THÈSES D'ORSAY

AHMED ABBES

# Théorie d'Arakelov et courbes modulaires

*Thèses d'Orsay*, 1995

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1995__0399__P0_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016*
*et diffusée dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*ORSAY*
*N° D'ORDRE :*

# UNIVERSITÉ DE PARIS–SUD
# U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée

Pour obtenir

## Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES
## DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY
### SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

Par

**Ahmed ABBES**

X52459

UNIVERSITE PARIS SUD
BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE
ORSAY

SUJET : THÉORIE D'ARAKELOV ET COURBES MODULAIRES

Soutenue le 12 Juin 1995 devant la commission d'examen

| | | |
|---|---|---|
| Mme | Renée ELKIK | Présidente |
| M. | Laurent CLOZEL | |
| M. | Bas EDIXHOVEN | |
| M. | Lucien SZPIRO | |
| M. | Shouwu ZHANG | |

*à mes parents,*

## Remerciements

Je voudrais en premier lieu exprimer ma profonde gratitude à Lucien Szpiro qui a dirigé mon travail de recherche depuis quatre ans. Cette thèse, imprégnée de son enthousiasme et de sa philosophie, n'aurait pu voir le jour sans son soutient, ses encouragements et sa patience. Je suis particulièrement sensible à la qualité des relations qu'il a su instaurer au sein de son équipe et à l'esprit de liberté avec lequel il la dirige.

Renée Elkik me fait l'honneur de présider le jury, je lui exprime mes vifs remerciements.

Mes remerciements s'adressent également à Laurent Clozel qui a accepté de faire partie du jury ainsi qu'à Bas Edixhoven et Shouwu Zhang qui ont en outre rempli la tache ingrate d'écrire des rapports sur cette thèse. Je tiens à leurs témoigner ma reconnaissance pour l'aide et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je voudrais aussi exprimer ma profonde gratitude à Michel Raynaud pour son aide décisive dans l'élaboration de la dernière partie de ce travail (article écrit conjointement avec Emmanuel Ullmo) et pour la permission qu'il nous a accordé de publier une lettre adressée à J. Oesterlé et J.-F. Mestre.

Une grande partie de ce travail a été réalisée conjointement avec Emmanuel Ullmo. J'ai beaucoup appris de lui. Ma conception des mathématiques a beaucoup évolué depuis que nous travaillons ensemble, ma conception du monde aussi. J'ai surtout trouvé en lui un grand ami à qui je voudrais aujourd'hui exprimer toute ma reconnaissance et mon estime.

La première partie de cette thèse est un article écrit conjointement avec Thierry Bouche. Je tiens à le remercier pour sa coopération et pour l'intérêt qu'il a porté à ma question. Mes remerciements vont aussi à Jean-Pierre Demailly qui nous a mis en contact pour son aide et pour son hospitalité en Décembre 93 à l'Institut Fourier de Grenoble.

J'adresse mes vifs remerciements à mes amis Carlo Gasbarri et Marco Garuti qui m'ont beaucoup appris depuis notre D.E.A. et qui m'ont fait partager une conception très enthousiaste et très italienne de la géométrie algébrique. Je voudrais enfin exprimer mon amitié et ma reconnaissance à deux grands amis, Fathi et Fouad Namouni qui m'ont beaucoup soutenu. Fathi m'a appris le LaTeX, il a même tapé une partie de ce travail.

# Théorie d'Arakelov et Courbes Modulaires

Ahmed Abbes

Résumé : Cette thèse est constituée de trois parties indépendantes.

1) Le théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" (un travail en commun avec T. Bouche) : On prouve un analogue "arithmétique" du théorème de Hilbert–Samuel algébrique et on en déduit un critère d'existence de sections effectives au sens d'Arakelov. Notre approche est directe et ne passe pas par le théorème de Riemann–Roch arithmétique prouvé par Gillet et Soulé.

2) Théorie d'Arakelov sur les courbes modulaires $X_0(N)$ (un travail en commun avec E. Ullmo) : On désigne par $N$ un entier sans facteurs carrés. Dans la première partie, on borne supérieurement l'auto–intersection du dualisant relatif de $X_0(N)$ en fonction du niveau $N$ et du terme constant en 1 de la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$. Dans la seconde partie, on borne la norme sup d'une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$. On en déduit une comparaison en fonction de $N$ des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$. On donne aussi une application aux courbes elliptiques de Weil fortes.

3) Conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires (un travail en commun avec E. Ullmo) : Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte semi–stable sur $\mathbb{Q}$ et $c_E$ sa constante de Manin. On montre que $c_E = 1$ si le conducteur de $E$ est impair.

Abstract : This thesis is composed of three independent parts.

1) "Arithmetic" Hilbert–Samuel theorem (joint work with T. Bouche) : We prove an "arithmetic" version of the Hilbert–Samuel theorem and we deduce a criterion for the existence of Arakelov effective sections. Our direct proof doesn't use the arithmetic Riemann–Roch theorem proved by Gillet and Soulé.

2) Arakelov theory on modular curves $X_0(N)$ (joint work with E. Ullmo) : Let $N$ be a square free integer. In the first part, we give un upper bound of the self–intersection of the dualizing sheaf on $X_0(N)$. It depends upon the level $N$ and the constant term at 1 of the logarithmic derivative of the Selberg Zeta function for $\Gamma_0(N)$. In the second part, we bound the sup norm of a newform for $\Gamma_0(N)$. We deduce a comparison depending on the level $N$ between the Arakelov and the Poincaré metrics on $X_0(N)$. We give also an application to strong Weil's elliptic curves.

