Pascal Autissier

Points entiers et théorèmes de Bertini arithmétiques

Thèses d'Orsay, 2001

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_2001__0595__A1_0>

ORSAY
N° d'ordre : 6760

UNIVERSITE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

Présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR

Pascal AUTISSIER

Sujet : Points entiers et théorèmes de Bertini arithmétiques

Soutenue le 17 décembre 2001 devant la Commission d'examen

Jean-Benoît	BOST
Laurent	MORET-BAILLY
Patrice	PHILIPPON
Lucien	SZPIRO
Emmanuel	ULLMO

Remerciements

Je suis plus que reconnaissant envers Emmanuel d'avoir accepté de diriger ma thèse, de m'avoir guidé (que dis-je ? éclairé) tout au long de ce travail sans compter son temps ainsi perdu (quitte à rentrer parfois tard chez lui à cause de moi), d'avoir participé aux multiples démarches administratives qui m'ont accompagné en tant que thésard, et d'être en plus imperturbablement sympathique.

Je remercie vivement Laurent Moret-Bailly d'avoir relu et corrigé mon manuscrit avec minutie, jusqu'aux fautes typographiques, d'avoir relevé une gross(ièr)e erreur dans le paragraphe C.2.2, et d'être rapporteur de cette thèse.

Je remercie beaucoup Robert Rumely d'avoir relu et commenté en détail mon manuscrit, d'avoir accepté d'écrire un rapport sur cette thèse, et d'avoir discuté avec moi lors de séminaires à l'IHP, sans juger mon anglais incertain.

Pour avoir bien voulu faire partie de mon jury, j'adresse mes remerciements à Jean-Benoît Bost, Patrice Philippon (merci aussi de m'avoir invité à exposer à Chevaleret), Lucien Szpiro (qui a sans doute été pour Emmanuel ce qu'Emmanuel a été pour moi : bien plus qu'un directeur de thèse).

L'un des principaux lieux d'élaboration de ma thèse étant la bibliothèque de l'ENS, je tiens à remercier son personnel pour sa disponibilité.

Par ailleurs, je remercie Reinie Erné de m'avoir invité à exposer mes travaux à Rennes.

J'en profite également pour rendre hommage à ma mère, à mon père, à Michaël, à mes grand-parents, à Mariette, que j'aime, pour leur soutien, pour ce qu'ils sont, pour ce qu'ils représentent pour moi.

En outre, je remercie Eric de m'avoir supporté en tant que colocataire, et je salue ma vieille amie Carole, mon vieil ami Laurent, et Guillaume (courageux d'avoir relu ma thèse !).

Pour finir, je fais un clin d'œil à mes amis volleyeurs et/ou gros mangeurs (notamment Frédo, Jérôme, Philippe), aux sympathiques boulets du bureau 14 (en particulier JR et Lionel), à mes autres camarades thésards d'Orsay, de Bordeaux et de Lille, à mes collègues d'enseignement, et à ceux que je n'ai pas cités mais que je n'oublie pas.

Résumé :

Cette thèse est consacrée à l'étude des points entiers sur les variétés arithmétiques. On y démontre une version effective du théorème d'existence de Rumely : on peut trouver beaucoup de points entiers sur des ouverts (assez grands) de variétés arithmétiques, tout en contrôlant la hauteur de ces points. La preuve est dans l'esprit des travaux de Moret-Bailly et d'Ullmo.

Dans le cas d'une surface arithmétique X (*ie* $\dim(X) = 2$), de tels points peuvent de plus être trouvés aussi près que l'on veut d'un compact assez gros (au sens de la théorie des capacités) dans la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$. Ceci est une généralisation du théorème de Fekete-Szegö. On prouve également un résultat d'équidistribution.

Dans le cas d'une variété arithmétique (de dimension quelconque), on décrit un analogue arithmétique des théorèmes de Bertini : moyennant une extension de la base, on peut couper X par un hyperplan de telle sorte que l'intersection X' conserve certaines propriétés géométriques de X et que la hauteur de X' soit bornée explicitement.

On donne aussi des applications du théorème de Rumely effectif aux schémas abéliens, aux équations diophantiennes, ainsi qu'au problème de Skolem.

Abstract :

This thesis is devoted to the study of integral points on arithmetic varieties. An effective version of Rumely's existence theorem is shown : a lot of integral points can be found on (large enough) open sets of arithmetic varieties, with a bound for the height of these points. The proof is in the spirit of Moret-Bailly's and Ullmo's works.

In the case of an arithmetic surface X (*ie* $\dim(X) = 2$), these points can moreover be found as close as wished to a big enough (in the sense of capacity theory) compact set of the Riemann surface $X(\mathbb{C})$. This is a generalization of the Fekete-Szegö theorem. An equidistribution result is also proved.

In the case of an arithmetic variety X (of arbitrary dimension), an arithmetic analogue of Bertini's theorem is described : after a base extension, we can cut X by a hyperplane so that the intersection X' keeps geometric properties of X and that the height of X' is explicitly bounded.

We also give applications of the effective Rumely theorem to abelian schemes, to diophantine equations, and to the Skolem problem.

Table des matières

Chapitre A

Une introduction

A.1 Le sujet

Une partie de la Géométrie Arithmétique a pour objet d'étudier les solutions $(x_1; \ldots; x_r)$, à coordonnées dans l'anneau $\overline{\mathbb{Z}}$ des entiers algébriques, de systèmes d'équations du type :

$$\forall i \in \{1; \ldots; n\} \qquad F_i(x_1; \ldots; x_r) = 0 \quad , \qquad (*)$$

où les F_i sont des polynômes à r variables et à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}$. Pour formaliser cette étude, on utilise le langage des schémas :

Pour $i \in \{1; \ldots; n\}$, soit $G_i(X_0; \ldots; X_r)$ le polynôme homogène associé à F_i. On note K le corps de nombres engendré sur $\mathbb{Q}$ par les coefficients des (F_i), et $O_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$ l'anneau des entiers de K. On pose

$$X = \mathrm{Proj}\Big(O_K[X_0; \ldots; X_r]/\langle G_1; \ldots; G_n\rangle\Big) \quad ,$$

Z le fermé de Zariski de X défini par l'idéal homogène $\langle X_0 \rangle$, et $U = X - Z$. On appelle **point entier** sur U tout sous-schéma fermé intègre de U qui est fini et surjectif sur $B = \mathrm{Spec}(O_K)$. L'ensemble des solutions de $(*)$ dans $\overline{\mathbb{Z}}^r$ modulo l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur K est alors en bijection naturelle avec l'ensemble des points entiers sur U.

Un théorème de Rumely [36] (*cf* Moret-Bailly [29], [30] pour la formulation suivante) donne alors des conditions géométriques d'existence de tels points entiers :

Théorème A.1.1 (Rumely, Moret-Bailly) : *On suppose X irréductible et la fibre générique X_K géométriquement irréductible sur K. Alors :*
U admet un point entier si et seulement si le morphisme $U \to B$ est surjectif.

Cet énoncé a une traduction sous la forme d'un principe local-global :

On suppose X irréductible et X_K géométriquement irréductible sur K. Le système $(*)$ admet une solution dans $\overline{\mathbb{Z}}^r$ si et seulement si pour tout idéal maximal P de O_K, le système $(*)$ modulo P admet une solution à coordonnées dans une clôture algébrique de O_K/P.

Un problème naturel est alors d'obtenir, en plus de leur existence, des informations quantitatives sur les solutions de $(*)$. Dans cette direction, Erné [16] et Mikkelsen [27] ont construit, sur certains U, des points entiers avec une majoration de leur degré.

Dans cette thèse, on construit des points entiers dont on contrôle la hauteur (la hauteur d'un point entier E mesure d'une certaine manière la «complexité arithmétique» des solutions associées à E).

Pour ce faire, on utilise la théorie d'Arakelov [2], généralisée par Bost, Gillet, Soulé, et Zhang (*cf* [8], [9], [20], [44]). Lorsque $\widehat{\mathcal{L}}$ est un faisceau inversible hermitien, on désigne par $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}$ la hauteur normalisée relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$.

Notons que pour déterminer explicitement des solutions de $(*)$, il suffirait de savoir borner à la fois leur degré et leur hauteur.

Cette thèse s'inspire des travaux d'Ullmo, de Moret-Bailly, et de Rumely. Elle est divisée en deux parties :

On se restreint d'abord, dans le chapitre B, au cas d'une surface arithmétique. On peut alors démontrer le théorème de Rumely effectif :

Théorème (B.4.2.3) : *Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Soient $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ une assez bonne hauteur sur X, U un ouvert de Zariski de X tel que l'application $U \to \mathrm{Spec}(O_K)$ soit surjective, et $\epsilon > 0$. Alors U admet une infinité de points entiers E tels que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq T_{X;\widehat{\mathcal{L}}} + \epsilon$, où $T_{X;\widehat{\mathcal{L}}}$ est une constante explicite ne dépendant que de X et $\widehat{\mathcal{L}}$ (mais pas de U).*

Remarquons que la borne $T_{X;\widehat{\mathcal{L}}}$ pour la hauteur est indépendante de U.

On s'intéresse aussi à la situation suivante :

Soit $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{C}$. En théorie du potentiel, on associe à $\mathcal{K}$ sa capacité γ, qui est un réel positif. Ce nombre, défini de manière analytique, mesure en quelque sorte la «taille arithmétique» de $\mathcal{K}$. C'est ce qu'illustre le théorème de Fekete et Szegö [18] :

Pour $U \subset \mathbb{C}$, notons ici $\mathcal{Y}(U)$ l'ensemble des $\alpha \in \overline{\mathbb{Z}}$ tels que α et tous ses conjugués (par Galois) soient dans U.

Théorème A.1.2 (Fekete, Szegö) : *Soient $\mathcal{K}$ un compact de $\mathbb{C}$ symétrique par rapport à l'axe réel, et γ sa capacité.*

- Si $\gamma < 1$, il existe un ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant $\mathcal{K}$ tel que $\mathcal{Y}(U)$ soit fini.

- Si $\gamma \geq 1$, pour tout ouvert U de $\mathbb{C}$ contenant $\mathcal{K}$, $\mathcal{Y}(U)$ est infini.

La théorie du potentiel se généralise en fait aux surfaces de Riemann compactes. Ceci permet d'étendre la situation précédente de la manière suivante :

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Soient Z un fermé de Zariski de X purement de dimension 1 tel que $Z(\mathbb{C})$ ne soit pas vide, et $\mathcal{K}$ un compact à bord régulier de $X(\mathbb{C})$ invariant par conjugaison complexe. On suppose $Z(\mathbb{C})$ et $\mathcal{K}$ disjoints. On construit une matrice d'intersection A à l'aide des potentiels conducteurs de $\mathcal{K}$ par rapport à $Z_{\mathbb{C}}$; c'est l'analogue de $-\ln\gamma$ dans le théorème A.1.2. A est symétrique réelle. On montre le théorème suivant :

Théorème (B.4.6.1) : *On suppose* $\det(-A) > 0$. *Soit U un ouvert de $X(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{K}$. Alors $X - Z$ admet un point entier E tel que $E(\mathbb{C}) \subset U$, et on peut contrôler la hauteur de E explicitement en fonction de A.*

Enfin, dans le cas critique $\det(A) = 0$, on montre une généralisation du théorème d'équi-distribution de Bilu [7], [38] :

Proposition (B.4.7.1) : *On suppose* $\det(A) = 0$. *Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite injective de points entiers sur $X - Z$ vérifiant :*

Pour tout ouvert U de $X(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{K}$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $E_n(\mathbb{C}) \subset U$.

On pose $e_n = \deg(E_{nK})$. *Alors la suite de mesures de répartition $\left(\frac{1}{e_n}\delta_{E_{n\mathbb{C}}}\right)$ converge faiblement vers une mesure explicite (à support dans la frontière $\partial\mathcal{K}$).*

On traite ensuite, au chapitre C, le cas plus général d'un fermé (de dimension quelconque) d'une variété arithmétique. On peut alors démontrer le théorème suivant :

Théorème (C.2.1.3) : *Soient X une variété arithmétique, et $h_{\bar{\mathcal{L}}}$ une bonne hauteur sur X. Soient Y un fermé intègre horizontal de dimension ≥ 2, U un ouvert de Y, et $\epsilon > 0$. On suppose que U est dense dans chaque fibre de $X \to$ Spec($\mathbb{Z}$) (ie que chaque fermé (de Y) irréductible vertical de codimension 1 rencontre U).*

Il existe alors une infinité de points entiers E sur U vérifiant $h'_{\bar{\mathcal{L}}}(E) \leq S + \epsilon$, où S est *une constante explicite ne dépendant que de* X, $\widehat{\mathcal{L}}$ *et* Y *(mais pas de* U*).*

Plus précisément, l'ensemble des points fermés x *de* $Y_{\mathbb{Q}}$ *tels que l'adhérence* $E = \overline{\{x\}}$ *(dans* Y*) soit un point entier sur* U *vérifiant* $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq S + \epsilon$*, est Zariski-dense dans* $Y_{\mathbb{Q}}$.

Notons que l'hypothèse sur U est ici plus forte que celle du théorème A.1.1 : «$U \to B$ surjectif». Il est possible que la conclusion du théorème C.2.1.3 reste vraie avec cette hypothèse faible (*ie* en permettant à U d'être disjoint de certains fermés verticaux de codimension 1), éventuellement avec une borne S plus grande. C'est le cas lorsque Y est régulier de dimension 2 (théorème B.4.2.3).

On applique alors ce théorème aux schémas abéliens (proposition C.2.2.1).

On décrit ensuite un analogue arithmétique des théorèmes de Bertini :

On peut, moyennant une extension de la base, couper une variété arithmétique X par un hyperplan de telle manière que l'intersection X' conserve certaines propriétés géométriques de X, et cela avec un contrôle de la hauteur de X'. Plus précisément :

Théorème (C.3.3.3) : *Soit* $\widehat{M}$ *un* O_K*-module localement libre hermitien. On pose* $B = \mathrm{Spec}(O_K)$, $\mathbb{P}^\vee = \mathbf{P}(M^\vee)$, *et* $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^\vee}(1)}$. *Soit* $X \subset \mathbb{P}^\vee$ *une variété arithmétique sur* O_K *de dimension* $d \geq 3$, *et* $\epsilon > 0$.

Il existe alors une extension finie L *de* K *et un hyperplan* H *de* $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ *tels que, en posant* $B' = \mathrm{Spec}(O_L)$ *et en notant* $g : B' \to B$ *le morphisme induit par* $O_K \hookrightarrow O_L$*, on ait :*

- *Le fermé* $X' = H \cap X_{O_L}$ *est une variété arithmétique sur* O_L *de dimension* $d-1$ *;*
- *Pour tout* $b \in B'$ *tel que la fibre* $X_{g(b)}$ *de* X *au-dessus de* $g(b)$ *soit lisse, la fibre* X'_b *de* X' *au-dessus de* b *est lisse ;*
- *Pour tout* $b \in B'$, *le* $k(b)$*-schéma* X'_b *et le* $k(g(b))$*-schéma* $X_{g(b)}$ *ont le même nombre géométrique de composantes irréductibles ;*
- $h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X') \leq \frac{d}{d-1} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) + S + \epsilon$, *où* S *est une constante explicite ne dépendant que de* $\widehat{M}$ *et* d.

On remarque que l'on permet ici une extension de la base O_K, ce qui n'est pas nécessaire dans les théorèmes de Bertini classiques (*cf* corollaire C.3.1.2).

Enfin, on donne deux exemples de problèmes que l'on peut résoudre à l'aide du théorème C.2.1.3 : le problème de Skolem effectif (*cf* proposition C.4.1.1), et l'étude du système ($*$) lorsqu'il est réduit à une seule équation (proposition C.4.2.1).

Afin de ne pas alourdir la numérotation, on omettra la lettre du chapitre dans les références au chapitre courant.

A.2 Quelques généralités

On introduit ici les types d'objets que l'on étudiera dans toute la suite de cette thèse.

Définition : Une **variété arithmétique** est un schéma X intègre, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ soit lisse sur $\mathbb{Q}$.

$X(\mathbb{C})$ peut alors être vue comme une variété analytique complexe compacte.

Définition : Soient K un corps de nombres, et O_K son anneau des entiers. Une variété arithmétique **sur** O_K est un O_K-schéma X tel que X soit une variété arithmétique et que la fibre générique X_K soit géométriquement irréductible sur K.

Définition : Une **courbe** —respectivement **surface**— arithmétique est une variété arithmétique de dimension 1 —respectivement 2—.

Remarque A.2.1 : Soit Y un schéma intègre et propre sur $\mathbb{Z}$. On a deux possibilités :
- Y est plat et surjectif sur $B_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; Y est alors dit **horizontal** ;
- Y est au-dessus d'un point fermé $b = p\mathbb{Z}$ de B_0 (*ie* Y est un $\mathbb{F}_p$-schéma) ; Y est alors dit **vertical**.

Plus généralement, un schéma Z propre sur $\mathbb{Z}$ sera dit horizontal lorsque chaque composante irréductible de Z est horizontale.

Définition : Soient Y un schéma intègre, propre et plat sur $\mathbb{Z}$, et U un ouvert de Y. Un **point entier** sur U est un fermé (de Y) intègre horizontal de dimension 1 contenu dans U.

Définition : Soit X une variété arithmétique. Un **faisceau inversible hermitien** sur X est un couple $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$, formé d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, et d'une famille $\|\ \|$ de normes hermitiennes sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ variant de manière C^{∞} sur $X(\mathbb{C})$ et invariante par conjugaison complexe.

On note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ la (1 ;1)-forme de **courbure** (ou forme de Chern) de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$. Elle est caractérisée par la propriété suivante :

Si M est une composante connexe de $X(\mathbb{C})$ et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ sur M, alors on a $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = \delta_{div(s)} - \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \ln \|s\|$ au sens des courants sur M.

Les classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens sur X forment un groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ pour le produit tensoriel.

Remarque A.2.2 : Dans le chapitre B, on considérera parfois des faisceaux inversibles hermitiens non nécessairement C^{∞}. On précisera alors à chaque fois quelle «régularité» on considère. En l'absence de cette précision (en particulier au chapitre C), on sous-entend la définition ci-dessus.

Chapitre B

Les surfaces arithmétiques

Un résumé du chapitre

Après quelques préliminaires, on rappelle la construction et les propriétés de la théorie de l'intersection dans les surfaces arithmétiques.

On démontre ensuite un théorème d'amplitude arithmétique de faisceaux inversibles hermitiens (théorème 3.3.4) ; il étend le théorème de Zhang (théorème 3.1.2) à des structures hermitiennes non nécessairement C^∞. Le passage du cas C^∞ au cas général repose sur un procédé d'approximation de fonctions de Green qui utilise l'équation de la chaleur. Ce procédé a l'avantage de préserver les propriétés de positivité (proposition 3.2.3). On a également besoin d'un théorème de Hilbert-Samuel arithmétique (proposition 3.3.3).

Au paragraphe 4.1, on décrit quelques applications de ces théorèmes au points entiers. On donne aussi un théorème d'équidistribution (proposition 4.1.4).

Au paragraphe 4.2, on montre le théorème de Rumely effectif (théorème 4.2.3). L'idée de la démonstration, dans l'esprit des travaux de Moret-Bailly ([30]) et Ullmo ([41], [42]), consiste à construire un faisceau inversible adapté au problème, puis une section globale d'une puissance de ce faisceau grâce au théorème d'amplitude précédent. Il suffit alors de regarder le diviseur de cette section.

Ensuite, après un rappel de théorie du potentiel et des capacités (paragraphe 4.3), on démontre le théorème 4.6.1 (Fekete-Szegö généralisé), par une méthode inspirée des travaux de Rumely [37]. On établit au passage (paragraphe 4.4) le lien entre la théorie du potentiel et la théorie de l'intersection.

Enfin, on donne le théorème de Bilu généralisé (proposition 4.7.1). Remarquons que celui-ci est relié à la proposition 4.1.4.

B.1 Une étude de la dimension 1

B.1.1 Les courbes arithmétiques

Soit K un corps de nombres. Dans tout le chapitre B, on note G_K l'ensemble des plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$, et S_K l'ensemble des places de K à l'infini (*ie* G_K modulo conjugaison complexe). Pour $\sigma \in S_K$, on pose ϵ_σ égal à 1 si σ est réelle, à 2 sinon.

Soit C une courbe arithmétique. C est alors affine : $C = \mathrm{Spec}(A)$, avec un ordre A d'un corps de nombres K. On a alors $G_K \simeq C(\mathbb{C})$.

Un faisceau inversible hermitien $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$ sur C est la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L} = \widetilde{L}$ (où $L = \Gamma(C; \mathcal{L})$) et d'une structure hermitienne $\|\ \|$ sur $L_{\mathbb{C}}$ (*ie* pour chaque $\sigma \in G_K$ d'une norme hermitienne $\|\ \|_\sigma$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension 1) $L_\sigma = L_K \otimes_\sigma \mathbb{C}$) invariante par conjugaison complexe.

Par l'identification $G_K \simeq C(\mathbb{C})$, tout $\sigma \in G_K$ correspond à un $P \in C(\mathbb{C})$. Pour $s \in L$, on note $\|s(P)\| = \|s\|_\sigma$.

Définition : Soit $\widehat{\mathcal{L}} = (\widetilde{L}; \|\ \|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C)$. Soit s une section globale non nulle de $\mathcal{L}$. On pose

$$\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{L}}) = \ln \#(L/As) - \sum_{\sigma \in C(\mathbb{C})} \ln \|s\|_\sigma$$

($\#$ désigne le cardinal). Ce nombre réel ne dépend pas du choix de $s \in L - \{0\}$; il est appelé le **degré arithmétique** de $\widehat{\mathcal{L}}$.

On définit ainsi un morphisme de groupes $\widehat{\deg} : \widehat{\mathrm{Pic}}(C) \to \mathbb{R}$.

