x_l') \right\rangle = \frac{A_{k,N,r} \overline{A_{l,N,r}}}{1 - r^2} \frac{1}{1 - r^{2(N+2)} G(r)}.$$

Il reste donc à calculer $\langle y_k, y_l \rangle$ qui est combinaison linéaire des termes:

$$\left\langle \frac{\chi^{-p+s+1} - r^{-p+s+1}}{1 - r\chi}, \frac{\chi^{-p'+s'+1} - r^{-p'+s'+1}}{1 - r\chi} \right\rangle .$$

Or on a des égalités de produits scalaires

$$\left\langle \frac{\chi^v - r^v}{1 - r\chi}, \frac{\chi^{v'} - r^{v'}}{1 - r\chi} \right\rangle = \left\langle \frac{\chi^v - r^v}{1 - r\bar{\chi}} \frac{1 - r\bar{\chi}}{1 - r\chi}, \frac{\chi^{v'} - r^{v'}}{1 - r\bar{\chi}} \frac{1 - r\bar{\chi}}{1 - r\chi} \right\rangle = \left\langle \frac{\chi^v - r^v}{1 - r\bar{\chi}}, \frac{\chi^{v'} - r^{v'}}{1 - r\bar{\chi}} \right\rangle .$$

On retrouve un calcul déjà fait et on obtient $r^{v-v'} \frac{1 - r^{2(v'+1)}}{1 - r^2}$ si $v' \leq v$. D'où:

$$\langle y_k, y_l \rangle =$$
$$\sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s} \beta_{l-s} \sum_{p=N+2-m}^{s+1} \sum_{p'=N+2-m}^{s'+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \gamma_{p'-(N+2)} r^{|p-p'+s'-s|} r^2 \frac{1 - r^{2\inf(s-p+1, s'-p'+1)}}{1 - r^2}.$$

En posant $\langle y_k, y_l \rangle = c_{k,l,r}$ on peut écrire l'expression suivante de $\left[(T_N f_r)^{-1} \right]_{k,l}$ pour $r < 1$:

$$\begin{aligned} \left[(T_N f_r)^{-1} \right]_{k+1,l+1} &= \sum_{s=0}^{k} \sum_{s'=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s} \beta_{l-s} r^{|s-s'|} \frac{1 - r^{2\min(s+1, s'+1)}}{1 - r^2} \\ &+ \frac{A_{k,N,r} \overline{A_{l,N,r}}}{1 - r^2} \frac{1}{1 - r^{2(N+2)} G(r)} + c_{k,l,r}. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\lim_{r\to 1}\frac{A_{N,k,r}}{1-r^2}=\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\left(\sum_{p=0}^{s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}p+(s+1)\sum_{p>s+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}\right),$$

on obtient finalement

$$\lim_{r\to 1}\left[(T_Nf_r)^{-1}\right]_{k+1,l+1}=a_{k,l}-\frac{d(k)\bar d(l)}{N+2+A(P)}+c_{k,l}.$$

où $a_{k,l}, d(k), d(l)$ ont été précisés au début de la démonstration et où : $c_{k,l}=\lim_{r\to 1}c_{k,l,r}=$

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{l}\bar\beta_{k-s}\beta_{l-s'}\sum_{p=N+2-m}^{s+1}\sum_{p'=N+2-m}^{s'+1}\bar\gamma_{p-(N+2)}\gamma_{p'-(N+2)}\inf(s-p+1,s'-p'+1).$$

Reste à prouver que $\lim_{r\to 1}(T_Nf_r)^{-1}_{k+1,l+1}=(T_Nf)^{-1}_{k+1,l+1}$.

Pour cela on écrit:

$$(T_Nf_r)^{-1}(T_Nf)=(T_Nf_r)^{-1}(T_Nf_r)+(T_Nf_r)^{-1}(T_N(f-f_r)).$$

Comme N est fixé, $\lim_{r\to 1}(T_N(f-f_r))=0$, d'où $\lim_{r\to 1}(T_Nf_r)^{-1}(T_Nf)=I_N$, qui est ce que l'on voulait démontrer.

On en déduit maintenant les corollaires 1 (absence d'effets de bord) et 2 (théorème de trace). Rappelons-en les énoncés succinctement

Corollaire 1 *Supposons $m<k$, $l\le N-m$, alors*

$$\left[(T_N(f))^{-1}\right]_{k+1,l+1}=\sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\beta_{l-s'}\min(s+1,s'+1)$$

$$-\left((k+1)P(1)+\bar P'(1)P(1)/\bar P(1)\right)\left((l+1)\bar P(1)+P'(1)\bar P(1)/P(1)\right)/\left((N+2)+A(P)\right).$$

<u>Démonstration du corollaire 1</u> : Si $k\le N-m$, alors il est clair que

$$\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}\Big(\sum_{p=1}^{s+1}p\bar\gamma_{p-(N+2)}\Big)=0.$$

Pour ces valeurs de k, le terme $d(k)$ est

$$d(k)=-\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(s+1)\left(\sum_{p=s+2}^{\infty}\bar\gamma_{p-(N+2)}\right),$$

pour $k\ge N-m-1$. Le terme de plus petit indice de la somme $\sum_{p=s+2}^{\infty}\bar\gamma_{p-(N+2)}$ est $\bar\gamma_{s-N}$ avec $s-N\le k-N<-m-1$, soit $s-N\le -m$. D'où, finalement, pour ces valeurs de k

$$d(k)=-\sum_{s=0}^{k}\bar\beta_{k-s}(s+1)\frac{P(1)}{\bar P(1)}=-\sum_{s=0}^{m}\bar\beta_{k-s}(s+1)\frac{P(1)}{\bar P(1)}$$

ou, en sommant

$$d(k)=-(k+1)P(1)+\frac{\bar P'(1)P(1)}{\bar P(1)}.$$

Corollaire 2 [Théorème de trace]

Sous les hypothèses du théorème 2 on a :
$\mathrm{Tr}\left(T_N(f)^{-1}\right) = N^2|P(1)|^2/6 + N\left(\frac{2+A(P)}{3}|P(1)|^2 + \Re(P'(1)P(1)) + R(P)\right) + o(N)$, *les coefficients de N et N^2 ne dépendant pas de N pour N assez grand.*

Démonstration du théorème de trace :

La démonstration se fait en deux étapes :

Première étape

On établit la formule annoncée ci-dessus.

Contribution du premier terme de la formule d'inversion à la trace.

Si $m+1 \leq k \leq N$ le premier terme s'écrit:

$$\begin{aligned}
a_{k,k} &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{k-s'} \min(s+1, s'+1) \\
&= \sum_{u=0}^{k}\sum_{u'=0}^{k} \bar{\beta}_{u}\beta_{u'} \min(k-u+1, k-u'+1) \\
&= \sum_{u=0}^{m}\sum_{u'=0}^{m} \bar{\beta}_{u}\beta_{u'} \min(k-u+1, k-u'+1) \\
&= \left(\sum_{u=0}^{m}\sum_{u'=0}^{m} \bar{\beta}_{u}\beta_{u'}\right)(k+1) - \left(\sum_{u=0}^{m}\sum_{u'=0}^{m} \bar{\beta}_{u}\beta_{u'} \max(u,u')\right).
\end{aligned}$$

Soit finalement

$$a_{k,k} = |P(1)|^2(k+1) + C(P)$$

avec

$$C(P) = -\sum_{u=0}^{m}\sum_{u'}^{m} \bar{\beta}_{u}\beta_{u'} \max(u,u').$$

La contribution des m premiers termes de la diagonale est une constante. Elle est en $o(N)$. La contribution des premiers termes de la formule d'inversion à la trace est donc de :

$$T_1(N) = |P(1)|(N+1)(N+2)/2 + NC(P) + o(N).$$

Contribution du deuxième terme de la formule d'inversion à la trace.

Si $k \leq N-m$, alors $d(k)$ a la forme obtenue dans la démonstration du corollaire 1 et le deuxième terme de la formule d'inversion est alors

$$\frac{|d(k)|^2}{N+2+A(P)} = \frac{\left((k+1)^2|P(1)|^2 - 2(k+1)\Re(P'(1)P(1)) + \left|\frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)}\right|^2\right)}{N+2+A(P)}$$

où

$$A(P) = -2\Re\left(\frac{\bar{P}'(1)P(1)}{|P(1)|^2}\right).$$

Pour les termes de la diagonale d'indice $k > N-m$, nous allons montrer que le deuxième terme est la somme de

$$\frac{\left((k+1)^2|P(1)|^2 - 2(k+1)\Re(P'(1)P(1)) + \left|\frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)}\right|^2\right)}{N+2+A(P)}$$

et d'une perturbation d'ordre N. Cette perturbation s'obtient au moyen d'un calcul simple mais demandant beaucoup de précision. Voici les détails de ce calcul.

On a $d(k) = \alpha(k) + \beta(k)$ où

$$\begin{aligned}
\alpha(k) &= \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \sum_{p=1}^{s+1} p\bar{\gamma}_{p-(N+2)} \\
\beta(k) &= -\sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \sum_{p=s+2}^{\infty} p\bar{\gamma}_{p-(N+2)}
\end{aligned}$$

Un calcul direct sur $\alpha(k)$, en posant $u = k - s$ et $p' = p - (N+2)$, donne :

$$\begin{aligned}
\alpha(k) &= (N+2)\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p'=-N-1}^{k-u-N-1} \bar{\gamma}_{p'} + \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p'=-m}^{k-u-N-1} p'\gamma_{p'} \\
&= \bar{\beta}_u \sum_{p'=-N-1}^{k-u-N-1} \bar{\gamma}_{p'} + o(N)
\end{aligned}$$

car $\gamma'_p = 0$ pour $p \leq -m$ et $k - u - N - 1 < 0$.
De même, en posant $k - s = u$, un calcul direct donne :

$$\begin{aligned}
\beta(k) &= -(k+1)\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \left(\frac{P(1)}{\bar{P}(1)} - \sum_{p=N+2-m}^{k+1-u} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \right) \\
&+ \sum_{u=0}^{m} u\bar{\beta}_u \left(\frac{P(1)}{\bar{P}(1)} - \sum_{p=N+2-m}^{k+1-u} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} \right) \\
&= -(k+1)P(1) + \frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)} + (k+1)\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p=N+2-m}^{k+1-u} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} + o(N).
\end{aligned}$$

On évalue maintenant $d(k)$:

$$\begin{aligned}
d(k) &= \alpha(k) + \beta(k) = -(k+1)P(1) + \frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)} \\
&+ (N+2)\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p'=-N-1}^{k-u-N-1} \bar{\gamma}_{p'} + (k+1)\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p=N+2-m}^{k+1-u} \bar{\gamma}_{p-(N+2)} + o(N).
\end{aligned}$$

Si on pose maintenant $k = N + 2 - m + v$ (rappelons que $k \geq N - m$) et $p' = p - (N+2)$ on obtient :

$$d(k) = -(k+1)P(1) + \frac{P'(1)P(1)}{\bar{P}(1)} + (N + 2 + A(P))D(k) + o(N)$$

Ce qui donne pour $k \leq N - m$ une contribution à la trace de la forme

$$\frac{(k+1)^2|P(1)|^2 - 2(k+1)\Re P'(1)P(1)}{N+2+A(P)} + (N+2+A(P))|D(k)|^2 + 2(k+1)\Re(P(1)\bar{D}(k)) + o(N).$$

En fin de compte, si on pose $k = N + 2 + A(P) - w - A(P)$, cette contribution prend la forme

$$\frac{(k+1)^2|P(1)|^2 - 2(k+1)\Re P'(1)P(1)}{N+2+A(P)} + (N+2+A(P))\left(|D(k)|^2 + 2\Re(P(1)\bar{D}(k))\right) + o(N)$$

On réunit maintenant les calculs précédents pour évaluer la contribution T_2 du deuxième terme à la trace :

$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{\sum_{k=0}^{N}(k+1)^2|P(1)|^2 - 2\sum_{k=0}^{N}(k+1)\Re(P'(1)P(1))}{N+2+A(P)} \\
&+ \quad (N+2+A(P)) \sum_{k=N-m}^{N} |D(k)|^2 + 2\Re(P(1)\bar{D}(k)) + o(N)
\end{aligned}
$$

Contribution du troisième terme de la formule d'inversion à la trace.

Il est facile de voir que le troisième terme de la formule d'inversion n'est non nul que si : $k \geq N+1-m$. Ce terme est alors une contante bornée uniformément par rapport à k. La contribution du troisième terme de la formume d'inversion est donc en $o(N)$.

Conclusion

En écrivant $\mathrm{Tr}(T_N(f)^{-1}) = T_1 - T_2$, et en effectuant les sommations $\sum_0^N (k+1)^2$ et $\sum_)^N (k+1)$, on obtient la formule annoncée.

Deuxième étape: indépendance des coefficients par rapport à N pour N grand

Il suffit de montrer que $D(k)$ ne dépend pas de N pour N assez grand et $N-m \leq k \leq N$, car alors $B(P)$ sera la somme de m termes indépendants de N.

Or, pour $N \geq m$, on a $D(k) = 2\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{p=-m}^{k-u-N-1} \bar{\gamma}_p$ et, puisque $\gamma_p = 0$ pour $p < -m$, les seuls termes $\bar{\gamma}_p$ intervenant sont ceux d'indice p entre $-m$ et 0.

2.2 Analyse des hypothèses du théorème principal

Le théorème principal s'appuie sur le théorème 1 (formule d'inversion). Ce théorème est essentiellement géométrique. Il part de l'hypothèse d'une décomposition adéquate du symbole f. Cette section a pour but de donner des hypothèses raisonnables de type analytique sur f, donnant lieu à une telle décomposition.

Rappelons que le symbole f se présente sous la forme $f = |1-\chi|^2 f_1$ et que si $f_1 > 0$ et $\log f_1 \in L^1(\mathbb{T})$, alors [GS]

$$\exists g_1 \in H^+ \text{ telle que } f_1 = |g_1|^2. \tag{2.1}$$

Posons $\displaystyle\frac{1}{g_1(\chi)} = \sum_{s=0}^{\infty} \beta_s \chi^s$, $\displaystyle\frac{g_1(\chi)}{\bar{g}_1(\chi)} = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \gamma_s \chi^s$.

En vue de notre théorème nous supposons de plus :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||\hat{f}_1(k)| < \infty.$$

En d'autres termes $f_1' \in A(\mathbb{T})$ où

$$A(\mathbb{T}) = \{\psi \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(k)| < \infty\}.$$

On note $||\psi||_{A(\mathbb{T})}$ ce nombre. Cette condition suffit pour obtenir le résultat technique suivant:

Lemme 3 *Si $f_1 > 0$, $f_1 \in C^1(\mathbb{T})$ et $f_1' \in A(\mathbb{T})$, alors :*

i) $\log f_1 \in A(\mathbb{T})$

ii) l'application g_1 vérifiant la relation 2.1 existe et vérifie:

$$g_1,\ g_1^{-1},\ g_1',\ (g_1/\bar{g}_1)' \in A(\mathbb{T})$$

Démonstration : On notera que $\log f_1 \in C^1(\mathbb{T})$ car $f_1 \in C^1(\mathbb{T})$ est strictement positive. On remarque que :

$$\|\log f_1\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{1}{n}(\widehat{f_1'/f_1})(n)\right|.$$

Or $f_1 \in A(\mathbb{T})$ et $f_1 > 0$, on a d'après un théorème de Wiener $1/f_1 \in A(\mathbb{T})$; on a f_1' et $1/f_1$ dans $A(\mathbb{T})$. Il en est de même pour f_1'/f_1 puisque $A(\mathbb{T})$ est une algèbre, d'où $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f_1'/f_1}(n)\right| < \infty$. Il s'ensuit que

$$\|\log f_1\|_{A(\mathbb{T})} < \infty.$$

Notons $(\log f_1)_+ = \sum_{n\in\mathbb{N}} \widehat{\log(f_1)}(n)\chi^n$, donc $(\log f_1)_+ \in A(\mathbb{T})$ de même $g_1 = \exp((\log f_1)_+)$ et $1/g_1 = \exp(-(\log f_1)_+)$ sont dans $A(\mathbb{T})$. L'expression de g_1 implique que $g_1' \in A(\mathbb{T})$ et, par conséquent, que $(g_1/\bar{g}_1)' \in A(\mathbb{T})$. En effet on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{\log(f_1)}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f_1'/f_1}(n)| < \infty$$

D'où $\sum_{n\leq 0} n \log(f_1)(n)\chi^n \in A(\mathbb{T})$ ou encore $(\log f_1)_+' \in A(\mathbb{T})$.

Remarque : Les conditions $1/g_1 \in A(\mathbb{T})$ et $(\frac{g_1}{\bar{g}_1})' \in A(\mathbb{T})$ peuvent aussi s'exprimer sous la forme des deux conditions suivantes que nous utilisons pour démontrer le théorème.

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}} |u\gamma_u| < \infty \tag{2.2}$$

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}} |\beta_u| < \infty \tag{2.3}$$

Observons que la condition 2.2) implique la condition

$$\sum_{|u|>N} |\gamma_u| = o(1/N) \tag{2.4}$$

Cette relation sera essentielle dans l'estimation asymptotique de $[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1}$ Notons enfin que les conditions ci-dessus n'exigent pas la positivité des c_k intervenant dans les hypothèses du théorème de Spitzer-Stone [SpSt].

2.3 Démonstration du théorème principal

Rappelons-on succinctement l'énoncé.

Théorème 3 [résultat principal] *Si $f = |1-\chi|^2 f_1$, avec $f_1 > 0$, $f_1 \in C^1(\mathbb{T})$ et $f_1' \in A(\mathbb{T})$, alors $T_N(f)$ est inversible et l'élément de l'inverse $T_N(f)^{-1}$ d'indice $(k+1, l+1)$ est donné par*

$$\frac{1}{N+2}\left[T_N(f)^{-1}\right]_{k+1,l+1} = \frac{a_{k,l}}{N+2} - \frac{b(k)\bar{b}(l)}{(N+2)^2} + o(1)$$

lorsque N tend vers l'infini, $(0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq N)$ où $\lim_{N\to\infty} o(1) = 0$, uniformément par rapport à k et l.

Avant d'entamer la démonstration, débarassons-nous d'un lemme technique.

Lemme 4 *Si a et b sont deux opérateurs et m un entier, alors*

$$\|a^m - b^m\| \leq \|a-b\| \left(\|b\| + \|a-b\|\right)^{m-1} m.$$

<u>Démonstration</u> : $a^m - b^m = (b + a - b)^m - b^m = b^m + \cdots + (a-b)^m - b^m$; d'où :
$\|a^m - b^m\| \leq \sum_{k=1}^{m} C_m^k \|a-b\|^k \|b\|^{m-k} = (\|b\| + \|a-b\|)^m - \|b\|^m$.

C'est-à-dire : $\|a^m - b^m\| \leq \|a-b\| \left(\sum_{j=0}^{m-1} C_m^j \|b\|^j \|a-b\|)^{m-j} \right)$

Soit finalement :
$\|a^m - b^m\| \leq \|a-b\| m \left(\|b\| + \|a-b\|\right)^{m-1}$.

2.3.1 Stratégie de la démonstration

La démonstration comporte six étapes que nous allons décrire.

Étape 0 On remarque que le calcul du premier terme est identique à celui du cas polynomial (c'est-à-dire quand $f_1 = \frac{1}{|P|^2}$ où P est un polynôme strictement positif).

Étape 1 Le calcul du second terme se base sur une décomposition de $x_k = \pi_+ \bar{\Phi}_N \pi_+ (\frac{\chi^k}{\bar{g}})$ analogue à celle du cas polynomial : $x_k = \frac{A_{N,k,r}}{1-r\chi} + y_{N,k,r} + R_{N,k,r}$.

L'idée essentielle qui dirige la suite de la démonstration est la suivante : $\frac{A_{N,k,r}}{1-r\chi}$ est un vecteur propre pour un opérateur de Hankel "tronqué" et d'une certaine façon proche de $(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1}$ pour N grand, à savoir $(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}$ où $\tilde{\Phi}_N(\chi) = \frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}} \chi^{N+1} \sum_{u \geq -N} \gamma_u \chi^u$. L'étude du cas polynomial (démonstration du théorème 2 fournit également la valeur propre pour l'opérateur "tronqué".

Étape 2 La décomposition précédente de x_k permet d'écrire mécaniquement le deuxième terme comme somme de quatre produits scalaires.

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, B_{N,l,r} \right\rangle \quad &+ \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \\
&+ \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), B_{N,l,r} \right\rangle \\
&+ \quad \left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left(R_{N,k,r} + y_{N,k,r}\right), R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle
\end{aligned}$$

où $B_{N,k,r} = \frac{A_{N,k,r}}{1-r\chi}$.

On montre alors que pour une certaine fonction $r(N)$ qui tend vers 1 quand $N \to \infty$, on a

$$\left\langle \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r(N)}, B_{N,l,r(N)} \right\rangle = \left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} B_{N,k,r(N)}, B_{N,l,r(N)} \right\rangle + o(1/N).$$

et on récupère $\left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} B_{N,k,r(N)}, B_{N,l,r(N)} \right\rangle$ du cas polynomial.

Étape 3 On montre que les trois autres produits scalaires sont en $o(1/\sqrt{N})$ avec la même régularisation $f_{r(N)}$ qu'à l'étape 2.

Étape 4 On montre que pour le symbole régularisé $f_{r(N)}$, on a un développement asymptotique de la forme :

$$\left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right]_{k+1,l+1} = a_{k,l} + \frac{b(k)\bar{b}(l)}{N+2} + o(N) \cdot \quad \forall k, \forall l, \quad 0 \leq k \leq l \leq N$$

Étape 5 Il s'agit maintenant de justifier l'inversibilité de $T_N(f)$ et d'évaluer asymptotiquement $[T_N(f)^{-1}]_{k+1,l+1}$. Dans ce but on évalue le comportement de

$$\frac{1}{N}\left(\left[(T_N f)^{-1}\right]_{k+1,l+1} - r(N)\left[(T_N f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1}\right)$$

pour $N \to \infty$, et on conclut

2.3.2 Étape 0

On utilise la formule d'inversion rappelée précédemment pour $f_r(\theta) = |1 - r\exp(i\theta)|^2 f_1$ où f_1 est une fonction régulière vérifiant les hypothèses du théorème 3. Le premier terme de la formule d'inversion est identique à ce qu'on trouve dans le cas d'un polynôme, à savoir :

$$\sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'}r^{|s-s'|}\frac{1-r^{2\min(s+1,s'+1)}}{1-r^2}.$$

2.3.3 Étape 1

Évaluons $x_k = \pi_+\bar{\Phi}_N\pi_+(\frac{\chi^k}{\bar{g}})$.

$$\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) = \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\bar{\chi}^{N+2}\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_u\bar{\chi}^u$$

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{u\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_u\pi_+\left(\bar{\chi}^{N+2+u}(\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi})\right)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p\in\mathbb{Z}}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\pi_+\left(\chi^{-p}\frac{\chi^{s+1}-r^{s+1}}{1-r\chi}\right)\\
&= \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p<0}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{\chi^{s+1-p}-r^{s+1}\chi^{-p}}{1-r\chi}\\
&+ \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p=0}^{s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{\chi^{s+1-p}-r^{s+1+p}}{1-r\chi}\\
&+ \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p>s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{r^{p-(s+1)}-r^{s+1+p}}{1-r\chi}.
\end{aligned}$$

Posons $x_k = B_{N,k,r} + R_{N,k,r} + y_{N,k,r}$ avec:

$$B_{N,k,r} = \frac{A_{k,N,r}}{1-r\chi};$$

$$R_{N,k,r} = a_{2,N}(\chi)\sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\frac{\chi^{(s+1)}-r^{s+1}}{1-r\chi};$$

$$y_{N,k,r} = \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\sum_{p=0}^{s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\frac{\chi^{s+1-p}-r^{s+1-p}}{1-r\chi};$$

où l'on a posé :

$$A_{N,k,r} = \sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\Big(\sum_{p=0}^{s+1}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}(r^{s+1-p}-r^{s+1+p})+$$

$$\sum_{p>s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)}\big(r^{p-(s+1)} - r^{s+1+p}\big)\Big)$$

$$a_{2,N}(\chi) = \sum_{p<0} \bar{\gamma}_{p-(N+2)}\chi^{-p}$$

Afin d'évaluer les produits scalaires qui interviennent dans le calcul du deuxième terme, nous aurons besoin d'estimer les normes de $B_{N,k,r}, R_{N,k,r}, y_{N,k,r}$

$\lim_{r\to 1} \frac{A_{N,k,r}}{1-r^2} = \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\Big(\sum_{p=0}^{s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)}p + (s+1) \sum_{p>s+1} \bar{\gamma}_{p-(N+2)}\Big).$

Cette dernière quantité est au plus de l'ordre de k, donc de N si $k = [Nx]$. On peut donc écrire, si r assez proche de 1, $\|B_{N,k,r}\|_2^2 = \left(\frac{A_{N,k,r}}{1-r^2}\right)^2 (1-r^2)(1+r) \leq C(1-r^2)N$; C étant une constante indépendante de N.

D'autre part :

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leq \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left\| \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \frac{\chi^{(s+1)} - r^{s+1}}{1-r\chi} \right\|_2 ;$$

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leq \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left| \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s}\bar{\beta}_{k-s'} r^{|s-s'|} \frac{1-r^{2\inf(s+1,s'+1)}}{1-r^2} \right|^{1/2}$$

d'où , si r assez proche de 1,

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leq \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty \left(\sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{k} |\beta_{k-s}\beta_{k-s'}| \inf(s+1, s'+1) \right)^{1/2} ,$$

soit

$$\|R_{N,k,r}\|_2 \leq \|a_{2,N}(\chi)\|_\infty k^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{k} |\beta_{k-s}\beta_{k-s'}| \right)^{1/2} .$$

C'est-à-dire qu'avec les hypothèses que nous nous sommes données, on a $\|R_{N,k,r}\|_2 = o\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)$. On obtient de la même manière le comportement de $\|y_{N,k,r}\|_2$ en $o\left(\frac{1}{N^{1/2}}\right)$.

