XIAONAN MA

Formes de torsion analytique et familles de submersions

Thèses d'Orsay, 1998

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1998__0519__P0_0>

63805

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

présentée
pour obtenir

le titre de Docteur en Sciences

Spécialité : Mathématique

par

Xiaonan MA

Sujet : **Formes de torsion analytique et familles de submersions**

soutenue le 28 avril 1998 devant la Commission d'examen

MM. Jean-Michel BISMUT
Jean-Benoît BOST
Patrick GÉRARD
Eric LEICHTNAM
Christophe SOULÉ (Président du Jury)

A mes parents

献给我的父母

Remerciements

Je tient à exprimer tout spécialement ma plus profonde reconnaissance à Monsieur Jean Michel Bismut, mon directeur de thèse. Il m'a appris beaucoup sur la façon de faire de la recherche. Je le remercie d'avoir toujours su se montrer très disponible, et de n'avoir jamais perdu patience devant mes incessantes questions. Sans ses suggestions, ses critiques et sans le soutien constant que j'ai reçu de lui, cette thèse n'aurait pas pu voir le jour.

Je veux remercier très sincèrement Monsieur Zhang Weiping, qui m'a accuilli chaleuresement à Nankai, et m'a appris beaucoup au cours de nombreuses discussions.

J'exprime également mes sincères remerciements aux Professeurs Tian Gian et Christophe Soulé qui ont accepté, malgré tout leur travail, d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie particulièrement le professeur Christophe Soulé pour ses observations et pour avoir bien voulu présider le jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur Jean Benoît Bost, Monsieur Patrick Gérard, Monsieur Eric Leichtnam pour avoir accepté d'être membres du Jury.

Je veux remercier sincèrement les étudiants chinois que j'ai rencontrés à Orsay, en particulier, Ye Dong et Xiong Wei. Leur amitié m'a été indispensable.

Je remercie aussi Zhang Yiping qui eu la patience d'écouter des exposés de mes travaux.

Je tiens à remercier vivement Mesdames Martine Justin et Laurence Stephen pour leur aide pendant plus de trois ans.

Enfin, j'adresse mes sincères salutations à tous les amis que j'ai pu rencontrer en France.

Abstract

Let $\pi_1 : W \longrightarrow V$, $\pi_2 : V \longrightarrow S$ be holomorphic submersions of complex varieties with compact fibre. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W. In this paper, we prove the fonctoriality of the analytic torsion forms with respect to the composition of two submersions. This result extends to a relative situation a result by Berthomieu-Bismut, proved in the case where S is a point.

Keywords: Sheaves and cohomology of sections of holomorphic vectors bundles. Characteristic classes and numbers. Index theory and fixed point theory.

AMS Classification. 32L10, 57R20, 58G10.

Table des matières

0 Introduction

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y. Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W. On a donc

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & W \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ & Y \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_2"] & S \end{tikzcd}$$

Soient $R^\bullet\pi_{1*}\xi, R^\bullet\pi_{3*}\xi, R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ les images directes de ξ, ξ, $R^\bullet\pi_{1*}\xi$. On suppose que les $R^\bullet\pi_{1*}\xi$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$, $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Soit $H(Z, \xi_{|Z})$, $H(X, \xi_{|X})$ les cohomologies de $\xi_{|Z}$, $\xi_{|X}$. Alors $H(Z, \xi_{|Z})$ est un fibré holomorphe **Z**-gradué sur S. Plus exactement $R^\bullet\pi_{3*}\xi = H(Z, \xi_{|Z})$. De même $R^\bullet\pi_{1*}\xi = H(X, \xi_{|X})$.

On suppose désormais que les fibrations $\pi_2 : V \to S$, $\pi_3 : W \to S$ sont kählériennes au sens de [**BGS2**, §1]. Plus précisément, soit ω^V (resp. ω^W) une (1,1) forme réelle, fermée sur V (resp. W), dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. g^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ). Soit g^{TX} la métrique hermitienne sur TX induite par ω^W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

Soit $(\Omega(X, \xi_{|X}), \overline{\partial}^X)$ le complexe de Dolbeault des formes $\mathcal{C}^\infty$ sur la fibre X à valeurs dans ξ. On munit $\Omega(X, \xi_{|X})$ de la métrique hermitienne L_2 associée à g^{TX}, h^ξ. On identifie $H(X, \xi_{|X})$ aux formes harmoniques dans le complexe $\Omega(X, \xi_{|X})$. Soit $h^{H(X,\xi_{|X})} = h^{R\pi_{1*}\xi}$ la métrique L_2 associée sur $H(X, \xi_{|X}) = R^\bullet\pi_{1*}\xi$,

De même, on considère les complexes de Dolbeault relatifs $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ et $\Omega(Y, R^\bullet\pi_{1*}\xi_{|Y})$ associés aux métriques g^{TZ}, h^ξ et $g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi}$. On désigne par $h^{H(Z,\xi_{|Z})} = h^{R\pi_{3*}\xi}$ et $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$ les métriques L_2 correspondantes sur $H(Z, \xi_{|Z}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi$, $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$.

Soit P^S l'espace vectoriel des formes réelles sur S qui sont la somme de formes $\mathcal{C}^\infty$ de type (p,p). Soit $P^{S,0}$ l'espace des $\alpha \in P^S$, qui s'écrivent $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$, où β, γ sont des formes $\mathcal{C}^\infty$ sur S.

Si K est un fibré holomorphe avec métrique g^K, si Q est un polynôme caractéristique, on désigne par $Q(K, g^K) \in P^S$ la forme de Chern-Weil associée à la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur K.

Soient $T_1(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$, resp. $T_3(\omega^W, h^\xi)$) les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [**BKö**] sur V (resp. S, resp. S) associées à (π_1, ω^W, h^ξ) (resp. $(\pi_2, \omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$, resp. (π_3, ω^W, h^ξ)). Les formes T_1 vérifient l'équation

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} T_1(\omega^W, h^\xi) = \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \tag{0.1}$$

et les formes T_2 et T_3 vérifient des équations analogues. Dans [**BKö**], ils ont établi des formules d'anomalie pour ces formes qui les rendent potentiellement compatibles au formalisme d'image directe en théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé [**GS3**].

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [**BGS1**] telle que

(0.2)
$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*\left(\mathrm{Td}(TY, g^{TY})\right)\mathrm{Td}(TX, g^{TX}).$$

Pour $s \in S$, il existe une suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s})(r \geq 2)$ [**Grot**] telle que $E_2 = R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$. On montre à la Section 14 que le complexe de Dolbeault $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ muni d'une filtration convenable calcule la suite spectrale de Leray au sens de [**Grot**].

Soit h^{E_2} la métrique sur E_2 induite par $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$.

Dans cet article, on définit une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}\left(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\right) \in P^S/P^{S,0}$ dans les trois cas suivants:

i) On suppose que le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.

ii) On suppose que le rang des E_r $(r \geq 2)$ est localement constant sur S.

iii) On suppose que π_1 et V sont projectives [**BGS3**, p337].

et on vérifie que ces définitions sont compatibles.

La classe $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ vérifie l'équation

$$\begin{aligned}\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}&\left(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\right)\\ &= \mathrm{ch}\left(H(Z, \xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}\right) - \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}).\end{aligned} \tag{0.3}$$

Le but de cet article est de montrer le Théorème suivant, qui étend une formule de Berthomieu et Bismut [**BerB**, Théorème 3.1] où S est un point à une situation en famille.

Théorème 0.1. *On a l'identité*

$$\begin{aligned}T_3(\omega^W, h^\xi) \quad &-T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})T_1(\omega^W, h^\xi)\\ &+\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)\\ &-\widetilde{\mathrm{ch}}\left(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\right) = 0 \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{0.4}$$

Plus précisément, par les techniques de [**B4**], on peut construire explicitement des formes γ et δ, qui sont locales sur S, telles que le terme à droite de (0.4) est donné par $\overline{\partial}\gamma + \partial\delta$.

On remarque que quand S est un point, le Théorème 0.1 est exactement [**BerB**, Théorème 3.1]. Dans [**BerB**], le résultat est énoncé comme une formule qui compare les métriques de Quillen sur $\det R^\bullet\pi_{3*}\xi \simeq \det R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$.

La formule (0.4) est naturelle. En effet, si Δ est l'expression à gauche de (0.4), alors par (0.1)-(0.3), $\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\Delta = 0$.

On se restreint maintenant au cas i). En utilisant [**BKö**], on vérifie facilement que l'égalité (0.4) est compatible aux variations des métriques concernées. Si S est compacte et kählérienne, en appliquant le $\overline{\partial}\partial$-lemme de [**GrH**, p149], on sait que Δ est une classe de cohomologie sur S. Si ξ' est un fibré holomorphe sur S, en utilisant les résultats de [**BerB**], on a aussi

$$\int_S \mathrm{Td}(TS)\mathrm{ch}(\xi')\Delta = 0. \tag{0.5}$$

Supposons maintenant que W, V, S sont des variétés arithmétiques. Dans **[GS3]**, Gillet et Soulé ont conjecturé la formule de Riemann-Roch-Grothendieck en théorie d'Arakelov:

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\pi_{1!}(\xi, h^\xi)) = \pi_{1*}\Big[\widehat{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi)\mathrm{Td}^A(TX, g^{TX})\Big]. \tag{0.6}$$

Cette formule a été montrée par Gillet et Soulé **[GS4]** pour la première classe de Chern. La formule (0.6) en tout degré découle de **[B4]** et des travaux précédent.

Par la définition de l'image directe de Gillet et Soulé, le terme à gauche de (0.6) contient les formes de torsion analytique, qui sont équivalentes aux formes de torsion analytique $T_1(\omega^W, h^\xi)$ de **[BKö]**.

Le Théorème 0.1 implique alors qu'on a la formule

$$\pi_{3!}(\xi, h^\xi) - \pi_{2!}(\pi_{1!}(\xi, h^\xi)) = -\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \tag{0.7}$$

Notons que dans **[F]**, Faltings a aussi établi une formule de Riemann-Roch-Grothendieck arithmétique en tout degré dans le cas où les variétés W, V sont projectives. La formule (0.4) est un analogue d'un résultat de Faltings **[F**, Lemme 5.5], dont la preuve est donnée dans **[F**, p 75-76].

La stratégie générale de la preuve du Théorème 0.1 est la même que celle de **[BerB]** dans le cas où S est un point. Dans notre contexte, comme en **[B4]**, on montre une identité de formes dans P^S,

$$\sum_{k=1}^{4} I_k^0 = \overline{\partial}\theta_1^0 - \partial\theta_2^0 - \overline{\partial}\partial\theta_3^0. \tag{0.8}$$

où I_k^0, θ_k^0 dépendent de $\varepsilon, A, T_0 > 0$. Ces termes s'expriment en fonction de traces d'un opérateur de la chaleur sur la fibre Z, dépendant de deux paramètres u et T.

Comme dans **[B4]**, on utilise le Théorème d'indice local relatif **[B1]**. On utilise aussi la technique de changement d'échelle de Getzler **[BeGeV]**.

Comme dans **[BerB]**, **[BL]** et **[B4]**, la suite spectrale de Leray et les propriétés de vitesse finie de propagation des solutions d'équations hyperpoliques jouent aussi des rôles importants.

Rappelons que les conditions de validité du Théorème 0.1 ont été décrites en i), ii), iii).

Dans le cas i), commme $E_2 = H(Z, \xi_{|Z})$, la définition de $\widetilde{\mathrm{ch}}\Big(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\Big) \in P^S/P^{S,0}$ à la Section 3 ne pose aucune difficulté particulière.

Dans le cas ii), soit $h^{E_r}(r \geq 3)$ des métriques hermitiennes sur E_r. Pour $r \geq 2$, comme en **[BGS1]**, on définit les classes $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_r, E_{r+1}, h^{E_r}, h^{E_{r+1}})$ et $\widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(Z, \xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}\Big)$. À la Section 14, on pose

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}\Big(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\Big) &= \Sigma_{r=2}^{\infty}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_r, E_{r+1}, h^{E_r}, h^{E_{r+1}}) \\ &\quad -\widetilde{\mathrm{ch}}\Big(H(Z, \xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}\Big).\end{aligned} \tag{0.9}$$

Dans le cas iii), la construction de $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}),\, h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big)$ est plus subtile. En général, les E_r $(r \geq 2)$ ne sont pas des fibrés vectoriels holomorphes sur S. À la Section 10, pour construire $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}),\, h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) \in P^S/P^{S,0}$, on utilise la définition de Grothendieck de la suite spectrale, qui implique le choix de résolutions de ξ. On donne alors une construction de $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}),\, h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big)$. On montre qu'elle ne dépend pas de la résolution choisie. Si les $(E_r)_{r\geq 2}$ sont des fibrés vectoriels holomorphes, on montre le résultat non trivial qu'on a encore (0.9).

Pour que les objets introduits soient définis sans ambiguïté, à la Section 14, nous sommes amenés à redémontrer le résultat sans doute classique que pour $r \geq 2$, la suite spectrale associée à la résolution de Dolbeault est canoniquement isomorphe à la suite spectrale de Grothendieck.

Naturellement, si l'on admet le Théorème 0.1 dans les cas ii) et iii), on peut en tirer la compatibilité de constructions de $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}),\, h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big)$ dans ces deux cas.

La suite spectrale associée à la résolution de Dolbeault est telle que $E_0 = \Omega(Y, \Omega(X,\xi_{|X})_{|Y})$, $E_1 = \Omega(Y, R^\bullet \pi_{1*}\xi)$. Soient h^{E_0}, h^{E_1} les métriques L_2 sur E_0, E_1 associées à (g^{TX}, g^{TY}, h^ξ), $(g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi})$. Soit $h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique L_2 sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ associée à g^{TZ}, h^ξ.

Plus généralement, du point de vue de la théorie des classes de Bott-Chern, il est naturel d'écrire les relations formelles

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\mathrm{ch}}(\Omega(Z,\xi_{|Z}), E_0, h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_0}) = -\textstyle\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi),\\
&\widetilde{\mathrm{ch}}(E_0, E_1, h^{E_0}, h^{E_1}) = \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi),\\
&\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1, E_2, h^{E_1}, h^{E_2}) = T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}),\\
&\widetilde{\mathrm{ch}}(\Omega(Z,\xi_{|Z}), H(Z,\xi_{|Z}), h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = T_3(\omega^W, h^\xi).
\end{aligned} \tag{0.10}$$

Le Théorème 0.1 prend alors la forme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{ch}}\big(\Omega(Z,\xi_{|Z}), H(Z,\xi_{|Z}), h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) &= \widetilde{\mathrm{ch}}\big(\Omega(Z,\xi_{|Z}), E_0, h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_0}\big)\\
&+\Sigma_{i=0}^{1}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_i, E_{i+1}, h^{E_1}, h^{E_{i+1}})\\
&+\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) \text{ dans } P^S/P^{S,0}.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

De (0.9), (0.11), dans le cas ii), (0.11) s'écrit aussi

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{ch}}\big(\Omega(Z,\xi_{|Z}), H(Z,\xi_{|Z}), h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) &= \widetilde{\mathrm{ch}}\big(\Omega(Z,\xi_{|Z}), E_0, h^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_0}\big)\\
&+\Sigma_{i=0}^{\infty}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_i, E_{i+1}, h^{E_1}, h^{E_{i+1}})\\
&+\widetilde{\mathrm{ch}}\big(H(Z,\xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}\big) \text{ dans } P^S/P^{S,0}.
\end{aligned} \tag{0.12}$$

Cette relation a une version naturelle pour des bicomplexes holomorphes de dimension finie. Nous avons expliqué plus haut que, même en dimension finie, la relation correspondant à (0.12) est non triviale.

Dans le cas iii), on définit $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big)$ par une formule très comparable à (0.11), où $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ est remplacé par un bicomplexe de dimension finie. On voit donc que dans le cas iii), la relation (0.11) est exactement l'extension naturelle de notre définition de $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big)$ au cas où les résolutions de dimension finie de Grothendieck de ξ sont remplacées par la résolution de Dolbeault.

Les considérations précédentes montrent que les énoncés du Théorème 0.1 dans les cas i), ii) et iii) sont bien compatibles.

Cet article est organisé de la façon suivante. À la Section 1, on calcule l'asymptotique de certains objets géométriques associés à une famille de submersions. À la Section 2, on rappelle des résultats de **[BGS2]** et **[BKö]** sur les formes de torsion analytique.

À la Section 3, on énonce le Théorème 0.1 dans les cas i) et iii).

À la Section 4, on énonce sept résultats intermédiaires, dont les preuves sont différées aux Sections 5-9. En utilisant ces résultats, on montre le Théorème 0.1 dans le cas i).

Les Sections 5-9 sont consacrées aux preuves des résultats intermédiaires qui étendent **[BerB**, §5-9]. À la Section 5, on calcule l'asymptotique des supertraces évaluées à l'aide d'une superconnexion qui dépend de deux paramètres u et T. À la Section 6, on établit une égalité triviale pour la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) \in P^S/P^{S,0}$ dans le cas i) pour lequel $H(Z,\xi_{|Z}) = E_2$. Les Sections 7-9 contiennent des résultats de théorie de l'indice local relatif qu'on utilise pour montrer le Théorème 0.1.

À la Section 10, on construit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}\big(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\big) \in P^S/P^{S,0}$ dans le cas où π_1 et V sont projectives.

Aux Sections 11 et 12, on montre le Théorème 0.1 dans le cas iii).

À la Section 13, on montre le Théorème 10.7 qui donne une égalité de classes de Bott-Chern assocées à un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes.

À la Section 14, on établit le Théorème 0.1 dans le cas ii).

Les résultats de cet article ont été annoncés dans **[Ma]**.

Dans cet article, on utilise le formalisme de superconnexion de Quillen **[Q2]**. Si A est une algèbre $\mathbf{Z}_2$-graduée, si $a, b \in A$, le supercommutateur $[a,b]$ est défini par

$$[a,b] = ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba. \tag{0.13}$$

Remerciements. Cet article est ma thèse de doctorat de l'Université Paris XI (Orsay). Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mon directeur de thèse, le professeur J.M.Bismut. Il m'a soutenu tout au long de ce travail, du français aux mathématiques. Sans ses utiles discussions et suggestions, cet article n'aurait jamais pu été écrit.

1 Fibrations kählériennes, et limites adiabatiques

Soient $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$ des submersions de variétés $\mathcal{C}^\infty$ de fibres compactes X, Y. Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ de fibre compacte Z.

Soient $\widetilde{g}^{TW}$, g^{TV} des métriques sur W, V. Pour $T > 0$, on pose

$$g_T^{TW} = \frac{1}{T^2}\widetilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}.$$

Par une construction de [**BGS2**, §1], la métrique g_T^{TW} détermine un sous-fibré $T_{3,T}^H W$ de TW, une connexion ∇_T^{TZ}, et des tenseurs $S_{3,T}$ et $T_{3,T}$.

Dans cette Section, on étudie la limite quand $T \to +\infty$ de ces différents objets. Cette Section étend les résultats de [**BerB**, §7b)] obtenus dans le cas où S est un point.

En (a), on rappelle les résultats de [**B1**, §1c)], [**BGS2**, §1]. En (b), on calcule l'asymptotique des objects définis précédemment. En (c), on rappelle la définition des fibrations kählériennes. Enfin, en (d), on applique les résultats de (b) dans le cas des fibrations kählériennes.

a) Une connexion canonique sur le fibré tangent relatif d'une fibration.

Soient W, V des variétés $\mathcal{C}^\infty$, soit $\pi : W \to V$ une submersion $\mathcal{C}^\infty$ de fibre compacte X. Soit $TX = TW/V$ le fibré tangent relatif.

Soit $T^H W$ un sous-fibré de TW tel que

$$TW = T^H W \oplus TX. \tag{1.1}$$

Soient $P^{TX}, P^{T^H W}$ les projections de TW sur $TX, T^H W$. Pour $U \in TV$, soit $U^H \in T^H W$ le relèvement de U dans $T^H W$ qui est tel que $\pi_* U^H = U$.

Soient g^{TV}, g^{TX} des métriques sur TV, TX. Soit ∇^{TV} la connexion de Levi-Civita sur (TV, g^{TV}). La métrique g^{TV} et la connexion ∇^{TV} se relèvent en une métrique $g^{T^H W}$ et une connexion $\nabla^{T^H W}$ sur $T^H W$. On rappelle que pour X, Y, Z des sections $\mathcal{C}^\infty$ de TV, on a

$$\begin{aligned} 2\left\langle \nabla_X^{TV} Y, Z \right\rangle_{g^{TV}} &= \langle [X,Y], Z\rangle_{g^{TV}} - \langle [Y,Z], X\rangle_{g^{TV}} + \langle [Z,X], Y\rangle_{g^{TV}} \\ &\quad + X\langle Y, Z\rangle_{g^{TV}} + Y\langle Z, X\rangle_{g^{TV}} - Z\langle X, Y\rangle_{g^{TV}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Soit $g^{TW} = g^{T^H W} \oplus g^{TX}$ la métrique sur $TW = T^H W \oplus TX$ qui est la somme orthogonale des métriques $g^{T^H W}$ et g^{TX}. Soit $\langle \quad \rangle$ le produit scalaire correspondant sur TW. Soit $\nabla^{TW,L}$ la connexion de Levi-Civita sur (TW, g^{TW}).

DÉFINITION 1.1. Soit ∇^{TX} la connexion sur TX

$$\nabla^{TX} = P^{TX} \nabla^{TW,L}. \tag{1.3}$$

Soit ∇^{TW} la connexion sur $TW = T^H W \oplus TX$

$$\nabla^{TW} = \nabla^{T^H W} \oplus \nabla^{TX}. \tag{1.4}$$

Alors d'après [**B1**, Théorème 1.9], ∇^{TX} ne dépend pas de la métrique g^{TV}.

Soit T la torsion de la connexion ∇^{TW}. Soit

$$S = \nabla^{TW,L} - \nabla^{TW}. \tag{1.5}$$

Alors S est une 1-forme sur W à valeur dans les éléments antisymétriques de $\mathrm{End}(TW)$. D'après [**B1**, §1(c)]; [**BGS2**, §1(a)], si $U, V, W \in TW$, alors

$$\begin{gathered} S(U)V - S(V)U + T(U,V) = 0, \\ 2\langle S(U)V, W\rangle + \langle T(U,V), W\rangle + \langle T(W,U), V\rangle - \langle T(V,W), U\rangle = 0. \end{gathered} \tag{1.6}$$

Les résultats suivants sont démontrés dans [**B1**, Théorème 1.9], [**BF2**, §1(d)], [**BGS2**, Théorème 1.2].

Théorème 1.2. ***i)*** *Le tenseur T ne dépend pas de la métrique g^{TV}. Il prend ses valeurs dans TX. Si $U, V \in TX$, alors $T(U,V) = 0$.*

ii) *Si $Y \in TW$, alors $S(Y)(TX) \subset T^H W$. Le (3,0) tenseur $\langle S(\cdot)\cdot, \cdot\rangle$ ne dépend pas de la métrique g^{TV}.*

iii) *Soit g'^{TW} une métrique sur TW qui a les deux propriétés suivantes.*

i) La métrique g'^{TW} coïncide avec g^{TX} sur TX,

ii) Les sous-fibrés $T^H W$ et TX sont orthogonaux pour g'^{TW}.

Soit $\nabla'^{TW,L}$ la connexion de Levi-Civita correspondante sur TW. Alors $\nabla^{TX} = P^{TX}\nabla'^{TW,L}$. Si X, X' sont des sections C^∞ de TX, si U, U' sont des sections C^∞ de TV, et si $Y = X' + U^H, Y' = U'^H$, alors

$$2\langle S(X)Y, Y'\rangle = \left\langle \nabla'^{TW,L}_X Y, Y'\right\rangle_{g'^{TW}} - \left\langle \nabla'^{TW,L}_X Y', Y\right\rangle_{g'^{TW}}. \tag{1.7}$$

Par (1.6) et le Théorème 1.2, on voit facilement que pour $U \in T^H W$, $V, W \in TX$, on a

$$\langle T(U,V), W\rangle = \langle T(U,W), V\rangle = -\langle S(V)W, U\rangle. \tag{1.8}$$

Le résultat suivant est établi dans [**B4**, Théorème 1.1].

Théorème 1.3. *La connexion ∇^{TX} sur (TX, g^{TX}) est caractérisée par les deux propriétés suivantes :*

- *Sur chaque fibre X, elle coïncide avec la connexion de Levi-Civita sur (TX, g^{TX}).*
- *Si $U \in TV$, alors on a*

$$\nabla^{TX}_{U^H} = L_{U^H} + \tfrac{1}{2}(g^{TX})^{-1} L_{U^H} g^{TX}. \tag{1.9}$$

On a aussi les identités suivantes,

- *Si $U, V \in T^H W$, on a*

$$T(U,V) = -P^{TX}[U,V]. \tag{1.10}$$

• *Si* $U \in TV$, $Y \in TX$, *on a*

$$T(U^H, Y) = \frac{1}{2}(g^{TX})^{-1} L_{U^H} g^{TX} Y. \tag{1.11}$$

b) Fibrations et limites adiabatiques.

Soient W, V, S des variétés $\mathcal{C}^\infty$. Soient $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$ des submersions $\mathcal{C}^\infty$ de fibres compactes X, Y. Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion $\mathcal{C}^\infty$ de fibre compacte Z. On a donc

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & W \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ & Y \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_2"] & S \end{tikzcd}$$

Soient $\widetilde{g}^{TW}$, g^{TV} des métriques sur W, V. Soient $\widetilde{g}^{TZ}, g^{TX}, g^{TY}$ les métriques induites par $\widetilde{g}^{TW}, g^{TV}$ sur TZ, TX, TY.

Soit $T_1^H W$ (resp. $T_2^H V$) le sous-fibré de TW orthogonal à TX pour $\widetilde{g}^{TW}$ (resp. TV orthogonal à TY pour g^{TV}). Soit $T_1, S_1, \langle S_1(\cdot)\cdot, \cdot\rangle$ (resp. $T_2, S_2, \langle S_2(\cdot)\cdot, \cdot\rangle$) les tenseurs définis en (a) associés à $(\pi_1, g^{TX}, T_1^H W)$ (resp. $(\pi_2, g^{TY}, T_2^H V)$).

Pour $T > 0$, on pose

$$\begin{aligned} g_T^{TW} &= \frac{1}{T^2}\widetilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}, \\ g^{TW} &= g_1^{TW}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Soit g_T^{TZ} la métrique induite par g_T^{TW} sur TZ. Soit $T_{3,T}^H W$ le sous-fibré de TW orthogonal à TZ pour g_T^{TW}. Soit $T_{3,T}, S_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot)\cdot, \cdot\rangle_T$ les tenseurs définis en (a) associés à $(\pi_3, g_T^{TZ}, T_{3,T}^H W)$.

Soit ∇^{TX} (resp. ∇^{TY}, resp. ∇_T^{TZ}) la connexion sur (TX, g^{TX}) (resp. (TY, g^{TY}), resp. (TZ, g_T^{TZ})) associée à $(\pi_1, g^{TX}, T_1^H W)$ (resp. $(\pi_2, g^{TY}, T_2^H V)$, resp. $(\pi_3, g_T^{TZ}, T_{3,T}^H W)$).

Le but de cette Section est de décrire l'asymptotique de $\nabla_T^{TZ}, T_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot)\cdot, \cdot\rangle_T$ quand $T \to \infty$. Si S est un point, on a déjà étudié cette question dans le cadre complexe dans [**BerB**, §4 et §7].

On pose

$$T^H Z = TZ \cap T_1^H W. \tag{1.13}$$

Alors on a les identifications de fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ sur W,

$$\begin{aligned} TZ &\simeq T^H Z \oplus TX, \\ T^H Z &\simeq \pi_1^* TY. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Les fibrés $T^H Z$ et TX sont orthogonaux pour $\widetilde{g}^{TZ}$. Soit $P^{T^H Z}$ (resp. P^{TX}) la projection de $TZ = T^H Z \oplus TX$ sur $T^H Z$ (resp. TX). Soit $g^{T^H Z}$ la métrique sur $T^H Z$ induite par g^{TY}.

On pose

$$T^H_{3,\infty}W = \{X \in T^H_1 W, \pi_{1*}X \in T^H_2 V\}. \tag{1.15}$$

On obtient $T^H_{3,\infty}W$ de la manière suivante : tout d'abord on relève TS à $T^H_2 V$, puis on relève $T^H_2 V$ comme sous-fibré de TV dans $T^H_1 W$. On a :

$$T^H_1 W = T^H_{3,\infty}W \oplus T^H Z. \tag{1.16}$$

Les fibrés $T^H_{3,\infty}W$ et $T^H Z$ sont orthogonaux pour la métrique $\pi_1^* g^{TV}$.

Pour $U \in TS$, soit $U^H_{3,T} \in T^H_{3,T}W$ $(1 \leq T \leq +\infty)$ (resp. $U^H_2 \in T^H_2 V$) le relèvement de U dans $T^H_{3,T}W$ (resp. $T^H_2 V$) qui est tel que $\pi_{3*}U^H_{3,T} = U$ (resp. $\pi_{2*}U^H_2 = U$). Pour $U \in TV$, soit $U^H_1 \in T^H_1 W$ le relèvement de U dans $T^H_1 W$ qui est tel que $\pi_{1*}U^H_1 = U$. On remarque que pour $U \in TS$,

$$U^H_{3,\infty} = (U^H_2)^H_1. \tag{1.17}$$

DÉFINITION 1.4. Soient $h \in \mathrm{End}(T^H Z)$, $h' \in \mathrm{Hom}(T^H_{3,\infty}W, T^H Z)$ tels que si $U, V \in TY$, $X \in T^H_2 V$, alors

$$\begin{aligned} \left\langle U^H_1, V^H_1 \right\rangle_{\widetilde{g}^{TZ}} &= \left\langle h U^H_1, V^H_1 \right\rangle_{g^{T^H Z}}. \\ \left\langle X^H_1, V^H_1 \right\rangle_{\widetilde{g}^{TW}} &= \left\langle h' X^H_1, V^H_1 \right\rangle_{g^{T^H Z}}. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Soient g^{TS}, g'^{TS} des métriques sur TS. Notons que par [**BGS2**, Remarque 1.6] et par (1.18), les objets introduits précédemment sont inchangés quand on remplace $\widetilde{g}^{TW}$, g^{TV} par $\widetilde{g}^{TW} + \pi_3^* g^{TS}$, $g^{TV} + \pi_2^* g'^{TS}$.

Proposition 1.5. *Si $U \in TS$, $1 \leq T < +\infty$, on a l'identité suivante dans TW*

$$U^H_{3,T} = U^H_{3,\infty} - \frac{1}{T^2}\left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1} h' U^H_{3,\infty}. \tag{1.19}$$

PREUVE: Par définition,

(1.20)

$$T^H_{3,T}W = \{X \in TW, \left(\frac{1}{T^2}\widetilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}\right)(X,Y) = 0, \text{ pour tout } Y \in TZ\}.$$

En prenant $Y \in TX$ dans (1.20), on a

$$T^H_{3,T}W \subset T^H_1 W. \tag{1.21}$$

Donc il existe $U(T) \in TV$ tel que

$$U^H_{3,T} = U(T)^H_1. \tag{1.22}$$

Alors

$$\pi_{2*}(U(T) - U^H_2) = \pi_{3*}(U^H_{3,T} - U^H_{3,\infty}) = 0, \tag{1.23}$$

et donc

$$U_1(T) = U(T) - U_2^H \in TY. \tag{1.24}$$

D'après (1.17), (1.20), (1.24), pour tout $Y \in TY$, comme $Y_1^H \in TZ$,

$$\left(\frac{1}{T^2}\widetilde{g}^{TW} + \pi_1^* g^{TV}\right)(U_1(T)_1^H, Y_1^H) = \frac{-1}{T^2} < U_{3,\infty}^H, Y >_{\widetilde{g}^{TW}} . \tag{1.25}$$

Par (1.24), $U_1(T)_1^H \in T^H Z$. En utilisant (1.18), (1.25), on a

$$U_1(T)_1^H = \frac{-1}{T^2}\left(1 + \frac{h}{T^2}\right)^{-1} h' U_{3,\infty}^H. \tag{1.26}$$

Par (1.22), (1.24), (1.26), on en déduit (1.19). ■

Maintenant, on étudie l'asymptotique de $\nabla_T^{TZ}, T_{3,T}, \langle S_{3,T}(\cdot)\cdot,\cdot\rangle_T$.
On rappelle qu'on a l'identification de fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ sur W

$$TZ \simeq T^H Z \oplus TX.$$

Soit $\nabla^{T^H Z}$ la connexion sur $T^H Z$ induite par ∇^{TY}, soit ${}^0\nabla^{TZ}$ la connexion sur TZ

$${}^0\nabla^{TZ} = \nabla^{T^H Z} \oplus \nabla^{TX}. \tag{1.27}$$

Soit $B_T (T \in [1, +\infty])$ une famille de tenseurs, on notera que quand $T \to +\infty$

$$B_T = O\left(\frac{1}{T^2}\right),$$

si pour tout $k \in \mathbf{N}$, $K \subset S$ compact, il existe $c > 0$ tel que pour $T \geq 1$, le sup des normes de B_T et de ses dérivées d'ordre $\leq k$ sur K est dominé par $\frac{c}{T^2}$.

Sur chaque fibre Z, soit $\widetilde{\nabla}^{TZ}$ la connexion de Levi-Civita sur $(TZ, \widetilde{g}^{TZ})$. Soit $g'^{TZ} = \pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX}$ la métrique sur $TZ = T^H Z \oplus TX$.

DÉFINITION 1.6. Sous l'identification $TW = T_{3,\infty}^H W \oplus TZ$, soit $A_{3,\infty}$ la 1-forme sur W à valeur dans $\mathrm{End}(TZ)$ définie par

(1.28)

$$\langle A_{3,\infty}(X)Y, Z\rangle_{g'^{TZ}} = \left\langle (\widetilde{\nabla}^{TZ} - {}^0\nabla^{TZ})(X)Y, P^{TX}Z\right\rangle_{g^{TX}} \text{ si } X, Y, Z \in TZ,$$
$$\frac{1}{2}\left\{\left\langle \left[X, P^{T^H Z}Y\right], P^{TX}Z\right\rangle_{g^{TX}} + \left\langle \left[h'X, P^{TX}Z\right], P^{T^H Z}Y\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}}\right\}$$
$$\text{si } X \in T_{3,\infty}^H W, Y, Z \in TZ.$$

On pose

$$\nabla_\infty^{TZ} = {}^0\nabla^{TZ} + A_{3,\infty}. \tag{1.29}$$

Théorème 1.7. *La connexion ∇^{TZ}_∞ préserve TX, et sa restriction à TX est égale à ∇^{TX}. Quand $T \to +\infty$,*

$$\nabla^{TZ}_T = \nabla^{TZ}_\infty + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{1.30}$$

PREUVE: Si Y, Z sont des sections $\mathcal{C}^\infty$ de TZ, pour $X \in TW$, on doit calculer l'asymptotique de $\left\langle \nabla^{TZ}_{T,X} Y, Z\right\rangle_{g'^{TZ}}$ quand $T \to +\infty$.

Soient Y_1, Z_1 (resp. Y_2, Z_2) des sections $\mathcal{C}^\infty$ de TY (resp. TX). Soient $Y = Y^H_{1,1} + Y_2$, $Z = Z^H_{1,1} + Z_2$.

i) Le cas où $X \in TZ$.

Soient X_1, X_2 des sections $\mathcal{C}^\infty$ de TY, TX. Soit $X = X^H_{1,1} + X_2$. Par (1.12), on a

$$\left\langle \nabla^{TZ}_{T,X} Y, Z\right\rangle_{g'^{TZ}} = T^2 \left\langle \nabla^{TZ}_{T,X} Y, Z_2\right\rangle_{g^{TZ}_T} + \left\langle \nabla^{TZ}_{T,X} Y, Z^H_{1,1}\right\rangle_{g^{TZ}_T} \left(1 + O\left(\frac{1}{T^2}\right)\right). \tag{1.31}$$

En utilisant (1.2), le Théorème 1.3, et (1.31), on a

$$\left\langle \nabla^{TZ}_{T,X} Y, Z\right\rangle_{g'^{TZ}} = \left\langle \widetilde{\nabla}^{TZ}_X Y, Z_2\right\rangle_{g^{TX}} + \left\langle \nabla^{TY}_{X_1} Y_1, Z_1\right\rangle_{g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{1.32}$$

ii) Le cas où $X \in T^H_{3,\infty} W$.

Soit U une section $\mathcal{C}^\infty$ de TS . Soit $X = U^H_{3,\infty}$.

• Supposons d'abord que $Z \in TX$. Alors $Z_1 = 0$. Par les Théorèmes 1.3 et 1.5, et par (1.27), on a

$$\begin{aligned}
2\left\langle \nabla^{TZ}_{T,U^H_{3,\infty}} Y, Z\right\rangle_{g'^{TZ}} &= 2T^2 \left\langle \nabla^{TZ}_{T,U^H_{3,T}} Y, Z\right\rangle_{g^{TZ}_T} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right)\\
&= T^2 \Big\{ \left\langle \left[U^H_{3,T}, Y\right], Z\right\rangle_{g^{TZ}_T} + \left\langle \left[Z, U^H_{3,T}\right], Y\right\rangle_{g^{TZ}_T}\\
&\quad + U^H_{3,T} \langle Y, Z\rangle_{g^{TZ}_T} \Big\} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right)\\
&= 2\left\langle \nabla^{TX}_{U^H_{3,\infty}} Y_2, Z\right\rangle_{g^{TX}} + 2\left\langle A_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}) Y, Z\right\rangle_{g'^{TZ}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right).
\end{aligned} \tag{1.33}$$

• Supposons que $Z \in T^H_1 W$. Alors $Z_2 = 0$. En utilisant les Théorèmes 1.3, 1.5, on obtient:

$$\left\langle \nabla^{TZ}_{T,U^H_{3,\infty}} Y, Z^H_{1,1}\right\rangle_{g^{TZ}_T} = \left\langle \nabla^{TY}_{U^H_2} Y_1, Z_1\right\rangle_{g^{TY}} + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{1.34}$$

Nous avons bien démontré le Théorème 1.7. ■

Soit g^{TS} une métrique sur TS, soit ∇^{TS} la connexion de Levi-Civita sur (TS, g^{TS}). Soit $g^{T^H_{3,\infty}W}$ la métrique et $\nabla^{T^H_{3,\infty}W}$ la connexion sur $T^H_{3,\infty}W$ induites par g^{TS}, ∇^{TS}. Soit ${}^0\nabla^{TW}_\infty$ la connexion sur $TW = T^H_{3,\infty}W \oplus TZ$

$${}^0\nabla^{TW}_\infty = \nabla^{T^H_{3,\infty}W} \oplus \nabla^{TZ}_\infty, \tag{1.35}$$

et soit $T_{3,\infty}$ la torsion de ${}^0\nabla^{TW}_{\infty}$.

Proposition 1.8. *On a*

$$\begin{aligned}
T_{3,\infty}(X,Y) &= T_1(X,Y) + [T_2(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y)]_1^H + A_{3,\infty}(X)Y \\
&\quad \text{si } X \in T^H_{3,\infty}W, Y \in TW, \\
T_{3,\infty}(X,Y) &= 0 \quad \text{si } X, Y \in TZ.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

PREUVE: On fait le calcul dans les cas suivants.
i) Le cas où $X, Y \in T^H_{3,\infty}W$.
Soient U, U' des sections C^∞ de TS, alors

$$\begin{aligned}
T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}) &= \nabla^{T^H_{3,\infty}W}_{U^H_{3,\infty}} U'^H_{3,\infty} - \nabla^{T^H_{3,\infty}W}_{U'^H_{3,\infty}} U^H_{3,\infty} - \left[U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}\right] \\
&= \{[U,U']\}^H_{3,\infty} - \left[U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}\right] \\
&= T_1(U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}) + \left[T_2(U^H_2, U'^H_2)\right]_1^H .
\end{aligned} \tag{1.37}$$

ii) Le cas où $X \in T^H_{3,\infty}W$, $Y \in TX$.
Soit U (resp. Y) une section C^∞ de TS (resp. TX), alors, par Théorème 1.7,

$$T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, Y) = \nabla^{TX}_{U^H_{3,\infty}} Y - \left[U^H_{3,\infty}, Y\right] = T_1(U^H_{3,\infty}, Y). \tag{1.38}$$

iii) Le cas où $X \in T^H_{3,\infty}W$, $Y \in T^H_1W$.
Soit U (resp. Z) une section C^∞ de TS (resp. TY), alors

$$\begin{aligned}
T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, Z^H_1) &= \nabla^{T^HZ}_{U^H_{3,\infty}} Z^H_1 + A_{3,\infty}(U^H_{3,\infty})Z^H_1 - \left[U^H_{3,\infty}, Z^H_1\right] \\
&= -\left[U^H_{3,\infty}, Z^H_1\right] + \left[\nabla^{TY}_{U^H_2} Z\right]_1^H + A_{3,\infty}(U^H_{3,\infty})Z^H_1 \\
&= T_1(U^H_{3,\infty}, Z^H_1) + \left[T_2(U^H_2, Z)\right]_1^H + A_{3,\infty}(U^H_{3,\infty})Z^H_1 .
\end{aligned} \tag{1.39}$$

iv) Le cas où $X, Y \in TZ$.
Soient X, Y des sections C^∞ de TZ. D'après les Théorèmes 1.3, 1.7, on a

$$\begin{aligned}
T_{3,\infty}(X,Y) &= \nabla^{TZ}_{\infty,X}Y - \nabla^{TZ}_{\infty,Y}X - [X,Y] \\
&= \lim_{T\to\infty} (\nabla^{TZ}_{T,X}Y - \nabla^{TZ}_{T,Y}X - [X,Y]) = 0.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Nous avons bien démontré la Proposition 1.8. ∎

Théorème 1.9. *Quand $T \to +\infty$,*

$$T_{3,T} = T_{3,\infty} + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{1.41}$$

PREUVE: On a des identifications de fibrés vectoriels C^∞ sur V

$$\begin{aligned}
TW &= T^H_{3,T}W \oplus TZ, \\
T^H_{3,T}W &\simeq \pi_3^* TS.
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Soit $\nabla^{T^H_{3,T}W}$ la connexion induite par ∇^{TS} sur $T^H_{3,T}W$. Alors $T_{3,T}$ est la torsion de la connexion $\nabla^{T^H_{3,T}W} \oplus \nabla^{TZ}_T$. En utilisant la Proposition 1.5, le Théorème 1.7 et (1.35), on a (1.41). ■

On rappelle que P^{T^HZ} (resp. P^{TX}) est la projection de $TZ \simeq T^HZ \oplus TX$ sur T^HZ (resp. TX).

Théorème 1.10.
i) *Pour $X \in TX$, $Z \in TZ$, $U, U' \in TS$, on pose $Y_T = Z + U^H_{3,T}$, $Y'_T = U'^H_{3,T}$. Alors quand $T \to +\infty$,*

$$
\begin{aligned}
T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T\rangle_T &= \langle S_1(X)Y_\infty, Y'_\infty\rangle \\
&\quad + \tfrac{1}{2} L_X \left\langle h'Y'_\infty, P^{T^HZ}Z\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right).
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

ii) *Pour $X_1, Y_1 \in TY$, $U, U' \in TS$, on pose $X = X^H_{1,1}$, $Y_T = Y^H_{1,1} + U^H_{3,T}$, $Y'_T = U'^H_{3,T}$. Alors quand $T \to +\infty$,*

$$
\langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T\rangle_T = \left\langle S_2(X_1)(Y_1 + U^H_2), U'^H_2\right\rangle + O\left(\frac{1}{T^2}\right).
\tag{1.44}
$$

PREUVE: **i)** Soit $X \in TX$, $Z \in TZ$, $U, U' \in TS$, soit $Y_T = Z + U^H_{3,T}$, $Y'_T = U'^H_{3,T}$. Alors d'après (1.6), (1.8), (1.19), le Théorème 1.9, quand $T \to +\infty$, on a

(1.45)

$$
\begin{aligned}
T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T\rangle_T &= -T^2 \left\langle T_{3,T}(U'^H_{3,T}, Z), X\right\rangle_{g^{TZ}_T} + \tfrac{T^2}{2} \left\langle T_{3,T}(U^H_{3,T}, U'^H_{3,T}), X\right\rangle_{g^{TZ}_T} \\
&= -\left\langle P^{TX} T_{3,\infty}(U'^H_{3,\infty}, Z), X\right\rangle_{g^{TX}} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\langle P^{TX} T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}), X\right\rangle_{g^{TX}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right).
\end{aligned}
$$

Par (1.6), (1.8), (1.28), (1.36), on a

$$
\begin{aligned}
T^2 \langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T\rangle_T &= -\left\langle T_1(U'^H_{3,\infty}, P^{TX}Z), X\right\rangle_{g^{TX}} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\langle T_1(U^H_{3,\infty} + P^{T^HZ}Z, U'^H_{3,\infty}), X\right\rangle_{g^{TX}} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\langle \left[X, h'U'^H_{3,\infty}\right], P^{T^HZ}Z\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right) \\
&= \langle S_1(X)Y_\infty, Y'_\infty\rangle + \tfrac{1}{2} L_X \left\langle h'U'^H_{3,\infty}, P^{T^HZ}Z\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right).
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

ii) Soit $X_1, Y_1 \in TY$, $U, U' \in TS$, soit $X = X^H_{1,1}$, $Y_T = Y^H_{1,1} + U^H_{3,T}$, $Y'_T = U'^H_{3,T}$. Alors d'après (1.6), (1.8), (1.19), le Théorème 1.9, quand $T \to +\infty$, on a

$$
\begin{aligned}
\langle S_{3,T}(X)Y_T, Y'_T\rangle &= -\left\langle T_{3,T}(U'^H_{3,T}, Y^H_{1,1}), X^H_{1,1}\right\rangle_{g^{TZ}_T} + \tfrac{1}{2}\left\langle T_{3,T}(U^H_{3,T}, U'^H_{3,T}), X^H_{1,1}\right\rangle_{g^{TZ}_T} \\
&= -\left\langle P^{T^HZ} T_{3,\infty}(U'^H_{3,\infty}, Y^H_{1,1}), X^H_{1,1}\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\left\langle P^{T^HZ} T_{3,\infty}(U^H_{3,\infty}, U'^H_{3,\infty}), X^H_{1,1}\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right) \\
&= -\left\langle T_2(U'^H_2, Y_1), X_1\right\rangle_{g^{TY}} + \tfrac{1}{2}\left\langle T_2(U^H_2, U'^H_2), X_1\right\rangle_{g^{TY}} + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right) \\
&= \left\langle S_2(X_1)(Y_1 + U^H_2), U'^H_2\right\rangle + O\left(\tfrac{1}{T^2}\right).
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

On a fini la preuve du Théorème 1.10. ∎

c) Fibrations kählériennes.

Soit W et V des variétés complexes, soit $\pi : W \to V$ une submersion holomorphe de fibre compacte X. Soit $TX = TW/V$ le fibré tangent holomorphe relatif. Soit J^{TX} la structure complexe de $T_{\mathbf{R}}X$. Soit g^{TX} une métrique hermitienne sur TX.

Dans la suite, pour les fibrés réels, on utilise un indice $\mathbf{R}$ pour distinguer des fibrés complexes.

Soit $T^H W$ un sous-fibré vectoriel de TW, tel que :

$$TW = T^H W \oplus TX. \tag{1.48}$$

On rappelle la définition d'une fibration kählérienne dans [**BGS2**, Définition 1.4].

DÉFINITION 1.11. On dit que le triplet $(\pi, g^{TX}, T^H W)$ définit une fibration kählérienne s'il existe ω une 2-forme réelle, C^∞ sur W de type (1,1) qui a les propriétés suivantes :

a) La forme ω est fermée.

b) Si $X \in TX$, $Y \in T^H W$, alors

$$\omega(X, \overline{Y}) = \omega(Y, \overline{X}) = 0. \tag{1.49}$$

c) Si $X, Y \in T_{\mathbf{R}}X$, alors

$$\omega(X, Y) = \left\langle X, J^{TX} Y \right\rangle_{g^{TX}}. \tag{1.50}$$

Le résultat suivant est démontré dans [**BGS2**, Théorème 1.5].

Théorème 1.12. *Soit ω une 2-forme réelle C^∞ sur M de type (1,1) qui vérifie les propriétés suivantes:*

a) *La forme ω est fermée.*

b) *L'application bilinéaire $X, Y \in T_{\mathbf{R}}X \to \omega(J^{TX}X, Y)$ définit un produit hermitien g^{TX} sur TX. Pour tout $x \in W$, on pose*

$$T_x^H W = \left\{ Y \in T_x W, \text{ pour tout } X \in TX, \omega(X, \overline{Y}) = 0 \right\}. \tag{1.51}$$

Alors $T^H W$ est un sous-fibré de TW tel que $TW = T^H W \oplus TX$. De plus $(\pi, g^{TX}, T^H W)$ est une fibration kählérienne, et ω est une (1,1) forme associée.

Une (1,1)-forme ω' sur W est associée à la fibration kählérienne $(\pi, g^{TX}, T^H W)$ si et seulement s'il existe une (1,1)-forme η réelle, fermée, C^∞ sur V, telle que

$$\omega' - \omega = \pi^* \eta. \tag{1.52}$$

Dans ce cas, les résultats suivants sont établis dans [BGS2, Théorème 1.7].

Théorème 1.13.
i) *La connexion $\nabla^{T_{\mathbf{R}}X}$ sur $T_{\mathbf{R}}X$ préserve la structure complexe de $T_{\mathbf{R}}X$, et elle induit la connexion holomorphe hermitienne ∇^{TX} sur TX pour g^{TX}.*
ii) *La 2-forme T est de type (1,1). Pour tout $U \in T_{\mathbf{R}}X$, la 2-forme sur W, $Y, Z \to \langle S(U)Y, Z\rangle$ est de type (1,1). Si $U, V \in TX$, alors $S(U)\overline{V} = 0$, $S(\overline{V})U = 0$.*

d) L'asymptotique des tenseurs associés aux fibrations kählériennes.

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y. Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomophe de fibre compacte Z.

Soit $\widetilde{\omega}^W$ (resp. ω^V) une (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W (resp. V) qui vérifie l'hypothèse du Théorème 1.12 pour π_3 (resp. π_2).

Pour $T > 0$, on pose

$$\begin{aligned}\omega_T^W &= \frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V, \\ \omega^W &= \omega_1^W.\end{aligned} \tag{1.53}$$

Soient $\widetilde{g}^{TZ}$, g^{TX}, g^{TY}, g_T^{TZ} les métriques hermitiennes sur TZ, TX, TY, TZ induites par $\widetilde{\omega}^W$, $\widetilde{\omega}^W$, ω^W, ω_T^W. Soit ∇^{TX}, ∇^{TY}, ∇_T^{TZ} les connexions holomorphes hermitiennes sur (TX, g^{TX}), (TY, g^{TY}), (TZ, g_T^{TZ}).

Soit $T_1^H W$ (resp. $T_2^H V$, resp. $T_{3,T}^H W$) le sous-fibré défini en (c) associé à $(\pi_1, \widetilde{\omega}^W, W, V)$ (resp. (π_2, ω^V, V, S), resp. $(\pi_3, \omega_T^W, W, S)$).

DÉFINITION 1.14. Soient $h \in \mathrm{End}(T^H Z)$, $h' \in \mathrm{Hom}(T_{3,\infty}^H W, T^H Z)$ tels que si $U, V \in TY, X \in T_2^H V$,

$$\begin{aligned}\left\langle U_1^H, \overline{V}_1^H \right\rangle_{\widetilde{g}^{TZ}} &= \left\langle hU_1^H, \overline{V}_1^H \right\rangle_{g^{T^H Z}} \\ i\widetilde{\omega}^W(X_1^H, \overline{V}_1^H) &= \left\langle h' X_1^H, \overline{V}_1^H \right\rangle_{g^{T^H Z}}.\end{aligned} \tag{1.54}$$

Alors h est une section auto-adjointe définie positive de $\mathrm{End}(T^H Z)$. Soit $\overline{h} \in \mathrm{End}(\overline{T^H Z})$ (resp. $\overline{h}' \in \mathrm{Hom}(\overline{T_{3,\infty}^H W}, \overline{T^H Z})$) le conjugué de h (resp. h'). On prolonge h à $T_{\mathbf{R}}^H Z$ (resp. h' de $T_{3,\infty,\mathbf{R}}^H W$ à $T_{\mathbf{R}}^H Z$).

Notons que $\widetilde{\omega}^W$, ω^V ne définissent en général pas des métriques kählériennes sur W, V. Toutefois, si $s_0 \in S$, si ω^S est une forme de Kähler sur un voisinage U de s_0 dans S, pour $\lambda \gg 0$, $\widetilde{\omega}^W + \lambda\pi_3^*\omega^S$, $\omega^V + \lambda\pi_2^*\omega^S$ sont des formes kählériennes sur $\pi_3^{-1}(U)$, $\pi_2^{-1}(U)$. On peut alors effectuer les constructions de la Section 1 (b) sur $\pi_3^{-1}(U)$, $\pi_2^{-1}(U)$. Les constructions qui suivent la Définition 1.4 montrent que les objets construits ne dépendent pas de ω^S, et sont donc globalement définis sur W ou sur V.

Comme complément, on donne l'asymptotique de ∇_T^{TZ}.

On rappelle qu'on a l'identification de fibrés vectoriels C^∞ sur W

$$TZ \simeq T^H Z \oplus TX. \tag{1.55}$$

Soit $\nabla^{T^H Z}$ la connexion induite par ∇^{TY}, soit ${}^0\nabla^{TZ}$ la connexion sur TZ

$$ {}^0\nabla^{TZ} = \nabla^{T^H Z} \oplus \nabla^{TX}. \tag{1.56} $$

Soit $A \in T^{*(0,1)}W \otimes \mathrm{Hom}(T^H Z, TX)$ tel que $\nabla^{TZ''} = {}^0\nabla^{TZ''} + A$. Soit A^* l'adjoint de A associé aux métriques $g^{T^H Z}$ et g^{TX}.

On écrit ∇^{TZ}_T sous forme matricielle relativement au scindage $TZ \simeq T^H Z \oplus TX$. D'après [**BerB**, (7.24)], on a

$$ \nabla^{TZ}_T = \begin{bmatrix} \nabla^{T^H Z} + (T^2+h)^{-1}\nabla^{T^H Z} h & -(T^2+h)^{-1}A^* \\ A & \nabla^{TX} \end{bmatrix}. \tag{1.57} $$

On pose

$$ \nabla^{TZ}_\infty = \begin{bmatrix} \nabla^{T^H Z} & 0 \\ A & \nabla^{TX} \end{bmatrix}. \tag{1.58} $$

D'après (1.57), on a

Théorème 1.15. *Quand $T \to +\infty$*

$$ \nabla^{TZ}_T = \nabla^{TZ}_\infty + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{1.59} $$

D'après (1.16), on a l'identification de fibrés vectoriels $\mathcal{C}^\infty$ sur W

$$ TW \simeq T^H_{3,\infty} W \oplus T^H Z \oplus TX. \tag{1.60} $$

Pour $X \in T^{*(0,1)}W$, on étend $A(X)$ en un élément de $\mathrm{Hom}(TW, TX)$, en supposant que A s'annule sur $T^H_{3,\infty} W \oplus TX$. On étend aussi A en un élément de $T^*_{\mathbf{R}} W \otimes \mathrm{Hom}(T_{\mathbf{R}} W, T_{\mathbf{R}} X)$ avec la convention : pour $X, Y \in T_{\mathbf{R}} W$

$$ A(X)Y = A(X^{0,1})Y^{1,0} + \overline{A(X^{0,1})Y^{1,0}}. \tag{1.61} $$

Par (1.29), (1.58), on sait qu'on a

$$ A = A_{3,\infty}. \tag{1.62} $$

2 Formes de torsion analytique

Dans cette Section, on rappelle la construction de formes de torsion analytique dans **[BKö]** associées aux fibrations kählériennes $\pi : W \to V$, et on explique les formules d'anomalie **[BKö]**.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on construit la superconnexion de Levi-Civita associée à une fibration **[B1]**. Dans (b), on décrit les formes de Chern de **[BGS2]** qui dépendent d'un paramètre $u > 0$, et on rappelle des résultats de **[BGS2]**, **[BeGeV]** sur l'asymptotique de ces formes quand $u \to 0$ et $u \to +\infty$. Dans (c), on construit des formes de torsion analytique de **[BKö]**, et on donne les formules d'anomalie.

Dans cette Section, on utilise les mêmes notations qu'à la Section 1 (c).

a) Superconnexion de Levi-Civita d'une fibration kählérienne.

Soient W et V des variétés complexes, soit $\pi : W \to V$ une submersion holomorphe de fibre compacte X. Soit ω^W une (1,1)-forme réelle, fermée sur W, comme au Théorème 1.12. Soit g^{TX} la métrique sur TX induite par ω^W.

Soit ξ un fibré vectoriel holomoprhe sur W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soient ∇^{TX}, ∇^ξ les connexions holomorphes hermitiennes sur (TX, g^{TX}), (ξ, h^ξ). Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ induite par ∇^{TX}. Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$

$$\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi} = \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi. \tag{2.1}$$

Pour $b \in V$, soit $(\Omega(X_b, \xi_{|X_b}), \overline{\partial}^{X_b})$ le complexe de Dolbeault relatif de sections $\mathcal{C}^\infty$ de $(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{|X_b}$. Alors $\Omega(X_b, \xi_{|X_b})$ va être considéré comme une fibre d'un fibré vectoriel de dimension infinie sur V dont les sections $\mathcal{C}^\infty$ sont identifiées aux sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ sur W.