B.1.2 Les schémas de dimension 1

Soit K un corps de nombres. On note ici

$$L(K) = \mathbb{R}^{S_K} \qquad \text{et} \qquad L'(K) = \left\{ (y_\sigma)_\sigma \in L(K) \middle| \sum_{\sigma \in S_K} y_\sigma = 0 \right\}$$

D'après le théorème des unités de Dirichlet, l'image de O_K^* (plus généralement du groupe des inversibles d'un ordre quelconque de K) par le morphisme logarithmique

$$\begin{array}{rccl} \phi_K : & K^* & \to & L(K) \\ & u & \mapsto & (\epsilon_\sigma \ln |\sigma(u)|)_\sigma \end{array}$$

est un réseau dans $L'(K)$. On aimerait une généralisation aux schémas (de dimension 1) de ce théorème. Dans tout ce paragraphe 1.2, Z désigne un schéma propre sur $\mathbb{Z}$, de dimension 1. $Z_\mathbb{Q}$ est alors un schéma fini, et pour tout $x \in Z_\mathbb{Q}$, le corps résiduel $k(x)$ est un corps de nombres. On pose $L(Z_\mathbb{Q}) = \prod_{x \in Z_\mathbb{Q}} L(k(x))$. Du morphisme de schémas $Z_\mathbb{Q} \to Z$ on déduit une application logarithmique

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \Gamma(Z; \mathcal{O}_Z^*) & \to & L(Z_\mathbb{Q}) \\ & u & \mapsto & \left(\phi_{k(x)}(u(x))\right)_x \end{array}$$

Proposition 1.2.1 : *L'image de Φ contient un produit $\prod_{x \in Z_\mathbb{Q}} \Gamma_x$, où Γ_x est un réseau de $L'(k(x))$.*

Démonstration :

Réduction au cas Z réduit : Soit $\mathcal{N}$ le nilradical de $\mathcal{O}_Z$ (qui définit le sous-schéma fermé Z_{red} de Z). On a une suite exacte de faisceaux sur Z :

$$1 \to 1 + \mathcal{N} \to \mathcal{O}_Z^* \to (\mathcal{O}_Z/\mathcal{N})^* \to 1$$

On en déduit une suite exacte en cohomologie :

$$\Gamma(Z; \mathcal{O}_Z^*) \to \Gamma(Z_{red}; \mathcal{O}_{Z_{red}}^*) \to H^1(Z; 1 + \mathcal{N})$$

Montrons que $H^1(Z; 1 + \mathcal{N})$ est fini : Il existe une suite croissante d'idéaux de $\mathcal{O}_Z$

$$0 = \mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{I}_{n-1} \subset \mathcal{I}_n = \mathcal{N}$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, on ait $\mathcal{I}_i^2 \subset \mathcal{I}_{i-1}$ et $\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1}$ soit de support contenu dans une composante irréductible Z_i de Z.

On a alors une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \to 1 + \mathcal{I}_{i-1} \to & 1 + \mathcal{I}_i & \to & \mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1} & \to 0 \\ & 1 + a & \mapsto & \overline{a} & \end{array}$$

On en déduit la suite exacte

$$H^1(Z; 1 + \mathcal{I}_{i-1}) \to H^1(Z; 1 + \mathcal{I}_i) \to H^1(Z; \mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1})$$

Si Z_i est affine, on a $H^1(Z;\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1}) = 0$. Sinon, Z_i est verticale et propre au-dessus d'un premier p. Alors $H^1(Z;\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1})$ est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Dans les deux cas, $H^1(Z;\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_{i-1})$ est fini. Donc $H^1(Z; 1+\mathcal{I}_{i-1})$ fini implique $H^1(Z;1+\mathcal{I}_i)$ fini.

D'où, par récurrence, $H^1(Z;1+\mathcal{N})$ est fini.

Donc l'image de $\Gamma(Z;\mathcal{O}_Z^*)$ est d'indice fini dans $\Gamma(Z_{red};\mathcal{O}^*_{Z_{red}})$. Et $L(Z_\mathbb{Q}) = L((Z_{red})_\mathbb{Q})$. On est donc ramené au cas où Z est réduit.

Réduction au cas Z intègre : Supposons donc Z réduit. Soient $Z_1;\ldots;Z_r$ les composantes irréductibles de Z, $\mathcal{P}_i$ l'idéal cohérent de $\mathcal{O}_Z$ définissant le sous-schéma fermé intègre Z_i de Z. On a une injection

$$0 \to \mathcal{O}_Z \to \mathcal{A} = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{O}_Z/\mathcal{P}_i \quad .$$

Soit $\mathcal{I}$ le conducteur de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{O}_Z$. l'injection $\mathcal{O}_Z/\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{I}$ induit la suite exacte

$$1 \to \mathcal{O}_Z^* \to \mathcal{A}^* \to \mathcal{G} = (\mathcal{A}/\mathcal{I})^*/(\mathcal{O}_Z/\mathcal{I})^* \quad .$$

Le support de $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est un ensemble fini de points fermés de Z, car il est contenu dans $\bigcup\limits_{i<j}(Z_i \cap Z_j)$. Donc $\Gamma(Z;\mathcal{G}) = \Gamma(Z;\mathcal{A}/\mathcal{I})^*/\Gamma(Z;\mathcal{O}_Z/\mathcal{I})^*$, qui est fini puisque $\Gamma(Z;\mathcal{A}/\mathcal{I})$ l'est. Donc $\Gamma(Z;\mathcal{O}_Z^*)$ est d'indice fini dans $\Gamma(Z;\mathcal{A}^*) = \prod\limits_{i=1}^{r}\Gamma(Z;\mathcal{O}_Z/\mathcal{P}_i)^* = \prod\limits_{i=1}^{r}\Gamma(Z_i;\mathcal{O}^*_{Z_i})$. Et $L(Z_\mathbb{Q}) = \prod\limits_{i=1}^{r} L((Z_i)_\mathbb{Q})$.

On est donc ramené au cas où Z est intègre.

Fin de la démonstration : On suppose donc Z intègre. Si Z est vertical, on a $L(Z_\mathbb{Q}) = 0$. On suppose donc Z horizontal : $Z = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un ordre d'un corps de nombres K. Alors, d'après le théorème des unités, l'image de A^* par ϕ_K est un réseau de $L'(K)$. D'où le résultat. □

Proposition 1.2.2 : *Soit Z un schéma propre sur $\mathbb{Z}$, de dimension 1. Soit $\|\ \|$ une structure hermitienne sur $\mathcal{O}_{Z_\mathbb{C}}$ invariante par conjugaison complexe. Pour chaque composante horizontale Z_i de Z, on pose $\widehat{\mathcal{O}_{Z_i}} = (\mathcal{O}_{Z_i};\|\ \|_{|Z_i})$. On note $\|\ \|_n$ la structure hermitienne produit sur $\mathcal{O}_{Z_\mathbb{C}}^{\otimes n} \simeq \mathcal{O}_{Z_\mathbb{C}}$. On pose*

$$a = \min_i \frac{\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{O}_{Z_i}})}{[k(Z_i):\mathbb{Q}]} \qquad et \qquad a' = \max_i \frac{\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{O}_{Z_i}})}{[k(Z_i):\mathbb{Q}]} \quad .$$

Alors il existe c ne dépendant que de $Z_\mathbb{Q}$ et de l'image du morphisme Φ (en particulier c ne dépend pas de $\|\ \|$), tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $u \in \Gamma(Z;\mathcal{O}_Z^*)$ tel que

$$\forall P \in Z(\mathbb{C}) \qquad e^{-c-a'n} \leq \|u(P)\|_n \leq e^{c-an} \quad .$$

Démonstration : Soit x_i le point générique de Z_i. $Z_{\mathbb{Q}} = \{x_1; \dots; x_q\}$. On pose $K_i = k(x_i) = k(Z_i)$, et $S_i = S_{K_i}$. Un $x_i \in Z_{\mathbb{Q}}$ et un plongement $\sigma : K_i \hookrightarrow \mathbb{C}$ définissent un $P \in Z(\mathbb{C})$; on pose $a_{i;\sigma} = \|1(P)\|$. Pour $s \in \Gamma(Z; \mathcal{O}_Z)$, on a $\|s(P)\|_n = |s(P)|.\|1(P)\|^n = |\sigma(s(x_i))|.a_{i;\sigma}^n$.

Posons

$$m_i = \frac{1}{[K_i : \mathbb{Q}]}\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{O}_{Z_i}}) = \frac{-1}{[K_i : \mathbb{Q}]}\sum_{\sigma \in S_i} \epsilon_\sigma \ln a_{i;\sigma} \qquad \text{et} \qquad b_{i;\sigma} = -\epsilon_\sigma(m_i + \ln a_{i;\sigma}) \quad .$$

On a $\sum_{\sigma \in S_i} b_{i;\sigma} = 0$, et $a \leq m_i \leq a'$. On cherche en fait $u \in \Gamma(Z; \mathcal{O}_Z^*)$ tel que pour tout i et tout $\sigma \in S_i$, on ait $b_{i;\sigma}n - c \leq \epsilon_\sigma \ln|\sigma(u(x_i))| \leq b_{i;\sigma}n + c$. Or, d'après la proposition 1.2.1, l'image de $\Gamma(Z; \mathcal{O}_Z^*)$ par le morphisme logarithmique Φ contient un produit $\prod_{i=1}^{q} \Gamma_i$, où Γ_i est un réseau de $L'(K_i)$. Il suffit donc de trouver, pour chaque i, un $(y_\sigma)_{\sigma \in S_i} \in \Gamma_i$ tel que $\forall \sigma \in S_i \quad |y_\sigma - b_{i;\sigma}n| \leq c$. On est ramené au problème de réseaux suivant :

Lemme 1.2.3 : *Soient $L' = \left\{(y_1; \dots; y_s) \in \mathbb{R}^s \,\middle|\, \sum_{j=1}^{s} y_j = 0\right\}$, Γ un réseau de L', et b_j des réels vérifiant $\sum_{j=1}^{s} b_j = 0$. Alors il existe c ne dépendant que de Γ (et pas des b_j) tel que pour tout $n \geq 1$, il existe $(y_1; \dots; y_s) \in \Gamma$ tel que $\forall j \quad |y_j - b_j n| \leq c$.*

Preuve du lemme :
Soit $\| \ \|_\infty$ la norme sup canonique sur $\mathbb{R}^s$. Posons $f = (b_1; \dots; b_s) \in L'$. Soit $\{e_1; \dots; e_{s-1}\}$ une base de Γ. f s'écrit $f = \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j e_j$, avec les λ_i réels. Soit μ_j l'entier le plus proche de $\lambda_j n$. Posons $u_n = \sum_{j=1}^{s-1} \mu_j e_j \in \Gamma$. On a alors

$$\|u_n - nf\|_\infty \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s-1} \|e_j\|_\infty \quad .$$

On en déduit le résultat en posant $c = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s-1} \|e_j\|_\infty$ et $(y_1; \dots; y_s)$ les coordonnées de u_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^s$. $\square$

Remarque 1.2.4 : Dans la proposition 1.2.2, le fait que c ne dépend que de $Z_{\mathbb{Q}}$ et de l'image de Φ est utile dans la situation suivante : Si Z est un sous schéma fermé de Z_1, avec $Z_{\mathbb{Q}} = Z_{1\mathbb{Q}}$ et $\Gamma(Z_1; \mathcal{O}_{Z_1}^*) \to \Gamma(Z; \mathcal{O}_Z^*)$ surjectif, alors la constante c convenant pour Z convient aussi pour Z_1.

Rappelons enfin un résultat dû à Moret-Bailly :
On note $\mathrm{Pic}^0(Z)$ l'ensemble des $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(Z)$ tels que pour toute composante irréductible verticale C de Z, on ait $\deg(\mathcal{L}_{|C}) = 0$.

Proposition 1.2.5 : $\mathrm{Pic}^0(Z)$ *est un sous-groupe fini de* $\mathrm{Pic}(Z)$.

Démonstration : C'est le théorème 2.3 de [30] p. 165. □

B.2 L'intersection dans les surfaces arithmétiques

B.2.1 Les fonctions de Green

Soit M une surface de Riemann compacte connexe de genre g^1. Une **forme volume normalisée** sur M est une $(1;1)$-forme C^∞ réelle définie positive de masse totale 1.

Exemple : Donnons un exemple de forme volume normalisée sur M :

- Si $g^1 = 0$, M est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. En fixant un tel isomorphisme, la mesure de Lebesgue habituelle sur la sphère de Riemann induit une forme volume normalisée μ sur M. C'est aussi la forme de courbure de $\mathcal{O}(1)$ muni de la structure hermitienne de Fubini-Study.

- Si $g^1 \geq 1$, on munit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\Omega(M)$ des différentielles holomorphes sur M du produit hermitien $\langle \phi.\psi \rangle = \frac{i}{2} \int_M \phi \wedge \overline{\psi}$. $\Omega(M)$ est alors un espace hermitien, de dimension g^1. Soit $(\phi_1; \ldots; \phi_{g^1})$ une base orthonormée de $\Omega(M)$. On pose $\mu = \frac{i}{2g^1} \sum_{j=1}^{g^1} \phi_j \wedge \overline{\phi}_j$, qui ne dépend pas du choix de la base orthonormée (ϕ_j). La forme μ est une forme volume normalisée sur M.

Soit donc μ une forme volume normalisée sur M. On introduit les objets suivants (*cf* Bost [8]) :
$W^1(M)$ désigne l'espace de Hilbert réel des $f \in L^2(M;\mu)$ tel que df soit L^2 sur M. On a, sur le quotient $W^1(M)/\mathbb{R}$ de $W^1(M)$ par l'espace des fonctions constantes sur M, le produit scalaire de Dirichlet : $\langle g_1.g_2 \rangle_{Dir} = \frac{i}{2\pi} \int_M \partial g_1 \wedge \overline{\partial g_2}$.
Pour un ouvert U de M, $W^1_{loc}(U)$ désigne l'espace des $f \in L^2_{loc}(U;\mu)$ tel que df soit localement L^2 sur U. Les espaces $W^1(M)$ et $W^1_{loc}(U)$ ne dépendent pas du choix de μ.

Définition : Soit $D = \sum_P n_P[P]$ un diviseur sur M, de support Y. Une **fonction de**

Green W^1 —respectivement C^0, C^∞— pour D est une fonction $g \in W^1_{loc}(M - Y)$ — respectivement $g \in C^0(M - Y)$, $g \in C^\infty(M - Y)$— telle que :

Au voisinage de $P \in Y$, $g = -2n_P \ln|z| + \alpha$, où z est une coordonnée locale au voisinage de P (avec $z(P) = 0$) et α est une fonction localement W^1 —respectivement C^0, C^∞— au voisinage de P.

Proposition 2.1.1 : *Il existe une et une seule fonction de Green C^∞ g_D pour D telle que :*
- Sur $M - Y$, $\frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}g_D = \deg(D)\mu$;
- $\int_M g_D \mu = 0$.

Démonstration : cf par exemple [24] p. 26. □

g_D est appelée la **fonction de Green admissible**, ou μ-admissible pour être précis, de D sur M.

On a les propriétés suivantes :
- $g_D = \sum n_P g_{[P]}$.
- Si f est méromorphe non nulle sur M, $g_{div(f)} = -2\ln|f| + 2c(f)$, où $c(f)$ est la constante $\int_M \ln|f|\mu$.

Pour $P \neq Q$, on pose $g(P; Q) = g_{[P]}(Q)$. Alors, en notant Δ la diagonale de $M \times M$, g est C^∞ sur $M \times M - \Delta$, et pour $P \neq Q$ on a $g(P; Q) = g(Q; P)$.

Remarque 2.1.2 : Soient D un diviseur sur M, et g une fonction de Green W^1 —resp. C^0, C^∞— pour D. Alors $g - g_D$ se prolonge naturellement en une fonction W^1 —resp. C^0, C^∞— sur M.

Définition : Soient $D_1 = \sum n_P[P]$ et $D_2 = \sum m_P[P]$ deux diviseurs sur M de supports disjoints. Soit g_1 —respectivement g_2— une fonction de Green W^1 pour D_1 —respectivement D_2—. Notons $e_1 = \deg(D_1)$ et $e_2 = \deg(D_2)$. On définit l'**étoile-produit** de g_1 et g_2 par :

$$\langle g_1 * g_2 \rangle = \sum_{P;Q} n_P m_Q g(P; Q) + \int_M (e_2 g_1 + e_1 g_2)\mu - < g_1 - g_{D_1}; g_2 - g_{D_2} >_{Dir} \quad .$$

On remarque que $\langle g_1 * g_2 \rangle = \langle g_2 * g_1 \rangle$. Par ailleurs, l'étoile-produit ne dépend pas de la forme volume normalisée μ choisie.

Pour des précisions sur ce qui vient d'être introduit dans ce paragraphe (fonctions de Green, étoile-produit), on pourra consulter l'article de Bost [8] pages 254-256 et 268-269.

Définition : Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur M. Une **structure hermitienne** C^0 —resp. C^∞— $\|\ \|$ sur $\mathcal{L}$ est la donnée, en chaque $P \in M$, d'une norme hermitienne $\|\ \|(P)$ sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension 1) résiduel de $\mathcal{L}$ en P, telle que $\|\ \|$ varie de manière C^0 —resp. C^∞— sur M.

Posons $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$. On note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ le **courant de courbure** de $\widehat{\mathcal{L}}$: c'est le (1 ;1)-courant réel sur M caractérisé par la propriété suivante :

Si s est une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}$ sur M, alors sur M, on a $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = \delta_{div(s)} - \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}\ln\|s\|$ au sens des courants (pour un diviseur $D = \sum n_P[P]$, δ_D désigne la combinaison linéaire de masses de Dirac $\sum n_P\delta_P$).

On dit que $\widehat{\mathcal{L}}$ est **admissible** lorsque $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = \deg(\mathcal{L})\mu$ sur M.

On verra au paragraphe 2.4 le lien entre fonctions de Green et structures hermitiennes.

B.2.2 Les diviseurs d'Arakelov

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Pour chaque $\sigma \in G_K$, on note $X_\sigma = X_K \otimes_\sigma \mathbb{C}$ et on munit $X_\sigma(\mathbb{C})$ d'une forme volume normalisée.

Un **diviseur d'Arakelov** W^1 —respectivement C^0, C^∞— sur X est un couple $(D; g)$ où D est un diviseur de Weil sur X et g est une fonction $X(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ invariante par conjugaison complexe, telle que pour tout $\sigma \in G_K$, si l'on note $D_\sigma = D_K \otimes_\sigma \mathbb{C}$ et g_σ la restriction de g à $X_\sigma(\mathbb{C})$, g_σ soit une fonction de Green W^1 —respectivement C^0, C^∞— pour D_σ.

$(D; g)$ est dit **admissible** si pour tout $\sigma \in G_K$, $g_\sigma - g_{D_\sigma}$ est une fonction constante sur $X_\sigma(\mathbb{C})$.

L'ensemble des diviseurs d'Arakelov W^1 —resp. C^0, C^∞— forme un groupe $\widehat{\mathrm{Div}}(W^1; X)$ —resp. $\widehat{\mathrm{Div}}(C^0; X)$, $\widehat{\mathrm{Div}}(C^\infty; X)$— pour l'addition.

Pour f rationnelle non nulle sur X, $(div(f); -2\ln|f_{\mathbb{C}}|)$ est un diviseur d'Arakelov C^∞. On définit ainsi un morphisme $k(X)^* \to \widehat{\mathrm{Div}}(C^\infty; X)$. Tout élément de son image $\widehat{\mathrm{Pr}}(X)$ s'appelle un diviseur d'Arakelov **principal** sur X.

On pose $\widehat{\mathrm{Cl}}(C^\infty; X) = \widehat{\mathrm{Div}}(C^\infty; X)/\widehat{\mathrm{Pr}}(X)$; de même $\widehat{\mathrm{Cl}}(C^0; X) = \widehat{\mathrm{Div}}(C^0; X)/\widehat{\mathrm{Pr}}(X)$, et $\widehat{\mathrm{Cl}}(W^1; X) = \widehat{\mathrm{Div}}(W^1; X)/\widehat{\mathrm{Pr}}(X)$.

B.2.3 Une construction de la forme intersection

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Soient D et E deux diviseurs de Weil sans composante irréductible commune. Pour un point fermé x de X, on définit de manière habituelle le nombre d'intersection $i_x(D;E)$ de D et E en x. On pose $(D.E)_f = \sum_x i_x(D;E) \ln \# k(x)$.

Soient $\widehat{D_1} = (D_1; g_1)$ et $\widehat{D_2} = (D_2; g_2)$ deux diviseurs d'Arakelov W^1 tels que D_1 et D_2 soient sans composante irréductible commune. On définit leur **intersection d'Arakelov** par :

$$(\widehat{D_1}.\widehat{D_2}) = (D_1.D_2)_f + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in G_K} \langle g_{1;\sigma} * g_{2;\sigma} \rangle \quad .$$

On a le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 : *La forme* (.) *ainsi définie induit une forme bilinéaire symétrique sur* $\widehat{\mathrm{Cl}}(W^1; X)$.

Démonstration : cf [8] p. 274-275. □

Cette forme bilinéaire vérifie la variante suivante du théorème de l'indice de Hodge :

Proposition 2.3.2 : *Soit* $\widehat{D} \in \widehat{\mathrm{Div}}(W^1; X)$ *tel que* $\deg(D_K) = 0$. *Alors on a* $(\widehat{D}.\widehat{D}) \leq 0$.

Démonstration : C'est le théorème 5.5 2) de [8] p. 277. □

B.2.4 Les faisceaux inversibles hermitiens

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. On suppose chaque $X_\sigma(\mathbb{C})$ muni d'une forme volume normalisée.

Définition : Un **faisceau inversible hermitien** C^0 —respectivement C^∞— $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|)$ sur X est la donnée d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X et d'une structure hermitienne C^0 —resp. C^∞— $\| \ \|$ sur $\mathcal{L}_\mathbb{C}$ (*ie* pour chaque $\sigma \in G_K$ d'une structure hermitienne C^0 —resp. C^∞— $\| \ \|_\sigma$ sur $\mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_K \otimes_\sigma \mathbb{C}$) invariante par conjugaison complexe.

Les classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens C^0 —resp. C^∞— forment un groupe $\widehat{\mathrm{Pic}}(C^0;X)$ —resp. $\widehat{\mathrm{Pic}}(C^\infty;X)$— pour le produit tensoriel.

Soit $\widehat{D} = (D;g) \in \widehat{\mathrm{Cl}}(C^0;X)$. On lui associe le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ muni de la structure hermitienne $\| \ \|$ telle que $\|1(P)\| = \exp[-\frac{1}{2}g(P)]$. On note $\widehat{\mathcal{O}_X}(\widehat{D})$ ce faisceau inversible hermitien C^0. On définit ainsi un isomorphisme $\widehat{\mathrm{Cl}}(C^0;X) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0;X)$.