2.3.4 Étape 2

Pour calculer le deuxième terme de la formule d'inversion, il faut calculer le produit scalaire

$$\left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (B_{N,k,r} + R_{N,k,r} + y_{N,k,r}), B_{N,l,r} + R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle .$$

Cette expression se décompose en la somme:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, B_{N,l,r} \right\rangle &+ \left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}, R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \\ &+ \left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (R_{N,k,r} + y_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle \\ &+ \left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} (R_{N,k,r} + y_{N,k,r}), R_{N,l,r} + y_{N,l,r} \right\rangle \end{aligned}$$

Évaluons maintenant le premier de ces quatre produits scalaires. Dans ce but, on approche $\left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}$ par $\left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\right)^{-1} B_{N,k,r}$ où :

$$\tilde{\Phi}_N(\chi) = \frac{1 - r\chi}{1 - r\bar{\chi}} \chi^{N+1} \sum_{u \geq -N} \gamma_u \chi^u .$$

On sait qu'alors $B_{N,k,r}$ est un vecteur propre pour l'opérateur $H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}$ associé à la valeur propre $r^{2(N+2)} \left| \sum_{u\geq -N} \gamma_u r^u \right|^2$

Le but de cette étape est de démontrer que le produit scalaire.
$\left\langle \left[(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} - \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \right)^{-1} \right] (B_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle$ est en $o(1)$ quand N tend vers l'infini. D'après les calculs du théorème 2 le terme principal sera alors :
$\left\langle \left(I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \right)^{-1} (B_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle$ qui est en fait d'après les calculs antérieurs

$$\frac{A_{k,N,r} A_{l,N,r}}{1 - r^2} \frac{1}{1 - r^{2(N+2)} \left| \sum_{u\geq -N} \gamma_u r^u \right|^2}.$$

Pour majorer $A = \left| \left\langle \left((I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} - (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1} \right) (B_{N,k,r}), B_{N,l,r} \right\rangle \right|$, évaluons la norme de $(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} - (I - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^{-1}$; pour cela, comme les sommes de Von Neumann correspondantes sont normalement convergentes, majorons les différences $(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^m - (H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N})^m$. D'après le lemme 4 il faut évaluer $\| H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \|$ et $\| H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \|$. Posons :

$$\varepsilon_1(N) = \sum_{u<-N} |\gamma_u|.$$

On a :

$$\| H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \| = \| H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} + H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \|,$$

cette dernière quantité étant inférieure à $2\varepsilon_1(N)$. On rappelle en effet que $\|H_{\Phi_N}\| < 1$; $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N}\| < 1$ et clairement $\|H_{\Phi_N} - H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H^*_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N}\| \leq \varepsilon_1(N)$.

Donnons une évaluation de $\| H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \|$.

Lemme 5 *Notons $a_e(N,r) = \sum_{u\geq -N} \gamma_u r^u$. Alors $\| H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \| \leq |a_e(N,r)| r^{N+2}$*

<u>Démonstration du lemme</u> : Remarquons d'abord que $H_{\tilde{\Phi}_N}(\psi) = \pi_-(\pi_- \tilde{\Phi}_N \psi) + \pi_-(\pi_+ \tilde{\Phi}_N \psi)$ et que :

$$\begin{aligned}
\pi_-(\tilde{\Phi}_N) &= \pi_- \left(\frac{1 - r\chi}{1 + r\bar{\chi}} \sum_{u\geq -N} \gamma_u \chi^{u+N+1} \right) \\
&= \sum_{u\geq -N} \gamma_u \pi_- \left(\left(-r\chi + \frac{1 - r^2}{1 + r\bar{\chi}} \right) \chi^{u+N+1} \right) \\
&= \left(\sum_{u\geq -N} \gamma_u r^u \right) (1 - r^2) r^{N+2} \frac{\bar{\chi}}{1 - r\bar{\chi}} \\
&= r^{N+2} (1 - r^2) \frac{\bar{\chi}}{1 - r\bar{\chi}} a_e(N,r).
\end{aligned}$$

On peut encore écrire :

$$\pi_-(\tilde{\Phi}_N) = a_e(N,r) r^{N+2} \left(\frac{1 - r^2}{1 - r\bar{\chi}} - r\chi \right) \bar{\chi} + a_e(N,r) r^{N+3}$$

Comme $a_e(N,r)r^{N+2} \in H^{2+}$ on peut écrire : $H_{\pi_-(\tilde{\Phi}_N)} = H_{\theta_N}$ avec

$$\theta_N(\chi) = a_e(N,r)r^{N+2}\left(\frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}}\right).$$

D'où :

$$\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| \leq \|H_{\tilde{\Phi}_N}\| = \|H_{\theta_N}\| \leq |a_e(N,r)|r^{N+2}$$

L'évaluation précise de $\|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\|$ donnée ci-dessus permet de choisir la paramétrisation r en fonction de N, de manière à maîtriser de façon satisfaisante la décroissance de A vers 0 quand $N \to \infty$.

On a en effet :

$$A \leq 2\sum_{m=0}^{\infty} m(|a_e(N,r(N))|r^{N+2} + 2\varepsilon_1(N))^{m-1}\varepsilon_1(N)\|B_{N,k,r}\|_2\|B_{N,l,r}\|_2$$

$$A \leq \frac{2\varepsilon_1(N)C(1-r(N)^2)N}{(1-|a_e(N,r)|r^{N+2}+2\varepsilon_1(N))^2}.$$

Posons

$$r(N) = 1-\alpha(N) \text{ où } \alpha(N) = \max\{\frac{1}{N^2}, 2\varepsilon_1(N)$$

et remarquons que si $0 \leq m \leq N$ alors $r(N)^m = 1 + o(1)$. Considérons maintenant les inégalités suivantes:

$$\big||a_e(N,r(N))| - 1\big| \leq \left|\left|\sum_{u\geq -N}\gamma_u r(N)^u\right| - \left|\sum_{u\geq -N}\gamma_u\right|\right| + \left|\left|\sum_{u\geq -N}\gamma_u\right| - 1\right|.$$

Cette dernière expression est inférieure à :

$$\sum_{u\geq -N} |\gamma_u||r(N)^u - 1| + \varepsilon_1(N);$$

on peut encore écrire :

$$\big||a_e(N,r(N))| - 1\big| \leq \sum_{u\geq -N} u|\gamma_u||1-r(N)| + \varepsilon_1(N),$$

d'après la remarque ci-dessus. Alors:

$$\big||a_e(N,r(N))| - 1\big| \leq \sum_{u\geq -N} |\gamma_u||1-r(N)|u + \varepsilon_1(N).$$

C'est-à-dire :

$$\big||a_e(N,r(N))| - 1\big| \leq \bar{C}\varepsilon_1(N)$$

où $\bar{C}$ est une constante indépendante de N.

A partir de là on vérifie que :

$$|a_e(N,r(N))|r(N)^{N+2} + 2\varepsilon_1(N) < 1 \tag{2.5}$$

En effet la relation 2.5 équivaut à $|a_e(N,r(N))|r(N)^{N+1} < 1$ ce qui donne encore, en prenant le logarithme : $\log|a_e(N,r(N))| + (N+1)\log(r(N)) < 0$.

Or $(N+1)\log(r(N)) \sim -2(N+1)\varepsilon_1(N)$ et $\log|a_e(N,r(N))| \leq \bar{C}\varepsilon_1(N)$ et les calculs ci-dessus ont bien un sens, car alors $\log|a_e(N,r(N))| + (N+1)\log(r(N))$ est du même signe que $(\bar{c} - 2(N+1))\varepsilon_1(N)$, qui est négatif pour N assez grand. D'autre part :

$$\frac{2\varepsilon_1(N)C(1-r(N)^2)N}{(1-|a_e(N,r(N))|r(N)^{N+2}+2\varepsilon_1(N))^2.} \sim \frac{\varepsilon_1(N)^2CN}{\varepsilon_1(N))^2N^2.} \sim \frac{C}{N},$$

où C est une constante indépendante de N.

A tend donc vers 0 quand $N \to \infty$ au moins aussi vite que $1/N$.

2.3.5 Étape 3

On a $H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} = H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N} + H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}$ d'où

$$\begin{aligned} \|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\| &\leq \|H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} - H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| + \|H^*_{\tilde{\Phi}_N} H_{\tilde{\Phi}_N}\| \\ &\leq 2\varepsilon_1(N) + |a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} \end{aligned}$$

d'après l'étape 2.

On en déduit :

$$\begin{aligned} & \left|\left\langle (I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} B_{N,k,r(N)}, R_{N,l,r(N)} + y_{N,l,r(N)} \right\rangle\right| \\ \leq\ & \frac{1}{1 - (|a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} + 2\varepsilon_1(N))} \|B_{N,k,r(N)}\|_2 \left(\|R_{N,l,r(N)}\|_2 + \|y_{N,l,r(N)}\|_2 \right) \\ \leq\ & \frac{C\sqrt{(1 - r(N)^2)N}}{1 - (|a_e(N, r(N))| r(N)^{N+2} + 2\varepsilon_1(N))} o(\frac{1}{\sqrt{N}}) \end{aligned}$$

Ce dernier terme est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{N}}$. On établit de même que le troisième produit scalaire de la somme donnant le deuxième terme de la formule d'inversion est en $o(\frac{1}{\sqrt{N}})$ et le troisième en $o(\frac{1}{N})$.

2.3.6 Étape 4

Les étapes précédentes fournissent l'expression suivante de $\left[T_N(f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1}$:

$$\begin{aligned} \left[T_N(f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1} &= \sum_{s'=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \beta_{k-s'} r(N)^{|s-s'|} \frac{1 - r^{2\min(s+1,s'+1)}}{1 - r(N)^2} \\ &- \frac{A_{k,n,r(N)} \bar{A}_{l,n,r(N)}}{(1 - r(N)^2)^2} \frac{1 - r(N)^2}{1 - r(N)^{2(N+2)} |a_e(N, r(N))|^2} + o(\frac{1}{\sqrt{N}}) \quad (2.6) \end{aligned}$$

pour tout k et l avec $0 \leq k \leq l \leq N$.

Cette expression conduit au résultat principal de l'étape 4, à savoir :

Lemme 6 (expression asymptotique de $\left[(T_N f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1}$) *Avec les hypothèses du théorème 3 on a :* $\left[(T_N f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1} = a_{k,l} + \frac{b(k)\bar{b}(l)}{N+2} + o(N) \quad \forall k, \forall l, \quad 0 \leq k \leq l \leq N$

<u>Démonstration</u> : À partir de la formule 2.6, nous allons successivement dégager un développement asymptotique des deux termes apparaissant dans la somme. Dans un premier temps, nous allons d'abord travailler sur :

$$\sum_{s'=0}^{l} \sum_{s=0}^{k} \bar{\beta}_{k-s} \beta_{k-s'} r(N)^{|s-s'|} \frac{1 - r(N)^{2\min(s+1,s'+1)}}{1 - r(N)^2}.$$

Posons : $r(N)^{|s-s'|} = 1 + R_1(s, s')$ avec : $|R_1(s, s')| \leq \varepsilon_1(N)|s - s'|$; et

$$\frac{1 - r(N)^{2\min(s+1,s'+1)}}{1 - r(N)^2} = \min(s+1, s'+1) c^{\min(s,s')}, \quad r(N)^2 < c < 1.$$

Ce qui s'écrit aussi

$$\frac{1 - r(N)^{2\min(s+1,s'+1)}}{1 - r(N)^2} = \min(s+1, s'+1)\left(1 - R_2(s, s')\right),$$

avec $|R_2(s, s')| \leq K \min(s, s') \varepsilon_1(N)$ où K est une constante ne dépendant pas de N.

Il est alors facile de vérifier, en développant, que :

$$\sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k}\bar{\beta}_{k-s}\beta_{k-s'}r(N)^{|s-s'|} = a_{k,l} + o(N).$$

Etudions maintenant la somme

$$\sum_{s'=0}^{l}\sum_{s=0}^{k}\frac{A_{k,N,r(N)}\bar{A}_{l,N,r(N)}}{(1-r(N)^2)^2}\,\frac{1-r(N)^2}{1-r(N)^{2(N+2)}|a_e(N,r(N))|^2} + o(\frac{1}{\sqrt{N}}).$$

Par application des accroissements finis

$$1-2(N+2)(1-r(N)) \le r^{2(N+2)} \le 1-2(N+2)(1-r(N))r(N)^{2N+3}$$

et nous avons vu (fin de l'étape 2) que

$$1-\bar{C}\varepsilon_1(N) \le a_e(N,r(N)) \le 1+\bar{C}\varepsilon_1(N).$$

Nous pouvons donc écrire que

$$\frac{1-r(N)^2}{1-r(N)^{2(N+2)}|a_e(N,r(N))|^2}$$

est encadrée par deux constantes $A_1(N)$ et $A_2(N)$ avec :

$$A_1(N) = \frac{4\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1^2}{1-\left(2(N+2)\left(1-r(N)\right)r(N)^{2N+3}-1\right)\left(1+\bar{C}\varepsilon_1(N)\right)}$$

$$A_2(N) = \frac{4\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1^2}{1+\left(2(N+2)\left(1-r(N)\right)\right)\left(1-\bar{C}\varepsilon_1(N)\right)}$$

En développant $A_1(N)$ et $A_2(N)$ on obtient:

$$\frac{1-r(N)^2}{1-r(N)^{2(N+2)}|a_e(N,r(N))|^2} = \frac{1}{N+2} + o(\frac{1}{N^2}).$$

On vérifie d'autre part facilement :

$$\frac{\left|\sum_{s=0}^{k}\beta_{k-s}\left(\sum_{p=0}^{s+1}\left(r(N)^{-p}-r(N)^{p}\right)\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\right)r(N)^{s+1}\right|}{(1-r(N))} \le \sum_{s=0}^{k}|\beta_{k-s}|\sum_{p=0}^{s+1}k\left|\bar{\gamma}_{p-(N+2)}\right| = o(1).$$

Enfin en utilisant des techniques identiques à celles utilisées pour déterminer l'asymptotique du premier terme il vient :

$$\sum_{s=0}^{k}\beta_{k-s}\left(\sum_{p\ge s+2}\bar{\gamma}_{p-(N+2)}r(N)^{p}\right)\frac{r(N)^{-(s+1)}-r(N)^{s+1}}{1-r(N)^2} = \sum_{s=0}^{k}(s+1)\beta_{k-s} + o(N).$$

Ce qui achève de prouver que le deuxième terme de notre somme vaut :

$$b(k)\bar{b}(l)/(N+2) + o(N)$$

ce qui termine la démonstration de notre lemme.

Corollaire 12 *Il existe une constante C, ne dépendant pas de N, telle que*

$$\left|\left[T_N(f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1}\right| < CN, \quad 0 \le k \le l \le N$$

2.3.7 Étape 5

Conformément au programme, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 7 *$T_N f$ est inversible et*

$$\frac{1}{N}\left(\left[(T_N f)^{-1}\right]_{k+1,l+1} - r(N)\left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right]_{k+1,l+1}\right) = o(1)$$

Démonstration du lemme : Examinons la différence : $\left|\left[(T_N f)^{-1}\right]_{k+1,l+1} - \left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right]_{k+1,l+1}\right|$.

Remarquons tout d'abord que les résultats obtenus au lemme 6 permettent d'affirmer l'existence d'une constante C indépendante de N vérifiant :

$$\left|\left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right]_{k+1,l+1}\right| < CN, \quad 0 \le k \le l \le N \tag{2.7}$$

C'était le corollaire 12.

On a :

$$T_N f_{r(N)} - T_N f = (r(N)-1)T_N f + (r(N)-1)^2 T_N f_1.$$

En effet :

$$\hat{f}_{r(N)}(k) - \hat{f}(k) = \int_0^{2\pi} \left(|1 - r(N)e^{i\theta}|^2 - |1 - e^{i\theta}|^2\right) f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta.$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{r(N)}(k) - \hat{f}(k) &= (r(N)-1)\int_0^{2\pi} (r(N) + 1 - 2\cos\theta) f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta \\
&= (r(N)-1)\int_0^{2\pi} \left((2 - 2\cos\theta) f_1(\theta) e^{ik\theta} + (r(N)+1-2) f_1(\theta) e^{ik\theta}\right) d\theta \\
&= (r(N)-1)\int_0^{2\pi} |1 - e^{i\theta}|^2 f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta + (r(N)-1)^2 \int_0^{2\pi} f_1(\theta) e^{ik\theta} d\theta
\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée, et qui peut encore s'écrire:

$$r(N) T_N f = T_N f_{r(N)} - (r(N)-1)^2 T_N f_1,$$

ou encore :

$$T_N f = \frac{1}{r(N)} T_N f_{r(N)} \left(I - (r(N)-1)^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right).$$

Etudions $\left\|\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right\|$

On a $\left\|\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\left\langle \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}(x), y\right\rangle|$ ce qui implique la majoration :

$$\left\|\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right\| \le \left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left\langle \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}(\chi^i), \chi^j\right\rangle\right)^2\right)^{1/2}$$

et finalement, d'après le corollaire 12 :

$$\left\|\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}\right\| \le CN^2,$$

et on peut donc écrire :

$$\left\|(1 - r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right\| = O(N^{-2}).$$

d'après le choix de $r(N)$. On en déduit que $T_N f$ est inversible.

On obtient :

$$(T_N f)^{-1} = \left(I - (1-r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right)^{-1} r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1},$$

et en développant :

$$(T_N f)^{-1} = r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} + (1-r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1$$

$$\left(I - (1-r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right)^{-1} r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1},$$

D'où : $(T_N f)^{-1}_{k+1,l+1} - r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}_{k+1,l+1} = (1-r(N))^2 \times$

$\left\langle \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1 \left(I - (1-r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right)^{-1} r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} (\chi^k), \chi^l \right\rangle.$

Soit encore: $(T_N f)^{-1}_{k+1,l+1} - r(N) \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1}_{k+1,l+1} = (1-r(N))^2 \times$

$\left\langle \left(T_N f_1 \left(I - (1-r(N))^2 \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} T_N f_1\right)^{-1} r(N) T_N f^{-1}_{r(N)}\right) (\chi^k), \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} (\chi^l) \right\rangle.$

Le terme de droite de l'égalité précédente est majorable par un produit de l'ordre de :

$$(1-r(N))^2 \left\| \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} (\chi^k) \right\|_2 \left\| T_N f^{-1}_{r(N)} (\chi^l) \right\|_2.$$

Et d'après (2.7) :

$$\left\| \left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} (\chi^k) \right\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{N} \left| \left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} \right]_{i,k} \right|^2 \right)^{1/2} \leq C N^{\frac{3}{2}}.$$

Soit :

$$\frac{1}{N} \left(\left[(T_N f)^{-1} \right]_{k+1,l+1} - r(N) \left[\left(T_N f_{r(N)}\right)^{-1} \right]_{k+1,l+1} \right) = o(1)$$

Le lemme 6 permet alors de conclure. En effet :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left[T_N(f)^{-1}\right]_{k+1,l+1} &= a_{k,l} \frac{1}{N} - b(k)b(l) \frac{1}{N^2} - 2\varepsilon_1(N) \left[T_N(f_{r(N)})^{-1}\right]_{k+1,l+1} \frac{1}{N} + o(1) \\ &= a_{k,l} \frac{1}{N} - b(k)b(l) \frac{1}{N^2} + o(1) \end{aligned}$$

qui est ce que l'on veut.

Ceci termine l'étape 5 et la démonstration du théorème principal.

2.4 Démonstration du théorème de Spitzer-Stone

Avec les mêmes notations que dans l'introduction, nous définissons la condition 2.8 :

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} |u \beta_u| < \infty. \tag{2.8}$$

Nous sommes en mesure de prouver maintenant le corollaire 3

Corollaire 3 (Théorème de Spitzer-Stone.) *Si $f = |1-\chi|^2 f_1$, avec f_1 vérifiant les hypothèses du théorème 3 et la condition (2.8), alors :*

$$\frac{\sigma^2}{2N} \left[(T_N(f))^{-1} \right]_{k,l} = R\left(\frac{k}{N}, \frac{l}{N}\right) + o(1)$$

$\lim_{N\to\infty} o(1) = 0$ *uniformément par rapport à k et l. Avec :*

$$\sigma^2 = \frac{2}{|\sum_{s=0}^{\infty} \beta_s|^2}; \quad R(x,y) = \min(x,y) - xy, \; x,y \in [0,1].$$

Démonstration : On s'appuie principalement sur le théorème principal (théorème 3, page 7); on rappelle que:

$$a_{k,l} = \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{l} \bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \min(s+1, s'+1)$$

$$b(k) = \sum_{s=0}^{k}(s+1)\bar{\beta}_{k-s}$$

En posant, pour tout l entre 0 et N, $S_l = \sum_{s=0}^{l} \beta_{l-s}$, on peut écrire si k inférieur à l :

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=s}^{l}(s+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &+ \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{s-1}(s'+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &= \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{l}(s+1)\bar{\beta}_{k-s}\beta_{l-s'} \\ &+ \sum_{s=0}^{k}\sum_{s'=0}^{s-1}(s'-s)\beta_{k-s}\beta_{l-s'} \end{aligned}$$

Posons $s = k - j$ et $s' = u$; on a alors

$$a_{k,l} = S_l \sum_{j=0}^{k}(k+1-j)\bar{\beta}_j + \sum_{j=0}^{k}\sum_{u=0}^{k-1-j}(u-k+j)\bar{\beta}_j\beta_{l-u}$$

En remarquant que $S_l \sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_j(k+1-j) = S_l\bar{S}_k(k+1) - S_l \sum_{j=0}^{k} j\bar{\beta}_j$, on obtient en utilisant l'hypothèse 2.8 que

$$\frac{a_{k,l}}{N} = S_l\bar{S}_k\frac{k}{N} + \frac{\sum_{j=0}^{k}\bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1}(u-(k-j))\,\beta_{l-u}}{N} + o(1).$$

Lemme 8

$$\frac{\sum_{j=0}^{k}\bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1}(u-(k-j))\,\beta_{l-u}}{N} = o(1)$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ un réel et donnons-nous j_0 tel que :

$$\forall j \geq j_0 \quad \sum_{u\geq j}|\beta_u| < \varepsilon$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u} \\
= &\sum_{j=0}^{j_0} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u} \\
+ &\sum_{j=j_0+1}^{k} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u}
\end{aligned}$$

Évaluons $\alpha = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{j_0} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u}$
Nous distinguerons deux cas selon que $l-k > j_0$ ou $l-k \leq j_0$.

Cas $l-k \leq j_0$. En posant $v = l-u$, on obtient :

$$N\alpha = \sum_{j=0}^{j_0} \bar{\beta}_j \sum_{v=l-k+j+1}^{l} (l-k-v+j)\beta_v$$

d'où

$$N|\alpha| \leq (l-k)\sum_{j=0}^{j_0} |\bar{\beta}_j| \sum_{v=0}^{l} |\beta_v| + \sum_{j=0}^{j_0} |\bar{\beta}_j| \sum_{v=0}^{l} v|\beta_v| + \sum_{j=0}^{j_0} j|\bar{\beta}_j| \sum_{v=0}^{l} |\beta_v|.$$

L'expression $N|\alpha|$ est donc majorée compte tenu des hypothèses que l'on s'est données sur f_1, et on conclut.

Cas $l-k > j_0$. On a

$$|\alpha| = \frac{1}{N}\left|\sum_{j=0}^{j_0} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u}\right| \leq \frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{j_0} |\beta_j| \sum_{v=l-k+j+1}^{l} |\beta_v||l-v-k+j|\right).$$

En remarquant que $1 \leq v-l+k-j \leq k-j \leq k$ (en effet $|l-v-k+j| = |v-l+k-j|$ et $v-l+k-j \geq l-k+j+1-l+k-j = 1$), on peut majorer le second membre de l'inégalité précédente par:

$$\sum_{j=0}^{j_0} |\beta_j| \frac{k}{N} \sum_{l-k+j+1}^{l} |\beta_v| \leq \sum_{j=0}^{j_0} |\beta_j| \sum_{v=l-k+j+1}^{l} |\beta_v|.$$

où $l-k+j+1 > j_0$.

Cette dernière quantité est donc majorée par : $\varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|$.

On a donc montré que pour $N > j_0$, $|\alpha| = O(\varepsilon)$

De même, évaluons $\beta = \frac{1}{N}\sum_{j=j_0+1}^{k} \bar{\beta}_j \sum_{u=0}^{k-j-1} (u-(k-j))\,\beta_{l-u}$

En procédant comme dans le cas $l-k > j_0$, on a immédiatement $|\beta| < \frac{k}{N}\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j|$ et on conclut que, pour $N \geq j_0$, $|\beta| = O(\varepsilon^2)$.

Ceci termine la preuve du lemme

Par ailleurs

$$\begin{aligned}
b(k) &= \sum_{s=0}^{k} (s+1)\bar{\beta}_{k-s} \\
&= \sum_{u=0}^{k} (k-u+1)\bar{\beta}_u = k\bar{S}_k - \sum_{u=0}^{k} (u-1)\bar{\beta}_u.
\end{aligned}$$

Soit, si $k \leq l$:

$$\frac{a_{k,l}}{N} - \frac{b(k)\bar{b}(l)}{N^2} = \frac{\bar{S}_k S_l}{N} - \frac{\bar{S}_k k}{N}\frac{\bar{S}_l l}{N} + o(1)$$

Si k et l assez grands $\bar{S}_k S_l \sim \left|\sum_{u=0}^{\infty} \beta_u\right|^2 = \frac{2}{\sigma^2}$.