Soit $*^{TX}$ l'opérateur de Hodge associé à g^{TX} sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}X)$. On définit le produit hermitien sur $\Omega(X_b, \xi_{|X_b})$,

$$\alpha, \alpha' \in \Omega(X_b, \xi_{|X_b}) \to \langle \alpha, \alpha' \rangle_b = \frac{1}{(2\pi)^{\dim X}} \int_{X_b} \left\langle \alpha \wedge *^{TX} \alpha' \right\rangle_{h^\xi}. \tag{2.2}$$

Soit dv_X la forme de volume sur X associée à g^{TX} sur TX. Soit $\langle\ \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}$ le produit hermitien sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$ associé aux métriques g^{TX}, h^ξ sur TX, ξ. Alors pour $\alpha, \alpha' \in \Omega(X_b, \xi_{|X_b})$, on a

$$\langle s, s' \rangle_b = (2\pi)^{-\dim X} \int_{X_b} \langle s, s' \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}\, dv_X.$$

Soit $\overline{\partial}^{X_b *}$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^{X_b}$ pour le produit hermitien (2.2).

DÉFINITION 2.1. Si s est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $\Omega(X, \xi_{|X})$, si $U \in T_{\mathbf{R}}V$, on pose

$$\nabla_U^{\Omega(X,\xi_{|X})} s = \nabla_{U^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi} s. \tag{2.3}$$

Par [**B1**, §1 (b)], $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}$ est une connexion sur le fibré vectoriel $\Omega(X,\xi_{|X})$. Soient $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})'}$, $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''}$ les parties holomorphes et antiholomorphes de $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}$.

Le résultat suivant est démontré dans [**BGS2**, Théorème 1.14].

Théorème 2.2. *La connexion $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}$ préserve le produit hermitien (2.2) sur $\Omega(X,\xi_{|X})$. Sa courbure est de type (1,1). De plus*

$$\left[\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''},\overline{\partial}^{X}\right]=0,\qquad \left[\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})'},\overline{\partial}^{X*}\right]=0. \tag{2.4}$$

La fibre $\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi$ est un $c(T_{\mathbf{R}}X)$-module de Clifford. En effet, si $U\in TX$, soit $U'\in T^{*(0,1)}X$ qui correspond à U par la métrique g^{TX}. Si $U,V\in TX$, on pose

$$c(U)=\sqrt{2}U'\wedge,\qquad c(\overline{V})=-\sqrt{2}i_{\overline{V}}. \tag{2.5}$$

Pour $X\in T_{\mathbf{R}}X\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=TX\oplus\overline{TX}$, on définit $c(X)$ par prolongement $\mathbf{C}$-linéaire. Si $X,Y\in T_{\mathbf{R}}X$, on a :

$$c(X)c(Y)+c(Y)c(X)=-2\left\langle X,Y\right\rangle_{g^{TX}}. \tag{2.6}$$

Soit $f_1,\dots,f_{2m}$ une base de $T_{\mathbf{R}}V$, et soit $f^1,\dots,f^{2m}$ la base duale de $T^*_{\mathbf{R}}V$.

DÉFINITION 2.3. Soit

$$c(T)=\tfrac{1}{2}\Sigma f^{\alpha}f^{\beta}c\left(T(f^H_{\alpha},f^H_{\beta})\right). \tag{2.7}$$

Alors $c(T)$ est une section de $\left(\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}V)\widehat{\otimes}\operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)\right)^{\text{impair}}$. On définit aussi $c(T^{1,0}),c(T^{0,1})$ par des formules semblables à (2.7) de sorte que

$$c(T)=c(T^{1,0})+c(T^{0,1}). \tag{2.8}$$

DÉFINITION 2.4. Pour $u>0$, on pose

$$\begin{aligned}B''_u&=\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''}+\sqrt{u}\overline{\partial}^{X}-\frac{c(T^{1,0})}{2\sqrt{2u}},\\ B'_u&=\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})'}+\sqrt{u}\overline{\partial}^{X*}-\frac{c(T^{0,1})}{2\sqrt{2u}},\\ B_u&=B'_u+B''_u.\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'après [**BGS2**, §2(a)], B_u est la superconnexion de Levi-Civita $A_{u/2}$ définie par [**B1**, §3].

Soit N_X l'opérateur de nombre de $\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi$, qui agit par multiplication par k sur $\Lambda^k(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi$.

Pour tout $U,U'\in T_{\mathbf{R}}V$, on pose

$$\omega^{H\overline{H}}(U,U')=\omega^{W}(U^H,U'^H). \tag{2.10}$$

On considère $\omega^{H\overline{H}}$ comme une section de $\left(\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}V)\widehat{\otimes}\mathrm{End}(\Omega(X,\xi_{|X}))\right)^{\mathrm{pair}}$.

DÉFINITION 2.5. Pour $u > 0$, on pose

$$N_u = N_X + i\frac{\omega^{H\overline{H}}}{u}. \tag{2.11}$$

Le résultat suivant est établi dans [**BGS2**, Théorème 2.6].

Théorème 2.6. *On a*

$$\begin{aligned} B'^2_u &= 0, \qquad B''^2_u = 0, \qquad B^2_u = [B'_u, B''_u], \\ [B''_u, N_u] &= -2u\frac{\partial}{\partial u}B''_u \qquad [B'_u, N_u] = 2u\frac{\partial}{\partial u}B'_u. \end{aligned} \tag{2.12}$$

b) Formules de transgressions.

Soit $R^\bullet\pi_*\xi = \bigoplus_{k=0}^{\dim X} R^k\pi_*\xi$ l'image directe de ξ par π. On suppose que pour tout k, $0 \le k \le \dim X, R^k\pi_*\xi$ est localement libre. Pour $b \in V$, soit $H(X_b,\xi_{|X_b})$ la cohomologie du faisceau des sections holomorphes de $\xi_{|X_b}$ sur X_b. Alors les $H(X_b,\xi_{|X_b})$ sont les fibres du fibré holomorphe $\mathbf{Z}$-gradué $H(X,\xi_{|X})$ sur V. Plus précisément

$$R^\bullet\pi_*\xi = H(X,\xi_{|X}). \tag{2.13}$$

Désormais, on suppose que $R^k\pi_*\xi$, $(0 \le k \le \dim X)$ est localement libre, et on identifie $R^\bullet\pi_*\xi$ à $H(X,\xi_{|X})$.

On pose

$$\begin{aligned} D^X_b &= \overline{\partial}^{X_b} + \overline{\partial}^{X_b*}, \\ K(X_b,\xi_{|X_b}) &= \ker D^X_b. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Par la théorie de Hodge

$$H(X_b,\xi_{|X_b}) \simeq K(X_b,\xi_{|X_b}). \tag{2.15}$$

Donc $K(X_b,\xi_{|X_b})$ est de dimension localement constante. Les $K(X_b,\xi_{|X_b})$ sont les fibres d'un fibré $C^\infty, K(X,\xi_{|X})$, sur V. D'après [**BGS3**, Théorème 3.5], l'isomorphisme canonique des fibres (2.15) provient d'un isomorphisme de fibrés vectoriels $\mathbf{Z}$-gradués sur V,

$$R^\bullet\pi_*\xi \simeq K(X,\xi_{|X}). \tag{2.16}$$

De plus $K(X,\xi_{|X})$ hérite du produit hermitien (2.2) sur $\Omega(X,\xi_{|X})$. Soit $h^{R\pi_*\xi}$ la métrique correspondante sur $R^\bullet\pi_*\xi$ par (2.16). Pour $0 \le k \le \dim X, (R^k\pi_*\xi, h^{R^k\pi_*\xi})$ est un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur V.

DÉFINITION 2.7. Soit P^W l'espace vectoriel de formes réelles sur W qui sont la somme de formes $\mathcal{C}^\infty$ de type (p,p). Soit

$$P^{W,0} = \{\alpha \in P^W, \text{ il existe } \beta, \gamma \text{ des formes } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } W, \text{ telles que } \alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma\}. \tag{2.17}$$

On définit de la même manière $P^V, P^{V,0}$.

Dans cet article, on fixe une racine carrée $\sqrt{2\pi i}$ de $2\pi i$. Soit φ l'homomorphisme de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}V)$ dans $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}V)$, $\alpha \to (2\pi i)^{-\frac{\deg \alpha}{2}}\alpha$.

Soit P une série formelle ad-invariante définie sur les matrices carrées. Soit (E, g^E) un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur W. Soit ∇^E la connexion holomorphe hermitienne sur E, et soit R^E sa courbure. Soit

$$P(E, g^E) = P\left(\frac{-R^E}{2\pi i}\right).$$

Alors $P(E, g^E)$ est une forme fermée dans P^W dont la classe de cohomologie $P(E)$ ne dépend pas de g^E.

On rappelle que si A est une matrice carrée, alors

$$\mathrm{Td}(A) = \det\left(\frac{A}{1-e^{-A}}\right), \quad \mathrm{ch}(A) = \mathrm{Tr}[\exp(A)]. \tag{2.18}$$

On pose

$$\mathrm{Td}'(A) = \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}(A + bI)_{|b=0}. \tag{2.19}$$

Le résultat suivant est établi dans [**B1**, Théorème 3.4], [**BGS2**, Théorème 2.2 et 2.9].

Théorème 2.8. *Pour $u > 0$, les formes $\varphi\mathrm{Tr}_s[\exp(-B_u^2)]$ et $\varphi\mathrm{Tr}_s[N_u \exp(-B_u^2)]$ appartiennent à P^Y, la forme $\varphi\mathrm{Tr}_s[\exp(-B_u^2)]$ est fermée et sa classe cohomologie ne dépend pas de u. De plus*

$$\frac{\partial}{\partial u}\varphi\mathrm{Tr}_s[\exp(-B_u^2)] = -\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{N_u}{u}\exp(-B_u^2)\Big]. \tag{2.20}$$

Soit

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_X \frac{\omega^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, g^\xi), \\ C_0 &= \int_X \Big(-\mathrm{Td}'(TX, g^{TX}) + \dim X\,\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\Big)\,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans la suite, les développements de séries de u sont donnés uniformément sur tout compact de V, sous les normes $\mathcal{C}^p$, $(0 \le p < +\infty)$.

Soit

$$\text{(2.22)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\dim X}(-1)^k \operatorname{ch}(R^k\pi_*\xi, h^{R^k\pi_*\xi}),\\ \operatorname{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\dim X}(-1)^k k \operatorname{ch}(R^k\pi_*\xi, h^{R^k\pi_*\xi}). \end{aligned}$$

Les résultats suivants sont établis dans [**BGS2**, Théorèmes 2.2, 2.9, 2.16]; [**BKö**, Théorème 3.4].

Théorème 2.9. ***i)*** *Il existe des formes C^∞ sur V, $A_i, C'_j \in P^V$, E_i, $(i \geq 0, j \geq -1)$ telles que quand $u \to 0$*

$$\text{(2.23)}\qquad \begin{aligned} &\varphi\operatorname{Tr}_s[\exp(-B_u^2)] = \textstyle\sum_{j=0}^k A_j u^j + O(u^k),\\ &\varphi\operatorname{Tr}_s[N_u\exp(-B_u^2)] = \textstyle\sum_{j=-1}^k C'_j u^j + O(u^k),\\ &\tfrac{\partial}{\partial b}\operatorname{Tr}_s\left[N_u\exp(-B_u^2 + b(2u\tfrac{\partial B}{\partial u}))\right]_{|b=0} = \textstyle\sum_{j=0}^k E_j u^j + O(u^k). \end{aligned}$$

avec

$$\text{(2.24)}\qquad \begin{aligned} &A_0 = \textstyle\int_X \operatorname{Td}(TX, g^{TX})\operatorname{ch}(\xi, h^\xi),\\ &C'_{-1} = C_{-1}\ ,\quad C'_0 = C_0 - \tfrac{1}{2}\varphi d^V E_0. \end{aligned}$$

ii) *Quand $u \to +\infty$,*

$$\text{(2.25)}\qquad \begin{aligned} \varphi\operatorname{Tr}_s[\exp(-B_u^2)] &= \operatorname{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right),\\ \varphi\operatorname{Tr}_s[N_u\exp(-B_u^2)] &= \operatorname{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) + O\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right). \end{aligned}$$

c) Formes de torsion analytique.

Pour $s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) > 1$, soit

$$\text{(2.26)}\qquad \zeta_1(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 u^{s-1}\left(\varphi\operatorname{Tr}_s[N_u\exp(-B_u^2)] - \operatorname{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi})\right)du.$$

En utilisant (2.23), on voit que $\zeta_1(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $s \in \mathbf{C}$ près de $s = 0$.

Pour $s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$, soit

$$\text{(2.27)}\qquad \zeta_2(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{+\infty} u^{s-1}\left(\varphi\operatorname{Tr}_s[N_u\exp(-B_u^2)] - \operatorname{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi})\right)du.$$

Alors $\zeta_2(s)$ est une fonction holomorphe de s.

DÉFINITION 2.10. Soit

$$T(\omega^W, h^\xi) = \frac{\partial}{\partial s}(\zeta_1 + \zeta_2)(0). \tag{2.28}$$

Alors $T(\omega^W, h^\xi)$ est une forme $\mathcal{C}^\infty$ sur V. En utilisant (2.26), (2.27), on a :

$$\begin{aligned} T(\omega^W, h^\xi) &= -\int_0^1 \left(\varphi \mathrm{Tr}_s[N_u \exp(-B_u^2)] - \frac{C'_{-1}}{u} - C'_0\right) \frac{du}{u} \\ &\quad - \int_1^{+\infty} \left(\varphi \mathrm{Tr}_s[N_u \exp(-B_u^2)] - \mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi})\right) \frac{du}{u} \\ &\quad + C'_{-1} + \Gamma'(1)\left(C'_0 - \mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi})\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Le résultat suivant est établi dans [**BKö**, Théorème 3.9].

Théorème 2.11. *La forme $T(\omega^W, h^\xi)$ est dans P^V, et*

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} T(\omega^W, h^\xi) = \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}) - \int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \tag{2.30}$$

Soit ω'^W une autre $(1,1)$-forme réelle, fermée sur W qui vérifie aussi l'hypothèse du Théorème 1.12. Soit g'^{TX} la métrique sur TX induite par ω'^W. Soit aussi h'^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soit $h'^{R\pi_*\xi}$ la métrique correspondante sur $R^\bullet\pi_*\xi$ aux métriques g'^{TX}, h'^ξ.

D'après [**BGS1**, § 1(f)], on peut construire des classes de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, g'^{TX})$ et $\widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi) \in P^W/P^{W,0}$, $\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi}) \in P^V/P^{V,0}$ telles que :

$$\begin{aligned} &\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} \widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, g'^{TX}) = \mathrm{Td}(TX, g'^{TX}) - \mathrm{Td}(TX, g^{TX}), \\ &\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi) = \mathrm{ch}(\xi, h'^\xi) - \mathrm{ch}(\xi, h^\xi), \\ &\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi}) = \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h'^{R\pi_*\xi}) - \mathrm{ch}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Le résultat suivant est démontré dans [**BKö**, Théorème 3.10].

Théorème 2.12. *On a :*

$$\begin{aligned} T(\omega'^W, h'^\xi) - T(\omega^W, h^\xi) &= \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_*\xi, h^{R\pi_*\xi}, h'^{R\pi_*\xi}) \\ &\quad - \textstyle\int_X \widetilde{\mathrm{Td}}(TX, g^{TX}, g'^{TX}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ &\quad - \textstyle\int_X \mathrm{Td}(TX, g'^{TX}) \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi, h^\xi, h'^\xi) \quad \text{dans } P^V/P^{V,0}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

3 Fonctorialité des formes de torsion analytique

Le but principal de cet article est d'établir les Théorèmes 3.5 et 3.11.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on donne les hypothèses et les notations de cet article. Dans (b), on énonce le résultat dans le cas où ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique. Dans (c), on énonce le résultat dans le cas où π_1 et V sont projectives.

Dans cette Section, on utilise les mêmes notations qu'à la Section 1 (c).

a) Hypothèses et notations.

Soient W, V, S des variétés complexes. Soient $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$ des submersions holomorphes de fibres compactes X, Y. Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur W.

Soit ω^W (resp. ω^V) une (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W (resp. V) qui vérifie l'hypothèse du Théorème 1.12 pour π_3 (resp. π_2). Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

On rappelle que g^{TZ}, g^{TX}, g^{TY} sont les métriques sur TZ, TX, TY induites par ω^W, ω^V.

On suppose que les $R^\bullet\pi_{1*}\xi, R^\bullet\pi_{3*}\xi, R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Comme à la Section 2 (b), on peut identifier le fibré $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ (resp. $R^\bullet\pi_{3*}\xi$, resp. $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$) aux éléments harmoniques associés dans le complexe de Dolbeault relatif $\Omega(X, \xi_{|X})$ (resp. $\Omega(Z, \xi_{|Z})$, resp. $\Omega(Y, R^\bullet\pi_{1*}\xi_{|Y})$). Soit $h^{R\pi_{1*}\xi}, h^{R\pi_{3*}\xi}, h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$ les métriques associées définies à la Section 2 (b).

Sur W, on a une suite exacte de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens :

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0. \tag{3.1}$$

Par une construction de [**BGS1**, § 1 (f)], il existe une unique classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ telle que

(3.2)
$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*\left(\mathrm{Td}(TY, g^{TY})\right)\mathrm{Td}(TX, g^{TX}).$$

La construction de $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})$ est normalisée par les conditions suivantes :

i) Elle est fonctorielle,

ii) Elle est nulle si la suite exacte (3.1) est scindée holomorphiquement et métriquement.

Soient $T_1(\omega^W, h^\xi)$, $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$, $T_3(\omega^W, h^\xi)$ les formes de torsion analytique sur V, S, S pour π_1, π_2, π_3 définies à la Définition 2.10.

Soit $s \in S$, alors d'après [**Grot**, § 3.7] (ou voir la Section 10 (b)), il existe une suite spectrale de Leray pour le foncteur dérivé du composé $\pi_{3*} = \pi_{2*} \circ \pi_{1*}$. On le notera $(E_{r,s}, d_{r,s})$. On a :

$$\begin{aligned} E_2^{i,j} &= H^i\left(Y, R^j\pi_{1*}\xi_{|Y}\right) \simeq R^i\pi_{2*}R^j\pi_{1*}\xi, \\ E_r &\Rightarrow H(Z, \xi_{|Z}) \simeq R^\bullet\pi_{3*}\xi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donc $E_2^{\cdot,\cdot}$ est un fibré vectoriel holomorphe sur S. Soit h^{E_2} la métrique sur E_2 induite par $h^{R\pi_{2*}R\pi_{1*}\xi}$. Soit $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique sur $H(Z,\xi_{|Z})$ définie à la Section 2 (b) associée à g^{TZ}, h^{ξ}.

b) Le cas acyclique.

Dans cette partie, on suppose que pour $i > 0$, on a

$$R^i\pi_{1*}\xi = 0 \quad , \quad R^i\pi_{3*}\xi = 0. \tag{3.4}$$

Alors la suite spectrale de Leray pour chaque fibre Z_s ($s \in S$) dégénère à E_2, et de plus,

$$E_2 = H(Z, \xi_{|Z}). \tag{3.5}$$

Donc par la construction de [**BGS1**, § 1 (f)], la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ est bien définie.

DÉFINITION 3.1. Soit $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi})$ la forme dans $P^S/P^{S,0}$

$$\begin{aligned} \Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi}) &= T_3(\omega^W, h^{\xi}) - T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) \\ &\quad - \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^{\xi}) \\ &\quad + \textstyle\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \mathrm{ch}(\xi, h^{\xi}) \\ &\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}\left(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Proposition 3.2. ***i)*** *On a*

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} \Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi}) = 0. \tag{3.7}$$

ii) *Si on suppose que S est Kählérienne et compacte, alors il existe une unique forme harmonique γ sur S telle que*

$$\Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi}) = \gamma \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \tag{3.8}$$

La forme $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi})$ définit une classe de cohomologie.

PREUVE: En utilisant (3.2) et le Théorème 2.11, on a (3.7). D'après (3.7) et [**GS1**, Théorème 1.2.2], on a (3.8). ∎

Théorème 3.3. *Soit ω'^W (resp. ω'^V) une autre (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W (resp. V) vérifiant l'hypothèse du Théorème 1.12 pour π_3 (resp. π_2). Soit h'^{ξ} une autre métrique hermitienne sur ξ. On a*

$$\Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi}) = \Delta(\omega'^W, \omega'^V, h'^{\xi}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \tag{3.9}$$

PREUVE: En utilisant le Théorème 2.12, les propriétés de fonctorialité de $\widetilde{\mathrm{Td}}(.,.)$ et $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$, on vérifie comme dans [**BerB**, §3(b)] qu'on a (3.9). ■

Proposition 3.4. *On suppose que S est Kählérienne et compacte. Soit ξ' un fibré vectoriel holomorphe sur S. Alors*

$$\int_S \mathrm{Td}(TS)\mathrm{ch}(\xi')\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0. \tag{3.10}$$

PREUVE: Comme S est compacte, Kählérienne, les W, V sont aussi Kählériennes. Par le Théorème 3.3, il suffit de montrer la Proposition dans le cas quand ω^W, ω^V sont des formes kählériennes. Soient g^{TW}, g^{TV} les métriques associées. Soit g^{TS} une métrique kählérienne sur TS. Soit $h^{\xi'}$ une métrique hermitienne sur ξ'.

Soit $\xi_1 = \xi \otimes \pi_3^*\xi'$, et soit h^{ξ_1} la métrique sur ξ_1 induite par h^ξ et $h^{\xi'}$. Soit (E'_r, d'_r) la suite spectrale de Leray associée à ξ_1. Alors

$$\begin{aligned} R^\bullet\pi_{1*}\xi_1 &= R^\bullet\pi_{1*}\xi \otimes \pi_2^*\xi' \\ R^\bullet\pi_{3*}\xi_1 &= E'_2 = R^\bullet\pi_{3*}\xi \otimes \xi'. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Soit $\lambda(\xi_1)$ (resp. $\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)$, resp. $\lambda(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1)$, resp. $\lambda(E'_2)$) la droite complexe qui est l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ_1 (resp. $R^\bullet\pi_{3*}\xi_1$, resp. $R^\bullet\pi_{1*}\xi_1$, resp. E'_2) sur W (resp. S, resp. V, resp. S), munie de la métrique de Quillen associée aux métriques (g^{TW}, h^{ξ_1}) (resp. $(g^{TS}, h^{R^\bullet\pi_{3*}\xi_1})$, resp. $(g^{TV}, h^{R^\bullet\pi_{1*}\xi_1})$, resp. $(g^{TS}, h^{E'_2})$) [**BerB**, § 1 (c)].

Soit σ_1 (resp. σ_2, resp. σ_3) la section canonique de $\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1) \otimes \lambda(\xi_1)$ (resp. $\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1)$, resp. $\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)\otimes\lambda(\xi_1)$) définie dans [**BerB**, §1]. Alors $\sigma = \sigma_2 \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_3^{-1}$ est la section canonique de $\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)$. Soient $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_3$ les normes de Quillen sur $\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1)\otimes\lambda(\xi_1))$, $\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1)$, $\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)\otimes\lambda(\xi_1)$. Soit aussi $\|\sigma\|_{\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)}$ la norme de Quillen sur $\lambda^{-1}(E'_2) \otimes \lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)$, alors

$$\|\sigma\|_{\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)} = \|\sigma_1\|_1\|\sigma_2\|_2\|\sigma_3\|_3^{-1}. \tag{3.12}$$

Par [**BerB**, Théorème 3.1], on a :

$$\begin{aligned} \log\|\sigma_1\|_1^2 &= -\textstyle\int_V \mathrm{Td}(TV, g^{TV})T_1(\omega^W, h^{\xi_1}) \\ &\quad + \textstyle\int_W \widetilde{\mathrm{Td}}(TW, TV, g^{TW}, g^{TV})\mathrm{ch}(\xi_1, h^{\xi_1}), \\ \log\|\sigma_3\|_3^2 &= -\textstyle\int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS})T_3(\omega^W, h^{\xi_1}) \\ &\quad + \textstyle\int_W \widetilde{\mathrm{Td}}(TW, TS, g^{TW}, g^{TS})\mathrm{ch}(\xi_1, h^{\xi_1}), \\ \log\|\sigma_2\|_2^2 &= -\textstyle\int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS})T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi_1}) \\ &\quad + \textstyle\int_V \widetilde{\mathrm{Td}}(TV, TS, g^{TV}, g^{TS})\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1, h^{R\pi_{1*}\xi_1}). \end{aligned} \tag{3.13}$$

D'après [**BGS3**, Théorème 1.23], on a

(3.14)

$$\begin{aligned} \log\|\sigma\|^2_{\lambda^{-1}(E'_2)\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)} &= \textstyle\int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS})\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi \otimes \xi', h^{E'_2}, h^{R^\bullet\pi_{3*}\xi_1}) \\ &= \textstyle\int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS})\mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'})\widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi, h^{E_2}, h^{R^\bullet\pi_{3*}\xi}). \end{aligned}$$

Par la définition de ξ_1, on sait que

$$\begin{aligned}
&T_1(\xi^W, h^{\xi_1}) = \pi_2^*\mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'})T_1(\omega^W, h^{\xi}),\\
(3.15)\qquad &T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi_1}) = \mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'})T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}),\\
&T_3(\xi^W, h^{\xi_1}) = \mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'})T_3(\omega^W, h^{\xi}).
\end{aligned}$$

En utilisant (3.2) et le Théorème 2.12, on a

$$\begin{aligned}
(3.16)\qquad &\textstyle\int_V \Big[\mathrm{Td}(TV, g^{TV}) - \pi_2^*\mathrm{Td}(TS, g^{TS})\mathrm{Td}(TY, g^{TY})\Big]T_1(\omega^W, h^{\xi_1})\\
&= \textstyle\int_V \widetilde{\mathrm{Td}}(TV, TS, g^{TV}, g^{TS})\Big(\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi_1, h^{R\pi_{1*}\xi_1})\\
&\quad - \textstyle\int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi_1, h^{\xi_1})\Big).
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
J &= \widetilde{\mathrm{Td}}(TW, TS, g^{TW}, g^{TS}) - \widetilde{\mathrm{Td}}(TW, TV, g^{TW}, g^{TV})\\
(3.17)\qquad &\quad -\pi_1^*\widetilde{\mathrm{Td}}(TV, TS, g^{TV}, g^{TS})\mathrm{Td}(TX, g^{TX}).
\end{aligned}$$

D'après (3.13), (3.15)-(3.17), on a

$$\begin{aligned}
&\log \|\sigma\|^2_{\lambda^{-1}(E_2')\otimes\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi_1)}\\
(3.18)\qquad &= \textstyle\int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS})\mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'})\Big[T_3(\omega^W, h^{\xi}) - T_2(\omega^V, h^{R^\bullet\pi_{1*}\xi})\\
&\quad - \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})T_1(\omega^W, h^{\xi})\Big] - \int_W J\mathrm{ch}(\xi, h^{\xi})\pi_3^*\mathrm{ch}(\xi', h^{\xi'}).
\end{aligned}$$

Maintenant, on calcule la forme J. On a

(3.19)
$$\frac{\bar\partial\partial}{2\pi i}J = \pi_3^*\mathrm{Td}(TS, g^{TS})\Big[\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*\mathrm{Td}(TY, g^{TY})\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\Big].$$

En procédant comme dans la preuve de [**GS4**, Lemme 14(iii)], on a

$$(3.20)\qquad J = \pi_3^*\mathrm{Td}(TS, g^{TS})\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}).$$

D'après le Théorème 3.3, (3.14), (3.18) et (3.20), on a l'identité (3.10). ■

Le but de cet article est d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.5. *On a*

$$(3.21)\qquad \Delta(\omega^W, \omega^V, h^{\xi}) = 0 \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

REMARQUE 3.6. D'après le Théorème 3.3, on sait que pour montrer le Théorème 3.5, il suffit de le montrer pour une forme ω^W donnée. Remplaçant ω^W par $\omega^W + \pi_1^*\omega^V$, on peut supposer que $\widetilde{\omega}^W$ est une $(1,1)$-forme fermée sur W vérifiant l'hypothèse du Théorème 1.12 pour π_3, et que de plus

$$\omega^W = \widetilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V. \tag{3.22}$$

c) Le cas où π_1 et V sont projectives .

Comme l'hypothèse (3.4) n'est pas satisfaite en général, on propose de montrer un résultat qui généralise le Théorème 3.5. Dans le cas général, comme E_2 n'est pas isomorphe à $H(Z, \xi_{|Z})$, le terme $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ n'est plus bien défini. Dans la suite, on donnera une façon naturelle de construire la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ quand π_1 et V sont projectives.

DÉFINITION 3.7. Soient M, B deux variétés complexes. On dit que l'application $\pi : M \to B$ est projective s'il existe un espace projectif $P(E) \xrightarrow{p} B$ associé au fibré vectoriel holomorphe E sur B, et une immersion fermée $j : M \to P(E)$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & P(E) \arrow[dl, "p"] \\ B & \end{tikzcd} \tag{3.23}$$

soit commutatif. De plus, si B est un point, on dit que la variété M est projective.

Dans cette partie, on suppose que π_1 et V sont projectives.

Alors W est aussi projective. En effet, W est projective si et seulement s'il existe un fibré en droite positif sur W. Comme $\pi_1 : W \to V$ est projective, il existe un fibré E sur V et une immersion $i : W \to P(E)$, tels qu'on ait (3.23). Soit L le fibré en droite canonique sur $P(E)$. Alors i^*L est un fibré en droite positif le long de la fibre X. Soit μ un fibré en droite positif sur V . Alors pour k assez grand, $L \otimes (\pi_1^* \mu)^k$ est positif sur W.

Théorème 3.8. *On peut définir la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ de manière "naturelle" de sorte que*

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial}\partial}{2\pi i} & \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ & = \mathrm{ch}(H(Z, \xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Théorème 3.9. *On suppose que S est Kählérienne. Soit g^{TS} une métrique kählérienne sur TS. Soit σ la section canonique de $\lambda^{-1}(E_2) \otimes \lambda(R^\bullet \pi_{3*} \xi)$. Alors on a*

(3.25)

$$\log \|\sigma\|^2_{\lambda^{-1}(E_2) \otimes \lambda(R^\bullet \pi_{3*} \xi)} = \int_S \mathrm{Td}(TS, g^{TS}) \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}).$$

REMARQUE 3.10. Les preuves des Théorèmes 3.9, 3.10 sont retardées à la Section 10. On y expliquera précisément le mot "naturel".

Maintenant, on définit la forme $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) \in P^S/P^{S,0}$ comme en (3.6). Le but de cet article est d'établir aussi le résultat suivant.

Théorème 3.11. *On a*

$$\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0 \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}. \tag{3.26}$$

REMARQUE 3.12. Dans la preuve de la Proposition 3.4, on n'utilise pas l'hypothèse (3.4) pour obtenir l'équation (3.18). En utilisant (3.18) et le Théorème 3.11, on peut aussi déduire (3.25).

4 Preuve du Théorème 3.5

Dans cette Section, on montre notre résultat essentiel, le Théorème 3.5, pour ω^W donnée par (3.22).

L'organisation de cette Section est la même que dans [**BerB**, § 4]. Comme dans [**BerB**, § 4], on donne des résultats intermédiaires dont les preuves sont données aux Sections 5-9.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on établit une identité de formes dans P^S, $\sum_{k=1}^{4} I_k^0 = \overline{\partial}\theta_1^0 - \overline{\partial}\theta_2^0 - \overline{\partial}\partial\theta_3^0$. Le Théorème 3.5 sera obtenu par passage à la limite à paritir de cette identité . Dans (b), on énonce des résultats intermédiaires qu'on va utiliser dans la preuve du Théorème 3.5. Dans (c), on calcule l'asymptotique des I_k^0. Dans (d), on traite le terme à droite de l'équation ci-dessus. Comme un problème analogue a été résolu dans [**B4**, § 6], on omet les preuves. Le lecteur en trouvera le détail dans [**B4**, § 6]. Dans (e), on finit la preuve du Théorème 3.5.

Dans cette Section, on utilise les mêmes hypothèses qu'à la Section 3, et on utilise les mêmes notations qu'aux Sections 1(c) et 3.

On rappelle que le fibré holomorphe ξ sur W vérifie l'hypothèse d'acyclicité (3.4).

a) Une 1-forme fondamentale.

Soit ω_T^W $(T > 0)$ la (1,1)-forme réelle, fermée, C^∞ sur W définie par

$$\omega_T^W = \frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^W + \pi_1^*\omega^V. \tag{4.1}$$

Alors par (3.22), on a

$$\omega^W = \omega_1^W.$$

On rappelle aussi que $g^{TZ}, g_T^{TZ}, g^{TX}, g^{TY}$ sont les métriques induites par $\omega^W, \omega_T^W, \omega^W, \omega^V$ sur TZ, TZ, TX, TY.

Soit $*_T^{TZ}$ l'opérateur de Hodge agissant sur $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*Z)$ associé à la métrique g_T^{TZ}. On pose

$$Q_T = -(*_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(*_T^{TZ}). \tag{4.2}$$

On rappelle que le fibré $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ est un $c(T_{\mathbf{R}}Z)$-module de Clifford. On note $c_T(.)$ l'action de l'algèbre de Clifford de $(T_{\mathbf{R}}Z, g_T^{T_{\mathbf{R}}Z})$ définie en (2.5).

Soit $\{e_a\}$ une base locale orthonormée de $T_{\mathbf{R}}Z$ pour la métrique g_T^{TZ}. Soit $\{g_\alpha\}$ une base de $T_{\mathbf{R}}S$, et soit $\{g^\alpha\}$ sa base duale de $T_{\mathbf{R}}^*S$.

DÉFINITION 4.1. Soit

$$\begin{aligned} M_{3,u,T} = &-\frac{i}{\sqrt{2u}}\left(\frac{\partial}{\partial T}\omega_T^W\right)(g_{\alpha,3,T}^H, e_a)g^\alpha c_T(e_a) \\ &-\frac{i}{2u}\left(\frac{\partial}{\partial T}\omega_T^W\right)(g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H)g^\alpha \wedge g^\beta - Q_T. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Soit $\omega_{3,T}^{H\overline{H}}$ la forme correspondant à (π_3, ω_T^W) en (2.10). Soit $B_{3,u,T}$, $N_{3,u,T}$ les opérateurs définis en (2.9), (2.11) associés à ω_T^W, h^ξ et $\pi_3 : W \to S$.

Soit φ (resp. φ_1) l'homomorphisme de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* S)$ dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* S)$ (resp. $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* V)$ dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* V)$): $\alpha \to (2\pi i)^{\frac{-\deg \alpha}{2}} \alpha$.

DÉFINITION 4.2. Soit $\alpha_{u,T}$ la 1-forme à valeurs dans P^S sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$

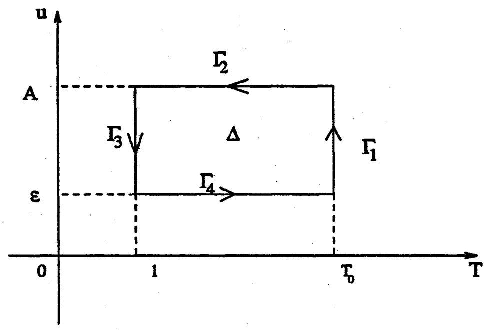
$$\begin{aligned} \alpha_{u,T} = \; & du \, \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\tfrac{2}{u} N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2) \right] \\ & + dT \varphi \mathrm{Tr}_s \left[M_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2) \right]. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Par [**BKö**, Théorème 2.9], on a :

Proposition 4.3. *On a l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned} d\alpha_{u,T} = \; & \frac{2}{u} du dT \, \varphi \left\{ \overline{\partial} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \mathrm{Tr}_s \left[\left[B'_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T} \right] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} \right. \\ & - \partial \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \mathrm{Tr}_s \left[\left[B''_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T} \right] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} \\ & \left. - \overline{\partial} \partial \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \mathrm{Tr}_s \left[N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} \right\}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, $1 \leq A < +\infty$, $1 < T_0 < +\infty$, soit $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon, A, T_0}$ le contour orienté dans $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$:



Dans la figure, Γ est composé par les segments orientés $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_4$. Alors le contour Γ est le bord d'un domaine rectangulaire Δ.

Pour $1 \leq k \leq 4$, on pose

$$I_k^0 = \int_{\Gamma_k} \alpha_{u,T}. \tag{4.6}$$

Soit

(4.7)

$$\begin{aligned} \theta_1^0 &= (2\pi i)^{-1/2} \int_\Delta \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\left[B'_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T} \right] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} du dT \\ \theta_2^0 &= (2\pi i)^{-1/2} \int_\Delta \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\left[B''_{3,u^2,T}, N_{3,u^2,T} \right] \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} du dT \\ \theta_3^0 &= (2\pi i)^{-1} \int_\Delta \frac{2}{u} \frac{\partial}{\partial b} \left\{ \varphi \mathrm{Tr}_s \left[N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2 - bM_{3,u^2,T}) \right] \right\}_{b=0} du dT. \end{aligned}$$

Théorème 4.4. *On a l'égalité suivante :*

$$\sum_{k=1}^{4} I_k^0 = \overline{\partial}\theta_1^0 - \partial\theta_2^0 - \overline{\partial}\partial\theta_3^0. \tag{4.8}$$

PREUVE: C'est une conséquence immédiate de la Proposition 4.3. ∎

b) Des résultats intermédiaires.

On rappel qu'on a une identification de fibrés vectoriels C^∞ sur W

$$TZ \simeq \pi_1^* TY \oplus TX. \tag{4.9}$$

Cette identification induit une identification de fibrés $\mathbf{Z}$-gradués

$$\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \simeq \pi_1^*\Lambda(T^{*(0,1)}Y)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}X). \tag{4.10}$$

Soient N_Z, N_X, N_Y, N_S les opérateurs de nombre sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$, $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$, $\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$, $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$. D'après (4.10), les opérateurs N_X, N_Y agissent naturellement sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$. Ils agissent aussi naturellement sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi$ et sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$. Naturellement,

$$N_Z = N_X + N_Y. \tag{4.11}$$

Soient $B_{1,u}$, $B_{2,u}$, $B_{3,u}$ les superconnexions de Levi-Civita associées à (π_1,ω^W,h^ξ), $(\pi_2,\omega^V,h^{R\pi_{1*}\xi})$, (π_3,ω^W,h^ξ) définies à la Définition 2.4. Soit $\omega_1^{H\overline{H}}$, $\widetilde{\omega}_1^{H\overline{H}}$, $\omega_2^{H\overline{H}}$, $\omega_3^{H\overline{H}}$ les formes associées à (π_1,ω^W), $(\pi_1,\widetilde{\omega}^W)$, (π_2,ω^V), (π_3,ω^W) définies en (2.10). Soient $N_{1,u}$, $\widetilde{N}_{1,u}$, $N_{2,u}$, $N_{3,u}$ les opérateurs associés à (π_1,ω^W), $(\pi_1,\widetilde{\omega}^W)$, (π_2,ω^V), (π_3,ω^W) définies à la Définition 2.5. Alors on a naturellement :

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_{1,u} &= N_X + \tfrac{i}{u}\widetilde{\omega}_1^{H\overline{H}}, \\ N_{2,u} &= N_Y + \tfrac{i}{u}\omega_2^{H\overline{H}}, \\ N_{3,u,T} &= N_Z + \tfrac{i}{u}\omega_{3,T}^{H\overline{H}}, \\ \omega_3^{H\overline{H}} &= \omega_{3,1}^{H\overline{H}}; \quad N_{3,u} = N_{3,u,1}; \quad B_{3,u} = B_{3,u,1}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Maintenant, on expose des résultats qui vont être utilisés dans la Preuve du Théorème 3.5. Les preuves des résultats seront données aux Sections 5-9.

Dans la suite, on met sur les formes C^∞ sur S la topologie de la convergence uniforme des formes et de leurs dérivées sur les parties compactes de S. Pour éviter de noter explicitement des constantes qui dépendent du compact considéré, on suppose, pour simplifier, que S est compacte.

Théorème 4.5. ***i)*** *Pour tout $u>0$,*

$$\lim_{T\to+\infty}\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u,T}\exp(-B_{3,u,T}^2)\right] = \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_{2,u}\exp(-B_{2,u}^2)\right]. \tag{4.13}$$

ii) *Pour tout $u>0$, il existe $C>0$, $\delta>0$ tels que pour $T\geq 1$,*

$$\left|\varphi\mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u,T}\exp(-B_{3,u,T}^2)\right] - \frac{2}{T}\varphi\mathrm{Tr}_s\left[(N_X-\mathrm{dim}X)\exp(-B_{2,u}^2)\right]\right| \leq \frac{C}{T^{\delta+1}}. \tag{4.14}$$

Pour $s \in S$, soit $\langle\ ,\ \rangle_{T,s}$ le produit hermitien (2.2) sur $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ associé à g_T^{TZ}, h^ξ. Soit $\overline{\partial}_T^{Z_s,*}$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^{Z_s}$ pour le produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle_{T,s}$ sur $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$. Soit

$$\begin{aligned} D_T^Z &= \overline{\partial}^Z + \overline{\partial}_T^{Z,*}, \\ D^Y &= \overline{\partial}^Y + \overline{\partial}^{Y,*}, \\ D^X &= \overline{\partial}^X + \overline{\partial}^{X,*}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Théorème 4.6. *Il existe $C > 0$, $T_0 > 1$ tels que pour tout $T \geq T_0$, $u \geq 1$,*

$$\left|\varphi \mathrm{Tr}_s[N_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2)]\right| \leq \frac{C}{u}. \tag{4.16}$$

On rappelle que le fibré holomorphe ξ vérifie l'hypothèse (3.4). Donc

$$H(Z, \xi_{|Z}) = H^0(Z, \xi_{|Z}) = K(Z, \xi_{|Z})_T = \ker D_T^Z. \tag{4.17}$$

Soit $P^{K(Z,\xi_{|Z})_T}$ la projection orthogonale de $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ sur $K(Z, \xi_{|Z})_T$ pour le produit hermitien $\langle\ ,\ \rangle_T$. Dans la suite, on note $P^{K(Z,\xi_{|Z})_T}$ par $P_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$.

Soit $h_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique sur $H(Z, \xi_{|Z})$ associée à g_T^{TZ}, h^ξ définie à la Section 2(b). Soit $\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$, ∇^{E_2} les connexions holomorphes hermitiennes sur $(H(Z, \xi_{|Z}), h_T^{H(Z,\xi_{|Z})})$, (E_2, h^{E_2}). On pose

$$Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})} = P_T^{H(Z,\xi_{|Z})} Q_T P_T^{H(Z,\xi_{|Z})}. \tag{4.18}$$

Proposition 4.7. *Quand $T \to +\infty$, on a*

$$\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2} = \nabla^{E_2,2} + O(\frac{1}{T}).$$

De plus

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} \Big\{\varphi \mathrm{Tr}_s\left[Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})} \exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\right] \\ &\quad + \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\frac{2(N_X - \dim X)}{T} \exp\left(-\nabla^{E_2,2}\right)\right]\Big\} dT \\ &= -\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Théorème 4.8. *Pour tout $T > 0$, on a*

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2)\right] \\ &= \frac{2}{T} \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \varphi_1 \mathrm{Tr}_s\left[(\widetilde{N}_{1,T^2} - \dim X) \exp(-B_{1,T^2}^2)\right]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Si $J' \in \Lambda(T_{\mathbf{C}}^* V) \widehat{\otimes} \mathbf{C}(du)$, J' peut s'écrire

$$J' = J'_0 + du J'_1; \text{ avec } J'_0, J'_1 \in \Lambda(T_{\mathbf{C}}^* V).$$

On pose

$$[J']^{du} = J'_1. \tag{4.21}$$

D'après le Théorème 2.9, on peut poser :

$$E_{1,0} = \lim_{u \to 0} \mathrm{Tr}_s \left[\widetilde{N}_{1,u} \exp\left(-B_{1,u}^2 + du(2u \frac{\partial B_{1,u}}{\partial u}) \right) \right]^{du}. \tag{4.22}$$

Théorème 4.9. ***i)*** *Il existe une forme $\mu_0(T)$, C^∞ sur S telle que pour T fixé, quand $u \to 0$,*

$$\mathrm{Tr}_s \left[u M_{3,u,T} \exp\left(-B_{3,u,T}^2 + du \frac{\partial}{\partial u} B_{3,u,T} \right) \right]^{du} = \mu_0(T) + O(u). \tag{4.23}$$

ii) *Il existe une forme E, C^∞ sur S telle que, quand $T \to +\infty$*

$$\mu_0(T) = \frac{1}{T} E + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{4.24}$$

avec

$$\varphi d^S E = (2\pi i)^{-\frac{1}{2}} d^S \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \varphi_1 E_{1,0}. \tag{4.25}$$

On rappelle aussi que ∇_T^{TZ} est la connexion holomorphe hermitienne sur (TZ, g_T^{TZ}). Soit R_T^{TZ} sa courbure.

Théorème 4.10. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, $\varepsilon \leq T \leq 1$,*

$$\begin{aligned} &\Big| \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] - \frac{2}{T^3} \int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi} \mathrm{Td}(TZ, g_{T/\varepsilon}^{TZ}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ &+ \int_Z \frac{\partial}{\partial b} \mathrm{Td} \left(\frac{-R_{T/\varepsilon}^{TZ}}{2\pi i} - b (g_{T/\varepsilon}^{TZ})^{-1} \frac{\partial}{\partial T} (g_{T/\varepsilon}^{TZ}) \right)_{b=0} \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) + \frac{1}{\varepsilon} \varphi d^S \mu_0\left(\frac{T}{\varepsilon}\right) \Big| \leq C. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Théorème 4.11. *Il existe $\delta \in]0,1]$, $C > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, $T \geq 1$,*

$$\begin{aligned} &\Big| \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \exp(-B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}^2) \right] \\ &- \frac{2}{T} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \exp(-B_{2,\varepsilon^2}^2) \right] \Big| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

REMARQUE 4.12. Les Théorèmes 4.5, 4.6 seront démontrés à la Section 5, la Proposition 4.7 à la Section 6, le Théorème 4.8 à la Section 7, les Théorèmes 4.9 et 4.10 à la Section 8, le Théorème 4.11 à la Section 9.

c) L'asymptotique des I_k^0.

1. Le terme I_1^0. D'après (4.4),

$$I_1^0 = \int_{\varepsilon^2}^{A^2} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[N_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2) \right] \frac{du}{u}. \tag{4.28}$$

α) $A \to +\infty$.

D'après le Théorème 2.9,

$$I_1^0 \to I_1^1 = \int_{\varepsilon^2}^{+\infty} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[N_{3,u,T} \exp(-B_{3,u,T}^2) \right] \frac{du}{u} \tag{4.29}$$

β) $T_0 \to +\infty$.
Par (3.4) et les Théorèmes 4.5 et 4.6, on a

$$I_1^1 \to I_1^2 = \int_{\varepsilon^2}^{+\infty} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[N_{2,u} \exp(-B_{2,u}^2) \right] \frac{du}{u}. \tag{4.30}$$

γ) $\varepsilon \to 0$.
Soit

$$\begin{aligned} C_{2,-1} &= \int_Y \frac{\omega^V}{2\pi} \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \mathrm{ch}(R^\bullet \pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi}), \\ C_{2,0} &= \int_Y \left[-\mathrm{Td}'(TY, g^{TY}) + \dim Y \, \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \right] \mathrm{ch}(R^\bullet \pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi}), \\ E_{2,0} &= \lim_{u \to +\infty} \mathrm{Tr}_s \left[N_{2,u} \exp\left(-B_{2,u}^2 + du \left(2u \frac{\partial B_{2,u}}{\partial u} \right) \right) \right]^{du}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

D'après le Théorème 2.9, on sait que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} & I_1^2 - \int_Y \frac{\omega^V}{2\pi} \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \mathrm{ch}(R^\bullet \pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi}) \frac{1}{\varepsilon^2} \\ & -\varphi d^S E_{2,0} \log \varepsilon + 2 \int_Y \Big[-\mathrm{Td}'(TY, g^{TY}) \\ & + \dim Y \, \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \Big] \mathrm{ch}(R^\bullet \pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi}) \log \varepsilon \\ & \to I_1^3 = \int_1^{+\infty} \varphi \mathrm{Tr}_s[N_{2,u} \exp(-B_{2,u}^2)] \frac{du}{u} \\ & + \int_0^1 \left\{ \varphi \mathrm{Tr}_s[N_{2,u} \exp(-B_{2,u}^2)] - \frac{C_{2,-1}}{u} - C_{2,0} + \frac{1}{2} \varphi d^S E_{2,0} \right\} \frac{du}{u} - C_{2,-1}. \end{aligned} \tag{4.32}$$

δ) **Évaluation de I_1^3.**
Par (2.29) et (4.32), on a

$$I_1^3 = -T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \Gamma'(1) \left(C_{2,0} - \frac{1}{2} \varphi d^S E_{2,0} \right). \tag{4.33}$$

2. Le terme I_2^0. Par (4.4),

$$I_2^0 = -\int_1^{T_0} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[M_{3,A^2,T} \exp(-B_{3,A^2,T}^2) \right] dT. \tag{4.34}$$

α) $A \to +\infty$.
Par [**BeGeV**, Théorème 9.19] et (4.3), on a :

$$I_2^0 \to I_2^1 = \int_1^{T_0} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[Q_T^{H(Z,\xi|_Z)} \exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi|_Z),2}) \right] dT. \tag{4.35}$$

β) $T_0 \to +\infty$.

En utilisant la Proposition 4.7, on a :

$$(4.36)\qquad \begin{aligned} &I_2^1 + 2\varphi \mathrm{Tr}_s\left[(N_X - \dim X)\exp(-\nabla^{E_2,2})\right]\log T_0 \\ &\to I_2^2 = \int_1^{+\infty}\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\left[Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})}\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\right] \\ &\qquad +\varphi\mathrm{Tr}_s\left[\frac{2(N_X-\dim X)}{T}\exp(-\nabla^{E_2,2})\right]\Big\}dT. \end{aligned}$$

γ) $\varepsilon \to 0$.
Le terme I_2^2 est constant en ε. Par la Proposition 4.7, on a :

$$(4.37)\qquad I_2^3 = I_2^2 = -\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.$$

3. Le terme I_3^0. D'après (4.4),

$$(4.38)\qquad I_3^0 = -\int_{\varepsilon^2}^{A^2}\varphi\mathrm{Tr}_s[N_{3,u}\exp(-B_{3,u}^2)]\frac{du}{u}.$$

α) $A \to +\infty$.
Par le Théorème 2.9, on a :

$$(4.39)\qquad \begin{aligned} I_3^0 \to I_3^1 = & -\int_{\varepsilon^2}^{1}\varphi\mathrm{Tr}_s[N_{3,u}\exp(-B_{3,u}^2)]\frac{du}{u} \\ & -\int_1^{+\infty}\varphi\mathrm{Tr}_s[N_{3,u}\exp(-B_{3,u}^2)]\frac{du}{u}. \end{aligned}$$

β) $T_0 \to +\infty$.
Le terme I_3^1 est constant en T_0. Donc I_3^2 est égal à I_3^1.
γ) $\varepsilon \to 0$.
Soit

$$(4.40)\qquad \begin{aligned} C_{3,-1} &= \int_Z \frac{\omega^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi), \\ C_{3,0} &= \int_Z\left[-\mathrm{Td}'(TZ,g^{TZ}) + \dim Z\,\mathrm{Td}(TZ,g^{TZ})\right]\mathrm{ch}(\xi,h^\xi), \\ E_{3,0} &= \lim_{u\to 0}\mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u}\exp\left(-B_{3,u}^2 + du\left(2u\frac{\partial B_{3,u}}{\partial u}\right)\right)\right]^{du}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.9, quand $\varepsilon \to 0$,

$$(4.41)\qquad \begin{aligned} &I_3^2 + \int_Z\frac{\omega^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ,g^{TZ})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi)\frac{1}{\varepsilon^2} - 2\Big\{\int_Z\big[-\mathrm{Td}'(TZ,g^{TZ}) \\ &\quad +\dim Z\,\mathrm{Td}(TZ,g^{TZ})\big]\mathrm{ch}(\xi,h^\xi) - \frac{1}{2}\varphi d^S E_{3,0}\Big\}\log\varepsilon \\ &\to I_3^3 = -\int_0^1\left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N_{3,u}\exp(-B_{3,u}^2)] - \frac{C_{3,-1}}{u} - C_{3,0} + \frac{1}{2}\varphi d^S E_{3,0}\right\}\frac{du}{u} \\ &\quad -\int_1^{+\infty}\left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N_{3,u}\exp(-B_{3,u}^2)] - \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_Z\exp(-\nabla^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\right]\right\}\frac{du}{u} \\ &\quad +C_{3,-1}. \end{aligned}$$

δ) **Évaluation de I_3^3.**

Par (4.41),

$$
(4.42) \qquad \begin{aligned} I_3^3 = &\, T_3(\omega^W, h^\xi) \\ &+\Gamma'(1)\Big\{\frac{1}{2}\varphi d^S E_{3,0} - C_{3,0} + \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N_Z \exp(-\nabla^{H(Z,\xi|_Z),2})\big]\Big\}. \end{aligned}
$$

4. Le terme I_4^0. Par (4.4),

$$
(4.43) \qquad I_4^0 = \int_1^{T_0} \varphi \mathrm{Tr}_s\big[M_{3,\varepsilon^2,T}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T})\big]dT.
$$

α) $A \to +\infty$.

Le terme I_4^0 reste constant , et il est égal à I_4^1.

β) $T_0 \to +\infty$.

D'après le Théorème 4.5, (4.43), et par Théorème de convergence dominée, quand $T_0 \to +\infty$, on a

$$
(4.44) \qquad \begin{aligned} I_4^1 &\;-2\varphi \mathrm{Tr}_s[(N_X - \dim X)\exp(-B^2_{2,\varepsilon^2})]\log T_0 \\ \to &\;\; I_4^2 = \int_1^{+\infty}\Big\{\varphi \mathrm{Tr}_s[M_{3,\varepsilon^2,T}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T})] \\ &\qquad -\frac{2}{T}\varphi \mathrm{Tr}_s[(N_X - \dim X)\exp(-B^2_{2,\varepsilon^2})]\Big\}dT. \end{aligned}
$$

γ) $\varepsilon \to 0$.

Soit

$$
\begin{aligned}
J_1 = &\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big[\frac{2}{T^3\varepsilon^2}\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ, g_T^{TZ})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)\Big]dT \\
&-\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big[\int_Z \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ})\right)_{b=0}\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\
&\qquad -\varphi d^S \mu_0(T)\Big]dT,
\end{aligned}
$$

$$
(4.45) \qquad \begin{aligned}
J_2 = &\int_1^{\frac{1}{\varepsilon}}\Big\{\varphi \mathrm{Tr}_s\big[M_{3,\varepsilon^2,T}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T})\big] - \frac{2}{T^3\varepsilon^2}\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ, g_T^{TZ})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\
&+\int_Z \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ})\right)_{b=0}\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) + \varphi d^S\mu_0(T)\Big\}dT, \\
J_3 = &\int_1^{+\infty}\Big\{\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\Big] \\
&-\frac{2}{T}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[(N_X - \mathrm{dim}X)\exp(-B^2_{2,\varepsilon^2})\Big]\Big\}dT.
\end{aligned}
$$

Alors

$$
(4.46) \qquad I_4^2 = J_1 + J_2 + J_3 + 2\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[(N_X - \dim X)\exp(-B^2_{2,\varepsilon^2})\Big]\log\varepsilon.
$$

1. Le terme J_1.

Évidemment, quand $T \to +\infty$

$$
(4.47) \qquad (g_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ}) = -\frac{2P^{TX}}{T} + O(\frac{1}{T^3}).
$$

Par le Théorème 1.7, on déduit facilement que quand $T \to +\infty$,

$$\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ})\right)_{b=0} = \frac{2}{T}\pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}'(TX, g^{TX}) + O(\frac{1}{T^3}), \tag{4.48}$$
$$\mathrm{Td}(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i}) = \pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}(TX, g^{TX}) + O(\frac{1}{T^2}).$$

Par le Théorème 4.9, (4.45) et (4.48), quand $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} J_1 - \Big[\int_1^{+\infty} \frac{2}{T^3}\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ, g_T^{TZ})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)dT\Big]\frac{1}{\varepsilon^2} \\ -\Big[2\int_Z \pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}'(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ +(2\pi i)^{-\frac{1}{2}}d^S\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\varphi_1 E_{1,0}\Big]\log\varepsilon \\ \to J_1^1 = -\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ -\int_Z\int_1^{+\infty}\Big[\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\left(\frac{-R_T^{TZ}}{2\pi i} - b(g_T^{TZ})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g_T^{TZ})\right)_{b=0} \\ -\frac{2}{T}\pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}'(TX, g^{TX})\Big]dT\ \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ -\varphi d^S\int_1^{+\infty}(\mu_0(T) - \frac{1}{T}E)dT. \end{aligned} \tag{4.49}$$

REMARQUE 4.13. D'après le Théorème 4.9, l'intégrale $\int_1^{+\infty}(\mu_0(T) - \frac{1}{T}E)dT$ est bien définie.