Décrivons l'isomorphisme réciproque : Soit $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L};\| \ \|) \in \widehat{\mathrm{Cl}}(C^0;X)$. Soit s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}$ sur X. A $\widehat{\mathcal{L}}$ on associe $(div(s);-2\ln\|s_{\mathbb{C}}\|)$.

Si $\widehat{D}$ est un diviseur d'Arakelov C^∞, alors $\widehat{\mathcal{O}_X}(\widehat{D})$ est un faisceau inversible hermitien C^∞. L'isomorphisme précédent induit donc un isomorphisme $\widehat{\mathrm{Cl}}(C^\infty;X) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathrm{Pic}}(C^\infty;X)$.

On identifiera diviseurs d'Arakelov C^0 —respectivement C^∞— et faisceaux inversibles C^0 —respectivement C^∞—.

Soit $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L};\| \ \|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0;X)$. On note $\widehat{\mathcal{L}_\sigma} = (\mathcal{L}_\sigma;\| \ \|_\sigma)$, et $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ le (1 ;1)-courant réel sur $X(\mathbb{C})$ égal à $\omega_{\widehat{\mathcal{L}_\sigma}}$ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$.

On dit que $\widehat{\mathcal{L}}$ est **admissible** lorsque, pour tout $\sigma \in G_K$, $\widehat{\mathcal{L}_\sigma}$ est admissible (sur $X_\sigma(\mathbb{C})$).

Les faisceaux inversibles hermitiens admissibles correspondent bien sûr aux diviseurs d'Arakelov admissibles par l'identification précédente.

Remarque 2.4.1 : Le groupe $\mathrm{Cl}(X)$ des classes de diviseurs de Weil sur X modulo équivalence linéaire s'injecte canoniquement dans $\widehat{\mathrm{Cl}}(C^\infty;X)$ par $D \mapsto (D;g_D)$, où g_D désigne la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à la fonction de Green admissible g_{D_σ} de D_σ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$.

B.2.5 Un lien entre intersection et degré ; la hauteur

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. On munit chaque $X_\sigma(\mathbb{C})$ d'une forme volume normalisée μ_σ.

Définition : Soient $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0;X)$, et C un diviseur de Weil premier sur X. On définit la **hauteur** de C relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ de la manière suivante :

- Si C est vertical au-dessus d'un point fermé $\mathcal{P}$ de B, $\mathcal{L}_{|C}$ est un faisceau inversible sur C. On pose $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) = \deg(\mathcal{L}_{|C})\ln\#(O_K/\mathcal{P})$.

- Si C est horizontal, $\widehat{\mathcal{L}}_{|C}$ est un faisceau inversible hermitien sur C. On pose $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) = \widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{L}}_{|C})$.

Proposition 2.5.1 : *Soit $\widehat{D} = (D; g) \in \widehat{\mathrm{Div}}(C^0; X)$, et C un diviseur de Weil premier qui n'est pas une composante de D. On a alors*

$$h_{\widehat{D}}(C) = (D.C)_f + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g\delta_{C_{\mathbb{C}}} \quad .$$

Démonstration : Ceci est une conséquence directe de la définition du degré arithmétique (*cf* paragraphe 1.1). □

Proposition 2.5.2 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit d'ordre 0 (ie une mesure réelle) sur $X(\mathbb{C})$. Alors $\widehat{\mathcal{L}}$ peut être représenté par un diviseur d'Arakelov W^1. Soit $\widehat{C} = (C; g)$ un diviseur d'Arakelov C^0 et W^1 tel que C soit intègre. Alors*

$$(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{C}) = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} \quad .$$

Démonstration : cf proposition 5.3 de [8] p. 275. On peut aussi démontrer cette proposition à l'aide des résultats du paragraphe 3.2. □

Proposition 2.5.3 : *Soit $\widehat{D} = (D; g)$ un diviseur d'Arakelov W^1. On pose $\widehat{D}_{ad} = (D; g_D)$ et $f = g - g_D$, où g_D désigne la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à la fonction de Green admissible g_{D_σ} de D_σ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$. Alors on a*

$$(\widehat{D}.\widehat{D}) = (\widehat{D}_{ad}.\widehat{D}_{ad}) + \deg(D_K)\sum_\sigma \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f_\sigma\mu_\sigma - \frac{1}{2}\sum_\sigma \|f_\sigma\|^2_{Dir} \quad .$$

Démonstration : On remarque que $\widehat{D} = \widehat{D}_{ad} + (0; f)$. On en déduit l'égalité $(\widehat{D}.\widehat{D}) = (\widehat{D}_{ad}.\widehat{D}_{ad}) + 2(\widehat{D}_{ad}.(0; f)) + ((0; f).(0; f))$.

Or, par définition, on a

$$(\widehat{D}_{ad}.(0; f)) = \frac{\deg(D_K)}{2}\sum_\sigma \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f_\sigma\mu_\sigma \qquad \text{et} \qquad ((0; f).(0; f)) = -\frac{1}{2}\sum_\sigma \|f_\sigma\|^2_{Dir} \quad .$$

D'où le résultat. □

B.3 Le théorème d'amplitude arithmétique

B.3.1 Le théorème d'amplitude dans le cas C^∞

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Rappelons d'abord le résultat suivant :

Proposition 3.1.1 : *Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Le faisceau $\mathcal{L}$ est ample si et seulement si pour tout diviseur premier vertical C, on a $\deg(\mathcal{L}_{|C}) > 0$.*

Démonstration : cf [25] p. 384-386. □

Le théorème ci-dessous, dû à Zhang, est un analogue arithmétique du théorème d'amplitude de Nakai-Moishezon :

Définition : Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$. On dit que $\widehat{\mathcal{L}}$ est **arithmétiquement ample** lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
- $\mathcal{L}$ est ample ;
- Il existe $c > 0$ tel que pour tout $\widehat{\mathcal{M}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$, pour tout n assez grand, $\Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$ admette une $\mathbb{Z}$-base constituée de sections de norme en tout point de $X(\mathbb{C})$ inférieure à e^{-cn}.

Théorème 3.1.2 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^\infty; X)$ vérifiant :*
- *La (1 ;1)-forme réelle $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est définie positive ;*
- *$(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) > 0$;*
- *Pour tout diviseur de Weil premier C, $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) > 0$.*

Alors $\widehat{\mathcal{L}}$ est arithmétiquement ample.

Démonstration : cf [43] p. 572 (voir aussi [41], [42]). □

On aimerait généraliser ce résultat aux faisceaux inversibles hermitiens C^0.

On généralisera également le résultat suivant :

Soient M une surface de Riemann compacte connexe, Y une partie finie de M, $\widehat{\mathcal{L}}$ — respectivement $\widehat{\mathcal{M}}$— un faisceau inversible muni d'une structure hermitienne C^∞ —resp. C^0— tel que $\deg(\mathcal{L}) > 0$ et que la (1 ;1)-forme $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit définie positive. On considère Y comme un sous-schéma fermé réduit de M. Alors pour tout n assez grand, le morphisme $\psi_n : \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}) \to \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_{|Y})$ est surjectif.

Proposition 3.1.3 : *Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand, pour tout $u \in \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_{|Y})$, il existe $s \in \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$ tel que $\psi_n(s) = u$ et que $\max\limits_M \|s\| \leq e^{\epsilon n} \max\limits_Y \|u\|$.*

S'il existe une courbe algébrique réelle régulière M' telle que $M = M'_{\mathbb{C}}$, et si Y, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{M}}$, et u sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer en plus s invariant par conjugaison complexe.

Démonstration : C'est le théorème 3.2 de [43] p. 576. □

B.3.2 L'équation de la chaleur

Soient M une surface de Riemann compacte connexe, et μ une forme volume normalisée sur M. Pour $f \in C^\infty(M)$, on définit le **laplacien** Δf de f par la formule : $\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial} f = \Delta f \mu$ ($\Delta f \in C^\infty(M)$).

Soit f_0 une distribution réelle (*ie* un 0-courant réel) sur M. Une solution à l'**équation de la chaleur** avec condition initiale f_0 est une fonction $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R}_+^*)$ telle que, si l'on note $f_t(x) = f(x;t)$, et Δ_x le laplacien à t fixé, on ait :
- Sur $M \times \mathbb{R}_+^*$: $\Delta_x f = \frac{\partial f}{\partial t}$;
- Lorsque t tend vers 0, f_t tend vers f_0 au sens des distributions.

Proposition 3.2.1 : *Il existe une et une seule solution f à l'équation de la chaleur avec condition initiale f_0. On peut expliciter f de la manière suivante :*

Il existe une base hilbertienne $(\phi_n)_{n\geq 0}$ de $L^2(M;\mu)$ et une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ telles que :
- *Pour tout $n \geq 0$, $\phi_n : M \to \mathbb{R}$ soit C^∞ et $\Delta\phi_n = -\lambda_n\phi_n$;*
- *On ait $\lambda_0 = 0$, $\phi_0 = 1$, $\lambda_1 > 0$, et l'équivalent $\lambda_n \sim n$;*
- *$\phi_n(x)$ soit borné uniformément en x et n.*

Posons $a_n = \int_M f_0\phi_n\mu$. Alors :

$$\forall (x,t) \in M \times \mathbb{R}_+^* \qquad f(x;t) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{-\lambda_n t}\phi_n(x) \quad .$$

Démonstration : cf par exemple [6]. □

On a le résultat suivant :

Proposition 3.2.2 : *Si f_0 est une fonction continue sur M, alors la solution f se prolonge en une fonction continue sur $M \times \mathbb{R}_+$, avec pour tout $x \in M$ $f(x;0) = f_0(x)$.*

Démonstration : cf [5]. □

Par ailleurs, on a la version suivante du principe du maximum :

Proposition 3.2.3 : *Si f_0 est une distribution positive et non nulle, alors pour tout $t > 0$, on a $\min_{x \in M} f(x;t) > 0$.*

Démonstration : *cf* [34]. □

Remarque 3.2.4 : Si $f_0 \in W^1(M)$, alors pour tout $t > 0$, on a :

$$\|f_t\|_{Dir}^2 = \sum_{n \geq 1} \lambda_n a_n^2 e^{-2\lambda_n t} \leq \sum_{n \geq 1} \lambda_n a_n^2 = \|f_0\|_{Dir}^2 \quad .$$

Cette étude de l'équation de la chaleur permet de démontrer le résultat suivant :

Proposition 3.2.5 : *Soient $f_0 \in W^1(M)$ telle que f_0 soit continue sur M, et $\epsilon > 0$. Alors pour tout r assez grand et tout $m \geq 0$, on a*

$$\min_{(x_1;\ldots;x_r) \in M^r} \left[\sum_{i<j} g(x_i;x_j) + m \sum_{i=1}^{r} f_0(x_i) \right] \geq -\frac{m^2}{2} \|f_0\|_{Dir}^2 + mr(a_0 - \epsilon) - \frac{r}{2} \ln r - O(r) \quad ,$$

où $a_0 = \int_M f_0 \mu$, et le O ne dépend que de M.

Démonstration : On utilise les notations précédentes. On pose de plus, pour $t > 0$:

$$g_t(x;y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n} e^{-\lambda_n t} \phi_n(x) \phi_n(y) \quad .$$

On a les résultats suivants (*cf* [6], [24]) :
- $\forall (x;y;t) \in M \times M \times \mathbb{R}_+^* \quad g(x;y) \geq g_t(x;y) - t$.
- Lorsque t tend vers 0, on a, uniformément en $x \in M$: $g_t(x;x) = -\ln t + O(1)$.

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f, on a, pour tout t assez petit :

$$\sum_{i<j} g(x_i;x_j) + m \sum_{i=1}^{r} f_0(x_i) \geq \sum_{i<j} g_{2t}(x_i;x_j) + m \sum_{i=1}^{r} f_t(x_i) - r^2 t - mr\epsilon \quad .$$

Après calcul, on trouve que le membre de droite vaut

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\lambda_n} \left(m\lambda_n a_n + \sum_{i=1}^{r} e^{-\lambda_n t} \phi_n(x_i) \right)^2 - \frac{m^2}{2} \|f_0\|_{Dir}^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} g_{2t}(x_i;x_i) + mr(a_0 - \epsilon) - r^2 t \quad .$$

On obtient le résultat en choisissant $t = \frac{1}{2r}$. □

B.3.3 Le théorème d'amplitude dans le cas C^0

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K, avec X_K de genre g^1. On suppose chaque $X_\sigma(\mathbb{C})$ muni d'une forme volume normalisée μ_σ comme dans l'exemple du paragraphe 2.1.

Définition : Soit $\widehat{D} = (D; g) \in \widehat{\mathrm{Div}}(C^0; X)$.
$\widehat{D}$ est **effectif** lorsque D est un diviseur de Weil effectif et $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad g(P) \geq 0$.
$\widehat{D}$ est **strictement effectif** lorsque D est un diviseur de Weil effectif et $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad g(P) > 0$.

Définition : Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$.
$\widehat{\mathcal{L}}$ est dit **numériquement positif** lorsque pour tout diviseur de Weil premier C, on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) \geq 0$.
$\widehat{\mathcal{L}}$ est dit **numériquement strictement positif** lorsque pour tout diviseur de Weil premier C, on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) > 0$.

Proposition 3.3.1 : *Soit $\widehat{D} = (D; g)$ un diviseur d'Arakelov strictement effectif. $\widehat{D}$ est numériquement strictement positif si et seulement si : D est ample et pour toute composante horizontale C de D, on a $h_{\widehat{D}}(C) > 0$.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate des propositions 2.5.1 et 3.1.1. □

Lemme 3.3.2 : *Soient M une surface de Riemann compacte connexe, μ une forme volume normalisée sur M, et $\widehat{\mathcal{M}}$ un faisceau inversible muni d'une structure hermitienne C^0. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe T tel que*

$$\forall n \geq 1 \quad \forall s \in \Gamma(X; \mathcal{M}^{\otimes n}) \qquad \max_M \|s\|^2 \leq T e^{\epsilon n} \int_M \|s\|^2 \mu \quad .$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Pour tout $x \in M$, il existe une carte locale $\phi_x : U_x \xrightarrow{\sim} B(0;1)$ ($B(a;r)$ désigne ici le disque ouvert de $\mathbb{C}$ de centre a et de rayon r) telle que :
- $\phi_x(x) = 0$;
- $\mathcal{M}_{|U_x} \simeq \mathcal{O}_{M|U_x}$;
- $\forall y \in U_x \quad \left|\ln \|1(y)\| - \ln \|1(x)\|\right| \leq \frac{\epsilon}{4}$ (en considérant $\| \ \|$ comme une famille de normes C^0 sur $\mathcal{O}_{U_x}$ grâce à l'isomorphisme précédent).

Posons $V_x = \phi_x^{-1}(B(0; \frac{1}{2}))$. Par compacité de M, il existe $(x_1; \ldots; x_l) \in M^l$ tel que $M = \bigcup_{i=1}^{l} V_{x_i}$. Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$, et $c_i > 0$ tel que $\mu \geq c_i \lambda$ sur

$B(0;1) = \phi_{x_i}(U_{x_i})$. On pose $c = \min\limits_i c_i > 0$.

Soit maintenant $n \geq 1$ et $s \in \Gamma(M; \mathcal{M}^{\otimes n})$. Soit x_0 un point de M où $\|s\|$ atteint son maximum, et i tel que $x_0 \in V_{x_i}$. Alors, en posant $B = B(\phi_{x_i}(x_0); \frac{1}{2})$, on a :

$$\int_M \|s\|^2 \mu \geq c_i \int_B |s|^2 \|1\|^{2n} \lambda \geq c\|1(x_0)\|^{2n} e^{-\epsilon n} \int_B |s|^2 \lambda \quad .$$

Comme s est holomorphe sur B, on a $\int_B |s|^2 \lambda \geq \lambda(B)|s(x_0)|^2$. D'où le résultat. □

Proposition 3.3.3 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\operatorname{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$ et que $\widehat{\mathcal{L}}$ puisse être représenté par un diviseur d'Arakelov W^1. Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand, $\mathcal{L}^{\otimes n}$ admet une section globale non nulle de norme en tout point de $X(\mathbb{C})$ inférieure à*

$$\exp\left[-\frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2[K:\mathbb{Q}]\deg(\mathcal{L}_K)} n + \epsilon n\right] \quad .$$

Démonstration : On pose $N = [K : \mathbb{Q}]$ et $e = \deg(\mathcal{L}_K)$. La structure hermitienne de $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\|\ \| = \|\ \|_{ad} e^{-f/2}$ (*cf* remarque 2.1.2) avec :
- $\widehat{\mathcal{L}}_{ad} = (\mathcal{L}; \|\ \|_{ad})$ admissible;
- f continue sur $X(\mathbb{C})$;
- $\forall \sigma \in G_K \quad \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} f\mu = 0$.

$\Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n})_\mathbb{R} = \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $\bigoplus\limits_{\sigma \in G_K} \Gamma(X_\sigma; \mathcal{L}_\sigma^{\otimes n})$ invariants par conjugaison complexe. Pour tout $n \geq 2g^1 - 1$, on munit $\Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n})_\mathbb{R}$ de la forme volume de Faltings induite par $\widehat{\mathcal{L}}_{ad}$. Posons

$$B(R) = \left\{ s \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n})_\mathbb{R} \middle| \forall \sigma \in G_K \quad \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} \|s\|^2 \mu \leq R^2 \right\} \quad ,$$

et soit $V(R)$ le volume de Faltings de $B(R)$. On a (*cf* [17], [24]) :

$$\ln V(R) \geq Nr \ln R + \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in G_K} \min_{(P_1;\ldots;P_r) \in X_\sigma(\mathbb{C})} \left[\sum_{i<j} g_\sigma(P_i; P_j) + n \sum_{i=1}^r f(P_i) \right] - O(r) \quad ,$$

où $r = en + 1 - g^1$. En utilisant la proposition 3.2.5, on trouve, pour $\epsilon' > 0$:

$$\ln V(R) \geq Nr \ln R - \frac{n^2}{4} \sum_{\sigma \in G_K} \|f_\sigma\|_{Dir}^2 - n^2 \epsilon' - O(n \ln n) \quad .$$

D'autre part, le théorème de Riemann-Roch arithmétique pour les faisceaux admissibles permet de calculer le covolume V_Γ du réseau $\Gamma(X;\mathcal{L}^{\otimes n})$:

$$\ln V_\Gamma = -\frac{n^2}{2}(\widehat{\mathcal{L}}_{ad}.\widehat{\mathcal{L}}_{ad}) + O(n) \quad .$$

On prend alors $\ln R = -\frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2Ne}n + \frac{\epsilon}{2}n$, et $\epsilon' = \frac{Ne}{4}\epsilon$. On remarque (*cf* proposition 2.5.3) que

$$(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) = (\widehat{\mathcal{L}}_{ad}.\widehat{\mathcal{L}}_{ad}) - \frac{1}{2}\sum_{\sigma\in G_K} ||f_\sigma||^2_{Dir} \quad .$$

On trouve alors $\ln V(R) - \ln V_\Gamma \geq \epsilon' n^2 - O(n\ln n)$. On en déduit, par le théorème de Minkowski (la dimension de $\Gamma(X;\mathcal{L}^{\otimes n})_{\mathbb{R}}$ est $Nr = o(\epsilon' n^2)$), que pour tout n assez grand, il existe $s \in \Gamma(X;\mathcal{L}^{\otimes n}) - \{0\}$ tel que $s \in B(R)$. On conclut par le lemme 3.3.2. □

Théorème 3.3.4 : *Soit* $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0;X)$ *vérifiant :*
- $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ *est une mesure positive ;*
- $\widehat{\mathcal{L}}$ *est numériquement strictement positif ;*
- $(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) > 0$.

Alors $\widehat{\mathcal{L}}$ *est arithmétiquement ample.*

Démonstration : D'après la proposition 3.3.3, on peut supposer $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes k}$ représenté par un diviseur d'Arakelov strictement effectif $\widehat{D} = (D; f)$, pour un k assez grand.

La structure hermitienne de $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; ||\ ||_0)$ s'écrit de manière unique sous la forme $||\ ||_0 = ||\ ||_{ad}e^{-g_0/2}$ avec : $(\mathcal{L}; ||\ ||_{ad})$ admissible, g_0 continue, et $\forall\sigma \in G_K \quad \int_{X_\sigma(\mathbb{C})} g_0\mu = 0$.

Pour $\sigma \in G_K$, soient $g_{0;\sigma}$ la restriction de g_0 à $X_\sigma(\mathbb{C})$, et g_σ la solution à l'équation de la chaleur sur $X_\sigma(\mathbb{C})$ avec condition initiale $g_{0;\sigma}$. On pose $g_{t;\sigma}(x) = g_\sigma(x;t)$. Soit g la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à g_σ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$. On pose $g_t(x) = g(x;t)$, $||\ ||_t = ||\ ||_{ad}e^{-g_t/2}$, et $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\mathcal{L}; ||\ ||_t)$.

$\widehat{\mathcal{L}}_t$ vérifie, pour tout $t > 0$ assez petit, les conditions du théorème 3.1.2. En effet :

- On a, pour tout $t > 0$, $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_t} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}g_t + e\mu = (\Delta g_t + e)\mu$ au sens des courants, où $e = \deg(\mathcal{L}_K)$. Or $\Delta_x g + e$ est solution à l'équation de la chaleur avec condition initiale la distribution positive $\Delta g_0 + e$. Donc pour tout $t > 0$, $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_t}$ est définie positive (d'après la proposition 3.2.3).

- $(\widehat{\mathcal{L}}_t.\widehat{\mathcal{L}}_t) = (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2}\sum_\sigma\left(||g_{0;\sigma}||^2_{Dir} - ||g_{t;\sigma}||^2_{Dir}\right) \geq (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) > 0$ (*cf* remarque 3.2.4).