En posant $x \sim \frac{k}{N}$, $y \sim \frac{l}{N}$, $x \leq y$, on retrouve:

$$\frac{\sigma^2}{2N}\left[(T_N f)^{-1}\right]_{[Nx]+1,[Ny]+1} = x - xy + o(1);$$

qui est ce que nous voulions démontrer.

Chapitre 3

Inversion exacte des matrices de Toeplitz à symbole singulier

Ce chapitre est rédigé en anglais, car il provient d'un article rédigé dans cette langue.

3.1 A formula for the exact inversion of Toeplitz with regular symbol

This section is devoted to a theorem which will enable us to split the inverse of $T_N(f)$ into two terms and define them more accurately. With the notations defined above and letting

$$\mathcal{P}_N = \text{span}\left\{1, \chi, \ldots, \chi^N\right\},$$

we are ready to provide the following result, a multidimensional version of which could be found in [S] (Seghier, 1986)

Theorem 11 *Suppose that the symbol f verifies:*

$$f > 0,\ f = g\bar{g},\ g \in H^\infty = H^+ \cap L^\infty(\mathbb{T}),\ g^{-1} \in H^\infty.$$

and define the Hankel's operators by

$$H_{\Phi_N} : H^+ \to H^-, \quad H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-(\Phi_N \psi)$$
$$H^*_{\Phi_N} : H^- \to H^+, \quad H^*_{\Phi_N}(\varphi) = \pi_+(\bar{\Phi}_N \varphi)$$

where

$$\Phi_N = \frac{g}{\bar{g}} \chi^{N+1} \quad (\chi = e^{i\theta})$$

Then, $T_N(f)$ is invertible and, for all $\psi \in \mathcal{P}_N$, we have

$$T_N(f)^{-1}[\psi] = \frac{1}{g}\pi_+\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g}\pi_+\left(\Phi_N \left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1} \left[\pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right)\right]\right).$$

Proof of theorem 11. : Set for convenience $\mathcal{K}_N = f\mathcal{P}_N$, we immediately have

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_N &= \bar{g}\left(\Phi_N H^- \cap H^+\right) \\ &= \bar{g} K_N.\end{aligned}$$

Denote by $\Pi_{\mathcal{K}_N}$ the orthogonal projector from $L^2(\mathbb{T})$ onto $\mathcal{K}_N$, we refer to it here by the $L^2_{1/f}(\mathbb{T})$-projection and Π_{K_N} the orthogonal projector from $L^2(\mathbb{T})$ onto K_N and similarly we shall refer to it by the $L^2(\mathbb{T})$-projection. The following lemma is required first.

Lemma 9 *For all $\psi \in \mathcal{P}_N$, we have*

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) = \bar{g}\mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right).$$

Proof of lemma 9 : For all $\psi \in \mathcal{P}_N$, we can write down

$$\langle \psi - \mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi),\ \psi\rangle = 0,$$

thus

$$\bar{g}\varphi\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi) \text{ for all } \varphi \in K_N.$$

Therefore $\forall \psi \in \mathcal{P}_n$,

$$\left\langle \frac{\psi}{\bar{g}} - \varphi,\ g\psi \right\rangle = 0,$$

then we obtain

$$\varphi = \mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right),$$

hence

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) = \bar{g}\mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right).$$

and this completes the proof of lemma 9.

A further lemma is needed to complete the proof of theorem 11

Lemma 10 *For all $\psi \in \mathcal{P}_N$, we have*

- *$T_n(f)$ is invertible*
- *$T_N(f)^{-1}(\psi) = \frac{1}{g}\mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)$.*

Proof of lemma 10 : If we denote by $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}$ the L^2-orthogonal projection onto $\mathcal{P}_N$, we have

$$\begin{aligned} T_N(f)\left(\frac{\varphi}{g}\right) &= \mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}(\bar{g}\varphi) \\ &= \mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}\left(\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi)\right) \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Therefore $T_N(f)$ is onto, and also one-to-one. Then

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{g} &= T_N(f)^{-1}(\psi) \\ &= \frac{1}{|g|^2}\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi), \end{aligned}$$

we complete the proof using lemma 9.

Now for all ψ belonging to $L^2(\mathbb{T})$, we can write down

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) = \psi - \widetilde{\psi}, \text{ with } \widetilde{\psi} \in K_N^{\perp}.$$

Then there exist $\theta^- \in H^-$ and $\theta^+ \in H^+$ such that

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) = \psi - \Phi_N\theta^+ - \theta^-. \tag{3.1}$$

As $\bar{\Phi}_N\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) \in H^-$ and $\mathbf{\Pi}_{K_N}(\psi) \in H^+$, then for all $\psi \in \mathcal{P}_N$ we have

$$\left\{ \begin{array}{llll} \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\frac{\psi}{\bar{g}}\right) - \theta^+ & -\pi_+(\bar{\Phi}_N\theta^-) & = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right) & = 0 \\ \pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) & -\pi_-(\Phi_N\theta^+) - \theta^- & = \pi_+\left(\mathbf{\Pi}_{K_N}\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right) & = 0 \end{array} \right. \tag{3.2}$$

The above system could be rewritten in a matrix form *i.e.*

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -H_{\Phi_N} \\ -H_{\Phi_N}^* & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \theta^- \\ \theta^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) \\ \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \frac{\psi}{\bar{g}}\right) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Because we assumed that $\|H_{\Phi_N}\|_2 < 1$ [S], the above involved operator is invertible and we obtain

$$\begin{pmatrix} \theta^- \\ \theta^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & H_{\Phi_N} \\ H_{\Phi_N}^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) \\ \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \frac{\psi}{\bar{g}}\right) \end{pmatrix}.$$

Take note that

$$\begin{pmatrix} 0 & H_{\Phi_N} \\ H_{\Phi_N}^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & -H_{\Phi_N} \\ -H_{\Phi_N}^* & 1 \end{pmatrix}^k.$$

We find

$$\begin{pmatrix} \theta^- \\ \theta^+ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N} H_{\Phi_N}^*\right)^k H_{\Phi_N}^* & -\sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N} H_{\Phi_N}^*\right)^k H_{\Phi_N} \\ -\sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N} H_{\Phi_N}^*\right)^k H_{\Phi_N}^* & \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) \\ \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \frac{\psi}{\bar{g}}\right) \end{pmatrix}.$$

A straightforward computation yields

$$\begin{aligned} \theta^- = -\pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) \quad &+ \quad H_{\Phi_N} \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^k \left(-H_{\Phi_N}^* \pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right) \\ &+ \quad H_{\Phi_N} \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^k \left(\pi_+\left(\Phi_N \frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right). \end{aligned}$$

Substituting θ^- and θ^+ in formula (3.1) and observing that for all $x \in L^2(\mathbb{T})$, one has $x - \pi_-(x) = \pi_+(x)$, we obtain the desired result :

$$T_N(f)^{-1}(\psi) = \frac{\psi}{g\bar{g}} - \frac{1}{g}\pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g}\left[\pi_+\left(\Phi_N \sum_{k=0}^{\infty} \left(H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^k \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right)\right)\right]; \tag{3.4}$$

and this completes the proof of theorem 11.

Remark : The above formula (3.4) could be rewritten as

$$T_N(f)^{-1}(\psi) = \frac{\psi}{g\bar{g}} - \frac{1}{g}\pi_-\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right) - \frac{1}{g}\left[\pi_+\left(\Phi_N \left(I - H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^{-1} \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\psi}{\bar{g}}\right)\right)\right)\right].$$

In the coming sections, we shall estimate the elements of $T_N(f)^{-1}$ *i.e.*

$$\begin{aligned} \langle T_N(f)^{-1}(\chi^k),\, \chi^l\rangle = &\underbrace{\left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right\rangle}_{(T_1)_{k,l}} \\ &\underbrace{-\left\langle \left(I - H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\right)^{-1} \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right), \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right)\right\rangle}_{(T_2)_{k,l}} \end{aligned}$$

and we shall frequently refer to the first and second term respectively by $(T_1)_{k,l}$ and by $(T_2)_{k,l}$ as defined above.

Remark : Take note that whenever f vanishes on the unit circle, we cannot make certain that

$$\sup_N \|H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\| = \alpha < 1,$$

and therefore $(T_2)_{k,l}$ is not directly computable, since $\|I - H_{\Phi_N}^* H_{\Phi_N}\|$ is no more bounded. In the singular case, the trick is to replace $f(\chi)$ by $f(r\chi)$ with $0 < r < 1$ and to get $T_N^{-1}(f(\chi))$ as $\lim_{r\to 1} T_N^{-1}(f(r\chi))$ whenever it exists.

3.2 Inversion of Toeplitz matrix: the multicanonical case

3.2.1 Proof of the structural theorem 5

Theorem 5 *Let* $f = |1 - r\chi|^{2\alpha} = g_r\bar{g}_r$*, where* $g_r = (1 - r\chi)^\alpha$*,* $\alpha \in \mathbb{N}$*,* $0 < r < 1$*. Then, for* $r = 1$*,*

- $$\begin{aligned}(T_1)_{kl} &= \frac{1}{((\alpha-1)!)^2}\left((\alpha-1)!\frac{(\alpha-1+l-k)!}{(l-k)!} + \alpha!\frac{(\alpha+l-k)!}{(l-k+1)!}\right.\\ &+ \cdots \\ &+ \left.\frac{(\alpha+k-2)!}{(k-1)!}\frac{(\alpha+l-2)!}{(l-1)!} + \frac{(\alpha+l-1)!}{k!}\frac{(\alpha+k-1)!}{l!}\right)\end{aligned}$$

- $X_k = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right) \in \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$

- *The dimension of the space* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ *is* α*, a natural basis being* $\left\{\frac{\chi^j}{(1-\chi)^{j+1}}\right\}_{j=0\ldots\alpha-1}$

- $\left(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}}$ *is an automorphism of* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$

Evaluation of the first term: proof of first point

We have :

$$\frac{\chi^k}{\bar{g}} = \frac{\chi^k}{(1-r\bar{\chi})^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left[\frac{\chi^{k+\alpha-1}}{(1-r\bar{\chi})}\right]$$

It follows that

$$\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(\chi^k + \alpha r\chi^k(\alpha-1)! + \alpha!\, r\chi^{k-1}\right)$$

$$\begin{aligned}\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\pi_+\left[\frac{\chi^{k+\alpha-1}}{(1-r\bar{\chi})}\right]\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\sum_{\substack{u+v=k+\alpha-1\\ u\geq\alpha-1}} r^u\chi^v\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(r^{\alpha-1}\chi^k + r^{(\alpha-1)+1}\chi^{k-1} + \cdots + r^{k+\alpha-2}\chi + r^{k+\alpha-1}\right)\end{aligned}$$

Noticing that

$$\frac{\partial^s}{\partial r^s}(r^{s+p}) = \frac{(s+p)!}{p!}r^p$$

for all positive integers p and s, we obtain

$$\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)!}\left[(\alpha-1)!\chi^k + \alpha!\,r\chi^{k-1} + \cdots + r^{k-1}\frac{(\alpha+k-1)!}{(k-1)!}\chi + \frac{(\alpha+k-1)!}{k!}r^k\right]$$

We are able now to compute the desired scalar product. For $k \leq l$, we have :

$$\left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right\rangle = \frac{1}{(\alpha-1)!^2}\left\langle \sum_{p=0}^{k}\chi^{k-p}\frac{(\alpha+p-1)!}{p!}, \sum_{p=0}^{k}\chi^p\frac{(\alpha-l-1+p)!}{(l-p)!}\right\rangle.$$

Evaluating this scalar product we obtain the claimed result.

• **Special case** where $\alpha = 2$.
For $k \leq l$, we have :

$$\left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right\rangle = \langle \chi^k + 2r\chi^{k-1} + \cdots + kr^{k-1}\chi + (k+1)r^k, \\ (p+1)r^p\chi^{l-p} + (p+2)r^{p+1}\chi^{l-p+1} + \cdots + lr^{l-1}\chi + (l+1)r^l\rangle .$$

The result as r tends to 1 is:

$$\begin{aligned}(T_1)_{k,l} &= (l-k+1) + 2(l-k+2) + \cdots + kl + (k+1)(l+1) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} j(l-k+j) \\ &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(3l-k+3).\end{aligned}$$

Evaluation of the second term: proof of the other points

Recall that

$$X_k = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right),$$

then we have:
Evaluation of $\mathrm{Im} H_{\Phi_N}$.

Let us first compute $H_{\Phi_N}(\chi^u)$ for $u \in \mathbb{N}$. According to the previous notations, we have

$$g_r(\chi) = (1-r\chi)^\alpha \text{ and } \Phi_N = \frac{(1-r\chi)^\alpha}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\chi^{n+1}.$$

For all $n \in \mathbb{N}$, we have

$$H_{\Phi_N}(\chi^u) = \pi_-\left[\left(\frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}}\right)^\alpha \chi^{n+u+1}\right].$$

The argument could be rewritten as

$$\left(\frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}}\right)^\alpha \chi^{n+u+1} = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\binom{p}{\alpha}^p r^p \frac{\chi^{n+u+p+1}}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}.$$

Then

$$H_{\Phi_N}(\chi^u) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\binom{p}{\alpha} r^p \pi_-\left[\frac{\chi^{n+u+p+1}}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\right].$$

We can compute $H_{\Phi_N}(\chi^s)$ for $s \in \mathbb{N}$, it is easy to see that we have the following equalities:

$$\begin{aligned}\pi_-\left[\frac{\chi^s}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\right] &= \pi_-\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi^{s+1}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha-1}}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\pi_-\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi^{s+2}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha-2}}\right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\pi_-\left[\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi^{s+2}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha-2}}\right] \\ &= \frac{\partial^p}{\partial r^p}\pi_-\left[\frac{\chi^{s+p}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha-p}}\right], \, p \in \mathbb{N}, \; p < \alpha.\end{aligned}$$

We get

$$\begin{aligned}\pi_-\left[\frac{\chi^s}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\right] &= \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\pi_-\left[\frac{\chi^{s+\alpha-1}}{1-r\bar{\chi}}\right] \\ &= \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(r^{s+1}\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right).\end{aligned}$$

From the above formula we can deduce that

$$\pi_- \left[\frac{\chi^s}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\right] \in \text{span}\left\{\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right), \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right), \ldots, \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)\right\},$$

therefore we have

$$\text{Im} H_{\Phi_N} \subset \text{span}\left\{\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right), \left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)^2, \ldots, \left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)^\alpha\right\}.$$

Evaluation of $\text{Im}H^*_{\Phi_N}$

Recall that $H^*_{\Phi_N}$ is defined as

$$\begin{aligned} H^*_{\Phi_N} : H^{2-} &\longrightarrow H^{2+} \\ \psi &\longmapsto \pi_+(\bar{\Phi}_N \psi). \end{aligned}$$

Thus for all $u \in \mathbb{N}^*$, we have

$$H^*_{\Phi_N}(\bar{\chi}^u) = \pi_+\left[\left(\frac{1-r\bar{\chi}}{1-r\chi}\right)^\alpha \bar{\chi}^{n+u+1}\right].$$

The above quantity could be expanded as

$$H^*_{\Phi_N}(\bar{\chi}^u) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \binom{p}{\alpha}^p r^p \pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{n+u+p+1}}{(1-r\chi)^\alpha}\right].$$

Following the same lines as above, for all $s \in \mathbb{N}$ we obtain

$$\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^s}{(1-r\chi)^\alpha}\right] = \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(\frac{r^{s+\alpha-1}}{1-r\chi}\right).$$

Therefore, we have

$$\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^s}{(1-r\chi)^\alpha}\right] \in \text{span}\left\{\left(\frac{1}{1-r\chi}\right), \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{1-r\chi}\right), \ldots, \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{1-r\chi}\right)\right\},$$

and

$$\text{Im}H^*_{\Phi_N} \subset \text{span}\left\{\frac{1}{1-r\chi}, \frac{\chi}{(1-r\chi)^2}, \ldots, \frac{\chi^{\alpha-1}}{(1-r\chi)^\alpha}\right\}.$$

Now let us set

$$a_i(\chi) = \frac{\chi^{i-1}}{(1-r\chi)^i} \text{ and } \widetilde{a}_i(\chi) = \left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)^i, \ 1 \le i \le \alpha$$

we have obtained as a result that

$$\begin{cases} \text{Im}H^*_{\Phi_N} = \text{span}\{a_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha} \\ \text{Im}H_{\Phi_N} = \text{span}\{\widetilde{a}_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha} \end{cases}$$

then we can provide the following lemma.

Lemma 11 *For all $1 \le i \le \alpha$, we have*

$$\begin{cases} H^*_{\Phi_N}[a_i(\chi)] \neq 0 \\ H_{\Phi_N}[\widetilde{a}_i(\chi)] \neq 0 \end{cases}$$

Proof of lemma 11 : One can see that

$$\begin{cases} \ker H_{\Phi_N} = (1-r\bar{\chi})^{\alpha} H^{2+} \cap H^{2+} \\ \ker H^*_{\Phi_N} = (1-r\chi)^{\alpha} H^{2-} \cap H^{2-} \end{cases},$$

therefore, we get $\operatorname{codim}(\ker H_{\Phi_N}) = \operatorname{codim}(\ker H^*_{\Phi_N}) = \alpha$, and then we have the decomposition as a direct sum (orthogonal):

$$\begin{cases} H^{2+} = \ker H_{\Phi_N} \oplus \operatorname{Im} H^*_{\Phi_N} \\ H^{2-} = \ker H^*_{\Phi_N} \oplus \operatorname{Im} H_{\Phi_N} \end{cases}.$$

Let us denote by T^+, (resp. T^-) the matrix which represents $H_{\Phi_N}\Big|_{\operatorname{Im} H^*_{\Phi_N}}$ relatively to the bases $\{\widetilde{a}_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha}$ and $\{a_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha}$ (resp. to the bases $\{a_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha}$ and $\{\widetilde{a}_i(\chi)\}_{1\le i\le\alpha}$).

Then we can give the following lemma.

Lemma 12 *We have*

i $$T^+ = T^- = T$$

ii $\ker H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} = \ker H_{\Phi_N}$ *and* $\left(H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\operatorname{Im} H^*_{\Phi_N}}$ *is an endomorphism of the space* $\operatorname{Im} H^*_{\Phi_N}$ *of the finite dimension* α.

We deduce from the above proposition that the operator $(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})\Big|_{\operatorname{Im} H^*_{\Phi_N}}$ has $I - T^2$ as representation matrix in the basis $\{a_i(\bar{\chi})\}_{1\le i\le\alpha}$.

Proof of Lemma 12 : We have

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(a_i) &= \pi_-\left[\left(\frac{1-r\chi}{1-r\bar{\chi}}\right)^{\alpha} \frac{1}{(1-r\chi)^i}\chi^{n+i}\right] \\ &= \pi_-\left[\frac{(1-r\chi)^{\alpha-i}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha}}\chi^{n+1}\right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} H^*_{\Phi_N}(\widetilde{a}_i) &= \pi_+\left[\left(\frac{1-r\bar{\chi}}{1-r\chi}\right)^{\alpha} \frac{1}{(1-r\bar{\chi})^i}\bar{\chi}^{n+i+1}\right] \\ &= \pi_+\left[\frac{(1-r\bar{\chi})^{\alpha-i}}{(1-r\chi)^{\alpha}}\bar{\chi}^{n+i+1}\right]. \end{aligned}$$

Setting $(1-r\chi)^{\alpha-i} = \sum_{k=0}^{\alpha-i} c_k r^k \chi^k$, $c_k \in \mathbb{R}$, we thus have

$$\begin{cases} H_{\Phi_N}(a_i) = \sum_{k=0}^{\alpha-i} c_k r^k \pi_-\left[\dfrac{\chi^{n+i+k+1}}{(1-r\bar{\chi})^{\alpha}}\right] \\ H^*_{\Phi_N}(\widetilde{a}_i) = \sum_{k=0}^{\alpha-i} c_k r^k 1_+\left[\dfrac{\bar{\chi}^{n+i+k+1}}{(1-r\chi)^{\alpha}}\right] \end{cases}.$$

But we have seen that

$$\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{n+i+k+1}}{(1-r\chi)^{\alpha}}\right] = \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(r^{n+i+k+\alpha}\frac{1}{1-r\chi}\right)$$

which we can expand as

$$\sum_{s=1}^{\alpha} \lambda_s \frac{\chi^{s-1}}{(1-r\chi)^s},\ \lambda_s \in \mathbb{R}.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\pi_-\left[\frac{\chi^{n+i+k+1}}{(1-r\bar{\chi})^\alpha}\right] &= \frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial r^{\alpha-1}}\left(r^{n+i+k+\alpha}\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)\\ &= \bar{\chi}\sum_{s=1}^{\alpha}\lambda_s\frac{\bar{\chi}^{s-1}}{(1-r\bar{\chi})^s}\\ &= \sum_{s=1}^{\alpha}\lambda_s\frac{\bar{\chi}^s}{(1-r\bar{\chi})^s}.\end{aligned}$$

From above, we can deduce that if

$$H^*_{\Phi_N}(\tilde{a}_i) = \sum_{s=1}^{\alpha}\mu_s\frac{\chi^{s-1}}{(1-r\chi)^s}$$

then

$$H_{\Phi_N}(a_i) = \sum_{s=1}^{\alpha}\mu_s\frac{\bar{\chi}^s}{(1-r\bar{\chi})^s}$$

this implies that $T^+ = T^-$. The second point of the proposition is easy and therefore its proof is skipped.

Evaluation of X_k

For this, we give the following lemma.

Lemma 13 *For all $k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $X_k \in \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ i.e.*

$$X_k(\chi) = \sum_{i=1}^{\alpha}\gamma_{i,k}a_i(\chi), \quad \gamma_{i,k} \in \mathbb{R}.$$

Proof of Lemma 13 : We can write

$$\begin{aligned}X_k &= \pi_+\left[\bar{\Phi}_N\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right] - \pi_+\left[\bar{\Phi}_N\pi_-\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right]\\ &= \pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{n+1-k}}{(1-r\chi)^\alpha}\right] - \pi_+\left[\bar{\Phi}_N\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_i(r)\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)^i\right]\end{aligned}$$

because $\pi_-\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) \in \mathrm{Im}H_{\Phi_N}$

$$X_k = \pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{n+1-k}}{(1-r\chi)^\alpha}\right] - \sum_{i=1}^{\alpha}\sum_{j=1}^{\alpha-i}\lambda_i(r)\mu_j(r)\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{n+i+j-1}}{(1-r\chi)^\alpha}\right].$$

We complete the proof noticing that

$$\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^s}{(1-r\chi)^\alpha}\right) \in \mathrm{Im}H_{\Phi_N}.$$

3.2.2 Inverse of the symmetric bicanonic form

We prove now the claimed corollaries 6, 7, and 8.

Setting $\alpha = 2$ and using the above results yields

$$\begin{aligned} T_{N,r} &= T^+T^- \\ &= \frac{r^{2N+4}}{4}\begin{pmatrix} (1+r^2)^2+(-1)^N(1-r^2)^2 & (-1)^N(1-r^4)-(1-r^4) \\ (1-r^4)-(-1)^N(1-r^4) & (1+r^2)^2+(-1)^N(1-r^2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

note that we cannot obtain $(I-T_{N,r})^{-1}$ if we immediately set $r=1$, thus we assume that $0<r<1$ and let it later reach unity to obtain our result.