Théorème 4.14. *On a*

$$\begin{aligned} J_1^1 = & -\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ & +\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{4.50}$$

PREUVE: La démonstration est la même que dans [**BerB**, Théorème 4.20]. ■

2. Le terme J_2.

On a

$$\begin{aligned} J_2 = & \int_\varepsilon^1 \Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\Big] - \frac{2}{T^3}\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}_{T/\varepsilon})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ & +\int_Z \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\left(\frac{-R^{TZ}_{T/\varepsilon}}{2\pi i} - b(g^{TZ}_{T/\varepsilon})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g^{TZ}_{T/\varepsilon})\right)_{b=0}\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) + \frac{1}{\varepsilon}\varphi d^S\mu_0(\frac{T}{\varepsilon})\Big\}dT. \end{aligned} \tag{4.51}$$

En utilisant les Théorèmes 4.8 et 4.10, et (4.51), on sait que quand $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} J_2 \to J_2^1 = & \ 2\int_0^1\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\Big\{\varphi_1\mathrm{Tr}_s\Big[(\widetilde{N}_{1,T^2} - \dim X)\exp(-B^2_{1,T^2})\Big] \\ & -\frac{1}{T^2}\int_X \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ & +\int_X \mathrm{Td}'(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) + \frac{1}{2}\varphi_1 d^V E_{1,0}\Big\}\frac{dT}{T}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

3. Le terme J_3.

D'après les Théorèmes 4.8 et 4.11, on sait que , quand $\varepsilon \to 0$,

$$J_3 \to J_3^1 = 2\int_1^{+\infty}\int_Y \mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big\{\varphi_1\mathrm{Tr}_s\left[(\widetilde{N}_{1,T^2}-\dim X)\exp(-B_{1,T^2}^2)\right] -\mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})+\dim X\,\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})\Big\}\frac{dT}{T}. \tag{4.53}$$

4. L'asymptotique de I_4^2.

En utilisant [**BGS2**, Théorème 2.16], on sait que, quand $\varepsilon \to 0$,

$$\varphi_1\mathrm{Tr}_s\left[(N_X-\dim X)\exp(-B_{2,\varepsilon^2}^2)\right] = \int_Y \mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big\{\mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi}) -\dim X\,\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})\Big\}+O(\varepsilon^2). \tag{4.54}$$

D'après (4.46), (4.50)-(4.54), quand $\varepsilon \to 0$, on a

$$\begin{aligned} I_4^2 & -\Big(\int_1^{+\infty}\frac{2}{T^3}\int_Z\frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ,g_T^{TZ})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi)dT\Big)\frac{1}{\varepsilon^2}\\ & -2\int_Y\mathrm{Td}(TY,g^{TY})\big[\pi_{1*}(\mathrm{Td}'(TX,g^{TX})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi))\\ & +\mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})-\dim X\,\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})\big]\log\varepsilon\\ \to\ & I_4^3 = J_1^1+J_2^1+J_3^1. \end{aligned} \tag{4.55}$$

δ) **Évaluation de I_4^3.**

Soit $B(t)$ $(t>0)$ la forme $\mathcal{C}^\infty$ sur V définie par

$$B(t) = \varphi_1\mathrm{Tr}_s\left[\frac{\partial B_{1,t}}{\partial t}\exp(-B_{1,t}^2)\right]. \tag{4.56}$$

En utilisant [**BGS2**, Théorème 2.11], [**BeGeV**, Théorèmes 9.23 et 10.32], on a :

i) Il existe une forme B_0, $\mathcal{C}^\infty$ sur V telle que quand $t \to 0$, $B(t) = B_0 + O(t)$.

ii) Quand $t \to +\infty$, $B(t) = O(t^{-\frac{3}{2}})$.

Soit

$$B = (2\pi i)^{-\frac{1}{2}}\int_Y\mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big[\int_0^1\Big(\int_0^T B(t)dt\Big)\frac{dT}{T} +\int_1^{+\infty}\Big(\int_T^{+\infty}B(t)dt\Big)\frac{dT}{T}\Big]. \tag{4.57}$$

Alors par [**BGS2**, Théorème 2.9], on a

$$\begin{aligned} dB = \int_Y\mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big\{&\int_0^1\big[\varphi_1\mathrm{Tr}_s[\exp(-B_{1,T}^2)]\\ &-\int_X\mathrm{Td}(TX,g^{TX})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi)\big]\frac{dT}{T}\\ &+\int_1^{+\infty}\big[\varphi_1\mathrm{Tr}_s[\exp(-B_{1,T}^2)]-\mathrm{ch}(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})\big]\frac{dT}{T}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Théorème 4.15. *On a*

$$\begin{aligned} I_4^3 =\ & \int_Z\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ,TY,g^{TZ},g^{TY})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi)-\int_Y\mathrm{Td}(TY,g^{TY})T_1(\omega^W,h^\xi)\\ & -\Gamma'(1)\int_Y\mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big\{\pi_{1*}\Big[\big(\mathrm{Td}'(TX,g^{TX})-\dim X\,\mathrm{Td}(TX,g^{TX})\big)\\ & \mathrm{ch}(\xi,h^\xi)\Big]+\mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_{1*}\xi,h^{R\pi_{1*}\xi})\Big\}\quad \text{dans}\quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

PREUVE: Par le Théorème 2.12, on a

$$T_1(\tilde{\omega}^W, h^\xi) - T_1(\omega^W, h^\xi) \in P^{V,0}, \tag{4.60}$$

D'après (2.21), (2.29), (4.55), (4.58) et (4.60), on a l'identité (4.59). ■

d) Le terme à droite de (4.8).

Comme dans [**B4**, §6 (f)-(h)], on établit l'équation

$$\Sigma_{k=1}^4 I_k^3 = \bar{\partial}\theta_1^3 - \partial\theta_2^3 - \bar{\partial}\partial\theta_3^3. \tag{4.61}$$

Bien sûr, on doit étudier en détail le terme à droite de (4.8). Comme la situation est plus simple que dans [**B4**, §6], on ne le fait pas , le lecteur peut trouver les détails dans [**B4**, §6].

On remarque aussi que, si S est compacte et Kählerienne, l'espace $P^{S,0}$ est fermé dans P^S pour la topologie de convergence uniforme. Dans ce cas, on voit facilement que, comme $\Sigma_{k=1}^4 I_k^0 \in P^{S,0}$, on a $\Sigma_{k=1}^4 I_k^3 \in P^{S,0}$.

e) Preuve du Théorème 3.5.

Par (4.33), (4.37), (4.42), (4.59), l'équation (4.61) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
&-T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) + T_3(\omega^W, h^\xi)\\
&+ \textstyle\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) - \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})T_1(\omega^W, h^\xi)\\
&+\Gamma'(1)\Big\{C_{2,0} - C_{3,0} + \varphi\mathrm{Tr}_s[N_Z \exp(-\nabla^{H(Z,\xi_{|Z}),2})]\\
&- \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\Big\{\pi_{1*}\Big[\Big(\mathrm{Td}'(TX, g^{TX}) - \dim X\, \mathrm{Td}(TX, g^{TX})\Big)\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)\Big]\\
&+\mathrm{ch}'(R^\bullet\pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi})\Big\} = 0 \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.
\end{aligned} \tag{4.62}$$

On a aussi l'équation triviale

$$\begin{aligned}
\mathrm{Td}'(TZ, g^{TZ}) = \;& \pi_1^*(\mathrm{Td}'(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}(TX, g^{TX})\\
&+\pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\mathrm{Td}'(TX, g^{TX}) \quad \text{dans} \quad P^W/P^{W,0}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

En utilisant le Théorème 2.11, (3.4), (4.31), (4.40) et (4.63), on sait que le coefficient de $\Gamma'(1)$ dans (4.62) est nul dans $P^S/P^{S,0}$.

Par (4.62), on a bien démontré le Théorème 3.5. ■

5 L'asymptotique des supertraces contenant l'opérateur $\exp(-B^2_{3,u,T})$ pour u ou T tendant vers $+\infty$

Le but de cette Section est de montrer les Théorèmes 4.5 et 4.6. C'est une extension de [**BerB**, §5], qui traite le cas où S est un point.

Dans [**BerB**, §5], $TD^X_T + D^H_T$ est un opérateur différentiel elliptique. La nouvelle difficulté est que $B_{3,u,T}$ est une superconnexion, et que seul le carré $B^2_{3,u,T}$ est un opérateur elliptique standard agissant sur chaque fibre. Un problème similaire a déjà été considéré dans [**B4**, §9]. C'est pourquoi on va toujours se ramener à la situation traitée dans [**B4**, §9].

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on rappelle les résultats de [**BerB**, §5]. Dans (b), on remplace la superconnexion $B_{3,u,T}$ par $A_{u,T}$. Soit $A_T = A_{1,T}$. On obtient alors l'asymptotique de A_T quand $T \to +\infty$. Dans (c), on obtient l'asymptotique de A^2_T écrite sous forme matricielle relativement à un scindement de $E_0 = \Omega(Z, \xi_{|Z})$. Dans (d), on décrit le spectre de $A^2_{u,T}$. Dans (e), on énonce deux résultats intermédiaires, d'où, les Théorèmes 4.5, 4.6 peuvent être facilement déduits. Le reste de la Section est consacré à la preuve de ces deux résultats intermédiaires.

Dans (f), on donne des estimations pour la résolvante de A^2_T. Dans (g), on obtient une estimation uniforme pour le noyau de $F_u(A^2_T)$. Dans (h), on calcule l'asymptotique de l'opérateur $F_u(A^2_T)$ quand $T \to +\infty$. Dans (i), on montre le premier résultat intermédiaire et (4.14).

Dans (j), on obtient un autre opérateur à partir de $A^2_{u,T}$. Dans (k), on montre le deuxième résultat intermédiaire.

Dans cette Section, on suppose que la forme ω^W sur W est donné par (3.22), et que le fibré holomorphe ξ vérifie l'hypothèse d'acyclicité (3.4). On utilise les mêmes notations qu'aux Sections 1(d), 3, 4.

a) Le cas où S est un point.

Dans la suite, on rappelle des résultats de [**BerB**, §5] en fixant un point $s \in S$. Alors $\pi_1 : Z \to Y$ est une submersion holomorphe de fibre compacte X.

On rappelle qu'on a l'identification de fibrés vectoriels C^∞ sur Z

$$TZ \simeq T^H Z \oplus TX, \qquad T^H Z \simeq \pi_1^* TY. \tag{5.1}$$

Cette identification induit une identification correspondante de fibrés vectoriels C^∞ Z-gradués sur Z

$$\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \simeq \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y)) \widehat{\otimes} \Lambda(T^{*(0,1)}X). \tag{5.2}$$

On rappelle que $h \in \mathrm{End}(\pi_1^* TY)$ est défini par

$$\left\langle U_1^H, \overline{V}_1^H \right\rangle_{\widetilde{g}^{TZ}} = \left\langle hU, \overline{V} \right\rangle_{g^{TY}}, \quad \text{avec} \quad U, V \in TY. \tag{5.3}$$

DÉFINITION 5.1. Pour $T \geq 1$, $\alpha \in \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))$, on définit $a_T\alpha \in \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} &v_1, \cdots, v_p \in \overline{TY} \rightarrow \\ &a_T\alpha(v_1, \cdots, v_p) = \alpha((1+\tfrac{h}{T^2})^{-1/2}v_1, \cdots, (1+\tfrac{h}{T^2})^{-1/2}v_p). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Alors a_T agit sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \simeq \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))\hat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}X)$ comme $a_T\hat{\otimes}1$.

DÉFINITION 5.2. Pour $T \geq 1$, soit

$$\begin{aligned} B_T &= \det{}^{1/2}(1+\frac{h}{T^2})a_T, \\ C_T &= T^{N_X - \dim X} B_T. \end{aligned} \tag{5.5}$$

DÉFINITION 5.3. Pour $a \in Y$, soient E_a, E_0 les espaces vectoriels des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ sur X_a, Z. On a donc

$$E_a = \Lambda(T^{*(0,1)}Y)_a \hat{\otimes} \Omega(X_a, \xi_{|X_a}). \tag{5.6}$$

L'espace E_a va être considéré comme la fibre d'un fibré E sur Y de dimension infinie et l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de E sur Y est l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ sur Z.

Soit dv_Z (resp. dv_X, resp. dv_Y) la forme de volume sur Z (resp. X, resp. Y) associée à la métrique $\pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX}$ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX$ (resp. g^{TX} sur TX, resp. g^{TY} sur TY). Soit $\langle \ \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi,\infty}$ le produit hermitien sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$ associé aux métriques $\pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX}$, h^ξ sur $TZ = \pi_1^*TY \oplus TX$, ξ. Pour $a \in Y$, $s, s' \in E_a$, on pose

$$\langle s, s' \rangle_{|E_a} = (2\pi)^{-\dim X} \int_{X_a} \langle s, s' \rangle_{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi,\infty} dv_X. \tag{5.7}$$

Pour $s, s' \in E_0$, on pose

$$\langle s, s' \rangle_\infty = (2\pi)^{-\dim Y} \int_Y \langle s, s' \rangle_{|E_a} dv_Y(a). \tag{5.8}$$

DÉFINITION 5.4. Pour $\mu \in \mathbf{R}$, soient E_0^μ, E_1^μ les espaces de Sobolev d'ordre μ des sections de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$, $\mathrm{Ker} D^X$ sur Z, Y.

On équipe E_0^0 du produit hermitien $\langle \ \rangle_{E_0^0} = \langle \ \rangle_\infty$. Soit $|| \ ||_{E_0^0}$ la norme correspondante sur E_0^0. Pour $\mu \in \mathbf{R}$, soit $|| \ ||_{E_0^\mu}$ une norme de Sobolev sur E_0^μ. Soit $E_1^{0,\perp}$ l'espace orthogonal à E_1^0 dans E_0^0. Pour $\mu \geq 0$, on pose

$$E_0^{\mu,\perp} = E_1^{0,\perp} \cap E_0^\mu. \tag{5.9}$$

Soit $\Omega(Y, \Omega(X, \xi_{|X})_{|Y})$ l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Y)\hat{\otimes}\ \Omega(X, \xi_{|X})$ sur Y. Donc $\Omega(Y, \Omega(X, \xi_{|X})_{|Y})$ est l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))$ $\hat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}X)\ \otimes\xi$ sur Z. Par l'identification (5.2), on a une identification d'espaces vectoriels

$$\Omega(Z, \xi_{|Z}) \simeq \Omega(Y, \Omega(X, \xi_{|X})_{|Y}). \tag{5.10}$$

Soit $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}_{|Y}$ la restriction de la connexion $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}$ sur $\Omega(X,\xi_{|X})$ à Y. Sous l'identification (5.10), $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''}_{|Y}$ agit naturellement sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$. De même $\overline{\partial}^X$, D^X agissent sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$.

Soit E_1 l'espace vectoriel des sections C^∞ de $\ker D^X$ sur Y.

Par [**BGS2**, Théorème 2.8], on a

Théorème 5.5. *On a l'identité d'opérateurs agissant sur* $\Omega(Z,\xi_{|Z})$*:*

$$\overline{\partial}^Z = \nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''}_{|Y} + \overline{\partial}^X. \tag{5.11}$$

Désormais, on pose

$$\overline{\partial}^H = \nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})''}_{|Y}. \tag{5.12}$$

Soit $\overline{\partial}^{H*}_\infty$ l'adjoint formel de $\overline{\partial}^H$ relativement à $\langle\ \ \rangle_\infty$.

DÉFINITION 5.6. Pour tout $T \in [1,+\infty]$, on pose

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}^X_T = B_T\overline{\partial}^X B_T^{-1}, \quad \overline{\partial}^{X*}_T = B_T^{-1}\overline{\partial}^{X*}B_T,\\
&\overline{\partial}^H_T = B_T\overline{\partial}^H B_T^{-1}, \quad \overline{\partial}^{H*}_T = B_T^{-1}\overline{\partial}^{H*}_\infty B_T,\\
&D^X_T = \overline{\partial}^X_T + \overline{\partial}^{X*}_T, \quad D^H_T = \overline{\partial}^H_T + \overline{\partial}^{H*}_T.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

On a

$$D^X_\infty = D^X. \tag{5.14}$$

DÉFINITION 5.7. Pour $a \in Y, T \in [1,+\infty]$, soit $p_{T,a}$ la projection orthogonale de E_a sur $\ker D^X_{T,a}$ associée au produit hermitien $\langle\ \ \rangle_{E_a}$. On pose $p^\perp_{T,a} = 1 - p_{T,a}$.

Pour $T \in [1,+\infty]$, soit $E_{1,T}$ l'espace vectoriel des sections C^∞ de $\ker D^X_T$ sur Y, et soit $q_T : E_{1,\infty} \to E_{1,T}$ l'application linéaire

$$s \in E_{1,\infty} \to q_T s = p_T B_T s \in E_{1,T}. \tag{5.15}$$

Soit q_T^* l'adjoint de q_T. On pose

$$\begin{aligned} r_T &= (q_T^* q_T)^{1/2},\\ J_T &= q_T r_T^{-1}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Alors $J_T : E_{1,\infty} \to E_{1,T}$ est un isométrie linéaire.

Dans la suite, si $S_T (T \in [1,+\infty])$ est une famille d'opérateurs différentiels, on écrit que, quand $T \to +\infty$,

$$S_T = S_\infty + O(\frac{1}{T^l}) \quad \text{avec} \quad l \in \mathbf{Z},$$

si pour tout $k \in \mathbf{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour $T \geq 1$, les normes de coefficients de $S_T - S_\infty$ et leur dérivées d'ordre $\leq k$ sont dominées par CT^{-l}.

On pose

$$A_T^{(0)} = C_T D_T^Z C_T^{-1}. \tag{5.17}$$

Le résultat suivant est établi dans [**BerB**, Théorème 5.17].

Théorème 5.8. *Pour $T \in [1, +\infty]$, l'opérateur $J_T^{-1} p_T A_T^{(0)} p_T J_T$ est un opérateur elliptique agissant sur $E_{1,\infty}$. De plus , quand $T \to +\infty$, on a*

$$J_T^{-1} p_T A_T^{(0)} p_T J_T = D^Y + O(\frac{1}{T^2}). \tag{5.18}$$

b) L'asymptotique de la superconnexion A_T quand $T \to +\infty$.

Pour $U \in T_{\mathbf{R}}Z$, on note $c(U)$ l'action de l'algèbre de Clifford sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$ associée à $(TZ, \pi_1^* g^{TY} \oplus g^{TX})$. Alors pour $U = U^{T^H Z} + U^{TX} \in T_{\mathbf{R}}Z$, avec $U^{T^H Z} \in T_{\mathbf{R}}^H Z, U^{TX} \in T_{\mathbf{R}}X$, on a

$$C_T c_T((1 + \frac{h}{T^2})^{-1/2} U^{T^H Z} + TU^{TX}) C_T^{-1} = c(U^{T^H Z}) + c(U^{TX}). \tag{5.19}$$

Soit g_α une base de $T_{\mathbf{R}}S$. Soient e_i, w_i des bases orthonormées de $(T_{\mathbf{R}}X, g^{T_{\mathbf{R}}X})$, (TX, g^{TX}). Soient f_l, θ_l des bases orthonormées de $(T_{\mathbf{R}}Y, g^{T_{\mathbf{R}}Y})$, (TY, g^{TY}), soient $g^\alpha, e^i, w^i, f^l, \theta^l$ les bases duales associées. Soit

$$\begin{aligned} f_{l,T} &= (1 + \frac{h}{T^2})^{-1/2} f_{l,1}^H, \\ \theta_{l,T} &= (1 + \frac{h}{T^2})^{-1/2} \theta_{l,1}^H. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Alors $Te_i, f_{l,T}$ (resp. $Tw_i, \theta_{l,T}$) est une base orthonormée de $(T_{\mathbf{R}}Z, g_T^{T_{\mathbf{R}}Z})$ (resp. (TZ, g_T^{TZ})).

On rappelle que ∇_T^{TZ}, ∇^{TX}, ∇^{TY}, ∇^ξ sont les connexions holomorphes hermitiennes sur (TZ, g_T^{TZ}), (TX, g^{TX}), (TY, g^{TY}), (ξ, h^ξ). Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}$, $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ les connexions sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X)$, $\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ induites par ∇^{TX}, ∇^{TY}. Soient $R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}, L^\xi$ les courbures associées à $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)}$, ∇^ξ.

Soit $\nabla^{\pi_1^* TY} = \pi_1^* \nabla^{TY}$, alors ${}^0\nabla^{TZ} = \nabla^{\pi_1^* TY} \oplus \nabla^{TX}$ est une connexion sur TZ. Soit $\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}$ (resp. ${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)}$) la connexion induite par ∇_T^{TZ} (resp. ${}^0\nabla^{TZ}$) sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)$. Soient $\nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}$, ${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}$ les connexions sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \xi$

$$\begin{aligned} \nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} &= \nabla_T^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi, \\ {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} &= {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^\xi. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Il est clair que

$${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} = \pi_1^* \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}.$$

Pour $T > 0$, on définit la connexion $\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ comme en (2.3) correspondant à g_T^{TZ}, h^ξ. En effet, si s est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $\Omega(Z,\xi_{|Z})$, $U \in T_{\mathbf{R}}S$, on pose

$$\nabla_{T,U}^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} s = \nabla_{T,U^H_{3,T}}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} s. \tag{5.22}$$

De même, on définit une connexion ${}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ par la formule: si s est une section $\mathcal{C}^\infty$ de $\Omega(Z,\xi_{|Z})$, $U \in T_{\mathbf{R}}S$,

$${}^0\nabla_U^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} s = {}^0\nabla_{U^H_{3,\infty}}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} s. \tag{5.23}$$

Comme dans [**BerB**, §5], on préfère considérer les opérateurs sur $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$ dans le cadre de métrique fixée. On va conjuguer la superconnexion $B_{3,u,T}$ définie à la Section 4(a).

DÉFINITION 5.9. Pour $T \geq 1$, soit

$$\begin{aligned} A_{u,T} &= C_T B_{3,u^2,T} C_T^{-1}, \\ A_T &= A_{1,T}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Comme $N_{3,u^2,T}$ est invariant par la conjugaison, on a

$$\begin{aligned} \varphi \mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2,T})\right] &= \varphi \mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u^2,T}\exp(-A^2_{u,T})\right], \\ \varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2,T})\right] &= \varphi \mathrm{Tr}_s\left[C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1}\exp(-A^2_{u,T})\right]. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Par (2.9) et (5.17), $A_T^{(0)}$ est la partie de A_T de degré 0 dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$. Soit $A_T^{(>0)}$ la partie de A_T de degré > 0 dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$. D'après [**BerB**, Proposition 5.9], (2.9), (5.24), on a

$$\begin{aligned} A_T^{(0)} &= TD_T^X + D_T^H, \\ A_T^{(>0)} &= C_T\left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} - \tfrac{1}{2\sqrt{2}} c_T(T_{3,T})\right) C_T^{-1}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Soit $\mathcal{B}$ la superconnexion sur E_0

$$\mathcal{B} = {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} + D_\infty^H - \frac{1}{2\sqrt{2}} c(T_2). \tag{5.27}$$

Théorème 5.10. *Quand $T \to +\infty$, on a*

$$A_T = TD^X + \mathcal{B} + O\left(\frac{1}{T}\right). \tag{5.28}$$

PREUVE: i) D'après (5.5), on a

$$B_T = 1 + O\left(\frac{1}{T^2}\right). \tag{5.29}$$

Par (5.13) et (5.29), on a

$$D_T^H = D_\infty^H + O(\tfrac{1}{T^2}),\quad D_T^X = D^X + O(\tfrac{1}{T^2}). \tag{5.30}$$

ii) En utilisant la Proposition 1.5, (1.57) et (5.19), pour $U \in T_{\mathbf{R}}S$, on a

$$\begin{aligned} C_T \nabla_{T,U}^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} C_T^{-1} &= B_T{}^0\nabla_{U_{3,T}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} B_T^{-1} \\ &\quad + \left\langle (T^2+h)^{-1}\nabla_{U_{3,T}^H}^{\overline{\pi_1^* TY'}} h\overline{\theta}_{l,T}, \theta_{m,T} \right\rangle_{g_T^{TZ}} \overline{\theta}^l \wedge i_{\overline{\theta}_m} \\ &\quad + \tfrac{1}{T}\left\langle A(U_{3,T}^H)\overline{\theta}_{l,T}, w_j\right\rangle_{g^{TX}} \overline{\theta}^l \wedge i_{\overline{w}_j} \\ &\quad - T\left\langle (T^2+h)^{-1}A^*(U_{3,T}^H)\overline{w}_j, \theta_l\right\rangle_{g_T^{TZ}} \overline{w}^j \wedge i_{\overline{\theta}_l} \\ &= {}^0\nabla_{U_{3,\infty}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} + O(\tfrac{1}{T}). \end{aligned} \tag{5.31}$$

iii) D'après la Proposition 1.5, le Théorème 1.9, et (5.19), on a

$$\begin{aligned} C_T c_T(T_{3,T}) C_T^{-1} &= \Sigma\frac{1}{2}\left\langle T_{3,T}(g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H), Te_i\right\rangle_{g_T^{TZ}} g^\alpha\wedge g^\beta \wedge c(e_i) \\ &\quad + \Sigma\frac{1}{2}\left\langle T_{3,T}(g_{\alpha,3,T}^H, g_{\beta,3,T}^H), f_{l,T}\right\rangle_{g_T^{TZ}} g^\alpha\wedge g^\beta \wedge c(f_{l,1}^H) \\ &= \Sigma\frac{1}{2}\left\langle T_{3,\infty}(g_{\alpha,3,\infty}^H, g_{\beta,3,\infty}^H), f_{l,1}^H\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} g^\alpha\wedge g^\beta \wedge c(f_{l,1}^H) + O(\frac{1}{T}). \end{aligned} \tag{5.32}$$

D'après (1.37) et (5.32), on a

$$C_T c_T(T_{3,T}) C_T^{-1} = \Sigma\frac{1}{2}\left\langle T_2(g_{\alpha,2}^H, g_{\beta,2}^H), f_l\right\rangle_{g^{TY}} g^\alpha\wedge g^\beta\wedge c(f_{l,1}^H) + O(\frac{1}{T}). \tag{5.33}$$

En utilisant (5.29)-(5.33), on a (5.28).

On a bien terminé la preuve du Théorème 5.10. ■

Théorème 5.11. *Pour tout $T \in [1,+\infty[$, l'opérateur $J_T^{-1}p_T A_T p_T J_T$ est une superconnexion sur $E_{1,\infty}$. Quand $T \to +\infty$, on a*

$$J_T^{-1}p_T A_T p_T J_T = B_{2,1} + O(\frac{1}{T}). \tag{5.34}$$

PREUVE: Soit $\nabla^{R\pi_{1*}\xi}$ la connexion holomorphe hermitienne sur $(R^\bullet\pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi})$. Soit $\nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})}$ la connexion sur $\Omega(X,\xi_{|X})$ comme en (2.3) correspondant à g^{TX}, h^ξ. Alors par [**BKö**, Théorème 3.5], on a

$$\nabla^{R\pi_{1*}\xi} = p_\infty \nabla^{\Omega(X,\xi_{|X})} p_\infty. \tag{5.35}$$

En utilisant [**BerB**, (5.34)], (5.27) et (5.35), on a

$$p_\infty \mathcal{B} p_\infty = B_{2,1}. \tag{5.36}$$

Par [**BerB**, (5.47)], on a

$$p_T = p_\infty + O(\frac{1}{T^2}). \tag{5.37}$$

En utilisant le Théorème 5.10, (5.16) et (5.36), on a (5.34). ■

c) La structure de l'opérateur A_T^2 quand $T \to +\infty$.

Dans la suite, on pose

$$p = p_\infty, \quad p^\perp = p_\infty^\perp. \tag{5.38}$$

Maintenant, on va considérer A_T^2 comme un opérateur de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* S)\widehat{\otimes} E_0$ dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^* S)\widehat{\otimes} E_0$. On pose

$$\begin{aligned} E_T &= pA_T^2 p, \quad F_T = pA_T^2 p^\perp, \\ G_T &= p^\perp A_T^2 p, \quad H_T = p^\perp A_T^2 p^\perp. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Alors on écrit A_T^2 sous forme matricielle correspondant au scindage $E_0^0 = E_1^0 \oplus E_1^{0,\perp}$.

$$A_T^2 = \begin{bmatrix} E_T & F_T \\ G_T & H_T \end{bmatrix}. \tag{5.40}$$

Théorème 5.12. *Il existe des opérateurs E, F, G, H tels que quand $T \to +\infty$,*

$$\begin{aligned} E_T &= E + O(\frac{1}{T}), \quad F_T = TF + O(1), \\ G_T &= TG + O(1), \quad H_T = T^2 H + O(T), \end{aligned} \tag{5.41}$$

Soit

$$Q_\infty = [D^X, \mathcal{B}]. \tag{5.42}$$

Alors $Q_\infty(E_1^0) \subset E_1^{0,\perp}$, et

$$\begin{aligned} Q_\infty = &\frac{1}{2}\Sigma c(e_i)c(f_{l,1}^H)\left[(R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} + L^\xi)(e_i, f_{l,1}^H) - {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{T_1(e_i,f_{l,1}^H)}\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma c(e_i)g^\alpha\left[(R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} + L^\xi)(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H) - {}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{T_1(e_i,g_{\alpha,3,\infty}^H)}\right]. \end{aligned} \tag{5.43}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} E &= p\mathcal{B}^2 p, \quad F = pQ_\infty p^\perp, \\ G &= p^\perp Q_\infty p, \quad H = p^\perp D^{X,2} p^\perp. \end{aligned} \tag{5.44}$$

PREUVE: D'après le Théorème 5.10, on a

$$E = p\mathcal{B}^2 p. \tag{5.45}$$

D'après le Théorème 5.10, on sait aussi que le coefficient de T (resp. T^2) dans l'asymptotique de A_T^2 quand $T \to +\infty$ est $[D^X, \mathcal{B}]$ (resp. $D^{X,2}$).

D'après [**BerB**, (5.65), (5.66)], on a

$$
(5.46)\quad
\begin{aligned}
D^X &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\Sigma c(e_i)\,{}^0\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi},\\
D_\infty^H &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}c(f_l)\,{}^0\nabla_{f_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi},\\
\left[D^X, D_\infty^H\right] &= \tfrac{1}{2}\Sigma c(e_i)c(f_l)\left[(R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} + L^\xi)(e_i, f_{l,1}^H) - {}^0\nabla_{T_1(e_i,f_{l,1}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}\right].
\end{aligned}
$$

En utilisant (5.23), (5.46), on peut calculer comme dans [**BerB**, (5.66)],

(5.47)

$$
\left[D^X, {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma c(e_i)g^\alpha\left[(R^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)} + L^\xi)(e_i, g_{\alpha,3,\infty}^H) - {}^0\nabla_{T_1(e_i,g_{\alpha,3,\infty}^H)}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}\right].
$$

Par (5.42), (5.46) et (5.47), on a (5.43).

Par (5.42), on a aussi

$$
(5.48)\qquad pQ_\infty p = 0.
$$

On a montré le Théorème 5.12. ∎

d) Le spectre de $A_{u,T}^2$.

Comme on suppose que S est compacte, toutes les estimations qui suivent seront uniformes en $s \in S$.

Si C est un opérateur, on note $\mathrm{Sp}(C)$ le spectre de C.

Soit

$$
(5.49)\quad
\begin{aligned}
R_{u,T} = {}& C_T\Big(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2u}}\Big)^2 C_T^{-1}\\
&+u\left[C_T\left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2u}}\right)C_T^{-1}, A_T^{(0)}\right].
\end{aligned}
$$

Alors

$$
(5.50)\qquad A_{u,T}^2 = u^2 A_T^{(0),2} + R_{u,T}.
$$

Par [**B1**, Théorème 2.5], $R_{u,T}$ est la somme de formes de degré strictement positif dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$, à valeur dans les opérateurs différentiels d'ordre 1 le long de la fibre Z.

Les opérateurs $A_{u,T}^2$ et $A_T^{(0),2}$ sont des opérateurs non bornés agissant sur $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$, dont le domaine est $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0^2$.

Théorème 5.13. *Il existe $c_1 > 0, T_0 \geq 1$ tels que pour tout $T \geq T_0$,*

$$
(5.51)\qquad \mathrm{Sp}(A_T^{(0),2}) \cap \{\lambda \in \mathbf{R}_+^*, \lambda \leq c_1\} \subset \{0\}
$$

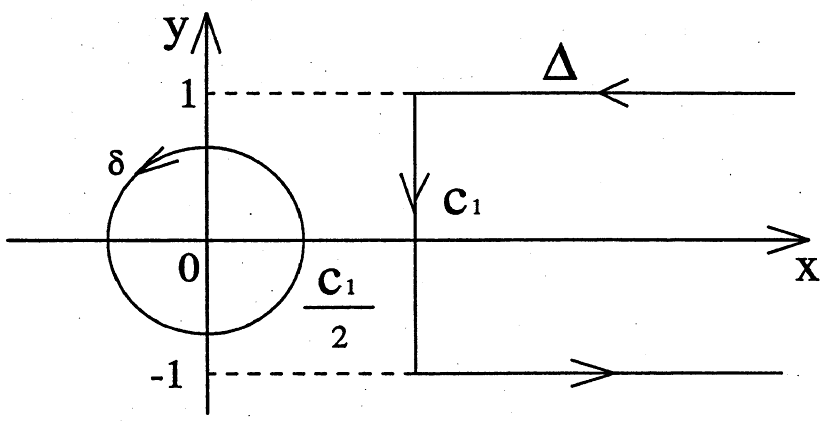
PREUVE: En utilisant (3.4), [**BerB**, §6(d)], on a (5.51). ∎

D'après [**B4**, Proposition 9.2], on a

Proposition 5.14. *Pour tout* $u > 0, T > 0$,

$$\mathrm{Sp}(A^2_{u,T}) = \mathrm{Sp}(u^2 A_T^{(0),2}). \tag{5.52}$$

Soit $\Gamma' = \delta \cup \Delta$ le contour dans $\mathbf{C}$,



Par le Théorème 5.13 et la Proposition 5.14, il est clair que pour $u \geq 1, T \geq T_0$,

$$\begin{aligned} \exp(-A^2_{u,T}) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - \frac{1}{u^2}A^2_{u,T}}d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A^2_{u,T}}d\lambda, \\ \exp(-u^2 A^2_T) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - A^2_T}d\lambda. \end{aligned} \tag{5.53}$$

e) Deux résultats intermédiaires.

Dans la suite, u_0 est une constante positive fixée.

Pour $u > 0$, soit $\psi_u : \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S) \to \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$ l'application

$$\alpha \in \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S) \to u^{-\deg\alpha}\alpha \in \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S). \tag{5.54}$$

Alors ψ_u agit comme $\psi_u \widehat{\otimes} 1$ sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}E_0$.

Proposition 5.15. *Pour* $u > 0, T > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} &A_{u,T} = u\psi_u A_T \psi_u^{-1}, \qquad && B_{2,u^2} = u\psi_u B_{2,1}\psi_u^{-1}, \\ &N_{3,u^2,T} = \psi_u N_{3,1,T}\psi_u^{-1}, && N_{2,u^2} = \psi_u N_{2,1}\psi_u^{-1}, \\ &M_{3,u^2,T} = \psi_u M_{3,1,T}\psi_u^{-1}. \end{aligned} \tag{5.55}$$

PREUVE: C'est évident. ■

Proposition 5.16. *Pour* $u > 0, T > 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_s\Big[C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1}\exp(-A^2_{u,T})\Big] &= \psi_u \mathrm{Tr}_s\Big[C_T M_{3,1,T} C_T^{-1}\exp(-u^2 A^2_T)\Big], \\ \mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,u^2,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - \frac{1}{u^2}A^2_{u,T}}d\lambda\Big] &= \psi_u \mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,1,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - A^2_T}d\lambda\Big]. \end{aligned} \tag{5.56}$$

et pour $u > 0$,

$$(5.57)\quad \mathrm{Tr}_s\Big[N_{2,u^2}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - \frac{1}{u^2}B^2_{2,u^2}}d\lambda\Big] = \psi_u \mathrm{Tr}_s\Big[N_{2,1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - B^2_{2,1}}d\lambda\Big].$$

PREUVE: C'est une conséquence directe de la Proposition 5.15. ■

Théorème 5.17. *Il existe $\delta \in]0,1], C > 0$ tels que pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,*

$$(5.58)\quad \Big|\mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,1,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - A^2_T}d\lambda\Big] - \mathrm{Tr}_s\Big[N_{2,1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - B^2_{2,1}}d\lambda\Big]\Big| \leq \frac{C}{T^\delta}.$$

Il existe $c > 0, C > 0$ tels que pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$(5.59)\quad \Big|\mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,1,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\exp(-u^2\lambda)}{\lambda - A^2_T}d\lambda\Big]\Big| \leq c\exp(-Cu^2).$$

Théorème 5.18. *Il existe $\delta \in]0,1], c > 0$ tels que pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,*

$$(5.60)\quad \Big|\mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,u^2,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A^2_{u,T}}d\lambda\Big] - \mathrm{Tr}_s\Big[N_{2,u^2}\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - B^2_{2,u^2}}d\lambda\Big]\Big| \leq \frac{C}{T^\delta}.$$

Il existe $C > 0$ tel que pour $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$(5.61)\quad \Big|\mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,u^2,T}\frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - A^2_{u,T}}d\lambda\Big]\Big| \leq \frac{C}{u}.$$

PREUVE: Le reste de cette Section est consacré à la preuve des Théorèmes 5.17 et 5.18. ■

REMARQUE 5.19. Comme dans [B4, Remarque 9.7], les équations (4.13), (4.15), et le Théorème 4.6 peuvent être déduits des Théorèmes 5.17 et 5.18.

f) Propriétés de régularité de la résolvante de A^2_T.

Soit $e_1, \cdots, e_{2n_0}$ (resp. $f_1, \cdots, f_{2m_0}$) une base orthonormée locale $\mathcal{C}^\infty$ de $T_{\mathbf{R}}X$ (resp. $T_{\mathbf{R}}Y$).

Pour $s, s' \in E_0$, on pose

$$(5.62)\quad |s|_0 = ||s||_{E_0^0}, \quad \langle s, s'\rangle_0 = \langle s, s'\rangle_{E_0^0}.$$

DÉFINITION 5.20. Pour $T > 1, s \in E_0$, on pose

$$(5.63)\quad \begin{aligned} |s|^2_{T,1} = \ & |p_T s|^2 + T^2|p_T^\perp s|^2_0 \\ & + \Sigma_l\Big|{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{f^H_{l,1}}s\Big|^2_0 + T^2\Sigma_i\Big|{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{e_i}p_T^\perp s\Big|^2_0. \end{aligned}$$

Alors (5.63) définit une norme sur E_0^1, et $(E_0^1, |\ \ |_{T,1})$ se plonge continûment dans $(E_0^0, |\ \ |_0)$. On identifie E_0^0 à son antidual par $\langle\ \ \rangle_0$. Alors on peut identifier E_0^{-1} à l'antidual de E_0^1. Soit $|\ \ |_{T,-1}$ la norme sur E_0^{-1} associée à $|\ \ |_{T,1}$. Alors on a les inclusions continues denses suivantes dont les normes sont inférieures à 1,

$$E_0^1 \to E_0^0 \to E_0^{-1}. \tag{5.64}$$

Soit g^{TS} une métrique sur TS. Alors la définition de $|s|_0, |s|_{T,1}$ se prolonge naturellement à $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$.

Soit

$$R_T = R_{1,T} = [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}] + A_T^{(>0),2}. \tag{5.65}$$

Théorème 5.21. *Il existe $C_1, C_2, C_3 > 0, T_0 > 0$ tels que pour $T \geq T_0$, $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$,*

$$\begin{gathered} \left|A_T^{(0)}s\right|_0^2 \geq C_1|s|_{T,1}^2 - C_2|s|_0^2, \\ \left|\left\langle A_T^{(0)}s, A_T^{(0)}s'\right\rangle_0\right| \leq C_3|s|_{T,1}|s'|_{T,1}, \\ \left|\langle R_T s, s'\rangle_0\right| \leq C_3(|s|_{T,1}|s'|_0 + |s|_0|s'|_{T,1}). \end{gathered} \tag{5.66}$$

PREUVE: D'après la preuve de [**BerB**, Théorème 5.19], il existe $C > 0$, $T_0 > 0$ tels que pour $T \geq T_0$, $s \in E_{1,T}^{1,\perp}$,

$$\left|A_T^{(0)}s\right|_0^2 \geq C\left[\|s\|_{E_0^1}^2 + T^2(|D_T^X s|^2 + |s|_0^2)\right]. \tag{5.67}$$

En utilisant [**BerB**, Théorèmes 5.17, et 5.18], (5.63), on a la première équation de (5.66).

La deuxième équation de (5.66) est triviale.

Par (5.26), pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$, on a

$$\left|\langle R_T s, s'\rangle_0\right| \leq c(|s|_{T,1}|s'|_0 + |s|_0|s'|_{T,1}) + \left|\left\langle [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}]p_T s, p_T s'\right\rangle_0\right|. \tag{5.68}$$

Mais

$$\left|\left\langle [A_T^{(>0)}, A_T^{(0)}]p_T s, p_T s'\right\rangle_0\right| = \left|\left\langle [D_T^H, A_T^{(>0)}]p_T s, p_T s'\right\rangle_0\right| \leq c|s|_{T,1}|s'|_0. \tag{5.69}$$

D'après (5.68), (5.69), on a la troisième équation de (5.66).

On a bien terminé la preuve du Théorème. ■

Comme S est compacte, il existe $U_1, \cdots, U_m$ (resp. $U_1', \cdots, U_{m'}'$) une famille de sections C^∞ de $T_{\mathbf{R}}Y$ (resp. $T_{\mathbf{R}}X$) telle que pour tout $y \in V$ (resp. $x \in W$) $U_1(y), \cdots, U_m(y)$ (resp. $U_1'(x), \cdots, U_{m'}'(x)$) engendrent $(T_{\mathbf{R}}Y)_y$ (resp. $(T_{\mathbf{R}}X)_x$).

DÉFINITION 5.22. Pour $T > 0$, soit $\mathcal{D}_T$ la famille d'opérateurs agissant sur E_0

$$\mathcal{D}_T = \left\{p_T {}^0\nabla_{U_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T,\ p_T^\perp {}^0\nabla_{U_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T^\perp,\ p_T^\perp {}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T^\perp\right\}. \tag{5.70}$$

Théorème 5.23. *Pour tout $k \in \boldsymbol{N}$, il existe $C_k > 0$ tel que pour $T \geq 1, Q_1, \cdots, Q_k \in \mathcal{D}_T$, $s, s' \in \Lambda(T^*_{\mathbb{R}}S)\widehat{\otimes}E_0$, on a*

$$\left|\left\langle [Q_1, [Q_2, \cdots [Q_k, A_T^2], \cdots]]s, s'\right\rangle_0\right| \leq C_k |s|_{T,1}|s'|_{T,1}. \tag{5.71}$$

PREUVE: Comme $[{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U^H_{l,1}}, p_T]$, ${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U_i^!}p_T$, $p_T{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U_i^!}$ sont des opérateurs dont les restrictions aux fibres $X_b (b \in V)$ ont des noyaux $\mathcal{C}^\infty$ uniformément bornées pour $x, x' \in X_b, b \in V, T \geq 1$, en procédant comme dans la preuve de [**B4**, Théorème 9.17], on obtient le Théorème. ∎

Soit

$$F_u(A_T^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta e^{-u^2\lambda}(\lambda - A_T^2)^{-1}d\lambda. \tag{5.72}$$

Soient $P_{u,T}(x, x'), F_u(A_T^2)(x, x')(x, x' \in Z_s)$ les noyaux $\mathcal{C}^\infty$ des opérateurs $\exp(-u^2A_T^2)$, $F_u(A_T^2)$ relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$.

g) La borne uniforme des noyaux de $\exp(-u^2A_T^2)$ et $F_u(A_T^2)$.

Théorème 5.24. ***i)*** *Pour $m \in \boldsymbol{N}$, $0 < u_1 < u_2$ fixés, il existe $C > 0$ tel que pour $x, x' \in Z_s$, $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq T_0$,*

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leq m}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial x^\alpha \partial x'^{\alpha'}}P_{u,T}(x, x')\right| \leq C. \tag{5.73}$$

ii) *Pour $m \in \boldsymbol{N}$, il existe $c > 0, C' > 0$ tels que pour $x, x' \in Z_s$, $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,*

$$\sup_{|\alpha|,|\alpha'|\leq m}\left|\frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial x^\alpha \partial x'^{\alpha'}}F_u(A_T^2)(x, x')\right| \leq c\exp(-C'u^2). \tag{5.74}$$

PREUVE: En utilisant les Théorèmes 5.21 et 5.23, comme $[{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U^H_{l,1}}, p_T]$, ${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U_i^!}p_T$, $p_T{}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{U_i^!}$ sont des opérateurs dont les restrictions aux fibres $X_b(b \in V)$ ont des noyaux $\mathcal{C}^\infty$ uniformément bornées pour $x, x' \in X_b, b \in V, T \geq 1$, en procédant comme dans la preuve de [**B4**, Théorème 9.20], on a le Théorème 5.24. ∎

h) L'asymptotique de l'opérateur $F_u(A_T^2)$ quand $T \to +\infty$.

DÉFINITION 5.25. Soit Ξ l'opérateur différentiel d'ordre 2 agissant sur $\Lambda(T^*_{\mathbb{R}}S)\widehat{\otimes}E_1$,

$$\Xi = p(E - FH^{-1}G)p. \tag{5.75}$$

Théorème 5.26. *On a l'identité*

$$B_{2,1}^2 = \Xi. \tag{5.76}$$

PREUVE: D'après (5.36), (5.42) et (5.44), on a (5.76). ∎

Pour $A \in L(E_0^0, E_0^0)$, on note $||A||^{0,0}$ la norme de A relativement à $|\ \ |_0$.

Théorème 5.27. ***i)*** *Pour* $0 < u_1 < u_2$ *fixés, il existe* $C > 0$ *tel que pour* $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq T_0$,

$$\left\| \exp(-u^2 A_T^2) - p_T J_T \exp(-u^2 B_{2,1}^2) J_T^{-1} p_T \right\|^{0,0} \leq \frac{c}{T^{1/4}}. \tag{5.77}$$

ii) *Il existe* $c > 0, C > 0$ *tels que pour* $u \geq u_0$, $T \geq T_0$,

$$\left\| F_u(A_T^2) - p_T J_T F_u(B_{2,1}^2) J_T^{-1} p_T \right\|^{0,0} \leq \frac{c}{T^{1/4}} \exp(-Cu^2). \tag{5.78}$$

PREUVE: En utilisant les Théorèmes 5.12 et 5.26, en procédant comme dans la preuve de [**BL**, Théorème 13.42], on a le Théorème 5.27. ■

i) Preuves du Théorème 5.17 et de (4.14).

Par (4.1), (4.3) et (5.19) (On peut aussi se réferer à la Section 7), pour $u > 0$ fixé, on a

$$\left| C_T M_{3,u^2,T} C_T^{-1} - \frac{2}{T}(N_X - \dim X) \right| \leq \frac{C}{T^3}. \tag{5.79}$$

En utilisant (5.25), la Proposition 5.16, les Théorèmes 5.24 et 5.27, et en procédant comme en [**BL**, §11 (p) et §13 (q)], on a le Théorème 5.17 et (4.14). ■

j) L'opérateur $\mathcal{G}_{a,b,c,T}$.

DÉFINITION 5.28. Pour $a \in \mathbf{C}^*, b \in \mathbf{C}, c \in \mathbf{C}$, $T \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,b,c,T} = & \frac{1}{a^2} A_T^{(0),2} + C_T \Big(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} - \frac{b}{2\sqrt{2}u} c_T(T_{3,T}) \Big)^2 C_T^{-1} \\ & + u \left[C_T \left(c \nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} - \frac{c_T(T_{3,T})}{2\sqrt{2}u} \right) C_T^{-1}, A_T^{(0)} \right], \end{aligned} \tag{5.80}$$

Ces opérateurs sont les analogues des opérateurs définis dans [**B4**, (9.151)]. En procédant comme en [**B4**, §9 (m)], on a aussi des résultats analogues à [**B4**, Théorèmes 9.29 et 9.30] pour l'opérateur $\mathcal{G}_{a,b,c,T}$.

k) Preuve du Théorème 5.18.

Évidemment

$$A_{u,T}^2 = \mathcal{G}_{\frac{1}{u},\frac{1}{u},u,T}. \tag{5.81}$$

En procédant comme en [**B4**, §9 (m) et (n)], on a le Théorème 5.18. ■

6 Preuve de la Proposition 4.7

On utilise les mêmes notations qu'aux Sections 1(d), 3 et 4.

On rappelle que le fibré holomorphe ξ vérifie l'hypothèse (3.4). On a donc

$$E_2 = R^{\bullet}\pi_{3*}\xi = R^0\pi_{3*}\xi. \tag{6.1}$$

On rappelle aussi que $h_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$ est la métrique sur $H(Z,\xi_{|Z})$ associée à g_T^{TZ}, h^{ξ}, qui a été définie à la Section 2(b), et que h^{E_2} est la métrique sur $E_2 = H(Z,\xi_{|Z})$ définie à la Section 3(a). Soient $\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z})}, \nabla^{E_2}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(E_2, h_T^{H(Z,\xi_{|Z})})$, (E_2, h^{E_2}). On rappelle que $h \in \mathrm{End}(T^H Z)$ est défini à la Définition 1.14.

Pour $\alpha, \alpha' \in H(Z,\xi_{|Z}) = R^0\pi_{3*}\xi$, on a

$$\begin{aligned} \langle\alpha,\alpha'\rangle_{h^{E_2}} &= \frac{1}{(2\pi)^{\dim Z}}\int_Z \langle\alpha,\alpha'\rangle_{h^{\xi}}\, dv_Y\, dv_X,\\ \langle\alpha,\alpha'\rangle_{h_T^{H(Z,\xi_{|Z})}} &= \frac{1}{(2\pi)^{\dim Z}} T^{-2\dim X}\int_Z \det(1+\frac{h}{T^2})\,\langle\alpha,\alpha'\rangle_{h^{\xi}}\, dv_Y\, dv_X. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Soit $h'_T = T^{2\dim X} h_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique sur $H(Z,\xi_{|Z})$. Alors par (6.2), on sait que

$$h'_T = h^{E_2} + O(\frac{1}{T^2}). \tag{6.3}$$

En utilisant (6.3), on a

$$\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z})} = \nabla^{E_2} + O(\frac{1}{T^2}). \tag{6.4}$$

Par [BKö, (3.31)], on a

$$Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})} = -(h'_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h'_T + \frac{2\dim X}{T}. \tag{6.5}$$

En utilisant (6.4) et (6.5), on peut donc poser

$$\begin{aligned} H(H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) &= \textstyle\int_1^{+\infty}\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})}\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\Big]\\ &\quad +\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{2(N_X-\dim X)}{T}\exp\big(-\nabla^{E_2,2}\big)\Big]\Big\}dT\\ &= -\textstyle\int_1^{+\infty}\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[(h'_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h'_T\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\Big]dT\\ &\quad +2\dim X\textstyle\int_1^{+\infty}\Big[\mathrm{ch}(E_2,h'_T)-\mathrm{ch}(E_2,h^{E_2})\Big]\frac{dT}{T}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Par (6.6), on a l'équation

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}H(H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \mathrm{ch}(E_2,h^{E_2}) - \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}). \tag{6.7}$$

D'après [**BGS1**, Corollaire 1.30 et Remarque 1.31], (6.6) et (6.7), on a

$$H(H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = -\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \tag{6.8}$$

Par (6.6) et (6.8), on a bien terminé la preuve de la Proposition 4.7. ∎

7 Preuve du Théorème 4.8

Le but de cette Section est de montrer le Théorème 4.8, relatif l'asymptotique quand $\varepsilon \to 0$, de certaines supertraces où apparaît l'opérateur $B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}$. Cette Section est une extension de [**BerB**, §7], dans laquelle le Théorème 4.8 est établi quand S est un point.

En remplaçant le théorème d'indice local par le théorème d'indice local relatif, on applique les techniques de [**BerB**, §7], à notre situation.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on remplace l'opérateur $B_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}$ par un opérateur conjugué $L^0_{3,\varepsilon,T}$ et on établit un formule de Lichnerowicz pour $L^0_{3,\varepsilon,T}$. Dans (b), on fait un changement de coordonnées locales sur Y_{s_0} et un changement d'échelle [**Ge**] sur l'algèbre de Clifford [**BeGeV**]. Dans (c), on calcule l'asymptotique des opérateurs $L^3_{3,\varepsilon,T}$ et $M^3_{3,\varepsilon,T}$ quand $\varepsilon \to 0$. Dans (d), on conjugue l'opérateur $L^3_{3,0,T}$ pour faire apparaître la superconnexion de Levi-Civita. Dans (e), on montre le Théorème 4.8.

Dans cette Section, on utilise les mêmes notations qu'aux Sections 1(c), 1(d), 4 et 5.

a) Une formule de Lichnerowicz.

On rappelle que ∇^{TZ}_T,∇^{TY}, ∇^{TX}, ∇^ξ sont les connexions holomorphes hermitiennes sur (TZ, g^{TZ}_T), (TY, g^{TY}), (TX, g^{TX}), (ξ, h^ξ). Soit $R^{TZ}_T, R^{TY}, R^{TX}, L^\xi$ les courbures de ∇^{TZ}_T,∇^{TY}, ∇^{TX}, ∇^ξ . Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_T$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi$ définie en (2.1) associée à ∇^{TZ}_T et ∇^ξ. Soit ${}'\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_T$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi$

$$
{}'\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_T = T^{N_X}\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_T T^{-N_X} \tag{7.1}
$$

Soit

$$
L'^{\xi}_{3,T} = L^\xi + \frac{1}{2}\mathrm{Tr} R^{TZ}_T. \tag{7.2}
$$

En utilisant le Théorème 1.7, on sait que quand $T \to +\infty$, on a

$$
\mathrm{Tr} R^{TZ}_T = \mathrm{Tr} R^{TX} + \mathrm{Tr} R^{TY} + O(\frac{1}{T^2}). \tag{7.3}
$$

Soit $K^Z_{1/\varepsilon}$ la courbure scalaire de $(TZ, \tilde{g}^{TZ} + \frac{1}{\varepsilon^2}\pi_1^* g^{TY})$.

On rappelle aussi qu'on note e_i, f_l,θ_l des bases orthonormées de $(T_{\mathbf{R}}X, g^{T_{\mathbf{R}}X})$, $(T_{\mathbf{R}}Y, g^{T_{\mathbf{R}}Y})$, (TY, g^{TY}), et qu'on note e^i, f^i,θ^l les bases duales associées. Soit g_α une base de $T_{\mathbf{R}}S$. Soit g^α la base duale associée de $T^*_{\mathbf{R}}S$. Comme en (5.20), on pose

$$
f_{l,T} = (1 + \frac{h}{T^2})^{-1/2} f^H_{l,1}. \tag{7.4}
$$

On va utiliser la notation suivante: Soit C une section C^∞ de $T^*_{\mathbf{R}}X \widehat{\otimes} \mathrm{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes \xi)$, alors

$$
\begin{aligned}
(\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{e_i} + C(e_i))^2 = {} & \Sigma_i(\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{e_i} + C(e_i))^2 \\
& - \nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{\Sigma_i \nabla^{TX}_{e_i} e_i} - C(\Sigma_i \nabla^{TX}_{e_i} e_i).
\end{aligned} \tag{7.5}
$$

On pose

$$
(7.6)\qquad \begin{aligned} M^0_{3,\varepsilon,T} &= \tfrac{1}{\varepsilon}(\tfrac{T}{\varepsilon})^{N_X} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}(\tfrac{T}{\varepsilon})^{-N_X},\\ L^0_{3,\varepsilon,T} &= (\tfrac{T}{\varepsilon})^{N_X} B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}(\tfrac{T}{\varepsilon})^{-N_X}. \end{aligned}
$$

Alors on a

$$
(7.7)\qquad \mathrm{Tr}_s\left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\right] = \mathrm{Tr}_s\left[M^0_{3,\varepsilon,T}\exp(-L^0_{3,\varepsilon,T})\right].
$$

Par (4.3) et (7.6), on a

$$
(7.8)\qquad \begin{aligned} M^0_{3,\varepsilon,T} = & -\frac{i}{\sqrt{2}\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial T}\omega^W_{T/\varepsilon}\right)(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, \frac{T}{\varepsilon}e_i)g^\alpha c(e_i)\\ & -\frac{i}{\sqrt{2}\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial T}\omega^W_{T/\varepsilon}\right)(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, f_{l,T/\varepsilon})g^\alpha c_{T/\varepsilon}(f_{l,T/\varepsilon})\\ & -\frac{i}{2\varepsilon^2}\left(\frac{\partial}{\partial T}\omega^W_{T/\varepsilon}\right)(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, g^H_{\beta,3,T/\varepsilon})g^\alpha\wedge g^\beta + (*^{TZ}_{T/\varepsilon})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(*^{TZ}_{T/\varepsilon}). \end{aligned}
$$

En utilisant [**BerB**, (7.5) et (7.36)], (4.1) et (7.8), on a

$$
(7.9)\qquad \begin{aligned} M^0_{3,\varepsilon,T} = & \frac{i}{T^3}\tilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, g^H_{\beta,3,T/\varepsilon})g^\alpha\wedge g^\beta + \frac{\sqrt{2}i}{T^2}\tilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, e_i)g^\alpha c(e_i)\\ & +\frac{\sqrt{2}i\varepsilon}{T^2}\tilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, f_{l,T/\varepsilon})g^\alpha c_{T/\varepsilon}(f_{l,T/\varepsilon})\\ & +\frac{2}{T}(N_X - \dim X) - \frac{2\varepsilon^2}{T^3}\left\langle h(1+\frac{\varepsilon^2}{T^2}h)^{-1}\overline{\theta}_l, \theta_m\right\rangle_{g^{TY}} i_{\overline{\theta}_m}\wedge\overline{\theta}^l. \end{aligned}
$$

Pour simplifier, dans l'équation suivante, on identifie g_α, f_l aux relèvements $g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon}, f_{l,T/\varepsilon}$. En utilisant la formule de Lichnerowicz [**B1**, Théorème 3.6], on a

$$
(7.10)\qquad \begin{aligned} L^0_{3,\varepsilon,T} = & -\frac{T^2}{2}\Big({}'\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{T/\varepsilon,e_i} + \frac{T}{\sqrt{2}\varepsilon^2}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)e_j, g_\alpha\right\rangle_{T/\varepsilon} c(e_i)g^\alpha\\ & +\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)f_l, g_\alpha\right\rangle_{T/\varepsilon} c_{T/\varepsilon}(f_l)g^\alpha + \frac{1}{2\varepsilon^2}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(e_i)g_\alpha, g_\beta\right\rangle_{T/\varepsilon} g^\alpha\wedge g^\beta\Big)^2\\ & -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big({}'\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}_{T/\varepsilon,f_l} + \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(f_l)f_m, g_\alpha\right\rangle_{T/\varepsilon} c_{T/\varepsilon}(f_l)g^\alpha\\ & +\frac{T}{\sqrt{2}\varepsilon^2}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(f_l)e_i, g_\alpha\right\rangle_{T/\varepsilon} c(e_i)g^\alpha + \frac{1}{2\varepsilon^2}\left\langle S_{3,T/\varepsilon}(f_l)g_\alpha, g_\beta\right\rangle_{T/\varepsilon} g^\alpha\wedge g^\beta\Big)^2\\ & +\frac{T^2}{8}K^Z_{T/\varepsilon} + \frac{1}{2}g^\alpha\wedge g^\beta\wedge L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(g_\alpha, g_\beta) + \frac{\varepsilon^2}{4}c_{T/\varepsilon}(f_l)c_{T/\varepsilon}(f_m)L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(f_l, f_m)\\ & +\frac{T^2}{4}c(e_i)c(e_j)L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(e_i, e_j) + \frac{\varepsilon T}{2}c(e_i)c_{T/\varepsilon}(f_l)L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(e_i, f_l)\\ & +\frac{T}{\sqrt{2}}g^\alpha\wedge c(e_i)L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(g_\alpha, e_i) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}g^\alpha\wedge c_{T/\varepsilon}(f_l)L'^\xi_{3,T/\varepsilon}(g_\alpha, f_l). \end{aligned}
$$

On rappelle que pour $s\in S$, on note dv_Z, dv_X, dv_Y les formes de volume sur Z , X, Y associées aux métriques $\pi_1^* g^{TY}\oplus g^{TX}$, g^{TX}, g^{TY} sur $TZ = \pi_1^* TY\oplus TX$, TX, TY.