- Pour tout diviseur de Weil premier C, on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(C) = \frac{1}{k} h_{\widehat{\mathcal{L}}_t^{\otimes k}}(C)$. Et $\widehat{\mathcal{L}}_t^{\otimes k}$ est représenté par $(D; f + k(g_t - g_0))$, qui est strictement effectif pour tout $t > 0$ assez petit. D'après la proposition 3.3.1, il suffit donc de montrer que pour toute composante horizontale C de D (il n'y en a qu'un nombre fini), on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}_t^{\otimes k}}(C) > 0$. Or, par continuité de g, $h_{\widehat{\mathcal{L}}_t^{\otimes k}}(C)$ tend vers $h_{\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes k}}(C)$ quand t tend vers 0 (*cf* proposition 2.5.1). D'où le résultat pour tout $t > 0$ assez petit.

Donc $\widehat{\mathcal{L}}_t$ est arithmétiquement ample pour tout $t > 0$ assez petit.

Par ailleurs, g est continue sur $X(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}_+$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t > 0$ tel que $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad |g_t(P) - g_0(P)| \leq \epsilon$. Alors pour $n \geq 1$ et $s \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$, on a $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad \|s(P)\|_0 \leq \|s(P)\|_t e^{n\epsilon/2}$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 3.3.5 : *Soient M une surface de Riemann compacte connexe, Y une partie finie de M, $\widehat{\mathcal{L}}$ et $\widehat{\mathcal{M}}$ deux faisceaux inversibles munis d'une structure hermitienne C^0, tels que* $\deg(\mathcal{L}) > 0$ *et que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit une mesure positive. Soit ψ_n le morphisme $\psi_n : \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}) \to \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_{|Y})$, qui est surjectif pour tout n assez grand.*

Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand, pour tout $u \in \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_{|Y})$, il existe $s \in \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$ tel que $\psi_n(s) = u$ et que $\max_M \|s\| \leq e^{\epsilon n} \max_Y \|u\|$.

S'il existe une courbe algébrique réelle régulière M' telle que $M = M'_{\mathbb{C}}$, et si Y, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{M}}$, et u sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer en plus s invariant par conjugaison complexe.

Démonstration : La démonstration est similaire à celle du théorème 3.3.4 : Soit μ une forme volume normalisée sur M. La structure hermitienne de $\widehat{\mathcal{L}}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\| \ \| = \| \ \|_{ad} e^{-g_0/2}$ avec : $(\mathcal{L}; \| \ \|_{ad})$ admissible, g_0 continue, et $\int_M g_0 \mu = 0$.

Soit g la solution à l'équation de la chaleur sur M avec condition initiale g_0. On pose $g_t(x) = g(x; t)$, $\| \ \|_t = \| \ \|_{ad} e^{-g_t/2}$, et $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\mathcal{L}; \| \ \|_t)$.

$\widehat{\mathcal{L}}_t$ vérifie, pour tout $t > 0$, les conditions de la proposition 3.1.3 : En effet, d'après la proposition 3.2.3, $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}_t}$ est définie positive pour tout $t > 0$.

Par ailleurs, g est continue sur $M \times \mathbb{R}_+$, donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t > 0$ tel que $\forall x \in M \quad |g_t(x) - g_0(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors pour $n \geq 1$, $u \in \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}_{|Y})$, et $s \in \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$, on a $\|u\|_t \leq e^{n\epsilon/4} \|u\|$, et $\|s\| \leq e^{n\epsilon/4} \|s\|_t$. D'où le résultat. $\square$

B.4 Quelques applications

B.4.1 De l'effectivité pour les points entiers

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Dans ce paragraphe, on généralise les résultats d'Ullmo [41].

Définition : Soient $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ et E un point entier sur X. La **hauteur normalisée** de E relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)}{\deg(E_K)} \quad .$$

Proposition 4.1.1 *Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$ et que $\widehat{\mathcal{L}}$ puisse être représenté par un diviseur d'Arakelov W^1. Alors pour tout $\epsilon > 0$, X n'admet qu'un nombre fini de points entiers E tels que*

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2\deg(\mathcal{L}_K)} - \epsilon \quad .$$

Démonstration : D'après la proposition 3.3.3, pour n assez grand, $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ peut être représenté par un diviseur d'Arakelov $\widehat{D} = (D; g)$ tel que D soit effectif et que

$$g \geq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{[K:\mathbb{Q}]\deg(\mathcal{L}_K)} n - \frac{2\epsilon}{[K:\mathbb{Q}]} n \quad .$$

Soit E un point entier sur X qui n'est pas une composante de D. Alors, d'après la proposition 2.5.1 :

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) = \frac{1}{n} h_{\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n}}(E) = \frac{1}{n}(D.E)_f + \frac{1}{2n}\int_{X(\mathbb{C})} g\delta_{E_\mathbb{C}} \geq \Big(\frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2\deg(\mathcal{L}_K)} - \epsilon\Big)\deg(E_K) \quad .$$

D'où le résultat. □

Sous les conditions de la proposition 4.1.1, on peut donc définir le réel

$$A(\widehat{\mathcal{L}}) = \inf_E h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \quad \text{où } E \text{ parcourt l'ensemble des points entiers sur } X.$$

Définition : Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. X est **verticalement positif** lorsque pour tout diviseur de Weil premier vertical C, on a $\deg(\mathcal{L}_{|C}) \geq 0$.

Proposition 4.1.2 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$, que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit une mesure positive, et que $\mathcal{L}$ soit verticalement positif. Alors*

$$A(\widehat{\mathcal{L}}) \leq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2\deg(\mathcal{L}_K)} \quad .$$

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. D'après la proposition 3.3.3, pour n assez grand, $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n}$ peut être représenté par un diviseur d'Arakelov $\widehat{D} = (D; g)$ avec D effectif et

$$g \geq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{[K:\mathbb{Q}]\deg(\mathcal{L}_K)}n - \frac{2\epsilon}{[K:\mathbb{Q}]}n \quad .$$

D s'écrit $D = \sum_i m_i V_i + \sum_j n_j E_j$ avec les V_i premiers verticaux et les E_i premiers horizontaux. Soient j_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_{j_0}) = \min_j h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_j)$, et $E = E_{j_0}$. Alors, d'après la proposition 2.5.2, on a

$$n(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) = (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{D}) = \sum_i m_i h_{\widehat{\mathcal{L}}}(V_i) + \sum_j n_j \deg(E_{jK}) h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_j) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$$

$$\geq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)\deg(\mathcal{L}_K)n + \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2}n - \deg(\mathcal{L}_K)\epsilon n \quad .$$

On en déduit

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2\deg(\mathcal{L}_K)} + \epsilon \quad .$$

D'où le résultat. □

Proposition 4.1.3 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\mathcal{L}$ soit ample et que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit une mesure positive. Alors pour tout $\widehat{\mathcal{M}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout n assez grand, $\Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M})$ admet une $\mathbb{Z}$-base de sections de norme sup sur $X(\mathbb{C})$ inférieure à $\exp\left(-\frac{A(\widehat{\mathcal{L}})}{[K:\mathbb{Q}]}n + \epsilon n\right)$.*

Démonstration : Posons $N = [K:\mathbb{Q}]$ et $\| \ \|' = \| \ \| \exp\left(\frac{A(\widehat{\mathcal{L}})}{N} - \epsilon\right)$. Il suffit de montrer que $\widehat{\mathcal{L}'} = (\mathcal{L}; \| \ \|')$ vérifie les conditions du théorème 3.3.4 :

Soit C un point entier sur X. On a $h'_{\widehat{\mathcal{L}'}}(C) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(C) - A(\widehat{\mathcal{L}}) + N\epsilon > 0$.

D'autre part, on a

$$(\widehat{\mathcal{L}'}.\widehat{\mathcal{L}'}) = (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) - 2A(\widehat{\mathcal{L}})\deg(\mathcal{L}_K) + 2\deg(\mathcal{L}_K)N\epsilon > 0 \quad \text{d'après la proposition 4.1.2.}$$

D'où le résultat. □

Soit maintenant $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$ et que $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit une mesure réelle. Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite injective de points entiers sur X. Posons $e_n = \deg(E_{nK})$, et $e = \deg(\mathcal{L}_K)$. D'après la proposition 4.1.1, on a : $\liminf_{n\to+\infty} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_n) \geq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2e}$. La proposition suivante précise, dans le cas «critique», la répartition des ensembles $E_n(\mathbb{C})$ dans $X(\mathbb{C})$:

Proposition 4.1.4 : *Avec les notations précédentes, supposons que :* $\lim_n h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_n) = \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2e}$. *Alors la suite de mesures* $\left(\frac{1}{e_n}\delta_{E_n\mathbb{C}}\right)$ *converge faiblement vers* $\frac{1}{e}\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$. *En particulier,* $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ *est une mesure positive.*

Démonstration : Posons $\nu_n = \frac{1}{e_n}\delta_{E_n\mathbb{C}}$. Il s'agit de montrer que, pour toute fonction f continue sur $X(\mathbb{C})$, la suite numérique $(\int f\nu_n)$ converge vers $\frac{1}{e}\int f\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ (les intégrales sont ici sur $X(\mathbb{C})$).

Il suffit en fait de le vérifier pour f de classe C^∞ sur $X(\mathbb{C})$. Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose $\widehat{\mathcal{L}}_t = (\widehat{\mathcal{L}}; \| \ \|e^{-tf/2})$.

D'après la proposition 2.5.1, on a, pour tout $n \geq 0$, $h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(E_n) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_n) + \frac{t}{2}\int f\nu_n$. On en déduit que

$$\liminf_{n\to+\infty} h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(E_n) = \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{2e} + \liminf_{n\to+\infty}\left(\frac{t}{2}\int_{X(\mathbb{C})} f\nu_n\right) \quad .$$

D'autre part, d'après la proposition 2.5.3, on a

$$(\widehat{\mathcal{L}}_t.\widehat{\mathcal{L}}_t) = (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) + t\int_{X(\mathbb{C})} f\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} - \frac{t^2}{2}\|f\|^2_{Dir} \quad .$$

Alors, d'après la proposition 4.1.1, on a : $\liminf h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(E_n) \geq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}_t.\widehat{\mathcal{L}}_t)}{2e}$. En remplaçant les deux membres, on trouve

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(t\int_{X(\mathbb{C})} f\nu_n\right) \geq \frac{t}{e}\int_{X(\mathbb{C})} f\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} - \frac{t^2}{2e}\|f\|^2_{Dir} \quad .$$

En faisant tendre t vers 0 :
- par valeurs supérieures, on obtient : $\liminf \int f\nu_n \geq \frac{1}{e}\int f\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$;
- par valeurs inférieures, on obtient : $\limsup \int f\nu_n \leq \frac{1}{e}\int f\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$.

On en déduit le résultat. □

Définition : Soit $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$. On dit que $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est une **assez bonne hauteur** sur X lorsque : $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$, $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est une mesure positive, et $\mathcal{L}$ est verticalement positif.

B.4.2 Le théorème de Rumely effectif

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. Posons $B = \mathrm{Spec}(O_K)$. Pour un point fermé b de B, on note N_b le cardinal du corps résiduel $k(b)$, X_b la fibre au-dessus de b, et n_b le nombre de composantes irréductibles de X_b. Soit J l'ensemble des points fermés b de B

tels que X ait mauvaise réduction en b. Cet ensemble est fini. On pose aussi

$$\kappa_X = \sum_{b \in J} (n_b - 1) \ln N_b \quad .$$

Lemme 4.2.1 : *Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice $(n;n)$ $(n \geq 2)$ à coefficients entiers vérifiant toutes les conditions suivantes :*
- A est symétrique ;
- $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \leq 0$;
- $\forall i \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$;
- i et j sont dits adjacents lorsque $a_{ij} \leq -1$. Alors pour tout i, il existe $i_0; \ldots; i_q$ tels que $i_0 = i$, que $i_q = n$, et que pour tout k, i_{k-1} et i_k soient adjacents.

Soit A' la matrice $(n-1;n-1)$ extraite de A en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne. Alors A' est inversible et tous les coefficients de A'^{-1} sont dans $[0; n-1]$.

Démonstration : On vérifie que A' est symétrique définie positive (*cf* par exemple [24] p. 61), donc inversible. Posons $B = [b_{ij}]$ l'inverse de A'.

On construit un circuit électrique à n sommets, numérotés de 1 à n, de la manière suivante : Pour tout $(i;j)$ tel que $a_{ij} \leq -1$, on place entre les sommets i et j une résistance de $-\frac{1}{a_{ij}}$ ohm.

Le circuit ainsi obtenu est connexe. On fixe la masse du circuit au sommet n.

Soit maintenant un sommet j fixé. On applique un courant de 1 ampère entrant en j et sortant en n. Alors b_{ij} est la tension en volts au sommet i. La théorie des circuits électriques linéaires (*cf* [13]) montre les faits suivants :
- La tension est minimale en n et maximale en j, c'est-à-dire $0 \leq b_{ij} \leq b_{jj}$.
- Dans chaque branche, l'intensité du courant est inférieure à 1 ampère.
Les résistances étant toutes inférieures à 1 ohm, on en déduit que la différence de tension entre 2 sommets adjacents est inférieure à 1 volt.

En considérant un chemin reliant j à n et passant par au plus $n-1$ branches, on voit que l'on a $b_{jj} \leq n-1$. D'où le résultat. □

Lemme 4.2.2 : *Soit $\mathcal{L} \in$ Pic(X) verticalement positif tel que* $\deg(\mathcal{L}_K) > 0$. *Alors il existe $n_0 \geq 1$ et un diviseur de Weil effectif V_0 à composantes verticales tels que $\mathcal{L}^{\otimes n_0}(V_0)$ soit ample.*

Démonstration : cf lemme 4.3 de [43] p. 578. On peut aussi le démontrer à l'aide du lemme

4.2.1. □

Théorème 4.2.3 : *Soit $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|) \in \widehat{\mathrm{Pic}}(C^0; X)$ tel que $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ soit une assez bonne hauteur sur X. Soient Z un fermé de X tel que l'application $X - Z \to B$ soit surjective, et $\epsilon > 0$. Alors $X - Z$ admet une infinité de points entiers E vérifiant*

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{\deg(\mathcal{L}_K)} - A(\widehat{\mathcal{L}}) + \kappa_X \deg(\mathcal{L}_K) + \epsilon \quad .$$

Démonstration : On procède en 6 étapes : grâce aux cinq premières, on montre qu'il existe un tel point entier ; dans la sixième, on en déduit le théorème.

Etape 1 : Quitte à l'agrandir, on peut supposer que Z est purement de dimension 1, et que pour tout point fermé b de B, Z contient exactement $n_b - 1$ composantes irréductibles de X_b. On peut également supposer que Z a au moins une composante horizontale.

Soit F —resp. V— la réunion des diviseurs premiers horizontaux —resp. verticaux— contenus dans Z. On verra aussi F comme un sous-schéma fermé réduit de X.

D'après le lemme 4.2.2, il existe $n_0 \geq 1$ et V_0 à composantes verticales tels que $\mathcal{L}^{\otimes n_0}(V_0)$ soit ample. Alors pour tout $n_1 \geq n_0$, $\mathcal{L}^{\otimes n_1}(V_0)$ est ample. On choisit n_1 tel que $\deg(\mathcal{L}_K)\epsilon n_1 \geq 2(\mathcal{L}.V_0)$, et on pose $\widehat{\mathcal{L}_1} = \widehat{\mathcal{L}}^{\otimes n_1} \otimes \widehat{\mathcal{O}_X}(V_0)$. Soit h tel que $\widehat{F} = (F; h)$ soit un diviseur d'Arakelov C^∞ effectif. Posons $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{O}_X}(-\widehat{F})$, et $N = [K : \mathbb{Q}]$.

Etape 2 : On cherche un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil effectif D de support V tel que, pour tout diviseur premier C contenu dans V, on ait $(\mathcal{L}_1.C) + (D.C) = 0$.

Soit $b \in J$. Si $n_b = 1$, on pose $D_b = 0$.

Supposons maintenant $n_b \geq 2$. Soient $C_1; \ldots; C_{n_b}$ les composantes irréductibles de X_b, avec $C_i \subset V$ pour $1 \leq i \leq n_b - 1$. Soit m_i la multiplicité de C_i dans X_b : $X_b = \sum_{i=1}^{n_b} m_i C_i$.

On cherche $D_b = \sum_{j=1}^{n_b-1} \lambda_j m_j C_j$ tel que pour $1 \leq i \leq n_b - 1$, on ait $(C_i.D_b) = -(C_i.\mathcal{L}_1)$. En posant

$$a_{ij} = \frac{-1}{\ln N_b}(m_i C_i . m_j C_j) \qquad \text{et} \qquad \delta_i = \frac{1}{\ln N_b}(m_i C_i.\mathcal{L}_1) > 0 \quad ,$$

cela revient à résoudre le système : $\sum_{j=1}^{n_b-1} a_{ij}\lambda_j = \delta_i$ pour $1 \leq i \leq n_b - 1$.

Or la matrice $A = [a_{ij}]$ vérifie les conditions du lemme 4.2.1, donc le système précédent admet une solution $(\lambda_1; \dots; \lambda_{n_b-1})$, avec

$$0 < \lambda_j \leq \sum_{i=1}^{n_b-1} (n_b - 1)\delta_i \leq \frac{n_b - 1}{\ln N_b}(X_b.\mathcal{L}_1) = (n_b - 1)\deg(\mathcal{L}_K)n_1 \quad .$$

On obtient ainsi le D_b cherché. On remarque que

$$(D_b.\mathcal{L}) = \sum_{j=1}^{n_b-1} \lambda_j(m_j C_j.\mathcal{L}) \leq (n_b - 1)\deg(\mathcal{L}_K)n_1(X_b.\mathcal{L}) = (\deg(\mathcal{L}_K))^2 n_1(n_b - 1)\ln N_b \quad .$$

Alors $D = \sum_{b \in J} D_b$ est le $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil cherché. On remarque que l'on a l'inégalité $(D.\mathcal{L}) \leq \kappa_X(\deg(\mathcal{L}_K))^2 n_1$.

Prenons $n_2 \geq 1$ tel que $D_1 = n_2 D$ soit un diviseur de Weil (à coefficients entiers), et posons $\widehat{\mathcal{M}} = \widehat{\mathcal{L}_1}^{\otimes n_2} \otimes \widehat{\mathcal{O}_X}(D_1)$.

Etape 3 : Pour toute composante C de D_1, on a $-(D_1.C) = n_2(\mathcal{L}_1.C) > 0$. On en déduit que $\mathcal{O}_X(-D_1)_{|D_1}$ est ample sur D_1 (*cf* proposition 3.1.1). Il existe donc $n_3 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_3$, on ait $H^1(D_1; \mathcal{O}_X(-nD_1 - F)_{|D_1}) = 0$. On en déduit par récurrence les propriétés suivantes, pour tout $n \geq n_3$:
- Le morphisme $\Gamma(nD_1 + F; \mathcal{O}^*_{nD_1+F}) \to \Gamma(n_3 D_1 + F; \mathcal{O}^*_{n_3 D_1+F})$ est surjectif;
- Le morphisme $\mathrm{Pic}(nD_1 + F) \to \mathrm{Pic}(n_3 D_1 + F)$ est un isomorphisme.

D'après la proposition 1.2.5, $\mathrm{Pic}^0(n_3 D_1 + F)$ est fini, et contient $\mathcal{M}_{|n_3 D_1+F}$, donc il existe $n_4 \geq 1$ tel que $\mathcal{M}^{\otimes n_4}_{|n_3 D_1+F} \simeq \mathcal{O}_{n_3 D_1+F}$.

Alors, d'après la proposition 1.2.2 et la remarque 1.2.4, pour tout $n \geq n_3$, il existe $u_n \in \Gamma(n_4 n D_1 + F; \mathcal{M}^{\otimes n_4 n}_{|n_4 n D_1+F})$ tel que u_n ne s'annule en aucun point de $n_4 n D_1 + F$ et que

$$\max_{F(\mathbb{C})} \|u_n\| \leq \exp\Big(c - \frac{A(\widehat{\mathcal{M}})}{N} n_4 n\Big) \quad , \quad \text{où } c \text{ est une constante.}$$

Etape 4 : Par l'amplitude de $\mathcal{L}_1$, on a, pour tout n assez grand, la suite exacte suivante :

$$0 \to \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes n_2 n} \otimes \mathcal{N}) \to \Gamma(X; \mathcal{M}^{\otimes n}) \to \Gamma(Z; \mathcal{M}^{\otimes n}_{|nD_1+F}) \to 0 \quad . \qquad (1)$$

Donc, pour tout n assez grand, il existe $s_n \in \Gamma(X; \mathcal{M}^{\otimes n_4 n})$ tel que $s_{n|n_4 n D_1+F} = u_n$.

En outre, par application de la proposition 3.3.5, pour tout n assez grand, il existe $s'_n \in \Gamma(X; \mathcal{M}^{\otimes n_4 n})_{\mathbb{R}}$ tel que $s'_{n|F_{\mathbb{C}}} = u_{n\mathbb{C}}$ et que

$$\max_{X(\mathbb{C})} \|s'_n\| \leq e^{\epsilon' n} \max_{F(\mathbb{C})} \|u_n\| \quad , \quad \text{où l'on a posé } \epsilon' = \frac{1}{4N} n_1 n_2 n_4 \epsilon.$$

Alors $(s'_n - s_n)_{|F_{\mathbb{C}}} = 0$, donc $s'_n - s_n \in \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes n_2 n_4 n} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{R}}$ d'après la suite exacte (1) tensorisée.

D'après la proposition 4.1.3, $\Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes n_2 n_4 n} \otimes \mathcal{N})$ admet une $\mathbb{Z}$-base $(e_1; \ldots; e_r)$ telle que pour tout i, on ait

$$\max_{X(\mathbb{C})} \|e_i\| \leq \exp\Big(-\frac{A(\widehat{\mathcal{L}_1})}{N} n_2 n_4 n + \epsilon' n\Big) \quad .$$

$s'_n - s_n$ s'écrit alors $s'_n - s_n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i$ avec les λ_i réels. Soient μ_i l'entier le plus proche de λ_i, et $t_n = s_n + \sum_{i=1}^{r} \mu_i e_i$. t_n est une section globale de $\mathcal{M}^{\otimes n_4 n}$.