3) Manin's conjecture for modular elliptic curves (joint work with E. Ullmo) : Let $E$ be a semi–stable strong weil's elliptic curve and $c_E$ its Manin constant. We prove that $c_E = 1$ if the conductor of $E$ is odd.

Mots–Clés : Théorie d'Arakelov, Intersection arithmétique, Courbes elliptiques, Courbes modulaires, Théorie spectrale, Formule de trace de Selberg, Congruences des formes modulaires

# Table des matières


**I Introduction générale** **3**

1 Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" . . . . . 3

2 Théorie d'Arakelov sur $X_0(N)$ . . . . . 5

3 Conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires . . . . . 7

Bibliographie . . . . . 9

**II Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique"** **11**

1 Introduction . . . . . 11

2 Volumes additifs . . . . . 13

3 Estimation à l'infini . . . . . 15

4 Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" . . . . . 22

5 Comparaison avec les théories d'intersection . . . . . 28

5.1 Cas d'une surface arithmétique . . . . . 28

5.2 Cas général . . . . . 30

Bibliographie . . . . . 33

**III Auto–intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$** **35**

1 Introduction et énoncés des résultats . . . . . 35

1.1 Théorie d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques . . . . . 36

1.2 Auto–intersection du dualisant relatif de $X_0(N)$ . . . . . 36

1.3 Groupes Fuchsiens de première espèce . . . . . 37

1.4 Fonction de Green d'Arakelov aux pointes . . . . . 39

1.5 Transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$ 39

2 Interprétation spectrale de la fonction de Green d'Arakelov des courbes modulaires . . . . . 41

2.1 Etude spectrale . . . . . 41

2.2 Fonction de Green aux pointes . . . . . 47

3 Interprétation automorphe de la fonction de Green d'Arakelov de $X_0(N)$ aux pointes . . . . . 53

3.1 Introduction . . . . . 53

3.2 Décomposition spectrale et méthode de Rankin–Selberg . . . . . 58

3.3 Terme constant de la transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov . . . . . 80

4 Auto–intersection du dualisant relatif de $X_0(N)$ : FIN . . . . . 90
4.1 Preuve de la proposition B . . . . . 90
4.2 Calcul à distance finie . . . . . 91
4.3 Preuve du théorème A . . . . . 94
Appendice . . . . . 95
Bibliographie . . . . . 99

**IV Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$ 101**
1 Introduction . . . . . 101
2 Norme sup d'une forme primitive . . . . . 103
3 Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré . . . . . 106
Bibliographie . . . . . 113

**V A propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires 115**
1 Introduction . . . . . 115
2 Formes modulaires et algèbre de Hecke . . . . . 116
2.1 Formes modulaires . . . . . 116
2.2 Algèbre de Hecke . . . . . 118
3 Congruence entre formes modulaires et constante de Manin . . . . . 119
A Défaut d'exactitude des modèles de Néron semi–abéliens (d'après M. Raynaud) 124
Bibliographie . . . . . 131

# Chapitre I

# Introduction générale

Cette thèse est constituée de trois parties indépendantes. La première partie ([1], chapitre 2) porte sur *le théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique"*. Elle reprend un article écrit conjointement avec T. Bouche. La seconde partie est un travail en commun avec E. Ullmo autour de la théorie d'Arakelov sur les courbes modulaires $X_0(N)$. Elle consiste d'une part en un calcul de l'auto–intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$ ([2], chapitre 3) et d'autre part en une comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$ ([3], chapitre 4). La dernière partie ([4] chapitre 5) est aussi un travail en commun avec E. Ullmo, elle traite de la conjecture de Manin sur les courbes elliptiques modulaires.

Ce chapitre introductif est par conséquent divisé en trois sections, chacune présente une partie de ce travail.

## 1 Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique"

Comme en géométrie algébrique, on peut déduire le théorème de Hilbert–Samuel arithmétique du théorème de Riemann–Roch arithmétique prouvé par Gillet et Soulé [8] (en utilisant les résultats d'analyse de Bismut–Lebeau et Bismut–Vasserot). L'approche qui m'a était proposée par L. Szpiro consiste à contourner ce dernier théorème vu sa très longue et difficile démonstration et à donner une preuve simple de façon analogue à la situation algébrique.

Soient $K$ un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. On prouve ([1], chapitre 2) le théorème suivant :

**Théorème principal** (boule unité sup) *Soient $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension $r$ et $L$ un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive. On désigne par $B_n$ la boule unité pour la norme* sup *de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, alors quand $n$ tend vers l'infini la quantité:*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big( - \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))\big)$$

*tend vers une limite finie appelée auto-intersection de $L$. On la note $(L)^{r+1}$.*

Ce théorème donne une définition de l'auto–intersection d'un faisceau inversible ample métrisé. On prouve (chapitre 2 section 5.1) qu'elle coïncide dans le cas d'une surface arithmétique et quand $L$ est muni d'une métrique permise avec l'auto–intersection d'Arakelov. Le théorème précédent donne par suite une autre façon de définir la théorie des intersections d'Arakelov (pas seulement les auto–intersections). En dimension supérieure, l'auto–intersection définie dans le théorème principal coïncide avec celle donnée par les théories des intersections de Gillet et Soulé [8] ou d'Elkik [9] (chapitre 2 section 5.2).