Soit $P_{3,\varepsilon,T}(x,x')(x,x'\in Z_s)$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de l'opérateur $\exp(-L^0_{3,\varepsilon,T})$ relativement à $\frac{dv_Z}{(2\pi)^{\dim Z}}$. Pour $a\in Y_s$, on pose

$$(7.11)\qquad g_{\varepsilon,T}(a)=\int_{X_a}\varphi\mathrm{Tr}_s\big[M^0_{3,\varepsilon,T}P_{3,\varepsilon,T}(x,x)\big]\frac{dv_X}{(2\pi)^{\dim X}}.$$

Par (7.7), on a

$$(7.12)\qquad \varphi\mathrm{Tr}_s\left[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\exp(-B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\right]=\int_{Y_s}g_{\varepsilon,T}\frac{dv_Y}{(2\pi)^{\dim Y}}.$$

Pour démontrer le Théorème 4.8, on va calculer la limite de $g_{\varepsilon,T}$ quand $\varepsilon\to 0$.

b) Le changement d'échelle sur l'algèbre Clifford.

Grâce à la propriété de vitesse finie de propagation, on sait que le calcul de la limite pour $\varepsilon\to 0$, de $g_{\varepsilon,T}$, est local sur Y_{s_0} $(s_0\in S)$. Donc pour $b_0\in Y_{s_0}$, on peut remplacer Y_{s_0} par $(TY)_{b_0}=\mathbf{C}^{m_0}$ $(m_0=\dim Y_s)$, avec $0\in(TY)_{b_0}$ representé par b_0.

On rappelle que S_1, S_2, $S_{3,T}$ sont les tenseurs définis à la Section 1(b) associés à $(\pi_1,\widetilde{\omega}^W,W,V)$, (π_2,ω^V,V,S), (π_3,ω^W_T,W,S).

Soit $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ induite par ∇^{TY}. Soit $\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la connexion sur $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ le long de la fibre Y qui est induite par $\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$.

DÉFINITION 7.1. Soit ${}'\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la connexion sur $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ le long de la fibre Y,

$$(7.13)\qquad \begin{aligned}{}'\nabla_{\cdot}^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)} &= \nabla_{\cdot}^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}\\ &\quad+\tfrac12\left\langle S_2(\cdot)f_m,g^H_{\alpha,2}\right\rangle\sqrt{2}c(f_m)g^\alpha\\ &\quad+\tfrac12\left\langle S_2(\cdot)g^H_{\alpha,2},g^H_{\beta,2}\right\rangle g^\alpha\wedge g^\beta.\end{aligned}$$

Soit $\nabla^\oplus$ la connexion sur $\pi_3^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi\simeq\pi_1^*(\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y))\ \widehat{\otimes}\ (\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)$ le long de la fibre Z

$$(7.14)\qquad \nabla^\oplus=\pi_1^{*\prime}\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}\otimes 1+1\otimes\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}.$$

Pour $y\in\mathbf{C}^{m_0}$, soit $Y=y+\overline{y}$. On relève la trajectoire $t\in\mathbf{R}_+^*\to tY$ horizontalement en la trajectoire $t\in\mathbf{R}_+^*\to x_t\in Z_s$ avec $x_t\in X_{tY}$, $\frac{dx}{dt}\in T^HZ$. Pour $x_0\in X_0$, on identifie TX_{x_t}, $(\pi_3^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi)_{x_t}$ à TX_{x_0}, $(\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0}\widehat{\otimes}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)_{x_0}$ par transport parallèle le long de la courbe $t\to x_t\in Z_s$ relativement à ∇^{TX}, $\psi_\varepsilon\nabla^\oplus\psi_\varepsilon^{-1}$.

L'opérateur $L^0_{3,\varepsilon,T}$ agit sur l'espace vectoriel H_{b_0} des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $(\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0}\ \widehat{\otimes}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)_{|X_{b_0}}$ sur $\mathbf{R}^{2m_0}\times X_{b_0}$.

Pour $s\in H_{b_0}$, on pose

$$(7.15)\qquad \begin{aligned}&(F_\varepsilon s)(Y,x)=s(\tfrac{Y}{\varepsilon},x),\quad\text{pour}\quad (Y,x)\in\mathbf{R}^{2m_0}\times X_{b_0},\\ &L^2_{3,\varepsilon,T}=F_\varepsilon^{-1}L^0_{3,\varepsilon,T}F_\varepsilon.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{O}_p$ l'ensemble des opérateurs différentiels agissant sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de $(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi))_{|X_{b_0}}$ sur $\mathbf{R}^{2m_0}\times X_{b_0}$. Soit $c(T_{\mathbf{R}}Y)$ l'algèbre de Clifford de $(T_{\mathbf{R}}Y, g^{T_{\mathbf{R}}Y})$. Alors on a

$$L^2_{3,\varepsilon,T}\in \pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}c(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_p. \tag{7.16}$$

DÉFINITION 7.2. Pour $\varepsilon>0$, on pose

$$\widetilde{c}_\varepsilon(f_l)=\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}f^l\wedge-\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}i_{f_l} \tag{7.17}$$

Soit $L^3_{3,\varepsilon,T}, M^3_{3,\varepsilon,T}\in\left(\pi_2^*(\Lambda T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}c(T_{\mathbf{R}}Y)\right)_{b_0}\widehat{\otimes}\mathcal{O}_p$ les opérateurs obtenus en remplaçant $c(f_l)$ par $\widetilde{c}_\varepsilon(f_l)$ dans $L^2_{3,\varepsilon,T}$, $M^0_{3,\varepsilon,T}$.

Soit $dv_{TY|_{b_0}}$ la forme de volume de $(T_{\mathbf{R}}Y_{b_0}, g^{TY_{b_0}})\simeq\mathbf{R}^{2m_0}$.

Soit $P^3_{3,\varepsilon,T}((Y,x),(Y',x'))$ $((Y,x),(Y',x')\in\mathbf{R}^{2m_0}\times X_{b_0})$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de l'opérateur $\exp(-L^3_{3,\varepsilon,T})$ relativement à $dv_{TY|_{b_0}}dv_{TX|_{X_{b_0}}}/(2\pi)^{\dim Z}$. Alors pour $x\in X_{b_0}$, il existe $R^{i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}_{\varepsilon,T}((0,x),(0,x))\in\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\operatorname{End}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)_{|X_{b_0}}$, tels que $M^3_{3,\varepsilon,T}P^3_{3,\varepsilon,T}((0,x),(0,x))$ peut s'écrire sous la formule suivante:

$$\begin{aligned}M^3_{3,\varepsilon,T}P^3_{3,\varepsilon,T}((0,x),(0,x))=\Sigma_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le 2m_0\\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le 2m_0}}\ & f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p}\wedge i_{f_{j_1}}\cdots i_{f_{j_q}}\\ &\widehat{\otimes}R^{i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q}_{\varepsilon,T}.\end{aligned} \tag{7.18}$$

On pose

$$[M^3_{3,\varepsilon,T}P^3_{3,\varepsilon,T}((0,x),(0,x))]^{\max}=R^{1,\cdots,2m_0}_{\varepsilon,T}((0,x),(0,x)). \tag{7.19}$$

D'après [**ABoP**, p484] et [**Ge**], on sait que

(7.20)
$$\varphi\mathrm{Tr}_s\left[M^0_{3,\varepsilon,T}P_{3,\varepsilon,T}((0,x),(0,x))\right]=(-i)^{\dim Y}\varphi\mathrm{Tr}_s\left[[M^3_{3,\varepsilon,T}P^3_{3,\varepsilon,T}((0,x),(0,x))]^{\max}\right].$$

c) L'asymptotique des opérateurs $L^3_{3,\varepsilon,T}$ et $M^3_{3,\varepsilon,T}$ quand $\varepsilon\to 0$.

En utilisant (1.19), (7.9) et (7.17), on sait que, quand $\varepsilon\to 0$

$$\begin{aligned}M^3_{3,\varepsilon,T}\to M^3_{3,0,T}=\ &\frac{2}{T}(N_X-\dim X)+\frac{2i}{T^3}\widetilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,\infty},f^H_{l,1})g^\alpha\wedge f^l\\ &+\frac{i}{T^3}\widetilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,\infty},g^H_{\beta,3,\infty})g^\alpha\wedge g^\beta\\ &-\frac{2}{T^3}\left\langle h\overline{\theta}_l,\theta_m\right\rangle_{g^{TY}}\overline{\theta}^l\wedge\theta^m.\end{aligned} \tag{7.21}$$

Par [**BerB**, (7.27)] et (7.21), on a

$$M^3_{3,0,T}=\frac{2}{T}(N_X-\dim X)+\frac{2i}{T^3}\widetilde{\omega}_1^{H\overline{H}}=\frac{2}{T}(\widetilde{N}_{1,T^2}-\dim X). \tag{7.22}$$

Soit $\Gamma^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ la forme de connexion sur $\mathbf{C}^{m_0}$ de $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)$ relativement à ${}'\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}$ le long de la courbe $t\to tY$ $(Y\in\mathbf{R}^{2m_0})$. Alors par [**ABoP**, Proposition 3.7], pour $Y\in\mathbf{R}^{2m_0}$, on a

$$\Gamma_Y^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}(\cdot)=\frac{1}{2}{}'\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y),2}(Y,\cdot)+O(|Y|^2). \tag{7.23}$$

Soit P^{TY} la projection de $TV = T_2^H V \oplus TY$ sur TY.

De [**B4**, Théorème 11.8], on tire que

Proposition 7.3. *On a l'identité*

$$
\begin{aligned}
{}'\nabla^{\pi_2^* \Lambda(T_{\mathbf{R}}^* S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y),2} = & \frac{1}{4}\left\langle \nabla^{TY,2} f_l, f_m\right\rangle c(f_l)c(f_m) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\nabla^{TY,2}] \\
& + \frac{1}{2}\left\langle (S_2 P^{TY} S_2 + \nabla^{TY} S_2) g^H_{\alpha,2}, g^H_{\beta,2}\right\rangle g^\alpha \wedge g^\beta \\
& + \frac{1}{2}\left\langle (\nabla^{TY} S_2) f_l, g^H_{\alpha,2}\right\rangle \sqrt{2} c(f_l) g^\beta.
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

Par [**B1**, Théorème 4.14] et [**B4**, (11.61)], pour $X, Y \in T_{\mathbf{R}}Y, Z, W \in T_{\mathbf{R}}V$

$$
\begin{aligned}
& \left\langle \nabla^{TY,2}(X,Y) P^{TY} Z, P^{TY} W\right\rangle + \left\langle S_2 P^{TY} S_2(X,Y) Z, W\right\rangle \\
& \quad + \left\langle (\nabla^{TY} S_2)(X,Y) Z, W\right\rangle = \left\langle \nabla^{TY,2}(Z,W) X, Y\right\rangle .
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

Pour $X \in T_{\mathbf{R}}Z$, on note $X^{(1,0)}, X^{(0,1)}$ les composantes de X dans $TZ, \overline{TZ}$. On rappelle que $A \in T_{\mathbf{R}}^* W \widehat{\otimes} \mathrm{Hom}(\pi_1^* T_{\mathbf{R}} Y, T_{\mathbf{R}} X)$ est défini en (1.61). Soit

$$
L_1'^{\xi} = L^\xi + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[R^{TX}].
\tag{7.26}
$$

Soit K^X la courbure scalaire de la fibre (X, g^{TX}). Pour $U \in T_{\mathbf{R}}Y$, soit ∇_U l'opérateur différentiel ordinaire dans la direction U.

En utilisant le Théorème 1.10, (1.57), (7.23)-(7.26), quand $\varepsilon \to 0$, on a

$$
\begin{aligned}
L^3_{3,\varepsilon,T} \to L^3_{3,0,T} = & -\frac{1}{2}\Big(\nabla_{f_l} + \frac{1}{2}\left\langle R^{TY} Y, f_l\right\rangle_{g^{TY}_{b_0}}\Big)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\nabla^{TY,2}] \\
& - \frac{T^2}{2}\Big\{\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi} + \frac{1}{T\sqrt{2}}\left\langle A(e_i) f^H_{l,1}, e_j\right\rangle f^l \wedge c(e_j) \\
& - \frac{i}{T^2}\Sigma_{l<m} e_i^{(1,0)} \widetilde{\omega}_1^{H\overline{H}}(f_l, f_m) f^l \wedge f^m \\
& + \frac{1}{T\sqrt{2}}\left\langle S_1(e_i) e_j, g^H_{\alpha,3,\infty}\right\rangle c(e_j) g^\alpha + \frac{1}{2T^2}\left\langle S_1(e_i) g^H_{\alpha,3,\infty}, g^H_{\beta,3,\infty}\right\rangle g^\alpha \wedge g^\beta \\
& + \frac{1}{T^2}\Big[\left\langle S_1(e_i) f^H_{l,1}, g^H_{\alpha,3,\infty}\right\rangle + \frac{1}{2} L_{e_i}\left\langle h' g^H_{\alpha,3,\infty}, f^H_{l,1}\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}}\Big] f^l \wedge g^\alpha\Big\}^2 \\
& + \frac{T^2}{8} K^X + \frac{1}{2} g^\alpha \wedge g^\beta \wedge L_1'^{\xi}(g^H_{\alpha,3,\infty}, g^H_{\beta,3,\infty}) \\
& + \frac{1}{2} f^l \wedge f^m \wedge L_1'^{\xi}(f^H_{l,1}, f^H_{m,1}) \\
& + \frac{T^2}{4} c(e_i) c(e_j) L_1'^{\xi}(e_i, e_j) + \frac{T}{\sqrt{2}} f^l \wedge c(e_i) L_1'^{\xi}(f^H_{l,1}, e_i) \\
& + \frac{T}{\sqrt{2}} g^\alpha \wedge c(e_i) L_1'^{\xi}(g^H_{\alpha,3,\infty}, e_i) + g^\alpha \wedge f^l \wedge L_1'^{\xi}(g^H_{\alpha,3,\infty}, f^H_{l,1}).
\end{aligned}
\tag{7.27}
$$

d) La superconnexion de Levi-Civita.

On rappelle que $B_{1,u}$ est la superconnexion de Levi-Civita associée à $(\pi_1, \widetilde{\omega}^W, h^\xi)$, qui a été définie à la Définition 2.4. On pose

$$
\widetilde{\omega}^{H\overline{H}} = \frac{i}{2}\widetilde{\omega}_1^{H\overline{H}}(f_l, f_m) f^l \wedge f^m - \frac{1}{2}\left\langle h' g^H_{\alpha,3,\infty}, f^H_{l,1}\right\rangle_{\pi_1^* g^{TY}} f^l \wedge g^\alpha .
\tag{7.28}
$$

En utilisant [**BerB**, (7.33)], (7.27) et en procédant comme en [**BerB**, §7], on a

$$(7.29)\ e^{-\frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^{H\overline{H}}} L^3_{3,0,T} e^{\frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^{H\overline{H}}} = -\frac{1}{2}\left(\nabla_{f_l} + \frac{1}{2}\left\langle R^{TY}Y, f_l\right\rangle_{g^{TY}_{b_0}}\right)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[R^{TY}] + B^2_{1,T^2}.$$

e) Preuve du Théorème 4.8.

En utilisant (7.12), (7.20), (7.21), (7.27) et (7.29), la preuve du Théorème 4.8 est la même que dans [**BerB**, §7 (d)]. ■

8 Preuves des Théorèmes 4.9 et 4.10

Le but de cette Section est d'établir les Théorèmes 4.9 et 4.10.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on énonce le Théorème 8.1, dont on peut déduire le Théorème 4.10. Les parties b), c) sont consacrées à la preuve du Théorème 8.1. Dans b), en utilisant la propriété de vitesse finie de propagation, on montre que la preuve du Théorème 8.1 est locale sur la fibre Y_s. Dans (c), en utilisant le Théorème d'indice local relatif, on montre le Théorème 8.1 et la première partie du Théorème 4.9. Dans (d), on montre la deuxième partie du Théorème 4.9.

Dans cette Section, on fait les mêmes hypothèses et on utilise les mêmes notations qu'aux Sections 1(d), 5 et 7.

a) Réformulation du Théorème 4.10.

On rappelle que $\mu_0(T)$ est la forme sur S définie au Théorème 4.9.

Théorème 8.1. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in]0,1], T \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}&\Big|\varphi \mathrm{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T})] - \frac{2}{u^2}\int_Z \frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi T}\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}_T)\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)\\ &+\int_Z \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\Big(\frac{-R^{TZ}_T}{2i\pi} - b(g^{TZ}_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g^{TZ}_T)\Big)_{b=0}\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) + \varphi d^S\mu_0(T)\Big| \leq \frac{Cu^2}{T}.\end{aligned} \tag{8.1}$$

REMARQUE 8.2. Le Théorème 8.1 implique le Théorème 4.10. En effet, pour $0 < \varepsilon \leq 1, \varepsilon \leq T \leq 1$, on applique (8.1) pour $u = T$, et T remplacé par T/ε, alors le terme à droite de (8.1) est donimé par $CT^2\frac{\varepsilon}{T} = C\varepsilon T \leq C\varepsilon$. On a donc démontré le Théorème 4.10.

b) Preuve du Théorème 8.1 est locale sur Y_s.

Soit r tel que $r < \inf_{s\in S}\{$ rayon injectivité des fibres $(Y_s, g^{TY})\}$. Soit $\alpha \in]0, \frac{r}{4}]$. Pour $b \in V$, soit $B^Y(b,\alpha)$ la boule dans Y_s de centre b et de rayon α.

Soit $f : \mathbf{R} \to [0,1]$ une fonction paire $\mathcal{C}^\infty$, telle que

$$f(t) = \begin{array}{lll} 1 & \text{for} & |t| \leq \alpha/2, \\ 0 & \text{for} & |t| \geq \alpha. \end{array} \tag{8.2}$$

On pose

$$g = 1 - f. \tag{8.3}$$

DÉFINITION 8.3. Pour $u \in]0,1], a \in \mathbf{C}$, on pose

$$\begin{aligned} F_u(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ita\sqrt{2})\exp(\frac{-t^2}{2})f(ut)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}},\\ G_u(a) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ita\sqrt{2})\exp(\frac{-t^2}{2})g(ut)\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

On a

$$F_u(a) + G_u(a) = \exp(-a^2). \tag{8.5}$$

Les fonctions $F_u(a), G_u(a)$ sont des fonctions holomorphes paires sur $\mathbf{C}$. Il existe donc des fonctions holomorphes $\widetilde{F}_u(a)$, $\widetilde{G}_u(a)$ telles que

$$F_u(a) = \widetilde{F}_u(a^2), \quad G_u(a) = \widetilde{G}_u(a^2). \tag{8.6}$$

D'après (8.5) et (8.6), on a

$$\widetilde{F}_u(a) + \widetilde{G}_u(a) = \exp(-a). \tag{8.7}$$

Par (8.7), on a

$$\exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T}) = \widetilde{F}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T}) + \widetilde{G}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T}). \tag{8.8}$$

Proposition 8.4. *Il existe $c > 0, C > 0$ tels que pour tout $0 < u \leq 1, T \geq 1$,*

$$\left|\mathrm{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T}\widetilde{G}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T})]\right| \leq C \exp(-c\frac{T^2}{u^2}). \tag{8.9}$$

PREUVE: Pour $v > 0$, on pose

$$H_v(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(it\sqrt{2}a) \exp(-\frac{t^2}{2v^2}) g(t) \frac{dt}{v\sqrt{2\pi}}. \tag{8.10}$$

Alors il existe une fonction holomorphe $\widetilde{H}_v(a)$ telle que

$$H_v(a) = \widetilde{H}_v(a^2). \tag{8.11}$$

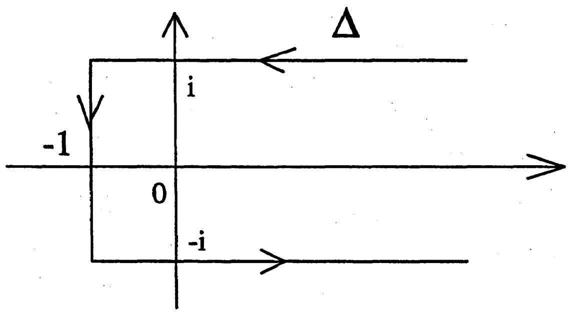
Par (8.6) et (8.11), on a

$$\widetilde{G}_v(a) = \widetilde{H}_v(\frac{a}{v^2}). \tag{8.12}$$

D'après (5.5), (5.55) et (8.12), on a

$$\mathrm{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T}\widetilde{G}_{u/T}(-B^2_{3,u^2/T^2,T})] = \psi_{u/T}\mathrm{Tr}_s[C_T M_{3,1,T} C_T^{-1} \widetilde{H}_{u/T}(A_T^2)]. \tag{8.13}$$

Soit Δ le contour dans $\mathbf{C}$



Par [B4, (11.21)], pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $c_m > 0, C_m > 0$ tels que

$$\sup_{a\in\Delta} |a|^m |\widetilde{H}_v(a)| \leq C_m \exp(-\frac{c_m}{v^2}). \tag{8.14}$$

On a aussi

$$\widetilde{H}_{u/T}(A_T^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Delta \frac{\widetilde{H}_{u/T}(\lambda)}{\lambda - A_T^2} d\lambda. \tag{8.15}$$

En utilisant (5.79), (8.14), (8.15), et en procédant comme dans la Section 5(g), on voit facilement que pour $u \in]0,1], T \geq 1$,

$$\left|\mathrm{Tr}_s[C_T M_{3,1,T} C_T^{-1} \widetilde{H}_{u/T}(A_T^2)]\right| \leq C \exp(-c\frac{T^2}{u^2}). \tag{8.16}$$

De (8.13) et (8.16), on tire la Proposition. ∎

Soit $\widetilde{F}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T})(x,x')(x,x' \in Z_s)$ le noyau de l'opérateur $\widetilde{F}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T})$ relativement à $\frac{dv_Z}{(2\pi)^{\dim Z}}$. En utilisant (8.4) et la propriété de vitesse finie de propagation, [CP, §7.8] et [T, §4.4], il est clair que pour $0 < u \leq 1, T \geq 1$, $x \in Z_s$, $\widetilde{F}_{u/T}(B^2_{3,u^2/T^2,T})(x,x)$ ne dépend que de la restriction de $B^2_{3,u^2/T^2,T}$ à $\pi_1^{-1}B^Y(\pi_1 x, \alpha)$. Par (8.9) et par la discussion ci-dessus, la démonstration de (8.1) est locale sur Y_s.

Pour $b_0 \in Y_{s_0}$, on peut remplacer Z_{s_0} par $\mathbf{C}^{m_0} \times X_{b_0}$ comme à la Section 7(b), et on trivialise les fibrés vectoriels comme indiqué à la Section 7(b). On va montrer le Théorème 8.1 dans cette situation.

c) Preuve du Théorème 8.1.

On rappelle que $E_{1,0}$ est la forme $\mathcal{C}^\infty$ sur V

$$E_{1,0} = \lim_{u\to 0} \mathrm{Tr}_s\left[\widetilde{N}_{1,u} \exp\left(-B^2_{1,u} + du(2u\frac{\partial B_{1,u}}{\partial u})\right)\right]^{du}. \tag{8.17}$$

Théorème 8.5. ***i)*** *Il existe $C > 0$, et des formes $a_{T,j} (j \geq -n, n = \dim Z)$, $\mathcal{C}^\infty$ sur S, qui dépendent continûment de $T \in [1,+\infty]$, tels que pour tout $u \in]0,1], T \in [1,+\infty[$,*

$$\left|\varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u^2/T^2,T} \exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T})\right] - \Sigma^0_{j=-n} \frac{1}{T} a_{T,j} u^{2j}\right| \leq C\frac{u^2}{T}. \tag{8.18}$$

ii) *Pour $j \geq -n$, quand $T \to +\infty$, on a*

$$a_{T,j} = a_{\infty,j} + 0(\frac{1}{T}). \tag{8.19}$$

iii) *De plus*

$$a_{\infty,0} = \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\left[\pi_{1*}\left(-2\mathrm{Td}'(TX, g^{TX})\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)\right) - \varphi_1 d^V E_{1,0}\right]. \tag{8.20}$$

PREUVE: i) En utilisant (5.55) et (7.6), on a

$$\text{(8.21)}\quad \varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u^2/T^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T})\right] = \psi_u \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\frac{1}{T}M^0_{3,\frac{1}{T},1}\exp(-u^2 L^0_{3,\frac{1}{T},1})\right].$$

On va utiliser les mêmes notations de la Section 7, avec ε remplacé par $\frac{1}{T}$, et T par 1. Alors d'après (7.27), quand $T \to +\infty$,

$$\text{(8.22)}\qquad L^3_{3,\frac{1}{T},1} \to L^3_{3,0,1}.$$

Soit $P_{\varepsilon,T,u}$ (resp.$P^3_{\varepsilon,T,u}$) le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de l'opérateur $\exp(-u^2 L^0_{3,\varepsilon,T})$ (resp. $\exp(-u^2 L^3_{3,\varepsilon,T})$) relativement à $\frac{dv_{TY|b_0}\, dv_{X_{b_0}}}{(2\pi)^{\dim Z}}$.

D'après (7.21), quand $T \to +\infty$,

$$\text{(8.23)}\qquad M^3_{3,\frac{1}{T},1} \to M^3_{3,0,1} = 2(\widetilde{N}_{1,1} - \dim X).$$

En utilisant (8.22), (8.23), et en procédant comme en [**BerB**, §8(c)], on sait qu'il existe $C > 0$, et des sections $a'_{T,j}$ de $\pi_3^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\pi_1^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Y)$ sur Z_s qui dépendent continûment de $T \in [1,+\infty]$, tels que pour tout $u \in]0,1], T \in [1,+\infty]$, $x \in X_{b_0}$,

$$\text{(8.24)}\qquad \left|\psi_u \mathrm{Tr}_s\left[M^3_{3,\frac{1}{T},1}P^3_{\frac{1}{T},1,u}((0,x),(0,x))\right] - \Sigma^0_{j=-n} a'_{T,j}(x)u^{2j}\right| \le cu^2.$$

Posons

$$\text{(8.25)}\qquad a_{T,j} = (-i)^{\dim Y}\varphi\int_Z [a'_{T,j}(x)]^{\max}\frac{dv_Z(x)}{(2\pi)^{\dim Z}}.$$

Par (8.21), on a

$$\text{(8.26)}\qquad \begin{aligned}&\varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u^2/T^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T})\right]\\ &\quad = \int_Z \psi_u \varphi \mathrm{Tr}_s\left[\frac{1}{T}M^0_{3,\frac{1}{T},1}P_{\frac{1}{T},1,u}(x,x)\right]\frac{dv_Z}{(2\pi)^{\dim Z}}.\end{aligned}$$

D'après (7.20), on a

$$\text{(8.27)}\qquad \begin{aligned}&\varphi \mathrm{Tr}_s\left[\tfrac{1}{T}M^0_{3,\frac{1}{T},1}P_{\frac{1}{T},1,u}((0,x),(0,x))\right]\\ &\quad = (-i)^{\dim Y}\varphi \mathrm{Tr}_s\left[\{\tfrac{1}{T}M^3_{3,\frac{1}{T},1}P^3_{\frac{1}{T},1,u}((0,x),(0,x))\}^{\max}\right].\end{aligned}$$

En utilisant (8.24)-(8.27), on a (8.18).

ii) Par l'asymptotique du noyau de chaleur [**BGS2**, Théorème 2.11], dans (8.24), $a'_{T,j}(x)(x \in X_{b_0})$ sont des fonctions des coefficients de $M^3_{3,\frac{1}{T},1}$, $L^3_{3,\frac{1}{T},1}$, et de ses dérivées au point $(0,x)$. Comme $L^3_{3,\varepsilon,1}$ et $M^3_{3,\varepsilon,1}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ pour $\varepsilon \in [0,1]$, on a

$$\text{(8.28)}\qquad a'_{T,j}(x) = a'_{\infty,j}(x) + O(\frac{1}{T}).$$

De (8.25), (8.28), on tire (8.19).

iii) Soit $q_{u^2}(x,x')(x,x'\in X)$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de l'opérateur $\exp(-B^2_{1,u^2})$ relativement à $\frac{dv_X}{(2\pi)^{\dim X}}$.

En utilisant (7.29), (8.23), et en procédant comme en [**BerB**, §7(d)], on a

$$\begin{aligned}\psi_u \mathrm{Tr}_s\Big[M^3_{3,0,1}P^3_{0,1,u}((0,x),(0,x))\Big]\\ = 2\mathrm{Td}(-R^{TY})_{b_0}\mathrm{Tr}_s\Big[(\widetilde{N}_{1,u^2}-\dim X)q_{u^2}(x,x)\Big].\end{aligned} \tag{8.29}$$

Par (8.24) et (8.29), on a

$$\begin{aligned}\Big|2\mathrm{Td}(-R^{TY})_{b_0}\mathrm{Tr}_s\Big[(\widetilde{N}_{1,u^2}-\dim X)\exp(-B^2_{1,u^2})\Big]\\ -\Sigma^0_{j=-n}\left(\int_X a'_{\infty,j}\frac{dv_X}{(2\pi)^{\dim X}}\right)u^{2j}\Big|\le cu^2.\end{aligned} \tag{8.30}$$

D'après [**BGS2**, Théorème 2.2] et le Théorème 2.9, (8.30), on a

$$\begin{aligned}\varphi_1\Big(\int_X a'_{\infty,0}\frac{dv_X}{(2\pi)^{\dim X}}\Big)\\ = \mathrm{Td}(TY,g^{TY})\Big[\pi_{1*}(-2\mathrm{Td}'(TX,g^{TX})\mathrm{ch}(\xi,h^\xi))-\varphi_1 d^V E_{1,0}\Big].\end{aligned} \tag{8.31}$$

D'autre part, par (8.25), on a

$$a_{\infty,0}=\varphi\int_Z(-i)^{\dim Y}[a'_{\infty,0}(b,x)]^{\max}\frac{dv_Y(b)dv_X(x)}{(2\pi)^{\dim Z}}. \tag{8.32}$$

Par (8.31) et (8.32), on a (8.20).

On a bien terminé la preuve du Théorème 8.5. ∎

Si $\eta\in\Lambda(T^*_{\mathbf{C}}S)\widehat{\otimes}c(da,d\bar a)$, on peut décrire η de la manière suivante:

$$\eta=\eta_0+da\eta_1+d\bar a\eta_2+da\,d\bar a\eta_3,\quad \text{avec}\quad \eta_i\in\Lambda(T^*_{\mathbf{C}}S), 0\le i\le 3. \tag{8.33}$$

On pose

$$[\eta]^{da\,d\bar a}=\eta_3. \tag{8.34}$$

Soit

$$\begin{aligned}C_{3,-1}(T)&=\int_Z\frac{\widetilde{\omega}^W}{2\pi}\mathrm{Td}(TZ,g^{TZ}_T)\mathrm{ch}(\xi,h^\xi),\\ C_{3,0}(T)&=\int_Z\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Td}\Big(-\frac{R^{TZ}_T}{2\pi i}-b(g^{TZ}_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}(g^{TZ}_T)\Big)_{|b=0}\mathrm{ch}(\xi,h^\xi).\end{aligned} \tag{8.35}$$

Proposition 8.6. ***i)*** *Il existe une forme $\mu_0(T)$, $\mathcal{C}^\infty$ sur S, telle que pour T fixé, quand $u\to 0$,*

$$\mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T}+du\frac{\partial}{\partial u}B_{3,u,T})\right]^{du}=\mu_0(T)+O(u). \tag{8.36}$$

ii) Pour $T \geq 1$ fixé, quand $u \to 0$, on a

$$\varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T})\right] = \frac{2C_{3,-1}(T)}{uT^3} - \left(C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)\right) + O(u). \tag{8.37}$$

PREUVE: i) En utilisant les mêmes arguments que dans [**BGS2**, Théorème 2.11], on sait qu'il existe $p > 0$ et des formes $\mu_j(T)$, C^∞ sur S, tels que quand $u \to 0$, on a

$$\mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T} + du\frac{\partial}{\partial u}B_{3,u,T})\right]^{du} = \Sigma^k_{j=-p}\mu_j(T)u^j + O(u^{k+1}). \tag{8.38}$$

Par la même preuve que dans [**BGS2**, Théorème 2.11], on sait que la limite $\mu''_{-1} = \lim_{u\to 0}\mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T} + du\frac{\partial}{\partial u}B_{3,u,T})\right]$ existe, et que la forme μ''_{-1} ne contient pas le terme de du. Et donc, pour $j < 0$, on a

$$\mu_j(T) = 0. \tag{8.39}$$

D'après (8.38) et (8.39), on a (8.36).

ii) En utilisant les mêmes arguments que dans [**BGS2**, Théorème 2.11], il existe $p' \in \mathbf{N}$, des formes μ'_j sur S tels que quand $u \to 0$, on a

$$\varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T})\right] = \Sigma^k_{j=-p'}\mu'_j u^j + O(u^{k+1}). \tag{8.40}$$

En procédant comme en [**B1**, §4], on a

$$\lim_{u\to 0}\varphi \mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T})\right] = 2\int_Z \frac{\tilde{\omega}^W}{2\pi T^3}\mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}_T)\mathrm{ch}(\xi, h^\xi). \tag{8.41}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\mu'_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \leq -2, \\ &\mu'_{-1} = \tfrac{2}{T^3}C_{3,-1}(T). \end{aligned} \tag{8.42}$$

En utilisant (8.40) et (8.42), on sait que

$$\mu'_0 = \lim_{u\to 0}\frac{\partial}{\partial u}\varphi \mathrm{Tr}_s[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T})]. \tag{8.43}$$

On pose

$$L_{3,u,T} = B^2_{3,u,T} + dau\frac{\partial}{\partial u}B_{3,u,T} + d\bar{a}[B_{3,u,T}, -M_{3,u,T}] + dad\bar{a}(\frac{\partial}{\partial u}(uM_{3,u,T})). \tag{8.44}$$

D'après [**BKö**, Théorème 3.17], on a

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T})\right] = -\mathrm{Tr}_s\left[\exp(-L_{3,u,T})\right]^{dad\bar{a}} - d\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}_s\left[uM_{3,u,T}\exp(-B^2_{3,u,T} + b\frac{\partial}{\partial u}B_{3,u,T})\right]_{b=0}. \tag{8.45}$$

Par [**BKö**, Théorème 3.22], on a

$$\lim_{u\to 0}\varphi \mathrm{Tr}_s[\exp(-L_{3,u,T})]^{dad\bar{a}} = C_{3,0}(T). \tag{8.46}$$

De (8.36), (8.43)-(8.46), on déduit que

$$\mu_0' = -(C_{3,0}(T) + \varphi d^S \mu_0(T)). \tag{8.47}$$

On a bien terminé la preuve de la Proposition 8.6. ■

PREUVE DU THÉORÈME 8.1: D'après (8.37), on sait que pour T fixé, quand $u \to 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi \mathrm{Tr}_s[M_{3,u^2/T^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2/T^2,T})] = &\frac{2}{u^2T}C_{3,-1}(T)\\ &-(C_{3,0}(T)+\varphi d^S\mu_0(T)) + O(u^2).\end{aligned} \tag{8.48}$$

En comparant (8.18) et (8.48), on a

$$\begin{aligned}&a_{T,j}=0 \quad \text{pour} \quad j<-1,\\ &a_{T,-1}=2C_{3,-1}(T), \quad a_{T,0} = -T(C_{3,0}(T)+\varphi d^S\mu_0(T)).\end{aligned} \tag{8.49}$$

De (8.18), (8.49), on tire le Théorème 8.1. ■

d) L'asymptotique de $\mu_0(T)$ quand $T \to +\infty$.

Par [**BerB**, (4.71)],

$$\lim_{T\to+\infty} TC_{3,0}(T) = 2\pi_{3*}\left[\mathrm{Td}(TY,g^{TY})\mathrm{Td}'(TX,g^{TX})\mathrm{ch}(\xi,h^{\xi})\right]. \tag{8.50}$$

D'après (8.20) et (8.50), on a

$$\lim_{T\to+\infty} T\varphi d^S\mu_0(T) = \int_Y \mathrm{Td}(TY,g^{TY})\varphi_1 d^V E_{1,0}. \tag{8.51}$$

En utilisant [**BGS2**, Proposition 2.10], et en procédant comme aux parties (a), (b), (c) de cette Section, on sait qu'il existe $C>0$, et des formes $b_{T,j}$, C^∞ sur S, qui dépendent continûment en $T\in[1,+\infty]$, tels que pour $u\in]0,1], T\in[1,+\infty[$

$$\begin{aligned}\Big|\mathrm{Tr}_s\Big[M_{3,u^2/T^2,T}\exp\Big(-B^2_{3,u^2/T^2,T}+du(t\frac{\partial}{\partial t}B_{3,t,T})_{|t=\frac{u^2}{T^2}}\Big)\Big]&\\ -\Sigma_{j=-n}^{0}\frac{1}{T}b_{T,j}u^{2j}\Big| &\le C\frac{u^2}{T}.\end{aligned} \tag{8.52}$$

Plus précisément, pour $j\ge -n$, quand $T\to+\infty$, on a

$$b_{T,j} = b_{\infty,j} + O(\frac{1}{T}). \tag{8.53}$$

En comparant (8.18), (8.36), (8.52) et (8.53), on a

$$b_{T,0} = \varphi^{-1}a_{T,0} + T\mu_0(T)du. \tag{8.54}$$

et donc

$$\mu_0(T) = \frac{1}{T}[b_{\infty,0}-\varphi^{-1}a_{\infty,0}]^{du} + O(\frac{1}{T^2}). \tag{8.55}$$

Ceci termine la preuve du Théorème 4.9. ■

9 Preuve du Théorème 4.11

Le but de cette Section est de montrer le Théorème 4.11. Pour montrer le Théorème 4.11, on s'inspire de [**BerB**, §9], [**B4**, §13] et [**BL**, §13].

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on montre que la preuve du Théorème 4.11 est locale sur $Y_{s_0}(s_0 \in S)$. Dans (b), étant donné $b_0 \in Y_{s_0}$, on remplace Z_{s_0} par $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$. On associe à cette dernière variété de nouveaux opérateurs $L^1_{3,\varepsilon,T}$ et $L^3_{3,\varepsilon,T}$. Dans (c), on calcule l'asymptotique, quand $T \to +\infty$, de la matrice de $L^3_{3,\varepsilon,T}$ relativement au scindement orthogonal de l'espace de Hilbert sur lequel l'opérateur $L^3_{3,\varepsilon,T}$ agit naturellement. Dans (d), on introduit une famille de normes de Sobolev qui dépendent de ε, T. Ces normes de Sobolev prennent en compte la graduation des variables Grassmanniennes dans $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$. Dans (e), on introduit un opérateur Ξ_ε qui est un analogue d'un opérateur introduit dans [**BerB**, §9]. Dans (f), on montre le Théorème 9.2.

Dans cette Section, on utilise les mêmes notations qu'aux Sections 4-8.

a) Localisation du problème.

On utilise les mêmes notations de la Section 8(a).

Proposition 9.1. *Il existe $\delta, c, C > 0$ tels que pour tout $0 < \varepsilon \leq 1, T \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}(9.1)\qquad \Big|\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\widetilde{G}_\varepsilon(B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\Big] - \frac{2}{T}\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[(N_X - \dim X)\widetilde{G}_\varepsilon(B^2_{2,\varepsilon^2})\Big]\Big| \\ \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}\exp(-\frac{C}{\varepsilon^2}).\end{aligned}$$

PREUVE: Par (8.12), on a

$$(9.2)\qquad \mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\widetilde{G}_\varepsilon(B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\Big] = \psi_\varepsilon \mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}C_{T/\varepsilon}M_{3,1,T/\varepsilon}C^{-1}_{T/\varepsilon}\widetilde{H}_\varepsilon(A^2_{T/\varepsilon})\Big].$$

En utilisant (5.5), (7.9), (8.14) et (8.15), en procédant comme à la Section 5(g)-(i), on sait qu'il existe $\delta, C, c > 0$ tels que, pour $0 < \varepsilon \leq 1, T \geq 1$

$$(9.3)\qquad \begin{aligned}&\Big|\mathrm{Tr}_s\Big[(N_X - \dim X)\widetilde{H}_\varepsilon(A^2_{T/\varepsilon})\Big] \\ &\qquad -\mathrm{Tr}_s\Big[(N_X - \dim X)\widetilde{H}_\varepsilon(B^2_{2,1})\Big]\Big| \leq \frac{C}{T^\delta}\exp(-\frac{c}{\varepsilon^2}), \\ &\Big|\mathrm{Tr}_s\Big[(\frac{1}{\varepsilon}C_{T/\varepsilon}M_{3,1,T/\varepsilon}C^{-1}_{T/\varepsilon} - \frac{2}{T}(N_X - \dim X))\widetilde{H}_\varepsilon(A^2_{T/\varepsilon})\Big]\Big| \\ &\qquad \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}\exp(-\frac{c}{\varepsilon^2}).\end{aligned}$$

De (9.2) et (9.3), on tire (9.1). ■

D'après (9.1), il est clair que pour établir le Théorème 4.11, il suffit d'établir le résultat suivant.

Théorème 9.2. *Pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe $\delta > 0, c > 0$ tels que pour*

$0 < \varepsilon \leq 1, T \geq 1,$

$$(9.4) \qquad \begin{aligned} &\Big|\varphi \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \widetilde{F}_\varepsilon (B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\right] \\ &-\frac{2}{T} \varphi \mathrm{Tr}_s \left[(N_X - \dim X) \widetilde{F}_\varepsilon (B^2_{2,\varepsilon^2})\right] \Big| \leq \frac{C}{T^{1+\delta}}. \end{aligned}$$

PREUVE: Le reste de cette Section est consacré à la preuve du Théorème 9.2. ■

Par (7.6), on a

$$(9.5) \qquad \varphi \mathrm{Tr}_s \left[\frac{1}{\varepsilon} M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon} \widetilde{F}_\varepsilon (B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\right] = \varphi \mathrm{Tr}_s \left[M^0_{3,\varepsilon,T} \widetilde{F}_\varepsilon (L^0_{3,\varepsilon,T})\right].$$

Soit $\widetilde{F}_\varepsilon(L^0_{3,\varepsilon,T})(x,x')(x,x' \in Z_s)$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de $\widetilde{F}_\varepsilon(L^0_{3,\varepsilon,T})$ relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$. En utilisant la propriété de la vitesse finie de propagation, il est clair que pour $x \in Z_s$, $\widetilde{F}_\varepsilon(L^0_{3,\varepsilon,T})(x,x)$ dépend seulement de la restriction de $L^0_{3,\varepsilon,T}$ à $\pi_1^{-1}(B^Y(\pi_1 x, \alpha))$.

b) Un nouvel opérateur sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$.

Soit g^{TS} une métrique sur TS. Elle induit naturellement une métrique sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$.

On fixe $b_0 \in Y_{s_0}$ $(s_0 \in S)$. Sur $B^Y(b_0,r)$, on trivialise la fibration $\pi_1^{-1}(B^Y(b_0,r)) \to B^Y(b_0,r)$ et les fibrés vectoriels considérés comme à la Section 7(b). Alors l'opérateur $L^0_{3,\varepsilon,T}$ agit sur l'espace vectoriel $H_{b_0}(r)$ des sections $\mathcal{C}^\infty$ de

$$\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{|X_{b_0}}$$

sur $B^Y(b_0,r) \times X_{b_0}$.

Soit $G_{b_0} = \Omega(X_{b_0}, \xi_{|X_{b_0}})$ l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{|X_{b_0}}$ sur X_{b_0}. Alors G_{b_0} est muni d'une métrique hermitienne, et $\mathrm{Ker} D^X_{|B^Y(b_0,r)}$ est un sous-fibré vectoriel $\mathbf{Z}$-gradué de G_{b_0} sur $B^Y(b_0,r)$.

Pour $\alpha > 0$ assez petit, il existe un fibré vectoriel $K \subset G_{b_0}$, $\mathbf{Z}$-gradué sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \simeq \mathbf{R}^{2m_0}$ qui coïncide avec $\mathrm{Ker} D^X$ sur $B^{TY}(0,2\alpha)$, et avec $\mathrm{Ker} D^X_{b_0}$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \backslash B^{TY}(0,3\alpha)$, tel que si $K^\perp$ est le fibré vectoriel orthogonal à K dans G_{b_0}, alors

$$(9.6) \qquad K^\perp \cap \mathrm{Ker} D^X_{b_0} = \{0\}.$$

Soit $P_b (b \in \mathbf{R}^{2m_0})$ la projection orthogonale de G_{b_0} sur K_b pour le produit hermitien naturel sur G_{b_0}. On pose $P_b^\perp = 1 - P_b$.

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to [0,1]$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$(9.7) \qquad \begin{aligned} \varphi(t) &= 1 \quad \text{pour} \quad |t| \leq \alpha, \\ &= 0 \quad \text{pour} \quad |t| \geq 2\alpha. \end{aligned}$$

Soit Δ^{TY} le Laplacien standard sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$ correspondant à la métrique $g^{TY_{b_0}}$. Soit H_{b_0} l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0} \widehat{\otimes} \pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0} \widehat{\otimes} (\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{|X_{b_0}}$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$.

Soit $L^1_{3,\varepsilon,T}$ l'opérateur défini par

$$(9.8)\qquad L^1_{3,\varepsilon,T}=\varphi^2(|Y|)L^0_{3,\varepsilon,T}+(1-\varphi^2(|Y|))\Big(\frac{-\varepsilon^2\Delta^{TB}}{2}+T^2P_Y^{\perp}D^{X,2}_{b_0}P_Y^{\perp}\Big).$$

Alors $L^1_{3,\varepsilon,T}$ coïncide avec $L^0_{3,\varepsilon,T}$ sur $|Y|\le\alpha$.

Pour $\varepsilon>0, s\in H_{b_0}$, on pose

$$(9.9)\qquad \begin{aligned}&(S_\varepsilon s)(Y,x)=s(\tfrac{Y}{\varepsilon},x),\quad \text{pour}\quad (Y,x)\in\mathbf{R}^{2m_0}\times X_{b_0},\\ &L^2_{3,\varepsilon,T}=S_\varepsilon^{-1}L^1_{3,\varepsilon,T}S_\varepsilon.\end{aligned}$$

On fait le même changement d'échelle sur les variables de Clifford $c(f_l)$ $(1\le i\le 2m_0)$ qu'à la Section 7. On obtient ainsi un opérateur $L^3_{3,\varepsilon,T}$.

Soit $\widetilde{F}_\varepsilon(L^j_{3,\varepsilon,T})(x,x')(x,x'\in(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}\times X_{b_0})$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de l'opérateur $\widetilde{F}_\varepsilon(L^j_{3,\varepsilon,T})$ relativement à $\frac{1}{(2\pi)^{\dim Z}}dv_{TY_{b_0}}dv_{X_{b_0}}$. D'après la propriété de vitesse finie de propagation, on sait que si $x\in X_{b_0}$ est identifié à $(0,x)$, alors on a

$$(9.10)\qquad \widetilde{F}_\varepsilon(L^0_{3,\varepsilon,T})(x,x)=\widetilde{F}_\varepsilon(L^1_{3,\varepsilon,T})(x,x).$$

Par (7.9) et (7.17), on a

$$(9.11)\qquad \begin{aligned}&\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{1}{\varepsilon}M_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon}\widetilde{F}_\varepsilon(B^2_{3,\varepsilon^2,T/\varepsilon})\Big]\\ &=(-i)^{\dim Y}\varphi\mathrm{Tr}_s\Big\{\Big[\Big[\frac{2i}{T^2}\widetilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon},f_{l,T/\varepsilon})g^\alpha\wedge(1+O(\frac{\varepsilon^2}{T^2}))(f^l\wedge-\frac{\varepsilon^2}{2}i_{f_l})\\ &+\frac{\sqrt{2}i}{T^3}\widetilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon},e_i)g^\alpha c(e_i)+\frac{i}{T^3}\widetilde{\omega}^W(g^H_{\alpha,3,T/\varepsilon},g^H_{\beta,3,T/\varepsilon})g^\alpha\wedge g^\beta\\ &+\frac{2}{T^3}\Big\langle h(1+\frac{\varepsilon^2}{T^2}h)^{-1}\overline{\theta}_l,\theta_m\Big\rangle_{g^{TY}}(\theta^m-\frac{\varepsilon^2}{2}i_{\overline{\theta}_m})\wedge(\overline{\theta}^l-\frac{\varepsilon^2}{2}i_{\theta_l})\\ &+\frac{2}{T}(N_X-\dim X)\Big]\widetilde{F}_\varepsilon(L^3_{3,\varepsilon,T})(x,x)\Big]^{\max}\Big\}.\end{aligned}$$

Soit E^0 l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0}\widehat{\otimes}\pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0}$ $\widehat{\otimes}(\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi)_{|X_{b_0}}$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}\times X_{b_0}$.

Soit F^0_ε l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0}\widehat{\otimes}\pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0}$ $\widehat{\otimes}S_\varepsilon^{-1*}K$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$. Alors l'espace F^0_ε a un sens au $\varepsilon=0$, et F^0_0 est l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0}\widehat{\otimes}\pi_1^*(\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_{b_0}\widehat{\otimes}\mathrm{Ker}D^X_{b_0}$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$. L'espace F^0_ε est un sous-espace de Hilbert de E^0. Soit $F^{0,\perp}_\varepsilon$ l'espace orthogonal à F^0_ε dans E^0.

Soit p_ε la projection orthogonale de E^0 sur F^0_ε. On pose $p^\perp_\varepsilon=1-p_\varepsilon$. Pour $s\in E^0$, $Y\in T_{\mathbf{R}}Y$, on a

$$(9.12)\qquad p_\varepsilon s(Y)=P_{\varepsilon Y}s(Y,\cdot).$$

On pose

$$(9.13)\qquad \begin{aligned}&E_{\varepsilon,T}=p_\varepsilon L^3_{3,\varepsilon,T}p_\varepsilon,\quad F_{\varepsilon,T}=p_\varepsilon L^3_{3,\varepsilon,T}p^\perp_\varepsilon,\\ &G_{\varepsilon,T}=p^\perp_\varepsilon L^3_{3,\varepsilon,T}p_\varepsilon,\quad H_{\varepsilon,T}=p^\perp_\varepsilon L^3_{3,\varepsilon,T}p^\perp_\varepsilon.\end{aligned}$$

Alors on écrit $L^3_{3,\varepsilon,T}$ sous forme matricielle relativement au scindement $E^0 = F^0_\varepsilon \oplus F^{0,\perp}_\varepsilon$.

$$L^3_{3,\varepsilon,T} = \begin{bmatrix} E_{\varepsilon,T}, & F_{\varepsilon,T} \\ G_{\varepsilon,T}, & H_{\varepsilon,T} \end{bmatrix}. \tag{9.14}$$

c) L'asymptotique de la matrice $L^3_{3,\varepsilon,T}$ quand $T \to +\infty$.

On rappelle que ${}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ est la connexion sur $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ définie en (5.23).

Si C est une section de $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}c(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$, et si $b \in Y_{s_0}$ est un point près de b_0, soit $C^3_\varepsilon(b)$ l'élément de $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}$ End$(\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Y))_{b_0}$, qui est obtenu en utilisant la trivialisation de $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}$ End$(\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Y))$, relativement à la connexion $\psi_\varepsilon{}'\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}\psi_\varepsilon^{-1}$ comme à la Section 7(b), et par le changement d'échelle sur les éléments $c(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$ défini à la Définition 7.2.

Dans la suite, on note $[A, B]_+$ l'anti-commutateur de A et B. On pose

$$L'^\xi_1 = L^\xi + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[R^{TX}]. \tag{9.15}$$

Théorème 9.3. *Il existe des opérateurs $E_\varepsilon, F_\varepsilon, G_\varepsilon, H_\varepsilon$ tels que quand $T \to +\infty$,*

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon,T} &= E_\varepsilon + O(\tfrac{1}{T}), \quad & F_{\varepsilon,T} &= TF_\varepsilon + O(1), \\ G_{\varepsilon,T} &= TG_\varepsilon + O(1), \quad & H_{\varepsilon,T} &= T^2 H_\varepsilon + O(T). \end{aligned} \tag{9.16}$$

On pose

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon = \; & \varphi^2(\varepsilon|Y|)\Big\{ -\frac{1}{2}\Big[\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{e_i}, \frac{1}{2}\left\langle A(e_i)f^H_{l,1}, e_j\right\rangle_{g^{TY}} \{\varepsilon c(f^H_{l,1})\}^3_\varepsilon c(e_j) \\ & + \left\langle S_1(e_i)g^H_{\alpha,3,\infty}, e_j\right\rangle_{g^{TX}} g^\alpha \frac{c(e_j)}{\sqrt{2}}\Big]_+ \\ & + \frac{1}{2}\{\varepsilon c(f^H_{l,1})\}^3_\varepsilon c(e_j) L'^\xi_1(f^H_{l,1}, e_j) + \frac{1}{\sqrt{2}} g^\alpha c(e_j) L'^\xi_1(g^H_{\alpha,3,\infty}, e_j)\Big\}_{\varepsilon Y}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Alors $Q_\varepsilon(F^0_\varepsilon) \subset F^{0,\perp}_\varepsilon$, et

$$\begin{aligned} F_\varepsilon &= p_\varepsilon Q_\varepsilon p^\perp_\varepsilon, \quad G_\varepsilon = p^\perp_\varepsilon Q_\varepsilon p_\varepsilon, \\ H_\varepsilon &= p^\perp_\varepsilon\big(\varphi^2(\varepsilon|Y|) D^{X,2}_{\varepsilon Y} + (1 - \varphi^2(\varepsilon|Y|)) D^{X,2}_{b_0}\big) p^\perp_\varepsilon. \end{aligned} \tag{9.18}$$

PREUVE: Par (7.10), on voit facilement que le coefficient de T^2 dans l'expansion asymptotique de $L^3_{3,\varepsilon,T}$ est H_ε.

En utilisant (1.57) et (7.10), on voit que le coefficient de T dans l'expansion de $L^3_{3,\varepsilon,T}$ est l'opérateur Q_ε.

D'après le même calcul que dans [**BerB**, Théorème 9.3], on a

$$\begin{aligned} \big[D^X, D^H_\infty + {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}\big] = & -\frac{1}{2}\Big[\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}_{e_i}, \frac{1}{2}\left\langle A(e_i)f^H_{l,1}, e_j\right\rangle_{g^{TX}} c(f^H_{l,1})c(e_j) \\ & + \left\langle S_1(e_i)g^H_{\alpha,3,\infty}, e_j\right\rangle_{g^{TX}} g^\alpha \frac{c(e_j)}{\sqrt{2}}\Big]_+ \\ & + \frac{1}{2}c(f^H_{l,1})c(e_j)L'^\xi_1(f^H_{l,1}, e_j) + \frac{1}{\sqrt{2}} g^\alpha c(e_j) L'^\xi_1(g^H_{\alpha,3,\infty}, e_j). \end{aligned} \tag{9.19}$$

Par (9.13), (9.17) et (9.19), il est clair que $Q_\varepsilon(F_\varepsilon^0) \subset F_\varepsilon^{0,\perp}$.