La norme de $\widehat{\mathcal{M}}^{\otimes k}$ étant plus petite que celle de $\widehat{\mathcal{L}}_1^{\otimes n_2 k} \otimes \widehat{\mathcal{N}}$, on a

$$\max_{X(\mathbb{C})} \|s'_n - t_n\| \leq \frac{r}{2} \exp\Big(-\frac{A(\widehat{\mathcal{L}_1})}{N} n_2 n_4 n + \epsilon' n\Big) \quad .$$

De plus, on a $A(\widehat{\mathcal{M}}) \geq A(\widehat{\mathcal{L}_1}) n_2$. On en déduit que

$$\max_{X(\mathbb{C})} \|t_n\| \leq \Big(\frac{r}{2} + e^c\Big) \exp\Big(-\frac{A(\widehat{\mathcal{L}_1})}{N} n_2 n_4 n + \epsilon' n\Big) \quad .$$

D'après le théorème de Riemann-Roch sur X_K, on a $r = O(n)$. Donc pour n assez grand, on a $\frac{r}{2} + e^c \leq e^{\epsilon' n}$.

Etape 5 : On a $t_{n|n_4 n D_1 + F} = u_n$, donc le support de $div(t_n)$ est disjoint de Z. Ecrivons $div(t_n) = \sum_i l_i W_i + \sum_j p_j E_j$ avec les W_i premiers verticaux et les E_j premiers horizontaux. Soient j_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_{j_0}) = \min_j h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_j)$, et $E = E_{j_0}$. Alors, à l'aide de la proposition 2.5.2, on obtient

$$n_4 n(\widehat{\mathcal{M}}.\widehat{\mathcal{L}}) = \sum_i l_i h_{\widehat{\mathcal{L}}}(W_i) + \sum_j p_j \deg(E_{jK}) h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_j) - \int_{X(\mathbb{C})} \ln \|t_n\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$$

$$\geq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \deg(\mathcal{M}_K) n_4 n + A(\widehat{\mathcal{L}_1}) \deg(\mathcal{L}_K) n_2 n_4 n - 2 \deg(\mathcal{L}_K) N \epsilon' n \quad .$$

Or $\deg(\mathcal{M}_K) = \deg(\mathcal{L}_K) n_1 n_2$, $A(\widehat{\mathcal{L}_1}) \geq A(\widehat{\mathcal{L}}) n_1$, et

$$(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{M}}) = (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) n_1 n_2 + (\mathcal{L}.V_0) n_2 + (\mathcal{L}.D_1)$$

$$\leq (\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) n_1 n_2 + \frac{1}{2} \deg(\mathcal{L}_K) \epsilon n_1 n_2 + \kappa_X (\deg(\mathcal{L}_K))^2 n_1 n_2 \quad .$$

Après simplifications, on obtient bien

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})}{\deg(\mathcal{L}_K)} - A(\widehat{\mathcal{L}}) + \kappa_X \deg(\mathcal{L}_K) + \epsilon \quad . \qquad (2)$$

Etape 6 : Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $X - Z$ n'admet qu'un nombre fini $E_1; \ldots; E_k$ de points entiers vérifiant l'inégalité (2). En appliquant ce qui précède à $Z' = Z \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_i$, on voit alors que $X - Z$ admet un point entier E vérifiant l'inégalité (2) et distinct des E_i. D'où une contradiction. □

Remarque 4.2.4 : La condition $X - Z \to B$ surjective est nécessaire à l'existence d'un point entier sur $X - Z$. Par ailleurs, on remarque que la borne pour la hauteur dans le théorème 4.2.3 est indépendante de Z.

B.4.3 Un peu de théorie du potentiel

Soit M une surface de Riemann compacte connexe, munie d'une forme volume normalisée μ. On continue d'utiliser les notations du paragraphe 2.1 concernant les fonctions de Green sur M. Par ailleurs, on pose

$$[P;Q]_x = \exp\left[\frac{1}{2}[g(P;x) + g(Q;x) - g(P;Q)]\right] \quad .$$

Ceci mesure la «pseudo-distance» entre P et Q (c'est l'analogue de la distance induite par la valeur absolue sur $\mathbb{C}$).

Soit maintenant $\mathcal{K}$ un compact non vide de M, et $x \in M - \mathcal{K}$. Pour une mesure de probabilité ν sur M à support inclus dans $\mathcal{K}$, on pose

$$u_\nu(P) = -\int_{\mathcal{K}} \ln[P;Q]_x d\nu(Q) \quad .$$

u_ν est la **fonction potentiel** de ν. On a les propriétés suivantes (*cf* [35], [37]) :

Proposition 4.3.1 : *u_ν est harmonique sur $M - (\mathcal{K} \cup \{x\})$, sur-harmonique sur $M - \{x\}$. Au voisinage de x, on a $u_\nu = -\frac{1}{2}g_x + \alpha$ avec α C^∞ au voisinage de x et nulle en x. De plus, on a $\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}u_\nu = \delta_x - \nu$ au sens des courants.*

On définit ensuite l'**intégrale d'énergie** de ν :

$$I(\nu) = \int_{\mathcal{K}} u_\nu d\nu = -\int_{\mathcal{K}}\int_{\mathcal{K}} \ln[P;Q]_x d\nu(Q) d\nu(P) \quad .$$

Le **potentiel** de $\mathcal{K}$ par rapport à x est $V_x(\mathcal{K}) = \inf_\nu [I(\nu)]$. La **capacité** de $\mathcal{K}$ par rapport à x est $\gamma_x(\mathcal{K}) = e^{-V_x(\mathcal{K})}$.

Si $\gamma_x(\mathcal{K}) > 0$ (*ie* si $V_x(\mathcal{K}) \neq +\infty$), il existe une et une seule mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{K};x}$ réalisant l'inf dans $V_x(\mathcal{K})$. $\mu_{\mathcal{K};x}$ est appelée la **distribution à l'équilibre**. On note $u_{\mathcal{K};x} = u_{\mu_{\mathcal{K};x}}$.

Proposition 4.3.2 : *Soit D_x la composante connexe de $M - \mathcal{K}$ contenant x. Alors :*
- Sur $M - \overline{D_x}$, $u_{\mathcal{K};x}$ est constante égale à $V_x(\mathcal{K})$.
- Sur ∂D_x, on a $u_{\mathcal{K};x} \leq V_x(\mathcal{K})$ avec inégalité stricte seulement sur un ensemble de capacité nulle.
- Sur D_x, on a en tout point $u_{\mathcal{K};x} < V_x(\mathcal{K})$.

Remarque 4.3.3 : $\mathcal{K}$ et ∂D_x ont même capacité, même distribution d'équilibre, et même potentiel conducteur.

On suppose $\gamma_x(\mathcal{K}) > 0$. On définit la **fonction potentiel conducteur** de $\mathcal{K}$ par rapport à x : $g_{\mathcal{K};x}(P) = 2(V_x(\mathcal{K}) - u_{\mathcal{K};x}(P))$. Elle ne dépend pas du choix de μ.

Proposition 4.3.4 : *Soient P et Q deux points distincts de $M - \mathcal{K}$. Alors $g_{\mathcal{K};Q}(P) = g_{\mathcal{K};P}(Q)$. On pose $g_{\mathcal{K}}(P;Q) = g_{\mathcal{K};P}(Q)$. Alors $g_{\mathcal{K}}$ est continue sur $(M - \mathcal{K})^2 - \Delta$, où Δ désigne la diagonale de $(M - \mathcal{K})^2$.*

Proposition 4.3.5 : *Soit $P \in \partial D_x$. Soit C la composante connexe de ∂D_x contenant P. Si $C \neq \{P\}$, alors $g_{\mathcal{K};x}$ est continue en P et $g_{\mathcal{K};x}(P) = 0$.*

Si $\mathcal{K}$ est la réunion (non vide) de parties connexes non réduites à un point, on dit que $\mathcal{K}$ est **à bord régulier**. Alors pour tout $x \in M - \mathcal{K}$, on a $\gamma_x(\mathcal{K}) > 0$.

Pour un diviseur $D = \sum n_P[P]$ sur M à support disjoint de $\mathcal{K}$, on notera $g_{\mathcal{K};D} = \sum n_P g_{\mathcal{K};P}$ la fonction potentiel conducteur de $\mathcal{K}$ par rapport à D, et $\mu_{\mathcal{K};D} = \sum n_P \mu_{\mathcal{K};P}$ la distribution à l'équilibre correspondante.

B.4.4 Un lien entre intersection et potentiel

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K. On suppose chaque $X_\sigma(\mathbb{C})$ muni d'une forme volume normalisée. On utilise les notations du paragraphe 4.3.

Soit $\mathcal{K}$ un compact de $X(\mathbb{C})$ invariant par conjugaison complexe. Pour $\sigma \in G_K$, on note $\mathcal{K}_\sigma = X_\sigma(\mathbb{C}) \cap \mathcal{K}$. On suppose $\mathcal{K}$ à bord régulier (*ie* pour tout $\sigma \in G_K$, $\mathcal{K}_\sigma$ est à bord régulier).

Pour un diviseur de Weil D sur X tel que $D_{\mathbb{C}}$ soit à support disjoint de $\mathcal{K}$, notons $g_{\mathcal{K};D}$ la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à la fonction potentiel conducteur $g_{\mathcal{K}_\sigma;D_\sigma}$ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$, et g_D la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à la fonction de Green admissible g_{D_σ} sur $X_\sigma(\mathbb{C})$.

Proposition 4.4.1 : *Posons $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_X}(D; g_{\mathcal{K};D})$, et $\widehat{\mathcal{L}}_{ad} = \widehat{\mathcal{O}_X}(D; g_D)$. Pour $\sigma \in G_K$, écrivons D_σ sous la forme $D_\sigma = \sum_P n_P^\sigma [P]$. On a les formules suivantes :*

$$(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) = (\widehat{\mathcal{L}}_{ad}.\widehat{\mathcal{L}}_{ad}) + \sum_\sigma \Big[\sum_P n_P^{\sigma 2} V_P(\mathcal{K}_\sigma) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{P;Q \\ P\neq Q}} n_P^\sigma n_Q^\sigma \Big(g_{\mathcal{K}_\sigma}(P;Q) - g_\sigma(P;Q)\Big)\Big] \quad ;$$

$$\forall \sigma \in G_K \qquad \omega_{\widehat{\mathcal{L}_\sigma}} = \mu_{\mathcal{K}_\sigma;D_\sigma} = \sum_P n_P^\sigma \mu_{\mathcal{K}_\sigma;P} \quad .$$

Démonstration : La seconde formule est une application de la proposition 4.3.1.

Montrons la première. On pose $f = g_{\mathcal{K};D} - g_D$. f se prolonge en une fonction C^0 sur $X(\mathbb{C})$, et pour tout P dans le support de D_σ, on a $f(P) = 2n_P^\sigma V_P(\mathcal{K}_\sigma)$.

D'après la proposition 2.5.2, on a $(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}}) = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g_{\mathcal{K};D}\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D)$, puisque la mesure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est à support dans $\partial\mathcal{K}$ et $g_{\mathcal{K};D}$ est nulle sur $\partial\mathcal{K}$.

De même, on a $(\widehat{\mathcal{L}}_{ad}.\widehat{\mathcal{L}}_{ad}) = h_{\widehat{\mathcal{L}}_{ad}}(D) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g_D \omega_{\widehat{\mathcal{L}}_{ad}} = h_{\widehat{\mathcal{L}}_{ad}}(D)$ par définition des fonctions de Green.

Par ailleurs, on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) - h_{\widehat{\mathcal{L}}_{ad}}(D) = \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} f\delta_{D_{\mathbb{C}}}$. On en déduit le résultat. □

Proposition 4.4.2 : *Soient D et E deux diviseurs sans composante irréductible commune et tels que $D_{\mathbb{C}}$ et $E_{\mathbb{C}}$ soient à supports disjoints de $\mathcal{K}$. Posons $\widehat{D} = (D; g_{\mathcal{K};D})$ et $\widehat{E} = (E; g_{\mathcal{K};E})$. Pour $\sigma \in G_K$, écrivons D_σ sous la forme $D_\sigma = \sum_P n_P^\sigma[P]$, et E_σ sous la forme $E_\sigma = \sum_Q m_Q^\sigma[Q]$. On a alors*

$$(\widehat{D}.\widehat{E}) = (D.E)_f + \frac{1}{2}\sum_\sigma \sum_{P;Q} n_P^\sigma m_Q^\sigma g_{\mathcal{K}_\sigma}(P;Q)$$

En particulier, si D et E sont effectifs, alors on a $(\widehat{D}.\widehat{E}) \geq 0$.

Démonstration : Posons $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_X}(\widehat{D})$. D'après la proposition 2.5.2, on a $(\widehat{D}.\widehat{E}) = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g_{\mathcal{K};E}\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)$, car la mesure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est à support dans $\partial\mathcal{K}$ et $g_{\mathcal{K};E}$ est nulle sur $\partial\mathcal{K}$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2.5.1 pour conclure. □

B.4.5 Des théorèmes d'approximation

On conserve les notations du paragraphe 4.3. On a les résultats suivants :

Proposition 4.5.1 : *Soient $\mathcal{K}_0$ un compact à bord régulier de M, U un ouvert de M contenant $\mathcal{K}_0$, Y une partie finie de $M - U$, et $\epsilon > 0$. Il existe alors un compact à bord régulier $\mathcal{K}$ contenu dans U tel que $M - \mathcal{K}$ soit connexe et que :*

$$\forall x \in Y \quad \forall P \in M \qquad \left| g_{\mathcal{K};x}(P) - g_{\mathcal{K}_0;x}(P) \right| \leq \epsilon \quad .$$

S'il existe une courbe algébrique réelle régulière M' telle que $M = M'_{\mathbb{C}}$, et si Y et $\mathcal{K}_0$ sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer à $\mathcal{K}$ d'être invariant par conjugaison complexe.

Démonstration : cf [37] p. 167. □

Théorème 4.5.2 : *Soient $\mathcal{K}$ un compact à bord régulier tel que $M - \mathcal{K}$ soit connexe, U un ouvert de M contenant $\mathcal{K}$, $Y = \{x_1; \ldots; x_r\}$ une partie finie de $M - U$, et $\epsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ vérifiant la propriété suivante :*

Soient D un diviseur effectif de support Y, et $\widehat{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ muni de la structure hermitienne C^0 telle que $\|1\| = \exp[-\frac{1}{2} g_{\mathcal{K};D}]$. Notons $e = \deg(D)$. Pour $1 \leq i \leq r$, soit $u_i \in \Gamma(x_i; \mathcal{L}_{|x_i})$ tel que $e^{-\delta e} \leq \|u_i\| \leq e^{\delta e}$. Alors il existe $n \geq 1$ et $s \in \Gamma(M; \mathcal{L}^{\otimes n})$ tels que :

- Pour tout i, on ait $s_{|x_i} = u_i^{\otimes n}$;
- $\forall P \in M \quad \|s(P)\| \leq e^{\epsilon e n}$;
- $\forall P \in M - U \quad \|s(P)\| \geq e^{-\epsilon e n}$.

S'il existe une courbe algébrique réelle régulière M' telle que $M = M'_{\mathbb{C}}$, et si Y, $\mathcal{K}$, D, (u_i) sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer à s d'être invariant par conjugaison complexe.

Démonstration : cf [37] p. 173-174. □

B.4.6 Le théorème de type Fekete-Szegö

Soit X une surface arithmétique régulière sur O_K, avec X_K de genre g[1]. On note $\alpha : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ la conjugaison complexe.

On s'intéresse ici au problème suivant :

On se donne un fermé de Zariski Z de X purement de dimension 1 tel que $Z(\mathbb{C})$ ne soit pas vide, et un compact $\mathcal{K}$ de $X(\mathbb{C})$ invariant par α. On suppose que pour tout $\sigma \in G_K$, le compact $\mathcal{K}_\sigma = X_\sigma(\mathbb{C}) \cap \mathcal{K}$ est à bord régulier (donc non vide) et est disjoint de $Z_\sigma(\mathbb{C})$.

Sous des conditions suffisantes (heuristiquement, on demande à $\mathcal{K}$ d'être assez «gros»), on cherche, pour tout ouvert U de $X(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{K}$, un point entier E sur $X - Z$, tel que $E_{\mathbb{C}}$ soit à support dans U, avec un contrôle de la hauteur de E.

Dans ce paragraphe et dans le suivant (4.7), on utilisera les notations suivantes :

Soit $Z_1; \ldots; Z_r$ les composantes de Z, avec $Z_1; \ldots; Z_q$ horizontales et $Z_{q+1}; \ldots; Z_r$ verticales. Pour $1 \leq i \leq q$, soit $g_{\mathcal{K};i}$ la fonction sur $X(\mathbb{C})$ égale à $g_{\mathcal{K}_\sigma;Z_{i\sigma}}$ sur $X_\sigma(\mathbb{C})$, et $\widehat{Z}_i = (Z_i; g_{\mathcal{K};i})$. Pour $q+1 \leq i \leq r$, on pose $\widehat{Z}_i = (Z_i; 0)$.

On note alors A la matrice $(r; r)$ de coefficients $[(\widehat{Z}_i.\widehat{Z_j})]$. A est symétrique réelle, à coefficients non diagonaux positifs (*cf* proposition 4.4.2).

Dans tout ce paragraphe, on suppose A définie négative. A^{-1} est alors à coefficients négatifs (cela se démontre comme le lemme 4.2.1). Soit R le vecteur colonne de i-ème coordonnée : $-[k(Z_i) : K]$ si $1 \leq i \leq q$, 0 si $q+1 \leq i \leq r$.

On note (λ_i) les coordonnées du vecteur $A^{-1}R$, et $d = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i [k(Z_i) : K]$. On a $\lambda_i > 0$ pour $1 \leq i \leq q$, et $\lambda_i \geq 0$ pour $q+1 \leq i \leq r$.

Théorème 4.6.1 : *On conserve les notations précédentes et l'hypothèse A définie négative. Soient U un ouvert de $X(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{K}$, $h_{\widehat{\mathcal{M}}}$ une assez bonne hauteur sur X, et $\epsilon > 0$. Alors $X - Z$ admet un point entier E tel que $E(\mathbb{C}) \subset U$ et que*

$$h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{r} \lambda_i (\widehat{\mathcal{M}}.\widehat{Z}_i) + \frac{1}{d} \deg(\mathcal{M}_K) + \epsilon \quad .$$

Démonstration :

Etape 1 : Quitte à restreindre U, on peut supposer U et $Z(\mathbb{C})$ disjoints. En utilisant la continuité de l'application $A \mapsto A^{-1}$ et la proposition 4.5.1, on peut se ramener au cas où pour tout $\sigma \in G_K$, $X_\sigma(\mathbb{C}) - \mathcal{K}_\sigma$ est connexe, ce que l'on suppose désormais.

On pose $N = [K : \mathbb{Q}]$, $\widehat{F} = \sum_{i=1}^{q} \widehat{Z}_i$, et $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{O}_X}(-\widehat{F})$. On pose aussi $T_0 = \max_{i;j} |(\widehat{Z}_i.\widehat{Z_j})|$, et $c_0 = N^{\frac{\deg(F_K)}{8rT_0}}$. Quitte à changer ϵ, on supposera $\epsilon \leq \frac{1}{2c_0}$ et $\epsilon \leq \frac{1}{6Nd}$.

D'après le théorème 4.5.2, il existe $\delta > 0$ ($\delta \leq \epsilon$) vérifiant la propriété suivante :

Soit $\widehat{\mathcal{L}}$ de la forme $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_X}\Big(\sum_{i=1}^{q} \beta_i \widehat{Z}_i + V\Big)$, avec $\beta_i \geq 1$ et V à composantes verticales. Posons $e = \deg(\mathcal{L}_K)$. Soit $u \in \Gamma(F_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{|F_{\mathbb{C}}})$ invariant par α, tel que $\forall P \in F(\mathbb{C})$ $\quad e^{-\delta e} \leq \|u(P)\| \leq e^{\delta e}$. Alors il existe $n \geq 1$ et $s \in \Gamma(X_{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{\mathbb{C}}^{\otimes n})$ invariant par α, tel que :

- $s_{|F_{\mathbb{C}}} = u^{\otimes n}$;
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad \|s(P)\| \leq e^{\epsilon e n}$;
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) - U \quad \|s(P)\| \geq e^{-\epsilon e n}$.

Etape 2 : On considère le système de $r - q$ équations à r inconnues $(\nu_1; \ldots ; \nu_r)$ suivant :

$$\forall i \in \{q+1; \ldots ; r\} \qquad \sum_{j=1}^{r} (\widehat{Z}_i . \widehat{Z}_j)\nu_j = 0 \quad .$$

Soient L l'espace des solutions dans $\mathbb{Q}^r$, et L_1 l'espace des solutions dans $\mathbb{R}^r$. Les coefficients de l'équation i sont tous des multiples entiers de $\ln N_{b_i}$ pour un $b_i \in \mathrm{Spec}(O_K)$. On en déduit que $L_1 = L \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Donc L est dense dans L_1. Or $(\lambda_1; \ldots ; \lambda_r) \in L_1$, et $\lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Donc, en notant $\eta = \frac{Nd\delta}{8rT_0}$, il existe $(\nu_1; \ldots ; \nu_r) \in L$ tel que $|\nu_i - \lambda_i| \leq \eta$ pour $1 \leq i \leq r$ et que $\frac{\lambda_i}{2} \leq \nu_i \leq 2\lambda_i$ pour $1 \leq i \leq q$. Alors, on a automatiquement $\nu_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq r$ (car $A[\nu_i]$ est à coordonnées négatives).

Soit $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $1 \leq i \leq r$, $n_0\nu_i$ soit un entier. D'après le lemme 4.2.2, il existe un diviseur effectif V_0 à composantes verticales et $n_1 \geq 1$ tels que le diviseur $n_1 \sum_{j=1}^{q} n_0 \nu_j Z_j + V_0$ soit ample.