Le théorème précédent est un analogue arithmétique partiel au théorème de Hilbert–Samuel algébrique vu qu'il ne donne que le terme dominant du développement en $n$ de la fonction $-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))$. Néanmoins, il s'est avéré suffisant pour beaucoup d'applications. Pour donner des exemples, nous invoquons le critère d'amplitude arithmétique de S. Zhang [19], le résultat sur les points entiers de hauteur bornée démontré par E. Ullmo [16], l'application à la conjecture de Bogomolov due à L. Szpiro [15] ainsi que des applications de Faltings [10] et de Vojta [17]. En effet, de nombreuses applications arithmétiques passent par le critère suivant qui découle du théorème principal et du premier théorème de Minkowski :

**Corollaire** *Si* $(L)^{r+1} > 0$ *alors il existe une section de* $H^0(X, L^{\otimes n})$ *de norme* sup *plus petite que* 1 *en chaque place à l'infini pour* $n$ *assez grand.*

L'idée de la preuve du théorème principal est assez simple, elle est inspirée de la preuve classique du théorème de Hilbert–Samuel algébrique. Ce dernier se déduit, grâce à l'additivité de la fonction dimension, par récurrence de la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^0(X, L^{\otimes n}) \xrightarrow{\cdot s} H^0(X, L^{\otimes n+1}) \longrightarrow H^0(Y, L^{\otimes n+1}_{|Y}) \longrightarrow 0 \tag{1}$$

où $Y$ est un diviseur associé à la section $s$ de $L$ et $n$ est assez grand. On définit (chapitre 2) une fonction $\chi$ analogue arithmétique de la fonction longueur algébrique. Elle est additive sur les suites exactes qui sont aussi exactes "au niveau des volumes". La suite (1) n'est pas exacte pour les volumes $L^2$ ni pour les volumes sup. L'essentiel est par conséquent de mesurer le défaut d'exactitude des volumes $L^2$ de cette suite. On définit pour cela la fonction $g(n)$ par:

$$V^{n+1}_{X,L^2} = g(n+1)\, V^n_{X,L^2} \otimes V^{n+1}_{Y,L^2} \tag{2}$$

où $V^n_{X,L^2}$ et $V^n_{Y,L^2}$ sont les volumes $L^2$ de $H^0(X, L^{\otimes n})$ et $H^0(Y, L^{\otimes n}\,|_Y)$ (c'est à dire les éléments de volume qui donnent aux boules unités $L^2$ le volume 1). On prouve (chapitre 2 section 3) le résultat asymptotique suivant :

**Proposition 3.1** On a la limite suivante :

$$\frac{1}{P(n)} \log g(n+1) \to -\int_X \log|s(x)|^2\, dx, \qquad n \to +\infty$$

*où* $P$ *désigne le polynôme de Hilbert-Samuel de* $L$ *sur* $X$.

La preuve de cette proposition se fait en deux étapes. D'abord la comparaison des volumes $L^2$ et quotient $L^2$ sur $H^0(Y, L_{|Y}^{\otimes n})$, elle est essentiellement basée sur des théorèmes d'extension $L^2$ d'Ohsawa–Manivel [14, 11]. On compare ensuite le volume $L^2$ au volume induit par la multiplication par $s$ sur $H^0(X, L^{\otimes n})$ (chapitre 2 théorème 3.7).

# 2 Théorie d'Arakelov sur $X_0(N)$

Dans cette section, on présentera les résultats des chapitres 3 et 4. On a choisi de ne pas parler ici des techniques utilisées dans leurs preuves, on réfère pour cela aux introductions de ces chapitres. On donnera plutôt quelques motivations a ce genre de résultats.

Soit $N \geq 1$ un entier. La courbe $X_0(N)$ est la compactification de l'espace de module des courbes elliptiques muni d'un sous–groupe cyclique d'ordre $N$. Elle a une structure de courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$. Si $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$, $X_0(N)$ est de genre $g$ non nul. Si de plus $N$ est sans facteurs carrés, le modèle régulier minimal de $X_0(N)$ sur Spec $\mathbb{Z}$, noté $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ est semi–stable, c'est une surface arithmétique. La courbe $X_0(N)$ sur $\mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe au quotient $\Gamma_0(N)\backslash(\mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{Q}))$, où $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est le demi–plan de Poincaré et $\Gamma_0(N)$ est le sous–groupe modulaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \; ; \; ad - Nbc = 1 \right\}$$

On désigne par $\omega$ le faisceau dualisant relatif de $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$. Il est canoniquement muni à l'infini d'une métrique permise ce qui permet de définir son auto–intersection d'Arakelov $\omega^2$. Faltings a prouvé [10] qu'est elle positive ou nulle en tout genre et nulle pour les courbes elliptiques. On conjecture en genre $g \geq 2$ qu'est strictement positive. Cette conjecture a été prouvée pour les courbes ayant au moins une fibre de mauvaise réduction par Zhang [20]. Elle est aussi connue dans pas mal de cas de bonne réduction grâce aux travaux de Zhang [20] et Burnol [6]. La signification arithmétique de cet invariant Arakelovien a été donnée par Szpiro [15]. Il a démontré que la non nullité de l'auto–intersection du dualisant relatif dans le cas lisse est équivalente à la conjecture de Bogomolov. Cette conjecture affirme que les points arithmétiques d'une courbe plongée dans sa jacobienne sont discrets pour la "topologie de Néron–Tate". C'est une généralisation du théorème de Raynaud (conjecture de Lang) sur la finitude de l'ensemble des points de $X(\overline{K})$ qui sont de torsion après plongement de la courbe dans sa jacobienne. En plus des courbes elliptiques, l'auto–intersection du dualisant relatif est connue explicitement pour les courbes de genre 2 grâce aux travaux de Bost, Mestre et Moret–Bailly [5]. On calcule dans le chapitre 3 cet invariant pour les courbes modulaires $X_0(N)$ :

Soient $d\mu_0$ la métrique de Poincaré définie sur $\mathcal{H}$ par $d\mu_0 = \dfrac{dx\ dy}{y^2}$ et vol le volume de $X_0(N)$ pour cette métrique.