On a bien ternimé la preuve du Théorème 9.3. ∎

IL clair que pour $Y \in (T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$, $H_{\varepsilon Y}$ est un opérateur elliptique agissant le long de la fibre X_{b_0}.

Proposition 9.4. *Pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\operatorname{Ker} H_{\varepsilon Y} = \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)_{s_0}\widehat{\otimes}\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*Y)_{b_0}\widehat{\otimes}K_{\varepsilon Y}. \tag{9.20}$$

PREUVE: La preuve est la même que dans [**BerB**, Proposition 9.4]. ∎

d) Une famille d'espaces de Sobolev.

Soit

$$g_\varepsilon(Y) = 1 + (1 + |Y|^2)\varphi^2(\frac{\varepsilon|Y|}{2}). \tag{9.21}$$

Pour $0 \leq q \leq 2\dim V$, soit E_q^0 l'espace vectoriel des sections de carré intégrable de $\oplus_{q_1+q_2=q}\Lambda^{q_1}(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}\Lambda^{q_2}(T_{\mathbf{R}}^*Y)_{b_0}\widehat{\otimes}(\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)_{|X_{b_0}}$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0} \times X_{b_0}$. Alors $E^0 = \oplus_{q=0}^{2\dim V} E_q^0$. Pour $p \in \mathbf{R}$, on note E^p, E_q^p les espaces de Sobolev d'ordre p correspondants.

Pour $s \in E_q^0$, on pose

$$|s|_{\varepsilon,0}^2 = \int_{(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}\times X_{b_0}} |s(Y,x)|^2 g_\varepsilon^{2(2\dim V - q)}(Y)\frac{dv_{TY_{b_0}}(Y)dv_{X_{b_0}}(x)}{(2\pi)^{\dim Z}}. \tag{9.22}$$

Soit $\langle,\rangle_{\varepsilon,0}$ le produit hermitien sur E^0 correspondant à $|\ |_{\varepsilon,0}$. Pour $s \in E^1$, on pose

$$\begin{aligned} |s|_{\varepsilon,T,1}^2 = \ & T^2|P_{\varepsilon Y}^\perp s|_{\varepsilon,0}^2 + |P_{\varepsilon Y}s|_{\varepsilon,0}^2 \\ & + \Sigma_1^{2m}|\nabla_{f_\alpha}s|_{\varepsilon,0}^2 + T^2\Sigma|\nabla_{e_i}^{\Lambda(T^{*(0,1)}X)\otimes\xi}P_{\varepsilon Y}^\perp s|_{\varepsilon,0}^2. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Alors (9.23) définit une norme sur E^1. Soit E^{-1} l'antidual de E^1, et soit $|\ |_{\varepsilon,T,-1}$ la norme sur E^{-1} associée à la norme $|\ |_{\varepsilon,T,1}$ sur E^1. On identifie E^0 à son antidual par $\langle,\rangle_{\varepsilon,0}$.

Par le Théorème 9.3, il est clair que l'argument d'analyse fonctionnelle de [**BL**, §13 (k)-(o)] et [**BerB**, §9 (d)] peut être utilisé directement dans notre situation. En effet, la structure asymptotique de $L_{3,\varepsilon,T}^3$ quand $T \to +\infty$ est la même que dans [**BerB**, §9 (c)]. Bien sûr, on a aussi des variables Grassmanniennes supplémentaires $g^\alpha \in T_{\mathbf{R}}^*S$, mais elles sont du même type que les f^l.

e) Un opérateur Ψ_ε.

Soit F_ε l'espace vectoriel des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)_{s_0}\widehat{\otimes}\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*Y)_{b_0}\widehat{\otimes}S_\varepsilon^{-1*}K$ sur $(T_{\mathbf{R}}Y)_{b_0}$. Alors H_ε est inversible sur $F_\varepsilon^{0,\perp}$.

DÉFINITION 9.5. Soit Ψ_ε l'opérateur de F_ε dans F_ε défini par

$$\Psi_\varepsilon = E_\varepsilon - F_\varepsilon H_\varepsilon^{-1}G_\varepsilon. \tag{9.24}$$

On vérifie facilement que l'opérateur Ψ_ε est un opérateur elliptique d'ordre 2 agissant sur F_ε.

Pour $U \in B^{TY}(0,2\alpha)$, on identifie $(\pi_2^*\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y))_U$ à $\pi_2^*\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)_{s_0}\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)_{b_0}$ par transport parallèle le long de la géodésique dans Y, $t \in [0,1] \to tU$, relativement à la connexion $\psi_\varepsilon{}'\nabla^{\pi_2^*\Lambda(T^*{}_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)}\psi_\varepsilon^{-1}$.

L'opérateur B^2_{2,ε^2} agit sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)_{s_0}\widehat{\otimes}\Lambda(T^{*(0,1)}Y)_{b_0}\widehat{\otimes}K$ sur $B^{TY}(0,2\alpha)$. Si l'on fait le même changement de coordonnées locales sur Y_s, et le même changement d'échelle sur les variables de Clifford $c(f_l)$ qu'à la Section 9(b), alors, à partir de B^2_{2,ε^2}, on obtient un opérateur Σ^3_ε, qui agit sur les sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)_{s_0}\widehat{\otimes}\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*Y)_{b_0}\ \widehat{\otimes}S_\varepsilon^{-1*}K$ sur $B^{TY}(0,\frac{2\alpha}{\varepsilon})$.

Théorème 9.6. *Sur $B^{TY}(0,\frac{2\alpha}{\varepsilon})$, on a*

$$\Psi_\varepsilon = \Sigma^3_\varepsilon. \tag{9.25}$$

PREUVE: En utilisant (7.10), et en procédant comme en [**BL**, Théorème 13.43], on a (9.25). ■

f) Preuve du Théorème 9.2.

En utilisant les Théorèmes 9.3 et 9.6, la preuve du Théorème 9.2 est la même que dans [**BL**, §13(q)] et [**BerB**, §9 (g)]. ■

10 La classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$

Le but de cette Section est de construire la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$, et de démontrer les Théorèmes 3.8 et 3.9.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on généralise les résultats de **[BGS1]** sur les classes de Bott-Chern. Dans (b), on rappelle la propriété de fonctorialité de la suite spectrale de Leray **[Grot]**. Dans (c), d'après (b), on construit un bicomplexe de fibrés holomorphes sur S qui calcule la suite spectrale de Leray. Dans (d), on construit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ et on démontre le Théorème 3.8. Dans (e), on montre le Théorème 3.9.

Dans cette Section, on suppose que π_1 est projective, et que V et W sont des variétés projectives. On utilise les mêmes notations de la Section 3.

a) Classes de Bott-Chern.

Soit $(E, v) = (E^i, v)_{0\leq i\leq n}$ un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe S. Pour $s \in S$, on note $H^i_s(E)$ la i^{eme} cohomologie du complexe $(E, v)_s$. On suppose que pour $0 \leq i \leq n$, le rang des fibres $H^i(E)$ est localement constant. Alors, pour $0 \leq i \leq n$, $H^i(E)$ est un fibré vectoriel holomorphe sur S. Soit $F^i = v(E^{i-1})$, $G^i = \mathrm{Ker} v_{|E^i}$.

On a les suites exactes suivantes:

$$\begin{aligned} &0 \to G^i \to E^i \to F^{i+1} \to 0, \\ &0 \to F^i \to G^i \to H^i(E) \to 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Soient h^{E^i}, $h^{H^i(E)}$ des métriques hermitiennes sur E^i, $H^i(E)$. On note $h^E = \oplus_i h^{E^i}$, $h^{H(E)} = \oplus_i h^{H^i(E)}$ des métriques sur $E = \oplus_i E^i$, $H(E) = \oplus_i H^i(E)$. Soient h^{F^i}, h^{G^i} les métriques sur F^i, G^i induites par h^{E^i}.

On note $\widetilde{\mathrm{ch}}(E^i, F^{i+1}, h^{E^i}, h^{F^{i+1}})$, $\widetilde{\mathrm{ch}}(G^i, H^i(E), h^{G^i}, h^{H^i(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ les classes de Bott-Chern associées à (10.1) **[BGS1**, §1(f)**]**. On pose

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}(E, h^E) = \Sigma_{i=0}^n (-1)^i \mathrm{ch}(E^i, h^{E^i}), \\ &\mathrm{ch}(H(E), h^{H(E)}) = \Sigma_{i=0}^n (-1)^i \mathrm{ch}(H^i(E), h^{H^i(E)}). \end{aligned} \tag{10.2}$$

On dit que E est scindé, si

$$E^i = G^i \oplus F^{i+1}, \quad G^i = H^i(E) \oplus F^i, \tag{10.3}$$

et si les scindements (10.3) sont orthogonaux.

Proposition 10.1. *Il existe une unique manière de définir une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que*

i) On a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} \widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \mathrm{ch}(H(E), h^{H(E)}) - \mathrm{ch}(E, h^E). \tag{10.4}$$

ii) Pour tout application holomorphe de variétés complexes $f : S' \to S$,

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(f^*E, f^*H(E), h^{f^*E}, h^{f^*H(E)}) = f^*\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}). \tag{10.5}$$

iii) Si E est scindé, alors

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = 0 \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \tag{10.6}$$

PREUVE: La preuve est la même que dans [**BGS1**, Théorème 1.29]. ■

Proposition 10.2. *On a*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \Sigma_i(-1)^i\Big[&\widetilde{\mathrm{ch}}(G^i, H^i(E), h^{G^i}, h^{H^i(E)}) \\ &+\widetilde{\mathrm{ch}}(E^i, F^{i+1}, h^{E^i}, h^{F^{i+1}})\Big] \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{10.7}$$

PREUVE: On vérifie facilement que le terme à droite de (10.7) vérifie (10.4)-(10.6). D'après la Proposition 10.1, on a (10.7). ■

D'après (10.7), [**BGS1**, Théorème 1.20], si h'^E, $h'^{H(E)}$ sont d'autres métriques sur E, $H(E)$, on a

$$\begin{aligned}&\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h'^E, h'^{H(E)}) = \\ &\quad \widetilde{\mathrm{ch}}(E, h^E, h'^E) + \widetilde{\mathrm{ch}}(H(E), h'^{H(E)}, h^{H(E)}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{10.8}$$

Par la théorie de Hodge, on peut identifier $H(E)$ au sous fibré de E formé des éléments harmoniques dans E. Soit $h^{H(E)}$ la métrique induite par la métrique h^E sur $H(E)$. Soient ∇^E, $\nabla^{H(E)}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur (E, h^E), $(H(E), h^{H(E)})$. Soit N l'opérateur de nombre sur E. Soit v^* l'adjoint de v pour h^E. On pose $V = v + v^*$. Pour $u \geq 0$, soit A_u la superconnexion

$$A_u = \nabla^E + \sqrt{u}V. \tag{10.9}$$

Pour $s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} s > 1$, on pose

$$\begin{aligned}\zeta_1(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 u^{s-1}\Big\{&\varphi \mathrm{Tr}_s[N\exp(-A_u^2)] \\ &-\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[N\exp(-\nabla^{H(E),2})\Big]\Big\}du.\end{aligned} \tag{10.10}$$

Alors $\zeta_1(s)$ se prolonge en une fonction holomorphe de $s \in \mathbf{C}$ près de $s = 0$.

Pour $s \in \mathbf{C}, \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$, on pose

$$\begin{aligned}\zeta_2(s) = -\frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{+\infty} u^{s-1}\Big\{&\varphi \mathrm{Tr}_s[N\exp(-A_u^2)] \\ &-\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[N\exp(-\nabla^{H(E),2})\Big]\Big\}du.\end{aligned} \tag{10.11}$$

En utilisant [**BeGeV**, Théorème 9.2], $\zeta_2(s)$ est une fonction holomorphe de s.

DÉFINITION 10.3. On pose

$$\zeta(E, h^E) = \frac{\partial}{\partial s}(\zeta_1 + \zeta_2)(0). \tag{10.12}$$

Alors $\zeta(E,h^E)$ est une forme C^∞ sur S. En utilisant (10.10), (10.11), on a

(10.13)
$$\begin{aligned}\zeta(E,h^E) = &-\int_0^1 \left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-A_u^2)] - \varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-\nabla^{E,2})]\right\}\frac{du}{u}\\ &-\int_1^{+\infty}\left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-A_u^2)] - \varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-\nabla^{H(E),2})]\right\}\frac{du}{u}\\ &+\Gamma'(1)\left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-\nabla^{E,2})] - \varphi\mathrm{Tr}_s[N\exp(-\nabla^{H(E),2})]\right\}.\end{aligned}$$

Par [**BGS1**, Théorème 1.15], les formes $\zeta(E,h^E)$ sont dans P^S, et on a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\zeta(E,h^E) = \mathrm{ch}(H(E),h^{H(E)}) - \mathrm{ch}(E,h^E). \tag{10.14}$$

Proposition 10.4. *On a l'identité*

$$\zeta(E,h^E) = \widetilde{\mathrm{ch}}(E,H(E),h^E,h^{H(E)}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \tag{10.15}$$

Preuve: La preuve est la même que dans [**BGS1**, Corollaire 1.30]. ∎

Proposition 10.5. *Soit $E = E^0 \supset \cdots \supset E^m = 0$ une filtration de fibrés vectoriels holomorphes sur S. On pose $\mathrm{Gr}^i E = E^i/E^{i+1}$. Soient h^E, $h^{\mathrm{Gr}E} = \oplus h^{\mathrm{Gr}^i E}$ des métriques hermitiennes sur E, $\mathrm{Gr}E = \oplus \mathrm{Gr}^i E$. Soit h^{E^i} la métrique sur E^i induite par h^E. Alors il existe une unique manière de définir une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E,\mathrm{Gr}E,h^E,h^{\mathrm{Gr}E}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que*

i) On a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(E,\mathrm{Gr}E,h^E,h^{\mathrm{Gr}E}) = \mathrm{ch}(\mathrm{Gr}E,h^{\mathrm{Gr}E}) - \mathrm{ch}(E,h^E). \tag{10.16}$$

ii) Pour tout application holomorphe de variétés complexes $f: S' \to S$,

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(f^*E,f^*\mathrm{Gr}E,h^{f^*E},h^{f^*\mathrm{Gr}E}) = f^*\widetilde{\mathrm{ch}}(E,\mathrm{Gr}E,h^E,h^{\mathrm{Gr}E}). \tag{10.17}$$

iii) Si pour tout $k \geq 0$, $(E^k,h^{E^k}) = \oplus_{i\geq k}(\mathrm{Gr}^i E,h^{\mathrm{Gr}^i E})$, alors

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(E,\mathrm{Gr}E,h^E,h^{\mathrm{Gr}E}) = 0. \tag{10.18}$$

PREUVE: La preuve est la même que dans [**BGS1**, Théorème 1.29]. ∎

REMARQUE 10.6. On a les suites exactes suivantes

$$S_i: \quad 0 \to E^{i+1} \to E^i \to \mathrm{Gr}^i E \to 0. \tag{10.19}$$

D'après la Proposition 10.5. on vérifie facilement qu'on a

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(E,\mathrm{Gr}E,h^E,h^{\mathrm{Gr}E}) = -\Sigma_{i=0}^m\widetilde{\mathrm{ch}}(E^i,\mathrm{Gr}^i E,h^{E^i},h^{\mathrm{Gr}^i E}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \tag{10.20}$$

Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})(0 \leq p, q \leq n)$ un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur S. Soit $H(\mathcal{E})$ la cohomologie de $\mathcal{E}$. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale induite par la filtration $F^p\mathcal{E} = \oplus_{p' \geq p}\mathcal{E}^{p',\bullet}$. Soit $FH(\mathcal{E})$ la filtration associée sur $H(\mathcal{E})$. Alors $\mathcal{E}_\infty = \mathrm{Gr}H(\mathcal{E})$ **[GrH**, §3.5].

On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant.

Soit $h^{\mathcal{E}} = \oplus h^{\mathcal{E}^{p,q}}$ une métrique sur $\mathcal{E} = \oplus \mathcal{E}^{p,q}$, et $h^{\mathcal{E}_0}$ la métrique correspondante sur $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Soit $h^{\mathcal{E}_r}$ $(r \geq 1)$, $h^{H(\mathcal{E})}$ des métriques sur $\mathcal{E}_r$, $H(\mathcal{E})$. On suppose que pour $r > n$, $h^{\mathcal{E}_r} = h^{\mathcal{E}_\infty}$. On pose

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) = \Sigma_{k=0}^{n}(-1)^k \widetilde{\mathrm{ch}}(H^k(\mathcal{E}), \mathrm{Gr}H^k(\mathcal{E}), h^{H^k(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}). \tag{10.21}$$

Théorème 10.7. *On a*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) &= \Sigma_{k=0}^{\infty}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k+1}, h^{\mathcal{E}_k}, h^{\mathcal{E}_{k+1}}) \\ &\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{10.22}$$

PREUVE: La preuve est différée à la Section 13. ■

b) Suite spectrale de Leray [Grot].

Soit Y un espace topologique. On note C^Y la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y. Pour G un objet de C^Y, on note $\Gamma_Y(G)$ le groupe des sections de G sur Y.

DÉFINITION 10.8. Soit G un faisceau de groupes abéliens, et soit $L = (L^i)$ un complexe à degrés positifs de faisceaux de groupes abéliens. Soit $\varepsilon : G \to L$ une application d'augmentation. On dit que le complexe L est une résolution de G, si la suite

$$0 \to G \xrightarrow{\varepsilon} L^0 \to L^1 \cdots \to L^i \to \cdots. \tag{10.23}$$

est exacte. On dit que le complexe L est une résolution injective (resp. acyclique) de G, si de plus les L^i sont injectifs (resp. acycliques).

Si (F, v) est un complexe dans C^Y, on note, pour $i \in \mathbf{Z}$

$$Z^i(F) = \mathrm{Ker}(v_{|F^i}), B^i(F) = \mathrm{Im}(v_{|F^{i-1}}), H^i(F) = Z^i(F)/B^i(F). \tag{10.24}$$

Soit $L = (L^{p,q})$ un bicomplexe dans C^Y, on définit aussi $Z^{p,q}(L), B^{p,q}(L)$, $H^{p,q}(L)$ comme (10.24) pour le complexe $L^{\bullet,q} = (L^{p,q})_p$.

DÉFINITION 10.9. On dit que le bicomplexe $L = (L^{p,q})_{p\geq 0}$ est une résolution du complexe $F = (F^p)_{p\geq 0}$, s'il existe une augmentation $F \to L$, telle que pour p fixé, $L^{p,\bullet}$ est une résolution de F^p, et si on filtre L par $F^qL = \oplus_{q'\geq q}L^{\bullet,q'}$, alors la suite spectrale associée $(\mathcal{E}_r(L), d_r)$ dégénère à $\mathcal{E}_2(L)$. On dit que le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution injective (resp. acyclique) de F, si de plus les $L^{p,q}, H^{p,q}(L)$ sont injectifs (resp. acycliques).

REMARQUE 10.10. Le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution du complexe F si et seulement si pour p fixé, $L^{p,\bullet}$ (resp. $Z^{p,\bullet}(L)$, resp. $B^{p,\bullet}(L)$, resp. $H^{p,\bullet}(L)$) est une résolution de F^p (resp. $Z^p(F)$, resp. $B^p(F)$, resp. $H^p(F)$) [**CE**, Chap XVII]. De même le bicomplexe $L = (L^{p,q})$ est une résolution injective (resp. acyclique) de F, si et seulement si de plus les $L^{p,q}, Z^{p,q}(L)$, $B^{p,q}(L), H^{p,q}(L)$ sont injectifs (resp. acycliques).

Soient X, Y deux espaces topologiques. Soit f une application continue de Y dans X. Soit G un objet de C^Y, soit (G^p) une résolution de G dans C^Y. Soit $L = (L^{p,q})$ un bicomplexe qui est une résolution injective du complexe $F = (f_*(G^p))$ dans C^X. Alors on obtient un bicomplexe $\Gamma_X(L)$. Si on le filtre par $F^p\Gamma_X(L) = \oplus_{p'\geq p}\Gamma_X(L^{\bullet,p'})$, on obtient une suite spectrale associée (E_r, d_r) dont le terme E_2 est

$$E_2^{p,q}(G) = H^p(X, R^q f_*(G)).$$

et dont le terme E_∞ est le groupe gradué associé à une filtration convenable de $(H^n(Y, G))_n$.

Le résultat suivant est établi dans [**Grot**, Théorème 3.7.3].

Théorème 10.11. *Soit X, Y deux espaces topologiques. Soit f une application continue de Y dans X. Alors il existe un foncteur spectral sur la catégorie C^Y des faisceaux de groupes abéliens G sur Y, aboutissant au foncteur gradué $(H^n(Y, G))_n$, et dont le terme initial est*

$$E_2^{p,q}(G) = H^p(X, R^q f_*(G)). \tag{10.25}$$

De plus, ce foncteur spectral est calculé de la manière ci-dessus.

RMARQUE 10.12. Pour calculer la suite spectrale de Leray, d'après [**Grot**, p147 et p149, Remarque 2], on sait qu'on peut prendre aussi une résolution $\mathcal{G}$ de G par des G^i qui sont f_*-acycliques (i.e. $R^j f_* G^i = 0$, pour $j > 0, i \geq 0$), et qu'il suffit de supposer que $L = (L^{q,p})$ est une résolution acyclique du complexe $(f_* G^q)$.

c) Un bicomplexe holomorphe sur S.

Dans cette partie, en procédant comme dans la partie (b), on construira la suite spectrale de Leray dans le contexte holomorphe.

DÉFINITION 10.13. Soit $(F, v) = (F^i)$ un complexe (resp. $\mathcal{F} = (F^{i,j})$ un bicomplexe) de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe V. On suppose que les $H^i(F)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes. On dit que le bicomplexe $\mathcal{F}$ est une résolution de fibrés holomorphes du complexe F, si les $H^{i,j}$ sont des fibrés vectoriels holomorphes et le bicomplexe $\mathcal{F}$ vérifie les conditions de la Définition 10.9 dans le contexte holomorphe. Si de plus, les $F^{i,j}, H^{i,j}$ sont des fibrés acycliques, on dit que le bicomplexe $\mathcal{F}$ est une résolution acyclique de fibrés holomorphes du complexe F.

REMARQUE 10.14. Désormais, si $\mathcal{F} = (F^{i,j})$ est une résolution acyclique de fibrés holomorphes du complexe F sur V, alors on note $(\mathcal{E}_r(\mathcal{F}), d_r)$ (resp. $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$) la suite spectrale associée au bicomplexe $\mathcal{F}$ filtré par $F^p\mathcal{F} = \oplus_{p'\geq p}F^{\bullet,p'}$ (resp. $H^0(V, \mathcal{F})$ filtré par $F^pH^0(V, \mathcal{F}) = \oplus_{p'\geq p}H^0(V, F^{\bullet,p'})$). D'après la Définition 10.13, on a

$$E_1(\mathcal{F}) = H^0(V, \mathcal{E}_1(\mathcal{F})), \quad E_2^{p,q}(\mathcal{F}) = H^p(V, H^q(F)). \tag{10.26}$$

On rappelle que V et W sont des variétés projectives. Soit $n = \dim Z$.

En procédant comme en [**GrH**, §5.3], [**Q1**, §7.2.7], on peut construire une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique $(\xi^i)_{0\le i\le n}$ de fibrés holomorphes de ξ sur W. On note $F^i = R^0\pi_{1*}\xi^i (i \geq 0)$. Alors F^i est π_{2*}-acyclique. On a aussi un complexe F de fibrés holomorphes sur V

$$(F, v): \quad 0 \to F^0 \xrightarrow{v} F^1 \xrightarrow{v} \cdots \xrightarrow{v} F^n \to 0. \tag{10.27}$$

Alors d'après la construction de l'image directe, on sait que pour $i \geq 0$,

$$H^i(F) = R^i\pi_{1*}\xi. \tag{10.28}$$

Pour $i \geq 0$, on pose

$$Z^i(F) = \ker v_{|F^i}, \quad B^i(F) = v(F^{i-1}). \tag{10.29}$$

Comme le rang de $H^i(F)$ est localement constant, on sait que les rangs de $Z^i(F), B^i(F)$ sont aussi localement constants. Donc $Z^i(F), B^i(F)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur V.

D'après [**BS**, Preuve du Lemme 12], on sait qu'on peut construire des fibrés vectoriels holomorphes $B^{i,j}, Z^{i,j}, H^{i,j}, F^{i,j} (0 \leq i, j \leq n)$ sur V tels que pour chaque fibre $Y_s (s \in S)$, pour tout $i \geq 0$, le bicomplexe

$$0 \to Z^{i,\bullet} \to F^{i,\bullet} \to B^{i+1,\bullet} \to 0, \quad (\text{resp.}\, 0 \to B^{i,\bullet} \to Z^{i,\bullet} \to H^{i,\bullet} \to 0)$$

est une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe

$$0 \to Z^i(F) \to F^i \to B^{i+1}(F) \to 0, \quad (\text{resp.}\, 0 \to B^i(F) \to Z^i(F) \to H^i(F) \to 0)$$

au sens de la Définition 10.13.

Maintenant, on compose les bicomplexes

$$0 \to Z^{i,\bullet} \to F^{i,\bullet} \to B^{i+1,\bullet} \to 0$$

et les injections $B^{i,\bullet} \to Z^{i,\bullet}$, on obtient un bicomplexe $(F^{i,j})$ de fibrés holomorphes sur V qui , pour chaque fibre $Y_s (s \in S)$, est une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe (F^i) au sens de la Définition 10.13.

Désormais, on note $(\xi^i)_{0\le i\le n}$ une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de fibrés holomorphes de ξ sur W, et on note $F^i = R^0\pi_{1*}\xi^i$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe (F^i) au sens de la Définition 10.13. On note

$$v : \mathcal{F}^{i,j} \to \mathcal{F}^{i+1,j}, \quad \delta : \mathcal{F}^{i,j} \to \mathcal{F}^{i,j+1}. \tag{10.30}$$

les morphismes du bicomplexe $\mathcal{F}$, et $d = v + \delta$ le morphisme total.

D'après la partie (b), si on filtre le bicomplexe de fibrés holomorphes $E(\mathcal{F}) = (H^0(Y, \mathcal{F}), v, \delta)$ sur S par "$F^pE(\mathcal{F}) = \oplus_{p'\geq p} H^0(Y, \mathcal{F}^{\bullet,p'}_{|Y})$, alors la suite spectrale associée $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$ calcule la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) (à partir de $r = 2$) pour $s \in S$.

d) Définition de $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$.

On se donne des métriques hermitiennes $h^{E^{p,q}(\mathcal{F})}$, $h^{E_1^{p,q}(\mathcal{F})}$ sur $E^{p,q}(\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{F}^{p,q}_{|Y})$, $E_1^{p,q}(\mathcal{F})$. On pose $h^{E_2(\mathcal{F})}$ la métrique sur $E_2(\mathcal{F})$ correspondant à h^{E_2}.

D'après la partie c) et le Théorème 10.7, on a naturellement:

DÉFINITION 10.15. On définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) &= \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &\quad -\Sigma_{i=0}^{1}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_i(\mathcal{F}), E_{i+1}(\mathcal{F}), h^{E_i(\mathcal{F})}, h^{E_{i+1}(\mathcal{F})}).\end{aligned} \tag{10.31}$$

REMARQUE 10.16. En utilisant (10.8), on sait que la définition de $\widetilde{\mathrm{ch}}(\cdot,\cdot)$ ne dépend pas des choix de métriques $h^{E(\mathcal{F})}$ sur $E(\mathcal{F})$. De plus, on a

$$\begin{aligned}&\frac{\bar\partial\partial}{2i\pi}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &= \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}).\end{aligned} \tag{10.32}$$

Théorème 10.17. *La classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ ne dépend pas du choix des résolutions $(\xi^\bullet)$ et $\mathcal{F}$.*

PREUVE: • Par [**BS**, §4], étant données $(\xi_1^\bullet)$, $(\xi_2^\bullet)$ deux résolutions π_{1*} et π_{3*}-acycliques de ξ, on peut trouver une troisième résolution $(\xi_3^\bullet)$ π_{1*} et π_{3*}-acyclique et des injections μ_1, μ_2 des deux premières dans la troisième.

• Soit $F_i = R^0\pi_{1*}\xi_i^\bullet$ $(i = 1,2,3)$. Par [**BS**, §4], étant données $\mathcal{F}_i$ une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe F_i $(i = 1,2)$, on peut trouver $\mathcal{F}_{3,1}, \mathcal{F}_{3,2}$ des résolutions π_{2*}-acycliques de fibrés holomorphes du complexe F_3, et des injections $\mu_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{3,i}$ $(i = 1,2)$ compatible à $\mu_i : F_i \to F_3$, et qui induisent des injections de $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_i)$ dans $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,i})$. Pour appliquer [**BS**, §4], il suffit de considérer au cas où F_i $(i = 1,2,3)$ sont des suites exactes courtes.

• Enfin, par [**BS**, §4], on peut trouver une troisième résolution $\mathcal{F}_3$, π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe F_3 et des applications injectives des deux premières dans la troisième qui induisent des injections de $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,1}), \mathcal{E}_1(\mathcal{F}_{3,2})$ dans $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}_3)$.

D'après les discussions ci-dessus, pour montrer le Théorème, il suffit de montrer que, dans la situation suivante, les termes à droite associés à ces résolutions sont égaux.

Soit (ξ^i), $('\xi^i)$ deux résolutions π_{1*} et π_{3*} acycliques de fibrés holomorphes de ξ sur W, et soit $\mu : \xi^\bullet \to {}'\xi^\bullet$ une injection de complexe. Soit $F^i = R^0\pi_{1*}\xi^i$, $G^i = R^0\pi_{1*}{}'\xi^i$, alors on a une injection de complexe $\mu : F \to G$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ (resp. $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^{i,j})$) une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe $F = (F^i)$ (resp. $G = (G^i)$) sur V. Soit $\mu : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ une injection de bicomplexes qui est compatible aux augmentations $F \to \mathcal{F}$ et $G \to \mathcal{G}$, et qui induit également une injection $\mu : \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$.

Alors, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} & \to & \mathcal{G}/\mathcal{F} & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \to & F & \xrightarrow{\mu} & G & \to & G/F & \to 0. \end{array} \tag{10.33}$$

Par un argument de suite spectrale, le complexe G/F est acyclique.

Par (10.33), on a aussi le bicomplexe

$$(10.34) \qquad \cdots \to \overset{\delta\uparrow}{\mathcal{E}_1^{\bullet,q}}(\mathcal{F}) \to \overset{\delta\uparrow}{\mathcal{E}_1^{\bullet,q}}(\mathcal{G}) \to \overset{\delta\uparrow}{\mathcal{E}_1^{\bullet,q}}(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to \overset{\delta\uparrow}{\mathcal{E}_1^{\bullet,q+1}}(\mathcal{F}) \to \cdots$$

dont chaque ligne est acyclique.

Par la Définition 10.13 et (10.34), et par un argument de suite spectrale, on a

$$(10.35) \qquad \mathcal{E}_2(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = 0.$$

Comme $\mu : \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ est injective, par (10.34), on a la suite exacte

$$(10.36) \qquad 0 \to \mathcal{E}_1(\mathcal{F}) \to \mathcal{E}_1(\mathcal{G}) \to \mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to 0.$$

Comme $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{E}_1(\mathcal{F}), \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ sont π_{2*}-acycliques, par (10.33) et (10.36), $\mathcal{G}/\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})$ sont aussi π_{2*}-acycliques. D'où $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ est une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe G/F.

D'après la Remarque 10.14, on sait que

$$(10.37) \qquad E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{E}_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})_{|Y}), \quad E_2(\mathcal{G}/\mathcal{F}) = 0.$$

Comme $\mathcal{E}_1(\mathcal{F}), \mathcal{E}_1(\mathcal{G})$ sont π_{2*}-acycliques, par (10.26), (10.36) et (10.37), on a la suite exacte suivante:

$$(10.38) \qquad E_1(\mathcal{G},\mathcal{F}) : \quad 0 \to E_1(\mathcal{F}) \to E_1(\mathcal{G}) \to E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to 0.$$

Si on note $I(\mathcal{F}), I(\mathcal{G})$ les termes à droite de (10.31) associés à $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, alors on doit montrer que

$$(10.39) \qquad I(\mathcal{F}) = I(\mathcal{G}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, on note $E(\mathcal{G},\mathcal{F})$ la suite exacte suivante:

$$(10.40) \qquad E(\mathcal{G},\mathcal{F}) : \quad 0 \to E(\mathcal{F}) \to E(\mathcal{G}) \to E(\mathcal{G}/\mathcal{F}) \to 0.$$

Soient $h^{E_r(\mathcal{F})}$, $h^{E_r(\mathcal{G})}$, $h^{E_r(\mathcal{G}/\mathcal{F})}$ $(r = 0, 1, 2)$ des métriques hermitiennes sur $E_r(\mathcal{F})$, $E_r(\mathcal{G})$, $E_r(\mathcal{G}/\mathcal{F})$. Soient $h^{E(\mathcal{G},\mathcal{F})}$, $h^{E_1(\mathcal{G},\mathcal{F})}$ les métriques induites sur $E(\mathcal{G},\mathcal{F})$, $E_1(\mathcal{G},\mathcal{F})$.

Pour le bicomplexe

$$(10.41) \qquad 0 \to \overset{d\uparrow}{E(\mathcal{F})} \to \overset{d\uparrow}{E(\mathcal{G})} \to \overset{d\uparrow}{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})} \to 0,$$

en utilisant le Théorème 10.7, on a

$$\begin{aligned}(10.42) \qquad & \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}), H(E(\mathcal{G})), h^{E(\mathcal{G})}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ & + \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})}) = \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G},\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{G},\mathcal{F})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Pour le bicomplexe

$$(10.43) \qquad 0 \to \overset{v\uparrow}{E(\mathcal{F})} \to \overset{v\uparrow}{E(\mathcal{G})} \to \overset{v\uparrow}{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})} \to 0,$$

en utilisant le Théorème 10.7 et (10.38), on a

$$\begin{aligned}(10.44)\qquad & \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}),E_1(\mathcal{F}),h^{E(\mathcal{F})},h^{E_1(\mathcal{F})})-\widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}),E_1(\mathcal{G}),h^{E(\mathcal{G})},h^{E_1(\mathcal{G})})\\ &+\widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}),E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}),h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})},h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})})+\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{G},\mathcal{F}),h^{E_1(\mathcal{G},\mathcal{F})})\\ &=\widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G},\mathcal{F}),h^{E(\mathcal{G},\mathcal{F})})\quad \text{dans}\quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Pour le bicomplexe

$$(10.45)\qquad 0\to E_1\overset{\delta\uparrow}{(}\mathcal{F})\to E_1\overset{\delta\uparrow}{(}\mathcal{G})\to E_1(\overset{\delta\uparrow}{\mathcal{G}}/\mathcal{F})\to 0,$$

en utilisant le Théorème 10.7 et (10.38), on a

$$\begin{aligned}(10.46)\qquad & \widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{F}),E_2(\mathcal{F}),h^{E_1(\mathcal{F})},h^{E_2})-\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{G}),E_2(\mathcal{G}),h^{E_1(\mathcal{G})},h^{E_2})\\ &+\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}),h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})})=\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{G},\mathcal{F}),h^{E_1(\mathcal{G},\mathcal{F})})\quad \text{dans}\quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Pour le bicomplexe $E(\mathcal{G}/\mathcal{F})$, en utilisant le Théorème 10.7 et (10.37), on a

$$\begin{aligned}(10.47)\qquad & \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}),E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}),h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})},h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})})+\widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F}),h^{E_1(\mathcal{G}/\mathcal{F})})\\ &=\widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{G}/\mathcal{F}),h^{E(\mathcal{G}/\mathcal{F})})\quad \text{dans}\quad P^S/P^{S,0}.\end{aligned}$$

Par (10.42)-(10.47), on obtient (10.39).
On a bien terminé la preuve du Théorème 10.17. ■

e) Preuve du Théorème 3.9.

Maintenant, on utilise les mêmes notations du Théorème 3.9.

Soit $(E_r(\mathcal{F}),d_r)$ la suite spectrale définie à la partie 10(c).
Soit g^{TS} la métrique kählérienne sur TS.
Soit $\lambda(E_r(\mathcal{F}))$ $(r=0,1,2)$, $\lambda(R^\bullet\pi_{3*}\xi)$ les droites complexes qui sont les inverses du déterminant de la cohomologie de $E_r(\mathcal{F})$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$ sur S, munies de la métrique de Quillen associées aux métriques g^{TS}, $h^{E_r(\mathcal{F})}$, $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$.
Soit σ_r $(r=1,2)$ la section canonique de $\lambda(E_{r-1}(\mathcal{F}))\otimes\lambda^{-1}(E_r(\mathcal{F}))$. Soit τ la section canonique de $\lambda(E(\mathcal{F}))\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{3*}\xi)$. Soient $\|\ \|_r$ $(r=1,2)$, $\|\ \|_3$ les normes de Quillen sur $\lambda(E_{r-1}(\mathcal{F}))\otimes\lambda^{-1}(E_r(\mathcal{F}))$, $\lambda(E(\mathcal{F}))\otimes\lambda^{-1}(R^\bullet\pi_{3*}\xi)$.
Par [**BGS3**, Théorème 1.23], (10.2) et (10.7), on a

$$\begin{aligned}(10.48)\qquad \log\|\sigma_r\|_r^2&=\int_S \mathrm{Td}(TS,g^{TS})\widetilde{\mathrm{ch}}(E_{i-1}(\mathcal{F}),E_i(\mathcal{F}),h^{E_{i-1}(\mathcal{F})},h^{E_i(\mathcal{F})}),\\ \log\|\tau\|_3^2&=\int_S \mathrm{Td}(TS,g^{TS})\widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}),H(E(\mathcal{F})),h^{E(\mathcal{F})},h^{H(Z,\xi_{|Z})}).\end{aligned}$$

Par [**KM**], on a aussi

$$(10.49)\qquad \sigma=\sigma_2\otimes\sigma_1\otimes\sigma_3^{-1}$$

Par la Définition 10.15, (10.48) et (10.49), on a le Théorème 3.9. ■

11 Identités entre les formes de torsion analytique d'un complexe de fibrés holomorphes

Soit $\pi : M \to B$ une submersion holomorphe de fibre compacte Z. Soit $(\eta^i, v)_{0\leq i\leq n}$ un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur M. On suppose que le rang de l'hypercohomologie $H(Z, \eta_{|Z})$ est localement constant sur B. Dans cette Section, on montre des relations entre les formes de torsion analytique du complexe (η, v).

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on rappelle la définition de formes de torsion analytique pour le complexe (η, v) [**B4**, §3(b)]. Dans (b), on démontre une identité de formes de torsion analytique assocées à (η, v). Dans (c), on énonce une identité entre les formes de torsion analytique de (η, v) et celles de son fibré cohomologique. Dans (d), en déformant le complexe η [**GS3**], on montre le Théorème 11.2.

Dans cette Section, on utilise les mêmes notations des Sections 1(c) et 2.

a) Formes de torsion analytique associées à un complexe.

Soient M, B des variétés complexes. Soit $\pi : M \to B$ une submersion holomorphe de fibre compacte Z. Soit ω^M une (1,1)-forme réelle, fermée, $\mathcal{C}^\infty$ sur M qui vérifie l'hypothèse du Théorème 1.12 pour π. Soit g^{TZ} la métrique hermitienne sur TZ induite par ω^M. Soit

$$(11.1) \qquad (\eta, v) : \quad 0 \to \eta^0 \xrightarrow{v} \eta^1 \xrightarrow{v} \cdots \xrightarrow{v} \eta^n \to 0.$$

un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur M. Soit h^{η^i} une métrique hermitienne sur η^i, et soit $h^\eta = \oplus_i h^{\eta^i}$ la métrique correspondante sur $\eta = \oplus_{i=0}^n \eta^i$.

Pour $b \in B$, soit E_b l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda(T^{*(0,1)}Z) \otimes \eta$ sur Z_b. Soit N_Z, N_H les opérateurs de nombre sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z), \eta$. Alors l'opérateur $N_Z + N_H$ définit une **Z**-graduation sur E. Soit $\overline{\partial}^Z$ l'opérateur de Dolbeault agissant sur E. Alors $(E, \overline{\partial}^Z + v)$ est un complexe **Z**-gradué. Soit $H(Z_b, \eta_{|Z_b})$ l'hypercohomologie de $(\mathcal{O}_Z(\eta_{|Z}), v)$ sur Z. Alors

$$(11.2) \qquad H(Z_b, \eta_{|Z_b}) \simeq H(E_b, \overline{\partial}^Z + v).$$

On suppose que le rang des fibres $H(E, \overline{\partial}^Z + v)$ est localement constant, Alors $H(E, \overline{\partial}^Z + v)$ est un fibré holomorphe sur B. Dans la suite, on identifie les fibrés holomorphes $H(E, \overline{\partial}^Z + v)$ et $H(Z, \eta_{|Z})$.

Soit $\overline{\partial}^{Z*}$ (resp. v^*) l'adjoint de $\overline{\partial}^Z$ (resp. v) relativement à g^{TZ}, h^η (resp. h^η). On pose

$$(11.3) \qquad \begin{aligned} &V = v + v^*, \quad D^Z = \overline{\partial}^Z + \overline{\partial}^{Z*}, \\ &A^Z = D^Z + V. \end{aligned}$$

Par la théorie de Hodge, pour $b \in B$,

$$(11.4) \qquad H(E_b, \overline{\partial}^Z + v) \simeq \mathrm{Ker} A^{Z_b}.$$

Comme à la Section 2(b), $\mathrm{Ker}A^Z$ hérite du produit (2.2) de E. Soit $h^{H(Z,\eta_{|Z})}$ la métrique hermitienne correspondante sur $H(Z,\eta_{|Z})$.

On pose

$$
\text{(11.5)}\qquad \begin{aligned}
&\mathrm{ch}(\eta,h^\eta)=\Sigma_{i=0}^n(-1)^i\mathrm{ch}(\eta^i,h^{\eta^i}),\\
&\mathrm{ch}(H(Z,\eta_{|Z}),h^{H(Z,\eta_{|Z})})=\Sigma_{i=0}^n(-1)^i\mathrm{ch}(H^i(Z,\eta_{|Z}),h^{H^i(Z,\eta_{|Z})}).
\end{aligned}
$$

Par l'extension de [**BKö**] au complexe de fibrés hermitiens $(E,\overline{\partial}^Z+v)$, on peut associer des formes de torsion analytique $T(\omega^M,\overline{\partial}^Z+v,h^\eta)\in P^B/P^{B,0}$ [**B4**, §3(b)]. Pour cela, il suffit de remplacer partout $\overline{\partial}^Z$ par $\overline{\partial}^Z+v$.

Les formes $T(\omega^M,\overline{\partial}^Z+v,h^\eta)$ vérifient l'équation suivante:

$$
\text{(11.6)}\quad \frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi}T(\omega^M,\overline{\partial}^Z+v,h^\eta)=\mathrm{ch}(H(Z,\eta_{|Z}),h^{H(Z,\eta_{|Z})})-\int_Z\mathrm{Td}(TZ,g^{TZ})\mathrm{ch}(\eta,h^\eta).
$$

On va maintenant exprimer $T(\omega^M,\overline{\partial}^Z+v,h^\eta)$ en fonction des formes de torsion analytique associées aux deux filtrations du complexe E.

b) Formes de torsion analytique du complexe E et filtration par $\overline{\partial}^Z$.

Dans cette partie, on suppose que η est π_*-acylique, i.e. pour tout $j>0, i\geq 0$, on a $R^j\pi_*\eta^i=0$. Alors les $R^0\pi_*\eta^i$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur B.

On pose $\zeta^i=R^0\pi_*\eta^i$. Alors

$$
\text{(11.7)}\qquad (\zeta,v):\quad 0\to\zeta^0\xrightarrow{v}\zeta^1\xrightarrow{v}\cdots\xrightarrow{v}\zeta^n\to 0.
$$

est aussi un complexe holomorphe de fibrés vectoriels holomorphes sur B. On note $H^i_x(\zeta)$ le i^{eme} groupe cohomologique du complexe $(\zeta,v)_x$.

Par un argument de suite spectrale, pour $i\geq 0$, $H^i(\zeta)$ et $H^i(E,\overline{\partial}^Z+v)$ sont isomorphes canoniquement et holomorphiquement. Dans la suite, on identifie les fibrés holomorphes $H(\zeta)$ et $H(Z,\eta_{|Z})$ sur B.

Soient h^ζ et $h^{H(\zeta)}$ les métriques hermitiennes sur ζ et $H(\zeta)$ induites par (g^{TZ},h^η), et h^ζ. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(\zeta,H(\zeta),h^\zeta,h^{H(Z,\eta_{|Z})})\in P^B/P^{B,0}$ la classe de Bott-Chern construite à la Section 10(a). Soit $T(\omega^M,h^{\eta^i})$ les formes de torsion analytique sur B associées à η^i. On pose

$$
\text{(11.8)}\qquad T(\omega^M,h^\eta)=\Sigma_{i=0}^n(-1)^iT(\omega^M,h^{\eta^i})
$$

Théorème 11.1. *On a l'identité*

$$
\text{(11.9)}\qquad T(\omega^M,\overline{\partial}^Z+v,h^\eta)=T(\omega^M,h^\eta)+\widetilde{\mathrm{ch}}(\zeta,H(\zeta),h^\zeta,h^{H(Z,\eta_{|Z})})\quad \text{dans}\quad P^B/P^{B,0}.
$$

PREUVE: La formule (11.9) est une généralisation de [**B4**, Théorème 0.2]. La seule différence est qu'on suppose dans [**B4** , §14], $H^i(\zeta)=0$ pour $i<n$. En utilisant la

Proposition 10.4, et en procédant comme en [**B4** , §14], on a (11.9). ■

c) Formes de torsion analytique du complexe E et filtration par v.

Dans cette partie, on suppose que η vérifie une de deux conditions suivantes:

i) Pour $i > 0$, on a $H^i(\eta) = 0$.

ii) Le rang des fibres $H^i(\eta)$ est localement constant, et $H^i(\eta)$ est π_*-acyclique.

Alors par un argument de suite spectrale, on sait que $H(Z, H(\eta)_{|Z})$ est un fibré vectoriel holomorphe sur B, de plus, $H(Z, H(\eta)_{|Z})$ et $H(Z, \eta_{|Z})$ sont isomorphes canoniquement et holomorphiquement. D'où dans les deux cas ci-dessus, on peut identifier les fibrés holomorphes $H(Z, H(\eta)_{|Z})$ et $H(Z, \eta_{|Z})$.

Soit $h^{H(\eta)}$ une métrique sur $H(\eta)$. Soit $h^{H(Z,H(\eta)_{|Z})}$ la métrique sur $H(Z, H(\eta)_{|Z})$ induite par $g^{TZ}, h^{H(\eta)}$. Soit $\widetilde{\mathrm{ch}}(\eta, H(\eta), h^{\eta}, h^{H(\eta)})$ la classe de Bott-Chern construite à la Section 10(a).

Théorème 11.2. *On a l'identité suivante*

$$\begin{aligned} T(\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^\eta) &= T(\omega^M, h^{H(\eta)}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z,\eta_{|Z}), h^{H(Z,\eta_{|Z})}, h^{H(Z,H(\eta)_{|Z})}) \\ &+ \int_Z \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ})\widetilde{\mathrm{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}) \quad \text{dans} \quad P^B/P^{B,0}. \end{aligned} \tag{11.10}$$

d) Preuve du Théorème 11.2.

Soit $\mathbf{P}^1$ le plan projectif complexe. Soit $\mathcal{O}(1)$ le fibré en droite canonique de degré 1 sur $\mathbf{P}^1$, et soit σ la section holomorphe de $\mathcal{O}(1)$ définie par $(1,0) \in \mathbf{C}^{2*}$. Alors σ n'est nulle qu'en point ∞. Si F est un fibré vectoriel holomorphe sur $M \times \mathbf{P}^1$, et $m \geq 0$, on définit $F(m)$ de la manière suivante:

$$F(0) = F, \quad \text{et} \quad F(m) = F(m-1) \otimes \mathcal{O}(1). \tag{11.11}$$

Pour $i \geq 0$, on pose $F^i = \mathrm{Im}(v_{|\eta^{i-1}})$, $G^i = \ker v_{|\eta^i}$, $H^i = H^i(\eta)$. Soit h^{F^i}, h^{G^i} les métriques sur F^i, G^i induites par h^η.

Pour $j = 0, \cdots, n-1$, soit l'application $F^j \to G^j \oplus F^j(1)$ définie par l'inclusion dans G^j et par $\mathrm{Id}\otimes\sigma$ dans $F^j(1)$. Soit $'G^j = G^j \oplus F^j(1)/F^j$. Soit l'application $G^j \to \eta^j \oplus {}'G^j(1)$ définie par l'inclusion dans η^j et par $x \in G^j \to [(x,0)] \otimes \sigma \in {}'G^j(1)$. On définit aussi

$$\begin{aligned} &\widetilde{\eta}^j = \mathrm{Coker}(G^j \to \eta^j \oplus {}'G^j(1))(2n-2j), \\ &\widetilde{F}^j = F^j(2n-2j+2), \quad \widetilde{G}^j = {}'G^j(2n-2j+1), \\ &\widetilde{H}^j = H^j(2n-2j+1). \end{aligned} \tag{11.12}$$

Alors on a les suites exactes suivantes sur $M \times \mathbf{P}^1$

$$\begin{gathered} 0 \to \widetilde{G}^j \to \widetilde{\eta}^j \to \widetilde{F}^{j+1} \to 0, \\ 0 \to \widetilde{F}^{j+1} \to \widetilde{G}^{j+1} \to \widetilde{H}^{j+1} \to 0. \end{gathered} \tag{11.13}$$

En les composant, on obtient un complexe $(\widetilde{\eta}, v) = (\widetilde{\eta}^i, v)_{0 \leq i \leq n}$ sur $M \times \mathbf{P}^1$ [**GS4**, Lemme 3].

Soit z le paramètre complexe standard sur $\mathbf{P}^1$, et soit $i_z : M \to M \times \mathbf{P}^1$ l'application de $x \in M$ à $(x,z) \in M \times \mathbf{P}^1$. Alors pour $z \neq \infty$, comme $\sigma(z) \neq 0$, le fibré $i_z^*(\widetilde{\eta})$ est isomorphe à η, et $i_\infty^* \widetilde{\eta}^j \simeq F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j$. Par partition de l'unité, on peut trouver une métrique $h^{\widetilde{\eta}^j}$ sur $\widetilde{\eta}^j$ telle que les isomorphismes $i_0^* \widetilde{\eta}^j \simeq \eta^j$ et $i_\infty^* \widetilde{\eta}^j \simeq F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j$ sont des isométries.

Proposition 11.3. *On a*

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}) = -\int_{\mathbf{P}^1} \mathrm{ch}(\widetilde{\eta}, h^{\widetilde{\eta}}) \log|z|^2. \tag{11.14}$$

PREUVE: La preuve est la même que dans [**BGS1**, (1.115)]. ■

Maintenant, on considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ B \times \mathbf{P}^1 & \to & B\,. \end{array} \tag{11.15}$$

avec $\widetilde{\pi} = \pi \times \mathrm{Id}_{\mathbf{P}^1}$.

Soit $H(Z, \widetilde{\eta}_{|Z})$ l'hypercohomologie du complexe $(\mathcal{O}_Z(\widetilde{\eta}_{|Z}), v)$ sur Z. Par notre hypothèse, le rang des fibres $H(Z, \widetilde{\eta}_{|Z})$ est localement constant. Donc les formes de torsion analytique $T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}) \in P^{B\times\mathbf{P}^1}/P^{B\times\mathbf{P}^1,0}$ sont bien définies. On a aussi

$$h^{i_0^* H(Z,\widetilde{\eta}_{|Z})} = h^{H(Z,\eta_{|Z})}, \quad h^{i_\infty^* H(Z,\widetilde{\eta}_{|Z})} = h^{H(Z,H(\eta)_{|Z})}. \tag{11.16}$$

On a

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} \log|z|^2 = \delta_0 - \delta_\infty. \tag{11.17}$$

En utilisant le Théorème 2.11, (11.14) et (11.17), on obtient

$$\begin{aligned} \int_Z \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) \widetilde{\mathrm{ch}}(\eta, H(\eta), h^\eta, h^{H(\eta)}) &- \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z, \eta_{|Z}), h^{H(Z,\eta_{|Z})}, h^{H(Z,H(\eta)_{|Z})}) \\ &= \int_{\mathbf{P}^1} \tfrac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}) \log|z|^2 \\ &= i_0^* T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}) - i_\infty^* T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}). \end{aligned} \tag{11.18}$$

Par les définitions de $T, \widetilde{\eta}, h^{\widetilde{\eta}}$, on a

$$\begin{aligned} i_0^* T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}) &= T(\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^\eta), \\ i_\infty^* T(p^*\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{\widetilde{\eta}}) &= T(\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{i_\infty^* \widetilde{\eta}}). \end{aligned} \tag{11.19}$$

Pour terminer la preuve du Théorème 11.2, par (11.18) et (11.19), il reste à montrer que

$$T(\omega^M, \overline{\partial}^Z + v, h^{i_\infty^* \widetilde{\eta}}) = T(\omega^M, h^{H(\eta)}) \quad \text{dans} \quad P^B/P^{B,0}. \tag{11.20}$$

D'après notre construction de $\widetilde{\eta}$, pour le complexe $i_\infty^* \widetilde{\eta}$, on a

$$i_\infty^* \widetilde{\eta}^j = F^j \oplus F^{j+1} \oplus H^j, \quad h^{i_\infty^* \widetilde{\eta}^j} = h^{F^j} \oplus h^{F^{j+1}} \oplus h^{H^j}. \tag{11.21}$$

et l'application $v : i_\infty^* \widetilde{\eta}^j \to i_\infty^* \widetilde{\eta}^{j+1}$ est donnée par 0 sur $F^j \oplus H^j$, Id sur F^{j+1}.

Par (11.16), (11.21), et en utilisant les relations ci-dessus, on peut vérifier facilement qu'on a (11.20).

Par (11.18)-(11.20), on a (11.10). ■

12 Preuve du Théorème 3.11

Pour montrer le Théorème 3.11, on va appliquer les Théorèmes 3.5, 11.1, 11.2 et la Section 10.

On rappelle que $(\xi^\bullet, v) = (\xi^i, v)_{0\leq i\leq n}$ est une résolution de fibrés holomorphes π_{1*} et π_{3*}-acycliques de ξ sur W. On pose $F^i = R^0\pi_{1*}\xi^i$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{i,j})$ une résolution π_{2*}-acyclique de fibrés holomorphes du complexe $F = (F^i)$ au sens de la Définition 10.13. On note aussi $(\mathcal{E}_r(\mathcal{F}), d_r)$ (resp. $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$) la suite spectrale associée au bicomplexe $\mathcal{F}$ filtré par $F^p\mathcal{F} = \oplus_{p'\geq p}\mathcal{F}^{\bullet,p'}$ (resp. $H^0(Y, \mathcal{F})$ filtré par $F^pH^0(Y, \mathcal{F}) = \oplus_{p'\geq p}H^0(Y, \mathcal{F}^{\bullet,p'}_{|Y})$). Soient $v : \mathcal{F}^{i,j} \to \mathcal{F}^{i+1,j}$, $\delta : \mathcal{F}^{i,j} \to \mathcal{F}^{i,j+1}$ les différentielles du bicomplexe $\mathcal{F}$.

On rappelle que h^ξ est une métrique hermitienne sur ξ, et que $h^{R\pi_{1*}\xi}$, $h^{R\pi_{3*}\xi}$ sont les métriques sur $R^\bullet\pi_{1*}\xi$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$ induites par (g^{TX}, h^ξ), (g^{TZ}, h^ξ) définies à la Section 2(b). Soit $h^{\xi^\bullet} = \oplus_i h^{\xi^i}$ une métrique hermitienne sur $\xi^\bullet$. Soit h^F la métrique sur F induite par $(g^{TY}, h^{\xi^\bullet})$.

Comme à la Section 11(a), on définit $T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v, h^F)$ (resp. $T_3(\omega^W, \overline{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet})$) les formes de torsion analytique sur S associées à (V, S, π_2) (resp. (W, S, π_3)).