After some humdrum computation, the proof of corollaries 6 and 7 are straightforward and it remains only to prove that G_4 is the announced Green Kernel (viz. to prove corollary 8). Let g be any continuous function and set

$$f(x) = \int_0^1 G_4(x,y)g(y)dy.$$

Let us prove that $\frac{d^4f}{dx^4} = g(x)$. We have

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(-\frac{1}{6}y^3+\frac{1}{2}xy^2-x^2y^2+\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{2}x^3y^2-\frac{1}{3}x^3y^3\right)g(y)dy \\ &- \int_x^1 \left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2y-x^2y^2+\frac{1}{2}x^3y^2+\frac{1}{2}x^2y^3-\frac{1}{3}x^3y^3\right)g(y)dy. \end{aligned}$$

Computing the first derivative, we obtain

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^x \left(\frac{1}{2}y^2-2xy^2+xy^3+\frac{3}{2}x^2y^2-x^2y^3\right)g(y)dy \\ &+ \int_x^1 \left(-\frac{1}{2}x^2+xy-2xy^2+\frac{3}{2}x^2y^2+xy^3-x^2y^3\right)g(y)dy, \end{aligned}$$

the second derivative,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^x \left(-2y^2+y^3+3xy^2-2xy^3\right)g(y)dy \\ &+ \int_x^1 \left(-x+y-2y^2+3xy^2+y^3-2xy^3\right)g(y)dy, \end{aligned}$$

the third derivative,

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \int_0^x \left(3y^2-2y^3\right)g(y)dy \\ &+ \int_x^1 \left(-1+3y^2-2y^3\right)g(y)dy, \end{aligned}$$

and finally

$$f^{(4)}(x) = g(x).$$

We obtain as limit conditions:

$$0 = f(0) = f'(0) = f(1) = f'(1)$$

3.3 The bicanonic rational case

3.3.1 Proof of structural theorem 4

Theorem 4
Let $f = \dfrac{|1-r\chi|^4}{|P(\chi)|^2}$, $0<r<1$, *where* $P(z)=\sum_{u=0}^m \beta_u z^u$ *with* $P(z)$ *having no root with modulus* ≤ 1. *Then:*

- *an evaluation of the first term* $(T_1)_{k,l}$ *for* $k<l$, *for* $r=1$ *is given by:*

$$(T_1)_{k,l} = \sum_{q=0}^{k}\left[\left(\sum_{j=0}^{q}\bar\beta_j(q-j+1)\right)\left(\sum_{j=0}^{l-k+q}\bar\beta_j(q+(l-k)-j+1)\right)\right], \text{ where } \bar\beta_j = 0 \text{ if } j>m$$

- $X_k = \pi_+\left(\bar\Phi_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right)\right) \in \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$
- *The dimension of* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ *is the order of the singularity, viz. 2. A natural basis of* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ *is* $\left\{\frac{1}{1-\chi}, \frac{\chi}{(1-\chi)^2}\right\}$
- $\left(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}}$ *is an automorphism of* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$

Note that the bicanonical case is obtained by setting in the above formula $P=1$. Let

$$f_r(\chi) = \frac{|1-r\chi|^4}{|P(\chi)|^2} \text{ and } g(\chi) = \frac{(1-r\chi)^2}{P(\chi)}$$

we find

$$\begin{aligned}\Phi_N &= \frac{g}{\bar g}\chi^{n+1}\\ &= \frac{\bar P}{P}\frac{(1-r\chi)^2}{(1-r\bar\chi)^2}\chi^{n+1}\\ &= \sum_{u\geq -m}\gamma_u\chi^{u+n+1}\frac{(1-r\chi)^2}{(1-r\bar\chi)^2}\end{aligned}$$

for convenience we set above

$$\frac{\bar P}{P} = \sum_{u\geq -m}\gamma_u\chi^u.$$

Evaluation of the first term

This term is

$$(T_1)_{k,l} = \left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar g}\right)\right\rangle.$$

We have

$$\begin{aligned}\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar g}\right) &= \sum_{u=0}^m \bar\beta_u\pi_+\left(\frac{\chi^{k-u}}{(1-r\bar\chi)^2}\right)\\ &= \sum_{u=0}^m \bar\beta_u\pi_+\left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{\chi^{k-u+1}}{(1-r\bar\chi)}\right)\\ &= \sum_{u=0}^m \bar\beta_u\pi_+\left(\sum_{l\geq 0} l r^{l-1}\chi^{k-u-l+1}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \sum_{l=0}^{k-u} (l+1) r^l \chi^{k-l-u} \\
&= \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{l} \bar{\beta}_j (l-j+1) r^{l-j} \right) \chi^{k-l}.
\end{aligned}
$$

Then for all $k \leq l$, we obtain

$$
\begin{aligned}
(T_1)_{k,l} &= \sum_{q=0}^{k} \left[\left(\sum_{j=0}^{q} \bar{\beta}_j (q-j+1) r^{q-j} \right) \left(\sum_{j=0}^{(l-k)+q} \bar{\beta}_j (q+(l-k)-j+1) r^{(l-k)+q-j} \right) \right], \\
&= \sum_{q=0}^{k} \left[\left(\sum_{j=0}^{q} \bar{\beta}_j (q-j+1) \right) \left(\sum_{j=0}^{(l-k)+q} \bar{\beta}_j (q+(l-k)-j+1) \right) \right].
\end{aligned}
$$

with $\bar{\beta}_j = 0$ if $j > m$.

As a special case we set $P = 1 + \beta\chi$ and we obtain

$$
\begin{aligned}
(T_1)_{k,l} &= \frac{1}{6} k(k+1)(3l-k+1)\beta^2 \\
&+ \frac{1}{3}(k+1)(3lk-k^2+k+3l)\beta \\
&+ \frac{1}{6}(k+2)(k+1)(3l-k+3)
\end{aligned}
$$

Evaluation of term X_k

Using the above results for the bicanonical form, we consider the basis

$$
\mathcal{B}_2 = \left\{ \frac{1}{1-r\chi}, \frac{\chi}{(1-r\chi)^2} \right\}.
$$

Let M_P denote the matrix representing H_{Φ_N} in the basis $\mathcal{B}_2$. We have

$$
\begin{aligned}
H_{\Phi_N}\left(\frac{1}{1-r\chi} \right) &= \pi_-\left(\Phi_N \frac{1}{1-r\chi} \right) \\
&= \pi_-\left(\sum_{u \geq -m} \gamma_u \chi^{u+N+1} \frac{1-r\chi}{(1-r\bar{\chi})^2} \right).
\end{aligned}
$$

Assume that $N \geq m$, then using the above results, we have

$$
\begin{aligned}
\pi_-\left(\chi^{u+N+1} \frac{1-r\chi}{(1-r\bar{\chi})^2} \right) &= \pi_-\left(\frac{\chi^{u+N+1}}{(1-r\bar{\chi})^2} \right) - r\pi_-\left(\frac{\chi^{u+N+2}}{(1-r\bar{\chi})^2} \right) \\
&= \left[(u+N+3) r^{u+N+2} - (u+N+4) r^{u+N+4} \right] \frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} \\
&+ \left(r^{u+N+3} - r^{u+N+5} \right) \frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}.
\end{aligned}
$$

thus

$$
\begin{aligned}
H_{\Phi_N}\left(\frac{1}{1-r\chi} \right) &= r^{N+2} \sum_{u \geq -m} \gamma_u r^u \left[\left((u+N+3) - (u+N+4) r^2 \right) \frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} \right. \\
&+ \left. r(1-r^2) \frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2} \right].
\end{aligned}
$$

we can write down

$$H_{\Phi_N}\left(\frac{1}{1-r\chi}\right)=[M_P]_{11}\,\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}+[M_P]_{21}\,\frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}.$$

Setting

$$A(r)=\frac{\bar{P}(1/r)}{(r)},$$

we obtain

$$\begin{cases}[M_P]_{11} &=& \left((N+3)-(N+4)r^2\right)r^{N+2}A(r)+r^{N+3}(1-r^2)A'(r)\\ [M_P]_{21} &=& r^{N+3}(1-r^2)A(r).\end{cases}$$

Similarly we have

$$\begin{aligned}H_{\Phi_N}\left(\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}\right) &= \pi_-\left(\Phi_N\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}\right)\\ &= \sum_{u\geq -m}\gamma_u\pi_-\left(\frac{\chi^{u+N+2}}{(1-r\bar{\chi})^2}\right)\\ &= \sum_{u\geq -m}\gamma_u\left[(u+N+4)r^{u+N+3}\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}+r^{u+N+4}\frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}\right].\end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned}H_{\Phi_N}\left(\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}\right) &= r^{N+4}\left(\sum_{u\geq -m}\gamma_u r^{u-1}u\right)\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\\ &+ (N+4)r^{N+3}\left(\sum_{u\geq -m}\gamma_u r^u\right)\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\\ &+ r^{N+4}\left(\sum_{u\geq -m}\gamma_u r^u\right)\frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}.\end{aligned}$$

Then we have

$$\begin{cases}[M_P]_{12}=(N+4)r^{N+3}A(r)+r^{N+4}A'(r)\\ [M_P]_{22}=r^{N+4}A(r)\end{cases}$$

and we can write down

$$M_P=\begin{pmatrix}A(r) & A(r)'\\ 0 & A(r)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left((N+3)-(N+4)r^2\right)r^{N+2} & (N+4)r^{N+3}\\ r^{N+3}(1-r^2) & r^{N+4}\end{pmatrix}.$$

Now we return to

$$\begin{aligned}H^*_{\Phi_N}\left(\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right) &= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}}\right)\\ &= \pi_+\left(\frac{P}{\bar{P}}\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{(1-r\chi)^2}(1-r\bar{\chi})\right)\\ &= \pi_+\left(\frac{P}{\bar{P}}\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{(1-r\chi)^2}\right)-r\pi_+\left(\frac{P}{\bar{P}}\frac{\bar{\chi}^{N+3}}{(1-r\chi)^2}\right)\\ &= \sum_{u\geq -m}\bar{\gamma}_u\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^{u+N+2}}{(1-r\chi)^2}\right)-r\sum_{u\geq -m}\bar{\gamma}_u\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^{u+N+3}}{(1-r\chi)^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u\geq -m} \bar{\gamma}_u \left[\left((N+u+3)-(u+N+4)r^2\right) r^{N+u+2}\frac{1}{1-r\chi} \right. \\
&\quad \left. + r^{u+N+3}(1-r^2)\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}\right] \\
&= r^{N+3}(1-r)^2\bar{A}'(r)\frac{\chi}{1-r\chi} \\
&\quad + \left((N+3)-(N+4)r^2\right) r^{N+2}\bar{A}(r)\frac{\chi}{1-r\chi} \\
&\quad + r^{N+3}(1-r^2)\bar{A}(r)\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}.
\end{aligned}$$

we get

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_P^*]_{11} = \left((N+3)-(N+4)r^2\right) r^{N+2}\bar{A}(r) + r^{N+3}(1-r)^2\bar{A}'(r) \\ {[M_P^*]_{21}} = r^{N+3}(1-r^2)\bar{A}(r). \end{array}\right.$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
H^*_{\Phi_N}\left(\frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}\right) &= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}\right) \\
&= \pi_+\left(\frac{P}{\bar{P}}\frac{\bar{\chi}^{N+3}}{(1-r\chi)^2}\right) \\
&= \sum_{u\geq -m}\bar{\gamma}_u\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^{u+N+3}}{(1-r\chi)^2}\right) \\
&= \sum_{u\geq -m}\bar{\gamma}_u(N+u+4)r^{N+u+3}\frac{1}{1-r\chi} + r^{u+N+4}\frac{\chi}{(1-r\chi)^2} \\
&= r^{N+4}\bar{A}'(r)\frac{\chi}{1-r\chi} \\
&\quad +(N+4)r^{N+3}\bar{A}(r)\frac{\chi}{1-r\chi} \\
&\quad +r^{N+4}\bar{A}(r)\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}.
\end{aligned}$$

Thus

$$\left\{ \begin{array}{l} [M_P^*]_{12} = (N+4)r^{N+3}\bar{A}(r) + r^{N+4}\bar{A}'(r) \\ {[M_P^*]_{22}} = r^{N+4}\bar{A}(r). \end{array}\right.$$

Similarly we have

$$M_P^* = \begin{pmatrix} \bar{A}(r) & \bar{A}(r)' \\ 0 & \bar{A}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left((N+3)-(N+4)r^2\right) r^{N+2} & (N+4)r^{N+3} \\ r^{N+3}(1-r^2) & r^{N+4} \end{pmatrix}.$$

Now we deal with

$$\begin{aligned}
X_k &= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right) \\
&= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) - \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_-\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right) \\
&= W_1 - H^*_{\bar{\Phi}_N}W_2
\end{aligned}$$

where we set

$$W_1 = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)$$

and

$$\begin{aligned} W_2 &= \pi_-\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) \\ &= \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \pi_-\left(\frac{\chi^{k-u}}{(1-r\bar{\chi})^2}\right). \end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned} W_2 &= \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u \pi_-\left(\frac{\chi^{k-u}}{(1-r\bar{\chi})^2}\right) \\ &= \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u (k-u+2) r^{k-u+1} \frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} + \sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u r^{k-u+2} \frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2} \\ &= \left((k+2)r^{k+1}\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u r^{-u} - r^k \sum_{u=0}^{m} u\bar{\beta}_u r^{-u+1}\right)\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} \\ &\quad + r^{k+2}\sum_{u=0}^{m} \bar{\beta}_u r^{-u} \frac{\bar{\chi}^2}{(1-r\bar{\chi})^2}. \end{aligned}$$

Finally, we have

$$W_2 = \left((k+2)r^{k+1}\bar{P}\left(\frac{1}{r}\right) - r^k \bar{P}'\left(\frac{1}{r}\right)\right)\frac{\bar{\chi}}{1-r\bar{\chi}} + r^{k+2}\bar{P}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\bar{\chi}}{(1-r\bar{\chi})^2}$$

then we have

$$\begin{aligned} W_2 &= \begin{pmatrix} \bar{P}\left(\frac{1}{r}\right) & -\frac{1}{r^2}\bar{P}'\left(\frac{1}{r}\right) \\ 0 & \bar{P}\left(\frac{1}{r}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k+2)r^{k+1} \\ r^{k+2} \end{pmatrix} \\ &= \bar{Z}_r w_{22}. \end{aligned}$$

where $\bar{Z}$ is the matrix $\begin{pmatrix} (k+2)r^{k+1} \\ r^{k+2} \end{pmatrix}$. The same abbreviation is used below.

Following the same lines, we have

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{u=0}^{m} \beta_u \pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1-k-u}}{(1-r\chi)^2}\right) \\ &= \sum_{u=0}^{m} \beta_u (N+2-k-u) r^{N+1-k-u} \frac{1}{1-r\chi} \\ &\quad + \sum_{u=0}^{m} \beta_u r^{N+2-k-u} \frac{\chi}{(1-r\chi)^2} \\ &= (N+2-k) r^{N+1-k} P\left(\frac{1}{r}\right) - r^{N-k} P'\left(\frac{1}{r}\right)\frac{1}{1-r\chi} \\ &\quad + r^{N+2-k} P\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\chi}{(1-r\chi)^2}. \end{aligned}$$

Recalling that

$$X_k = W_1 - M_P W_2,$$

we obtain

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{pmatrix} P\left(\frac{1}{r}\right) & -\frac{1}{r^2}P\left(\frac{1}{r}\right)' \\ 0 & P\left(\frac{1}{r}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (N+2-k)r^{N+1-k} \\ r^{N+2-k} \end{pmatrix} \\ &= Z_r w_{11}. \end{aligned}$$

Recalling that

$$X_k = W_1 - M_P W_2,$$

a straightforward computations provides theorem 4.

We have now matrices for computation of $\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}$. In the case $P = |1+\beta\chi|^2$, $|\beta| < 1$, corollary 4 is obtained with the help of formal computation.

3.4 Inversion of Toeplitz matrix : the asymmetric case

We consider the following symbol

$$f = |g|^2$$

where we set

$$g = (1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)$$

and where we assume that $\chi_1 = re^{i\theta_1}$ and $\chi_2 = re^{i\theta_2}$ with $r < 1$. At the end of this section, we shall let r go towards unity to derive our results for the singular case *i.e* $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$.

3.4.1 Proof of the structural theorem 6

Theorem 6

For $f_r = |(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)|^2$ with $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$,

- *An evaluation of the first term $(T_1)_{k,l}$ for $k \leq l$ is given by:*

$$(T_1)_{k,l} = |\rho|^2 \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \bar{\alpha}_{j+(l-k)} \text{ where } \alpha_j = \chi_1^{j+1} - \chi_2^{j+1}, \text{ for } r = 1 \tag{3.5}$$

- *The space $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$ has dimension 2, $\left\{\frac{1}{1-r\chi_1\chi}, \frac{1}{1-r\chi_2\chi}\right\}$, being a natural basis.*

- *$X_k(r) = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{g_r}\right)\right)$ is given by:*

$$\begin{aligned} X_k(r) &= |\rho|^2 \sum_{j=0}^{k} \left(1+(-1)^j\right)(1-r^4) r^{N+2j-k+3} \frac{1}{1-r\chi_1\chi} \\ &- |\rho|^2 \sum_{j=0}^{k} (-1)^{N+j-k+2} \left(1+(-1)^j\right)(1-r^4) r^{N+2j-k+3} \frac{1}{1-r\chi_2\chi}. \end{aligned}$$

- $\left(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}}$ *is an automorphism of* $\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$.

Evaluation of the first term

We first need to compute the first term of our expansion i.e.

$$(T_1)_{k,l} = \left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}}\right)\right\rangle.$$

Lemma 14 *We have*

$$\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right) = \bar{\rho} \sum_{j=0}^{k} \left(\bar{\chi}_1^{j+1} - \bar{\chi}_2^{j+1}\right) \chi^{k-j}.$$

Proof of lemma 14 : Set for convenience $\rho = 1/(\chi_1 - \chi_2)$; assuming $k \leq l$, one obtains,

$$\begin{aligned} \pi_+\left(\frac{\chi^k}{g}\right) &= \frac{1}{\bar\chi_1 - \bar\chi_2}\pi_+\left[\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\chi^k\right] \\ &= \bar\rho\sum_{j=0}^{k}\left(\bar\chi_1^{j+1} - \bar\chi_2^{j+1}\right)\chi^{k-j} \end{aligned} \tag{3.6}$$

therefore

$$(T_1)_{k,l} = |\rho|^2\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\bar\alpha_{j+(l-k)} \tag{3.7}$$

where $\alpha_j = \chi_1^{j+1} - \chi_2^{j+1}$.

Evaluation of the second term

For that purpose, we provide the following lemma.

Lemma 15 *We have*

$$\begin{cases} \mathrm{Im}H_{\Phi_N} = \mathrm{span}\{\tilde a_1(\chi),\ \tilde a_2(\chi)\} \text{ where } \tilde a_j(\chi) = \frac{\chi}{1-\bar\chi_j\chi},\ j=1,2. \\ \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N} = \mathrm{span}\{a_1(\chi),\ a_2(\chi)\} \text{ where } a_j(\chi) = \frac{1}{1-\chi_j\chi},\ j=1,2. \end{cases}$$

Denoting by T^- (respectively by T^+) the matrix representing H_{Φ_N} (respectively $H^*_{\Phi_N}$) onto $\{a_1(\chi),\ a_2(\chi)\}$ (respectively onto $\{\tilde a_1(\chi),\ \tilde a_2(\chi)\}$) and $\rho = 1/(\chi_1-\chi_2)$, then

$$T_r^- = \bar T_r^+ = \bar\rho\begin{pmatrix} \bar\chi_1^{N+3}(1-\chi_2\bar\chi_1) & \bar\chi_1^{N+3}(1-\chi_1\bar\chi_1) \\ \bar\chi_2^{N+3}(\chi_2\bar\chi_2 - 1) & \bar\chi_2^{N+3}(\chi_1\bar\chi_2 - 1) \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Proof of lemma 15 : First let us evaluate Φ_N, *i.e*

$$\Phi_N = \frac{g}{\bar g}\chi^{N+1} = \frac{1}{\bar\chi_1-\bar\chi_2}\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\left(1-\chi(\chi_1+\chi_2)+\chi_1\chi_2\chi^2\right)\chi^{N+1}.$$

We then have

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\chi^s) &= \pi_-\left(\Phi_N\chi^s\right), \quad s\in\mathbb{N}^* \\ &= \pi_-\left(\frac{g}{\bar g}\chi^{N+s+1}\right) \\ &= \bar\rho\pi_-\left[\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\chi^{N+s+1}\right] \\ &\quad - \bar\rho(\chi_1+\chi_2)\pi_-\left[\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\chi^{N+s+2}\right] \\ &\quad + \bar\rho\chi_1\chi_2\pi_-\left[\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\chi^{N+s+3}\right]. \end{aligned}$$

Let us first compute for all $u \in \mathbb{N}^*$

$$\pi_-\left[\left(\frac{\bar\chi_1}{1-\bar\chi_1\chi} - \frac{\bar\chi_2}{1-\bar\chi_2\chi}\right)\chi^u\right] = \frac{\bar\chi_1^{u+2}\bar\chi}{1-\bar\chi_1\bar\chi} - \frac{\bar\chi_2^{u+2}\bar\chi}{1-\bar\chi_2\bar\chi}, \tag{3.9}$$

therefore we immediately have

$$\mathrm{Im}H_{\Phi_N} = \mathrm{span}\{\tilde a_1(\chi),\ \tilde a_2(\chi)\}.$$

where we set

$$\widetilde{a}_1(\chi) = \frac{\bar{\chi}}{1-\bar{\chi}_1\bar{\chi}} \text{ and } \widetilde{a}_2(\chi) = \frac{\bar{\chi}}{1-\bar{\chi}_2\bar{\chi}}.$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}_N &= \frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1} \\
&= \rho\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)(1-\bar{\chi}(\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2)+\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2\bar{\chi}^2)\bar{\chi}^{N+1}.
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
H^*_{\Phi_N}(\bar{\chi}^s) &= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\bar{\chi}^s\right), \quad s\in\mathbb{N}^* \\
&= \pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+s+1}\right) \\
&= \frac{1}{\chi_1-\chi_2}\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N+s+1}\right] \\
&\quad -\frac{\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2}{\chi_1-\chi_2}\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N+s+2}\right] \\
&\quad +\frac{\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2}{\chi_1-\chi_2}\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N+s+3}\right].
\end{aligned}$$

Computing for all $u\in\mathbb{N}$,

$$\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^u\right] = \frac{\chi_1^{u+1}}{1-\chi_1\chi} - \frac{\chi_2^{u+1}}{1-\chi_2\chi}, \tag{3.10}$$

then

$$\mathrm{Im}H^*_{\Phi_N} = \mathrm{span}\{a_1(\chi),\ a_2(\chi)\}.$$

where similarly we set

$$a_1(\chi) = \frac{1}{1-\chi_1\chi} \text{ and } a_2(\chi) = \frac{1}{1-\chi_2\chi}.$$

Then to complete, we only need to compute $H_{\Phi_N}(a_j(\chi))$ and $H^*_{\Phi_N}(\widetilde{a}_j(\chi))$ for $j=1,\ 2$. We have

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(a_1(\chi)) &= \pi_-\left(\Phi_N a_1(\chi)\right) \\
&= \pi_-\left[\frac{(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)}{(1-\bar{\chi}_1\bar{\chi})(1-\bar{\chi}_2\bar{\chi})}\chi^{N+1}a_1(\chi)\right] \\
&= \bar{\rho}\pi_-\left[\left(\frac{\bar{\chi}_1}{1-\bar{\chi}_1\bar{\chi}} - \frac{\bar{\chi}_2}{1-\bar{\chi}_2\bar{\chi}}\right)(1-\chi_2\chi)\,\chi^{N+1}\right] \\
&= \bar{\rho}\left(\widetilde{\alpha}_{11}\widetilde{a}_1(\chi)+\widetilde{\alpha}_{21}\widetilde{a}_2(\chi)\right).
\end{aligned}$$

Using formula 3.9, we have

$$\left\{\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_{11} &= \bar{\chi}_1^{N+3}(1-\chi_2\bar{\chi}_1) \\
\widetilde{\alpha}_{21} &= \bar{\chi}_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_2-1)
\end{aligned}\right. .$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(a_2(\chi)) &= \pi_-\left(\Phi_N a_2(\chi)\right) \\
&= \pi_-\left[\frac{(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)}{(1-\bar{\chi}_1\bar{\chi})(1-\bar{\chi}_2\bar{\chi})}\chi^{N+1}a_2(\chi)\right] \\
&= \pi_-\left[\frac{(1-\chi_1\chi)}{(1-\bar{\chi}_1\bar{\chi})(1-\bar{\chi}_2\bar{\chi})}\chi^{N+1}\right] \\
&= \bar{\rho}\pi_-\left[\left(\frac{\bar{\chi}_1}{1-\bar{\chi}_1\bar{\chi}} - \frac{\bar{\chi}_2}{1-\bar{\chi}_2\bar{\chi}}\right)(1-\chi_1\chi)\chi^{N+1}\right] \\
&= \bar{\rho}\left(\widetilde{\alpha}_{12}\widetilde{a}_1(\chi)+\widetilde{\alpha}_{22}\widetilde{a}_2(\chi)\right).
\end{aligned}$$

Using again formula 3.9, we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\alpha}_{12} = \bar{\chi}_1^{N+3}(1-\chi_1\bar{\chi}_1) \\ \widetilde{\alpha}_{22} = \bar{\chi}_2^{N+3}(\chi_1\bar{\chi}_2-1) \end{array} \right. .$$

Thus we have

$$T^- = \bar{\rho}\begin{pmatrix} \bar{\chi}_1^{N+3}(1-\chi_2\bar{\chi}_1) & \bar{\chi}_1^{N+3}(1-\chi_1\bar{\chi}_1) \\ \bar{\chi}_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_2-1) & \bar{\chi}_2^{N+3}(\chi_1\bar{\chi}_2-1) \end{pmatrix}.$$

Following the same lines, we compute

$$\begin{aligned} H^*_{\Phi_N}\left(\widetilde{a}_1(\chi)\right) &= \pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1}\widetilde{a}_1(\chi)\right) \\ &= \pi_+\left[\frac{(1-\bar{\chi}_2\bar{\chi})}{(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)}\bar{\chi}^{N+2}\right] \\ &= \rho\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)(1-\bar{\chi}_2\bar{\chi})\bar{\chi}^{N+2}\right] \\ &= \rho\left(\widetilde{\beta}_{11}a_1(\chi)+\widetilde{\beta}_{12}a_2(\chi)\right). \end{aligned}$$

Using formula 3.10, we have

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\beta}_{11} = \chi_1^{N+3}(1-\bar{\chi}_2\chi_1) \\ \widetilde{\beta}_{21} = \chi_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_2-1) \end{array} \right. .$$

We also have

$$\begin{aligned} H^*_{\Phi_N}\left(\widetilde{a}_2(\chi)\right) &= \pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1}\widetilde{a}_2(\chi)\right) \\ &= \pi_+\left[\frac{(1-\bar{\chi}_1\bar{\chi})}{(1-\chi_1\chi)(1-\chi_2\chi)}\bar{\chi}^{N+2}\right] \\ &= \rho\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)(1-\bar{\chi}_1\bar{\chi})\bar{\chi}^{N+2}\right] \\ &= \rho\left(\widetilde{\beta}_{21}a_1(\chi)+\widetilde{\beta}_{22}a_2(\chi)\right). \end{aligned}$$

Using again formula 3.10, we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\beta}_{12} = \chi_1^{N+3}(1-\chi_1\bar{\chi}_1) \\ \widetilde{\beta}_{22} = \chi_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_1-1) \end{array} \right. .$$

We thus have

$$T^+ = \rho\begin{pmatrix} \chi_1^{N+3}(1-\bar{\chi}_2\chi_1) & \chi_1^{N+3}(1-\chi_1\bar{\chi}_1) \\ \chi_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_2-1) & \chi_2^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_1-1) \end{pmatrix}.$$

We note that

$$T^+ = \bar{T}^-.$$

Evaluation of X_k

Recall that

$$\begin{aligned} X_k &= \pi_+\left(\bar{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right) \\ &= \pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1}\pi_+\left(\frac{\chi^k}{\bar{g}}\right)\right) \end{aligned}$$

We have already evaluated the inner term see formula (3.6), therefore it remains to estimate the quantity

$$\bar{\rho}\sum_{j=0}^{k}\left(\bar{\chi}_1^{j+1}-\bar{\chi}_2^{j+1}\right)\pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1}\chi^{k-j}\right),$$

where $k \leq N$. Using a previous calculation, we obtain for all $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\pi_+\left(\frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N-s+1}\right) &= \rho\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N-s+1}\right] \\
&\quad -\rho(\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2)\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N-s+2}\right] \\
&\quad +\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2\pi_+\left[\left(\frac{\chi_1}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2}{1-\chi_2\chi}\right)\bar{\chi}^{N-s+3}\right] \\
&= \rho\left(\frac{\chi_1^{N-s+2}}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2^{N-s+2}}{1-\chi_2\chi}\right) \\
&\quad -\rho(\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2)\left(\frac{\chi_1^{N-s+3}}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2^{N-s+3}}{1-\chi_2\chi}\right) \\
&\quad +\rho\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2\left(\frac{\chi_1^{N-s+4}}{1-\chi_1\chi}-\frac{\chi_2^{N-s+4}}{1-\chi_2\chi}\right)
\end{aligned}$$

Finally, we have

$$\begin{aligned}
X_k &= |\rho|^2\sum_{j=0}^{k}\left(\bar{\chi}_1^{j+1}-\bar{\chi}_2^{j+1}\right)\left[\chi_1^{N+j-k+2}(1-(\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2)\chi_1+\chi_1^2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2)a_1(\chi)\right. \\
&\quad \left.-\bar{\chi}_2^{N+j-k+2}(1-(\bar{\chi}_1+\bar{\chi}_2)\chi_2+\chi_2^2\bar{\chi}_1\bar{\chi}_2)a_2(\chi)\right] \\
&= |\rho|^2\sum_{j=0}^{k}\left(\bar{\chi}_1^{j+1}-\bar{\chi}_2^{j+1}\right)\chi_1^{N+j-k+2}a_1(\chi)\bar{g}(\bar{\chi}_1) \\
&\quad -|\rho|^2\sum_{j=0}^{k}\left(\bar{\chi}_1^{j+1}-\bar{\chi}_2^{j+1}\right)\bar{\chi}_2^{N+j-k+2}a_2(\chi)\bar{g}(\bar{\chi}_2)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Take note that $\bar{g}(\bar{\chi}_j) = 0$ whenever $|\chi_j| = 1$, $j = 1, 2$ and this would make the symbol to be singular and evaluation of the inverse would be much more difficult. We also see that $X_k \in \mathrm{Im}H^*_{\Phi_N}$.