**Théorème A** *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $N$ premier à 6 et sans facteurs carrés, l'auto–intersection du dualisant relatif de la courbe modulaire $X_0(N)$ est bornée supérieure-*

*ment par :*

$$0 < \omega^2 \leq -8\pi \frac{g-1}{\mathrm{vol}} \lim_{s \to 1} \left( \frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1} \right) + O_\varepsilon(N^{1+\varepsilon})$$

*où $Z(s)$ est la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$.*

Ce théorème établit un lien entre deux invariants de natures différentes. La fonction zêta de Selberg est liée aux valeurs propres du laplacien invariant du demi-plan de Poincaré $\mathrm{D}_0 = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ agissant sur les fonctions $\Gamma_0(N)$-invariantes. Elle est holomorphe en 1 avec un zéro simple. Sa dérivée logarithmique admet par suite un pôle simple en 1 de résidu 1. La borne $0 \leq \omega^2$ prouvée par Faltings [10] implique, grâce au théorème A, une borne supérieure du terme constant en 1 de la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$ en fonction du niveau $N$. Inversement une borne inférieure de ce terme constant en fonction de $N$ impliquerais une borne supérieure, ne dépendant que de $N$, de l'auto-intersection du dualisant relatif $\omega^2$. On peut espérer que ce genre de bornes induit un contrôle sur le degré de la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique de Weil forte.

Une courbe elliptique est dite de Weil faible si elle admet une paramétrisation modulaire $\varphi : X_0(N) \to E$ telle que le pull-back de la différentielle de Néron $\alpha_E$ de $E$ soit proportionnel à une forme primitive $f_E$ pour $\Gamma_0(N)$. Par un théorème de Carayol, $N$ est le conducteur de la courbe elliptique. La courbe $E$ est de Weil forte si la paramétrisation est minimale pour les isogénies des courbes elliptiques. La conjecture de Taniyama-Weil affirme que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est de Weil faible. Cette conjecture a été démontrée par A. Wiles pour les courbes elliptiques semi-stables sur $\mathbb{Q}$. Il est naturel de s'intéresser au degré des paramétrisations de Weil fortes. La formule de Hurwitz ne donne rien à cause du genre 1 de la courbe elliptique (exemples de Douady). Szpiro a remarqué qu'une borne polynomiale en $N$ du degré d'une paramétrisation de Weil forte impliquerais la conjecture du discriminant sur $\mathbb{Q}$ à partir de la conjecture de Taniyama-Weil pour les courbe elliptiques semi-stables sur $\mathbb{Q}$ prouvée par A. Wiles. La conjecture du discriminant s'énonce :*Il existe deux réels positifs $k$ et $C$ tels que pour toute courbe elliptique semi-stable sur $\mathbb{Q}$ de discriminant minimal $\Delta_E$ et de conducteur $N_E$, on a : $|\Delta_E| \leq C N_E^k$.*
On prouve (chapitre 4) le résultat suivant prolongeant la remarque de Szpiro :

**Corollaire C** *L'existence d'une borne polynomiale, en le conducteur, du degré de la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique de Weil forte semi-stable sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à l'existence d'une borne logarithmique, en le conducteur, de la hauteur de Faltings de la courbe elliptique.*

Ce résultat est basé sur le théorème suivant (chapitre 4) :

**Théorème A** *Soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que pour tout entier $m$ sans facteurs carrés et pour toute forme primitive $f$ pour $\Gamma_0(m)$ on a :*

$$\sup_{z \in \mathcal{H}} |y f(z)| \leq C_\varepsilon m^{1/2+\varepsilon}$$

Le théorème A implique en particulier que le produit de Petersson d'une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ par elle même est borné universellement en $m^{2+\epsilon}$. Ce résultat est dû pour $m$ premier à Zagier [18] avec une meilleure borne. Le théorème A nous permet aussi de comparer les métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$ (chapitre 4). La métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$ est définie par $\nu(z) = F(z)d\mu_0(z)$ où $d\mu_0(z) = \dfrac{dxdy}{y^2}$ est la métrique de Poincaré et $F$ est la fonction du demi–plan de Poincaré $\Gamma_0(N)$–invariante définie par :

$$F(z) = \frac{y^2}{g}\sum_{i=1}^{g}|f_i(z)|^2$$

pour $f_1 \dots f_g$ une base orthonormée pour le produit scalaire de Petersson de l'espace $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$ des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$.