Dans la suite, pour η un fibré vectoriel holomorphe hermitien sur V, on note toujours $T_2(\omega^V, h^\eta)$ les formes de torsion analytique sur S associées à (V, S, π_2). Si $(L^i)_{0\leq i\leq n}$ est un complexe de fibrés vectoriels holomorphes hermitiens sur V, on note

$$T_2(\omega^V, h^L) = \Sigma_{i=0}^n(-1)^i T_2(\omega^V, h^{L^i}). \tag{12.1}$$

Soient $H(Z, \xi^\bullet_{|Z})$, $H(Y, F_{|Y})$ les hypercohomologies de $(\mathcal{O}_Z(\xi^\bullet_{|Z}), v)$, $(\mathcal{O}_Y(F_{|Y}), v)$. Soient $h^{H(Z,\xi^\bullet_{|Z})}$, $h^{H(Y,F_{|Y})}$ les métriques sur $H(Z, \xi^\bullet_{|Z})$, $H(Y, F_{|Y})$ induites par $(g^{TZ}, h^{\xi^\bullet})$, (g^{TY}, h^F) comme à la Section 11(a). Comme $\xi^\bullet$ est une résolution π_{1*} et π_{3*}-acyclique de ξ sur W, on a

$$H(Z, \xi^\bullet_{|Z}) = H(Y, F_{|Y}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi. \tag{12.2}$$

En procédant comme aux Sections 4-9, on a

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, \overline{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet}) = {} & \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^{\xi^\bullet}) \\ & + T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v, h^F) - \textstyle\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \mathrm{ch}(\xi^\bullet, h^{\xi^\bullet}) \\ & + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi, h^{H(Y,F_{|Y})}, h^{H(Z,\xi^\bullet_{|Z})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

Pour le complexe $\xi^\bullet = (\xi^i)$, en utilisant les Théorèmes 11.1 et 11.2, on a

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) &= -\textstyle\int_Z \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi^\bullet, \xi, h^{\xi^\bullet}, h^\xi) \\ &\quad + T_3(\omega^W, \overline{\partial}^Z + v, h^{\xi^\bullet}) \\ &\quad + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi, h^{H(Z,\xi^\bullet_{|Z})}, h^{R\pi_{3*}\xi}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}, \\ T_1(\omega^W, h^\xi) &= T_1(\omega^W, h^{\xi^\bullet}) + \widetilde{\mathrm{ch}}(F, R^\bullet\pi_{1*}\xi, h^F, h^{R\pi_{1*}\xi}) \\ &\quad - \textstyle\int_X \mathrm{Td}(TX, g^{TX}) \widetilde{\mathrm{ch}}(\xi^\bullet, \xi, h^{\xi^\bullet}, h^\xi) \quad \text{dans} \quad P^V/P^{V,0}. \end{aligned} \tag{12.4}$$

D'après (3.2), (12.3) et (12.4), on a

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) - \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) = {} & -\textstyle\int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \\ & + T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v, h^F) + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi, h^{H(Y,F_{|Y})}, h^{R\pi_{3*}\xi}) \\ & - \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) \widetilde{\mathrm{ch}}(F, R^\bullet\pi_{1*}\xi, h^F, h^{R\pi_{1*}\xi}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned} \tag{12.5}$$

Soit $'\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ la suite spectrale associée à $\mathcal{F}$ filtré par $'F^p(\mathcal{F}) = \oplus_{p'\geq p}\mathcal{F}^{p',\bullet}$. Alors pour $q > 0$, on a

$$(12.6) \qquad \begin{aligned} &'\mathcal{E}_1^{p,0}(\mathcal{F}) = F^p, \quad '\mathcal{E}_2^{p,0}(\mathcal{F}) = R^p\pi_{1*}\xi, \\ &'\mathcal{E}_1^{p,q}(\mathcal{F}) = {}'\mathcal{E}_2^{p,q}(\mathcal{F}) = 0. \end{aligned}$$

Pour le bicomplexe $\mathcal{F}$, d'après la Définition 10.13, et (12.6), les suites spectrales $\mathcal{E}_r(\mathcal{F}), {}'\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ dégénèrent en $\mathcal{E}_2(\mathcal{F}), {}'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$, et on a

$$(12.7) \qquad \mathcal{E}_2(\mathcal{F}) = {}'\mathcal{E}_2(\mathcal{F}) = R^\bullet\pi_{1*}\xi.$$

On note $h^{\mathcal{E}_2(\mathcal{F})}$, $h^{'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})}$ les métriques sur $\mathcal{E}_2(\mathcal{F}), {}'\mathcal{E}_2(\mathcal{F})$ induites par $h^{R\pi_{1*}\xi}$.

Par (10.26), pour $r = 0, 1$, on a

$$(12.8) \qquad E_r(\mathcal{F}) = H^0(Y, \mathcal{E}_r(\mathcal{F})).$$

Soit $h^{\mathcal{F}} = \oplus_{p,q} h^{\mathcal{F}^{p,q}}$ une métrique hermitienne sur $\mathcal{F}$. Soit $h^{\mathcal{E}_r(\mathcal{F})}$ (r=0,1) la métrique sur $\mathcal{E}_r(\mathcal{F})$ induite par $h^{\mathcal{F}}$. Soient $h^{E(\mathcal{F})}$, $h^{H(Y,\mathcal{E}_1(\mathcal{F}))}$ les métriques sur $E(\mathcal{F})$, $E_1(\mathcal{F})$ induites par $g^{TY}, h^{\mathcal{F}}, h^{\mathcal{E}(\mathcal{F})}$.

Soient $H(Y, \mathcal{F}_{|Y})$, $H(Y, {}'\mathcal{E}_1(\mathcal{F})_{|Y})$ les hypercohomologies des complexes $(\mathcal{F}_{|Y}, v+\delta)$, $('\mathcal{E}_1(\mathcal{F})_{|Y}, v)$ sur Y. Soit $h^{H(Y,\mathcal{F}_{|Y})}$ la métrique sur $H(Y, \mathcal{F}_{|Y})$ induite par $g^{TY}, h^{\mathcal{F}}$. On rappelle qu'on a

$$(12.9) \qquad H(E(\mathcal{F})) = H(Y, \mathcal{F}_{|Y}) = H(Y, {}'\mathcal{E}_1(\mathcal{F})_{|Y}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi.$$

En procédant comme dans la preuve du Théorème 11.2, dans laquelle on remplace $\overline{\partial}^Y$ par $\overline{\partial}^Y + v$, on a

$$(12.10) \qquad \begin{aligned} T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v, h^{\mathcal{F}}) = {} & T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v + \delta, h^{\mathcal{F}}) \\ & - \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{F}, {}'\mathcal{E}_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^{\mathcal{F}}) \\ & + \widetilde{\mathrm{ch}}(R^\bullet\pi_{3*}\xi, h^{H(Y,\mathcal{F}_{|Y})}, h^{H(Y,F_{|Y})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le complexe $(\mathcal{F}, v+\delta)$, par le Théorème 11.1, on a

$$(12.11) \qquad \begin{aligned} T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v + \delta, h^{\mathcal{F}}) = {} & T_2(\omega^V, h^{\mathcal{F}}) \\ & + \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}), H(E(\mathcal{F})), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Y,\mathcal{F}_{|Y})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le complexe $(\mathcal{F}, v)$, en utilisant les Théorèmes 11.1, 11.2 et (12.8), on a

$$(12.12) \qquad \begin{aligned} T_2(\omega^V, h^{\mathcal{F}}) = {} & \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^{\mathcal{E}_1(\mathcal{F})}) \\ & + T_2(\omega^V, h^{\mathcal{E}_1(\mathcal{F})}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E(\mathcal{F}), E_1(\mathcal{F}), h^{E(\mathcal{F})}, h^{H(Y,\mathcal{E}_1(\mathcal{F}))}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Pour le complexe $(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}), \delta)$, par les Théorèmes 11.1 et 11.2, on a

$$(12.13) \qquad \begin{aligned} T_2(\omega^V, h^{\mathcal{E}_1(\mathcal{F})}) = {} & T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E_1(\mathcal{F}), E_2, h^{H(Y,\mathcal{E}_1(\mathcal{F}))}, h^{E_2}) \\ & + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_1(\mathcal{F}), \mathcal{E}_2(\mathcal{F}), h^{\mathcal{E}_1(\mathcal{F})}, h^{R\pi_{1*}\xi}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

Par la Définition 10.15, (12.10)-(12.13), on a

$$
\begin{aligned}
T_2(\omega^V, \overline{\partial}^Y + v, h^F) \ = \ & T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) \\
& + \textstyle\int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY})[\Sigma_{i=0}^{1}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_i(\mathcal{F}), \mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F}), h^{\mathcal{E}_i(\mathcal{F})}, h^{\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F})}) \\
& \quad -\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{F}, '\mathcal{E}_1(\mathcal{F}), h^{\mathcal{F}}, h^{F})] \\
& + \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Y, F_{|Y})}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.
\end{aligned}
\tag{12.14}
$$

Par le Théorème 10.7 et (12.7), on a

$$
\begin{aligned}
& \Sigma_{i=0}^{1}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_i(\mathcal{F}), \mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F}), h^{\mathcal{E}_i(\mathcal{F})}, h^{\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F})}) \\
& \quad = \Sigma_{i=0}^{1}\widetilde{\mathrm{ch}}('\mathcal{E}_i(\mathcal{F}), '\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F}), h^{'\mathcal{E}_i(\mathcal{F})}, h^{'\mathcal{E}_{i+1}(\mathcal{F})}) \quad \text{dans} \quad P^V/P^{V,0}.
\end{aligned}
\tag{12.15}
$$

De (12.5), (12.14) et (12.15), on tire le Théorème 3.11. ■

13 Preuve du Théorème 10.7

Dans cette Section, on montre le Théorème 10.7.

Soit $(\mathcal{E}, d, v)$ un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes sur une variété complexe M. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale associée à la filtration par v. On suppose que les $\mathcal{E}_r$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur M.

Une stratégie possible pour démontrer le Théorème 10.7 serait d'utiliser la déformation sur $\mathbf{P}^1$ [**BGS1**, §1(f)] et [**BGS4**, §4]. On obtiendrait un bicomplexe de fibrés holomorphes sur $M \times \mathbf{P}^1$, qui coïncide avec le bicomplexe donné sur $M \times \{0\}$, qui a tous les propriétés de ce bicomplexe sur $M \times \mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\}$, mais qui est tel que sur $M \times \{\infty\}$, la suite spectrale dégénère en E_2. Mais, en général, les $(\mathcal{E}'_r, d'_r)$ relativement à ce nouveau bicomplexe ne sont pas localement libres, ce qui nous interdit d'utiliser cette méthode. On est donc amené à utiliser une technique analytique directe.

On procède en effet comme à la Section 4, mais ici, l'analyse est plus facile puisqu'on est en dimension finie. Toutefois, on a une difficulté technique supplémentaire, puisque la suite spectrale ne dégénère en général pas en $\mathcal{E}_2$.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on rappelle les notations et les hypothèses. Dans (b), comme à la Section 4, on construit une 1-forme sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$. Dans (c), on énonce une suite de résultats intermédiaires qui sont utilisés dans la preuve du Théorème 10.7. Dans (d), on montre le Théorème 10.7. Dans (e) et (f), on démontre les résultats intermédiaires.

On utilise les mêmes notations de la Section 10(a).

a) Le théorème principal.

Soit M une variété complexe de dimension m. Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})(0 \leq p, q \leq n)$ un bicomplexe de fibrés vectoriels holomorphes sur M. Soit $H(\mathcal{E})$ la cohomologie de $\mathcal{E}$. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale induite par la filtration $F^p\mathcal{E} = \oplus_{p' \geq p}\mathcal{E}^{p',\bullet}$. Soit $F^\bullet H(\mathcal{E})$ la filtration associée sur $H(\mathcal{E})$. On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant. Alors les $\mathcal{E}_r^{p,q}$, $F^pH^{p+q}(\mathcal{E})$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur M. Soit $h^{\mathcal{E}}$ une métrique sur $\mathcal{E}$. Soit $h^{H(\mathcal{E})}$ la métrique sur $H(\mathcal{E})$ induite par $h^{\mathcal{E}}$, en utilisant la théorie de Hodge.

Soient $d : \mathcal{E}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}^{p+1,q}, v : \mathcal{E}^{p,q} \longrightarrow \mathcal{E}^{p,q+1}$ les différentielles du bicomplexe $\mathcal{E}$. Soit v^*, d^* l'adjoint de v, d pour $h^{\mathcal{E}}$. Alors on a

$$[v, d] = [v^*, d^*] = 0. \tag{13.1}$$

On pose

$$D = d + d^*, \quad V = v + v^*. \tag{13.2}$$

Soient N_H, N_V les opérateurs de nombre sur $\mathcal{E}$, i.e. N_H, N_V agissent sur $\mathcal{E}^{p,q}, \mathcal{E}_r^{p,q}$ par multiplication par p, q. Alors $N = N_H + N_V$ est l'opérateur de nombre total sur $\mathcal{E}$.

On va définir par récurrence une suite de sous-espaces hermitiens de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'_0 \supset \mathcal{E}'_1 \supset \cdots \supset \mathcal{E}'_r \supset \cdots$ tels que

$$\mathcal{E}'_r \simeq \mathcal{E}_r. \tag{13.3}$$

On pose

$$\mathcal{E}'_0 = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}. \tag{13.4}$$

Supposons qu'on a construit les $\mathcal{E}'_{r'}(r' \leq r)$. Alors comme $\mathcal{E}'_r \simeq \mathcal{E}_r$, l'opérateur d_r agit sur $\mathcal{E}'_r$. Soit d_r^* l'adjoint de d_r pour la métrique de $\mathcal{E}'_r$. On pose

$$\begin{aligned} D_r &= d_r + d_r^*, \\ \mathcal{E}'_{r+1} &= \mathrm{Ker} D_r. \end{aligned} \tag{13.5}$$

Alors $\mathcal{E}'_{r+1} \subset \mathcal{E}'_r$, et $\mathcal{E}'_{r+1}$ hérite d'une métrique de $\mathcal{E}'_r$. Par la théorie de Hodge,

$$\mathcal{E}'_{r+1} \simeq \mathcal{E}_{r+1}. \tag{13.6}$$

Le résultat suivant est établi dans [**BerB**, Théorème 6.1].

Proposition 13.1. *Pour $r \in N$, $\mathcal{E}'_r$ est naturellement scindé en une somme directe orthogonale $\mathcal{E}'_r = \oplus_{p,q} \mathcal{E}'^{p,q}_r$, avec $\mathcal{E}'^{p,q}_r \subset \mathcal{E}^{p,q}$, de telle sorte que sous l'identification $(\mathcal{E}'_r, d_r) \simeq (\mathcal{E}_r, d_r)$, on a $\mathcal{E}'^{p,q}_r \simeq \mathcal{E}^{p,q}_r$.*

Désormais, on ne distingue plus $\mathcal{E}'_r$ et $\mathcal{E}_r$. Donc on a

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \supset \mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \cdots \tag{13.7}$$

Soit $h^{\mathcal{E}_r}$ $(r \geq 0)$ la métrique sur $\mathcal{E}_r$ induite par la métrique $h^{\mathcal{E}}$.
Pour la clarté de l'exposé, on reénonce le Théorème 10.7 :

Théorème 13.2. *On a l'égalité suivante*

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) &= \Sigma_{r=0}^{+\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_r}, h^{\mathcal{E}_{r+1}}) \\ &\quad - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans} \quad P^M/P^{M,0}. \end{aligned} \tag{13.8}$$

PREUVE: Le reste de cette Section est consacré à la preuve du Théorème 13.2. ■

Pour $r \geq 1$, soit $\mathcal{E}_r^\perp$ l'espace orthogonal à $\mathcal{E}_r$ dans $\mathcal{E}_{r-1}$. Pour $r \geq 1$, Soit p_r la projection orthogonale de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathcal{E}_r$. On pose $p_r^\perp = 1 - p_r$. Alors D_r agit sur $\mathcal{E}_{r+1}^\perp$ comme un opérateur inversible.

Soient $\nabla^{\mathcal{E}}$, $\nabla^{\mathcal{E}_r}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(\mathcal{E}, h^{\mathcal{E}})$, $(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r})$. Soit $\overline{p}_r$ la projection orthogonale de $\mathcal{E}_r$ sur $\mathcal{E}_{r+1}$. Alors par [**B2**, Proposition 1.8], on a

$$\nabla^{\mathcal{E}_{r+1}} = \overline{p}_r \nabla^{\mathcal{E}_r} \overline{p}_r. \tag{13.9}$$

Par récurrence, on a

$$\nabla^{\mathcal{E}_r} = p_r \nabla^{\mathcal{E}} p_r. \tag{13.10}$$

b) Une 1-forme sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$.

Pour $u > 0, T \geq 1, r \geq 0$, on pose

$$(13.11) \qquad \begin{aligned} A_T &= D + TV, \\ \mathcal{D}_{3,u,T} &= \nabla^{\mathcal{E}} + uA_T, \\ \mathcal{D}_{r,u} &= \nabla^{\mathcal{E}_r} + uD_r. \end{aligned}$$

On définit aussi

$$(13.12) \qquad \mathcal{D}'_{3,u,T} = \nabla^{\mathcal{E}'} + u(d^* + Tv^*), \quad \mathcal{D}''_{3,u,T} = \nabla^{\mathcal{E}''} + u(d + Tv).$$

DÉFINITION 13.3. Soit $\alpha_{u,T}$ une 1-forme à valeurs dans P^M sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$:

$$(13.13) \qquad \alpha_{u,T} = du\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[\frac{2N}{u}\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T})\Big] + dT\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{2N_V}{T}\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T})\Big].$$

Théorème 13.4. *On a l'égalité suivante:*

$$(13.14) \qquad \begin{aligned} d\alpha_{u,T} = \frac{2}{u} du\, dT \varphi\Big\{\bar\partial \frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}_s\Big[[\mathcal{D}'_{3,u,T}, N]\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T} - \frac{b}{T}N_V)\Big]_{b=0} \\ -\partial\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}_s\Big[[\mathcal{D}''_{3,u,T}, N]\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T} - \frac{b}{T}N_V)\Big]_{b=0} \\ -\bar\partial\partial\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{Tr}_s\Big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T} - \frac{b}{T}N_V)\Big]_{b=0}\Big\}. \end{aligned}$$

PREUVE: La preuve est la même que dans [**BKö**, Théorème 2.9]. ■

c) Des résultats intermédiaires.

Pour $T > 0$, on pose

$$(13.15) \qquad h_T^{\mathcal{E}} = \oplus_{p,q} T^{2q} h^{\mathcal{E}^{p,q}}.$$

Alors $h_T^{\mathcal{E}}$ est une métrique hermitiennne sur $\mathcal{E} = \oplus_{p,q}\mathcal{E}^{p,q}$. Alors l'adjoint de v pour la métrique $h_T^{\mathcal{E}}$ est donné par T^2v^*. On pose

$$(13.16) \qquad D'_T = D + v + T^2 v^*.$$

Alors on a un isomorphisme canonique C^∞ de fibrés vectoriels sur M

$$(13.17) \qquad H(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{Ker} D'_T.$$

Soit $h_T^{H(\mathcal{E})}$ la métrique hermitienne sur $H(\mathcal{E})$ induite par l'identification (13.17). Soit $\nabla_T^{H(\mathcal{E})}$ la connexion holomorphe hermitienne sur $(H(\mathcal{E}), h_T^{H(\mathcal{E})})$. Soit P_T la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\mathrm{Ker}D'_T$ associée à $h_T^{\mathcal{E}}$.

Théorème 13.5. ***i)*** *Pour tout $u > 0$,*

$$(13.18) \qquad \lim_{T\to+\infty}\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T})\Big] = \varphi\mathrm{Tr}_s\Big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{1,u})\Big].$$

ii) *Pour tout $u > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $T \geq 1$,*

$$\left|\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\mathcal{D}_{3,u,T}^2)\right] - \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\mathcal{D}_{1,u}^2)\right]\right| \leq \frac{C}{T^{\frac{1}{4}}}. \tag{13.19}$$

iii) *Pour tout $0 < u_1 < u_2$ fixés, il existe $C > 0$ tel que pour $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq 1$,*

$$\left|\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N \exp(-\mathcal{D}_{3,u,T}^2)\right]\right| \leq C. \tag{13.20}$$

Pour $r > 0$, on pose

$$\begin{aligned} &\mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) = \varphi\mathrm{Tr}_s[N \exp(-\nabla^{\mathcal{E}_r,2})], \\ &\mathrm{ch}'(H(\mathcal{E}), h^{H(\mathcal{E})}) = \Sigma_i(-1)^i i\, \mathrm{ch}(H^i(\mathcal{E}), h^{H^i(\mathcal{E})}). \end{aligned} \tag{13.21}$$

On rappelle qu'on a défini $\zeta(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) \in P^M$ à la Définition 10.3.

Théorème 13.6. *On a l'identité suivante*

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to+\infty} \Big\{ \int_1^{+\infty} 2\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N \exp(-\mathcal{D}_{3,u,T}^2)\right] - \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N \exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\right]\Big\}\frac{du}{u} \\ &\qquad -2\Sigma_{r\geq 2}(r-1)\left[\mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}})\right]\log T\Big\} \\ &= 2\int_1^{+\infty} \left\{\varphi\mathrm{Tr}_s[N \exp(-\mathcal{D}_{1,u}^2)] - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_2, h^{\mathcal{E}_2})\right\}\frac{du}{u} \\ &\qquad -\Sigma_{r\geq 2}\zeta(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) + \Gamma'(1)\left[\mathrm{ch}'(\mathcal{E}_2, h^{\mathcal{E}_2}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_\infty, h^{\mathcal{E}_\infty})\right]. \end{aligned} \tag{13.22}$$

Théorème 13.7. *Quand $T \to +\infty$, on a*

$$\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\right] = \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E}_\infty,2})\right] + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

De plus

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} \left\{\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\right] - \varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E}_\infty,2})\right]\right\}\frac{dT}{T} \\ &\qquad = -\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans} \quad P^M/P^{M,0}. \end{aligned} \tag{13.23}$$

PREUVE: Les preuves des Théorèmes 13.5 et 13.6 sont différées à la Section 13(e), et la preuve du Théorème 13.7 est différée à la Section 13(f). ■

d) Preuve du Théorème 13.2.

Pour montrer le Théorème 13.2, on utilise la même méthode qu'à la Section 4. On note aussi I_j^i les termes correspondants définis à la Section 4(c). En utilisant (10.13), les Théorèmes 13.5-13.7 et en procédant comme à la Section 4, on a

$$\begin{aligned} I_1^3 &= -\Sigma_{r=1}^{+\infty}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_r}, h^{\mathcal{E}_{r+1}}) + \Gamma'(1)\left[\mathrm{ch}'(\mathcal{E}_1, h^{\mathcal{E}_1}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_\infty, h^{\mathcal{E}_\infty})\right], \\ I_2^3 &= \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}), \\ I_3^3 &= \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) + \Gamma'(1)\big[-\mathrm{ch}'(\mathcal{E}, h^{\mathcal{E}}) \\ &\qquad +\mathrm{ch}'(H(\mathcal{E}), h^{H(\mathcal{E})})\big], \\ I_4^3 &= -\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, h^{\mathcal{E}}, h^{\mathcal{E}_1}) + \Gamma'(1)\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E},2})\right] \\ &\qquad -\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E}_1,2})\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{13.24}$$

En combinant la preuve du Théorème 13.6, et [**B4**, §6(f)-(h)], on peut traiter aussi le terme à droite de (13.14). On a ainsi

$$\Sigma_{i=1}^{4} I_i^3 = 0 \quad \text{dans} \qquad P^M/P^{M,0}. \tag{13.25}$$

D'après la Section 10(a), on a aussi

$$\begin{gathered} \mathrm{ch}'(H(\mathcal{E}), h^{H(\mathcal{E})}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_\infty, h^{\mathcal{E}_\infty}) \in P^{M,0}, \\ \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E},2})\big] - \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N_V \exp(-\nabla^{\mathcal{E}_1,2})\big] \in P^{M,0}. \end{gathered} \tag{13.26}$$

Par (13.24)-(13.26), on obtient le Théorème 13.2. ■

e) Preuves des Théorèmes 13.5 et 13.6.

Dans la suite, les convergences des formes sur M sont au sens de la convergence uniforme sur tout compact $K \subset M$. Pour simplifier les énoncés, on suppose désormais que M est compacte.

Pour $r \geq 0, x \in M$, soit $\mathrm{Sp} D_{r,x}$ le spectre de $D_{r,x}$, soit $\mathrm{Sp} D_{r,x}^{\neq 0}$ l'ensemble des valeurs propres non nulles de $D_{r,x}$. Désormais, on fixe $c_1 > c_2 > 0$ tels que pour $r \in \mathbf{N}$

$$\cup_{\substack{r \geq 0 \\ x \in M}} \mathrm{Sp} D_{r,x}^{\neq 0} \subset \{s \in \mathbf{R}, \sqrt{c_1} < |s| < \sqrt{c_2}\}. \tag{13.27}$$

Soit

$$\begin{aligned} U_1 &= \{\lambda \in \mathbf{C}, c_1/4 \leq |\lambda| \leq c_1, \text{ou} \quad c_2 \leq |\lambda| \leq 4c_2\}, \\ U_2 &= \{\lambda \in \mathbf{C}, \lambda^2 \in U_1\}. \end{aligned} \tag{13.28}$$

Proposition 13.8. *Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0, r \geq 1, \lambda \in U_2$, $(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}$ existe, et quand $T \to +\infty$*

$$(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1} = p_r(\lambda - D_r)^{-1}p_r + O(\frac{1}{T}). \tag{13.29}$$

PREUVE: Comme $p_{r'} (r' \geq 1)$ est C^∞ sur M, en procédant comme en [**BerB**, Théorème 6.2], on sait que les applications définies comme dans [**BerB**, Théorème 6.2] sont C^∞ sur M. En utilisant [**BerB**, (6.49)], on obtient la Proposition. ■

Par (13.29), pour $r \geq 1$, les valeurs propres de A_T qui sont $O(\frac{1}{T^{r-1}})$ correspondent 1-1 aux valeurs propres de D_r. Pour $T \gg 1$, on pose

$$p_{r,T} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = \sqrt{c_2}\}} (\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1} d\lambda, \quad p_{r,T}^{\perp} = 1 - p_{r,T}. \tag{13.30}$$

Alors en utilisant la Proposition 13.8, quand $T \to +\infty$, on a

$$p_{r,T} = p_r + O(\frac{1}{T}). \tag{13.31}$$

Pour $T \geq 1, u > 0$, on pose

$$B_{r,u,T} = \nabla^{\mathcal{E}} + uT^{r-1}A_T. \tag{13.32}$$

Théorème 13.9. *Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in U_2$, $T \geq T_0$, $r \geq 1$, $(\lambda^2 - B^2_{r,1,T})^{-1}$ existe, et*

$$(\lambda^2 - B^2_{r,1,T})^{-1} = p_r(\lambda^2 - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1}p_r + O(\frac{1}{T}). \tag{13.33}$$

PREUVE: Par la Proposition 5.14, on a

$$\mathrm{Sp}B^2_{r,u,T} = \mathrm{Sp}(T^{2(r-1)}A^2_T). \tag{13.34}$$

D'après la Proposition 13.8, (13.34), il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0, r \geq 1, \lambda \in U_2$, $(\lambda^2 - B^2_{r,1,T})^{-1}$ existe. On pose

$$\begin{aligned} E_T &= p_{r,T}B^2_{r,1,T}p_{r,T}, \quad F_T = p_{r,T}B^2_{r,1,T}p^{\perp}_{r,T}, \\ G_T &= p^{\perp}_{r,T}B^2_{r,1,T}p_{r,T}, \quad H_T = p^{\perp}_{r,T}B^2_{r,1,T}p^{\perp}_{r,T}. \end{aligned} \tag{13.35}$$

Alors en utilisant (13.29) et (13.30), quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} &T^{r-1}A_Tp_{r,T} = p_{r,T}T^{r-1}A_T = p_rD_rp_r + O(\tfrac{1}{T}), \\ &E_T = p_rD^2_rp_r + p_r[D_r, \nabla^{\mathcal{E}_r}]p_r + p_r\nabla^{\mathcal{E},2}p_r + O(\tfrac{1}{T}), \\ &F_T = p_{r,T}[\nabla^{\mathcal{E}}, T^{r-1}A_T]p^{\perp}_{r,T} + O(1), \\ &G_T = p^{\perp}_{r,T}[\nabla^{\mathcal{E}}, T^{r-1}A_T]p_{r,T} + O(1). \end{aligned} \tag{13.36}$$

Par (13.29) et (13.30), quand $T \to +\infty$, on a aussi

$$\begin{aligned} &p^{\perp}_{r,T}(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1} = (\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T} = O(\tfrac{1}{T}), \\ &T^{r-1}A_Tp^{\perp}_{r,T}(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1} \\ &\quad = (\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T}T^{r-1}A_T = -p^{\perp}_r + O(\tfrac{1}{T}). \end{aligned} \tag{13.37}$$

D'après (13.37), quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} &(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T}[\nabla^{\mathcal{E}}, T^{r-1}A_T]p^{\perp}_{r,T}(\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1} \\ &\quad = \left[(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T}T^{r-1}A_T\right]\nabla^{\mathcal{E}}p^{\perp}_{r,T}(\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1} \\ &\quad\quad + (\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T}\nabla^{\mathcal{E}}\left[T^{r-1}A_Tp^{\perp}_{r,T}(\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1}\right] \\ &\quad = O(\tfrac{1}{T}). \end{aligned} \tag{13.38}$$

Par (13.32) et (13.38), pour $T \geq T_0, \lambda \in U_2$, on a

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - H_T)^{-1} \;&=\; \Sigma^{2m}_{i=0}p^{\perp}_{r,T}(\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1}\Big\{(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1} \\ &\qquad p^{\perp}_{r,T}\Big(\nabla^{\mathcal{E},2} + [\nabla^{\mathcal{E}}, T^{r-1}A_T]\Big)p^{\perp}_{r,T} \\ &\qquad (\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1}\Big\}^i(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T} \\ &=\; p^{\perp}_{r,T}(\lambda^2 - T^{2(r-1)}A^2_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T} \\ &\qquad + p^{\perp}_{r,T}(\lambda + T^{r-1}A_T)^{-1}O(\tfrac{1}{T})(\lambda - T^{r-1}A_T)^{-1}p^{\perp}_{r,T}. \end{aligned} \tag{13.39}$$

En utilisant (13.36), (13.37) et (13.39), pour $T \geq T_0$, on a

$$
\begin{aligned}
&F_T(\lambda^2 - H_T)^{-1} = O(\tfrac{1}{T}), \\
&(\lambda^2 - H_T)^{-1} G_T = O(\tfrac{1}{T}).
\end{aligned}
\tag{13.40}
$$

Par (13.36), (13.37) et (13.39), on a

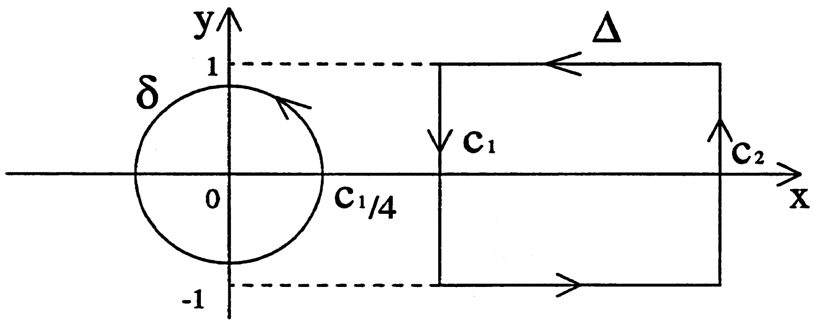
$$
F_T(\lambda^2 - H_T)^{-1} G_T = -p_r \nabla^{\mathcal{E}} p_r^{\perp} \nabla^{\mathcal{E}} p_r + O(\tfrac{1}{T}). \tag{13.41}
$$

D'après (13.10), (13.36) et (13.41), on a

$$
E_T + F_T(\lambda^2 - H_T)^{-1} G_T = p_r \mathcal{D}^2_{r,1} p_r + O(\frac{1}{T}). \tag{13.42}
$$

Par [**BerB**, (5.85)], (13.31), (13.40) et (13.42), on a (13.33). ■

Soit Δ le contour orienté ci-dessous, et soit δ le cercle dans $\mathbf{C}$ de centre 0 et de rayon $c_1/4$.



Les contours Δ et δ sont les bords des domaines Δ' et δ'. Alors d'après notre choix de c_1 et c_2 et (13.29), quand T est assez grand, on a

$$
\mathrm{Sp}(\mathcal{D}^2_{3,1,T}) = \mathrm{Sp}(A_T^2) \subset \frac{\delta'}{T^{2(n-1)}} \cup \cup_{i=0}^{n} \frac{\Delta'}{T^{2(i-1)}}. \tag{13.43}
$$

Dans la suite, on va exprimer les supertraces des termes contenant $\mathcal{D}^2_{3,1,T}$ comme une somme de supertraces indexées par les éléments du spectre de $\mathcal{D}^2_{3,1,T}$ qui sont inclus dans l'un des domaines du membre de droite de (13.43).

Soit N_M l'opérateur de nombre sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}M)$. Pour $1 \leq r \leq n, T \geq T_0$, on pose

$$
\begin{aligned}
F_{r,u,T} &= \frac{1}{2\pi i} u^{-N_M} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \int_{\Delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - B^2_{r,1,T})^{-1} d\lambda\Big], \\
F_{r,u,\infty} &= \frac{1}{2\pi i} u^{-N_M} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \int_{\Delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1} d\lambda\Big], \\
G_{r,u,T} &= \frac{1}{2\pi i} u^{-N_M} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \int_{\delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - B^2_{r,1,T})^{-1} d\lambda\Big], \\
G_{r,u,\infty} &= \frac{1}{2\pi i} u^{-N_M} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \int_{\delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1} d\lambda\Big].
\end{aligned}
\tag{13.44}
$$

Alors, on a

$$G_{r,u,\infty}(x) + F_{r,u,\infty} = \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \exp(-\mathcal{D}^2_{r,u})\Big]. \tag{13.45}$$

Proposition 13.10. ***i)*** *Il existe $C_1 > 0, C > 0, T_0 > 0$ tels que pour $u \geq 1, T \geq T_0, 1 \leq r \leq n$,*

$$|F_{r,u,T} - F_{r,u,\infty}| \leq \frac{C}{T} e^{-C_1 u}. \tag{13.46}$$

ii) *Il existe des formes $a_{r,i,T}, b_{r,i,T}$ $(T \in [T_0, +\infty], 1 \leq r \leq n, -2m \leq i \leq 0)$, C^∞ sur M, telles que quand $u \to 0$, uniformément en $T \geq T_0$, $1 \leq r \leq n$, on a*

$$\begin{aligned} F_{r,u,T} &= \Sigma^0_{i=-2m} a_{r,i,T} u^i + O(u), \\ G_{r,u,T} &= \Sigma^0_{i=-2m} b_{r,i,T} u^i + O(u). \end{aligned} \tag{13.47}$$

Et

$$\begin{aligned} G_{r,u,\infty} &= -\Sigma^{-1}_{i=-2m} a_{r,i,\infty} u^i + \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}}), \\ G_{n,u,T} &= \Sigma^0_{i=-2m} b_{n,i,T} u^i. \end{aligned} \tag{13.48}$$

iii) *Pour $1 \leq r \leq n$, on a*

$$\begin{aligned} a_{r,0,\infty} &= \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}}), \\ b_{n,0,T} &= \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N \exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\Big]. \end{aligned} \tag{13.49}$$

De plus, pour $1 \leq r \leq n$, quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} & a_{r,i,T} = a_{r,i,\infty} + O(\tfrac{1}{T}), \\ & b_{r,i,T} = -a_{r,i,\infty} + O(\tfrac{1}{T}) \quad \text{pour} \quad i < 0, \\ & b_{n,i,T} T^{-(n-1)i} + \Sigma^n_{r=2} a_{r,i,T} T^{-(r-1)i} = b_{1,i,T} \quad \text{pour} \quad i < 0. \end{aligned} \tag{13.50}$$

PREUVE: **i)** Pour $1 \leq r \leq n, T \in [T_0, +\infty]$, on pose

$$f_{r,u,T} = u^{N_M} F_{r,u,T}, \quad g_{r,u,T} = u^{N_M} G_{r,u,T}. \tag{13.51}$$

Alors $f_{r,u,T}$ et $g_{r,u,T}$ sont des fonctions holomorphes en $u \in \mathbf{C}$.

D'après le Théorème 13.9, il existe $c, C > 0$ tels que pour $u > 1$, $T \geq T_0$, on a

$$\begin{aligned} |f_{r,u,T} - f_{r,u,\infty}| & \leq C \textstyle\int_\Delta e^{-c_1^2 u^2} \Big|(\lambda - B^2_{r,1,T})^{-1} - (\lambda - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1}\Big| d\lambda \\ & \leq \frac{C}{T} e^{-cu^2}. \end{aligned} \tag{13.52}$$

Par (13.51), (13.52), on a (13.46).

ii) • On a

$$e^{-u^2\lambda} = \Sigma^\infty_{k=0} (-1)^k \frac{(u^2\lambda)^k}{k!}. \tag{13.53}$$

En utilisant le Théorème 13.9, (13.44) et (13.53), on a (13.47) et la première équation de (13.50). On a aussi

$$b_{r,i,T} = b_{r,i,\infty} + O(\frac{1}{T}). \tag{13.54}$$

• Comme à l'intérieur de δ', 0 est l'unique valeur propre possible de l'opérateur D_r^2, pour $u \in \mathbf{C}, |u| \geq 1$, on a

$$G_{r,u,\infty} = \frac{1}{2\pi i}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N\int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - \mathcal{D}_{r,u}^2)^{-1}d\lambda\Big]. \tag{13.55}$$

Par le même argument que dans [**B4**, (9.166)], il existe des formes $b_{r,i,\infty}$ $(-2m \leq i \leq 0)$, C^∞ sur M, telles que pour $u \in \mathbf{C}$, on a

$$G_{r,u,\infty} = \Sigma_{i=-2m}^{0} b_{r,i,\infty}u^i. \tag{13.56}$$

En utilisant [**BeGeV**, Théorème 9.2], (13.55) et (13.56), on a

$$\begin{aligned} b_{r,0,\infty} &= \lim_{u\to+\infty} G_{r,u,\infty} \\ &= \tfrac{1}{2\pi i}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[p_{r+1}Np_{r+1}\textstyle\int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - \nabla^{\mathcal{E}_{r+1,2}})^{-1}d\lambda\Big] = \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}}). \end{aligned} \tag{13.57}$$

Par (13.45), (13.47) et (13.56), on a

$$\Sigma_{i=-2m}^{0}(b_{r,i,\infty} + a_{r,i,\infty})u^i + O(u) = \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\mathcal{D}_{r,u}^2)\big]. \tag{13.58}$$

En comparant les coefficients de u^i de (13.58), on a

$$\begin{aligned} b_{r,0,\infty} + a_{r,0,\infty} &= \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}), \\ b_{r,i,\infty} &= -a_{r,i,\infty} \quad \text{pour} \quad i < 0. \end{aligned} \tag{13.59}$$

Par (13.56), (13.57) et (13.59), on a la première équation de (13.48) et celle de (13.49).

D'après (13.54) et (13.59), on a aussi la deuxième équation de (13.50).

• Comme à l'intérieur de δ', 0 est l'unique valeur propre possible de l'opérateur $T^{2(n-1)}A_T^2$, pour $u \in \mathbf{C}, |u| \geq 1$, on a

$$G_{n,u,T} = \frac{1}{2\pi i}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N\int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - B_{n,u,T}^2)^{-1}d\lambda\Big]. \tag{13.60}$$

Par le même argument que dans [**B4**, (9.166)], on a la deuxième équation de (13.48).

Pour T fixé, en utilisant [**BeGeV**, Théorème 9.2] et (13.60), on a la deuxième équation de (13.49).

iii) D'après (13.43), pour $T \gg 1$, on a

$$\begin{aligned} G_{1,u,T} = \Sigma_{r=2}^{n}&\frac{1}{2\pi i}u^{-N_M}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N\int_{\frac{\Delta}{T^{2(r-1)}}} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}_{3,1,T}^2)^{-1}d\lambda\Big] \\ &+\frac{1}{2\pi i}u^{-N_M}\varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N\int_{\frac{\delta}{T^{2(n-1)}}} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}_{3,1,T}^2)^{-1}d\lambda\Big] \\ = \Sigma_{r=2}^{n}&F_{r,T^{-r+1}u,T} + G_{n,T^{-n+1}u,T}. \end{aligned} \tag{13.61}$$

En comparant (13.47), (13.48) et (13.61), on a la troisième équation de (13.50).

On a bien démontré la Proposition 13.10. ■

PREUVE du Théorème 13.5: On rappelle que $\Gamma' = \delta \cup \Delta$ est le contour dans $\mathbf{C}$ défini à la Section 5(d). Alors

$$\exp(-\mathcal{D}_{3,1,T}^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda - \mathcal{D}_{3,1,T}^2}d\lambda \tag{13.62}$$

On vérifie comme dans la preuve du Théorème 13.9, qu'il existe $C>0, T_0>0$, tels que pour tout $\lambda \in \Gamma', |\lambda| < T^{1/2}, T \geq T_0$,

$$\left|(\lambda - \mathcal{D}^2_{3,1,T})^{-1} - p_1(\lambda - \mathcal{D}^2_{1,1})^{-1}p_1\right| \leq \frac{C}{T}. \tag{13.63}$$

En utilisant (5.55), (13.62), (13.63), et en procédant comme en [BL, §9(g)], on a le Théorème 13.5. ■

PREUVE du Théorème 13.6:

Par (13.33), on peut démontrer une inégalité analogue à (5.59) pour $\mathcal{D}^2_{3,u,T}$. Par (13.18) et (13.47), on a

$$\begin{aligned}\lim_{T\to+\infty}\int_1^{+\infty} 2\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{3,u,T})\big] - G_{1,u,T}\Big\}\frac{du}{u}\\ = \int_1^{+\infty} 2\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{1,u})\big] - G_{1,u,\infty}\Big\}\frac{du}{u}.\end{aligned} \tag{13.64}$$

En utilisant la Proposition 13.10 et (13.61), pour $T \geq T_0$, on a

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} 2\Big\{G_{1,u,T} - \varphi\mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\big]\Big\}\frac{du}{u} = \Sigma_{r=2}^n 2\int_{T^{-(r-1)}}^{+\infty} F_{r,u,T}\frac{du}{u}\\ +2\int_{T^{-n+1}}^{+\infty}\Big\{G_{n,u,T} - \varphi\mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\nabla_T^{H(\mathcal{E}),2})\big]\Big\}\frac{du}{u}.\end{aligned} \tag{13.65}$$

On décompose chaque intégrale $\int_{T^{-(r-1)}}^{+\infty}$ sous la forme $\int_{T^{-(r-1)}}^{1} + \int_1^{+\infty}$. En sommant les termes $\int_1^{+\infty}$, on obtient un terme $Q_{1,T}$, et en sommant les termes $\int_{T^{-(r-1)}}^{1}$, on obtient un terme $Q_{2,T}$. Alors par la Proposition 13.10 et le théorème de convergence dominée, quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned}Q_{1,T} \to Q_{1,\infty} = \ & \Sigma_{r=2}^n 2\int_1^{+\infty} F_{r,u,\infty}\frac{du}{u}\\ &+2\int_1^{+\infty}\Big(G_{n,u,\infty} - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{n+1}, h^{\mathcal{E}_{n+1}})\Big)\frac{du}{u}.\end{aligned} \tag{13.66}$$

En utilisant la Proposition 13.10, et le théorème de convergence dominée, quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned}&Q_{2,T} - 2\Sigma_{r=2}^{n+1}(r-1)\big[\mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r}) - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}})\big]\log T\\ &= 2\Sigma_{r=2}^n\int_{T^{-(r-1)}}^1 (F_{r,u,T} - \Sigma_{i=-2m}^0 a_{r,i,T}u^i)\frac{du}{u} + O(\frac{1}{T}\log T)\\ &+2\Sigma_{i=-2m}^{-1}\frac{1}{i}\Big[(b_{n,i,T} + \Sigma_{r=2}^n a_{r,i,T}) - (b_{n,i,T}T^{-(n-1)i} + \Sigma_{r=2}^n a_{r,i,T}T^{-(r-1)i})\Big]\\ &\to Q_{2,\infty} = 2\Sigma_{r=2}^n\int_0^1\Big(F_{r,u,\infty} - \Sigma_{i=-2m}^0 a_{r,i,\infty}u^i\Big)\frac{du}{u}\\ &+2\Sigma_{r=1}^{n-1}\Sigma_{i=-2m}^{-1}\frac{1}{i}a_{r,i,\infty}.\end{aligned} \tag{13.67}$$

Par la Proposition 13.10, on a

$$\begin{aligned}Q_{2,\infty} = 2\Sigma_{r=2}^n\int_0^1\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N\exp(-\mathcal{D}^2_{r,u})\big] - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_r, h^{\mathcal{E}_r})\Big\}\frac{du}{u}\\ +2\Sigma_{r=1}^{n-1}\int_1^{+\infty}\Big\{G_{r,u,\infty} - \mathrm{ch}'(\mathcal{E}_{r+1}, h^{\mathcal{E}_{r+1}})\Big\}\frac{du}{u}.\end{aligned} \tag{13.68}$$

D'après (13.45), (13.64)-(13.68), on a le Théorème 13.6. ■

f) Preuve du Théorème 13.7.

Soit $F = F^0 \supset F^1 \supset \cdots \supset F^n = 0$ une filtration de fibrés vectoriels holomorphes de F sur M. Pour $i \geq 0$, on pose $\mathrm{Gr}^i F = F^i/F^{i+1}$. Soit h^F (resp $h^{\mathrm{Gr}F}$) une métrique hermitienne sur F^i (resp. $\mathrm{Gr}F$). Soit h^{F^i} la métrique sur F^i induite par h^F.

Soit G^i l'espace orthogonal à F^{i+1} dans F^i. Alors G^i est C^∞ -isomorphe à $\mathrm{Gr}^i F$ sur M. Soit h^{G^i} la métrique sur G^i induite par $h^{\mathrm{Gr}^i F}$. Soit P^{G^i} la projection orthogonale de F sur G^i. On note N_H l'opérateur de nombre sur $G^\bullet$ et $\mathrm{Gr}F$. Soit $h'^F = \oplus h^{G^i}$ la métrique sur $F = \oplus G^i$.

Soit $h^F_T (T \geq 1)$ une famille de métriques sur F telle que $h^F_1 = h^F$ et quand $T \to +\infty$, pour $s_1 \in F^i, s_2 \in F^j$, on a

$$
\begin{aligned}
&\langle s_1, s_2\rangle_{h^F_T} = T^{2n-i-j}\Big(\big\langle P^{G^i}s_1, P^{G^j}s_2\big\rangle_{h'^F} + O(\tfrac{1}{T})\Big).\\
&(h^F_T)^{-1}\tfrac{\partial}{\partial T}h^F_T = 2\tfrac{n-N_H}{T} + O(\tfrac{1}{T^2}).
\end{aligned}
\tag{13.69}
$$

Soient $\nabla^{F^i}_T$, ∇^F_T, $\nabla^{\mathrm{Gr}F}$ les connexions holomorphes hermitiennes sur $(F^i, h^{F^i}_T)$, (F, h^F_T), $(\mathrm{Gr}F, h^{\mathrm{Gr}F})$.

Proposition 13.11. *Quand $T \to +\infty$, on a*

$$
\varphi \mathrm{Tr}\Big[(h^F_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h^F_T \exp(-\nabla^{F,2}_T)\Big] = 2\varphi\mathrm{Tr}\Big[\frac{n-N_H}{T}\exp(-\nabla^{\mathrm{Gr}F,2})\Big] + O(\frac{1}{T}).
\tag{13.70}
$$

Soit

$$
\begin{aligned}
I(F, \mathrm{Gr}F, h^F_T, h^{\mathrm{Gr}F}) = -\int_1^{+\infty}\Big\{&\varphi\mathrm{Tr}\Big[(h^F_T)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h^F_T\exp(-\nabla^{F,2}_T)\Big]\\
&-2\varphi\mathrm{Tr}\Big[\frac{n-N_H}{T}\exp(-\nabla^{\mathrm{Gr}F,2})\Big]\Big\}dT.
\end{aligned}
\tag{13.71}
$$

Alors on a

$$
I(F, \mathrm{Gr}F, h^F_T, h^{\mathrm{Gr}F}) = \widetilde{\mathrm{ch}}(F, \mathrm{Gr}F, h^F, h^{\mathrm{Gr}F}) \quad \text{dans} \quad P^M/P^{M,0}.
\tag{13.72}
$$

PREUVE: i) Soit τ l'isomorphe canonique de G^i à $\mathrm{Gr}^i F$. Soit $\nabla^{G^i} = \tau^*\nabla^{\mathrm{Gr}^i F}$. Soit $A_i \in T^{*(0,1)}M \otimes \mathrm{Hom}(F^i, F^{i+1})$ tel que

$$
\nabla^{F^i\prime\prime} = \nabla^{G^i\prime\prime} + \nabla^{F^{i+1}\prime\prime} + A_i.
\tag{13.73}
$$

On pose

$$
\nabla^F_\infty = \oplus_{i=0}^n(\nabla^{G^i} + A_i).
\tag{13.74}
$$

Alors on vérifie facilement que quand $T \to +\infty$, on a

$$
\nabla^{F^i}_T = \nabla^{G^i} \oplus \nabla^{F^{i+1}}_T + A_i + O(\frac{1}{T}).
\tag{13.75}
$$

et donc

$$\nabla_T^F = \nabla_\infty^F + O(\frac{1}{T}). \tag{13.76}$$

Si l'on écrit $\nabla_\infty^{F,2}$ sous forme matricielle relativement au scindage $F = \oplus G^i$, alors on obtient une matrice triangulaire. Donc

$$\varphi \operatorname{Tr}[\exp(-\nabla_\infty^{F,2})] = \operatorname{ch}(\operatorname{Gr}F, h^{\operatorname{Gr}F}). \tag{13.77}$$

En utilisant (13.69) et (13.76), on a

$$\begin{aligned}\varphi\operatorname{Tr}\Big[(h_T^F)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h_T^F \exp(-\nabla_T^{F,2})\Big] &= 2\varphi\operatorname{Tr}\Big[\frac{n-N_H}{T}\exp(-\nabla_\infty^{F,2})\Big] + O(\frac{1}{T})\\ &= 2\varphi\operatorname{Tr}\Big[\frac{n-N_H}{T}\exp(-\nabla^{\operatorname{Gr}F,2})\Big] + O(\frac{1}{T}).\end{aligned} \tag{13.78}$$

D'après [**BGS1**, Théorème 1.24], (13.70), (13.77) et (13.78), on a

$$\begin{aligned}\frac{\bar\partial\partial}{2i\pi}I(F,\operatorname{Gr}F,h_T^F,h^{\operatorname{Gr}F}) &= -\int_1^{+\infty}\frac{\bar\partial\partial}{2i\pi}\varphi\operatorname{Tr}\Big[(h_T^F)^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h_T^F\exp(-\nabla_T^{F,2})\Big]dT\\ &= \int_1^{+\infty}\frac{\partial}{\partial T}\varphi\operatorname{Tr}[\exp(-\nabla_T^{F,2})]dT\\ &= -\operatorname{ch}(F,h^F) + \operatorname{ch}(\operatorname{Gr}F,h^{\operatorname{Gr}F}).\end{aligned} \tag{13.79}$$

ii) Soit $\mathbf{P}^1$ le plan projectif complexe. Soit z le paramètre complexe standard sur $\mathbf{P}^1$, et $i_z : M \to M\times\mathbf{P}^1$ l'application de $x\in M$ à $(x,z)\in M\times\mathbf{P}^1$. Alors comme dans [**BGS1**, Théorème 1.29] ou dans la Section 11(d), on peut construire des fibrés vectoriels holomorphes $\widetilde{F}^j$ et $\widetilde{\operatorname{Gr}^jF}$ sur $M\times\mathbf{P}^1$ tels qu'on a les suites exactes

$$0\to\widetilde{F}^{j+1}\to\widetilde{F}^j\to\widetilde{\operatorname{Gr}^jF}\to 0. \tag{13.80}$$

De plus, si on note $\widetilde{F}=\widetilde{F}^0$, alors $i_0^*\widetilde{F}=F$, $i_\infty^*\widetilde{F}=\operatorname{Gr}F$.

Par partition de l'unité, on peut trouver une famille de métriques $h_T^{\widetilde{F}}$ (resp.$h^{\widetilde{\operatorname{Gr}F}}$) sur $\widetilde{F}$ (resp. $\widetilde{\operatorname{Gr}F}$) telle qu'elle vérifie (13.69), et que sous l'identification ci-dessus,

$$h_T^{i_0^*\widetilde{F}} = h_T^F,\quad h_T^{i_\infty^*\widetilde{F}} = \oplus T^{2n-2i}h^{\operatorname{Gr}^iF},\quad h^{i_0^*\widetilde{\operatorname{Gr}F}} = h^{i_\infty^*\widetilde{\operatorname{Gr}F}} = h^{\operatorname{Gr}F}. \tag{13.81}$$

Alors d'après i), le terme $I(\widetilde{F},\widetilde{\operatorname{Gr}F},h_T^{\widetilde{F}},h^{\widetilde{\operatorname{Gr}F}})$ est bien défini. Par la preuve de [**BGS1**, Théorème 1.29], on a

$$\widetilde{\operatorname{ch}}(F,\operatorname{Gr}F,h^F,h^{\operatorname{Gr}F}) = -\int_{\mathbf{P}^1}\operatorname{ch}(\widetilde{F},h_1^{\widetilde{F}})\log|z|^2. \tag{13.82}$$

Comme les identifications $i_0^*\widetilde{\operatorname{Gr}F}\simeq i_\infty^*\widetilde{\operatorname{Gr}F}\simeq\operatorname{Gr}F$ sont des isométries, on a

$$\int_{\mathbf{P}^1}\operatorname{ch}(\widetilde{\operatorname{Gr}F},h^{\widetilde{\operatorname{Gr}F}})\log|z|^2 = -\widetilde{\operatorname{ch}}(\operatorname{Gr}F,h^{\operatorname{Gr}F},h^{\operatorname{Gr}F}) = 0\quad\text{dans } P^M/P^{M,0}. \tag{13.83}$$

D'après (13.79), (13.82) et (13.83), on a

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(F, \mathrm{Gr}F, h^F, h^{\mathrm{Gr}F}) = \int_{\mathbf{P}^1} \frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} I(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{\widetilde{F}}, h^{\widetilde{\mathrm{Gr}F}}) \log|z|^2$$
$$= \int_{\mathbf{P}^1} I(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{\widetilde{F}}, h^{\widetilde{\mathrm{Gr}F}}) \frac{\overline{\partial}\partial}{2i\pi} \log|z|^2 \quad \text{dans } P^M/P^{M,0}. \tag{13.84}$$

Par (11.17), (13.81) et (13.84), on a

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(F, \mathrm{Gr}F, h^F, h^{\mathrm{Gr}F}) = i_0^* I(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{\widetilde{F}}, h^{\widetilde{\mathrm{Gr}F}}) - i_\infty^* I(\widetilde{F}, \widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{\widetilde{F}}, h^{\widetilde{\mathrm{Gr}F}})$$
$$= I(F, \mathrm{Gr}F, h_T^F, h^{\mathrm{Gr}F}) - I(i_\infty^*\widetilde{F}, i_\infty^*\widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{i_\infty^*\widetilde{F}}, h^{i_\infty^*\widetilde{\mathrm{Gr}F}}) \quad \text{dans } P^M/P^{M,0}. \tag{13.85}$$

En utilisant (13.71) et (13.81), on sait que

$$I(i_\infty^*\widetilde{F}, i_\infty^*\widetilde{\mathrm{Gr}F}, h_T^{i_\infty^*\widetilde{F}}, h^{i_\infty^*\widetilde{\mathrm{Gr}F}}) = 0 \quad \text{dans} \quad P^M/P^{M,0}. \tag{13.86}$$

Par (13.85) et (13.86), on a (13.72). ■

PREUVE du Théorème 13.7: On rappelle que P_T est la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\mathrm{Ker}D_T'$ associée à $h_T^{\mathcal{E}}$ (13.15). Soit $\widetilde{P}_T$ est la projection orthogonale de $\mathcal{E}$ sur $\widetilde{\mathcal{E}}_T = \mathrm{Ker}A_T$ associée à $h^{\mathcal{E}}$. Comme en [**BerB**, (6.61)], on a

$$P_T = T^{-N_V}\widetilde{P}_T T^{N_V}. \tag{13.87}$$

Pour $\alpha, \beta \in H(\mathcal{E})$, on a

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{h_T^{H(\mathcal{E})}} = \langle P_T\alpha, P_T\beta \rangle_{h_T^{\mathcal{E}}} = \left\langle \widetilde{P}_T T^{N_V}\alpha, \widetilde{P}_T T^{N_V}\beta \right\rangle_{h^{\mathcal{E}}}. \tag{13.88}$$

D'après (13.30), on a aussi

$$\widetilde{P}_T = p_{n+1,T}. \tag{13.89}$$

Soit $'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ l'espace orthogonal à $F^{p+1}H^{p+q}(\mathcal{E})$ dans $(F^pH^{p+q}(\mathcal{E}), h_1^{\mathcal{E}})$, alors $'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ et $\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ sont C^∞ isomorphes canoniquement sur M. Soit $h^{'\mathcal{E}_\infty^{p,q}}$ la métrique sur $'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ induite par $h^{\mathcal{E}_\infty^{p,q}}$, soit $h'^{H(\mathcal{E})} = \oplus h^{'\mathcal{E}_\infty^{p,q}}$ la métrique sur $H(\mathcal{E}) = \oplus{}'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$. Soit $P_{p,q,\infty}$ la projection de $H(\mathcal{E}) = \oplus{}'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ sur $'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$. Soit N_V l'opérateur de nombre sur $H(\mathcal{E})$. Alors N_V agit sur $'\mathcal{E}_\infty^{p,q}$ par multiplication par q.