To achieve the proof of theorem 6, we need to compute X_k, but this computation is straightforward with the help of lemma 14. Note that if we set $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$ and if $\chi_1 \neq 1$ and $\chi_2 \neq 1$, then we get

$$T^+T^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remark : This equality confirms the remark (p. 41): namely T^+T^- represents the restriction of $H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}$ to $\mathrm{Im}(H_{\Phi_N})$ and we can deduce that $\sup_N \|H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\| = 1$.

Clearly the interesting cases are those for which we have $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$; but it turns out that the operator $\left(I - H^*_{\Phi_N}H_{\Phi_N}\right)$ defined above by formula 3.10 is singular and is therefore not invertible. To workaround and derive our results, we shall replace χ_j ($|\chi_j| = 1, j = 1, 2.$) by $r\chi_j$ where $r \in \mathbb{R}$ and $0 < r < 1$ and we will let r tend to unity to obtain our results. More precisely we shall replace χ_1 (respectively χ_2) by $r\chi_1$ (respectively $r\chi_2$) with $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$, in

$$T = T^+T^-$$

$$
\begin{aligned}
= & \ |\rho|^2 \begin{pmatrix} |\chi_1^2|^{N+3}|1-\chi_2\bar{\chi}_1|^2 + \chi_1^{N+3}\bar{\chi}_2^{N+3}(1-|\chi_1|^2)(|\chi_2|^2-1) & 0 \\ |\chi_2^2|^{N+3}\left(1-|\chi_2|^2\right)\left(1-\bar{\chi}_1\chi_2\right) + \chi_2^{N+3}\bar{\chi}_1^{N+3}(\chi_2\bar{\chi}_1-1)(1-|\chi_2|^2) & 0 \end{pmatrix} \\
+ & \ |\rho|^2 \begin{pmatrix} 0 & |\chi_1^2|^{N+3}(1-|\chi_1|^2)(1-\chi_1\bar{\chi}_2) + \chi_1^{N+3}\bar{\chi}_2^{N+3}(\chi_1\bar{\chi}_2-1)(1-|\chi_1|^2) \\ 0 & |\chi_2^2|^{N+3}|\chi_1\bar{\chi}_2-1|^2 + \bar{\chi}_1^{N+3}\chi_2^{N+3}(1-|\chi_1|^2)(|\chi_2|^2-1) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Performing the substitution $\chi_1 = r\chi_1$ (with $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$), we obtain

$$T_r = T_r^+ T_r^- = \frac{r^{2N+4}}{|1-\bar{\chi}_1\chi_2|^2} \begin{pmatrix} (T_r)_{11} & (T_r)_{12} \\ (T_r)_{21} & (T_r)_{22} \end{pmatrix}.$$

where

$$
\begin{cases}
(T_r)_{11} = |1-r^2\bar{\chi}_1\chi_2|^2 - (\chi_1\bar{\chi}_2)^{N+3}(1-r^2)^2 \\
(T_r)_{12} = (1-r^2)(1-r^2\chi_1\bar{\chi}_2)\left(1-(\chi_1\bar{\chi}_2)^{N+3}\right) \\
(T_r)_{21} = (1-r^2)(1-r^2\bar{\chi}_1\chi_2)\left(1-(\bar{\chi}_1\chi_2)^{N+3}\right) \\
(T_r)_{22} = |1-r^2\bar{\chi}_1\chi_2|^2 - (\bar{\chi}_1\chi_2)^{N+3}(1-r^2)^2.
\end{cases}
$$

with $|\chi_1| = |\chi_2| = 1$ and $0 < r < 1$.

3.4.2 The simple asymmetric case

Here we consider the particular case where $\chi_1 = -\chi_2 = 1$.

Using the above results, we immediately obtain the lemma:

Lemma 16

$$T_r = \frac{r^{2N+4}}{4} \begin{pmatrix} (1+r^2)^2 + (-1)^N(1-r^2)^2 & (1-r^4)(1+(-1)^N) \\ (1-r^4)(1+(-1)^N) & (1+r^2)^2 + (-1)^N(1-r^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$X_k(r) = \frac{1}{4r^2}\left(\frac{1}{1-r\chi}\varphi_1(r) + \frac{1}{1+r\chi}\varphi_2(r)\right),$$

where

$$
\begin{cases}
\varphi_1(r) = (1-r^4)r^{N-k+3}\sum_{j=0}^{k}(1+(-1)^j)r^{2j} \\
\varphi_2(r) = (-r)^{N-k+3}(1-r^4)\sum_{j=0}^{k}(1+(-1)^j)r^{2j}
\end{cases}
$$

Take note that

$$\varphi_1(r) = \begin{cases} 2r^{N-k+3}(1-r^{4k+4}) & \text{if } k \text{ even} \\ 2r^{N-k+3}(1-r^{4k}) & \text{if } k \text{ odd.} \end{cases}$$

similarly, we have

$$\varphi_2(r) = \begin{cases} 2(-r)^{N-k+3}(1-r^{4k+4}) & \text{if } k \text{ even} \\ 2(-r)^{N-k+3}r^{N-k+3}(1-r^{4k}) & \text{if } k \text{ odd.} \end{cases}$$

Proof of lemma 16 : It is a direct result obtained from the previous theorem.

Corollaries 9, 10 and 11 are directly obtained from previous lemma.

Chapitre 4

Étude spectrale des opérateurs de Toeplitz à symbole singulier

4.1 Structure géométrique : une formule d'inversion

L'idée est d'utiliser ici une structure géométrique analogue à celle introduite par le théorème 1, pour évaluer les valeurs propres de $T_N(f)$. Cependant c'est maintenant la factorisation de $f - \lambda$ (où $\lambda \in [\inf_{\mathbb{T}} f, \sup_{\mathbb{T}} f]$), qui est le point de départ de la démarche. Dans ce but, nous ferons une hypothèse raisonnable sur la factorisation de $f - \lambda$, qui conduira à la structure géométrique adéquate.

4.1.1 Notations générales

- $\mathbb{T}$ désigne le tore de dimension 1
- $H^+ = \left\{ h \in L^2(\mathbb{T}),\ \widehat{h}(s) = 0 \text{ pour } s < 0 \right\}$
- $H^- = L^2(\mathbb{T}) \ominus H^+$
- π_+ et π_- désignent les projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathbb{T})$ respectivement sur H^+ et H^-.
- On notera χ la fonction complexe $e^{i\theta}$ et $\mathcal{P}_N$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ que voici : vect $\{1,\ \chi,\ \chi^2, \cdots, \chi^N\}$
- Pour $f \in L^1(\mathbb{T})$, on désignera par $T_N(f)$ l'opérateur de Toeplitz associé au symbole de f et défini pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_N$ par
$$T_N(f)(\varphi) = \mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N}(f\varphi)$$
où $\mathbf{\Pi}_{\mathcal{P}_N} = \mathbf{\Pi}_N$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T})$ dans $\mathcal{P}_N$.
- $H^\infty = H^+ \cap L^\infty(\mathbb{T})$
- Pour $f \in L^\infty(\mathbb{T})$
$$L^2_f(\mathbb{T}) = \left\{ h \ f\text{-mesurable: } \int_{\mathbb{T}} |h|^2 f \, d\theta < \infty \right\}$$
- Soit g_1 et g_2 vérifiant $g_1, \bar{g}_2 \in H^\infty$, on pose
$$\Phi_N = \frac{g_1}{g_2} \chi^{N+1} \text{ et } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1}.$$
avec l'hypothèse supplémentaire que g_1 et g_2 ne s'annulent en aucun point.

- Les opérateurs de Hankel H_{Φ_N} et $H_{\tilde{\Phi}_N}$ sont définis par :

$$\begin{cases} \forall \psi \in H^+ & H_{\Phi_N}(\psi) = \pi_-(\Phi_N \psi) \\ \forall \varphi \in H^- & H_{\tilde{\Phi}_N}(\varphi) = \pi_+(\tilde{\Phi}_N \varphi) \end{cases}$$

Dans ce qui suit le symbole f a la propriété suivante:

Il existe deux fonctions g_1 et $\bar{g}_2$ de H^∞ tel que $f = g_1 g_2$. De plus g_1 et $\bar{g}_2$ ne s'annulent en aucun point et g_1^{-1} et $\bar{g}_2^{-1}$ appartiennent aussi à H^∞.

Sous les hypothèses précédentes, on a ([S])

$$\left\| H_{\Phi_N} H_{\tilde{\Phi}_N} \right\| < 1$$

et on a le théorème suivant.

Théorème 12 *$T_N(f)$ est inversible et $\forall \varphi \in \mathcal{P}_N$, on a*

$$T_N(f)^{-1}(\varphi) = \frac{1}{g_1}\pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right) - \frac{1}{g_1}\pi_+\left(\Phi_N\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\pi_+\left(\tilde{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right)\right).$$

Corollaire 13 *Soit $[T_N(f)^{-1}]_{k,l}$ l'élément d'indice (k,l) de la matrice $T_N(f)^{-1}$, on a :*

$$\begin{aligned} [T_N(f)^{-1}]_{k,l} &= \left\langle \pi_+\left(\frac{\chi^k}{g_2}\right), \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}_1}\right)\right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}\pi_+\left(\tilde{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^k}{g_2}\right)\right), \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{\chi^l}{\bar{g}_1}\right)\right)\right\rangle. \end{aligned}$$

où $\langle\, , \rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$. La démonstration du théorème nécessite deux lemmes.

Lemme 17 *Posons $K_N = f\mathcal{P}_N \subset L^2_{1/f}(\mathbb{T})$ et $\mathbf{\Pi}_{K_N}$ le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T})$ sur K_N pour $\varphi \in \mathcal{P}_N$, il existe $\mu_0 \in \mathcal{P}_N$ tel que*

$$\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi) = f\mu_0.$$

Alors

(i) $T_N(f)$ est inversible

(ii) $\mu_0 = T_N(f)^{-1}(\varphi)$ et $T_N(f)^{-1} = \frac{1}{f}\mathbf{\Pi}_{K_N}$.

Démonstration du lemme 17 : On a

$$\langle \varphi - \mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi), f\mu\rangle_{1/f} = 0 \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{P}_N$$

soit

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \mu\rangle_2 &= \langle \mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi), \mu\rangle_2 \\ &= \langle \mathbf{\Pi}_N(\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi)), \mu\rangle_2 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{\Pi}_N(\mathbf{\Pi}_{K_N}(\varphi)) \\ &= \mathbf{\Pi}_N(f\mu_0) \\ &= T_N(f)\mu_0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $T_N(f)$ est surjective, et donc inversible car la dimension est finie; ainsi

$$\mathbf{\Pi}_{K_N} = fT_N(f)^{-1}.$$

Lemme 18 $\forall \varphi \in \mathcal{P}_N$,

$$\Pi_{K_N}(\varphi) = \varphi - \theta_1 - \chi^{N+1}\theta_2$$

où $\theta_1 \in H^-$ et $\theta_2 \in H^+$ sont déterminés par le système :

$$\begin{cases} \frac{\theta_1}{g_2} + \pi_-\left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2}\theta_2\right) & = \pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right) \\ \pi_+\left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1}\theta_1\right) + \frac{\theta_2}{g_1} = \pi_+\left(\frac{\varphi}{\chi^{N+1}g_1}\right) \end{cases}$$

<u>Démonstration du lemme 18</u> : . On a $\Pi_{K_N}(\varphi) - \varphi \in \mathcal{P}_N^\perp$ (dans $L^2(\mathbb{T})$). En effet $\mathcal{P}_N^{\perp, L^2} = K_N^{\perp, L^2_{1/f}}$. Or

$$\mathcal{P}_N = \chi^{N+1}H^- \cap H^+$$

donc

$$\mathcal{P}_N^\perp = \chi^{N+1}H^+ + H^-.$$

Ainsi il existe $\theta_1 \in H^-$ et $\theta_2 \in H^+$ tels que

$$\Pi_{K_N}(\varphi) = \varphi - \theta_1 - \chi^{N+1}\theta_2$$

et ceci pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_N$.

On obtient le système en écrivant que

$$\pi_-\left(\frac{\Pi_{K_N}(\varphi)}{g_2}\right) = \pi_+\left(\frac{\Pi_{K_N}(\varphi)}{\chi^{N+1}g_1}\right) = 0.$$

<u>Démonstration du théorème 12</u> : . D'après le lemme 18, on a

$$\theta_1 = -g_2\pi_-\left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2}\theta_2\right) + g_2\pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)$$

ce qui permet d'avoir l'expression de θ_2 à partir de l'autre égalité du système donné dans le lemme 18

$$\begin{aligned} \frac{\theta_2}{g_1} &= -\pi_+\left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1}\theta_1\right) + \pi_+\left(\frac{\varphi}{\chi^{N+1}g_1}\right) \\ &= \pi_+\left(\tilde{\Phi}_N\pi_-\left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2}\theta_2\right)\right) - \pi_+\left(\tilde{\Phi}_N\Pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right) + \pi_+\left(\frac{1}{\chi^{N+1}g_1}\varphi\right). \end{aligned}$$

Par calcul direct on a:

$$\pi_+\left(\tilde{\Phi}_N\pi_-\left(\frac{\chi^{N+1}}{g_2}\theta_2\right)\right) = H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\left(\frac{\theta_2}{g_1}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \left(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right)\left(\frac{\theta_2}{g_1}\right) &= \pi_+\left(\frac{\chi^{N+1}}{g_1}\varphi - \tilde{\Phi}_N\pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right) \\ &= \pi_+\left(\tilde{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\theta_2 = g_1\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}\pi_+\left(\tilde{\Phi}_N\Pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right).$$

Posons $H_N = \left(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right)^{-1}$ et $X = \pi_+\tilde{\Phi}_N\pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)$, en réutilisant les lemmes 18 et 17, on obtient

$$g_1g_2T_N^{-1}(f)(\varphi) = \varphi + g_2\pi_-\left(\Phi_N H_N X\right) - g_2\pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right) - \chi^{N+1}g_1H_NX$$

soit

$$T_N(f)^{-1}(\varphi) = \frac{1}{g_1}\left(\frac{\varphi}{g_2} - \pi_-\left(\frac{\varphi}{g_2}\right)\right) + \frac{1}{g_1}\pi_-\left(\Phi_N H_N X\right) - \frac{\chi^{N+1}}{g_2} H_N X$$

que l'on peut écrire encore sous la forme

$$T_N(f)^{-1}(\varphi) = \frac{1}{g_1}\pi_+\left(\frac{\varphi}{g_2}\right) - \frac{1}{g_1}\pi_+\left(\Phi_N H_N X\right)$$

qui est la formule annoncée.

Démonstration du corollaire 13 : Elle est immédiate si l'on remarque que

$$\left[T_N(f)^{-1}\right]_{k,l} = \langle T_N^{-1}(f)(\chi^k), \chi^l\rangle$$

où $\langle\, ,\,\rangle$ désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{T})$ pour la mesure $\sigma = \frac{\vartheta}{2\pi}$, ϑ étant la mesure de Lebesgue.

Remarque : Estelle Basor m'a communiqué une démonstration générale qui permet de retrouver l'ensemble des formules d'inversion utilisées jusqu'à présent dans ce travail.

À partir de la formule de Kozak [BS, proposition 7.15], on a

$$(T_N(f))^{-1} = \mathbf{\Pi}_N T(f)^{-1}\mathbf{\Pi}_N + \mathbf{\Pi}_N T(f)^{-1} Q_N (Q_N T(f)^{-1} Q_N)^{-1} Q_N T(f)^{-1}\mathbf{\Pi}_N$$

Ici $Q_N = I - \mathbf{\Pi}_N$.

Supposons que f se factorise en $\phi_+\phi_-$ où $\phi_+^{\pm 1}, \phi_-^{\pm 1}$ se trouvent dans H^∞, $\bar{H^\infty}$ respectivement.

Maintenant, comme cela est connu, (voir par exemple [BS, paragraphe 2.14])

$$(T(f))^{-1} = T(\phi_+^{-1})T(\phi_-^{-1}),$$

$$T(\phi_+^{-1})T(\phi_-^{-1}) = T(f^{-1}) - H(\phi_+^{-1})H(\tilde{\phi}_-^{-1}).$$

La dernière équation n'utilise pas exactement les mêmes opérateurs de Hankel que ceux de cette thèse. On trouvera leur définition dans [BS, paragraphe 2.10]. Alors le premier terme de la formule de Kozak se réduit à celui du corollaire 13.

À présent, examinons le second terme. Les égalités ci-dessus donnent

$$Q_N(T(f))^{-1}Q_N = Q_N T(\phi_-^{-1})(I - T(\phi_-)H(\phi_+^{-1})H(\tilde{\phi}_-^{-1})T(\phi_+))T(\phi_+^{-1})Q_N$$

$$= Q_N T(\phi_-^{-1})Q_N(I - H(\phi_-/\phi_+)H(\widetilde{\phi_+/\phi_-}))Q_N T(\phi_+^{-1})Q_N$$

et alors ce second terme devient

$$\mathbf{\Pi}_N T(\phi_+^{-1})T(\phi_-^{-1})Q_N T(\phi_+)Q_N$$

$$(Q_N(I - H(\phi_-/\phi_+)H(\widetilde{\phi_+/\phi_-}))Q_N)^{-1}Q_N T(\phi_-)Q_N T(\phi_+^{-1})T(\phi_-^{-1})\mathbf{\Pi}_N$$

ou

$$\mathbf{\Pi}_N T(\phi_+^{-1})T(\phi_+/\phi_-)Q_N$$

$$\times(Q_N(I - H(\phi_-/\phi_+)H(\widetilde{\phi_+/\phi_-}))Q_N)^{-1}Q_N T(\phi_-/\phi_+)T(\phi_-^{-1})\mathbf{\Pi}_N.$$

Maintenant $Q_N = T(\chi^{N+1})T(\chi^{-N-1})$ avec $\chi(\theta) = e^{i\theta}$. Un peu de calcul algébrique montre que ceci n'est autre que

$$\mathbf{\Pi}_N T(\phi_+^{-1})T(\Phi_N)(I - H((\phi_-/\phi_+)\chi^{-N-1})H((\widetilde{\phi_+/\phi_-})\chi^{N+1}))^{-1}T(\Phi_N^{-1})T(\phi_-^{-1})\mathbf{\Pi}_N.$$

4.2 Un théorème de S. Parter

Nous allons démontrer le théorème 7 du chapitre 1.
$f(\theta)$ désigne une fonction réelle, continue de période 2π dont le minimum m est atteint au seul point $0 \pmod{2\pi}$). On suppose f de classe $C^{2\alpha}$ sur un voisinage de 0 et $f^{(2\alpha)}(0) = \sigma^2 > 0$ est la première dérivée non nulle en 0. Rappelons le théorème 7
Théorème 7 *Pour $\alpha = 2$, si $\lambda_k(N)$ désigne la k-ème plus petite valeur propre de $T_N(f)$, on a*

$$\lambda_k(N) = m + \frac{\sigma^2}{4!}\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{2(N+3)}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^4}\right),$$

E_k étant déterminé par

$$\tan\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) = (-1)^k \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right).$$

En reprenant à notre compte un argument de Weyl-Courant, il suffit de considérer le symbole $f(\theta) = 4(1-\cos\theta)^2 = |1-\chi|^4$. D'après un théorème de Szegö, si λ désigne une valeur propre de $T_N\left(|1-\chi|^4\right)$, alors $\lambda \in \left[\min_{\mathbb{T}} |1-\chi|^4,\ \max_{\mathbb{T}} |1-\chi|^4\right] = [0, 16]$.

Le but de ce qui suit consiste donc à évaluer le polynôme caractéristique de $T_N\left(|1-\chi|^4 - \lambda\right)$ pour $\lambda \in \left[0,\ 4^2\right]$.

4.2.1 Factorisation du symbole

Proposition 1 *Soit $\lambda \in [0,\ 4^2]$ on a*

$$|1-\chi|^4 - \lambda = \bar{\chi}^2\left(\chi^2 - (2-\sqrt{\lambda})\chi + 1\right)\left(\chi^2 - (2+\sqrt{\lambda})\chi + 1\right)$$

Démonstration de la proposition 1 :

On a $(X^2 - \mu^2) = (X-\mu)(X+\mu)$. En remplaçant X par $|1-\chi|^2$ et μ par $\sqrt{\lambda}$, on obtient

$$\begin{aligned} |1-\chi|^4 - \lambda &= (2-\sqrt{\lambda}-\chi-\bar{\chi})(2+\sqrt{\lambda}-\chi-\bar{\chi}) \\ &= \bar{\chi}^2\left(\chi^2 - (2-\sqrt{\lambda})\chi + 1\right)\left(\chi^2 - (2+\sqrt{\lambda})\chi + 1\right). \end{aligned}$$

Corollaire 14 *Si $\lambda \in \left[0,\ 4^2\right]$, alors $|1-\chi|^4 - \lambda$ admet les racines $\left\{\chi_0,\ \bar{\chi}_0,\ a,\ \frac{1}{a}\right\}$ où $\chi_0 \in \mathbb{T}$ et $a \in]0,\ 1[$, tels que:*

$$\begin{cases} \chi_0 = \frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{\lambda} + i\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{4-\sqrt{\lambda}}\right) = e^{i\theta_0} \\ a\ = \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{\lambda} + \lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{4+\sqrt{\lambda}}\right) = e^{\theta_1} \end{cases}$$

En particulier

$$\begin{cases} \cos\theta_0 = \frac{2-\sqrt{\lambda}}{2},\ \sin\theta_0 = \frac{\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{4-\sqrt{\lambda}}}{2} \\ \cosh\theta_1 = \frac{2+\sqrt{\lambda}}{2},\ \sinh\theta_1 = \frac{\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{4+\sqrt{\lambda}}}{2} \end{cases}.$$

Corollaire 15 *Pour $\lambda \in [0,\ 16]$, on a*

$$|1-\chi|^4 - \lambda = g_1 g_2$$

où

$$\begin{cases} g_1 = \frac{1}{a}(\chi_0 - \chi)(1 - a\chi) \\ g_2 = \bar{\chi}_0(\chi_0 - \bar{\chi})(1 - a\bar{\chi}) \end{cases}$$

On remarque que g_1 et g_2 ne vérifient pas l'hypothèse du théorème d'inversion. C'est pourquoi nous appliquerons dans les calculs le théorème d'inversion avec le symbole régularisé:

$$f_{\lambda,r} = f_\lambda = g_{1,r}g_{2,r}, \text{ où } 0 < r < 1,$$

et où

$$\begin{cases} g_{1,r} = \frac{1}{a}(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi) \\ g_{2,r} = \bar{\chi}_0(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi}) \end{cases}.$$

On vérifie que $g_{1,r}$, $\bar{g}_{2,r}$, $\frac{1}{g_{1,\,r}}$ et $\frac{1}{\bar{g}_{2,\,r}} \in H^\infty$.