**Théorème B** *Soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A_\varepsilon > 0$ telle que pour tout entier $N$ sans facteurs carrés on a :*

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} F(z) \leq A_\varepsilon N^{1+\epsilon}$$

L'importance d'une telle comparaison réside d'une part dans le bon comportement de la métrique de Poincaré sur $X_0(N)$ pour la structure de quotient par un sous–groupe de congruence. Elle est malheureusement singulière aux pointes. D'autre part la métrique d'Arakelov permet d'avoir une bonne théorie des intersections qui vérifie la formule d'Adjonction et qui étend la hauteur de Néron–Tate à des diviseurs de degré non nul. La comparaison du théorème B peut donc faire profiter à la théorie des intersections d'Arakelov sur $X_0(N)$ des propriétés automorphes de $X_0(N)$.

Les invariants arithmétiques calculés pour $X_0(N)$ et surtout les interprétations modulaires et spectrales qui leurs sont attachées peuvent aider à mieux les comprendre même quand on ne dispose plus de ces interprétations.

# 3 Conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires

Le chapitre 5 reprend un article écrit conjointement avec E. Ullmo. On présente dans la suite son résultat principal.

Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte [12] sur $\mathbb{Q}$ et $\varphi : X_0(N) \to E$ sa paramétrisation modulaire. Par un théorème de Carayol [7] $N$ est le conducteur de $E$. Soient $E_{\mathbb{Z}}$ le modèle de Néron de $E$ sur $\mathbb{Z}$, $\Omega^1_{E/\mathbb{Z}}$ le faisceau des différentielles relatives de $E_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et $\alpha_E$ une différentielle de Néron c'est à dire une $\mathbb{Z}$–base de $H^0(X_0(N)_{\mathbb{Z}}, \Omega^1_{E/\mathbb{Z}})$. La différentielle $\varphi^*(\alpha_E)$ est un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke $T_p$. Elle est donnée par $\varphi^*(\alpha_E) = 2\pi c_E f_E dz$ où $f_E$ est une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ et $c_E$ est une constante rationnelle appelée constante de Manin. On choisit $\alpha_E$ tel que $c_E$ soit positive. Manin conjecture que $c_E$ vaut 1. Soit $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$, il est facile de voir que $c_E \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Edixhoven montre que $c_E$ est en fait un entier. Mazur [13] a prouvé que $c_E$

est une unité de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2m}]$. Ce résultat a été amélioré par Raynaud qui a montré que si $m$ est impair alors la valuation 2–adique $v_2(c_E) \leq 1$.

**Théorème A** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$ et $p$ un nombre premier ne divisant pas $N$. La constante de Manin $c_E$ n'est pas divisible par $p$.*

Pour $p > 2$, le théorème A est contenu dans les travaux de Mazur. Néanmoins, l'information nouvelle donnée en 2 permet de déduire le corollaire suivant :

**Corollaire B** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur impair $N$ et $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$.*

***i)*** *$c_E$ est une unité de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.*

***ii)*** *Si $N$ est sans facteurs carrés et premier à 2 alors la constante de Manin $c_E$ de $E$ vaut 1.*

Nous avons inclus dans le chapitre 5 la démonstration du résultat de Raynaud : *si $m$ est impair alors la valuation 2–adique $v_2(c_E) \leq 1$.* Le point central de ce résultat traite du défaut d'exactitude des modèles de Néron semi–abéliens sur un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions de caractéristique 0, de corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et d'indice de ramification absolu $e$ dans le cas limite $e = p - 1$. Il a été annoncé pour la première fois dans une lettre de M. Raynaud à J. F. Mestre et J. Oesterlé. M. Raynaud nous a communiqué cette lettre et a accepté que nous la publiions (appendice du chapitre 5).

# Bibliographie


[1] A. ABBES, T. BOUCHE *Théorème de Hilbert–Samuel arithmétique*, Chapitre **2**, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier, tome **45** fascicule 2 ou 3 (1995).

[2] A. ABBES, E. ULLMO *Auto–intersection du dualisant relatif des courbes modulaires* $X_0(N)$, Chapitre **3**, preprint 94.

[3] A. ABBES, E. ULLMO *Comparaison des métriques d'Arakelov et Poincaré sur* $X_0(N)$, Chapitre **4**, à paraître dans Duke Math. Journal.

[4] A. ABBES, E. ULLMO *A propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires*, Chapitre **5**, preprint 95.

[5] J.–B. BOST, J. –F. MESTRE, L. MORET–BAILLY *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre* 2, dans *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif")*, Astérisque No **183**, 1990, p. 69-105.

[6] J.-F. BURNOL *Weierstrass points on arithmetic surfaces,* Invent. Math. **107**, (1992), p. 421-432.

[7] H. CARAYOL *Sur les représentations l–adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sc. ENS **19**, (1986), p. 409-468.

[8] H. GILLET et C. SOULÉ *An arithmetic Riemann-Roch Theorem*, Inventiones Math. **110**, (1992), p. 473-543.

[9] R. ELKIK *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. **61** No. 1, (1990), p. 303-328.

[10] G. FALTINGS *Calculus on arithmétique sufaces*, Ann. of Math. **119**, (1984), p. 387–424.

[11] L. MANIVEL *Un théorème de prolongement* $L^2$ *de sections holomorphes d'un fibré hermitien*, Math. Z. **212**,(1993), p. 107-122

[12] B. MAZUR *Courbes elliptiques et symboles modulaires*, Séminaire Bourbaki, exposé 414, Juin 1972.

[13] B. MAZUR *Rational isogenies of prime degree*, Invent. math. **44**, 1978, p. 129–162.