D'après (13.88) et (13.89), pour $\alpha \in F^{p_1}H^q(\mathcal{E}), \beta \in F^{p_2}H^q(\mathcal{E})$, quand $T \to +\infty$,

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{h_T^{H(\mathcal{E})}} = T^{2q-p_1-p_2}[\langle P_{p_1,q-p_1,\infty}\alpha, P_{p_2,q-p_2,\infty}\beta \rangle_{h'^{H(\mathcal{E})}} + O(\frac{1}{T})]. \tag{13.90}$$

Comme dans [**B4**, (6.45)-(6.48)], on sait que

$$(h_T^{H(\mathcal{E})})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h_T^{H(\mathcal{E})} = \frac{2}{T}P_T N_V P_T = \frac{2}{T}T^{-N_V}\widetilde{P}_T N_V \widetilde{P}_T T^{N_V}. \tag{13.91}$$

Par (13.89) et (13.91), quand $T \to +\infty$, on a

$$(h_T^{H(\mathcal{E})})^{-1}\frac{\partial}{\partial T}h_T^{H(\mathcal{E})} = \frac{2}{T}N_V + O(\frac{1}{T^2}). \tag{13.92}$$

En utilisant la Proposition 13.11, (13.90) et (13.92), on a le Théorème 13.7. ■

14 Preuve du Théorème 0.1 dans le cas où les E_r sont des fibrés vectoriels sur S

Dans cette Section, on établit le Théorème 0.1 dans le cas où le rang des fibres E_r est localement constant sur S. Ce résultat est compatible au Théorème 3.11 quand π_1 et V sont projectives. Notre résultat est naturellement plus général que celui que nous avons obtenu à la Section 4, où nous supposons que les H^i sont nuls pour $i > 0$.

On définit en particulier la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$. On montre que quand π_1 et V sont projectives, cette nouvelle définition coïncide avec la Définition de $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ donnée en (10.31). On utilise pour cela, de manière essentielle, les résultats de la Section 10 relatifs aux bicomplexes en dimension finie.

Pour démontrer le Théorème 0.1, on procède comme à la Section 4. Par rapport à la Section 4, on a une difficulté supplémentaire, puisque la suite spectrale ne dégénère en général pas en E_2. Pour résoudre cette difficulté, on procède comme à la Section 13, où nous avons considéré un problème comparable en dimension finie, en décomposant les supertraces du noyau de chaleur d'une superconnexion qui dépend de deux paramètres u et T, suivant le comportement asymptotique des valeurs propres de A_T^2 quand $T \to +\infty$. Pour calculer l'asymptotique de ces supertraces quand $T \to +\infty$ ou $u \to 0$, les résultats de [**BerB**, §6] ne sont pas suffisants, et on procède comme à la Section 5.

Cette Section est organisée de la façon suivante. Dans (a), on montre que le complexe de Dolbeault muni d'une filtration convenable calcule la suite spectrale de Leray au sens de Grothendieck [**Grot**]. Dans (b), on définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ dans le cas où le rang des fibres E_r est localement constant sur S, et on reénonce le Théorème 0.1. Dans (c), on énonce des résultats intermédiaires qui sont utilisés dans la preuve du Théorème 0.1. Dans (d), on montre le Théorème 0.1. Dans (e), on étudie l'asymptotique de certaines supertraces quand $T \to +\infty$ ou $u \to 0$. Dans (f) et (g), on démontre les résultats intermédiaires.

Dans cette Section, on fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 3(a), et on utilise les mêmes notations qu'aux Sections 3, 4, 5, 10(a) et 10(b).

a) Complexe de Dolbeault.

Soient Z et Y des variétés complexes. Soit $\pi : Z \to Y$ une submersion holomorphe de fibre compacte X. Soit ξ un fibré vectoriel holomorphe sur Z.

Soit (E_r, d_r) $(r \geq 2)$ la suite spectrale de Leray correspondant à (π, ξ), définie comme à la Section 10(b).

Soit

$$\begin{aligned} \Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}Z) = F^0(\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}Z)) \supset F^1(\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}Z)) \supset \cdots \\ \supset F^{\dim Y+1}(\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}Z)) = \{0\}. \end{aligned} \tag{14.1}$$

la filtration standard de $\Lambda^\bullet(T^{*(0,1)}Z)$: si $0 \leq p \leq q \leq \dim Z$, alors $\alpha \in F^p\Lambda^q(T^{*(0,1)}Z)$ si et seulement si

$$X_1, \cdots, X_{q-p+1} \in \overline{TX}, \quad \text{alors} \quad i_{X_1} \cdots i_{X_{q-p+1}} \alpha = 0..$$

Cette filtration induit une filtration sur le complexe de Dolbeault $(\Omega(Z,\xi),\overline{\partial}^Z)$. Soit (E'_r, d'_r) la suite spectrale correspondante.

Par [**BerB**, (1.11)] et (10.25), on a un isomorphisme naturel

$$E'_2 \simeq H(Y, R^\bullet\pi_*\xi) = E_2. \tag{14.2}$$

Théorème 14.1. *La suite spectrale (E'_r, d'_r) $(r \geq 2)$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale (E_r, d_r) par un isomorphisme compatible à (14.2).*

PREUVE: Le reste de cette sous-section est consacré à la preuve du Théorème 14.1.■

Soit $\mathcal{O}_Z^\infty$, $\mathcal{O}_Y^\infty$ les faisceaux des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur Z, Y, et soit $\mathcal{D}_Z^\bullet$, $\mathcal{D}_Y^\bullet$ les $\mathcal{O}_Z^\infty$, $\mathcal{O}_Y^\infty$ faisceaux associés aux complexes de Dolbeault sur Z, Y. Pour $p \geq 0$, $\mathcal{D}_Z^p$ est le faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^p(T^{*(0,1)}Z)$, la différentielle $\overline{\partial}^Z$ est $\mathcal{O}_Z$-linéaire. Par [**Go**, II 3.7], si G est un $\mathcal{O}_Z$-faisceau, le complexe

$$\mathcal{D}_Z^\bullet(G) = G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z^\bullet. \tag{14.3}$$

est une résolution de G, car pour $p \geq 0$, $\mathcal{D}_Z^p$ est un $\mathcal{O}_Z$ -faisceau plat [M]. De plus $\mathcal{D}_Z^p(G)$ est fin [**Go**, Théorème 3.7.3]. D'où

$$R^p\pi_*G = H^p(\pi_*\mathcal{D}_Z^\bullet(G)). \tag{14.4}$$

Soit $\mathcal{D}_X^\bullet$ le complexe de Dolbeault relatif dont $\mathcal{D}_X^p$ est le faisceau des sections $\mathcal{C}^\infty$ de $\Lambda^p(T^{*(0,1)}X)$ sur Z, et dont la différentielle $\overline{\partial}^X$ est l'opérateur $\overline{\partial}$ le long des fibres. On remarque que $\overline{\partial}^X$ est $\mathcal{O}_Z$ et $\mathcal{O}_Y^\infty$-linéaire.

Dans la suite, on note F le $\mathcal{O}_Z$-faisceau $\mathcal{O}_Z(\xi)$, et $(\mathcal{F}_0, d)$ le complexe $(\mathcal{D}_Z^\bullet(F), \overline{\partial}^Z)$.

Soit $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{F}_1^{p,q})$ le bicomplexe de faisceaux sur Y défini par

$$\mathcal{F}_1^{p,q} = \pi_*\mathcal{D}_Z^p(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y^q. \tag{14.5}$$

dont les différentielles sont $1\otimes\overline{\partial}^Y : \mathcal{F}_1^{p,q} \to \mathcal{F}_1^{p,q+1}$ et $\overline{\partial}^Z\otimes 1 : \mathcal{F}_1^{p,q} \to \mathcal{F}_1^{p+1,q}$. Par le même argument que précédemment, on sait que le bicomplexe $\mathcal{F}_1$ est une résolution acyclique du complexe de $\mathcal{O}_Y$-faisceaux $\pi_*\mathcal{D}_Z^\bullet(F)$.

On filtre le complexe $E(\mathcal{F}_1) = (\Gamma_Y(\mathcal{F}_1), \overline{\partial}^Z\otimes 1 + 1\otimes\overline{\partial}^Y)$ par $F^p(\Gamma_Y(\mathcal{F}_1)) = \oplus_{p'\geq p}\Gamma_Y(\mathcal{F}_1^{\bullet,p'})$. Alors d'après la Remarque 10.12, la suite spectrale $(E_r(\mathcal{F}_1), d_r)$ associée à $\Gamma_Y(\mathcal{F}_1)$ calcule la suite spectrale de Leray (à partir de $r = 2$).

Soit $\mathcal{F}_2 = (\mathcal{F}_2^{p,q})$ le bicomplexe de faisceaux sur Z défini par

$$\mathcal{F}_2^{p,q} = \mathcal{D}_Z^p(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}_Z^q. \tag{14.6}$$

dont les différentielles sont $1 \otimes \overline{\partial}^Z : \mathcal{F}_2^{p,q} \to \mathcal{F}_2^{p,q+1}$ et $\overline{\partial}^Z \otimes 1 : \mathcal{F}_2^{p,q} \to \mathcal{F}_2^{p+1,q}$. On note $(\mathcal{F}_2, d)$ le complexe total correspondant.

La filtration (14.1) induit une filtration du complexe de $\mathcal{O}_Z$-faisceaux $(\mathcal{D}_Z^\bullet, \overline{\partial}^Z)$. On a donc une filtration du complexe $(\mathcal{F}_2, d)$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_2, d) = (F^0\mathcal{F}_2, d) \supset (F^1\mathcal{F}_2, d) = (\mathcal{D}_Z^\bullet(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^1\mathcal{D}_Z^\bullet) \supset \cdots \\ \supset (F^{\dim Y+1}\mathcal{F}_2, d) = \{0\}.\end{aligned} \tag{14.7}$$

De même on a une filtration sur le complexe $(\mathcal{D}^\bullet_Z(F), \overline{\partial}^Z) = (\mathcal{F}_0, d)$.

Soit j_0 l'inclusion du complexe $(\mathcal{F}_0, d)$ dans le complexe $(\mathcal{F}_2, d)$ induite par l'inclusion $j_0 : F \hookrightarrow \mathcal{D}^\bullet_Z(F)$ qu'on tensorise par $\mathcal{D}^\bullet_Z$. Alors j_0 induit une injection du complexe filtré $E(\mathcal{F}_0) = (\Gamma_Z(\mathcal{F}_0), d)$ dans le complexe filtré $E(\mathcal{F}_2) = (\Gamma_Z(\mathcal{F}_2), d)$

Pour $p, q \geq 0$, on a aussi l'application canonique

$$\begin{aligned}\pi_*\mathcal{D}^p_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}^q_Y \to \pi_*\mathcal{D}^p_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\pi^*\mathcal{D}^q_Y &\to \pi_*(\mathcal{D}^p_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*\mathcal{D}^q_Y) \\ &\to \pi_*(\mathcal{D}^p_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^q_Z).\end{aligned} \tag{14.8}$$

Elle induit une application de complexes filtrés $j_1 : E(\mathcal{F}_1) \to E(\mathcal{F}_2)$.

Si on note $(E_r(\mathcal{F}_i), d_r)$ $(i = 0, 2)$ la suite spectrale correspondante à $(E(\mathcal{F}_i), d)$ filtré comme ci-dessus, alors pour $r \geq 0$, j_i $(i = 0, 1)$ induit une application de complexes $j_i : E_r(\mathcal{F}_i) \to E_r(\mathcal{F}_2)$. On a aussi

$$(E_r(\mathcal{F}_0), d_r) = (E'_r, d'_r). \tag{14.9}$$

Dans la suite, on va montrer que pour $r = 1$, les j_i $(i = 0, 1)$ sont des isomorphismes de complexes.

On calcule tout d'abord le terme $E_0(\mathcal{F}_i)$ $(i = 0, 1, 2)$.

On note $\mathcal{E}(\mathcal{F}_0), \mathcal{E}(\mathcal{F}_1), \mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$ le complexe $(\pi_*(\mathcal{D}^\bullet_X(F)), \overline{\partial}^X)$, $(\pi_*(\mathcal{D}^\bullet_Z(F)) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}^\infty_Y, \overline{\partial}^Z \otimes 1)$, $(\pi_*(\mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^\bullet_X), \overline{\partial}^Z \otimes 1 + 1 \otimes \overline{\partial}^X)$. Soit $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i))$ les cohomologies associées.

Pour $p, q \geq 0$, on a la suite exacte suivante

$$0 \to F^{p+1}\mathcal{D}^{p+q}_Z \to F^p\mathcal{D}^{p+q}_Z \to \mathcal{D}^q_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}^\infty_Y} \pi^{-1}\mathcal{D}^p_Y \to 0. \tag{14.10}$$

Comme $\mathcal{O}^\infty_Z$ est un $\mathcal{O}_Z$-faisceau plat, et comme $\mathcal{D}^\bullet_Z(F)$ est un $\mathcal{O}^\infty_Z$-faisceau localement libre de type fini, d'après (14.10), on a aussi les suites exactes :

$$\begin{gathered}0 \to F \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^{p+1}\mathcal{D}^{p+q}_Z \to F \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^p\mathcal{D}^{p+q}_Z \to F \otimes_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{D}^q_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}^\infty_Y} \pi^{-1}\mathcal{D}^p_Y) \to 0. \\ 0 \to \mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^{p+1}\mathcal{D}^{p+q}_Z \to \mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^p\mathcal{D}^{p+q}_Z \\ \to \mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} (\mathcal{D}^q_X \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}^\infty_Y} \pi^{-1}\mathcal{D}^p_Y) \to 0,\end{gathered} \tag{14.11}$$

Comme $\mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^p\mathcal{D}^{p+q}_Z$, $F \otimes_{\mathcal{O}_Z} F^p\mathcal{D}^{p+q}_Z$, $\mathcal{D}^q_X$ sont des faisceaux fins, et comme $\mathcal{D}^p_Y$ est un $\mathcal{O}^\infty_Y$-faisceau localement libre, par (14.11), on sait que

$$E^{p,q}_0(\mathcal{F}_i) = \Gamma_Y(\mathcal{E}^q(\mathcal{F}_i) \otimes_{\mathcal{O}^\infty_Y} \mathcal{D}^p_Y). \tag{14.12}$$

Comme $\mathcal{D}^p_Y$ est un $\mathcal{O}^\infty_Y$-faisceau localement libre et fin, d'après (14.12), on a

$$E^{p,q}_1(\mathcal{F}_i) = \Gamma_Y(H^q(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i)) \otimes_{\mathcal{O}^\infty_Y} \mathcal{D}^p_Y). \tag{14.13}$$

Dans (14.8), pour $q = 0$, on obtient une application de complexes $j_1 : \mathcal{E}(\mathcal{F}_1) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$. Soit j_0 l'inclusion du complexe $\mathcal{E}(\mathcal{F}_0)$ dans le complexe $\mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$, induite par l'inclusion $j_0 : F \hookrightarrow \mathcal{D}^\bullet_Z(\mathcal{F})$ qu'on tensorise par $\mathcal{D}^\bullet_X$. Par (14.12) et (14.13), l'application $j_i : E_0(\mathcal{F}_i) \to E_0(\mathcal{F}_2)$ est induite par $j_i : \mathcal{E}(\mathcal{F}_i) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$, et l'application $j_i : E_1(\mathcal{F}_i) \to E_1(\mathcal{F}_2)$ est induite par $j_i : H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i)) \to H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_2))$.

Lemme 14.2. Soit G un $\mathcal{O}_Z$-faisceau plat et fin sur Z, et soit R un $\mathcal{O}_Y$-faisceau. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R \simeq \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R). \tag{14.14}$$

PREUVE: En effet, on a les morphismes canoniques

$$\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R \to \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} \pi_*\pi^*R \to \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R).$$

On note $\tau : \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R \to \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R)$ le morphisme composé. Pour montrer le Lemme, il suffit de montrer que pour tout $x \in Y$,

$$\tau_x : (\pi_*G)_x \otimes_{\mathcal{O}_{Y,x}} R_x = (\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R)_x \to \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R)_x.$$

est un isomorphisme.

i) On suppose que R est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau cohérent.

Soit $x \in Y$, alors il existe $x \in U$ un ouvert de Y et L^i des $\mathcal{O}_Y$-faisceaux libres de rang fini sur U, tels que $(L^i)_{0\leq i\leq n}$ est une résolution projective de R sur U. Comme π est plat, on sait que $(\pi^*(L^i))$ est aussi une résolution projective de π^*R sur $\pi^{-1}(U)$. Donc on a le diagramme commutatif suivant:

(14.15)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*L^n) \to & \cdots \to & \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*L^0) \to & \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R) & \to 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ 0 \to & \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} L^n \to & \cdots \to & \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} L^0 \to & \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} R & \to 0. \end{array}$$

En utilisant que G est un $\mathcal{O}_Z$-faisceau plat et fin, on voit que la première ligne de (14.15) est exacte. D'après [**H**, Exercice 2.2.1], on a aussi

$$\pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*L^i) \simeq \pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Y} L^i. \tag{14.16}$$

On sait aussi que le foncteur $\otimes$ est exact à droite, d'où la deuxième ligne de (14.15) est exacte. Par un argument de suite spectrale, on a (14.14).

ii) Injectivité. Soit $f \in \mathrm{Ker}\tau_x$ $(x \in Y)$, alors, il existe $g_i \in (\pi_*G)_x, r_i \in R_x (i = 1, \cdots, k)$ tels que $f = \Sigma_{i=1}^k g_i \otimes r_i$. On note R' le sous faisceau de R engendré par r_i dans un voisinage U de x. Alors R' est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau cohérent. Comme G est plat, l'application $G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R' \to G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R$ est injective. Donc l'application $\pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R') \to \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R)$ est aussi injective. Comme $f \in (\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Z} R')_x$, par i), on sait que $f = 0$.

iii) Surjectivité. Si $f \in \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R)_x$ $(x \in Y)$, alors il existe un voisinage U de x, tel que f est une section de $G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R$ sur $\pi^{-1}(U)$. Donc pour tout $y \in \pi^{-1}(x)$, il existe $g_{y,i} \in G_y, r_{y,i} \in R_x$ $(i = 1, \cdots, k_y)$ tels que $f = \Sigma_i g_{y,i} \otimes r_{y,i}$ sur un voisinage de y. Comme π est propre, on peut choisir $y_1, \cdots, y_l \in \pi^{-1}(x)$ pour représenter f. Soient $r_i \in R_x$ $(i = 1, \cdots, k)$ les éléments correspondant à $\{y_j\}_j$. Soit R' le sous faisceau de R engendré par r_i dans un voisinage U' de x, alors R' est un $\mathcal{O}_Y$-faisceau cohérent. Comme $f \in \pi_*(G \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*R')_x$, d'après i),

$$f \in \tau_x(\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Z} R')_x \subset \tau_x(\pi_*G \otimes_{\mathcal{O}_Z} R)_x.$$

On a bien démontré le Lemme 14.2. ■

Les $(\mathcal{D}^\bullet_X(F), \overline{\partial}^X)$, $(\mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*\mathcal{O}^\infty_Y, \overline{\partial}^Z \otimes 1)$, $(\mathcal{D}^\bullet_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^\bullet_X, \overline{\partial}^Z \otimes 1 + 1 \otimes \overline{\partial}^X)$ sont des résolutions acycliques du $\mathcal{O}_Z$-faisceau $F \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*\mathcal{O}^\infty_Y$, et donc pour $i \in \{0,1,2\}$, il existe un isomorphisme naturel [**H**, Proposition 3.1.2A],

$$R^\bullet\pi_*F \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}^\infty_Y \simeq H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i)). \tag{14.17}$$

Par (14.17), pour $i = (0,1,2)$, les $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i))$ sont canoniquement isomorphes.

Lemme 14.3. *Pour $i = 0,1$, $j_i : H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i)) \to H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_2))$ coïncide avec l'isomorphisme canonique $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_i)) \simeq H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_2))$.*

PREUVE: Soit $\mathcal{E}_r(\mathcal{F}_2)$ (resp. $\mathcal{E}'_r(\mathcal{F}_2)$) la suite spectrale associée au bicomplexe $\mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$ filtré par

$$F^p\mathcal{E}(\mathcal{F}_2) = \oplus_{p'\geq p}\pi_*(\mathcal{D}^{p'}_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^\bullet_X) \quad (\text{resp.} F'^p\mathcal{E}(\mathcal{F}_2) = \oplus_{p'\geq p}\pi_*(\mathcal{D}^\bullet_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^{p'}_X)).$$

Comme $\mathcal{D}^\bullet_Z(F)$ est une résolution du $\mathcal{O}_Z$-faisceau F, et comme les $\mathcal{D}^p_Z$ $(p \geq 0)$ sont des $\mathcal{O}_Z$-faisceaux plats et fins, on sait que pour $p \geq 0, q > 0$

$$\mathcal{E}'^{p,0}_1(\mathcal{F}_2) = \pi_*(F \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{D}^p_X), \quad \mathcal{E}'^{p,q}_1(\mathcal{F}_2) = 0. \tag{14.18}$$

On a donc

$$\mathcal{E}'^{p,0}_1(\mathcal{F}_2) = \mathcal{E}^p(\mathcal{F}_0), \quad \mathcal{E}'^{p,q}_1(\mathcal{F}_2) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0. \tag{14.19}$$

Donc $j_0 : \mathcal{E}(\mathcal{F}_0) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$ induit un isomorphisme de $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_0))$ sur $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_2))$. De plus, sous l'identification (14.17), j_0 est l'identité.

D'après la preuve du lemme de Poincaré pour l'opérateur $\overline{\partial}$ [**GrH**, p25], on sait que $\mathcal{D}^\bullet_X$ est une résolution du $\mathcal{O}_Z$-faisceau $\pi^*\mathcal{O}^\infty_Y$. Comme les $\mathcal{D}^p_Z(F)$ $(p \geq 0)$ sont des $\mathcal{O}_Z$-faisceaux plats et fins, on sait que pour $p \geq 0, q > 0$

$$\mathcal{E}_1{}^{p,0}(\mathcal{F}_2) = \pi_*(\mathcal{D}^p_Z(F) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \pi^*\mathcal{O}^\infty_Y), \quad \mathcal{E}_1{}^{p,q}(\mathcal{F}_2) = 0. \tag{14.20}$$

Par le Lemme 14.2, on a

$$\mathcal{E}_1{}^{p,0}(\mathcal{F}_2) = \mathcal{E}^p_1(\mathcal{F}_1), \quad \mathcal{E}_1{}^{p,q}(\mathcal{F}_2) = 0 \quad \text{pour} \quad q > 0. \tag{14.21}$$

Donc $j_1 : \mathcal{E}(\mathcal{F}_1) \to \mathcal{E}(\mathcal{F}_2)$ induit un isomorphisme de $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_1))$ sur $H(\mathcal{E}(\mathcal{F}_2))$. De plus, sous l'identification (14.17), j_1 est l'identité.

On a bien démontré le Lemme 14.3. ■

PREUVE du Théorème 14.1: Par (14.12) et par le Lemme 14.3, on sait que $j_i : E_1(\mathcal{F}_i) \to E_1(\mathcal{F}_2)$ $(i = 0,1)$ est un isomorphisme canonique. Comme pour tout $r \geq 1$, les $j_i : E_r(\mathcal{F}_i) \to E_r(\mathcal{F}_2)$ sont des morphismes de complexes, on sait que pour tout $r \geq 1$, les j_i sont bijectives. Donc $j_1^{-1} \circ j_0$ donne un isomorphisme $E_r(\mathcal{F}_0) \simeq E_r(\mathcal{F}_1)$. Donc la suite spectrale $(E'_r, d'_r) = (E_r(\mathcal{F}_0), d_r)$ $(r \geq 2)$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale (E_r, d_r).

Ceci ternime la preuve du Théorème 14.1. ■

b) Le théorème principal.

On fait les mêmes hypothèses qu'à la Section 3(a).

On rappelle que pour $s \in S$, on note $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ la suite spectrale de Leray associée à la fibration $Z_s \to Y_s$, et que h^{E_2}, $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ sont les métriques sur E_2, $H(Z, \xi_{|Z})$ associées à g^{TZ},g^{TY}, h^ξ. Soit $n = \dim Z$.

Pour $s \in S$, $r \geq 2$, $E_{r+1,s}$ est la cohomologie de $(E_{r,s}, d_{r,s})$. On définit la métrique h^{E_r} sur E_r comme à la Section 13. En effet, pour $r \geq 2$, soit d_r^* l'adjoint de d_r pour h^{E_r}. On pose

$$D_r = d_r + d_r^*. \tag{14.22}$$

Alors, par la théorie de Hodge

$$E_{r+1} \simeq \mathrm{Ker} D_r. \tag{14.23}$$

Donc E_{r+1} hérite de la métrique de E_r.

On suppose que pour tout $r \geq 2$, $p, q \geq 0$, le rang de $E_r^{p,q}$ est localement constant sur S. Alors les E_r $(r \geq 2)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur S.

DÉFINITION 14.4. On définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ $\in P^S/P^{S,0}$ par la formule

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \Sigma_{r=2}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(E_r, E_{r+1}, h^{E_r}, h^{E_{r+1}}) \\ - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z, \xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}).\end{aligned} \tag{14.24}$$

Théorème 14.5. *Si π_1 et V sont projectives, les définitions de $\widetilde{ch}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}),$ $h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ données dans les Définitions 10.15 et 14.4 sont équivalentes.*

PREUVE: Soit $E(\mathcal{F})$ le complexe de fibrés vectoriels holomorphes sur S construit à la Section 10(c) associé à ξ. Soit $(E_r(\mathcal{F}), d_r)$ la suite spectrale associée comme à la Section 10(c). Alors, pour $r \geq 2$, $(E_r(\mathcal{F}), d_r) \simeq (E_r, d_r)$.

Par la Proposition 10.2 et le Théorème 10.7, les termes à droite de (10.31) et (14.24) coïncident. On a bien montré notre Théorème. ■

Soit $\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) \in P^S/P^{S,0}$ la forme sur S définie à la Définition 3.1.

Théorème 14.6. *On a l'identité suivante:*

$$\Delta(\omega^W, \omega^V, h^\xi) = 0 \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}. \tag{14.25}$$

PREUVE: Le reste de cette Section est consacré à la preuve du Théorème 14.6. ■

REMARQUE 14.7. Si π_1 et V sont projectives, par le Théorème 14.5, nos résultats de la Section 12 impliquent le Théorème 0.1. Donc, si π_1 et V sont projectives, et si les E_r $(r \geq 2)$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur S, on obtiendra ainsi deux preuves distinctes du Théorème 14.6.

Par le Théorème 14.1, on peut noter sans inconvenant $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 0, s \in S)$ la suite spectrale associée au complexe filtré $(\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s}), \overline{\partial}^Z)$. Alors par (5.10), $E_0 = \Omega(Y, \Omega(X, \xi_{|X})_{|Y})$. On munit E_0 de la métrique h^{E_0} construite en (5.8). On rappelle que ${}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ est la connexion sur $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ définie en (5.23). On désigne aussi ∇^{E_0} la connexion sur E_0 correspondant à (5.10).

Dans la suite, on identifie E_r à un sous-fibré vectoriel de E_0 comme à la Section 13(a) , [**BerB**, §6]. Alors on a une suite de sous-espaces vectoriels hermitiens de E_0, $E_0 \supset E_1 \cdots \supset E_r \supset \cdots$.

Pour $r \geq 1$, soit $E_r^\perp$ l'espace orthogonal à E_r dans E_{r-1}. Alors D_r $(r \geq 2)$ agit sur $E_{r+1}^\perp$ comme un opérateur inversible. Pour $r \geq 1$, soit p_r la projection orthogonale de E_0 sur E_r. On pose $p_r^\perp = 1 - p_r$. Soit ∇^{E_r} $(r \geq 2)$ la connexion holomorphe hermitienne sur (E_r, h^{E_r}). Alors, en utilisant [**B2**, Proposition 1.8], (5.35), comme en (13.10), on a

$$\nabla^{E_r} = p_r \nabla^{E_0} p_r. \tag{14.26}$$

Pour $u > 0, r > 1$, on pose

$$\mathcal{D}_{r,u} = \nabla^{E_r} + uD_r. \tag{14.27}$$

c) Des résultats intermédiaires.

On utilise les mêmes notations de la Sections 4. Comme à la Section 4, on supposera que S est compacte.

Théorème 14.8. ***i)*** *Pour tout* $u > 0$,

$$\lim_{T\to+\infty} \varphi \mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u,T} \exp(-B^2_{3,u,T})\right] = \varphi \mathrm{Tr}_s\left[(N_{2,u} + N_X) \exp(-B^2_{2,u})\right]. \tag{14.28}$$

ii) *Pour tout* $u > 0$, *il existe* $C, \delta > 0$ *tels que pour tout* $T \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\left|\varphi \mathrm{Tr}_s\left[M_{3,u,T} \exp(-B^2_{3,u,T})\right] - \frac{2}{T} \varphi \mathrm{Tr}_s\left[(N_X - \dim X) \exp(-B^2_{2,u})\right]\right| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \frac{C}{T^{\delta+1}}. \end{aligned} \tag{14.29}$$

iii) *Pour tout* $0 < u_1 < u_2$ *fixés, il existe* $C > 0$ *tel que pour* $u \in [u_1, u_2]$, $T \geq 1$,

$$\left|\varphi \mathrm{Tr}_s\left[N_{3,u,T} \exp(-B^2_{3,u,T})\right]\right| \leq C. \tag{14.30}$$

PREUVE: L'inégalité (14.29) a déjà été montrée à la Section 5(i). En utilisant (5.53), (5.55), (5.73) et (5.77), on a aussi les inégalités (14.28) et (14.30).

On a terminé la preuve du Théorème 14.8. ■

Pour $r > 1$, on pose

$$\mathrm{ch}'(E_r, h^{E_r}) = \varphi \mathrm{Tr}_s\left[N_Z \exp(-\nabla^{E_r,2})\right]. \tag{14.31}$$

On rappelle que $h_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$ est la métrique sur $H(Z,\xi_{|Z})$ associée à g_T^{TZ}, h^ξ, et que $\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z})}$ est la connexion holomorphe hermitienne sur $(H(Z,\xi_{|Z}), h_T^{H(Z,\xi_{|Z})})$. On rappelle aussi que $\zeta(E_r, h^{E_r}) \in P^S$ a été défini à la Définition 10.3.

On a l'analogue des Théorèmes 13.6 et 13.7.

Théorème 14.9. *On a l'identité suivante*

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to+\infty}\Big\{\int_1^{+\infty} 2\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[N_{3,u^2,T}\exp(-B^2_{3,u^2,T})\big] - \varphi\mathrm{Tr}_s\big[N_Z\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\big]\Big\}\frac{du}{u} \\
&\qquad -2\Sigma_{r\geq 2}(r-1)\big[\mathrm{ch}'(E_r,h^{E_r}) - \mathrm{ch}'(E_{r+1},h^{E_{r+1}})\big]\log T\Big\} \\
(14.32)\qquad &= \int_1^{+\infty}\big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[(N_{2,u}+N_X)\exp(-B^2_{2,u})\big] - \mathrm{ch}'(E_2,h^{E_2})\big\}\frac{du}{u} \\
&\qquad -\Sigma_{r\geq 2}\zeta(E_r,h^{E_r}) + \Gamma'(1)\big[\mathrm{ch}'(E_2,h^{E_2}) - \mathrm{ch}'(E_\infty,h^{E_\infty})\big].
\end{aligned}$$

Théorème 14.10. *Quand $T \to +\infty$, on a*

$$\begin{aligned}
&\varphi\mathrm{Tr}_s\big[Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})}\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\big] \\
&\qquad = -\varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{2(N_X-\dim X)}{T}\exp(-\nabla^{E_\infty,2})\Big] + O\Big(\frac{1}{T^2}\Big).
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
&\int_1^{+\infty}\Big\{\varphi\mathrm{Tr}_s\big[Q_T^{H(Z,\xi_{|Z})}\exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2})\big] + \varphi\mathrm{Tr}_s\Big[\frac{2(N_X-\dim X)}{T}\exp(-\nabla^{E_\infty,2})\Big]\Big\}dT \\
(14.33)\qquad &= \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z,\xi_{|Z}),E_\infty,h^{H(Z,\xi_{|Z})},h^{E_\infty}) \quad \text{dans} \quad P^S/P^{S,0}.
\end{aligned}$$

PREUVE: Les preuves des Théorèmes 14.9 et 14.10 sont différées aux Sections 14(f) et 14(g). ■

d) Preuve du Théorème 14.6.

On procède comme à la Section 4. Les termes I_3^0 et I_4^0 ont déjà été traités à la Section 4. D'après les Théorèmes 14.8-14.10, on peut aussi traiter les termes I_1^0 et I_2^0 comme on l'a fait dans la Section 13(d).

Comme dans la Section 13(d), en combinant la preuve du Théorème 14.9, et [B4, §6 (f)-(h)], on peut traiter aussi le terme à droite de (4.8). Donc il existe θ_1^3, θ_2^3, θ_3^3 des formes universelles explicites sur S telles qu'on a

$$\Sigma_{i=1}^4 I_i^3 = \overline{\partial}\theta_1^3 - \partial\theta_2^3 - \overline{\partial}\partial\theta_3^3. \tag{14.34}$$

En procédant comme dans la Section 4, on obtient le Théorème 14.6. ■

e) L'asymptotique de certaines supertraces quand $T \to +\infty$ ou $u \to 0$.

On utilise les mêmes notations de la Section 5.

On rappelle que p_T est la projection de E_0 sur $\mathrm{Ker}D_T^X$ définie à la Définition 5.7, et que la norme $|\ \ |_0$ sur E_0^0 est définie à la Section 5(f). Soit $\|\ \ \|^{0,0}$ la norme sur $L(E_0^0,E_0^0)$ associée à $|\ \ |_0$.

Pour $r \geq 2, s \in S$, soit $\mathrm{Sp}D^2_{r,s}$ (resp. $\mathrm{Sp}D^{2,>0}_{r,s}$) le spectre (resp. le spectre non nul) de $D^2_{r,s}$. Dans la suite, on fixe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$(14.35) \qquad \cup_{\substack{r\geq 2\\ s\in S}} \mathrm{Sp}D^{2,>0}_{r,s} \subset]c_1, c_2[\quad \text{et} \quad]0, 2c_1[\cap \cup_{s\in S} \mathrm{Sp}D^{Y,2}_s = \phi.$$

Soient $\delta, \Delta \subset \mathbf{C}$ les contours définis comme on l'a fait après (13.42). Soit δ', Δ' les domaines de bords par δ, Δ. Soit $U_2 \subset \mathbf{C}$ défini comme en (13.28).

Le résultat suivant est établi dans [**BerB**, Théorème 6.5].

Proposition 14.11. *Pour $r \geq 2$, $\lambda \in U_2$, $s \in E_0^0$, quand $T \to +\infty$, on a*

$$(14.36) \qquad (\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}s \to p_r(\lambda - D_r)^{-1}p_r s.$$

Par (14.36), pour $r \geq 2$, les valeurs propres de $A_T^{(0)}$ qui sont $O(\frac{1}{T^{r-1}})$ sont de la forme $\frac{1}{T^{r-1}}(\mathrm{Sp}D_r + O(\frac{1}{T}))$. D'où, pour $T \gg 1$

$$(14.37) \qquad \mathrm{Sp}A_T^{(0),2} \cap [0, 2c_1[\subset \frac{\delta'}{T^{2(n-1)}} \cup \cup_{i=2}^{n} \frac{\Delta'}{T^{2(i-1)}}.$$

Pour $r \geq 2$, $T \gg 1$, on pose

$$(14.38) \qquad \begin{aligned} \widetilde{p}_{r,T} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\{\lambda\in\mathbf{C}, |\lambda|=\sqrt{c_2}\}} (\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1} d\lambda, \\ \widetilde{p}^{\perp}_{r,T} &= 1 - \widetilde{p}_{r,T}, \\ q_{r,T} &= \widetilde{p}_{r,T} - \widetilde{p}_{r+1,T}. \end{aligned}$$

Pour $r \geq 2$, soit $\widetilde{E}_{r,T}$ la somme directe des espaces propres de $A_T^{(0),2}$ associés aux valeurs propres $\lambda \in [0, c_2/T^{2(r-1)}]$. Alors $\widetilde{p}_{r,T}$ est la projection orthogonale de E_0 sur $\widetilde{E}_{r,T}$. Pour $T \gg 1$, $\widetilde{E}_{r,T}$ est un fibré vectoriel sur S et $\dim \widetilde{E}_{r,T} = \dim E_r$. Pour $r \geq 3$, soit $\widetilde{E}^{\perp}_{r,T}$ l'espace orthogonal à $\widetilde{E}_{r,T}$ dans $\widetilde{E}_{r-1,T}$. Soit $\widetilde{E}^{\perp}_{2,T}$ l'espace orthogonal à $\widetilde{E}_{2,T}$ dans E_0.

Pour $T \gg 1$, $r \geq 2$, soit $Q'_{r,T} : E_r \to \widetilde{E}_{r,T}$ l'application linéaire

$$s \in E_r \to Q'_{r,T}s = \widetilde{p}_{r,T}s \in \widetilde{E}_{r,T}.$$

Évidemment, l'application $Q'_{r,T}$ $(r \geq 2)$ est C^∞ sur S. D'après (14.36), pour T assez grand, $Q'_{r,T}$ est injective pour tout $s \in S$. Comme $\dim \widetilde{E}_{r,T} = \dim E_r$, $Q'_{r,T}$ est un isomorphisme de E_r sur $\widetilde{E}_{r,T}$. Soit $Q'^{*}_{r,T}$ l'adjoint de $Q'_{r,T}$. On pose

$$(14.39) \qquad \begin{aligned} R_{r,T} &= (Q'^{*}_{r,T}Q'_{r,T})^{1/2}, \\ J_{r,T} &= Q'_{r,T}R^{-1}_{r,T}. \end{aligned}$$

Alors $J_{r,T}$ est une isométrie linéaire de E_r sur $\widetilde{E}_{r,T}$, et $J^{-1}_{r,T} = R^{-1}_{r,T}Q'^{*}_{r,T}$.

Soit $\widetilde{p}_{r,T}(x,x'), p_r(x,x')(x,x' \in Z_s, s \in S)$ les noyaux C^∞ des opérateurs $\widetilde{p}_{r,T}$, p_r relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$.

On a l'analogue de l'équation (13.31).

Proposition 14.12. *Pour tout $m \in \mathbf{N}$, il existe $\delta > 0$ tel que sous la norme C^m, pour $r \geq 2, T \gg 1$, on a*

$$(14.40) \qquad \widetilde{p}_{r,T}(x,x') = p_r(x,x') + O(\frac{1}{T^\delta}).$$

PREUVE: i) Par (14.37), (14.38), pour $T \gg 1$, on a

$$\tag{14.41} \begin{aligned} \widetilde{p}_{2,T} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = c_1\}} (\lambda - A_T^{(0),2})^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = \sqrt{c_1}\}} (\lambda - A_T^{(0)})^{-1} d\lambda. \end{aligned}$$

En procédant comme aux Sections 5(f) et 5(g), on sait que $\widetilde{p}_{2,T}(x,x')(x,x' \in Z_s)$ et ses dérivées sont uniformément bornées pour $s \in S$, $x,x' \in Z_s$, $T \gg 1$.

Par [**BerB**, (5.75), (5.85), (5.86), (5.90), (5.91)], on voit que pour $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = \sqrt{c_1}$, on a

$$\tag{14.42} \left\| (\lambda - A_T^{(0)})^{-1} - p_1(\lambda - D^Y)^{-1} p_1 \right\|^{0,0} \leq \frac{C}{T}.$$

De (14.41) et (14.42), on tire que

$$\tag{14.43} \left\| \widetilde{p}_{2,T} - p_2 \right\|^{0,0} \leq \frac{C}{T}.$$

En appliquant la méthode de [**BL**, §11(p)], pour $r = 2$, on obtient (14.40).

ii) Pour $r \geq 2$, par (14.37),

$$\tag{14.44} \widetilde{p}_{r,T} = J_{2,T} p_2 \Big[\frac{1}{2\pi i} \int_{\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| = \sqrt{c_2}\}} J_{2,T}^{-1} (\lambda - T^{r-1} A_T^{(0)})^{-1} J_{2,T} d\lambda \Big] J_{2,T}^{-1} \widetilde{p}_{2,T}.$$

Soit $(J_{2,T}p_2)(x,x'), (J_{2,T}^{-1}\widetilde{p}_{2,T})(x,x')$ $(x,x' \in Z_s, s \in S)$ les noyaux $\mathcal{C}^\infty$ des opérateurs $J_{2,T}p_2, J_{2,T}^{-1}\widetilde{p}_{2,T}$ relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$. En utilisant (14.40) pour $r = 2$, on a

$$\tag{14.45} \begin{aligned} (J_{2,T}p_2)(x,x') &= p_2(x,x') + O(\tfrac{1}{T^\delta}), \\ (J_{2,T}^{-1}\widetilde{p}_{2,T})(x,x') &= p_2(x,x') + O(\tfrac{1}{T^\delta}). \end{aligned}$$

Soit $(E_{k,T,s}, d_{k,T,s})$ $(s \in S, k \geq 0)$ la suite spectrale associée à $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ construite dans [**BerB**, §6(a)]. Soit $p_{k,T}(s), D_{k,T}(s)$, $\psi_{k,\lambda,T}(s) = (\psi^i_{k,\lambda,T}(s))_{0 \leq i \leq k}$ $(k \geq 2, s \in S)$ les opérateurs définis dans [**BerB**, §6(a), (b)]. On note $p_{0,T} = \mathrm{Id}_{E_0}, p_{1,T} = p_T$. Par la construction de [**BerB**, §6(a)], $Q_{k,T} = p_{k,T}B_T : (E_k, d_k) \to (E_{k,T}, d_{k,T})$ $(k \geq 0)$ est un isomorphisme de complexes. Soit $d_k^*, Q_{k,T}^*$ les adjoints de $d_k, Q_{k,T}$. Alors

$$\tag{14.46} \begin{aligned} Q_{k,T}^{-1} &= (Q_{k,T}^* Q_{k,T})^{-1} Q_{k,T}^*, \\ D_{k,T} &= Q_{k,T} d_k Q_{k,T}^{-1} + (Q_{k,T}^{-1})^* d_k^* Q_{k,T}^*. \end{aligned}$$

Soit $p_{k,T}(x,x')(x,x' \in Z_s, s \in S, k \geq 2)$ le noyau $\mathcal{C}^\infty$ de $p_{k,T}$ relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$. En utilisant [**BerB**, (5.47), (6.6)], (5.37), pour $k \geq 2$, on a

$$\tag{14.47} p_{k,T}(x,x') = p_k(x,x') + O(\tfrac{1}{T^2}).$$

D'après [**BerB**, Théorème 6.2], pour $\mu \in \mathbf{R}$, $\psi_{k,\lambda,T}$ est une application linéaire de E_0^μ dans $(E_0^\mu)^{k+1}$ dont la norme est uniformément bornée pour $T \geq 1$. Par [**BerB**, (6.49)], on a

$$\tag{14.48} \begin{aligned} (\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1} &= (\lambda - D_{r,T})^{-1} p_{r,T} + \Sigma_{i=1}^r \psi^i_{r,\lambda,T}/T^i \\ &\quad + (\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1} \big(-\lambda \Sigma_{i=1}^r \psi^i_{r,\lambda,T}/T^i + D_T^H \psi^r_{r,\lambda,T}/T \big). \end{aligned}$$

Dans la suite, on va montrer que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\{\lambda\in\mathbf{C},|\lambda|=\sqrt{c_2}\}} J_{2,T}^{-1}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}J_{2,T}d\lambda = p_{r|E_2} + O(\frac{1}{T^\delta}). \tag{14.49}$$

• D'après (14.40) pour $r=2$, (14.47), (14.48), on a (14.49) pour la norme $\mathcal{C}^0$.

• Soit U une section $\mathcal{C}^\infty$ de $T_{\mathbf{R}}S$. On rappelle que la connexion ∇^{E_0} sur E_0 est définie à la Section 14 (b). On note $\nabla^{\mathrm{End}(E_0)}$ la connexion sur $\mathrm{End}(E_0)$ associée à ∇^{E_0}. Par (14.48), on a

$$\begin{aligned}
&\nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1} = \nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - D_{r,T})^{-1}p_{r,T} + \Sigma_{i=1}^r \nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}\psi^i_{r,\lambda,T}/T^i \\
&+(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}\Big(-\lambda\Sigma_{i=1}^r\nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}\psi^i_{r,\lambda,T}/T^i + \nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}D_T^H\psi^r_{r,\lambda,T}/T\Big) \\
&+\Big(\nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}\Big)\Big(-\lambda\Sigma_{i=1}^r\psi^i_{r,\lambda,T}/T^i + D_T^H\psi^r_{r,\lambda,T}/T\Big).
\end{aligned} \tag{14.50}$$

On remplace $\nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}$ dans le dernier terme à droite en utilisant de nouveau la formule ci-dessus, et on répète l'opération r fois. Alors il existe θ_i, f_i, g_i $(1\le i\le (r+1)^2)$ qui , pour tout $\mu\in\mathbf{R}$, sont des applications linéaires de E_0^μ dans $E_0^{\mu-(r+2)}$ dont les normes sont uniformément bornées pour $T\ge 1$, telles que

$$\begin{aligned}
&\nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1} = \nabla_U^{\mathrm{End}(E_0)}(\lambda - D_{r,T})^{-1}p_{r,T} \\
&+\Sigma_{i\ge1}\theta_i/T^i + (\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}\Sigma_{i\ge1}f_i/T^i \\
&+\frac{1}{T^r}(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}[\nabla_U^{E_0}, T^{r-1}A_T^{(0)}](\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}\Sigma_{i\ge1}g_i/T^i.
\end{aligned} \tag{14.51}$$

L'opérateur $[\nabla_U^{E_0}, A_T^{(0)}]$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 le long de la fibre Z.

Par (5.66), il existe $C, C_0, C_1 > 0$, tels que pour $\lambda\in U_2$, $s\in E_0$, on a

$$\begin{aligned}
&\Big|(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})s\Big|_0 \ge T^{r-1}(C_0\|s\|_{E_0^1} - C_1|s|_0), \\
&\Big|(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}s\Big|_0 \le C|s|_0.
\end{aligned} \tag{14.52}$$

Donc

$$\Big\|(\lambda - T^{r-1}A_T^{(0)})^{-1}s\Big\|_{E_0^1} \le C|s|_0. \tag{14.53}$$

De i), (14.46), (14.51), (14.52), (14.53), on tire (14.49) pour la norme $\mathcal{C}^1$.

• On répète les arguments ci-dessus, alors on obtient (14.49) pour la norme $\mathcal{C}^m (m\ge 1)$.

De i), (14.44), (14.45) et (14.49), on tire (14.40) pour $r\ge 2$.

On a montré la Proposition 14.12. ■

On rappelle que $\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}$ est la connexion sur $\Omega(Z,\xi_{|Z})$ définie en (5.22), et que les opérateurs $A_{u,T}$ et $A_T^{(0)}$ sont définis en (5.24) et en (5.26). On pose

$$A_{r,u,T} = A_{T^{r-1}u,T}. \tag{14.54}$$

Soit $A_{r,1,T}^{(0)}$ (resp. $A_{r,1,T}^{(>0)}$) la partie de $A_{r,1,T}$ de degré 0 (resp. >0) dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$. Par (5.24) et (5.26), on a

$$\begin{aligned}
&A_{r,1,T}^{(0)} = T^{r-1}A_T^{(0)}, \\
&A_{r,1,T}^{(>0)} = C_T\left(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} - \frac{1}{2\sqrt{2T^{r-1}}}c_T(T_{3,T})\right)C_T^{-1}.
\end{aligned} \tag{14.55}$$

On pose

$$R_{r,1,T} = \left[A^{(0)}_{r,1,T}, A^{(>0)}_{r,1,T}\right] + A^{(>0),2}_{r,1,T}. \tag{14.56}$$

On rappelle que le produit scalaire $\langle\ \ \rangle_0$ sur E^0_0 (resp. la norme $|\ \ |_{T,1}$ sur E^1_0) est défini à la Section 5(f), et que ${}^0\nabla^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}$ est la connexion sur $\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi$ définie en (5.21).

DÉFINITION 14.13. Pour $2 \le r \le n, T \gg 1, s \in E_0$, on pose

$$|s|^2_{r,T,1} = |\widetilde{p}_{r,T}s|^2_0 + \Sigma^{r-1}_{k=2}T^{2(r-k)}|q_{k,T}s|^2_0 + T^{2(r-1)}|\widetilde{p}^{\perp}_{2,T}s|^2_{T,1}. \tag{14.57}$$

Comme à la Section 5(f), soit $|\ \ |_{r,T,-1}$ la norme sur E^{-1}_0 associée à $|\ \ |_{r,T,1}$.

On a l'analogue des Théorèmes 5.21-5.27.

Théorème 14.14. *Il existe $C_1, C_2, C_3 > 0, T_0 > 0$ tels que pour $T \ge T_0$, $s, s' \in \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}E_0$,*

$$\begin{aligned} |T^{r-1}A^{(0)}_T s|^2_0 &\ge C_1|s|^2_{r,T,1} - C_2|s|^2_0,\\ T^{2(r-1)}\left|\left\langle A^{(0)}_T s, A^{(0)}_T s'\right\rangle_0\right| &\le C_3|s|_{r,T,1}|s'|_{r,T,1},\\ |\langle R_{r,1,T}s, s'\rangle_0| &\le C_3(|s|_{r,T,1}|s'|_0 + |s|_0|s'|_{r,T,1}). \end{aligned} \tag{14.58}$$

PREUVE: Soit $(T^{k-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{k,T})(x,x'), (D_kp_k)(x,x')$ $(x,x' \in Z_s, s \in S, k \ge 2)$ les noyaux $\mathcal{C}^\infty$ des opérateurs $T^{k-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{k,T}$, D_kp_k relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$. Par (14.37), pour $T \gg 1, k \ge 2$, on a

(14.59)

$$T^{k-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{k,T} = J_{2,T}p_2\Big[\frac{1}{2\pi i}\int_{\{\lambda\in\mathbf{C},|\lambda|=\sqrt{c_2}\}}\lambda J^{-1}_{2,T}(\lambda - T^{k-1}A^{(0)}_T)^{-1}J_{2,T}d\lambda\Big]J^{-1}_{2,T}\widetilde{p}_{2,T}.$$

En utilisant (14.45), en procédant comme dans la preuve de (14.49), on a

$$(T^{k-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{k,T})(x,x') = (D_kp_k)(x,x') + O(\frac{1}{T^\delta}). \tag{14.60}$$

Donc

$$T^{k-1}A^{(0)}_T q_{k,T} = D_kp^{\perp}_{k+1}p_k + O(\frac{1}{T^\delta}). \tag{14.61}$$

Pour $s, s' \in \Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)\widehat{\otimes}E_0$, on a

$$\begin{aligned} T^{2(r-1)}\left\langle A^{(0)}_T s, A^{(0)}_T s'\right\rangle_0 &= T^{2(r-1)}\left\langle A^{(0)}_T\widetilde{p}^{\perp}_{2,T}s, A^{(0)}_T\widetilde{p}^{\perp}_{2,T}s'\right\rangle_0\\ &+T^{2(r-1)}\Sigma^{r-1}_{k=2}\left\langle A^{(0)}_T q_{k,T}s, A^{(0)}_T q_{k,T}s'\right\rangle_0\\ &+T^{2(r-1)}\left\langle A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}s, A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}s'\right\rangle_0. \end{aligned} \tag{14.62}$$

En utilisant (5.66), (14.60)-(14.62), pour $T \gg 1$, on a

$$\begin{aligned} \left|T^{r-1}A^{(0)}_T s\right|^2_0 &\ge T^{2(r-1)}(C'_1|q^{\perp}_{2,T}s|^2_{T,1} - C|q^{\perp}_{2,T}s|^2_0)\\ &+\Sigma^{r-1}_{k=2}C'_1T^{2(r-k)}|q_{k,T}s|^2_0 + |T^{r-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}s|^2_0. \end{aligned} \tag{14.63}$$

Par (14.37), (14.38) et (14.62), pour $T \gg 1$, on a

$$\left|T^{r-1}A_T^{(0)}s\right|_0^2 \geq T^{2(r-1)}|A_T^{(0)}q_{2,T}^{\perp}s|_0^2 \geq C_0T^{2(r-1)}|q_{2,T}^{\perp}s|_0^2. \tag{14.64}$$

De (14.63), (14.64), on tire la première équation de (14.58).

En utilisant (5.66), (14.60)-(14.62), pour $T \gg 1$,

$$\begin{aligned} T^{2(r-1)}\left|\left\langle A_T^{(0)}s, A_T^{(0)}s'\right\rangle_0\right| &\leq C_3T^{2(r-1)}|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s|_{T,1}|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'|_{T,1} \\ &\quad +\Sigma_{k=2}^{r-1}C_3T^{2(r-k)}|q_{k,T}s|_0|q_{k,T}s'|_0 \\ &\quad +|T^{r-1}A_T^{(0)}\widetilde{p}_{r,T}s|_0|T^{r-1}A_T^{(0)}\widetilde{p}_{r,T}s'|_0 \\ &\leq C_3|s|_{r,T,1}|s'|_{r,T,1}. \end{aligned} \tag{14.65}$$

En utilisant (5.31), (5.33), (14.40), (14.55), (14.60) et (14.61), pour $k, k' \geq 2$, $T \gg 1$, comme en (5.66), on a

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle [A_{r,1,T}^{(0)}, A_{r,1,T}^{(>0)}]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'\right\rangle_0\right| \leq CT^{r-1}\Big(|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s|_{T,1}|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'|_0 \\ &\qquad\qquad +|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s|_0|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'|_{T,1}\Big), \\ &\left|\left\langle [A_{r,1,T}^{(0)}, A_{r,1,T}^{(>0)}]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s, \widetilde{p}_{2,T}s'\right\rangle_0\right| \leq CT^{r-1}|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s|_{T,1}|\widetilde{p}_{2,T}s'|_0, \\ &\left|\left\langle [A_{r,1,T}^{(0)}, A_{r,1,T}^{(>0)}]\widetilde{p}_{2,T}s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'\right\rangle_0\right| \leq CT^{r-1}|\widetilde{p}_{2,T}s|_0|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}s'|_{T,1}, \\ &\left|\left\langle [A_{r,1,T}^{(0)}, A_{r,1,T}^{(>0)}]q_{k,T}s, q_{k',T}s'\right\rangle_0\right| \leq C(T^{r-k}+T^{r-k'})|q_{k,T}s|_0|q_{k',T}s'|_0. \end{aligned} \tag{14.66}$$

On a une inégalité analogue à la dernière équation de (14.66), si on remplace $q_{k,T}$ ou $q_{k',T}$ par $\widetilde{p}_{r,T}$.

En utilisant (5.31), (5.33), (14.55) et (14.66), pour $T \gg 1$, on a

$$\begin{aligned} \left|\langle R_{r,1,T}s, s'\rangle_0\right| &\leq C\|s\|_{E_0^1}|s'|_0 + \left|\left\langle [A_{r,1,T}^{(0)}, A_{r,1,T}^{(>0)}]s, s'\right\rangle_0\right| \\ &\leq C_3(|s|_{r,T,1}|s'|_0 + |s|_0|s'|_{r,T,1}). \end{aligned} \tag{14.67}$$

On a bien terminé la preuve du Théorème 14.14. ■

Soit $U_1, \cdots, U_m$(resp. $U_1', \cdots, U_{m'}'$) une famille de sections C^∞ de $T_{\mathbf{R}}Y$ (resp. $T_{\mathbf{R}}X$) telle que pour tout $y \in V$ (resp. $x \in W$) $U_1(y), \cdots, U_m(y)$ (resp. $U_1'(x), \cdots, U_{m'}'(x)$) engendrent $(T_{\mathbf{R}}Y)_y$ (resp. $(T_{\mathbf{R}}X)_x$). On rappelle que $\mathcal{D}_T$ est la famille d'opérateurs agissant sur E_0 définie en (5.70).

DÉFINITION 14.15. Pour $T > 0$, soit $\mathcal{D}_T'$ la famille d'opérateurs agissant sur E_0

$$\mathcal{D}_T' = \left\{\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}Q\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, Q \in \mathcal{D}_T\right\}. \tag{14.68}$$

Théorème 14.16. *Pour tout $k \in \boldsymbol{N}$ fixé, il existe $C_k > 0$ tel que pour $T \geq 1, Q_1, \cdots, Q_k \in \mathcal{D}_T'$, $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes}E_0$, on a*

$$\left|\left\langle [Q_1, [Q_2, \cdots [Q_k, A_{r,1,T}^2], \cdots]]s, s'\right\rangle_0\right| \leq C_k|s|_{r,T,1}|s'|_{r,T,1}. \tag{14.69}$$

PREUVE: On considère d'abord le cas où $k = 1$. Soit $Q \in \mathcal{D}_T$.

Les opérateurs $[{}^0\nabla_{U_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}, p_T]$, ${}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}p_T$, $p_T{}^0\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi}$ (resp. $Q\widetilde{p}_{2,T}$, $\widetilde{p}_{2,T}Q$ $(Q \in \mathcal{D}_T)$) sont des opérateurs dont les restrictions aux fibres $X_b(b \in V)$ (resp.

$Z_s, (s \in S))$ ont des noyaux $\mathcal{C}^\infty$ uniformément bornés pour $(x,x') \in X_b \times X_b, b \in V, T \geq 1$ (resp. $(x,x') \in Z_s \times Z_s, s \in S, T \gg 1$).