Soit maintenant $(\nu'_{q+1}; \ldots ; \nu'_r)$ la solution du système suivant :

$$\forall i \in \{q+1; \ldots ; r\} \qquad \sum_{j=q+1}^{r} (Z_i . Z_j)\nu'_j = -(Z_i . V_0) \quad .$$

Alors chaque ν'_i est rationnel et positif. Soit $n_2 \geq 1$ tel que pour tout $q+1 \leq i \leq r$, $n_2 \nu'_i$ soit un entier. Soit $n_3 \geq n_1 n_2$ tel que $\frac{N\delta d n_0}{8 n_2} n_3 \geq (V_0 . F) + T_0 \sum_j \nu'_j$ et que $\frac{n_0 \epsilon}{n_2} n_3 \geq (V_0 . \mathcal{M}) + \sum_j \nu'_j (Z_j . \mathcal{M})$. On pose alors

$$\widehat{\mathcal{L}_1} = \widehat{\mathcal{O}_X}\Big(n_3 \sum_{j=1}^{q} n_0 \nu_j \widehat{Z_j} + n_2 V_0\Big) \ , \quad D = \sum_{j=q+1}^{r} (n_3 n_0 \nu_j + n_2 \nu'_j) Z_j \ , \quad \widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{L}_1} \otimes \widehat{\mathcal{O}_X}(D) \ .$$

On note également $e = \deg(\mathcal{L}_K) = n_3 n_0 \sum_{j=1}^{q} \nu_j [k(Z_j) : K]$.

Résumons les propriétés des objets construits :
- $\mathcal{L}_1$ est ample sur X ;
- Pour $1 \leq i \leq q$, on a $|h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Z_i) + n_0 n_3| \leq N e \frac{\delta}{2}$;
- Pour $q+1 \leq i \leq r$, on a $(\mathcal{L}.Z_i) = 0$;
- D est effectif de support $\bigcup_{i=q+1}^{r} Z_i$.

Pour démontrer la deuxième propriété, on écrit :

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Z_i) + n_0 n_3 [k(Z_i) : K] = n_0 n_3 \sum_{j=1}^{r} (\nu_j - \lambda_j)(\widehat{Z}_i.\widehat{Z}_j) + n_2 (V_0.Z_i) + n_2 \sum_{j=q+1}^{r} \nu'_j (\widehat{Z}_i.\widehat{Z}_j) \quad ,$$

puis on majore chaque terme :

$$\left| h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Z_i) + n_0 n_3 [k(Z_i) : K] \right| \leq n_0 n_3 \eta r T_0 + n_2 (V_0.F) + n_2 T_0 \sum_j \nu'_j \leq N e \frac{\delta}{2} \quad .$$

Etape 3 : On procède ici comme dans l'étape 3 de la démonstration du théorème 4.2.3 : $\mathcal{O}_X(-D)_{|D}$ est ample sur D, donc il existe $n_4 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_4$, on ait $H^1(D; \mathcal{O}_X(-nD - F)_{|D}) = 0$. On en déduit, pour tout $n \geq n_4$, les propriétés suivantes :
- Le morphisme $\Gamma(nD + F; \mathcal{O}^*_{nD+F}) \to \Gamma(n_4 D + F; \mathcal{O}^*_{n_4 D+F})$ est surjectif;
- Le morphisme $\mathrm{Pic}(nD + F) \to \mathrm{Pic}(n_4 D + F)$ est un isomorphisme.

D'après la proposition 1.2.5, $\mathrm{Pic}^0(n_4 D + F)$ est fini, donc il existe $n_5 \geq 1$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes n_5}_{|n_4 D+F} \simeq \mathcal{O}_{n_4 D+F}$. Alors, d'après la proposition 1.2.2 et l'étape 2, pour tout $n \geq n_4$, il existe $u_n \in \Gamma(n_5 n D + F; \mathcal{L}^{\otimes n_5 n}_{|n_5 n D+F})$ tel que u_n ne s'annule en aucun point de $n_5 n D + F$ et que

$$\forall P \in F(\mathbb{C}) \qquad \exp\left(-c + \frac{n_0 n_3 n_5}{N} n - n_5 n e \frac{\delta}{2}\right) \leq \|u_n(P)\| \leq \exp\left(c + \frac{n_0 n_3 n_5}{N} n + n_5 n e \frac{\delta}{2}\right) \quad ,$$

où $c \geq 0$ est une constante. On peut supposer $c \geq 1$.

Par l'amplitude de $\mathcal{L}_1$, on choisit $n_6 \geq n_4$ tel que pour tout $n \geq n_6$, on ait $H^1(X; \mathcal{L}_1^{\otimes n_5 n} \otimes \mathcal{N}) = 0$; on peut aussi supposer que $n_5 n_6 e \delta \geq 2c$ et $n_6 \geq 2g^1 - 1$. Alors, d'après l'étape 1, il existe $n_7 \geq 1$ et $s_0 \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes n_5 n_6 n_7})_{\mathbb{R}}$ tel que, en posant $m = n_5 n_6 n_7$, on ait :
- $s_{0|F_{\mathbb{C}}} = u_{\mathbb{C}}$;
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad \|s_0(P)\| \leq \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} m + m e \epsilon\right)$;
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) - U \quad \|s_0(P)\| \geq \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} m - m e \epsilon\right)$.

Soit $u \in \Gamma(mD + F; \mathcal{L}^{\otimes m}_{mD+F})$ ne s'annulant en aucun point de $mD + F$ et tel que $u_{|n_5 n_6 D+F} = u_{n_6}^{\otimes n_7}$.

Par ailleurs, on a la suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules libres suivante :

$$0 \to \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N}) \to \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes m}) \to \Gamma(mD+F; \mathcal{L}^{\otimes m}_{|mD+F}) \to 0 \quad .$$

Il existe donc $s_1 \in \Gamma(X; \mathcal{L}^{\otimes m})$ tel que $s_{1|mD+F} = u$. Alors $s_1 - s_0 \in \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{R}}$. Par densité de $\Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{Q}}$ dans $\Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{R}}$, il existe $s_2 \in \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{Q}}$ tel que, en posant $s = s_1 + s_2$, on ait :
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) \quad \|s(P)\| \leq \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} m + 2me\epsilon\right)$;
- $\forall P \in X(\mathbb{C}) - U \quad \|s(P)\| \geq \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} m - 2me\epsilon\right)$.

s est une section rationnelle de $\mathcal{L}^{\otimes m}$.

Etape 4 : D'après l'étape 1, $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m}$ s'écrit $\widehat{\mathcal{L}}^{\otimes m} = \widehat{\mathcal{O}_X}\left(\sum_{i=1}^{k} \widehat{D_i}\right)$, où pour chaque i, $\widehat{D_i}$ est l'un des $\widehat{Z_j}$ (pour un $j \in \{1; \ldots; r\}$) ou bien l'une des composantes (verticales) de V_0. Pour $a \geq 0$ et $1 \leq b \leq k$, on pose

$$\Gamma_{ak+b} = \Gamma\left(X; \mathcal{L}^{\otimes ma}\left(\sum_{i=1}^{b} D_i\right)\right) \qquad \text{et} \qquad \Gamma'_{ak+b} = \Gamma\left(D_b; \mathcal{L}^{\otimes ma}\left(\sum_{i=1}^{b} D_i\right)_{|D_b}\right) \quad .$$

Pour tout $n \geq k+1$, on a les suites exactes suivantes :

$$0 \to \Gamma_{n-1} \to \Gamma_n \to \Gamma'_n \qquad \text{et} \qquad 0 \to \Gamma_{n-1\mathbb{Q}} \to \Gamma_{n\mathbb{Q}} \to \Gamma'_{n\mathbb{Q}} \to 0 \quad .$$

Soit $(f_{k;i})_i$ une $\mathbb{Q}$-base de $\Gamma_{k\mathbb{Q}}$ contenue dans Γ_k. Pour tout $k+1 \leq n \leq 2k$, soit $(f_{n;i})_i$ des éléments de Γ_n dont les images dans $\Gamma'_{n\mathbb{Q}}$ en forment une $\mathbb{Q}$-base.

Posons $T_1 = \max\limits_{P \in X(\mathbb{C})} \sum_{b=k}^{2k} \sum_j \|f_{b;j}(P)\|$, et $T_2 = \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} m - 2me\epsilon\right)$. On a $3Ne\epsilon \leq n_0 n_3$, donc $T_2 > 1$. Soit $v \geq 1$ tel que $T_2^v \geq \frac{2T_1}{T_2 - 1}$.

D'après l'étape 3, on a $s = s_1 + s_2$, avec $s_1 \in \Gamma_k$ et $s_2 \in \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})_{\mathbb{Q}}$. Donc s_2 s'écrit $s_2 = \frac{1}{Q} s_3$, avec $s_3 \in \Gamma(X; \mathcal{L}_1^{\otimes m} \otimes \mathcal{N})$ et $Q \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$s^{\otimes n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{C_n^i}{Q^i} s_1^{\otimes(n-i)} \otimes s_3^{\otimes i} \quad .$$

A $i \geq 1$ fixé, $\frac{C_n^i}{Q^i}$ est un polynôme en n à coefficients rationnels et admettant 0 comme racine. Il existe donc $w \geq 1$ tel que pour tout $i \in \{1; \ldots; mv\}$, $\frac{C_w^i}{Q^i}$ soit un entier. Alors, en posant

$$s' = \sum_{i=0}^{v-1} \frac{C_w^i}{Q^i} s_1^{w-i} s_3^i \qquad \text{et} \qquad t = \sum_{i=v}^{w} \frac{C_w^i}{Q^i} s_1^{w-i} s_3^i$$

(les produits et puissances sont ici tensoriels), on a $s^{\otimes w} = s' + t$, avec $s' \in \Gamma_{wk}$, $s'_{|mD+F} = u^{\otimes w}$, et $t \in \Gamma_{(w-v)k\mathbb{Q}}$.

On construit 3 suites (s'_i), (t_i), (t'_i) par récurrence descendante sur i :

On pose $t_{wk-vk} = t_n \in \Gamma_{wk-vk\mathbb{Q}}$. Soit $i \in \{k+1; \ldots ; wk - vk\}$. On écrit i sous la forme $i = ak + b$, avec $a \geq 1$ et $1 \leq b \leq k$. On a 2 cas :

- Si D_b est vertical, alors $\Gamma_{i-1\mathbb{Q}} = \Gamma_{i\mathbb{Q}}$. On pose donc $s'_i = 0$, $t'_i = 0$, et $t_{i-1} = t_i$.

- On suppose maintenant D_b horizontal. $u^{1-a}_{|D_b} \otimes t_{i|D_b}$ est un élément de $\Gamma'_{k+b\mathbb{Q}}$ ($u^{-1}_{|D_b}$ est une section bien définie de $\mathcal{L}^{\otimes -m}_{|D_b}$ car u est partout non nulle le long de D_b), donc il s'écrit $\sum\limits_j z_j f_{k+b;j|D_b}$ avec les z_j rationnels. Soit z'_j l'entier le plus proche de z_j. On pose alors $s'_i = s_1^{a-1} \sum\limits_j z'_j f_{k+b;j}$, $t'_i = s^{a-1} \sum\limits_j (z_j - z'_j) f_{k+b;j}$, et $t_{i-1} = t_i - s'_i - t'_i$. On a $s'_i \in \Gamma_i$, $t'_i \in \Gamma_{i\mathbb{Q}}$, et $t_{i-1}|D_b = 0$ dans $\Gamma'_{i\mathbb{Q}}$ donc $t_{i-1} \in \Gamma_{i-1\mathbb{Q}}$. On remarque aussi que $\|t'_i\| \leq \|s\|^{a-1} \frac{1}{2} \sum\limits_j \|f_{k+b;j}\|$.

On a $t_k \in \Gamma_{k\mathbb{Q}}$, donc t_k s'écrit $t_k = \sum\limits_j z_j f_{k;j}$ avec les z_j rationnels. Soit z'_j l'entier le plus proche de z_j. On pose $s'_k = \sum\limits_j z'_j k_{k;j}$, et $t'_k = t_k - s'_k$.

On pose finalement $\tilde{s} = s' + \sum\limits_{i=k}^{wk-vk} s'_i$. $\tilde{s}$ est une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes mw}$.

On a alors $s^{\otimes w} - \tilde{s} = \sum\limits_{i=k}^{wk-vk} t'_i$, donc :

$$\|s^{\otimes w} - \tilde{s}\| \leq T_1 \sum_{a=1}^{w-v-1} \|s\|^{a-1} \|1\|^{w-v-1-a} \leq T_1 \sum_{a=0}^{w-v-2} \|s\|^a \quad ,$$

où 1 est une section globale de $\mathcal{L}^{\otimes m}$.

- Soit $P \in X(\mathbb{C}) - U$. Alors on a $\|s^{\otimes w}(P) - \tilde{s}(P)\| \leq \frac{T_1}{T_2 - 1} T_2^{-v} \|s(P)\|^w \leq \frac{1}{2} \|s(P)\|^w$. Donc $\|\tilde{s}(P)\| \geq \frac{1}{2} \|s(P)\|^w > 0$. On en déduit que $\tilde{s}_{\mathbb{C}}$ ne s'annule en aucun point de $X(\mathbb{C}) - U$.

- Soit $P \in X(\mathbb{C})$. On a, de manière similaire, $\|s^{\otimes w}(P) - \tilde{s}(P)\| \leq \frac{1}{2} \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} mw + 2mwe\epsilon\right)$. On en déduit

$$\|\tilde{s}(P)\| \leq \frac{3}{2} \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} mw + 2mwe\epsilon\right) \leq \exp\left(\frac{n_0 n_3}{N} mw + 3mwe\epsilon\right) \quad .$$

- Enfin, on a $\tilde{s}_{|mD+F} = s'_{|mD+F} = u^{\otimes w}$, et $mD + F$ est de support Z.

Etape 5 : On écrit $div(\tilde{s}) = \sum_i l_i W_i + \sum_j p_j E_j$ avec les W_i premiers verticaux et les E_j premiers horizontaux. Soient j_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E_{j_0}) = \min_j h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E_j)$, et $E = E_{j_0}$. Alors, d'après l'étape 4, E et Z sont disjoints, et $E(\mathbb{C}) \subset U$. On écrit alors, comme dans l'étape 5 de la démonstration du théorème 4.2.3 :

$$mw(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{M}}) \geq h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E)mwe - \int_{X(\mathbb{C})} \ln \|\tilde{s}\| \omega_{\widehat{\mathcal{M}}} \quad .$$

Après simplifications, en posant $c_1 = \frac{Nd}{8rT_0}$ et $c_2 = 3\deg(\mathcal{M}_K)N$, on obtient :

$$h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) \leq \frac{n_0 n_3}{e}\Big[\deg(\mathcal{M}_K) + \epsilon + \sum_{i=1}^{r} \nu_i(\widehat{\mathcal{M}}.\widehat{Z}_i)\Big] + c_2\epsilon \quad ,$$

avec $|\nu_i - \lambda_i| \leq c_1\epsilon$ et $\left|\frac{e}{n_0 n_3} - d\right| \leq c_0 d\epsilon$. On en déduit le théorème. □

Remarque 4.6.2 : En vertu de la proposition 2.3.2, la condition A définie négative est équivalente à $\det(-A) > 0$.

B.4.7 L'équidistribution dans le cas critique

On conserve les notations du paragraphe 4.6 concernant X, Z, $\mathcal{K}$, les $\widehat{Z}_i$, A. On suppose maintenant A négative non définie, et le morphisme $X - Z \to B = \mathrm{Spec}(O_K)$ surjectif. La matrice A étant à coefficients non diagonaux positifs, il existe alors un vecteur colonne $[\lambda_i]$ dans $Ker(A) - \{0\}$ tel que : $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1;\ldots;r\}$ (c'est une conséquence du théorème de Frobenius). On pose $d = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i [k(Z_i) : K] > 0$.

Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite injective de points entiers sur $X - Z$ vérifiant :
Pour tout ouvert U de $X(\mathbb{C})$ contenant $\mathcal{K}$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait $E_n(\mathbb{C}) \subset U$.

On pose $e_n = \deg(E_{nK})$. On note $\mu_{\mathcal{K};i}$ la mesure sur $X(\mathbb{C})$ égale, sur chaque $X_\sigma(\mathbb{C})$, à $\mu_{\mathcal{K}_\sigma;Z_{i\sigma}}$. La proposition suivante est une généralisation du théorème d'équidistribution de Bilu [7] (*cf* aussi [38]) :

Proposition 4.7.1 : *Avec les notations précédentes, et sous les hypothèses $X - Z \to B$ surjectif et A négative non définie, la suite de mesures $\left(\frac{1}{e_n}\delta_{E_n\mathbb{C}}\right)$ converge faiblement vers $\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mu_{\mathcal{K};i}$.*

Démonstration : Posons $\nu_n = \frac{1}{e_n}\delta_{E_n\mathbb{C}}$, et $\nu_\infty = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{q}\lambda_i\mu_{\mathcal{K};i}$. On s'inspire de la démonstration de la proposition 4.1.4 : Soit f une fonction C^∞ sur $X(\mathbb{C})$, et soit $\epsilon > 0$.

Soient (a_i) des rationnels tels que :

- Pour tout $i \in \{1;\ldots;r\}$, on ait $\left|a_i - \frac{\lambda_i}{d}\right| \leq \epsilon$ et $a_i \geq 0$;
- On ait $\sum_{i=1}^{q} a_i[k(Z_i) : K] = 1$.

Soit $n_1 \geq 1$ tel que pour tout $1 \leq i \leq r$, $n_1 a_i$ soit un entier. On pose $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_X}\left(\sum_{i=1}^{r} n_1 a_i \widehat{Z}_i\right)$. On pose aussi $T_0 = \max_{i;j}|(\widehat{Z}_i.\widehat{Z_j})|$, $T_1 = \sum_{i=1}^{q}\int |f|\mu_{\mathcal{K};i}$, et $c_0 = r^2T_0 + T_1 + \frac{1}{2}\|f\|^2_{Dir}$.

L'hypothèse vérifiée par la suite (E_n) implique que : $\lim_n h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E_n) = 0$. Soit maintenant $t \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathcal{L}}_t = \widehat{\mathcal{L}} \otimes \widehat{\mathcal{O}_X}(0;tf)$. Alors, d'après la proposition 4.1.1, on a : $\liminf h'_{\widehat{\mathcal{L}}_t}(E_n) \geq \frac{(\widehat{\mathcal{L}}_t.\widehat{\mathcal{L}}_t)}{2n_1}$. En explicitant les deux membres (*cf* proposition 2.5.3), et en utilisant l'inégalité $|(\widehat{\mathcal{L}}.\widehat{\mathcal{L}})| \leq r^2T_0n_1^2\epsilon^2$, on trouve

$$\liminf_{n\to+\infty}\left(t\int_{X(\mathbb{C})} f\nu_n\right) \geq -r^2T_0n_1\epsilon^2 + t\sum_{i=1}^{q}\int_{X(\mathbb{C})} f a_i\mu_{\mathcal{K};i} - \frac{t^2}{2n_1}\|f\|^2_{Dir} \quad .$$

En choisissant $t = n_1\epsilon$, on obtient : $\liminf \int f\nu_n \geq \int f\nu_\infty - c_0\epsilon$.
En choisissant $t = -n_1\epsilon$, on obtient : $\limsup \int f\nu_n \leq \int f\nu_\infty + c_0\epsilon$.
D'où le résultat. □

Remarque 4.7.2 : Dans la proposition 4.7.1, l'hypothèse $\det(A) = 0$ est suffisante, car $X - Z \to B$ est alors surjectif (*cf* remarque 4.2.4), et on montre aisément, à l'aide de la proposition 4.1.1, que l'existence de la suite (E_n) implique la négativité de A.

Chapitre C

Les dimensions supérieures

Un résumé du chapitre

Dans tout ce chapitre, les faisceaux inversibles hermitiens considérés sont supposés C^∞ (*cf* Remarque A.2.1).

On commence par quelques rappels de la théorie des hauteurs (paragraphe 1.1) développée par Bost, Gillet et Soulé.

On démontre ensuite le théorème de Rumely effectif (théorème 2.1.3), par récurrence sur la dimension de Y. L'ingrédient clef est alors le théorème d'amplitude arithmétique de Zhang (théorème 2.1.1) ; on obtient un diviseur vérifiant de bonnes propriétés d'horizontalité, et de hauteur majorée (*cf* proposition 2.1.2). Cette preuve s'inspire des travaux de Moret-Bailly [30] et d'Ullmo [42].

On en déduit une application aux schémas abéliens (proposition 2.2.1).

Ensuite, on donne un théorème de Bertini arithmétique (théorème 3.3.3). L'idée de la démonstration est d'utiliser la dualité entre points entiers et hyperplans dans l'espace projectif. Par les théorèmes de Bertini classiques (théorème 3.1.1), on voit que les propriétés que l'on veut conserver sont «génériquement vraies» et constructibles, donc vraies sur un ouvert adéquat de l'espace projectif dual (*cf* proposition 3.2.1). Il suffit alors de prendre un point entier (donné par le théorème 2.1.3) sur cet ouvert et d'utiliser la dualité.

Enfin, on démontre, à l'aide du théorème 2.1.3, une version effective d'un résultat de Skolem (proposition 4.1.1), ainsi qu'un résultat d'existence de «petites» solutions d'une équation diophantienne (proposition 4.2.1).

C.1 Les préliminaires

C.1.1 Un peu de théorie des hauteurs

Soit X une variété arithmétique de dimension $d \geq 1$. Pour $0 \leq p \leq d$, on désigne par $Z_p(X)$ le groupe des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de sous-schémas fermés intègres de dimension p. On définit aussi (*cf* [20] p. 485, [9] p. 933) le groupe de Chow arithmétique de dimension p, noté $\widehat{CH}_p(X)$.

Soit $\widehat{D} \in \widehat{CH}_0(X)$. On lui associe un réel $\widehat{\deg}(\widehat{D})$, appelé le **degré arithmétique** de $\widehat{D}$, défini de la manière suivante :

$\widehat{D}$ s'écrit $\widehat{D} = \left(\sum_{i=1}^{r} n_i[x_i]; \mu\right)$ pour un $r \geq 1$, des points fermés x_i de X, des $n_i \in \mathbb{Z}$, et un $(d-1; d-1)$-courant μ sur $X(\mathbb{C})$. On note $k(x_i)$ le corps résiduel en x_i. On pose alors

$$\widehat{\deg}(\widehat{D}) = \sum_{i=1}^{r} n_i \ln \#k(x_i) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} \mu \quad .$$

On définit ainsi un morphisme de groupes $\widehat{\deg} : \widehat{CH}_0(X) \to \mathbb{R}$. Cette définition du degré arithmétique est bien sûr compatible avec celle donnée au paragraphe B.1.1.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on se fixe une variété arithmétique X de dimension $d \geq 1$ et $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$. Rappelons que l'on note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ la forme de courbure de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$ (*cf* paragraphe A.2).