[14] T. OHSAWA *On the extension of $L^2$ holomorphic functions II*, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., **24**, (1988), p. 265-275.

[15] L. SZPIRO *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique,* dans *The Grothendieck Festschrift,* Vol. III, Birkhäuser Boston-Basel-Berlin 1990, p. 229-245.

[16] E. ULLMO *Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique*, à paraître dans American Journal of Math..

[17] P. VOJTA *Siegel's theorem in the compact case*, Ann. of Math. **133**, (1991), p. 509-548.

[18] D. ZAGIER *Modular parametrizations of elliptic curves,* Canad. Math. Bull. Vol. **28** (3), (1985), p. 372-384.

[19] S. ZHANG *Positive line bundles on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. **136** (1992), p. 569–587.

[20] S. ZHANG *Admissible pairing on a curve,* Inven. Math. **112**, (1993), p. 171-193.

# Chapitre II

# Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique"

Ce chapitre reprend un article écrit conjointement avec T. Bouche qui paraîtra aux Annales de l'Institut Fourier.

## 1 Introduction

Soient $K$ un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers et $\Phi$ l'ensemble des plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$ modulo la conjugaison où $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes. Soit $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma projectif, plat à fibre générique lisse de dimension $r \geq 1$. Soit $L$ un faisceau inversible ample sur $X$, on munit $L_\sigma$ pour toute place $\sigma$ de $\Phi$ d'une métrique hermitienne à courbure positive $ic(L_\sigma)$. On considère alors sur $X_\sigma$ la métrique $\omega_\sigma = ic(L_\sigma)/2\pi V$ où $V$ est une constante choisie de telle sorte que le volume total de $X_\sigma$ pour l'élément de volume associé $dx$ soit 1. Le plongement

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n \tag{1}$$

fait de $H^0(X, L^{\otimes n})$ un réseau dans $W_n$ qui est muni de deux normes:

1. Norme sup: Pour $x = (x_\sigma)_\sigma \in W_n$ on pose $\|x\|_{\sup} = \sup_\sigma(\|x_\sigma\|_{\sup})$ et pour $s \in H^0(X_\sigma, L_\sigma^{\otimes n})$ on définit $\|s\|_{\sup} = \sup_{p \in X_\sigma} |s(p)|$. On note $B_n$ la boule unité de $W_n$ pour cette norme.

2. Norme $L^2$: Pour $x = (x_\sigma)_\sigma \in W_n$ on pose $\|x\|_{L^2} = \sup_\sigma(\|x_\sigma\|_{L^2})$ et pour $s \in H^0(X_\sigma, L_\sigma^{\otimes n})$ on définit $\|s\|_{L^2}^2 = \int_{X_\sigma} |s(x)|^2 dx$. On désigne par $C_n$ la boule unité de $W_n$ pour cette norme.

**Définition** *On appelle sections d'Arakelov du fibré $L^{\otimes n}$ sur $X$ et on note $H^0_{Ar}(X, L^{\otimes n})$ l'ensemble $H^0(X, L^{\otimes n}) \cap B_n$ .*

On se propose de faire l'étude de cet ensemble quand $n \to +\infty$. On prouvera le théorème

suivant:

**Théorème principal** (boule unité sup) *Soient $X \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension $r$ et $L$ un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive. On désigne par $B_n$ la boule unité pour la norme sup de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, alors quand $n$ tend vers l'infini la quantité:*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big( - \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))\big)$$

*tend vers une limite finie appelée l'auto-intersection de $L$. On la note $(L)^{r+1}$.*

**Théorème principal** (boule unité $L^2$) *Avec les mêmes conditions et notations du théorème précédent, on a la limite suivante quand $n$ tend vers l'infini:*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big( - \log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n))\big) \to (L)^{r+1},$$

*où $C_n$ est la boule unité pour la norme $L^2$ de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

On déduit le critère suivant pour l'existence de sections de norme sup plus petite que 1 en chaque place.

**Corollaire** *si $(L)^{r+1} > 0$ alors $H^0_{A_r}(X, L^{\otimes n}) \neq 0$ pour $n$ assez grand.*

Le théorème principal dans ses deux versions équivalentes (voir proposition 4.1) est l'analogue "arithmétique" du théorème de Hilbert–Samuel algébrique. Il a été démontré par Gillet et Soulé [14] en 1988 en utilisant les résultats partiels connus à l'époque sur le théorème de Riemann–Roch arithmétique ainsi que les travaux de Bismut et Vasserot [3]. De même qu'en géométrie algébrique, on peut déduire le théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" du théorème de Riemann–Roch arithmétique qui a été prouvé par Gillet et Soulé dans [11] (en utilisant les résultats d'analyse de Bismut et Lebeau [2]) et par Faltings dans [9]. Cette approche permet d'avoir en plus du terme dominant donné par le théorème principal (boule unité $L^2$), les deux termes suivants du développement de $-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n))$. L'objet de ce travail est d'en proposer une démonstration simple. L'intérêt de cette démarche, qui nous a été suggérée par L. Szpiro, peut s'expliquer par le fait que de nombreuses applications arithmétiques n'utilisent que le théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique". Pour donner quelques exemples nous invoquons le critère d'amplitude arithmétique de S. Zhang [27], le résultat sur les points entiers de hauteur bornée démontré par E. Ullmo [25], l'application à la conjecture de Bogomolov due à L. Szpiro [23] ainsi que des applications de Faltings [10] et de Vojta [26].
Si l'approche de Gillet et Soulé s'inspire du théorème de Riemann–Roch–Grothendieck et du théorème de l'indice pour la métrique de Quillen, la nôtre est très comparable à la preuve directe classique du thérème de Hilbert–Samuel algébrique. En effet, le théorème de Hilbert–Samuel algébrique se déduit immédiatement par récurrence de la suite exacte