1) • Par (14.38) et (14.55), on a

$$\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, A_{r,1,T}^{(0),2}\right] = \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}\left[Q, A_{r,1,T}^{(0),2}\right]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp}. \tag{14.70}$$

D'après le Théorème 5.23, (14.55) et (14.70), pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes} E_0$, on a

$$\left|\left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, A_{r,1,T}^{(0),2}\right]s, s'\right\rangle_0\right| \leq C T^{2(r-1)} |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s|_{T,1} |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'|_{T,1}. \tag{14.71}$$

• Soit

$$\begin{aligned} G_T &= \left[C_T \nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} C_T^{-1}, A_T^{(0)}\right], \\ H_T &= \left[C_T \frac{1}{2\sqrt{2}T^{r-1}} c_T(T_{3,T}) C_T^{-1}, A_{r,1,T}^{(0)}\right]. \end{aligned} \tag{14.72}$$

Alors G_T, H_T sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 le long de la fibre Z, et G_T est la partie de A_T^2 de degré 1 dans $\Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)$.

Par (5.26), (5.33), (5.46) et (14.55), les coefficients de H_T sont uniformément bornés pour $T \geq 1$. Par la Proposition 14.12, pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes} E_0$, on a

$$\begin{aligned} \left|\left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, H_T\right]s, s'\right\rangle_0\right| &= \left|\left\langle\left([Q, H_T] - [Q\widetilde{p}_{2,T} + \widetilde{p}_{2,T} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, H_T]\right)s, s'\right\rangle_0\right| \\ &\leq C \|s\|_{E_0^1} |s'|_0. \end{aligned} \tag{14.73}$$

• Par (5.31), (5.33) et (14.55), $A_{r,1,T}^{(>0),2}$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 le long de la fibre Z, dont les coefficients sont uniformément bornés pour $T \geq 1$. D'où, pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes} E_0$, on a

$$\left|\left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, A_{r,1,T}^{(>0),2}\right]s, s'\right\rangle_0\right| \leq C \|s\|_{E_0^1} |s'|_0. \tag{14.74}$$

2) Pour montrer le Théorème 14.16 dans le cas où $k = 1$, par (14.55), (14.70)-(14.74), il suffit de montrer que pour $Q \in \mathcal{D}_T$, $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes} E_0$, on a

$$\left|\left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, T^{r-1} G_T\right]s, s'\right\rangle_0\right| \leq C |s|_{r,T,1} |s'|_{r,T,1}. \tag{14.75}$$

i) Pour $s, s' \in \Lambda(T_{\mathbf{R}}^*S)\widehat{\otimes} E_0$, on a

$$\begin{aligned} \left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right]s, s'\right\rangle_0 &= \left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'\right\rangle_0 \\ &+ \left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right]\widetilde{p}_{2,T} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'\right\rangle_0 \\ &+ \left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s, \widetilde{p}_{2,T} s'\right\rangle_0. \end{aligned} \tag{14.76}$$

ii) Par (14.38), on a

$$Q\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} G_T - G_T \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q = [Q, G_T] - Q\widetilde{p}_{2,T} G_T + G_T \widetilde{p}_{2,T} Q. \tag{14.77}$$

Par le Théorème 5.23, (14.40) et (14.77), on a

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle\left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right]\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'\right\rangle_0\right| \\ &\qquad = \left|\left\langle(Q\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} G_T - G_T \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q)\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'\right\rangle_0\right| \\ &\qquad \leq C(|\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s|_{T,1} |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'|_{T,1} + T |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s|_0 |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'|_0). \end{aligned} \tag{14.78}$$

iii) • Si $Q = p_T^{\perp 0}\nabla_{U_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T^{\perp}$ ou $p_T^{\perp 0}\nabla_{U_i'}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T^{\perp}$, alors, par (14.40), on a

$$\text{(14.79)} \quad \begin{aligned} \left| \left\langle \left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right] \widetilde{p}_{2,T} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s' \right\rangle_0 \right| &= \left| \left\langle Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} G_T \widetilde{p}_{2,T} s, p_T^{\perp} \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s' \right\rangle_0 \right| \\ &\leq T |\widetilde{p}_{2,T} s|_0 |p_T^{\perp} \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'|_0. \end{aligned}$$

• Soit $Q = p_T{}^0\nabla_{U_{l,1}^H}^{\Lambda(T^{*(0,1)}Z)\otimes\xi} p_T$. Par (14.72), on a

$$\text{(14.80)} \quad p_T G_T \widetilde{p}_{2,T} = \left[p_T D_T^H C_T \nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} C_T^{-1} - C_T \nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} C_T^{-1} (A_T^{(0)} \widetilde{p}_{2,T})\right] \widetilde{p}_{2,T}.$$

D'après (14.60) et (14.80), le noyau de $p_T G_T \widetilde{p}_{2,T}$ est C^∞, uniformément borné pour $T \gg 1$. De même , par (14.60), le noyau de $\widetilde{p}_{2,T} G_T \widetilde{p}_{2,T}$ est C^∞, uniformément borné pour $T \gg 1$. Donc

$$\text{(14.81)} \quad \begin{aligned} \left| \left\langle \left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right] \widetilde{p}_{2,T} s, \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s' \right\rangle_0 \right| &= \left| \left\langle Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} G_T \widetilde{p}_{2,T} s, p_T \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s' \right\rangle_0 \right| \\ &= \left| \left\langle Q p_T G_T \widetilde{p}_{2,T} s - Q \widetilde{p}_{2,T} G_T \widetilde{p}_{2,T} s, p_T \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s' \right\rangle_0 \right| \\ &\leq C |\widetilde{p}_{2,T} s|_0 |p_T \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s'|_0. \end{aligned}$$

iv) Comme en iii), on a aussi

$$\text{(14.82)} \quad \left| \left\langle \left[\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} Q \widetilde{p}_{2,T}^{\perp}, G_T\right] \widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s, \widetilde{p}_{2,T} s' \right\rangle_0 \right| \leq C |\widetilde{p}_{2,T}^{\perp} s|_{T,1} |\widetilde{p}_{2,T} s'|_0.$$

De (14.58), i)-iv), on tire (14.75). On a montré le Théorème 14.16 pour $k = 1$.

3) Les commutateurs d'ordre supérieur.

On répète les arguments ci-dessus, et on obtient le Théorème 14.16 dans le cas général.

On a bien terminé la preuve du Théorème 14.16. ■

Pour $r \geq 2, T \gg 1$, on pose

$$\text{(14.83)} \quad \overline{F}_{r,u,T} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Delta e^{-u^2\lambda} (\lambda - A_{r,1,T}^2)^{-1} d\lambda.$$

Soit $\overline{F}_{r,u,T}(x,x')(x,x' \in Z_s)$ le noyau C^∞ de l'opérateur $\overline{F}_{r,u,T}$ relativement à $dv_Z/(2\pi)^{\dim Z}$.

Théorème 14.17. *Pour tout $m \in \mathbf{N}, u_0 > 0$, il existe $C > 0, C' > 0$ tels que pour $u \geq u_0, T \geq T_0$, $x, x' \in Z_s$,*

$$\text{(14.84)} \quad \sup_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\alpha'| \leq m}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|+|\alpha'|}}{\partial x^\alpha \partial x'^{\alpha'}} \overline{F}_{r,u,T}(x,x') \right| \leq C \exp(-C'u^2).$$

PREUVE: En utilisant les arguments qu'on a donnés au début de la preuve du Théorème 14.16, en utilisant les Théorèmes 14.14 et 14.16, et en procédant comme dans la preuve de [B4, Théorème 9.20], [BL, Théorème 13.32], on obtient le Théorème. ■

On rappelle que $\nabla^{R\pi_{1*}\xi}$ est la connexion holomorphe hermitienne sur $(R\pi_{1*}\xi, h^{R\pi_{1*}\xi})$. Soit $\nabla^{\Omega(Y,R\pi_{1*}\xi)}$ la connexion sur $\Omega(Y, R\pi_{1*}\xi)$ induite par $\nabla^{TY}, \nabla^{R\pi_{1*}\xi}$ définie en (2.3).

Pour $r \geq 1$, on pose

$$\text{(14.85)} \quad q_0 = p_1^{\perp}, \quad q_r = p_r - p_{r+1}.$$

Pour $r \geq 2$, soit $\widetilde{Q}_{r,T} : E_0 = E_r \oplus \oplus_{i=1}^r E_i^\perp \to E_0 = \widetilde{E}_{r,T} \oplus \oplus_{i=2}^r \widetilde{E}_{i,T}^\perp$ l'application telle que pour $(s_0, \cdots, s_r) \in E_r \oplus \oplus_{i=1}^r E_i^\perp$

$$\widetilde{Q}_{r,T}(s_0, \cdots, s_r) = \widetilde{p}_{r,T} s_0 + \Sigma_{i=2}^r \widetilde{p}_{i,T}^\perp s_i + \widetilde{p}_{2,T}^\perp s_1. \tag{14.86}$$

Alors $\widetilde{Q}_{r,T}$ est un isomorphisme de E_0 sur E_0. Soit $\widetilde{Q}_{r,T}^*$ l'adjoint de $\widetilde{Q}_{r,T}$. On pose

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{r,T} &= (\widetilde{Q}_{r,T}^* \widetilde{Q}_{r,T})^{1/2},\\ \widetilde{J}_{r,T} &= \widetilde{Q}_{r,T} \widetilde{R}_{r,T}^{-1}.\end{aligned} \tag{14.87}$$

Alors $\widetilde{J}_{r,T}$ est une isométrie de E_0 dans E_0. Soit

$$\widetilde{A}_{r,T}^2 = \widetilde{J}_{r,T}^{-1} A_{r,1,T}^2 \widetilde{J}_{r,T}. \tag{14.88}$$

Pour $0 \leq i, j \leq r-1$, on pose

$$\begin{aligned} F_{-1,-1,T} &= p_r \widetilde{A}_{r,T}^2 p_r, \quad & F_{-1,j,T} &= p_r \widetilde{A}_{r,T}^2 q_{r-j},\\ F_{i,-1,T} &= q_{r-i} \widetilde{A}_{r,T}^2 p_r, \quad & F_{i,j,T} &= q_{r-i} \widetilde{A}_{r,T}^2 q_{r-j}.\end{aligned} \tag{14.89}$$

On écrit $\widetilde{A}_{r,T}^2$ sous forme matricielle relativement au scindage $E_0 = E_r \oplus \oplus_{i=0}^{r-1} E_{r-i}^\perp$

$$\widetilde{A}_{r,T}^2 = [F_{i,j,T}]_{-1 \leq i,j \leq r-1}. \tag{14.90}$$

Par (5.28), (14.40) et (14.60), quand $T \to +\infty$, on a

$$F_{i,j,T} = T^{\alpha_{i,j}} (F_{i,j} + O(\tfrac{1}{T})). \tag{14.91}$$

avec $\alpha_{i,j} = \max\{i+1, j+1, 2(i+1)\delta_{i,j}\}$. De plus pour $0 \leq i, j \leq r-3$,

$$\begin{aligned}
F_{-1,-1} &= p_r D_r^2 p_r + p_r [D_r, \nabla^{E_r}] p_r + p_r {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z}),2} p_r,\\
F_{i,-1} &= q_{r-i} [D_{r-i}, \nabla^{E_{r-i}}] p_r,\\
F_{r-2,-1} &= q_2 [D^Y, \nabla^{\Omega(Y, R\pi_{1*}\xi)}] p_r,\\
F_{r-1,-1} &= q_1 [D^X, {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}] p_r,\\
F_{-1,j} &= p_r [D_{r-i}, \nabla^{E_{r-i}}] q_{r-i},\\
F_{-1,r-2} &= p_r [D^Y, \nabla^{\Omega(Y, R\pi_{1*}\xi)}] q_2,\\
F_{-1,r-1} &= p_r [D^X, {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi_{|Z})}] q_1,\\
F_{i,i} &= q_{r-i} D_{r-i}^2 q_{r-i},\\
F_{r-2,r-2} &= q_2 D^{Y,2} q_2,\\
F_{r-1,r-1} &= q_1 D^{X,2} q_1.
\end{aligned} \tag{14.92}$$

Par (14.26), (14.27) et (14.92), on a

$$\mathcal{D}_{r,1}^2 = F_{-1,-1} - \Sigma_{i=0}^{r-1} F_{-1,i} F_{i,i}^{-1} F_{i,-1}. \tag{14.93}$$

Cette dernière formule ne sera pas utilisée dans la suite.

Soit $E_{r,T}^{\perp}$ l'espace orthogonal à $\widetilde{E}_{r,T}$ dans E_0. Si A est un opérateur linéaire de E_0 dans E_0, on écrit A sous forme matricielle relativement au scindage $E_0 = \widetilde{E}_{r,T} \oplus E_{r,T}^{\perp}$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

tel que $A_1 = \widetilde{p}_{r,T} A \widetilde{p}_{r,T}$, $A_2 = \widetilde{p}_{r,T} A \widetilde{p}_{r,T}^{\perp}$, $\cdots$.

Par (5.31), (5.32), (14.26), (14.40), (14.60), quand $T \to +\infty$, on a

$$\tag{14.94} \begin{aligned} A_{r,1,T,1}^2 &= p_r D_r^2 p_r + p_r [D_r, \nabla^{E_r}] p_r + p_r {}^0\nabla^{\Omega(Z,\xi|_Z),2} p_r + O\Big(\frac{1}{T^\delta}\Big), \\ A_{r,1,T,2}^2 &= \widetilde{p}_{r,T}\Big[C_T(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} - \frac{1}{2\sqrt{2}T^{r-1}} c_T(T_{3,T}))C_T^{-1}, T^{r-1} A_T^{(0)}\Big]\widetilde{p}_{r,T}^{\perp} + O(1), \\ A_{r,1,T,3}^2 &= \widetilde{p}_{r,T}^{\perp}\Big[C_T(\nabla_T^{\Omega(Z,\xi|_Z)} - \frac{1}{2\sqrt{2}T^{r-1}} c_T(T_{3,T}))C_T^{-1}, T^{r-1} A_T^{(0)}\Big]\widetilde{p}_{r,T} + O(1), \\ A_{r,1,T,4}^2 &= T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2} + R_{r,1,T,4}. \end{aligned}$$

On note aussi $|\ \ |_{r,T,0}$ la norme $|\ \ |_0$ sur E_0^0. Pour $A \in L(E_0^m, E_0^{m'})$ $(m, m' \in \{-1,0,1\})$, on note $\|A\|_{r,T}^{m,m'}$ la norme de A associée à $|\ \ |_{r,T,m}$ et $|\ \ |_{r,T,m'}$.

Théorème 14.18. *Il existe δ, $C>0, T_0>0$ tels que pour tout $\lambda \in U_2$, $T \geq T_0, r \geq 2$,*

$$\tag{14.95} \Big\| A_{r,1,T,1}^2 + A_{r,1,T,2}^2 (\lambda - A_{r,1,T,4}^2)^{-1} A_{r,1,T,3}^2 - \widetilde{p}_{r,T} J_{r,T} \mathcal{D}_{r,1}^2 J_{r,T}^{-1} \widetilde{p}_{r,T} \Big\|_{r,T}^{1,-1} \leq \frac{C}{T^\delta}.$$

PREUVE: Par (14.38), (14.58), et en procédant comme en [**B4**, Théorème 9.22], pour $\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| \leq c_2$, on a

$$\tag{14.96} \begin{aligned} &\Big\|(\lambda - T^{r-1} A_{T,4}^{(0)})^{-1}\Big\|_{r,T}^{0,0} \leq \tfrac{C}{T}, \\ &\Big\|(\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1}\Big\|_{r,T}^{-1,0} \leq \tfrac{C}{T}, \\ &\Big\|(\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1}\Big\|_{r,T}^{0,1} \leq \tfrac{C}{T}, \\ &\Big\|(\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1}\Big\|_{r,T}^{-1,1} \leq C. \end{aligned}$$

De (14.57), (14.58), on tire que

$$\tag{14.97} \begin{aligned} &\Big\|A_{r,1,T,2}^2\Big\|_{r,T}^{1,-1} \leq C, \\ &\Big\|A_{r,1,T,3}^2\Big\|_{r,T}^{1,-1} \leq C, \\ &\Big\|R_{r,1,T,4}\Big\|_{r,T}^{1,-1} \leq \tfrac{C}{T}. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\tag{14.98} \begin{aligned} (\lambda - A_{r,1,T,4}^2)^{-1} &= (\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1} \\ &+ (\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1} \Sigma_{i=1}^{2\dim S} \Big(R_{r,1,T,4} (\lambda - T^{2(r-1)} A_{T,4}^{(0),2})^{-1}\Big)^i. \end{aligned}$$

De (14.96), (14.97) et (14.98), on tire que pour $r \geq 2, \lambda \in U_2$, $T \gg 1$, on a

$$
\begin{aligned}
&\left\|(\lambda - A^2_{r,1,T,4})^{-1}\right\|^{-1,1}_{r,T} \leq C,\\
(14.99) \qquad &\left\|(\lambda - A^2_{r,1,T,4})^{-1} - (\lambda - T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\right\|^{-1,1}_{r,T} \leq \frac{C}{T},\\
&\left\|(\lambda - T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1} + (T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\right\|^{-1,1}_{r,T} \leq \frac{C}{T}.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier, on note la connexion $C_T \nabla_T^{\Omega(Z,\xi_{|Z})} C_T^{-1}$ sur $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ par ∇_T. En utilisant (5.31), (5.32), (14.57) et (14.66), on a aussi

$$
\begin{aligned}
(14.100) \qquad &\left\|\left[C_T \frac{1}{2\sqrt{2}T^{r-1}} c_T(T_{3,T}) C_T^{-1}, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\right\|^{1,-1}_{r,T} \leq \frac{C}{T^{r-1}},\\
&\left\|\left[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\right\|^{1,-1}_{r,T} \leq C.
\end{aligned}
$$

D'après (14.26), (14.27), (14.94), (14.97), (14.99) et (14.100), pour montrer (14.95), il suffit de montrer que

$$
\begin{aligned}
(14.101) \qquad &\Big\|\widetilde{p}_{r,T}\left[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}\left[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\widetilde{p}_{r,T}\\
&\qquad -\widetilde{p}_{r,T}J_{r,T}p_r\nabla^{E_0}p^{\perp}_r\nabla^{E_0}p_rJ^{-1}_{r,T}\widetilde{p}_{r,T}\Big\|^{1,-1}_{r,T} \leq \frac{C}{T^{\delta}}.
\end{aligned}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
(14.102) \qquad &\widetilde{p}_{r,T}\left[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}\left[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T\right]\widetilde{p}_{r,T}\\
&= \widetilde{p}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}_{r,T}\\
&\quad +\widetilde{p}_{r,T}T^{r-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T]\widetilde{p}_{r,T}\\
&\quad +\widetilde{p}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{r-1}A^{(0)}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}_{r,T}T^{r-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}\\
&= \widetilde{p}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}\nabla_T\widetilde{p}_{r,T}\\
&\quad +\widetilde{p}_{r,T}T^{r-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}[\nabla_T, \widetilde{p}_{r,T}]\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{2(r-1)}A^{(0),2}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}[\nabla_T, T^{r-1}A^{(0)}_T]\widetilde{p}_{r,T}\\
&\quad +\widetilde{p}_{r,T}[\nabla_T, \widetilde{p}_{r,T}]\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}(T^{r-1}A^{(0)}_{T,4})^{-1}\widetilde{p}^{\perp}_{r,T}[\nabla_T, \widetilde{p}_{r,T}]\widetilde{p}_{r,T}T^{r-1}A^{(0)}_T\widetilde{p}_{r,T}.
\end{aligned}
$$

Par (5.31), (14.40), $[\nabla_T, \widetilde{p}_{r,T}]$ est un opérateur différentiel d'ordre 0 uniformément borné pour $T \gg 1$.

De (5.31), (14.40), (14.57), (14.60), (14.96), (14.100) et (14.102), on tire (14.101).

On a bien terminé la preuve du Théorème 14.18. ■

On rappelle que ψ_u est l'application de $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$ sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}S)$ définie en (5.54). Pour $2 \leq r \leq n = \dim Z$, $T \geq T_0$, on pose

$$
\begin{aligned}
F_{r,u,T} &= \frac{1}{2\pi i}\psi_u\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_{3,T^{2(r-1)},T}\int_{\Delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - A^2_{r,1,T})^{-1}d\lambda\right],\\
F_{r,u,\infty} &= \frac{1}{2\pi i}\psi_u\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_Z\int_{\Delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1}d\lambda\right],\\
(14.103) \quad G_{r,u,T} &= \frac{1}{2\pi i}\psi_u\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_{3,T^{2(r-1)},T}\int_{\delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - A^2_{r,1,T})^{-1}d\lambda\right] \quad \text{pour } r \geq 1,\\
G_{1,u,\infty} &= \frac{1}{2\pi i}\psi_u\varphi\mathrm{Tr}_s\left[(N_{2,1} + N_X)\int_{\delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - B^2_{2,1})^{-1}d\lambda\right],\\
G_{r,u,\infty} &= \frac{1}{2\pi i}\psi_u\varphi\mathrm{Tr}_s\left[N_Z\int_{\delta} e^{-u^2\lambda}(\lambda - \mathcal{D}^2_{r,1})^{-1}d\lambda\right].
\end{aligned}
$$

Alors pour $2 \leq r \leq n$

$$F_{r,u,\infty} + G_{r,u,\infty} = \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N_Z \exp(-\mathcal{D}^2_{r,u})\big]. \tag{14.104}$$

On a l'analogue de la Proposition 13.10.

Théorème 14.19. ***i)*** *Il existe $\delta > 0, C_1 > 0, C > 0, T_0 > 0$ tels que pour $u \geq 1, T \geq T_0, 2 \leq r \leq n$,*

$$|F_{r,u,T} - F_{r,u,\infty}| \leq \frac{C}{T^\delta} e^{-C_1 u}. \tag{14.105}$$

ii) *Il existe des formes $a_{r,i,T}, b_{n,i,T}$ $(T \in [T_0, +\infty], 1 \leq r \leq n, -2\dim S \leq i \leq 0)$, C^∞ sur S, telles que*

$$\begin{aligned} G_{r,u,\infty} = &\ -\Sigma_{i=-2\dim S}^{-1} a_{r,i,\infty} u^i + \mathrm{ch}'(E_{r+1}, h^{E_{r+1}}), \\ G_{n,u,T} = &\ \Sigma_{i=-2\dim S}^{-1} b_{n,i,T} u^i + \varphi \mathrm{Tr}_s\big[N_Z \exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi|_Z),2})\big]. \end{aligned} \tag{14.106}$$

Quand $u \to 0$, uniformément en $T \geq T_0$, on a

$$\begin{aligned} F_{r,u,T} = &\ \Sigma_{i=-2\dim S}^{0} a_{r,i,T} u^i + O(u) \quad \text{pour} \quad r \geq 2, \\ G_{1,u,T} = &\ -\Sigma_{i=-2\dim S}^{0} a_{1,i,T} u^i + O(u). \end{aligned} \tag{14.107}$$

iii) *On a*

$$a_{r,0,\infty} = \mathrm{ch}'(E_r, h^{E_r}) - \mathrm{ch}'(E_{r+1}, h^{E_{r+1}}), \quad \text{pour} \quad r \geq 2. \tag{14.108}$$

Il existe $\delta > 0$ tel que pour $1 \leq r \leq n$, quand $T \to +\infty$, on a

$$\begin{aligned} & a_{r,i,T} = a_{r,i,\infty} + O(\tfrac{1}{T^\delta}), \\ & b_{n,i,T} = -a_{n,i,\infty} + O(\tfrac{1}{T^\delta}) \quad \text{pour} \quad i < 0, \\ & b_{n,i,T} T^{-(n-1)i} + \Sigma_{r=2}^n a_{r,i,T} T^{-(r-1)i} = -a_{1,i,T} \quad \text{pour} \quad i < 0. \end{aligned} \tag{14.109}$$

PREUVE : **i)** En utilisant les Théorèmes 14.17 et 14.18 et en procédant comme en [**BL**, §11(p) et §13 (o)-(q)], on a (14.105).

ii) Comme à l'intérieur de δ', 0 est l'unique valeur propre possible des opérateurs $A^{(0),2}_{n,1,T}, D^2_r$, $D^{Y,2}$, pour $r \geq 2$, $u \in \mathbf{C}, |u| \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} G_{n,u,T} = &\ \frac{1}{2\pi i} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N_{3,T^{2(n-1)}u^2,T} \int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - A^2_{n,u,T})^{-1} d\lambda\Big], \\ G_{1,u,\infty} = &\ \frac{1}{2\pi i} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[(N_{2,u^2} + N_X) \int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - B^2_{2,u^2})^{-1} d\lambda\Big], \\ G_{r,u,\infty} = &\ \frac{1}{2\pi i} \varphi \mathrm{Tr}_s\Big[N_Z \int_\delta e^{-\lambda}(\lambda - \mathcal{D}^2_{r,u})^{-1} d\lambda\Big]. \end{aligned} \tag{14.110}$$

En utilisant (14.110) et en procédant comme en [**B4**, §9 (m) et (n)], on a (14.106).

iii) • Pour $T \in [T_0, +\infty]$, soient

$$f_{r,u,T} = \psi_u^{-1} F_{r,u,T}, \quad g_{r,u,T} = \psi_u^{-1} G_{r,u,T}. \tag{14.111}$$

Alors $f_{r,u,T}$ et $g_{r,u,T}$ sont des fonctions holomorphes en $u \in \mathbf{C}$.

En utilisant les Théorèmes 14.14- 14.18, et en procédant comme en [**BL**, §11(p) et §13 (o)-(q)], on sait qu'il existe aussi $C > 0, \delta > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbf{C}, |u| \leq 1$, $T \geq T_0$, on a

$$(14.112) \qquad \begin{aligned} |f_{r,u,T} - f_{r,u,\infty}| &\leq \frac{C}{T^\delta}, \\ |g_{r,u,T} - g_{r,u,\infty}| &\leq \frac{C}{T^\delta}. \end{aligned}$$

En particulier, quand $T \to +\infty$, les fonctions $\{f_{r,u,T}\}$, $\{g_{r,u,T}\}$ sont des fonctions holomorphes uniformément bornées en $\{u \in \mathbf{C}, |u| \leq 1\}$. Elles ont donc un développement en série uniforme en u au voisinage de $u = 0$. De (14.112), et de la formule de Cauchy, on tire que les coefficients de ces développements convergent quand $T \to +\infty$ à la vitesse $O(\frac{1}{T^\delta})$. De (14.111), on déduit le résultat correspondant pour les fonctions $F_{r,u,T}$, $G_{r,u,T}$ (qui sont elles-mêmes méromorphes en u). On a bien démontré (14.107) et les deux premières équations de (14.109).

- De (14.104), (14.106), (14.107), on tire (14.108).
- Par (14.37), pour $T \geq T_0$, on a

$$(14.113) \qquad \begin{aligned} G_{1,u,T} &= \Sigma_{r=2}^n \frac{1}{2\pi i} \psi_u \varphi \mathrm{Tr}_s \Big[N_{3,1,T} \int_{\frac{\Delta}{T^{2(r-1)}}} e^{-u^2\lambda} (\lambda - B_{3,1,T}^2)^{-1} d\lambda \Big] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \psi_u \varphi \mathrm{Tr}_s \Big[N_{3,1,T} \int_{\frac{\delta}{T^{2(n-1)}}} e^{-u^2\lambda} (\lambda - B_{3,1,T}^2)^{-1} d\lambda \Big] \\ &= \Sigma_{r=2}^n F_{r,T^{-r+1}u,T} + G_{n,T^{-(n-1)}u,T}. \end{aligned}$$

Par (14.106), (14.107) et (14.113), on a aussi la troisième équation de (14.109).

On a bien terminé la preuve du Théorème 14.19. ■

f) Preuve du Théorème 14.9.

On procède comme dans la preuve du Théorème 13.6.

En appliquant le Théorème 5.17, on a

$$(14.114) \qquad \begin{aligned} &\lim_{T \to +\infty} \int_1^{+\infty} 2\Big\{ \varphi \mathrm{Tr}_s \big[N_{3,u^2,T} \exp(-B_{3,u^2,T}^2) \big] - G_{1,u,T} \Big\} \frac{du}{u} \\ &= \int_1^{+\infty} 2\Big\{ \varphi \mathrm{Tr}_s \big[(N_{2,u^2} + N_X) \exp(-B_{2,u^2}^2) \big] - G_{1,u,\infty} \Big\} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 14.19 et (14.113), pour $T \geq T_0$, on a

$$(14.115) \qquad \begin{aligned} &\int_1^{+\infty} 2\Big\{ G_{1,u,T} - \varphi \mathrm{Tr}_s \big[N_Z \exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2}) \big] \Big\} \frac{du}{u} = \Sigma_{r=2}^n 2 \int_{T^{-(r-1)}}^{+\infty} F_{r,u,T} \frac{du}{u} \\ &\qquad + 2 \int_{T^{-(n-1)}}^{+\infty} \Big\{ G_{n,u,T} - \varphi \mathrm{Tr}_s \big[N_Z \exp(-\nabla_T^{H(Z,\xi_{|Z}),2}) \big] \Big\} \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

On décompose chaque intégrale $\int_{T^{-(r-1)}}^{+\infty}$ sous la forme $\int_{T^{-(r-1)}}^1 + \int_1^{+\infty}$. En sommant les termes $\int_1^{+\infty}$, on obtient un terme $Q_{1,T}$, et en sommant les termes $\int_{T^{-(r-1)}}^1$, on obtient un terme $Q_{2,T}$. Alors par le Théorème 14.19 et le théorème de convergence dominée, quand $T \to +\infty$, on a

$$
\begin{aligned}
Q_{1,T} \to Q_{1,\infty} = \ & \Sigma_{r=2}^{n} 2 \int_1^{+\infty} F_{r,u,\infty} \frac{du}{u} \\
& +2 \int_1^{+\infty} \Big(G_{n,u,\infty} - \mathrm{ch}'(E_{n+1}, h^{E_{n+1}}) \Big) \frac{du}{u}.
\end{aligned} \tag{14.116}
$$

En appliquant le Théorème 14.19, et le théorème de convergence dominée, quand $T \to +\infty$, on a

$$
\begin{aligned}
& Q_{2,T} - 2\Sigma_{r=2}^{n} (r-1) \Big[\mathrm{ch}'(E_r, h^{E_r}) - \mathrm{ch}'(E_{r+1}, h^{E_{r+1}}) \Big] \log T \\
& = 2\Sigma_{r=2}^{n} \int_{T^{-(r-1)}}^{1} \Big[F_{r,u,T} - \Sigma_{i=-2\dim S}^{0} a_{r,i,T} u^i \Big] \frac{du}{u} + O(\frac{1}{T^{\delta}} \log T) \\
& +2\Sigma_{i=-2\dim S}^{-1} \frac{1}{i} \Big[(b_{n,i,T} + \Sigma_{r=2}^{n} a_{r,i,T}) - (b_{n,i,T} T^{-(n-1)i} + \Sigma_{r=2}^{n} a_{r,i,T} T^{-(r-1)i}) \Big] \\
& \to Q_{2,\infty} = 2\Sigma_{r=2}^{n} \int_0^1 \Big(F_{r,u,\infty} - \Sigma_{i=-2\dim S}^{0} a_{r,i,\infty} u^i \Big) \frac{du}{u} \\
& \qquad +2\Sigma_{r=1}^{n-1} \Sigma_{i=-2\dim S}^{-1} \frac{1}{i} a_{r,i,\infty}.
\end{aligned} \tag{14.117}
$$

Par (14.104) et (14.106), on a

$$
\begin{aligned}
Q_{2,\infty} = \ & 2\Sigma_{r=2}^{n} \int_0^1 \Big\{ \varphi \mathrm{Tr}_s [N \exp(-\mathcal{D}_{r,u}^2)] - \mathrm{ch}'(E_r, h^{E_r}) \Big\} \frac{du}{u} \\
& + \Sigma_{r=1}^{n-1} \int_1^{+\infty} 2 \Big(G_{r,u,\infty} - \mathrm{ch}'(E_{r+1}, h^{E_{r+1}}) \Big) \frac{du}{u}.
\end{aligned} \tag{14.118}
$$

D'après (14.104), (14.114), (14.116) et (14.118), on a le Théorème 14.9. ∎

g) Preuve du Théorème 14.10.

On rappelle que P_T est la projection orthogonale de E_0 sur $\mathrm{Ker} D_T^Z$ correspondant à g_T^{TZ}, h^{ξ}. Soit $\widetilde{P}_T$ la projection orthogonale de E_0 sur $\widetilde{E}_T = \mathrm{Ker} A_T^{(0)}$ associée à $\langle \ \rangle_0$.

D'après [BerB, (6.63)], pour $\alpha, \alpha' \in E_0$, on a

$$
\langle P_T \alpha, P_T \alpha' \rangle_T = \frac{1}{T^{2\dim X}} \Big\langle \widetilde{P}_T T^{N_X} B_T \alpha, \widetilde{P}_T T^{N_X} B_T \alpha' \Big\rangle_0 . \tag{14.119}
$$

Par (14.37) et (14.38), on a

$$
\widetilde{P}_T = \widetilde{p}_{n+1,T}. \tag{14.120}
$$

En utilisant les Propositions 13.11 et 14.12, et en procédant comme dans la preuve du Théorème 13.7, on a le Théorème 14.10. ∎

References

[ABoP] Atiyah M.F., Bott R. et Patodi.V.K., On the heat equation and the Index Theorem, *Invent.Math.* 19 (1973), 279-330.

[BaFM] Baum P., Fulton W., MacPherson R., Riemann-Roch for singular varietes, *Publ. Math. IHES.*, Vol. 45 (1975), 101-146.

[BeGeV] Berline N., Getzler E. et Vergne M., *Heat kernels and the Dirac operator*, Grundl. Math. Wiss. 298, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1992.

[BerB] Berthomieu A., Bismut J.-M., Quillen metric and higher analytic torsion forms. *J. Reine Angew. Math* 457, 1994,85-184.

[B1] Bismut J.-M., The index Theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, *Invent.Math.*,83 (1986), 91-151.

[B2] Bismut J.-M., Superconnection currents and complex immersions, *Invent. Math.* 99 (1990), 59-113.

[B3] Bismut J.-M., Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class, *J.A.M.S.* 3 (1990), 159-256.

[B4] Bismut J.-M., Families of immersions, and higher analytic torsion, Preprint, Orsay,96-14.

[B5] Bismut J.-M., Familles d'immersions et formes de torsion analytique en degré supérieur. *C.R.A.S. Paris,* 320, série I (1995), 969-974.

[BCh] Bismut J.-M., Cheeger J., η-invariants and their adiabatic limits, *J.A.M.S.*, 2 (1989), 33-70.

[BGS1] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.I, *Comm.Math. Phys.* 115 (1988), 49-78.

[BGS2] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.II, *Comm.Math. Phys.* 115 (1988), 79-126.

[BGS3] Bismut J.-M., Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and holomorphic determinant bundles.III, *Comm.Math. Phys.* 115 (1988), 301-351.

[BKö] Bismut J.-M., Köhler K., Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas. *J. of. Alg. Geom.* 1 (1992), 647-684.

[BL] Bismut J.-M. et Lebeau G., Complex immersions and Quillen metrics. *Publ. Math. IHES.*, Vol. 74, 1991.

[BS] Borel A., Serre J.P., Le théorème de Riemann-Roch, *Bull.Soc.Math. France*, 86 (1958), 97-136.

[CE] Cartan H. et Eilenberg S., *Homological Algebra*, Princeton 1956.

[CP] Charazain J., Piriou A., *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles,* Paris: Gauthier-villars 1981.

[D] Dai X., Adiabatic limits, non multiplicativity of signature and Leray spectal sequence, *J.A.M.S.* 4(1991), 265-321.

[F] Faltings G., *Lectures on the arithmetic Riemann-Roch theorem.* Ann. of mathematical studies. Princeton. Princeton University Press 1992.

[Ge] Getzler E., A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem, *Topology*, 25 (1986), 111-117.

[Go] Godement R., *Théorie des faisceaux*, Hermann. Paris, 1958.

[GrH] Griffiths P., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry,* New-York,Wiley 1978.

[Grot] Grothendieck A., Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* 9, 1957, 119-221.

[GS1] Gillet H., Soulé C., Arithmetic Intersection Theory, *Publ. Math. IHES.*, Vol. 72, 1990, 93-174.

[GS2] Gillet H., Soulé C., Characteristic classes of algebraic vector bundles with Hermitian metric, I,II, *Ann. of Math.*,131 (1990), 163-203, 205 -238.

[GS3] Gillet H., Soulé C., Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology* 30 (1991), 21-54.

[GS4] Gillet H., Soulé C., An arithmetic Riemann-Roch Theorem, *Invent.Math.*, 110(1992), 473-543.

[H] Hartshorne R., *Algebraic Geometry,* GTM 52, Springer, 1977.

[KM] Knudsen P.F., Mumford D., The projectivity of the moduli space of stable curves, I, Preliminaires on "det" and "div", *Math. Scand.* 39 (1976), 19-55.

[Ma] Ma Xiaonan., Formes de torsion analytique et familles de submersions, *C.R.A.S. Paris*, 324, série I (1997), 205-210.

[M] Malgrange B., Division des distributions: Exposé au Séminaire Bourbaki *n°* 203 (1960).

[MKS] McKean H., Singer I.M., Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, *J. Diff. Geom.* 1(1967), 43-69.

[Q1] Quillen D., Higher K-theories:I. *SLNM* 341, Springer, Berlin (1973), 85-147.

[Q2] Quillen D., Superconnections and the Chern character, *Topology*, 24 (1986), 89-95.

[RS] Ray D.B., Singer I.M., Analytic torsion for complex manifolds, *Ann. of Math.* 98 (1973), 154-177.

[T] Taylor M., *Pseudodifferential operators*, Princeton Univ Press, Princeton 1981.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 205-210, 1997
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Formes de torsion analytique et familles de submersions

Xiaonan MA

Université Paris-Sud, URA 1169 du CNRS,
Département de Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay CEDEX, France.
E-mail: xiaonan@matups.matups.fr

Résumé. Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes, de fibre compacte. Soit ξ un fibré holomorphe sur W. Dans cette Note, on annonce un résultat qui exprime une combinaison des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2 et $\pi_2 \circ \pi_1$ à l'aide de classes de Bott-Chern. Ce résultat étend une formule de Berthomieu-Bismut à une situation en famille.

Analytic torsion forms and families of submersions

Abstract. *Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W. In this Note, we announce a result which relates a combination of the analytic torsion forms associated to π_1, π_2 and $\pi_2 \circ \pi_1$ in terms of Bott-Chern classes. This result extends to a relative situation a result by Berthomieu-Bismut on the behaviour of submersion of Quillen metrics.*

Abridged English Version

The purpose of this Note is to extend to a relative situation a result of Berthomieu-Bismut [1] on the behaviour of submersions of Quillen metrics.

Let $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) be a holomorphic submersion of complex varieties with compact fibre X (resp. Y). Let $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. Then $\pi_3 : W \to S$ is a holomorphic submersion with compact fibre Z. Let ξ be a holomorphic vector bundle on W.

One assumes that the $R^i\pi_{1*}\xi$, $R^i\pi_{3*}\xi$, $R^j\pi_{2*}R^i\pi_{1*}\xi$ are locally free.

Let ω^V(resp. ω^W) be a real closed (1,1)-form on V(resp. W), which induces a metric g^{TY} (resp. g^{TZ}) on the relative tangent bundle TY (resp. TZ). Let g^{TX} be the metric on TX induced by ω^W. Let h^ξ be a Hermitian metric on ξ.

Note présentée par Jean-Michel Bismut.

Let $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ denote the L_2 metric on $H(Z,\xi_{|Z}) = R^\bullet\pi_{3*}\xi$ which one obtains by using the Hodge theory of the fibres Z. Also, we denote by $h^{R\pi_{1*}\xi}$ (resp. h^{E_2}) the L_2 metric on $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ (resp. $E_2 = R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$) associated with g^{TX}, h^ξ (resp. $g^{TY}, h^{R\pi_{1*}\xi}$).

Let P^S be the vector space of real smooth forms on S, which are sums of forms of type (p,p). Let $P^{S,0}$ be the vector space of the forms $\alpha \in P^S$ such that there exist smooth forms β, γ on S with $\alpha = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$.

Let $T_3(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W, h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$) be the analytic torsion forms of Bismut-Köhler [6] on S (resp. V, resp. S) associated with (π_3, g^{TW}, h^ξ) (resp. (π_1, g^{TW}, h^ξ), resp. $(\pi_2, g^{TV}, h^{R\pi_{1*}\xi})$).

On W, we have the exact sequence of holomorphic Hermitian vector bundles

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^*TY \to 0.$$

Let $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})$ be the Bott-Chern class constructed in [5].

For $s \in S$, let $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ be the Leray spectral sequence [11] of the fibration $\pi_1 : Z_s \to Y_s$.

We construct the Bott-Chern class $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ under one of the two following assumptions:

(i) The E_r $(r \geq 2)$ are locally free,

(ii) π_1 is projective and V is a projective manifold.

THEOREM 0. – *The following identity holds*

$$\begin{aligned} T_3(\omega^W, h^\xi) =& T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) \\ &+ \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \\ &- \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{in } P^S/P^{S,0}. \end{aligned}$$

1. Introduction

Soit $\pi : Z \to Y$ une submersion holomorphe de variétés compactes complexes de fibre X. Soit ξ un fibré holomorphe sur Z. Soit $\lambda(\xi)$ l'inverse du déterminant de la cohomologie de ξ. Supposons que, pour $0 \leq k \leq \dim X$, $R^k\pi_*\xi$ est localement libre. Soit $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$ la droite complexe

$$\lambda(R^\bullet\pi_*\xi) = \bigotimes_{k=0}^{\dim X} (\lambda(R^k\pi_*\xi))^{(-1)^k}. \tag{1}$$

Alors, par la théorie de la suite spectrale sur le complexe de Dolbeault, $\lambda(\xi) \simeq \lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$.

Soient g^{TZ}, g^{TY} des métriques kählériennes sur TZ, TY. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ. Soit $h^{R^\bullet\pi_*\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_*\xi$ associée à g^{TZ}, h^ξ. Soient $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$ et $\| \ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)}$ les métriques de Quillen sur les droites $\lambda(\xi)$ et $\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)$. Bismut et Köhler [6] ont construit des formes de torsion analytique sur Y qui généralisent en degré arbitraire la torsion de Ray-Singer [14], et ils ont montré qu'elles vérifient des formules d'anomalie, qui les rendent « naturelles » en théorie d'Arakelov. Dans [1], Bismut et Berthomieu ont calculé une formule explicite pour $\log(\| \ \|_{\lambda(\xi)}/\| \ \|_{\lambda(R^\bullet\pi_*\xi)})^2$ à l'aide de classes de Bott-Chern et des formes de torsion analytique de [6].

L'objet de cette Note est d'annoncer une extension de [1] en situation relative. En effet, on considère des submersions $\pi_1 : W \to V$, $\pi_2 : V \to S$. On pose $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1$. On donne une formule exprimant en combinaison naturelle des formes de torsion analytique associées à π_1, π_2, π_3 à l'aide de classes de Bott-Chern [5].

La preuve de cette formule repose sur des techniques de limites adiabatiques de Bismut-Cheeger [4] et sur la suite spectrale de Leray. La stratégie générale de la preuve est identique à la preuve d'un résultat de Berthomieu-Bismut [1].

Les preuves des résultats annoncés dans cette Note sont développées dans [12].

2. Une famille de submersions complexes

Soit $\pi_1 : W \to V$ (resp. $\pi_2 : V \to S$) une submersion holomorphe de variétés complexes de fibre compacte X (resp. Y). Alors $\pi_3 = \pi_2 \circ \pi_1 : W \to S$ est une submersion holomorphe de fibre compacte Z. On a donc

(2)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"] & W \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ & Y \arrow[r] & V \arrow[r, "\pi_2"'] & S. \end{tikzcd}$$

Soit ξ un fibré holomorphe sur W.

Dans toute la suite, on suppose que $R^\bullet\pi_{1*}\xi$, $R^\bullet\pi_{3*}\xi$ et $R^\bullet\pi_{2*}R^\bullet\pi_{1*}\xi$ sont localement libres. Soit $H(Z, \xi_{|Z})$ la cohomologie de $\xi_{|Z}$. Alors $H(Z, \xi_{|Z})$ est un fibré holomorphe Z-gradué sur S. Plus exactement $R^\bullet\pi_{3*}\xi = H(Z, \xi_{|Z})$.

On suppose désormais que la fibration $\pi_2 : V \to S$ (resp. $\pi_3 : W \to S$) est kählérienne au sens de [5]. Plus précisément, soit ω^V (resp. ω^W) une $(1,1)$ forme réelle fermée sur V (resp. W), dont la restriction à chaque fibre Y (resp. Z) définit une métrique hermitienne g^{TY} (resp. g^{TZ}) sur le fibré tangent relatif TY (resp. TZ). Soit g^{TX} la métrique hermitienne sur TX induite par ω^W. Soit h^ξ une métrique hermitienne sur ξ.

Pour $s \in S$, soit $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ le complexe de Dolbeault relatif. Soit $*^{TZ}$ l'opérateur de Hodge associé à g^{TZ} sur $\Lambda(T^*_{\mathbf{R}}Z)$. On munit $\Omega(Z, \xi_{|Z})$ de la métrique hermitienne L_2 normalisée

(3)
$$\langle s, s' \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\dim Z} \int_Z \langle s, *^{TZ} s' \rangle_{h^\xi}.$$

Par identification de $H(Z, \xi_{|Z})$ aux éléments harmoniques dans le complexe $\Omega(Z, \xi_{|Z})$, on note $h^{H(Z,\xi_{|Z})}$ la métrique L_2 associée sur $H(Z, \xi_{|Z})$. De même, on désigne par $h^{R\pi_{1*}\xi}$ la métrique L_2 sur $R^\bullet\pi_{1*}\xi$ associée à g^{TX}, h^ξ.

Soit P^S l'espace des formes réelles C^∞ sur S qui sont la somme de formes de type (p,p). Soit $P^{S,0}$ l'espace des $\gamma \in P^S$, qui s'écrivent $\gamma = \partial\beta + \overline{\partial}\gamma$, où β et γ sont C^∞ sur S.

Si K un fibré holomorphe avec métrique g^K et si Q est un polynôme caractéristique, on désigne par $Q(K, g^K) \in P^S$ la forme de Chern-Weil associée à la courbure de la connexion holomorphe hermitienne sur K.

Soit $T_3(\omega^W, h^\xi)$ (resp. $T_1(\omega^W, h^\xi)$, resp. $T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$) les formes de torsion analytique construites dans Bismut-Köhler [6] sur S (resp. V, resp. S) associées à (π_3, ω^W, h^ξ) (resp. (π_1, ω^W, h^ξ), resp. $(\pi_2, \omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi})$). Les formes T_3 vérifient l'équation

(4)
$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i} T_3(\omega^W, h^\xi) = \mathrm{ch}(H(Z, \xi_{|Z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \int_Z \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ})\, \mathrm{ch}(\xi, g^\xi)$$

et les formes T_1 et T_2 vérifient des équations analogues. Dans [6], on a établi des formules d'anomalie pour ces formes qui les rendent potentiellement compatibles au formalisme d'image directe en théorie d'Arakelov de Gillet et Soulé [10].

On considère la suite exacte de fibrés holomorphes hermitiens sur W

$$0 \to TX \to TZ \to \pi_1^* TY \to 0. \tag{5}$$

Soit $\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) \in P^W/P^{W,0}$ la classe de Bott-Chern de [5] telle que

$$\frac{\overline{\partial}\partial}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY}) = \mathrm{Td}(TZ, g^{TZ}) - \pi_1^*(\mathrm{Td}(TY, g^{TY}))\,\mathrm{Td}(TX, g^{TX}). \tag{6}$$

3. Définition de la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z, \xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$

On montre tout d'abord que pour $s \in S$, le complexe de Dolbeault $\Omega(Z_s, \xi_{|Z_s})$ muni d'une filtration convenable calcule la suite spectrale de Leray $(E_{r,s}, d_{r,s})$ $(r \geq 2)$ au sens de Grothendieck [11]. Comme dans [1], on construit la métrique $h^{E_{r,s}}$ sur $E_{r,s}$ associée à g^{TZ}, g^{TY}, h^{ξ}.

Soit (E, v) (avec $E = \bigoplus_{i=0}^m E^i$) un complexe de fibrés holomorphes sur S. Pour $s \in S$, on note $H_s(E)$ la cohomologie du complexe $(E, v)_s$. On suppose que le rang de $H_s^i(E)$ est localement constant. Ainsi $H(E)$ est un fibré holomorphe Z-gradué sur S. Soit h^{E^i} (resp. $h^{H(E)}$) une métrique hermitienne sur E^i (resp. $H(E)$). En imitant [5] et [6], on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) \in P^S/P^{S,0}$ telle que

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E, H(E), h^E, h^{H(E)}) = \mathrm{ch}(E, h^E) - \mathrm{ch}(H(E), h^{H(E)}). \tag{7}$$

Soit $F = F^0 \supset \ldots \supset F^m = 0$ une filtration de fibrés holomorphes sur S. Soit $\mathrm{Gr}^i F = F^i/F^{i+1}$. Soit h^F (resp. $h^{\mathrm{Gr}\, F}$) une métrique hermitienne sur F (resp. Gr F). De même, on peut construire une classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\, F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}) \in P^S/P^{S,0}$ qui vérifie

$$\frac{\partial\overline{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(F,\ \mathrm{Gr}\, F,\ h^F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}) = \mathrm{ch}(F,\ h^F) - \mathrm{ch}(\mathrm{Gr}\, F,\ h^{\mathrm{Gr}\, F}). \tag{8}$$

PROPOSITION 1. – *Soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}^{p,q})$ $(0 \leq p, q \leq n)$ un bicomplexe de fibrés holomorphes hermitiens sur S. Soit $H^i(\mathcal{E})$ la cohomologie de E de degré i. Soit $(\mathcal{E}_r, d_r)$ la suite spectrale induite par la filtration $F^p\mathcal{E} = \bigoplus_{p' \geq p} \mathcal{E}^{p',\bullet}$. On suppose que pour $p, q, r \geq 0$, le rang des fibres $\mathcal{E}_r^{p,q}$ est localement constant. Soit $h^{\mathcal{E}_r}$ (resp. $h^{H(\mathcal{E})}$) la métrique sur $\mathcal{E}_r$ (resp. $H(\mathcal{E})$) induite par $h^{\mathcal{E}}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}, H(\mathcal{E}), h^{\mathcal{E}}, h^{H(\mathcal{E})}) = &\sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}, h^{\mathcal{E}_i}, h^{\mathcal{E}_{i+1}}) \\ &- \widetilde{\mathrm{ch}}(H(\mathcal{E}), \mathcal{E}_\infty, h^{H(\mathcal{E})}, h^{\mathcal{E}_\infty}) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.\end{aligned} \tag{9}$$

Dans la suite, on définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),\ h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ dans les trois cas suivants :

(i) On suppose que le fibré holomorphe ξ est π_{1*} et π_{3*} acyclique.

Alors $E_2 = H(Z, \xi_{|Z})$. Par la construction de [5], la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2,\ H(Z, \xi_{|Z}),\ h^{E_2},\ h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ est bien définie.

(ii) En toute généralité, si le rang de $E_r (r \geq 2)$ est localement constant sur S, on pose :

$$(10)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \sum_{i=2}^{\infty} \widetilde{\mathrm{ch}}(E_i, E_{i+1}, h^{E_i}, h^{E_{i+1}}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(H(Z,\xi_{|Z}), E_\infty, h^{H(Z,\xi_{|Z})}, h^{E_\infty}).$$

(iii) On suppose que l'application π_1 est projective [5], p. 337, et que V est une variété projective. Soit $n = \dim Z$.

Soit $(\xi^i)_{0\leq i\leq n}$ une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de fibrés holomorphes de ξ sur W, et $F = (F^{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ une résolution π_{2*} acyclique de fibrés holomorphes du complexe $(R^0\pi_{1*}\xi^i)$ au sens de [8], chap. XVII. Si on filtre le bicomplexe $E(F) = R^0\pi_{2*}F$ par $F^pE(F) = \bigoplus_{p'\geq p} R^0\pi_{2*}F^{\bullet,p'}$, alors la suite spectrale associée $(E_r(F), d_r)$ calcule la suite spectrale de Leray (E_r, d_r) (à partir de $r = 2$).

On se donne des métriques hermitiennes $h^{E^{p,q}(F)}$ sur $E^{p,q}(F) = R^0\pi_{2*}F^{p,q}$.

DÉFINITION 2. – On définit la classe de Bott-Chern $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) \in P^S/P^{S,0}$ de la manière suivante

$$(11)\qquad \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), H(E(F)), h^{E(F)}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \widetilde{\mathrm{ch}}(E(F), E_2(F), h^{E(F)}, h^{E_2}).$$

PROPOSITION 3. – *La classe* $\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})})$ *ne dépend pas du choix des résolutions et des métriques. De plus, on a*

$$(12)\qquad \frac{\partial\bar{\partial}}{2\pi i}\widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) = \mathrm{ch}(E_2, h^{E_2}) - \mathrm{ch}(H(Z,\xi_{|z}), h^{H(Z,\xi_{|Z})}).$$

On vérifie, sous les hypothèses de (iii), la compatibilité de notre construction à (ii).

4. La fonctorialité des formes de torsion analytique

On énonce maintenant le résultat principal de cette Note, qui étend en degré arbitraire un théorème de Berthomieu-Bismut [1] sur les métriques de Quillen [5]. Cet énoncé s'applique dans les trois cas précédents.

THÉORÈME 4. – *On a l'identité*

$$(13)\qquad T_3(\omega^W, h^\xi) = T_2(\omega^V, h^{R\pi_{1*}\xi}) + \int_Y \mathrm{Td}(TY, g^{TY}) T_1(\omega^W, h^\xi) + \widetilde{\mathrm{ch}}(E_2, H(Z,\xi_{|Z}), h^{E_2}, h^{H(Z,\xi_{|Z})}) - \int_Z \widetilde{\mathrm{Td}}(TZ, TY, g^{TZ}, g^{TY})\,\mathrm{ch}(\xi, h^\xi) \quad \text{dans } P^S/P^{S,0}.$$

5. Principe de la preuve du théorème 4

Notons que les formules d'anomalie de [6] montrent qu'il suffit de montrer le théorème 4 pour un seul choix de $(1,1)$-formes ω^W, ω^V.

Dans la preuve de [12], dans les cas (i) et (ii), on reprend la démarche générale décrite dans Berthomieu-Bismut [1], mais naturellement, les objets considérés sont maintenant des formes sur S de degré pair arbitraire.

Le schéma général de la preuve de [12] consiste à utiliser des techniques de limites adiabatiques en remplaçant $\omega^W = \widetilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V$ par $\frac{1}{T^2}\widetilde{\omega}^W + \pi_1^* \omega^V$ (avec $T \to +\infty$).

Il est clair que dans [12], les techniques d'indice local de [1] doivent être remplacées par des techniques d'indice relatif local [2].

Par rapport à [1], une difficulté générale tient au fait que les formes de superconnexion sur S, qui dépendent d'un paramètre u, ne convergent quand $u \to +\infty$ qu'à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{u}}$, alors que dans [1], la vitesse de convergence était e^{-cu} $(c > 0)$.

Dans les trois cas, la preuve du cas (i) est essentielle. Dans le cas (ii), il y a une difficulté qui tient au fait qu'il y a des petites valeurs propres au sens de [9].

Enfin, pour terminer la preuve dans le cas (iii), on appliquera le théorème 4, cas (i) au complexe $(\xi^\bullet, v)$ qui est une résolution π_{1*} et π_{3*} acyclique de ξ.

Remerciements. Je tiens à remercier le Professeur J.-M. Bismut de m'avoir proposé ce sujet, et pour d'utiles discussions.

Note remise le 16 septembre 1996, acceptée le 30 septembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Berthomieu A. et Bismut J.M., 1994**. Quillen metrics and higher analytic torsion forms, *J. Reine Angew. Math.*, 457, p. 85-184.
[2] **Bismut J.-M., 1986**. The index theorems for families of Dirac operators : two heat equation proofs, *Invent. Math.*, 85, p. 91-151.
[3] **Bismut J.-M.** Families of immersions, and higher analytic torsion, *Preprint*, Orsay, 96-14.
[4] **Bismut J.-M. et Cheeger J., 1989**. η-invariant and their adiabatic limits. *J. Amer. Math. Soc.*, 2, p. 33-70.
[5] **Bismut J.-M., Gillet H. et Soulé C., 1988**. Analytic torsion and holomorphic determinant bundles, *Comm. Math. Phys.*, 115, p. 49-78, 79-126, 301-351.
[6] **Bismut J.-M. et Köhler K., 1992**. Higher analytic torsion forms and anomaly formulas, *J. Algebraic Geom.*, 1, p. 647-684.
[7] **Bismut J.-M. et Lebeau G., 1991**. Complex immersions and Quillen metric, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 74, p. 1-297.
[8] **Cartan H. et Eilenberg S., 1956**. *Homological Algebra*, Princeton.
[9] **Dai X., 1991**. Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signature, and Leray spectral sequence, *J. Amer. Math. Soc.*, 4, p. 265-321.
[10] **Gillet H. et Soulé C., 1991**. Analytic torsion and the arithmetic Todd genus, *Topology*, 30, p. 21-54.
[11] **Grothendieck A., 1957**. Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9, p. 119-221.
[12] **Ma X.** Formes de torsion analytique et familles de submersions (à paraître).
[13] **Quillen D.** Superconnections and the Chern character, *Topology*, 24, p. 89-95.
[14] **Ray D. B. et Singer I. M., 1971**. R-torsion and the Laplacien on Riemannian manifolds, *Adv. in Math.*, 7, p. 145-210.