Pour $1 \leq p \leq d$, on définit la première classe de Chern arithmétique $\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}}) : \widehat{CH}_p(X) \to \widehat{CH}_{p-1}(X)$, qui est un morphisme de groupes. Celui-ci est caractérisé par la propriété suivante :

Si Z est un fermé intègre de X, g un courant de Green pour Z, et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{|Z}$ sur Z, alors on a

$$\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})(Z; g) = \left(div(s); \omega_{\widehat{\mathcal{L}}} \wedge g - 2\ln \|s_{\mathbb{C}}\| \delta_{Z_{\mathbb{C}}}\right) \quad .$$

Soit maintenant $p \in \{0; \ldots; d\}$, et $D \in Z_p(X)$. Soit g un courant de Green pour D. Le réel

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \widehat{\deg}\left[\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})^p(D; g) - (0; \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{\wedge p} \wedge g)\right]$$

ne dépend pas du choix de g. On l'appelle la **hauteur** de D relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$. Cette définition est compatible avec celle donnée au paragraphe B.2.5.

Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension p tel que $\deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(Y_\mathbb{Q}) > 0$. La **hauteur normalisée** de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{\deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(Y_\mathbb{Q})p} \quad .$$

Pour obtenir la compatibilité de cette définition avec celle utilisée au chapitre B (*cf* paragraphe B.4.1), il faut normaliser cette dernière par un facteur $[K : \mathbb{Q}]$.

Proposition 1.1.1 : *Soient Y un fermé intègre de dimension p, n un entier ≥ 1, et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}$ sur Y. Alors on a*

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(div(s)) - \int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_\mathbb{C}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1}$$

(On convient que l'intégrale est nulle si Y est vertical).

Démonstration : C'est la proposition 3.2.1 (iv) de [9] p. 949. En fait, cela découle de la propriété caractéristique de $\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})$. □

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne un fermé intègre horizontal Y de dimension p.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})_\mathbb{R}$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}|Y_\mathbb{C}}$ sur $Y(\mathbb{C})$ invariantes par conjugaison complexe. Il est naturellement muni de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par $\|s\|_\infty = \max_{P \in Y(\mathbb{C})} \|s(P)\|$.

Lemme 1.1.2 : *On suppose $\mathcal{L}$ ample et $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ semi-positive. Soient $n \geq 1$, et $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) - \{0\}$. On écrit $div(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$, avec les F_i intègres horizontaux et les V_j intègres verticaux.*

Alors il existe i_0 tel que $(p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p + \frac{1}{n} \ln \|s_\mathbb{C}\|_\infty$.

Démonstration : Soit i_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) = \min_i h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_i)$. On a alors :

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(div(s)) = \sum_i m_i h_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_i) + \sum_j l_j h_{\widehat{\mathcal{L}}}(V_j)$$

$$\geq (p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \sum_i m_i \deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(F_i) = (p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \deg_{\mathcal{L}_\mathbb{Q}}(Y_\mathbb{Q})n \quad .$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1} \leq \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \int_{Y(\mathbb{C})} \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1} = \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}}) \quad .$$

On utilise alors la proposition 1.1.1 pour conclure. □

Définition : On dit que $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est une **bonne hauteur** lorsque $\mathcal{L}$ est ample et $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ semi-positive. On pose alors $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \inf_E h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)$, où E parcourt l'ensemble des points entiers sur Y. C'est un réel (*cf* [9] p. 954).

C.1.2 Quelques résultats

Voici quelques résultats dont on aura besoin dans la suite. On commence par quelques rappels sur la constructibilité (*cf* aussi [22] p. 2-4 et 36).

Pour un schéma T de type fini sur un corps, notons $\overline{n}(T)$ le nombre géométrique de composantes irréductibles de T sur ce corps.

Définition : Soit X un schéma noethérien. Une partie W de X est **constructible** lorsqu'elle peut s'écrire $W = \bigcup_{i=1}^{r} (U_i \cap F_i)$, avec un $r \geq 1$, des ouverts U_i et des fermés F_i.

L'ensemble des parties constructibles de X est stable par réunion finie, intersection finie, et passage au complémentaire.

Proposition 1.2.1 : *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre schémas noethériens, et soit $n_0 \geq 1$.*

α) Alors l'ensemble des $y \in Y$ tels que la fibre $f^{-1}(y) = X_y$ soit lisse sur $k(y)$, est constructible.

β) De même, l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\overline{n}(X_y) = n_0$ est constructible. En particulier, l'ensemble des $y \in Y$ tels que X_y soit géométriquement irréductible sur $k(y)$, est constructible.

Démonstration : cf [21] p. 82 et 94. □

On note $B_0 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Par ailleurs, on convient que le mot «composante» sous-entend «composante irréductible».

Proposition 1.2.2 : *Soit Y un schéma projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, purement de dimension $p \geq 1$. Alors il existe un fermé F horizontal purement de dimension 1 tel que :*

- *Tout fermé irréductible vertical de dimension $p-1$ (ie toute composante de chaque fibre spéciale du morphisme $Y \to B_0$) rencontre F ;*
- *Chaque composante de Y contienne une composante de F.*

Démonstration : Il existe un corps de nombres K tel que les composantes $Z_1; \dots; Z_r$ de Y_K soient géométriquement irréductibles sur K. On pose $B = \mathrm{Spec}(O_K)$. Le changement de base $p : B \to B_0$ induit un morphisme $p_1 : Y_{O_K} \to Y$. Soit Y'_i l'adhérence de Z_i dans Y_{O_K}. Alors $Y'_1; \dots; Y'_r$ sont les composantes de Y_{O_K}.

Par constructibilité (*cf* proposition 1.2.1 β), il existe un ensemble fini A de B tel que, pour tout $i \in \{1; \dots; r\}$ et tout $b \in B - A$, la fibre Y'_{ib} de Y'_i au-dessus de b soit géométriquement irréductible sur $k(b)$. Soit x_i un point fermé de Z_i.

Soit F_1 l'adhérence de $\{p_1(x_1); \dots; p_1(x_r)\}$ dans Y. Chaque composante de Y contient alors une composante de F_1. De plus, pour tout $b \in B_0 - p(A)$, chaque composante de la fibre Y_b rencontre F_1.

Il reste à traiter le cas de l'ensemble fini J des composantes des fibres de Y au-dessus des points de $p(A)$. Pour $V \in J$, soient x_V un point fermé de V, et E_V un fermé irréductible horizontal de dimension 1 passant par x_V.

Le fermé $F = F_1 \cup \bigcup_{V \in J} E_V$ convient alors pour la proposition. □

Proposition 1.2.3 : *Soit F un schéma réduit, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, purement de dimension 1. Il existe alors c et $n_0 \geq 1$ vérifiant :*

Pour tout $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(F)$ et tout $n \geq 1$, il existe $u \in \Gamma(F; \mathcal{L}^{\otimes n_0 n})$ ne s'annulant pas sur F, tel que $\|u_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{c - a n_0 n}$, où $a = \min_C h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(C)$, C parcourant les composantes intègres de F.

Démonstration : Comme $\mathrm{Pic}(F)$ est fini (*cf* proposition B.1.2.5), il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(F)$, on ait $\mathcal{L}^{\otimes n_0} \simeq \mathcal{O}_F$. On applique alors la proposition B.1.2.2. □

On rappelle ensuite la proposition suivante, due à Zhang (c'est une généralisation de la proposition B.3.1.3) :

Proposition 1.2.4 : *Soient X une variété complexe projective lisse, purement de dimension $d \geq 1$, et $\widehat{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible hermitien sur X tel que $\mathcal{L}$ soit ample et que la courbure de $\widehat{\mathcal{L}}$ soit semi-positive. Soient Y et Z deux fermés de Zariski de X, avec $Z \subset Y$. Soit enfin $t \in \Gamma(Z; \mathcal{L}_{|Z})$, et $\epsilon > 0$.*

Alors, pour tout n assez grand, il existe $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tel que $s_{|Z} = t^{\otimes n}$ et que $\|s\|_\infty \leq e^{\epsilon n} \|t\|_\infty^n$.

S'il existe une variété algébrique réelle X' projective lisse telle que $X = X'_{\mathbb{C}}$, et si $\widehat{\mathcal{L}}$, Y, Z, t sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer à s de l'être aussi.

Démonstration : D'après le théorème 3.5 (1) de [44] p. 200, $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}|Y_{\mathbb{C}}}$ est «semi-ample» (au sens de Zhang) sur $Y_{\mathbb{C}}$. On applique alors le théorème 3.3 de [44] p. 198. □

Terminons ce paragraphe par l'énoncé du critère de platitude par fibres :

Proposition 1.2.5 : *Soient $f : X \to Y$ et $h : Y \to B$ des morphismes entre schémas noethériens, et $x \in X$. On pose $g = h \circ f$, $y = f(x)$, $b = h(y) = g(x)$, et $f_b : X_b \to Y_b$ le morphisme induit par f entre les fibres au-dessus de b. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*
- g est plat en x et f_b est plat en x ;
- h est plat en y et f est plat en x.

Démonstration : cf [21] p.138. □

C.2 Le théorème de Rumely effectif

C.2.1 Le théorème

Dans tout ce qui suit, X est une variété arithmétique de dimension $d \geq 2$. C'est l'espace ambiant dans lequel on travaille par la suite. On se donne aussi $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ tel que $\mathcal{L}$ soit ample et que la courbure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ soit semi-positive.

Soit enfin Y un fermé intègre horizontal de dimension p. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y})_{\mathbb{R}}$ est muni de la norme $\| \ \|_\infty$ (*cf* paragraphe 1.1 pour les définitions de $\| \ \|_\infty$ et de $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)$).

Rappelons le résultat suivant, dû à Zhang (ce résultat généralise le théorème B.3.1.2) :

Théorème 2.1.1 : *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\mathcal{O}_Y$, et soit $\epsilon > 0$. Posons $\Gamma_n = \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y} \otimes \mathcal{I})$. L'injection $\Gamma_n \hookrightarrow \Gamma(Y; \mathcal{L}^{\otimes n}_{|Y})$ munit naturellement l'espace $\Gamma_{n\mathbb{R}}$ de la norme $\| \ \|_\infty$.*

Alors, pour tout n assez grand, il existe une base $(s_1; \ldots; s_N)$ du $\mathbb{Z}$-module libre Γ_n telle que

$$\forall i \in \{1; \ldots; N\} \qquad \|s_{i\mathbb{C}}\|_\infty \leq \exp\Big(-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) n + \epsilon n\Big) \quad .$$

Démonstration : C'est une variante du corollaire 4.8 de [44] p. 207. □

Proposition 2.1.2 : *Soient Y un fermé intègre horizontal de dimension $p \geq 2$, et Z un fermé horizontal de Y purement de dimension $p-1$. Soit $\epsilon > 0$.*

Il existe $n \geq 1$ et $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tels que :
- Le schéma des zéros de $s_{|Z}$ soit horizontal purement de dimension $p-2$;
- On ait $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq \exp\Big(-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n + \epsilon n\Big)$.

Démonstration : D'après la proposition 1.2.2, il existe un fermé F de Z horizontal purement de dimension 1 tel que :
- Tout fermé irréductible vertical de Z de dimension $p-2$ rencontre F ;
- Chaque composante de Z contienne une composante de F.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal définissant F dans Y. Posons $\Gamma_n = \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I})$. Par amplitude de $\mathcal{L}_{|Y}$, on a, pour tout n assez grand, la suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules libres suivante :

$$0 \to \Gamma_n \to \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) \to \Gamma(F; \mathcal{L}_{|F}^{\otimes n}) \to 0 \quad . \qquad (*)$$

D'après la proposition 1.2.3, il existe $n_1 \geq 1$ et $u \in \Gamma(F; \mathcal{L}_{|F}^{\otimes n_1})$ ne s'annulant pas sur F, et tel que $\|u_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 + \epsilon n_1}$.

D'après la proposition 1.2.4, il existe $v \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n_1 n})_{\mathbb{R}}$ tel que $v_{|F_{\mathbb{C}}} = u_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ et que $\|v\|_\infty \leq e^{\epsilon n}\|u_{\mathbb{C}}\|_\infty^n$.

Par ailleurs, d'après la suite exacte $(*)$, il existe $t \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n_1 n})$ tel que $t_{|F} = u^{\otimes n}$. Alors $(v - t_{\mathbb{C}})_{|F_{\mathbb{C}}} = 0$ donc $v - t_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{n\mathbb{R}}$.

D'après le théorème 2.1.1, il existe $s' \in \Gamma_n$ tel que l'on ait la majoration :
$\|v - t_{\mathbb{C}} - s'_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 n + \epsilon n_1 n}$.

On pose $s = s' + t$. On a alors $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 n + 3\epsilon n_1 n}$. Et par construction de F, le schéma des zéros de $s_{|Z}$ ne contient pas de composante de Z et n'a pas de composante verticale. □

Théorème 2.1.3 : *Soient Y un fermé intègre horizontal de dimension $p \geq 2$, et Z un fermé de Y ne contenant aucun fermé irréductible vertical de dimension $p-1$. Soient $\epsilon > 0$, et $\mathcal{Y}_\epsilon$ l'ensemble des points fermés x de $Y_{\mathbb{Q}}$ tels que l'adhérence $E = \overline{\{x\}}$ (dans Y) soit un point entier sur $Y - Z$ vérifiant $h'_{\hat{\mathcal{L}}}(E) \leq h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$.*

Alors $\mathcal{Y}_\epsilon$ est Zariski-dense dans $Y_{\mathbb{Q}}$ (donc infini).

Démonstration : Montrons d'abord qu'il existe un point entier E sur $Y - Z$ tel que

$$h'_{\hat{\mathcal{L}}}(E) \leq h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon \quad . \qquad (1)$$

Quitte à l'agrandir, on peut supposer Z horizontal purement de dimension $p-1$. On procède alors par récurrence sur p :

Supposons $p=2$. La proposition 2.1.2 fournit une section $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) - \{0\}$ telle que $div(s)$ et Z soient disjoints et que $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n+\epsilon n}$. On écrit $div(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$, avec les F_i intègres horizontaux et les V_i intègres verticaux. D'après le lemme 1.1.2, il existe i_0 tel que $h'_{\hat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leq 2h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) - A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$. Donc $E = F_{i_0}$ convient.

Supposons maintenant $p \geq 3$. D'après la proposition 2.1.2, il existe $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tel que :
- Le schéma des zéros de $s_{|Z}$ soit horizontal purement de dimension $p-2$;
- On ait $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leq e^{-A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)n+\epsilon n/2}$.

On écrit $div(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$. D'après le lemme 1.1.2, il existe i_0 tel que $(p-1)h'_{\hat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leq h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)p - A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) + \frac{\epsilon}{2}$.

On pose $Y' = F_{i_0}$ et $Z' = Z \cap F_{i_0}$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe un point entier E sur $Y' - Z'$ tel que $h'_{\hat{\mathcal{L}}}(E) \leq (p-1)h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y') - (p-2)A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y') + \frac{\epsilon}{2}$. Alors E est un point entier sur $Y - Z$, et sachant que $A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y') \geq A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)$, on obtient $h'_{\hat{\mathcal{L}}}(E) \leq h'_{\hat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\hat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$.

D'où le résultat.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $\mathcal{Y}_\epsilon$ n'est pas Zariski-dense dans $Y_{\mathbb{Q}}$. En appliquant ce qui précède à $Z' = Z \cup \overline{\mathcal{Y}_\epsilon}$, on voit que $Y - Z$ admet un point entier E vérifiant l'inégalité (1) et de point générique non contenu dans $\mathcal{Y}_\epsilon$. D'où une contradiction.
□

C.2.2 Une application aux schémas abéliens

Soient X un schéma abélien sur O_K de dimension $d \geq 2$, et $e \in X(O_K)$ sa section neutre. On pose $B = \mathrm{Spec}(O_K)$. Pour tout entier non nul m, on note $[m] : X \to X$ le morphisme de multiplication par m.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur X, symétrique (*ie* $[-1]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ sur X), et rigidifié (*ie* $e^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_B$ sur B). Par le théorème du cube, on en déduit naturellement, pour tout $m \neq 0$, un isomorphisme $[m]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes m^2}$ sur X.

Posons $A = X_K$ et $L = \mathcal{L}_K$. Pour un point fermé x de A, on note $\tilde{h}_L(x)$ la hauteur de Néron-Tate de x relativement à L.

Proposition 2.2.1 : *Soit U un ouvert de X tel que l'application $U \to B$ soit surjective. Soient $\epsilon > 0$, et $\mathcal{A}_\epsilon$ l'ensemble des points fermés x de A vérifiant : $\tilde{h}_L(x) \leq \epsilon$ et l'adhérence $\overline{\{x\}}$ dans X est un point entier sur U.*

Alors $\mathcal{A}_\epsilon$ est Zariski-dense dans A.

Démonstration : Il existe, d'après [28] p. 50-52, une unique famille C^∞ de normes hermitiennes $\| \ \|$ sur $\mathcal{L}_\mathbb{C}$ à courbure invariante par translations (*ie* une «métrique du cube»), telle que pour tout $m \neq 0$, l'isomorphisme $[m]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes m^2}$ devienne une isométrie.

On pose $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \ \|)$. Si x est un point fermé de A et E est l'adhérence $\overline{\{x\}}$ dans X, alors on a $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) = \tilde{h}_L(x)$ (*cf* [1] p. 150). En particulier, on a $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = 0$. Par ailleurs, on a $h_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = 0$ (*cf* [40] p. 344). Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.1.3. □

C.3 Une application : Bertini arithmétique

C.3.1 Le théorème de Bertini classique

Lorsque A est un anneau et M un A-module localement libre de rang fini $r+1$, on notera $\mathbf{P}(M)$ le A-schéma $\mathrm{Proj}[\mathrm{Sym}(M)]$.

Soient donc A un anneau, et M un A-module localement libre de rang $r+1$. On pose $B = \mathrm{Spec}(A)$, $\mathbb{P} = \mathbf{P}(M)$, et $\mathbb{P}^\vee = \mathbf{P}(M^\vee)$. Soit $\mathbb{H} \subset \mathbb{P} \times_B \mathbb{P}^\vee$ l'hyperplan universel (pour des précisions sur ses propriétés, on pourra consulter [14] p. 122-124, ainsi que [15] p. 306-307). On a la propriété universelle suivante :

Pour tout A-schéma T, l'ensemble $\mathbb{P}(T)$ des A-points de $\mathbb{P}$ à valeurs dans T est en bijection avec l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^\vee_T$, par l'application qui à $\phi : T \to \mathbb{P}$ associe $\mathbb{H}_\phi = \mathbb{H} \times_\mathbb{P} T$.

Voici maintenant le théorème de Bertini «générique» dont on aura besoin dans la suite :

On suppose que $A = k$ est un corps (M est alors un k-espace vectoriel de dimension $r+1$). Soit $X \subset \mathbb{P}^\vee$ un sous-schéma fermé purement de dimension $d \geq 2$.

On pose $\mathbb{H}' = \mathbb{H} \times_{\mathbb{P}^\vee} X = \mathbb{H} \cap (\mathbb{P} \times_k X)$ (intersection dans $\mathbb{P} \times_k \mathbb{P}^\vee$), et $\pi : \mathbb{H}' \to \mathbb{P}$ le morphisme induit par la première projection. Pour $\phi \in \mathbb{P}(k)$, on a $\mathbb{H}'_\phi = \mathbb{H}_\phi \cap X$ (intersection dans $\mathbb{P}^\vee$).

Notons η le point générique de $\mathbb{P}$. On considère $\mathbb{H}'_\eta = \pi^{-1}(\eta)$ comme $k(\eta)$-schéma.

Théorème 3.1.1 : *On a $\overline{n}(\mathbb{H}'_\eta) = \overline{n}(X)$. En particulier, si X est géométriquement irréductible sur k, alors $\mathbb{H}'_\eta$ l'est sur $k(\eta)$.*

De même, si X est lisse sur k, $\mathbb{H}'_\eta$ est alors lisse sur $k(\eta)$.

Démonstration : C'est une variante de [22] p. 89. □

On en déduit, à l'aide d'un argument de constructibilité, le théorème de Bertini classique (*ie* sur les corps) :

Corollaire 3.1.2 : *On suppose le corps k infini. Il existe alors une infinité d'hyperplans H de $\mathbb{P}^\vee$ vérifiant $\overline{n}(H \cap X) = \overline{n}(X)$.*

Si de plus X est lisse sur k, alors il existe une infinité d'hyperplans H de $\mathbb{P}^\vee$ tels que $H \cap X$ soit lisse sur k.

Démonstration : Il suffit d'appliquer le théorème 3.1.1 puis la proposition 1.2.1, et de remarquer que pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{P}$, l'ensemble $U(k)$ est infini. □

C.3.2 La partie algébrique

Soient K un corps de nombres, et M un O_K-module localement libre de rang $r+1$. On pose $B = \mathrm{Spec}(O_K)$, $\mathbb{P} = \mathbf{P}(M)$, $\mathbb{P}^\vee = \mathbf{P}(M^\vee)$, et β la projection $\mathbb{P} \to B$. Soit $\mathbb{H} \subset \mathbb{P} \times_B \mathbb{P}^\vee$ l'hyperplan universel.

Soit maintenant $X \subset \mathbb{P}^\vee$ une variété arithmétique sur O_K de dimension $d \geq 3$, et $f : X \to B$ le morphisme structural.

On pose $\mathbb{H}' = \mathbb{H} \times_{\mathbb{P}^\vee} X = \mathbb{H} \cap (\mathbb{P} \times_B X)$ (intersection dans $\mathbb{P} \times_B \mathbb{P}^\vee$), et $\pi : \mathbb{H}' \to \mathbb{P}$ le morphisme induit par la première projection. Pour $\phi \in \mathbb{P}(T)$, on a $\mathbb{H}'_\phi = \mathbb{H}' \times_{\mathbb{P}} T = \mathbb{H}_\phi \cap X_T$ (intersection dans $\mathbb{P}^\vee_T$).

L'objectif des théorèmes de Bertini est de relier les propriétés du morphisme π (en particulier celles de ses fibres) à celles de f.

Soit U_0 l'ensemble des $y \in \mathbb{P}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{H}'_y = \pi^{-1}(y)$, π soit plat en x. U_0 est un ouvert non vide de $\mathbb{P}$, au-dessus duquel les fibres de π sont purement de dimension $d-2$ (et non vides).