4.2.2 Equation caractéristique de $T_N(f_\lambda)$

La formule d'inversion nécessite dans sa mise en œuvre le calcul de l'opérateur $\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)^{-1}$. Nous allons pour cela faire plusieurs remarques, énoncées sous forme de propositions.

Proposition 2 *On a*

$$\tilde{X}_0 = \pi_+\left(\tilde{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{1}{g_2}\right)\right) \in \text{vect}\{\vec{\varepsilon_0}, \vec{\varepsilon_1}\}$$

où

$$\vec{\varepsilon_0} = \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \text{ et } \vec{\varepsilon_1} = \frac{1}{1 - a\chi}.$$

De même

$$X_0 = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{1}{\bar{g}_1}\right)\right) \in \text{vect}\{\vec{\varepsilon_2},\, \vec{\varepsilon_1}\}$$

où

$$\vec{\varepsilon_2} = \frac{1}{\bar{\chi}_0 - r\chi}.$$

Cette proposition est une conséquence de lemme suivant.

Lemme 19 *Soit $P(X)$ le polynôme complexe défini par $P(X) = \sum_{j=0}^d a_j X^j$, alors pour tout $u \in \mathbb{N}$, on a*

(i) $\pi_+\left(\dfrac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi})}{g_1}\right) = \dfrac{a}{r - a\chi_0}\left(r^{u+1}\bar{\chi}_0^u P(r\bar{\chi}_0)\vec{\varepsilon_0} - a^{u+1}P(a)\vec{\varepsilon_1}\right).$

(ii) $\pi_+\left(\dfrac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi})}{\bar{g}_2}\right) = \dfrac{a\bar{\chi}_0}{r - a\bar{\chi}_0}\left(r^{u+1}\chi_0^u P(r\chi_0)\vec{\varepsilon_2} - a^{u+1}P(a)\vec{\varepsilon_1}\right).$

<u>Démonstration du lemme 19</u> :

(i) Soit $u \in \mathbb{N}$, on a

$$\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{g_1}\right) = \frac{a}{r - a\chi_0}\left(r\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{\chi_0 - r\chi}\right) - a\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{1 - a\chi}\right)\right),$$

or

$$\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{\chi_0 - r\chi}\right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^u}{\chi_0 - r\chi} \text{ et } \pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{1 - a\chi}\right) = \frac{a^u}{1 - a\chi}.$$

D'où

$$\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{g_1}\right) = \frac{a}{r - a\chi_0}\left(\frac{r^{u+1}\bar{\chi}_0^u}{\chi_0 - r\chi} - \frac{a^{u+1}}{1 - a\chi}\right).$$

Comme $\bar{\chi}^u P(\bar{\chi}) = \sum_{j=0}^d a_j \bar{\chi}^{u+j}$, la formule associée résulte de la linéarité de la projection.

(ii) se démontre de la même manière.

<u>Démonstration de la proposition 2 :</u> On a

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) \right) \text{ avec } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1},$$

or

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) &= \chi_0 \pi_+ \left(\frac{1}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - a\bar{\chi})} \right) \\
&= \frac{\chi_0}{r - \chi_0 a} \left(\pi_+ \left(\frac{r}{(\chi_0 - r\bar{\chi})} \right) - \pi_+ \left(\frac{a}{(1 - a\bar{\chi})} \right) \right) \\
&= \frac{\chi_0}{r - \chi_0 a} (r\bar{\chi}_0 - a) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\frac{g_2}{g_1} \bar{\chi}^{N+1} \right).$$

On applique la formule *(i)* avec $P(\chi) = \bar{\chi}_0(\chi_0 - r\chi)(1 - a\chi)$. En effet $g_2 = P(\bar{\chi})$. On obtient pour $u = N + 1$

$$\tilde{X}_0 = \frac{a}{r - a\chi_0} \left(r^{u+1} \bar{\chi}_0^{u+1} (\chi_0 - r^2 \bar{\chi}_0)(1 - ar\bar{\chi}_0)\vec{\varepsilon}_0 - a^{u+1} \bar{\chi}_0 (\chi_0 - ra)(1 - a^2)\vec{\varepsilon}_1 \right).$$

On obtient de la même manière pour

$$X_0 = \pi_+ \left(\bar{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_1} \right) \right),$$

on obtient

$$X_0 = \frac{a}{r - a\bar{\chi}_0} \left(r^{u+1} \bar{\chi}_0^{u+1} (1 - r^2 \chi_0^2)(1 - ar\chi_0)\vec{\varepsilon}_2 - a^{u+1} \chi_0 (\bar{\chi}_0 - ra)(1 - a^2)\vec{\varepsilon}_1 \right).$$

Proposition 3 $\mathcal{P} = \operatorname{vect}\{\vec{\varepsilon}_0, \vec{\varepsilon}_1\}$ *est un plan complexe stable par* $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$. *Ainsi* $\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_{\mathcal{P}}$ *est un endomorphisme de* $\mathcal{P}$*, et représenté dans* $\{\vec{\varepsilon}_0, \vec{\varepsilon}_1\}$ *par la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (\lambda\alpha + \mu\gamma) & -(\nu\alpha + \sigma\gamma) \\ -(\lambda\beta + \mu\delta) & 1 - (\nu\beta + \sigma\delta) \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{array}{ll}
\alpha = ar^{N+3} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+3} & \beta = -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0} \\
\gamma = r^{N+3} a \bar{\chi}_0^{N+3} \frac{\chi_0 - r\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} & \delta = -a^{N+4} \bar{\chi}_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0} \\
\lambda = \frac{r^{N+3}}{a} \frac{1 - ar\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+1} & \mu = -a^{N+2} \chi_0 \frac{1 - a^2}{r - a\chi_0} \\
\nu = \frac{r^{N+3}}{a} \frac{\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0}{r - a\chi_0} \bar{\chi}_0^{N+1} & \sigma = -a^{N+2} \chi_0 \frac{\chi_0 - ar}{r - a\chi_0}.
\end{array}$$

<u>Démonstration de la proposition 3 :</u>
Elle nécessite le lemme suivant.

Lemme 20 *Soit* $P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ *un polynôme complexe; alors*

$$\pi_- \left(\frac{\chi^u P(\chi)}{g_2} \right) = \frac{\chi_0}{r - a\chi_0} \left(r^{u+2} \bar{\chi}_0^{u+1} P(r\bar{\chi}_0)\vec{e}_0 - a^{u+2} P(a)\vec{e}_1 \right),$$

où

$$\vec{e}_0 = \frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \text{ et } \vec{e}_1 = \frac{\bar{\chi}}{1 - a\bar{\chi}}$$

Démonstration : La démonstration est analogue à celle du lemme 19

Evaluons $H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_0)$ et $H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_1)$, on a :

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_0) &= \pi_-\left(\frac{g_1}{g_2}\chi^{N+1}\vec{\varepsilon}_0\right)\\
&= \pi_-\left(\frac{1}{a\bar{\chi}_0}\frac{(\chi_0 - r\chi)(1-a\chi)}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1-a\bar{\chi})}\frac{\chi^{N+1}}{\chi_0 - r\chi}\right)\\
&= \frac{1}{a}\pi_-\left(\frac{1}{\bar{\chi}_0}\frac{(1-a\chi)\chi^{N+1}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1-a\bar{\chi})}\right)\\
&= \frac{1}{a}\pi_-\left(\frac{1}{\bar{\chi}_0}\frac{(1-a\chi)\chi^{N+1}}{g_2}\right)\\
&= \frac{1}{a}\frac{\chi_0}{r-a\chi_0}\left(r^{N+3}\bar{\chi}_0^{N+2}(1-ar\bar{\chi}_0)\vec{e}_0 - a^{N+3}(1-a^2)\vec{e}_1\right)
\end{aligned}$$

d'après le lemme 20 et donc

$$H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_0) = \lambda\vec{e}_0 + \mu\vec{e}_1$$

avec

$$\lambda = \frac{r^{N+3}}{a}\frac{1-ar\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}\bar{\chi}_0^{N+1} \text{ et } \mu = -a^{N+2}\chi_0\frac{1-a^2}{r-a\chi_0}.$$

De même,

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_1) &= \pi_-\left(\frac{g_1}{g_2}\chi^{N+1}\vec{\varepsilon}_1\right)\\
&= \pi_-\left(\frac{1}{a\bar{\chi}_0}\frac{(\chi_0 - r\chi)(1-a\chi)}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1-a\bar{\chi})}\frac{\chi^{N+1}}{1-a\chi}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a}\pi_-\left(\frac{1}{\bar{\chi}_0}\frac{(\chi_0 - r\chi)\chi^{N+1}}{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1-a\bar{\chi})}\right)\\
&= \frac{1}{a}\pi_-\left(\frac{1}{\bar{\chi}_0}\frac{(\chi_0 - r\chi)\chi^{N+1}}{g_2}\right)\\
&= \frac{1}{a}\frac{\chi_0}{r-a\chi_0}\left(r^{N+3}\bar{\chi}_0^{N+2}(\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)\vec{e}_0 - a^{N+3}(\chi_0 - ra)\vec{e}_1\right).
\end{aligned}$$

D'après le lemme 20. Soit

$$H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon}_1) = \nu\vec{e}_0 + \sigma\vec{e}_1$$

avec

$$\nu = \frac{r^{N+3}}{a}\frac{\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}\bar{\chi}_0^{N+1} \qquad \sigma = -a^{N+2}\chi_0\frac{\chi_0 - ar}{r-a\chi_0}.$$

De même évaluons $H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{\varepsilon}_0)$ et $H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{\varepsilon}_1)$, on a

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e}_0) &= \pi_+\left(\frac{g_2}{g_1}\bar{\chi}^{N+1}\vec{e}_0\right)\\
&= \pi_+\left(\frac{\bar{\chi}_0(\chi_0 - r\bar{\chi})(1-a\bar{\chi})}{g_1}\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\right)\\
&= \bar{\chi}_0\pi_+\left(\frac{(1-a\bar{\chi})}{g_1}\bar{\chi}^{N+2}\right)\\
&= \frac{a\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}\left(r^{N+3}\bar{\chi}_0^{N+2}(1-ar\bar{\chi}_0)\vec{\varepsilon}_0 - a^{N+3}(1-a^2)\vec{\varepsilon}_1\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e}_0) = \alpha\vec{\varepsilon}_0 + \beta\vec{\varepsilon}_1$$

avec

$$\alpha = ar^{N+3}\frac{1-ar\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}\bar{\chi}_0^{N+3} \qquad \beta = -a^{N+4}\bar{\chi}_0\frac{1-a^2}{r-a\chi_0}.$$

De même

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e}_1) &= \pi_+\left(\frac{g_2}{g_1}\bar{\chi}^{N+1}\vec{e}_1\right)\\
&= \pi_+\left(\frac{\bar{\chi}_0(\chi_0 - r\bar{\chi})}{g_1}\bar{\chi}^{N+2}\right)\\
&= \bar{\chi}_0\pi_+\left(\frac{(1-a\bar{\chi})}{g_1}\bar{\chi}^{N+2}\right)\\
&= \frac{a\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}\left(r^{N+3}\bar{\chi}_0^{N+2}(\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)\vec{\varepsilon}_0 - a^{N+3}(\chi_0 - ra)\vec{\varepsilon}_1\right).
\end{aligned}$$

d'où

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e}_1) = \gamma\vec{\varepsilon}_0 + \delta\vec{\varepsilon}_1$$

avec

$$\gamma = r^{N+3}a\bar{\chi}_0^{N+3}\frac{\chi_0 - r\bar{\chi}_0}{r-a\chi_0}, \qquad \delta = -a^{N+4}\bar{\chi}_0\frac{\chi_0 - ar}{r-a\chi_0}.$$

Des deux points précédents, on déduit immédiatement que

$$\begin{cases}
\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right)\vec{\varepsilon}_0 = (1-(\lambda\alpha+\mu\gamma)\vec{\varepsilon}_0 - (\lambda\beta+\mu\delta)\vec{\varepsilon}_1)\\
\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right)\vec{\varepsilon}_0 = (-(\alpha\nu+\sigma\gamma)\vec{\varepsilon}_0 - (\beta\nu+\delta\sigma)\vec{\varepsilon}_1)
\end{cases}.$$

Proposition 4 *L'équation caractéristique de $T_N(f_{\lambda,r})$ est*

$$\det(A) = 0.$$

<u>Démonstration de la proposition 4</u> :

Notons par T_{11} le terme $[T_N(f_\lambda)^{-1}]_{1,1}$. On a d'une part

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{\mathrm{cof}\,[T_N(f_\lambda)]_{1,1}}{\det(T_N(f_\lambda))}\\
&= \frac{\det(T_{N-1}(f_\lambda))}{\det(T_N(f_\lambda))}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Par ailleurs, d'après le corollaire 13, T_{11} est de la forme

$$T_{11} = T_1 - \frac{1}{\det(A)}\langle\tilde{A}\tilde{X}_0,\, X_0\rangle \tag{4.2}$$

où $\tilde{A}$ est la transposée de la comatrice de A. Par conséquent, $\det(T_N(f_\lambda))$ et $\det(T_{N-1}(f_\lambda))$ n'ayant pas de racines communes, l'équation caractéristique $\det(T_N(f_\lambda)) = 0$ équivaut à $\frac{1}{T_{11}} = 0$, ce qui revient d'après (4.2) à $\det(A) = 0$.

Corollaire 16 *L'équation caractéristique de $T_N(f_\lambda)$ est vérifiée si et seulement si l'une ou l'autre des deux équations suivantes est vérifiée.*

(i) $\bar{\chi}_0^{N+2} = \dfrac{\chi_0 - a}{\bar{\chi}_0 - a}\,\dfrac{\bar{\chi}_0^{N+3} - a^{N+3}}{\chi_0^{N+3} - a^{N+3}}$ *et*

(ii) $\bar{\chi}_0^{N+2} = -\dfrac{\chi_0 - a}{\bar{\chi}_0 - a}\,\dfrac{\bar{\chi}_0^{N+3} - a^{N+3}}{\chi_0^{N+3} - a^{N+3}}$.

<u>Démonstration du corollaire 16</u> : Par un calcul immédiat, avec les notations de la proposition 3, on a

$$\det(A) = 1 - \nu\beta - \sigma\delta - \lambda\alpha - \mu\gamma + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\lambda\sigma - \mu\nu) \tag{4.3}$$

Par un argument de continuité, en faisant tendre r vers 1, on obtient l'équation caractéristique recherchée; un calcul direct montre qu'elle s'écrit

$$1 + a^{2(N+3)}\bar{\chi}_0^{2(N+3)} - \chi_0^2\left(\frac{1-a\bar{\chi}_0}{1-a\chi_0}\right)^2\left(a^{2(N+3)} + \bar{\chi}_0^{2(N+3)}\right) + 2a^{N+3}\bar{\chi}_0^{(N+1)}\frac{(1-a^2)(1-\bar{\chi}_0^2)}{(1-a\chi_0)^2} = 0. \tag{4.4}$$

On remarque alors l'identité:

$$\frac{(1-a^2)(1-\bar{\chi}_0^2)}{(1-a\chi_0)^2} = \left(\frac{1-a\bar{\chi}_0}{1-a\chi_0}\right)^2 - \bar{\chi}_0^2$$

à partir de laquelle on obtient pour 4.4 la forme

$$\left(1 - (a\bar{\chi}_0)^{N+3}\right)^2 - \left(\bar{\chi}_0\left(\frac{1-a\bar{\chi}_0}{1-a\chi_0}\right)\left(a^{N+3} - \bar{\chi}_0^{N+3}\right)\right)^2 = 0. \tag{4.5}$$

qui aboutit aux équations annoncées.

4.2.3 Démonstration du théorème de Parter

Exploitons (i). L'égalité des parties réelles s'écrit

$$\begin{aligned}&\cos(N+2)\theta_0\left[(\cos\theta_0 - e^{\theta_1})\sin(N+3)\theta_0 - \left(\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\right)\sin\theta_0\right]\\ &- \sin(N+2)\theta_0\left[(\cos\theta_0 - e^{\theta_1})\left(\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\right)\sin\theta_0\sin(N+3)\theta_0\right]\\ &= -(\cos\theta_0 - e^{\theta_1})\sin(N+3)\theta_0 + \sin\theta_0\left(\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\right)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\cos(N+2)\theta_0\Big[\sin(N+3)\theta_0\cos\theta_0 - \cos(N+3)\theta_0\sin\theta_0\\ &\qquad -e^{\theta_1}\sin(N+3)\theta_0 + e^{(N+3)\theta_1}\sin\theta_0\Big]\\ &-\sin(N+2)\theta_0\Big[\cos(N+3)\theta_0\cos\theta_0 + \sin(N+3)\theta_0\sin\theta_0\\ &\qquad -e^{\theta_1}\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\cos\theta_0 + e^{(N+4)\theta_1}\Big]\\ &\qquad = \cos(N+3)\theta_0\sin\theta_0 - \sin(N+3)\theta_0\cos\theta_0\\ &\qquad\quad +e^{\theta_1}\sin(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\sin\theta_0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\cos(N+2)\theta_0\left(\sin(N+2)\theta_0 - e^{\theta_1}\sin(N+3)\theta_0 + e^{(N+3)\theta_1}\sin\theta_0\right)\\ &-\sin(N+2)\theta_0\left(\cos(N+2)\theta_0 - e^{\theta_1}\cos(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\cos\theta_0 + e^{(N+4)\theta_1}\right)\\ =\;&-\sin(N+2)\theta_0 + e^{\theta_1}\sin(N+3)\theta_0 - e^{(N+3)\theta_1}\sin\theta_0\end{aligned}$$

soit:

$$\begin{aligned}&\sin(N+2)\theta_0\\&+e^{\theta_1}\left[-\cos(N+2)\theta_0\sin(N+3)\theta_0+\sin(N+2)\theta_0\cos(N+3)\theta_0-\sin(N+3)\theta_0\right]\\&+e^{(N+3)\theta_1}\left[\cos(N+2)\theta_0\sin\theta_0+\sin(N+2)\theta_0\cos\theta_0+\sin\theta_0\right]\\&-e^{(N+4)\theta_1}\sin(N+2)\theta_0=0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\sin(N+2)\theta_0\\&+e^{\theta_1}\left(-\sin\theta_0-\sin(N+3)\theta_0\right)\\&+e^{(N+3)\theta_1}\left(\sin(N+3)\theta_0+\sin\theta_0\right)-e^{(N+4)\theta_1}\sin(N+2)\theta_0=0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\sin(N+2)\theta_0\left(1-e^{(N+4)\theta_1}\right)\\&-2e^{\theta_1}\sin\left(\tfrac{N+4}{2}\right)\theta_0\cos\left(\tfrac{N+2}{2}\right)\theta_0\\&+2e^{(N+3)\theta_1}\sin\left(\tfrac{N+4}{2}\right)\theta_0\cos\left(\tfrac{N+2}{2}\right)\theta_0=0\end{aligned}$$

soit en simplifiant par $2\cos(\frac{N+2}{2})\theta_0$:

$$\sin\left(\frac{N+2}{2}\right)\theta_0\left(1-e^{(N+4)\theta_1}\right)-e^{\theta_1}\sin\left(\frac{N+4}{2}\right)\theta_0+e^{(N+3)\theta_1}\sin\left(\frac{N+4}{2}\right)\theta_0=0$$

soit

$$\begin{aligned}&\left(\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)-\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\left(1-e^{(N+4)\theta_1}\right)\\&-\left(\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)+\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)\left(e^{\theta_1}-e^{(N+3)\theta_1}\right)=0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\left[\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\left(1-e^{(N+4)\theta_1}-e^{\theta_1}+e^{(N+3)\theta_1}\right)\\&-\left[\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\left(1-e^{(N+4)\theta_1}-e^{\theta_1}+e^{(N+3)\theta_1}\right)=0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\left[\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\left(1-e^{\theta_1}\right)\left(1+e^{(N+3)\theta_1}\right)\\&-\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left(1+e^{\theta_1}\right)\left(1-e^{(N+3)\theta_1}\right)=0\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}&\left[\sin\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]\left(-2\sinh\frac{\theta_1}{2}e^{\frac{\theta_1}{2}}\right)\left(\cosh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right)e^{\frac{N+3}{2}\theta_1}\right)\\&-\cos\left(\frac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left(2\cosh\frac{\theta_1}{2}e^{\frac{\theta_1}{2}}\right)\left(\sinh\left(\frac{N+3}{2}\theta_1\right)e^{\frac{N+3}{2}\theta_1}\right)=0\end{aligned}$$

soit

$$(i')\quad\begin{aligned}&\left[\sin\left(\tfrac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)\right]\sinh\tfrac{\theta_1}{2}\cosh\left(\tfrac{N+3}{2}\theta_1\right)\\&-\cos\left(\tfrac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)\cosh\tfrac{\theta_1}{2}\sinh\left(\tfrac{N+3}{2}\theta_1\right)=0\end{aligned}$$

De la même manière l'écriture des parties imaginaires de (ii) aboutit à:

$$(i'')\quad\begin{aligned}&\left[\cos\left(\tfrac{N+3}{2}\right)\theta_0\cos\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)\right]\sinh\tfrac{\theta_1}{2}\sinh\left(\tfrac{N+3}{2}\theta_1\right)\\&+\sin\left(\tfrac{N+3}{2}\right)\theta_0\sin\left(\tfrac{\theta_0}{2}\right)\cosh\tfrac{\theta_1}{2}\cosh\left(\tfrac{N+3}{2}\theta_1\right)=0\end{aligned}$$

S. Parter obtient les formules (i') et (i''). Le reste de la démonstration est alors détaillé dans [SP, pages 166 à 168)]. Donnons-en le principe :

- De (i') et (i'') on déduit que $\theta_0 = \frac{x}{N+3}$ où $x = O(1)$
- Il en résulte que (i') et (i'') sont asymptotiquement équivalentes à

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{N+3}{2}\theta_0 = \tanh \frac{N+3}{2}\theta_0 \\ \tan \frac{N+3}{2}\theta_0 = -\tanh \frac{N+3}{2}\theta_0 \end{array} \right. \tag{4.6}$$

- Or les solutions non nulles de $\tan(y) = \pm\tanh(y)$ forment un ensemble discret entièrement déterminé par les relations

$$\tan\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right) = (-1)^k \tanh\left(\frac{(2k+1)\pi + E_k}{4}\right)$$

  où $k \in \mathbb{N}^*$ et E_k constantes (petites).

- Un développement asymptotique de $\cos(\theta_0) = \frac{2-\sqrt{\lambda}}{2}$ (voir corollaire 14) donne alors le développement asymptotique annoncé de $\lambda_k(N)$.

4.3 Spectre d'un opérateur de Toeplitz à minima multiples

4.3.1 Deux théorèmes de structure

Lemme 21 *Soit $\lambda \in [0, 4]$, $\chi = e^{i\theta}$, $p \in \mathbb{N}$ alors il existe $\chi_0 \in \mathbb{T}$ tel que :*

$$|1 - \chi^p|^2 - \lambda = \bar{\chi}_0^p g_1 g_2$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = \prod\limits_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i \chi_0 - \chi) \\ g_2 = \prod\limits_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i \chi_0 - \bar{\chi}) \end{array} \right.$$

U_p étant le groupe des racines p-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$

<u>Démonstration du lemme 21</u> : On a

$$\begin{array}{rcl} |1 - \chi^p|^2 - \lambda & = & -\bar{\chi}^p\left(\chi^{2p} - (2-\lambda)\chi^p + 1\right) \\ & = & -\bar{\chi}^p(\chi^p - \chi_0^p)(\chi^p - \bar{\chi}_0^p) \end{array}$$

et si

$$\chi_0^p = \frac{(2-\lambda) + i\sqrt{4-(2-\lambda)}}{2}$$

$$\begin{array}{rl} |1 - \chi^p|^2 - \lambda = & \bar{\chi}_0^p \quad (\chi_0^p - \chi^p) \quad (\chi_0^p - \bar{\chi}^p) \\ = & \bar{\chi}_0^p \qquad g_1 \qquad\qquad g_2. \end{array}$$

Remarque : On a donc

$$\cos p\theta_0 = 1 - \frac{\lambda}{2} = |1 - \chi_0^p|^2. \tag{4.7}$$

Suivant la démarche de Widom, nous donnons un théorème de structure par lequel l'équation précédente donne accès aux valeurs propres inférieures du spectre de $T_N(1 - \cos p\theta)$, $p \in \mathbb{N}$.

Avec les notations précédentes, on a.

Théorème 13 *Soit* $f_{\lambda,r} = g_{1,r}g_{2,r}$, *où* $r \in [0,\ 1[$

$$g_{1,r} = \prod_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i \chi_0 - r\chi) \text{ et } g_{2,r} = \prod_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i \chi_0 - r\bar{\chi})$$

$$\Phi_N = \frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+1} \text{ et } \tilde{\Phi}_N = \frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+1}$$

alors :

(i) $E = \text{vect} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi} \right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$ *est stable par* $\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_E$.

On note A_p *la matrice qui représente* $\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_E$ *dans la base* $\left\{ \frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi} \right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$ *de* E.

(ii) *Soit* $\lambda \in [0,\ 4]$ *tel que* $\lambda = |1 - \chi_0^p|^2$, *alors* λ *est une valeur propre de* $T_N\left(|1 - \chi^p|^2\right)$ *si et seulement si*

$$\chi_0 = e^{i\theta_0} \text{ et } \lim_{r \to 1} \det(A_p) = 0.$$

Démonstration du théorème 13 : On remarque tout d'abord que le symbole $f_{\lambda,r}$ vérifie les hypothèses du théorème d'inversion. Afin de le mettre en application, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 22 *Soit* $P(X) = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ *un polynôme sur* $\mathbb{C}$. *On a*

(i) $\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi})}{g_{1,r}} \right) = \sum_{\varepsilon_i \in U_p} \frac{\lambda_i}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi}$,

(ii) $\pi_+ \left(\frac{\chi^u P(\chi)}{g_{2,r}} \right) = \sum_{\varepsilon_i \in U_p} \mu_i \frac{\bar{\chi}}{\varepsilon_i \chi_0 - r\bar{\chi}}$,

où λ_i *et* μ_i *sont des constantes ne dépendant que de* P, ε_i *et* χ_0.