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \xrightarrow{s} H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y) \to 0$$

où $Y$ est le diviseur associé à la section $s$ de $L$ et $n$ est grand; ceci car la dimension est additive sur les suites exactes d'espaces vectoriels. La fonction $\chi$ que nous définissons ci-dessous tient lieu de caractéristique d'Euler dans le contexte arithmétique, elle est additive sur les suites exactes qui sont aussi exactes "au niveau des volumes" (voir la section 2 pour un énoncé plus précis), ce qui n'est évidement pas le cas de la suite exacte que nous considérons (que ce soit dans le cas des volumes $L^2$ ou sup). L'essentiel est par conséquent de mesurer le défaut d'exactitude des volumes de cette suite exacte. Il ressort de notre analyse que la seule contribution au terme dominant (en $n^{r+1}$) provient du déterminant de la première flèche (multiplication par $s$). Nous estimons ce terme à l'aide d'un rafinement de travaux antérieurs de Demailly [6] et Bouche [4]. Remarquons à ce propos que, si l'aspect analytique de notre travail est allégé par le fait que nous n'avons pas à nous préoccuper de la métrique de Quillen, le point de départ de nos estimations à l'infini et de l'article [3] de Bismut-Vasserot est identique : c'est la description asymptotique du spectre du laplacien antiholomorphe agissant sur les sections de $L^{\otimes n}$ dû à J.-P. Demailly [6].
Signalons que Lau, Rumely et Varley prouvent dans un cadre adélique et par une méthode différente, l'existence d'un terme dominant analogue à celui donné par le théorème principal sous des conditions plus faibles que les nôtres [16] et [15].
Dans cet article, la section 2 introduit des éléments de volume additifs qui serviront dans la récurrence nécessaire pour la preuve du théorème principal. Cette récurrence sera possible grâce à l'estimation à l'infini développée dans la section 3. La démonstration du théorème principal ainsi que le critère d'existence de sections de norme sup $< 1$ (corollaire précédent) sont donnés dans la section 4. Finalement, nous montrons que l'auto–intersection donnée par le théorème principal coincide dans le cas général avec celle obtenue à partir des théories d'intersection d'Elkik dans [8] et de Gillet et Soulé dans [12] et [13] et dans le cas d'une surface arithmétique avec l'auto–intersection d'Arakelov (section 5).

Nous remercions R. Elkik et G. Lebeau pour leurs lectures attentives du manuscrit. A. Abbes remercie tout particulièrement L. Szpiro pour avoir dirigé ce travail et pour ses efforts dans l'élaboration finale du manuscrit.

# 2 Volumes additifs

Dans une première étape, nous introduirons des éléments de volume réels additifs que nous comparerons aux éléments de volume $L^2$ et sup. Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs. Soit $M$ un $\mathcal{O}_K$–module de type fini. On fixe pour toute place $\sigma \in \Phi$ un élément de volume réel $\eta_\sigma \in \det_{\mathbb{R}}(M \otimes K_\sigma)$. L'espace vectoriel $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est donc muni de l'élément de volume réel $\eta = \otimes_\sigma \eta_\sigma$. On pose $\overline{M} = M/M_{tor}$ où $M_{tor}$ est le sous module de torsion de $M$. L'inclusion canonique $\overline{M} \hookrightarrow M_{\mathbb{R}}$ fait de $\overline{M}$ un réseau de $M_{\mathbb{R}}$. On définit:

$$\chi(M, \eta) = -\log(\mathrm{vol}(M_{\mathbb{R}}/\overline{M})) + \log(\#M_{tor}) \tag{2}$$

La fonction $\chi$ est additive au sens suivant (voir [18] et [22]): soient $M_1$, $M_2$ et $M_3$ trois $\mathcal{O}_K$–modules de type fini et $\eta_1 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{1,\mathbb{R}})$, $\eta_2 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{2,\mathbb{R}})$ et $\eta_3 \in \det_{\mathbb{R}}(M_{3,\mathbb{R}})$ trois

éléments de volumes réels. On dit que la suite $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ est exacte si elle l'est sur $\mathcal{O}_K$ et si $\eta_2 = \eta_1 \otimes \eta_3$ dans l'isomorphisme induit sur les déterminants. On a alors

$$\chi(M_2, \eta_2) = \chi(M_1, \eta_1) + \chi(M_3, \eta_3) \ . \tag{3}$$

Soient $A$ une $\mathcal{O}_K$–algèbre graduée de type fini $A = \oplus_{n \geq 0} A_n$, $M$ un $A$–module gradué de type fini $M = \oplus_{n \geq 0} M_n$ (tel que $M_n$ n'est pas de torsion pour tout $n$) et $P$ le polynôme de Hilbert–Samuel de $M \otimes_{\mathcal{O}_K} K$.