Soit J l'ensemble fini des $b \in B$ tels que $X_b = f^{-1}(b)$ ne soit pas lisse sur $k(b)$. On désigne par W l'ensemble des $y \in U_0$ vérifiant : $\beta(y) \in B - J$, et $\mathbb{H}'_y$ est lisse et géométriquement irréductible sur $k(y)$.

On pose aussi, pour $b \in J$, W_b égal à l'ensemble des $y \in U_0$ tels que : $\beta(y) = b$ et $\overline{n}(\mathbb{H}'_y) = \overline{n}(X_b)$.

La proposition suivante, qui s'intéresse à $W' = W \cup \bigcup_{b \in J} W_b$, est la partie algébrique du théorème de Bertini arithmétique que l'on veut démontrer :

Proposition 3.2.1 : *L'ensemble $\mathbb{P} - W'$ est contenu dans un fermé horizontal purement de codimension 1 dans $\mathbb{P}$.*

Démonstration : On remarque d'abord que W et les W_b sont constructibles (*cf* proposition 1.2.1), donc W' l'est aussi.

Pour $b \in B$, notons η_b le point générique de $\mathbb{P}_b = \beta^{-1}(b)$. Alors $\mathbb{H}'$ est plat sur B, et $\pi_b : \mathbb{H}'_b \to \mathbb{P}_b$ est plat en tout x tel que $\pi_b(x) = \eta_b$ (car $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_b;\eta_b}$ est un corps). Donc par le critère de platitude par fibres (proposition 1.2.5), on a $\eta_b \in U_0$, et ce pour tout $b \in B$.

Soit maintenant $b \in B - J$. X_b est géométriquement connexe (théorème de Zariski) et lisse, donc géométriquement irréductible. D'après les théorèmes de Bertini classiques (théorème 3.1.1), $\mathbb{H}'_{\eta_b}$ est donc lisse et géométriquement irréductible sur $k(\eta_b)$; d'où $\eta_b \in W$.

De même, en prenant cette fois $b \in J$, on a, par le théorème 3.1.1, la relation $\overline{n}(\mathbb{H}'_{\eta_b}) = \overline{n}(X_b)$, *ie* $\eta_b \in W_b$.

Finalement, on a montré que $\eta_b \in W'$ pour tout $b \in B$. Sachant que $\mathbb{P} - W'$ est constructible, on en déduit le résultat. □

C.3.3 La version effective

Rappelons que l'on note G_K l'ensemble des plongements $K \hookrightarrow \mathbb{C}$. On conserve les notations du paragraphe 3.2, en supposant de plus que $\widehat{M}$ est hermitien :

Pour chaque $\sigma \in G_K$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $M_\sigma = M_K \otimes_\sigma \mathbb{C}$ est muni d'une norme hermitienne $\| \, \|_\sigma$; et la famille $(\| \, \|_\sigma)_\sigma$ est invariante par conjugaison complexe.

On a alors, sur $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^\vee}(1)$, la structure hermitienne de Fubini-Study :
Pour $\sigma \in G_K$, on a $\mathbb{P}^\vee_\sigma(\mathbb{C}) \simeq (M_\sigma - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Soit $s \in \Gamma(\mathbb{P}^\vee_\sigma; \mathcal{L}_\sigma) \simeq M^\vee_\sigma$. On pose

$$\|s(x)\|_{FS} = \frac{|s(x)|}{\|x\|_\sigma} \quad \text{pour } x \in (M_\sigma - \{0\})/\mathbb{C}^* .$$

De même, en munissant $M^\vee$ des normes hermitiennes duales, on a la structure hermitienne de Fubini-Study sur $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$.

Remarquons par ailleurs que si L est une extension finie de K, X_{O_L} est une variété arithmétique sur O_L.

On pose, pour $n \geq 1$, $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Par ailleurs, on définit $\widehat{\deg}(\widehat{M}) = \widehat{\deg}(\Lambda^{r+1}\widehat{M}) = h_{\Lambda^{r+1}\widehat{M}}(B)$.

Le lemme qui suit relie les hauteurs dans $\mathbb{P}$ et dans $\mathbb{P}^\vee$:

Proposition 3.3.1 : *Soient L une extension finie de K, et $\phi \in \mathbb{P}(O_L)$. On note E l'image de ϕ dans $\mathbb{P}$; c'est un point entier sur $\mathbb{P}$. On a alors :*

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(\mathbb{H}_\phi) = \frac{1}{r} h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) - \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{r[K:\mathbb{Q}]} + \frac{a_r - 1}{2} .$$

Démonstration : On pose ici, pour un fermé Y intègre horizontal de $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ de dimension p :

$$h'(Y) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(Y) + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{p[K:\mathbb{Q}]} - \frac{a_p - 1}{2} ;$$

h' est la «hauteur projective» de Bost, Gillet et Soulé (*cf* [9] p. 964), normalisée comme dans le paragraphe 1.1.

Le morphisme ϕ définit un O_L-module inversible F et un morphisme surjectif de O_L-modules $M_{O_L} \to F$. Soit N le noyau de ce morphisme, de sorte que l'on a une suite exacte de O_L-modules localement libres :

$$0 \to N \to M_{O_L} \to F \to 0 .$$

On a alors $\mathbb{H}_\phi = \mathbf{P}(N^\vee)$, et l'immersion $\mathbb{H}_\phi \hookrightarrow \mathbb{P}^\vee_{O_L}$ est induite par le morphisme surjectif de O_L-modules $M^\vee_{O_L} \to N^\vee$.

On munit N et F des normes induites par $\widehat{M}_{O_L}$. D'un côté, on a $h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) = \frac{\widehat{\deg}(\widehat{F})}{[L:\mathbb{Q}]}$. Et de l'autre, on a, d'après la proposition 4.1.2 (ii) de [9] p. 965 :

$$r[L:\mathbb{Q}]h'(\mathbb{H}_\phi) = \widehat{\deg}(\widehat{M}_{O_L}) - \widehat{\deg}(\widehat{N}) \quad .$$

Or, par additivité du degré arithmétique (*cf* [24] p. 106), on a la relation $\widehat{\deg}(\widehat{M}_{O_L}) = \widehat{\deg}(\widehat{F}) + \widehat{\deg}(\widehat{N})$. On en déduit $h'(\mathbb{H}_\phi)r = h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E)$. D'où le résultat. □

Le lemme suivant est une forme faible du théorème de Bézout arithmétique :

Proposition 3.3.2 : *Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ ne contenant pas X_{O_L}. On a alors :*

$$(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H \cap X_{O_L}) \leq h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H)r + h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)d + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{M}})}{[K:\mathbb{Q}]} - \frac{r}{2}(a_r - 1) - \frac{a_{d-1}}{2} \quad .$$

Démonstration : D'après le théorème 5.4.4 (i) de [9] p. 1007, on a

$$(d-1)h'(H \cap X_{O_L}) \leq h'(X_{O_L})d + h'(H)r \quad ,$$

où h' désigne, comme dans la démonstration de la proposition précédente, la hauteur projective normalisée. On en déduit le résultat en remarquant que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X_{O_L}) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. □

Théorème 3.3.3 : *Soit $\epsilon > 0$. Il existe une extension finie L de K et un hyperplan H de $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ tels que, en posant $B' = \mathrm{Spec}(O_L)$ et en notant $g : B' \to B$ le morphisme induit par $O_K \hookrightarrow O_L$, on ait :*

- Le fermé $X' = H \cap X_{O_L}$ est une variété arithmétique sur O_L de dimension $d-1$;
- Pour tout $b \in B'$ tel que $g(b) \in B - J$, X'_b est lisse et géométriquement irréductible sur $k(b)$;
- Pour tout $b \in B'$ tel que $g(b) \in J$, on a $\overline{n}(X'_b) = \overline{n}(X_{g(b)})$;
- L'inégalité suivante a lieu :

$$(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X') \leq h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)d + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{\mathcal{M}})}{[K:\mathbb{Q}]} - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \frac{r+1}{2}a_r - \frac{r}{2} - \frac{a_{d-1}}{2} + \epsilon \quad .$$

Démonstration : D'après la proposition 3.3.1, il existe un fermé horizontal Z purement de codimension 1 dans $\mathbb{P}$ tel que $\mathbb{P} - Z \subset W'$. D'après le théorème 2.1.3, il existe alors un point entier E sur $\mathbb{P} - Z$ tel que

$$h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) \leq (r+1)h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P}) - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \epsilon \quad . \qquad (1)$$

Il existe une extension finie L de K et $\phi \in \mathbb{P}(O_L)$ tel que E soit l'image de ϕ dans $\mathbb{P}$.

On pose $H = \mathbb{H}_\phi$, $X' = \mathbb{H}'_\phi = H \cap X_{O_L}$, $B' = \mathrm{Spec}(O_L)$ et $g : B' \to B$ le morphisme induit par l'injection $O_K \hookrightarrow O_L$.

On a $E \subset U_0$, donc X' est plat sur O_L. De plus, pour $b \in B'$, on a $X'_b = \mathbb{H}'_{\phi(b)}$. On en déduit que X'_b est purement de dimension $d-2$ (et non vide). En outre, si $g(b) \in B - J$, X'_b est lisse et géométriquement irréductible sur $k(b)$; et si $g(b) \in J$, on a $\overline{n}(X'_b) = \overline{n}(X_{g(b)})$.

Cela implique que X' est une variété arithmétique sur O_L de dimension $d-1$.

Pour finir, on sait que $(r+1)h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P}) = \frac{r+1}{2}a_r - \frac{r}{2} + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{[K:\mathbb{Q}]}$ (*cf* [9] p. 965). Ceci, associé à la proposition 3.3.1 et à l'inégalité (1), nous donne

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H)r \leq (2r+1)\frac{a_r}{2} - r - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \epsilon \quad .$$

La majoration de $(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X')$ s'en déduit à l'aide de la proposition 3.3.2. □

C.4 Quelques exemples

C.4.1 Le problème de Skolem effectif

Soit $r \geq 1$ fixé. Dans toute la suite, on mesure la complexité des éléments de $\overline{\mathbb{Z}}^r$ à l'aide de la hauteur normalisée suivante :

Soit $(x_1; \ldots; x_r) \in \overline{\mathbb{Z}}^r$. Soit L un corps de nombres contenant tous les x_i. On pose alors

$$h'(x_1; \ldots; x_r) = \frac{1}{[L:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma \in G_L} \ln \max\Big(1; |\sigma(x_1)|; \ldots; |\sigma(x_r)|\Big) \quad .$$

Ce réel positif ne dépend pas du choix de L.

On s'intéresse ici au problème suivant :

Soient $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres, et F un polynôme à r variables et à coefficients dans O_K. Existe-t-il $\underline{x} = (x_1; \ldots; x_r) \in \overline{\mathbb{Z}}^r$ tel que $F(x_1; \ldots; x_r)$ soit inversible dans $\overline{\mathbb{Z}}$?

Soit I l'idéal de O_K engendré par les coefficients de F. On voit aisément que si un tel $\underline{x}$ existe, alors on a $I = O_K$. Réciproquement, Skolem a démontré que cette condition est suffisante (*cf* [30]). On donne ici une version de ce résultat avec contrôle de la hauteur :

Proposition 4.1.1 : *On suppose $I = O_K$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\underline{x} \in \overline{\mathbb{Z}}^r$ tel que $F(\underline{x})$ soit inversible dans $\overline{\mathbb{Z}}$ et que $h'(\underline{x}) \leq \epsilon$.*

Démonstration : On pose $X = \mathbb{P}^r_{O_K} = \mathrm{Proj}\Big(O_K[X_0;\ldots;X_r]\Big)$, $G(X_0;\ldots;X_r)$ le polynôme homogène associé à F, et Z le fermé de Zariski de X défini par l'idéal homogène $\langle X_0 G\rangle$. Soit $\widehat{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ sur X muni de la structure hermitienne suivante :

Pour $\sigma \in G_K$, on a $X_\sigma(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^{r+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$. Par ailleurs, toute section globale s de $\mathcal{O}(1)_\sigma$ sur X_σ s'écrit $s = \sum_{i=0}^{r} a_i X_i$ pour des $a_i \in \mathbb{C}$. On pose alors

$$\|s\|_{L^\infty}(z_0;\ldots;z_r) = \frac{\left|\sum_{i=0}^{r} a_i z_i\right|}{\max_{0\le i\le r} |z_i|} \quad \text{pour } (z_0;\ldots;z_r) \in X_\sigma(\mathbb{C}) \ .$$

Cette structure hermitienne n'est pas C^∞, mais elle est limite uniforme d'une suite de structures C^∞ à courbures semi-positives. On peut donc (*cf* [44] p. 214) appliquer à $\widehat{\mathcal{L}}$ les résultats du chapitre C. On vérifie alors les égalités $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = 0$ et $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) = 0$.

Par ailleurs, l'ensemble des points entiers sur $X - Z$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\mathcal{S} = \{\underline{x} \in \overline{\mathbb{Z}}^r | F(\underline{x}) \in \overline{\mathbb{Z}}^*\}$ modulo l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur K.

L'hypothèse $I = O_K$ assure que Z ne contient aucun fermé vertical de dimension r. On peut donc appliquer le théorème 2.1.3 : il existe un point entier E sur $X - Z$ tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \le \epsilon$.

On déduit de E un élément $\underline{x} \in \mathcal{S}$. Et on vérifie que l'on a $h'(\underline{x}) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \le \epsilon$. D'où le résultat. □

C.4.2 Une équation diophantienne

Soient $r \ge 2$, $K \subset \overline{\mathbb{Q}}$ un corps de nombres, et $F \in O_K[X_1;\ldots;X_r]$ de degré (total) $f \ge 1$. On mesure la complexité de F de la manière suivante :

Définition : La mesure de Mahler de F est le réel positif

$$m(F) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{\sigma\in G_K} \int_{[0;1]^r} \ln |F_\sigma(e^{2i\pi t_1};\ldots;e^{2i\pi t_r})| dt_1 \ldots dt_r \quad .$$

Le polynôme F s'écrit $F = \sum_{k=0}^{f} R_k$, avec R_k homogène de degré k. Pour $k \in \{0;\ldots;f\}$, soit I_k l'idéal de O_K engendré par les coefficients des $(R_l)_{k\le l\le f}$.

On suppose que le polynôme F est irréductible dans $K[X_1;\ldots;X_r]$, et que $I_0 = O_K$. On s'intéresse alors aux solutions $\underline{x} \in \overline{\mathbb{Z}}^r$ de l'équation $F(\underline{x}) = 0$. D'après le théorème A.1.1, une telle solution $\underline{x}$ existe si et seulement si $I_1 = O_K$.

Avec une hypothèse un peu plus forte, on peut obtenir, en plus de l'existence, un contrôle de la hauteur normalisée (définie au paragraphe 4.1) de certaines solutions :

Proposition 4.2.1 : *On suppose que le polynôme F est irréductible dans $K[X_1;\ldots;X_r]$, et que $I_f = O_K$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\underline{x} \in \overline{\mathbb{Z}}^r$ tel que $F(\underline{x}) = 0$ et que $h'(\underline{x}) \leq \frac{1}{f}m(F) + \epsilon$.*

Démonstration : La démonstration est similaire à celle de la proposition 4.1.1 : On pose $X = \mathbb{P}^r_{O_K} = \mathrm{Proj}\Big(O_K[X_0;\ldots;X_r]\Big)$, $G(X_0;\ldots;X_r)$ le polynôme homogène associé à F, *ie* $G = \sum\limits_{k=0}^{f} X_0^{f-k}R_k$. Soient Y le fermé de X défini par l'idéal homogène $\langle G\rangle$, et Z le fermé de X défini par l'idéal homogène $\langle X_0; G\rangle$.

Soit $\widehat{\mathcal{L}}$ le faisceau inversible $\mathcal{O}(1)$ sur X muni de la structure hermitienne $\|\ \|_{L^\infty}$ définie dans la démonstration de la proposition 4.1.1.

Cette structure étant limite uniforme d'une suite de structures C^∞ à courbures semi-positives, on peut appliquer à $\widehat{\mathcal{L}}$ les résultats du chapitre C. On vérifie alors que l'on a $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{1}{fr}m(F)$ et $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) \geq 0$.

Par ailleurs, l'ensemble des points entiers sur $Y - Z$ est en bijection naturelle avec l'ensemble $\mathcal{S} = \{\underline{x} \in \overline{\mathbb{Z}}^r | F(\underline{x}) = 0\}$ modulo l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur K.

Y est un fermé intègre horizontal de dimension r, et l'hypothèse $I_f = O_K$ assure que Z ne contient aucun fermé vertical de dimension $r-1$. On peut donc appliquer le théorème 2.1.3 : il existe un point entier E sur $Y - Z$ tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leq \frac{1}{f}m(F) + \epsilon$.

On déduit de E un élément $\underline{x} \in \mathcal{S}$. Et on vérifie l'égalité $h'(\underline{x}) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)$. D'où le résultat. □

Bibliographie

[1] *A. Abbes :* Hauteurs et discrétude. Astérisque **245** (1997), p. 141-166.

[2] *S.J. Arakelov :* Intersection theory of divisors on an arithmetic surface. Math. USSR Izvestija **8** (1974), p. 1167-1180.

[3] *P. Autissier :* Points entiers sur les surfaces arithmétiques. Journal für die reine und angew. Math. **531** (2001), p. 201-235.

[4] *P. Autissier :* Points entiers et théorèmes de Bertini arithmétiques. Annales de l'Institut Fourier, *à paraître.*

[5] *R. Beals :* Advanced mathematical analysis. Graduate Texts in Math. **12**, Springer-Verlag (1973).

[6] *M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet :* Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math. **194**, Springer-Verlag (1971).

[7] *Y. Bilu :* Limit distribution of small points on algebraic tori. Duke Math. Journal **89** (1997), p. 465-476.

[8] *J.B. Bost :* Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces. Annales Scientifiques de l'ENS **32** (1999), p. 241-312.

[9] *J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé :* Heights of projective varieties and positive Green forms. Journal of the AMS **7** (1994), p. 903-1027.

[10] *T. Chinburg, R. Rumely :* Well-adjusted models for curves over Dedekind rings. Progress in Math. **89** (1991), p. 3-24.

[11] *T. Chinburg, R. Rumely :* The capacity pairing. Journal für die reine und angew. Math. **434** (1993), p. 1-44.

[12] *G. Cornell, J.H. Silverman :* Arithmetic Geometry. Springer-Verlag (1986).

[13] *P.G. Doyle, J.L. Snell :* Random walks and electric networks. Carus Math. Monographs **22** (1984).

[14] *D. Eisenbud, J. Harris :* The geometry of schemes. Graduate Texts in Math. **197** (2000).

[15] *R. Erné :* Reducibility mod p of hypersurfaces in projective spaces - an application of arithmetic Bézout. Journal of Number Theory **84** (2000), p. 305-316.

[16] *R. Erné :* On the degree of integral points of a projective space minus a horizontal hypersurface. Journal für die reine und angew. Math. **532** (2001), p. 151-177.

[17] *G. Faltings :* Calculus on arithmetic surfaces. Annals of Math. **119** (1984), p. 387-424.

[18] *M. Fekete, G. Szegö :* On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set. Math. Zeitschrift **63** (1955), p. 158-172.

[19] *W. Fulton :* Intersection theory. Springer Ergebnisse **2** (1984).

[20] *H. Gillet, C. Soulé :* An arithmetic Riemann-Roch theorem. Inventiones Math. **110** (1992), p. 473-543.

[21] *A. Grothendieck, J. Dieudonné :* Eléments de géométrie algébrique. IV. Etude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. Publications Math. de l'IHES **28** (1966).

[22] *J.P. Jouanolou :* Théorèmes de Bertini et applications. Progress in Math. **42** (1983).

[23] *S. Lang :* Fundamentals of Diophantine Geometry. Springer-Verlag (1983).

[24] *S. Lang :* Introduction to Arakelov theory. Springer-Verlag (1988).

[25] *S. Lichtenbaum :* Curves over discrete valuation rings. American Journal of Math. **90** (1968), p. 380-405.

[26] *V. Maillot :* Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. Mémoires de la SMF **80** (2000).

[27] *P. Mikkelsen :* Effective bounds for integral points on arithmetic surfaces. Journal für die reine und angew. Math. **496** (1998), p. 55-72.

[28] *L. Moret-Bailly :* Métriques permises. Astérisque **127** (1985), p. 29-87.

[29] *L. Moret-Bailly :* Points entiers des variétés arithmétiques. Progress in Math. **71** (1987), p. 147-154.

[30] *L. Moret-Bailly :* Groupes de Picard et problèmes de Skolem I. Annales Scientifiques de l'ENS **22** (1989), p. 161-179.

[31] *A. Moriwaki :* Arithmetic Bogomolov-Gieseker's inequality. American Journal of Math. **117** (1995), p. 1325-1347.

[32] *P. Philippon :* Sur des hauteurs alternatives I. Math. Annalen **289** (1991), p. 255-283.

[33] *B. Poonen :* Bertini theorems over finite fields. Preprint (2001).

[34] *M.H. Protter, H.F. Weinberger :* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall (1967).

[35] *T. Ransford :* Potential theory in the complex plane. Cambridge University Press (1995).

[36] *R. Rumely :* Arithmetic over the ring of all algebraic integers. Journal für die reine und angew. Math. **368** (1986), p. 127-133.

[37] *R. Rumely :* Capacity theory on algebraic curves. Lecture Notes in Math. **1378**, Springer-Verlag (1989).

[38] *R. Rumely :* On Bilu's equidistribution theorem. Contemporary Math. **237** (1999), p. 159-166.

[39] *L. Szpiro :* Séminaire sur les pinceaux arithmétiques. Astérisque **127** (1985).

[40] *L. Szpiro, E. Ullmo, S. Zhang :* Equirépartition des petits points. Inventiones Math. **127** (1997), p. 337-347.

[41] *E. Ullmo :* Hauteurs et amplitude arithmétique. Thèse de l'Université Paris XI Orsay (1993).

[42] *E. Ullmo :* Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique. American Journal of Math. **117** (1995), p. 1039-1055.

[43] *S. Zhang :* Positive line bundle on arithmetic surfaces. Annals of Math. **136** (1992), p. 569-587.

[44] *S. Zhang :* Positive line bundles on arithmetic varieties. Journal of the AMS **8** (1995), p. 187-221.