Démonstration du lemme 22 :

(i) Il suffit de montrer la formule pour $\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^s}{g_{1,r}} \right)$, $s \in \mathbb{N}^*$, alors (i) s'en déduit par linéarité. Or

$$\frac{\bar{\chi}^s}{g_{1,r}} = \sum_i a_i \frac{\bar{\chi}^s}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi}$$

et donc

$$\Pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^s}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi} \right) = \left(\frac{r\chi_0}{\varepsilon_i} \right)^s \frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi}$$

et on conclut.

(ii) se démontre de la même façon.

On en déduit pour tout $s \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_{\Phi_N}(\chi^s) &= \pi_-(\Phi_N \chi^{N+s+1}) \\ &= \pi_- \left(\frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+s+1} \right) \\ &= \sum_{\varepsilon_i \in U_p} \alpha_i \frac{\bar{\chi}}{\varepsilon_i \chi_0 - r\bar{\chi}} \end{aligned}$$

d'après (ii); et

$$\begin{aligned} H_{\tilde{\Phi}_N} \left(\frac{\bar{\chi}}{\varepsilon_i \chi_0 - r\bar{\chi}} \right) &= \pi_+ \left(\frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+2} \right) \\ &= \sum_{\varepsilon_i \in U_p} \beta_i \frac{\bar{\chi}}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi} \end{aligned}$$

d'après (i).

Notons alors A_p la matrice qui représente l'endomorphisme $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\Big|_E$ (Un calcul simple montre que les vecteurs $\tilde{\kappa}_0 = \pi_+\left(\tilde{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{1}{g_{2,r}}\right)\right)$ et $\kappa_0 = \pi_+\left(\bar{\Phi}_N \pi_+\left(\frac{1}{\bar{g}_{1,r}}\right)\right)$ appartiennent au sous-espace E. Notons $\varkappa_0$ et $\tilde{\varkappa}_0$ leur représentation matricielle dans la base $\left\{\frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - \chi}\right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$.

En raisonnant comme dans la proposition 4, la formule d'inversion du chapitre 1 donne:

$$T_N(f_{\lambda,r})^{-1} = T_1 - \frac{1}{\det(A_p)} \langle \tilde{A}_p \tilde{\varkappa}_0, \varkappa_0 \rangle$$

où $\tilde{A}_p$ est la transposée de la comatrice de A_p. Le même argument montre alors que l'équation caractéristique s'écrit $\det(A_p) = 0$.

Par un argument de continuité, on obtient les valeurs propres de $|1 - \chi^p|^2$ en faisant tendre r vers 1, ce qui achève la démonstration du théorème 13.

Remarque : On régularise le symbole $|1 - \chi^p|^2 - \lambda$ par $\tilde{f}_{\lambda,r} = \bar{\chi}_0^p g_{1,r} g_{2,r}$. A toute valeur propre $\tilde{\lambda}$ de $T_N(\tilde{f}_{\lambda,r})$ correspond la valeur propre de $\lambda = \chi_0^p \tilde{\lambda}$ de $T_N(f_{\lambda,r})$. Cependant si p est pair alors on a une factorisation ne faisant pas intervenir le facteur $\bar{\chi}_0^p$.

Lemme 23 *On a:*

$$|1 - \chi^{2p}|^2 - \lambda = -g_1 g_2$$

où

$$\begin{cases} g_1 = (\chi^p + \chi_0^p)(\bar{\chi}_0^p + \chi^p) \\ g_2 = (\bar{\chi}_0^p - \bar{\chi}^p)(\chi_0^p - \bar{\chi}^p) \end{cases}.$$

<u>Démonstration du lemme 23</u> : En partant du lemme 21 ,on a:

$$\begin{aligned} |1 - \chi^{2p}| - \lambda &= -\bar{\chi}^{2p}(\chi^p - \chi_0^p)(\chi^p + \chi_0^p)(\chi^p - \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p) \\ &= -(1 - \chi_0^p \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p)(1 - \bar{\chi}_0^p \bar{\chi}_0^p)(\chi^p + \bar{\chi}_0^p) \\ &= -(\bar{\chi}_0^p - \bar{\chi}^p)(\chi^p + \chi_0^p)(\chi_0^p - \bar{\chi}^p)(\bar{\chi}_0^p + \chi^p) \\ &= -g_1 g_2. \end{aligned}$$

Le théorème de structure utile dans le cas où $f = |1 - \chi 2p|^2$ s'énoncera.

Théorème 8 *Soit* $f_{\lambda,r} = g_{1,r} g_{2,r}$ *où* $r \in [0,\ 1[$, *soit*

$$\begin{cases} g_{1,r} = \prod_{\varepsilon_i \in U_p} (\varepsilon_i \bar{\chi}_0 - r\chi)(\varepsilon_i \chi_0 - r\chi) \\ g_{2,r} = \prod_{\varepsilon_i \in N_p} (\varepsilon_i \bar{\chi}_0 - r\bar{\chi})(\varepsilon_i \chi_0 - r\bar{\chi}) \end{cases},$$

où U_p désigne l'ensemble des racines p-ièmes de -1 et N_p est le groupe des racines p-ièmes de 1. Si on pose toujours

$$\Phi_N = \frac{g_{1,r}}{g_{2,r}} \chi^{N+1} \ et\ \tilde{\Phi}_N = \frac{g_{2,r}}{g_{1,r}} \bar{\chi}^{N+1},$$

alors:

(i) on a

$$F = \text{vect} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i \bar{\chi}_0 - r\chi}, \frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi} \right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$$

est stable par $I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}$. On note A_{2p} la matrice représentant $\left(I - H_{\tilde{\Phi}_N} H_{\Phi_N}\right)\Big|_F$ dans la base $\left\{\frac{1}{\varepsilon_i \bar{\chi}_0 - r\chi}, \frac{1}{\varepsilon_i \chi_0 - r\chi}\right\}_{\varepsilon_i \in U_p}$.

(ii) $\lambda \in [0,\ 4]$ *tel que* $\lambda = |1-\chi_0^{2p}|^2$ *est une valeur propre de* $T_N\left(|1-\chi^{2p}|^2\right)$ *si et seulement si* $\chi_0 = e^{i\theta_0}$ *vérifie:*

$$\lim_{r\to 1} \det(A_{2p}) = 0 \ \textit{et}\ \lambda = 2(1-\cos 2p\theta_0).$$

<u>Démonstration du théorème 8</u> : Elle est identique à celle du théorème 13.

Les deux théorèmes de structure permettent d'accéder aux valeurs propres inférieures des opérateurs $T_N(1-\cos p\theta)$. Cependant pour $p \geq 3$, les calculs sont importants.

Illustrons cependant ces théorèmes pour $p = 2$ en utilisant le théorème 8.

Théorème 14 *Soit* $\lambda_k(N)$ *la k-ième valeur propre de* $T_N\left(|1-\chi^2|^2\right)$*, on a*

$$\lambda_k(2N) = \lambda_k(2N-1) = \left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5}\right)$$

Nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 24 *Conformément au théorème* 8*, on pose*

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\bar{\chi}_0 + r\chi} \ \textit{et}\ \vec{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\chi_0 + r\chi}$$

Soit $u \in \mathbb{N}$*; on a:*

(i) $$\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}\right) = \frac{(-1)^u}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^u\vec{\varepsilon}_1 - \frac{(-1)^u}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^u\vec{\varepsilon}_2$$

(ii) $$\pi_-\left(\frac{\bar{\chi}^u}{(\chi_-r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0-r\bar{\chi})}\right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^{u+1}}{\bar{\chi}_0-\chi_0}\frac{\bar{\chi}}{\chi_0-r\bar{\chi}} - \frac{(r\chi_0)^{u+1}}{\bar{\chi}_0-\chi_0}, \frac{\bar{\chi}}{\bar{\chi}_0-r\bar{\chi}}$$

<u>Démonstration du lemme 24</u> : On a pour (i) :

$$\begin{aligned}
\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}\right) &= \frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}\left[\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{\chi_0+r\chi}\right) - \pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^u}{\bar{\chi}_0+r\chi}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}\left[(-1)^u(r\bar{\chi}_0)^u\frac{1}{\chi_0+r\chi} - (-1)^u(r\chi_0)^u\frac{1}{\bar{\chi}_0+r\chi}\right]
\end{aligned}$$

Il en va de même pour (ii).

Proposition 5 *La matrice* A_2 *donnée par le théorème 8 s'écrit*

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1-(\theta_1\varphi_1+\mu_1\varphi_2) & \theta_1\psi_1+\mu_1\psi_2 \\ \theta_2\varphi_1+\mu_2\varphi_2 & 1+(\theta_2\psi_1+\mu_2\psi_2) \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l}
\varphi_1 = \frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}(1+r^2) \\
\varphi_2 = -\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}(1+r^2\chi_0^2) \\
\psi_1 = \frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}(1+r^2\bar{\chi}_0^2) \\
\psi_2 = -\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}(1+r^2) \\
\theta_1 = (-1)^N\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}(1+r^2) \\
\theta_2 = (-1)^N\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}(1+r^2\chi_0) \\
\mu_1 = (-1)^N\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}(1+r^2\bar{\chi}_0) \\
\mu_2 = (-1)^N\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}(1+r^2)
\end{array}\right. .$$

Démonstration de la proposition 5 :
(i)

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon_1}) &= \pi_-\left[\frac{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}{(\chi_0-r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0-r\bar{\chi})}\frac{\chi^{N+1}}{(\chi_0+r\chi)}\right]\\
&= \bar{\chi}_0\pi_-\left[\frac{\chi^{N+1}}{(\chi_0-r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0-r\bar{\chi})}\right]+r\pi_-\left[\frac{\chi^{N+2}}{(\chi_0-r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0-r\bar{\chi})}\right]\\
&= \left(\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}+r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+3}\right)\vec{e_1}\\
&\quad-\left(\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}+r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+3}\right)\vec{e_2}
\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 24. On a donc

$$H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon_1})=\varphi_1\vec{e_1}+\varphi_2\vec{e_2}.$$

De même

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon_2}) &= \left(\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}+r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+3}\right)\vec{e_1}\\
&\quad-\left(\frac{\chi_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}+r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+3}\right)\vec{e_2}.
\end{aligned}$$

d'où

$$H_{\Phi_N}(\vec{\varepsilon_2})=\psi_1\vec{e_1}+\psi_2\vec{e_2}.$$

On a

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e_1}) &= \pi_+\left[\frac{(\chi_0-r\bar{\chi})(\bar{\chi}_0-r\bar{\chi})}{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{(\chi_0-r\bar{\chi})}\right]\\
&= \bar{\chi}_0\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}\right]-r\pi_+\left[\frac{\bar{\chi}^{N+3}}{(\chi_0+r\chi)(\bar{\chi}_0+r\chi)}\right]\\
&= \left((-1)^N\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+2}+(-1)^N r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\bar{\chi}_0)^{N+3}\right)\vec{\varepsilon_1}\\
&\quad-\left((-1)^N\frac{\bar{\chi}_0}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+2}+(-1)^N r\frac{1}{\bar{\chi}_0-\chi_0}(r\chi_0)^{N+3}\right)\vec{\varepsilon_2}
\end{aligned}$$

d'après le lemme 24. D'où

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e_1})=\theta_1\vec{\varepsilon_1}-\theta_2\vec{\varepsilon_2}.$$

On a de même:

$$H_{\tilde{\Phi}_N}(\vec{e_2})=\mu_1\vec{\varepsilon_1}-\mu_2\vec{\varepsilon_2}.$$

(ii) On déduit les formules :

$$\begin{cases}
\left[I-H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right](\vec{\varepsilon_1})=\left[1-(\theta_1\varphi_1+\mu_1\varphi_2)\right]\vec{\varepsilon_1}+\left[\theta_2\varphi_1+\mu_2\varphi_2\right]\vec{\varepsilon_2}\\
\left[I-H_{\tilde{\Phi}_N}H_{\Phi_N}\right](\vec{\varepsilon_2})=\left[-(\theta_1\psi_1+\mu_1\psi_2)\right]\vec{\varepsilon_1}+\left[1+(\theta_2\psi_1+\mu_2\psi_2)\right]\vec{\varepsilon_2}
\end{cases}.$$

Ce qui achève la démonstration.

Proposition 6 *L'équation caractéristique est*

$$(-1)^N\left[2\left(\chi_0^{2(N+3)}+\bar{\chi}_0^{2(N+3)}\right)+(\bar{\chi}_0+\chi_0)^2\right]=(\bar{\chi}_0-\chi_0)^2 \tag{4.9}$$

Démonstration de la proposition 6 :

Selon (ii) du théorème 8, l'équation caractéristique s'écrit $\det(A_2) = 0$. Cela s'écrit avec les notations de la proposition 5 :

$$\lim_{r \to 1} [1 + \psi_1\theta_2 + \psi_2\mu_2 - \varphi_1\theta_1 - \varphi_2\mu_1 + (\theta_2\mu_1 - \theta_1\mu_2)(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)] = 0.$$

Les formules donnent quand r tend vers 1

$$(-1)^N \left[2\left(\chi_0^{2(N+3)} - \bar{\chi}_0^{2(N+3)}\right) + (\bar{\chi}_0 + \chi_0)^2\right] = (\bar{\chi}_0 - \chi_0)^2$$

qui représente l'équation caractéristique de $T_N\left(|1 - \chi^2|^2\right)$.

Démonstration du théorème 14 :

On distingue N pair et N impair.

- *cas N pair* (i) s'écrit

$$\cos 2(N+3)\theta_0 - \cos^2\theta_0 = -\sin^2\theta_0$$

soit

$$\cos 2(N+3)\theta_0 = \cos 2\theta_0 \tag{4.10}$$

On remarque que

$$\sin 2\theta_0 = \frac{\sqrt{4 - (2-\lambda)^2}}{2}$$

est positif, donc pour N grand et θ_0 voisin de 0, est un nombre positif, ce qui exclut la solution $(N+3)\theta_0 = -\theta_0 + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (k étant fixé pour $N \to \infty$ tel que $(N+3)\theta_0 - k\pi > 0$ et $\theta_0 > 0$). On a donc

$$\theta_0 = \frac{k\pi}{N+2}, \; k \in \mathbb{N}$$

On obtient alors :

$$\lambda_k(2N) = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{2N+2}\right).$$

que l'on peut exprimer par développement asymptotique

$$\lambda_k(2N) = \left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{k\pi}{N+1}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5}\right).$$

- *cas N impair* (i) s'écrit

$$\cos 2(N+3)\theta_0 = 1$$

d'où

$$\theta_0 = \frac{k\pi}{N+3}, \; k \in \mathbb{N}$$

Ainsi

$$\lambda_k(2N+1) = 2\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{2N+4}\right)$$

que l'on exprime par

$$\lambda_k(2N+1) = \left(\frac{k\pi}{N+2}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{k\pi}{N+2}\right)^4 + o\left(\frac{1}{N^5}\right).$$

On retrouve le résultat de [KMS] mais avec l'hypothèse d'unicité du minimum en moins ([KMS, Ch. III, p. 785]).

On peut étendre cela à un symbole positif où le zéro est atteint α fois:
on montrerait qu'il correspond à un opérateur de Hankel dont la partie "utile" est une matrice carrée de rang α.

4.4 Étude spectrale d'une perturbation

Dans ce qui suit nous voulons montrer sur un exemple que la méthode utilisée permet d'évaluer la perturbation des valeurs propres d'un opérateur de Toeplitz associé à un symbole perturbé.

Concrètement, notons $\lambda_k(N)$, pour k fixé la k-ième valeur propre de la matrice de Toeplitz associée au symbole $|1-\chi|^2$ (voir [W1], [KMS]).

Le symbole perturbé sera ici: $\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}$, $0 \leq |\beta| < 1$.

Théorème 15 *Soit $0 \leq |\beta| < 1$, on note $\lambda_k(N)$ la k-ième valeur propre de $T_N\left(|1-\chi|^2\right)$ et par $\lambda_k^{(\beta)}(N)$ la k-ième valeur propre de $T_N\left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}\right)$. Alors il existe un intervalle ouvert $I_\varepsilon =]-\varepsilon, +\varepsilon[$, tel que si $\beta \in I_\varepsilon$,*

$$\lambda_k^{(\beta)}(N) = \lambda_k(N) p_k(N,\beta)$$

où

$$p_k(N,\beta) = \frac{1 + \dfrac{\left(\beta\frac{\alpha(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{N+2}+\xi\right)}{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)}}{1 + \dfrac{2\beta\left(\beta\frac{\alpha(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right)\sin\left(\frac{k\pi}{N+2}+\xi\right)}{1+\beta^2-2\beta\cos\left(\frac{k\pi}{N+2}\right)}},$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(N,2k) &= (-1)^k 2\sin\left(k\pi\frac{N+4}{N+2}\right) \\ \alpha(N,2k+1) &= (-1)^k 2\cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\frac{N+4}{N+2}\right) \end{cases},$$

$$|\xi| < \left|\beta\frac{\alpha(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right|$$

$$\begin{cases} o_N(\beta) = o(\beta) \text{ à } N \text{ fixé,} \\ o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ à } \beta \text{ fixé.} \end{cases}$$

Conformément à ce qui précède, nous allons factoriser le symbole

$$\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} - \lambda$$

pour $\lambda \in \left[0, \frac{4}{(1+\beta^2)}\right]$, vu que $\frac{4}{(1+\beta^2)} = \max_{\mathbb{T}}\left(\frac{|1-\chi^2|}{|1-\beta\chi^2|}\right)$.

4.4.1 Factorisation du Symbole

Proposition 7 *Pour $\lambda \in \left[0, \frac{4}{(1+\beta^2)}\right]$, il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f_\lambda = \frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} - \lambda = g_1\, g_2\, C(\lambda)$$

avec

$$g_1 = \frac{\chi_0 - \chi}{1-\beta\chi},\ g_2 = \frac{\chi_0 - \bar{\chi}}{1-\beta\bar{\chi}},\ \text{et } \chi_0 = e^{i\theta_0}.$$

Remarque : Bien entendu, θ_0 est une fonction de λ.

<u>Démonstration de la proposition 7 :</u> On a

$$\begin{aligned} f_\lambda &= \frac{|1-\chi|^2 - \lambda|1-\beta\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2} \\ &= \frac{\bar{\chi}(\lambda\beta-1)}{|1-\beta\chi|^2}\left(\chi^2 + \frac{2-\lambda(1+\beta^2)}{(\lambda\beta-1)}\chi + 1\right) \end{aligned}$$

où f_λ s'annule sur $\mathbb{T}$ puisque, d'après Szegö, $\lambda \in [\min_{\mathbb{T}} f_\lambda,\ \max_{\mathbb{T}} f_\lambda]$, il en résulte l'existence de $\chi_0 \in \mathbb{T}$, $\chi_0 = e^{i\theta_0}$, tel que

$$\chi^2 + \frac{2-\lambda(1+\beta^2)}{(\lambda\beta-1)}\chi + 1 = (\chi-\chi_0)(\chi-\bar{\chi}_0).$$

Ainsi

$$f_\lambda = \frac{\bar{\chi}_0(\lambda\beta-1)}{|1-\beta\chi|^2}(\chi-\chi_0)(\chi_0-\bar{\chi}).$$

On pose alors

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= \bar{\chi}_0(\lambda\beta-1), \\ g_1 &= \frac{\chi_0-\chi}{1-\beta\chi}, \\ g_2 &= \frac{\chi_0-\bar{\chi}}{1-\beta\bar{\chi}}. \end{aligned}$$

Afin d'être dans les hypothèses du théorème 12, nous appliquons le théorème d'inversion au symbole régularisé

$$f_{\lambda,r} = g_{1,r}\, g_{2,r}$$

avec

$$\begin{aligned} g_{1,r} &= \frac{\chi_0-r\chi}{1-\beta\chi}, \\ g_{2,r} &= \frac{\chi_0-r\bar{\chi}}{1-\beta\bar{\chi}}. \end{aligned}$$

Remarque : Les valeurs propres de $T_N(f_{\lambda,r}) = T_N(g_{1,r}g_{2,r})$ sont pour N grand, les mêmes que celles de $T_N(C(\lambda)g_{1,r}g_{2,r})$; c'est pouquoi nous travaillons avec le symbole $f_{\lambda,r}$.

Remarque : Par souci de simplification, dans ce qui suit on écrira g_1 pour $g_{1,r}$ et g_2 pour $g_{2,r}$. De plus on posera

$$\frac{1-\beta\bar{\chi}}{1-\beta\chi} = \sum_{u\geq -1}\gamma_u\chi^u, \quad \gamma_{-1} = -\beta, \quad \gamma_u = \beta^u(1-\beta^2) \text{ si } u \in \mathbb{N}.$$

Notons maintenant H_{Φ_N} l'opérateur de Hankel pour le symbole $(\chi_0 - r\chi)(\chi_0 - r\bar{\chi})$ et $H_{\Phi_N}^{(\beta)}$ l'opérateur de Hankel pour le symbole $f_{\lambda,r}$ ou encore l'opérateur de Hankel perturbé.

4.4.2 Evaluation des Opérateurs de Hankel Perturbés

On rappelle que $\chi_0 = e^{i\theta_0}$ où θ_0 est une fonction de λ.

Proposition 8

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) = H_{\Phi_N}(\chi^s)\sum_{u\geq -1}\gamma_u(r\bar{\chi}_0)^u.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant pour la démonstration.

Lemme 25

$$\forall s \in \mathbb{N}^*,\ H_{\Phi_N}(\chi^s) = (\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s}\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

Démonstration du lemme 25 :

$$\begin{aligned}
\forall s \in \mathbb{N}^*,\ H_{\Phi_N}(\chi^s) &= \pi_-\left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\chi^{N+s+1}\right) \\
&= \pi_-\left((1 - r\bar{\chi}_0\chi)\chi^{N+s+1}\sum_{u\geq 0}(r\bar{\chi}_0)^u\bar{\chi}^u\right) \\
&= \pi_-\left(\sum_{u\geq 0}(r\bar{\chi}_0)^u\bar{\chi}^{u-(N+s+1)} - \sum_{u\geq 0}(r\bar{\chi}_0)^{u+1}\bar{\chi}^{u-(N+s+2)}\right) \\
&= (r^{N+s+2}\bar{\chi}_0^{N+s+2} - r^{N+s+4}\bar{\chi}_0^{N+s+4})\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.
\end{aligned}$$

D'où

$$H_{\Phi_N}(\chi^s) = (\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s}\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

Démonstration de la proposition 8 : On a

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) &= \pi_-\left(\frac{g_1}{g_2}\chi^{N+s+1}\right) \\
&= \pi_-\left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\sum_{u\geq -1}\gamma_u\chi^{u+N+s+1}\right) \\
&= \sum_{u\geq -1}\gamma_u\pi_-\left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\chi^{u+N+s+1}\right),
\end{aligned}$$

or

$$\pi_-\left(\frac{\chi^s}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\right) = (r\bar{\chi}_0)^{s+1}\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
H_{\Phi_N}^{(\beta)}(\chi^s) &= \sum_{u\geq -1}\gamma_u\left(\chi_0(r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+2} - r(r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+3}\right)\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \\
&= \sum_{u\geq -1}\gamma_u(r\bar{\chi}_0)^{N+u+s+2}(\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \\
&= H_{\Phi_N}(\chi^s)\sum_{u\geq -1}\gamma_u(r\bar{\chi}_0)^u.
\end{aligned}$$

Avec une démonstration analogue, on a de même.

Proposition 9

$$\forall s \in \mathbb{N}\quad H_{\tilde{\Phi}_N}^{(\beta)}(\chi^s) = H_{\tilde{\Phi}_N}(\chi^s)\sum_{u\geq -1}\bar{\gamma}_u(r\bar{\chi}_0)^u.$$

Remarque : Dans ce cas on démontrerait comme pour le lemme précédent que

$$\forall s \in \mathbb{N},\quad H_{\tilde{\Phi}_N}(\bar{\chi}^s) = (\chi_0 - r^2\bar{\chi}_0)(r\bar{\chi}_0)^{N+2+s}\frac{\chi}{\chi_0 - r\chi}.$$

Evaluation de $I - H^{(\beta)}_{\tilde{\Phi}_N} H^{(\beta)}_{\Phi_N}$

Proposition 10 *On a*

$$\tilde{X}_0 = \pi_+ \left(\tilde{\Phi}_N \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) \right) \in \text{vect} \left\{ \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right\}.$$

Démonstration de la proposition 10 : On remarque tout d'abord que pour $s \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{j=1}^{d} a_j \chi^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, on a:

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi}^u)}{\chi_0 - r\chi} \right) \in \text{vect} \left\{ \frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right\}$$

Par un calcul direct, on a en effet:

$$\pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^u P(\bar{\chi}^u)}{\chi_0 - r\chi} \right) = \frac{(r\bar{\chi}_0)^u P(r\bar{\chi}_0)}{\chi_0 - r\chi}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \pi_+ \left(\frac{1}{g_2} \right) &= \pi_+ \left(\frac{1 - \beta\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}} \right) \\ &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{1 - \beta\bar{\chi}}{1 - r\chi_0\chi} \right) \\ &= \bar{\chi}_0. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{(\chi_0 - r\bar{\chi})(1 - \beta\chi)}{(\chi_0 - r\chi)(1 - \beta\bar{\chi})} \bar{\chi}^{N+1} \right) \\ &= \bar{\chi}_0 \pi_+ \left(\frac{P_\beta(\bar{\chi})}{(\chi_0 - r\chi)(1 - \beta\bar{\chi})} \right), \end{aligned}$$

avec $P_\beta(\bar{\chi}) = -\beta\chi^N + r\beta\chi_0\chi^{N+1} - r\bar{\chi}_0\chi^{N+2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \pi_+ \left(\frac{\bar{\chi}^s P_\beta(\bar{\chi})}{\chi_0 - r\chi} \right) \\ &= \sum_{s \geq 0} (\beta r\bar{\chi}_0)^s \frac{P_\beta(r\bar{\chi}_0)}{\chi_0 - r\chi} \\ &= \frac{P_\beta(r\bar{\chi}_0)}{1 - \beta r\bar{\chi}_0} \frac{1}{\chi_0 - r\chi}. \end{aligned}$$

Proposition 11 *On a*

$$\left[I - H^{(\beta)}_{\tilde{\Phi}_N} H^{(\beta)}_{\Phi_N} \right] \left(\frac{1}{\chi_0 - r\chi} \right) = \Lambda_r \frac{1}{\chi_0 - r\chi}$$

où

$$\Lambda_r = 1 - \left(\frac{1 - \beta r\chi_0}{1 - \beta r\bar{\chi}_0} (r\bar{\chi}_0)^{N+2} \right)^2.$$

Démonstration de la proposition 11 : On a

$$\begin{aligned}
H^{(\beta)}_{\Phi_N}\left(\frac{1}{\chi_0 - r\chi}\right) &= \pi_-\left(\frac{\chi_0 - r\chi}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\sum_{u\geq -1}\gamma_u\chi^{u+N+1}\frac{1}{\chi_0 - r\chi}\right)\\
&= \sum_{u\geq -1}\gamma_u\pi_-\left(\frac{\chi^{u+N+1}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\right)\\
&= \left(\sum_{u\geq -1}\gamma_u(r\bar{\chi}_0)^u\right)(r\bar{\chi}_0)^{N+2}\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}.
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
H^{(\beta)}_{\bar{\Phi}_N}\left(\frac{\bar{\chi}}{\chi_0 - r\bar{\chi}}\right) &= \pi_+\left(\left(\sum_{u\geq -1}\gamma_u\bar{\chi}^u\right)\frac{\bar{\chi}^{N+2}}{\chi_0 - r\chi}\right), \quad \gamma_u \in \mathbb{R}\\
&= \sum_{u\geq -1}\gamma_u\pi_+\left(\frac{\bar{\chi}^{u+N+2}}{\chi_0 - r\chi}\right)\\
&= \left(\sum_{u\geq -1}\gamma_u(r\bar{\chi}_0)^u\right)(r\bar{\chi}_0)^{N+2}\frac{1}{\chi_0 - r\chi}.
\end{aligned}$$

La proposition s'en déduit immédiatement.

Démonstration du théorème 15 : En utilisant la formule d'inversion et l'argument de la proposition 4, l'équation aux valeurs propres s'écrit:

$$\Lambda_r = 0.$$

En utilisant un argument de continuité on obtient alors les valeurs propres de $T_N\left(\frac{|1-\chi|^2}{|1-\beta\chi|^2}\right)$ comme solution de

$$\lim_{r\to 1}\Lambda_r = 0.$$

Ceci nous conduit aux deux équations :

i)

$$\chi_0^{N+2} = \frac{1-\beta\bar{\chi}_0}{1-\beta\chi_0} \tag{4.11}$$

ii)

$$\chi_0^{N+2} = -\frac{1-\beta\bar{\chi}_0}{1-\beta\chi_0} \tag{4.12}$$

Par un calcul direct l'égalité des parties réelles (ou des parties imaginaires) de 4.11 conduit à :

$$\beta\sin\left(\frac{N+4}{2}\theta_0\right) - \sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = 0. \tag{4.13}$$

De même l'équation (4.12) conduit à

$$\beta\cos\left(\frac{N+4}{2}\theta_0\right) - \cos\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = 0. \tag{4.14}$$

Etudions l'équation (4.13). Pour $\beta = 0$ on a

$$\theta_0 = \frac{2k\pi}{N+2}$$

qui correspond au symbole $|1-\chi|^2$ non perturbé. Cette valeur de θ_0 conduit pour le symbole non perturbé à la valeur propre (non perturbée)

$$\lambda_{2k}(N) = 2\left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)\right).$$

En effet, on sait par la factorisation du symbole que

$$\chi_0 + \bar{\chi}_0 = -\frac{2-\lambda(1+\beta^2)}{\lambda\beta - 1},$$

ce qui donne

$$\lambda = 2\frac{1-\cos\theta_0}{1+\beta^2 - 2\beta\cos\theta_0} \tag{4.15}$$

et par conséquent pour $\beta = 0$, cela donne $\lambda = 2(1-\cos\theta_0)$.

On peut écrire l'équation (4.13) sous la forme

$$F_N(\beta, \theta_0) = 0.$$

On a dans ce cas

$$\frac{\partial F_N}{\partial \theta_0}\left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right) = (-1)^{k+1}\frac{N+2}{2}.$$

L'équation (4.13) définit donc localement, au voisinage de $\beta = 0$, le réel θ_0 comme une fonction f_N de β et de plus :

$$\frac{df_N}{d\beta}(0) = -\frac{\frac{\partial F_N}{\partial \beta}\left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right)}{\frac{\partial F_N}{\partial \theta_0}\left(0, \frac{2k\pi}{N+2}\right)}.$$

Ceci s'écrit encore :

$$\frac{df_N}{d\beta}(0) = (-1)^k\frac{2}{N+2}\sin\left(k\frac{N+4}{N+2}\pi\right)$$

En notant $f_N = \theta_0^{(\beta)}$ (θ_0 perturbé), on a :

$$\theta_0^{(\beta)} = \theta_0 + \beta\frac{df_N}{d\beta}(0) + o(\beta)$$

Soit:

$$\theta_0^{(\beta)} = \frac{2k\pi}{N+2} + \beta\frac{\varphi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)$$

avec

$$\varphi(N,k) = (-1)^k 2\sin\left(k\frac{N+4}{N+2}\pi\right)$$

De plus

$$o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ à } \beta \text{ fixé, et } o_N(\beta) = o(\beta) \text{ à } N \text{ fixé.}$$

En effet,

a) À N fixé, $o_N(\beta)$ est le reste d'un développement limité en β.

b) À β fixé, $\lim(N+2)\theta_0^{(\beta)} = 2k\pi$. Cela résulte de l'équation (4.13) que l'on peut écrire asymptotiquement :

$$\beta\sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right) = \sin\left(\frac{N+2}{2}\theta_0\right)$$

ce qui montre que $(N+2)\theta_0 \to 2k\pi$ et $o_N(\beta) = o\left(\frac{1}{N}\right)$

En écrivant $\theta_0 = \frac{2k\pi}{N+2}$, on obtient:

$$\cos\theta_0^{(\beta)} = \cos\theta_0 - \left[\beta\frac{\varphi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi\right) \tag{4.16}$$

avec

$$|\xi| < \left|\beta\frac{\varphi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right|$$

En combinant (4.15) et(4.16), on obtient une formule de perturbation pour λ_{2k} :

$$\lambda_{2k}^{(\beta)} = \lambda_{2k}p_{2k}(N,\beta)$$

avec

$$p_{2k}(N,\beta) = \frac{1 + \dfrac{\left[\beta\frac{\varphi(N,k)}{N+2} + o_N(\beta)\right]\sin\left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi\right)}{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{N+2}\right)}}{1 + \left[\dfrac{2\beta\left(\beta\frac{\varphi(N,k)}{N+2} + o(\beta)\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{N+2} + \xi\right)}{1+\beta^2 - 2\beta\cos\left(\frac{k2\pi}{N+2}\right)}\right]}$$

L'étude est analogue pour l'équation (4.14).

L'équation de perturbation est remplacée par:

$$\theta_0^{(\beta)} = \frac{2k+1}{N+2}\pi + \beta\frac{\psi(N,k)}{N+2} + o(\beta)$$

avec:

$$\psi(N,k) = (-1)^k 2\cos\left(\frac{N+4}{N+2}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

et on obtient:

$$\lambda_{2k+1}^{(\beta)} = \lambda_{2k+1}p_{2k+1}(N,\beta)$$

où $p_{2k+1}(N,\beta)$ s'obtient en remplaçant dans $p_{2k}(N,\beta)$, respectivement $\varphi(N,k)$ par $\psi(N,k)$ et $\frac{2k\pi}{N+2}$ par $\frac{(2k+1)\pi}{N+2}$.

On a donc pour conclure:

$$\lambda_k^{(\beta)}(N) = \lambda_k(N)\,p_k(N,\beta)$$

où $p_k(N,\beta)$ est défini par ce qui précède.

Remarque : Pour N fixé, $p_k(N,\beta)$ tend vers 1 quand β tend vers 0, ce qui est attendu. De plus, pour β fixé, $p_k(N,\beta)$ tend vers 1 quand N tend vers $+\infty$.

4.5 Formule d'inversion en dimension quelconque

La démarche est analogue à celle conduisant au théorème 12. En associant à chaque face d'un polytope $\tilde{\Lambda}$ une décomposition du symbole f nous allons établir une structure géométrique pour l'étude du spectre de l'opérateur de Toeplitz $T_\Lambda(f)$ défini ci-dessous. Ce travail s'inspire de [S1] : dans cet article, A. Seghier décrit une géométrie de l'inversion de $T_\Lambda(f)$ en dimension d.

Soit $\tilde{\Lambda}$ un polytope de $\mathbb{R}^d$ contenant l'origine. Notons

$$\Lambda = \tilde{\Lambda} \cap \mathbb{Z}^d$$

On pose $H^2(\Lambda)$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques engendrés par $\left\{e^{i\langle k,\theta\rangle}\right\}_{k\in\Lambda}$ et Π_Λ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ dans $H^2(\Lambda)$.

Si f est une fonction positive de $L^1(\mathbb{T}^d)$ et $T(f)$ la multiplication par f dans $L^2(\mathbb{T}^d)$, alors $T_\Lambda(f) = \Pi_\Lambda T(f)\Pi_\Lambda$. On rappelle que $T_\Lambda(f)$ est l'opérateur de Toeplitz tronqué sur $H^2(\Lambda)$.

$\tilde{\Lambda}$ est l'intersection de n demi-espaces $\tilde{S}_k$: c'est-à-dire $\tilde{\Lambda} = \bigcap_{k=1}^n \tilde{S}_k$; on pose alors $S_k = \tilde{S}_k \cap \mathbb{Z}^d$ et on a $\Lambda = \bigcap_{k=1}^n S_k$. Le bord de $\tilde{S}_k$ noté $\partial\tilde{S}_k$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^d$. On note

$\tau(\partial\tilde{S}_k)$ le translaté de $\partial\tilde{S}_k$ contenant 0. On définit le *translaté* de $\tilde{S}_k$ comme le demi-espace $\tau(\tilde{S}_k)$ vérifiant

- $\partial\tau(\tilde{S}_k) = \tau(\partial\tilde{S}_k)$
- $\tau(\tilde{S}_k) \subset \tilde{S}_k$

On a $\partial\tau(\tilde{S}_k) = C^+ \cup C^-$ où $C^+ = \{(u_1, \ldots, u_d) \in \partial\tau(\tilde{S}_k);\ u_d \geq 0$ et $C^- = \{(u_1, \ldots, u_d) \in \partial\tau(\tilde{S}_k);\ u_d \leq 0$

On a les définitions suivantes.

Définition 1 *Le translaté S_k^* de S_k est la trace sur $\mathbb{Z}^d$ du demi-espace dont le bord est*

$$C^+ \cup (C^- + u) \text{ où } u \in \left[\tau(\partial\tilde{S}_k)\right]^\perp \cap \tau(\tilde{S}_k).$$

Remarque : S_k^* possède les propriétés évidentes

- $\forall m, n \in S_k^*, m + n \in S_k^*$
- $(0, \ldots, 0) \in S_k^*$
- $m \in S_k^* \Longleftrightarrow -m \notin S_k^*$

Définition 2 $S_k^C = \mathbb{Z}^k \setminus S_k$ *et Π_k est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^2(S_k^C)$*

Dans ce qui suit, nous ferons sur f l'hypothèse fondamentale :

Pour toute face k, on a la décomposition

$$f = g_{k,1} g_{k,2} \tag{4.17}$$

avec $g_{k,1}^{\pm 1} \in H^\infty(S_k^*)$ et $\bar{g}_{k,2}^{\pm 1} \in H^\infty(S_k^*)$ où $H^\infty(S_k^*) = L^\infty(\mathbb{T}^d) \cap H^2(S_k^*)$.

L'hypothèse (4.17) étant vérifiée pour f, nous définissons les *opérateurs de Hankel* comme suit:

Définition 3 (des opérateurs de Hankel $H(i,j)$) $\forall\,(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$

$$H(i,j) :\ H^2(S_j^C) \longrightarrow H^2(S_i^C)$$

où

$$H(i,j)\theta_j = \Pi_i\left(\phi_i \bar{\phi}_j \theta_j\right)$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \phi_i = \frac{g_{i,1}}{g_{1,1}}, \quad \tilde{\phi}_i = \frac{g_{i,2}}{g_{1,2}} = \frac{1}{\phi_i}.$$

On pose $F = \bigoplus_{i=1}^n H^2(S_i^C)$ et $\tilde{F} = F/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence sur F, compatible avec sa structure vectorielle, définie par $\theta = (\theta_i)_i \sim \theta' = (\theta'_i)_i$ si $\sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\theta_i - \theta'_i) = 0$.

On pose encore $H = (H(i,j))_{i,j}$. C'est naturellement un opérateur de F.

Théorème 16 *Avec les notations précédentes, H se factorise en une injection de $\tilde{F}$ dans F notée $\tilde{H}$.*

Soit $q \in H^2(\Lambda)$ et $\gamma \in F$ défini par $\gamma = (\gamma_k)_k$ où $\gamma_k = \Pi_k(\phi_k \frac{q}{\bar{g}_{1,1}})$. Alors $\gamma \in \mathrm{Im}(H)$ et on peut écrire : $T_\Lambda(f)^{-1}(q) = \frac{q}{f} - \frac{1}{\bar{g}_{1,2}} \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i(\tilde{H}^{-1}\gamma)_i$

Remarque : L'écriture de $T_\Lambda^{-1}(f)(q)$ telle qu'elle apparaît ci-dessus dépend d'une numérotation (arbitraire) des faces du polytope.

La démonstration du théorème est la conséquence d'une suite de 4 lemmes.

Lemme 26 *On pose $K_0 = fH^2(\Lambda)$ et Π_{K_0} la projection orthogonale de $L^2_{1/f}$ dans K_0. Alors*

$$T_\Lambda^{-1}(f)(q) = \frac{1}{f}\Pi_{K_0}(q)$$

<u>Démonstration du lemme 26</u> : Soit $q \in H^2(\Lambda)$. Il existe $p \in H^2(\Lambda)$ tel que

$$\Pi_{K_0}(q) = fp.$$

Or $q = fp + (q - fp)$ et $\Pi_\Lambda(q - fp) = 0$. D'où $q = \Pi_\Lambda(fp) = T_\Lambda(f)(p)$. On en déduit que $T_\Lambda(f)$ est une bijection de $H^2(\Lambda)$ sur lui-même et

$$T_\Lambda^{-1}(f) = \frac{1}{f}\Pi_{K_0}$$

Lemme 27

$$K_0 = \bigcap_{l=1}^{n} g_{l,2}H^2(S_l)$$

<u>Démonstration du lemme 27</u> : On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{f}\left(\bigcap_{l=1}^{n} g_{l,2}H^2(S_l)\right) &= \bigcap_{l=1}^{n} \frac{1}{g_{l,1}}H^2(S_l) \\ &= \bigcap_{l=1}^{n} H^2(S_l) \end{aligned}$$

car $g_{l,1}^{-1} \in H^\infty(S_l^*)$. D'où

$$\begin{aligned} \bigcap_{l=1}^{n} g_{l,2}H^2(S_l) &= f\bigcap_{l=1}^{n} H^2(S_l) \\ &= f\,H^2(\Lambda) \\ &= K_0. \end{aligned}$$

Lemme 28 *On pose*

$$K = H^2(S_1) \cap \frac{g_{2,2}}{g_{1,2}}H^2(S_2) \cap \cdots \cap \frac{g_{n,2}}{g_{1,2}}H^2(S_n)$$

et Π_K la projection orthogonale sur K dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. Alors

$$T_\Lambda^{-1}(f)q = \frac{1}{\bar{g}_{1,2}}\Pi_K\left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}}\right)$$

pour tout $q \in H^2(\Lambda)$.

Démonstration du lemme 28 : On note que pour tout $q \in H^2(\Lambda)$

$$\Pi_K\left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}}\right) = \frac{1}{\bar{g}_{1,1}}\Pi_{K_0}(q).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} T_\Lambda^{-1}(f)q &= \frac{1}{f}\Pi_{K_0}(q) \\ &= \frac{1}{\bar{g}_{1,2}}\Pi_K\left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}}\right). \end{aligned}$$

Lemme 29 *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ et $\gamma = (\gamma_k)_{k=1,\dots,n}$ où $\gamma_k = \Pi_k(\phi_k\psi)$. Alors*

- *Il existe $\theta = (\theta_k)_{k=1,\dots,n} \in \bigoplus_{i=1}^{n} H^2(S_i^C) = F$ tel que*

$$\Pi_K(\psi) = \psi - (\theta_1 + \bar{\phi}_2\theta_2 + \cdots + \bar{\phi}_n\theta_n) \tag{4.18}$$

et de plus

$$H\theta = \gamma. \tag{4.19}$$

- *Inversement si $\theta \in F$ vérifie (4.19), alors ψ vérifie (4.18).*

Démonstration du lemme 29 : L'espace $H^2(S_1^C) + \bar{\phi}_2 H^2(S_2^C) + \cdots + \bar{\phi}_n H^2(S_n^C) = K^\perp$ étant fermé [KS] et remarquant que pour tout i, $\phi_i\bar{\phi}_i = 1$, l'espace $K^\perp$ est donc l'orthogonal dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ de K. Il existe donc $\theta = (\theta_k)_{k=1,\dots,n} \in \bigoplus_{i=1}^n H^2(S_i^C)$ tel que

$$\Pi_K(\psi) = \psi - (\theta_1 + \bar{\phi}_2\theta_2 + \cdots + \bar{\phi}_n\theta_n). \tag{4.20}$$

Comme pour tout k

$$\Pi_k\left(\phi_k\Pi_K(\psi)\right) = 0$$

on en déduit en multipliant 4.20 par ϕ_k

$$\gamma_k = \sum_{l=1}^{n}\Pi_k\left(\phi_k\bar{\phi}_l\theta_l\right)$$

ou encore

$$\sum_{l=1}^{n} H(k,l)\theta_l = \gamma_k,$$

qui s'écrit encore $H\theta = \gamma$, ce qui démontre (4.19). Inversement, supposons θ solution de (4.19) et posons

$$A(\psi) = \psi - (\theta_1 + \bar{\phi}_2\theta_2 + \cdots + \bar{\phi}_n\theta_n).$$

Montrons que $A(\psi) = \Pi_K(\psi)$.

Montrons tout d'abord que $A(\psi) \in K$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ $A(\psi) \in \bar{\phi}_i H^2(S_i)$.

Ceci résulte du fait que : $\forall i \in \{1,\dots,n\}\forall\theta_i^C \in H^2(S_i^C)\langle A\psi, \bar{\phi}_i\theta_i^C\rangle = 0$. En effet $\langle A\psi, \bar{\phi}_i\theta_i^C\rangle = \langle\psi - \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\theta_j, \bar{\phi}_i\theta_i^C\rangle = \phi_i\psi - \sum_{j=1}^n \phi_i\bar{\phi}_j\theta_j, \theta_i^C\rangle = \langle\Pi_i\phi_i\psi - \sum_{j=1}^n \Pi_i\phi_i\bar{\phi}_j\theta_j, \theta_i^C\rangle$
$\langle A\psi, \bar{\phi}_i\theta_i^C\rangle = \langle\gamma_i - \sum_{j=1}^n H(i,j)\theta_j, \theta_i^C\rangle = 0$ par hypothèse.

Comme par ailleurs on a $\psi - A\psi \in K^\perp$, on en déduit que $A\psi = \Pi_k(\psi)$; ce qui démontre le deuxième point du lemme.

Démonstration du théorème 16 :

1. Montrons que H passe au quotient.

   Supposons θ et θ' appartiennent à F et $\theta \sim \theta'$. Soit $\gamma = H(\theta - \theta')$ où on a $\gamma_k = \Pi_k(\phi_k \psi)$ pour $\psi \in L^2(\mathbb{T})$. D'après le lemme 29, ψ vérifie $\Pi_K(\psi) = \psi$. Ainsi $\psi \in K$ et par définition de K, γ_k peut s'écrire sous la forme : $\gamma_k = \Pi_k \left(\frac{g_{k,1}}{g_{1,1}} \frac{g_{k,2}}{g_{1,2}} \alpha_k \right)$ où $\alpha_k \in H^2(S_k)$. Donc $\gamma_k = \Pi_k(\alpha_k) = 0$. Ainsi $\gamma = 0$ et $H(\theta) = H(\theta')$.

2. Avec les notations du théorème on a $H = \tilde{H} \circ p$ où p est la surjection canonique $F \to \tilde{F}$. Montrons que $\tilde{H}$ est injective.

   Si $H(\theta) = \tilde{H} \circ p(\theta) = 0$, il existe ψ dans $L^2(\mathbb{T})$ tel que pour tout k de $\{1, \dots, n\}$ $\Pi_k(\phi_k \psi) = 0$ et on a $\Pi_K(\psi) = \psi - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \theta_i$; alors $\phi_k(\psi) \in H^2(S_k)$, ce qui implique $\psi \in \bar{\phi}_k H^2(S_k)$. On en déduit $\psi \in K$ et $\sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \theta_i = 0$ ou encore $p(\theta) = 0$.

3. Reste à établir la formule d'inversion.

   Soit $q \in H^2(\Lambda)$. Il existe $\theta \in F$ tel que $\Pi_K \left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}} \right) = \frac{q}{\bar{g}_{1,1}} - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \theta_i$. Alors θ vérifie $H\theta = \gamma$ où $\gamma_k = \Pi_k \left(\phi_k \frac{q}{\bar{g}_{1,1}} \right)$. On peut donc écrire en considérant θ dans $\tilde{F}$: $\theta = \tilde{H}^{-1}\gamma$. D'où $T_\Lambda(f)^{-1} q = \frac{1}{\bar{g}_{1,2}} \Pi_K \left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}} \right) = \frac{1}{\bar{g}_{1,2}} \left(\frac{q}{\bar{g}_{1,1}} - \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i (\tilde{H}^{-1}\gamma)_i \right)$ soit : $T_\Lambda(f)^{-1} q = \frac{q}{f} - \frac{1}{\bar{g}_{1,2}} \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i (\tilde{H}^{-1}\gamma)_i$ avec $\gamma = (\gamma_k)_k$ et $\gamma_k = \Pi_k \left(\phi_k \frac{q}{\bar{g}_{1,1}} \right)$

Bibliographie

[8] [BL] P. M. Bleher, *Inversion of Toeplitz matrices* Trans. Moscow Math. Soc. vol. 2, 201-224 (1981).

[5] [BS] A. Böttcher and B. Silbermann. *Analysis of Toeplitz operators*, Springer Verlag 1990.

[2] [GS] U. Grenander and G. Szegö, *Toeplitz forms and their applications* 2nd ed. Chelsea, New York 1984.

[13] [K] M. Kac, *Random walk and the theory of Brownian motion* Am. Math. Mon. 54, 369-391 (1947).

[6] [KMS] M. Kac, W. L. Murdoch and G. Szegö, *On the eigenvalues of certain hermitian forms* J. rat. Mech. Analysis 2, 767-800 (1953).

[9] [Kes] H. Kesten *Random walk with absorbing barriers and Toeplitz forms* Illinois J. of Math. 5 267-290 (1961).

[15] [KS] D. Kateb and A. Seghier, *Expansion of the inverse of positive definite Toeplitz operators over polytopes* Asymptotic Analysis 22 205-234 (2000).

[12] [SP] S. Parter, Extreme eigenvalues of Toeplitz forms and applications to elliptic difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. 99 153-192 (1961).

[14] [RRS] P. Rambour, J.-M. Rinkel and A. Seghier, *Inverse asymptotique de la matrice de Toeplitz et noyau de Green* CRAS 331 (2000)

[3] [S] A. Seghier,*Inversion asymptotique des matrices de Toeplitz en d-dimension.* J. of funct. analysis 67 380-412 (1986).

[17] [S1] A. Seghier,*Expansion of the inverse of positive definite Toeplitz operators over polytopes.* Asymptotic Analysis 22 205-234 (2000).

[16] [StSe] S. Serra *On the extreme eigenvalues of hermitian Toeplitz matrices* Linear Algebra and its applications 270 109-129 (1998).

[1] [SpSt] F. L. Spitzer and C. J. Stone, *A class of Toeplitz forms and their applications to probability theory* Illinois J. Of Math. 4 253-277 (1960).

[10] [Wat] T. Watanabe, *On a theorem of Spitzer and Stone* Proc. Japan Academy 37 341-351 (1961).

[11] [W1] H. Widom. *On the eigenvalues of certain hermitian operators* Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958).

[4] [W2] H. Widom. *Toeplitz determinant with singular generating function* Amer. J. Math. 95 (1973).

[7] [W3] H. Widom. *Extreme eigenvalues of N-dimensional convolution operators* Trans. Amer. Math. Soc. 106 391-414 (1963).