**Définition 2.1** *Soit $k$ un nombre réel. On définit $\alpha_{n,k} \in \det_{\mathbb{R}}(M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ par l'équation:*

$$\chi(M_n, \alpha_{n,k}) = k \sum_{j=0}^{n-1} P(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P(n) \ , \tag{4}$$

*où $\chi(\mathcal{O}_K)$ est calculée avec les éléments de volume canoniques de $\mathcal{O}_K$.*

On a alors la proposition suivante:

**Proposition 2.2** *Soient $k$ un nombre réel, $M^1$, $M^2$ et $M^3$ trois $A$–modules graduées de type fini qui forment une suite exacte:*

$$0 \to M^1 \to M^2 \to M^3 \to 0.$$

*Soit*

$$\Phi_n : \det(M_n^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \det(M_n^1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}) \otimes \det(M_n^3 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$$

*les isomorphismes qui s'en déduisent. Alors si $\alpha_{n,k}^j \in \det(M_n^j \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ pour $j = 1$, $2$ ou $3$ et $n \in \mathbb{N}$ sont les éléments de volumes de 2.1, on a:*

$$\Phi_n(\alpha_{n,k}^2) = \alpha_{n,k}^1 \otimes \alpha_{n,k}^3 \ .$$

*Preuve.* Soient $P_1$, $P_2$ et $P_3$ les polynômes de Hilbert–Samuel de $M_K^1$, $M_K^2$ et $M_K^3$. On pose $\delta_{n,k} = \Phi_n^{-1}(\alpha_{n,k}^1 \otimes \alpha_{n,k}^3)$.
Par additivité de $\chi$ on a l'égalité:

$$\begin{aligned}
\chi(M_n^2, \delta_{n,k}) &= \chi(M_n^1, \alpha_{n,k}^1) + \chi(M_n^3, \alpha_{n,k}^3) && (5)\\
&= k \sum_{j=0}^{n-1} P_1(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_1(n) + \\
&\quad + k \sum_{j=0}^{n-1} P_3(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_3(n) && (6)\\
&= k \sum_{j=0}^{n-1} P_2(j) + \chi(\mathcal{O}_K) P_2(n) && (7)
\end{aligned}$$

Pour établir (7) on a utilisé l'égalité $P_2(n) = P_1(n) + P_3(n)$. On obtient alors par 2.1 l'identité $\delta_{n,k} = \alpha_{n,k}^2$.

# 3 Estimation à l'infini

Afin de comparer les éléments de volume définis dans la section précédente au volume $L^2$, une estimation à l'infini est nécessaire.
Soient $X$ une variété complexe projective lisse de dimension $r \geq 1$ et $L$ un faisceau inversible très ample hermitien à courbure positive $ic(L)$. On considère sur $X$ la métrique $\omega = ic(L)/2\pi V$ où $V$ est une constante choisie de telle sorte que le volume total de $X$ pour l'élément de volume associé $dx$ soit 1. Soit $s$ une section non nulle de $H^0(X, L)$ telle que $Y$ =div($s$) soit lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduit dans le cas $r = 1$. Pour $n$ assez grand, on a la suite exacte suivante:

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \xrightarrow{s} H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(Y, L^{\otimes n+1}\,|_Y) \to 0 \tag{8}$$

On cherche à estimer le volume $L^2$ induit sur $H^0(X, L^{\otimes n+1})$ par la suite exacte (8), on définit pour cela la fonction $g(n)$ par:

$$V^{n+1}_{X,L^2} = g(n+1)\; V^n_{X,L^2} \otimes V^{n+1}_{Y,L^2} \tag{9}$$

où $V^n_{X,L^2}$ et $V^n_{Y,L^2}$ sont les volumes $L^2$ de $H^0(X, L^{\otimes n})$ et $H^0(Y, L^{\otimes n}\,|_Y)$ (c'est à dire les éléments de volume qui donnent aux boules unités $L^2$ le volume 1). On prouvera le résultat asymptotique suivant:

**Proposition 3.1**

$$\frac{1}{P(n)}\;\log g(n+1) \to -\int_X \log|s(x)|^2\,dx, \qquad n \to +\infty$$

*où $P$ désigne le polynôme de Hilbert-Samuel de $L$ sur $X$*

Nous ferons usage de la proposition suivante démontrée indépendament par Bouche [4] et Tian [24].

**Proposition 3.2** *Soit $s_1, \ldots, s_N$ avec $N = P(n)$ une base orthonormée pour le produit $L^2$ de $H^0(X, L^{\otimes n})$. Alors, la fonction*

$$b_n(x) = \sum_{j=1}^{N} |s_j(x)|^2$$

*est indépendante de la base fixée et on a l'équivalent suivant:*

$$b_n(x) \sim P(n), \qquad \textit{quand } n \to +\infty$$

*et ceci uniformément en $x \in X$.*

Il s'ensuit:

**Corollaire 3.3** *Il existe une constante $c$ non nulle telle que pour tout $n \geq 1$ et pour toute section $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$, on ait:*

$$\|s\|_{L^2} \leq \|s\|_{\sup} \leq cP(n)^{\frac{1}{2}} \ \|s\|_{L^2}$$

*Preuve.* Soient $s \in H^0(X, L^{\otimes n})$ une section non nulle et $x \in X$ tels que $\|s\|_{\sup} = |s(x)|$. Et soit $s_1, \ldots, s_N$ avec $N = P(n)$ une base orthonormée pour le produit $L^2$ telle que $s_j(x) = 0$ pour tout $j \geq 2$. On peut alors écrire:

$$s = \sum_{j=1}^{N} a_j s_j$$

d'où on tire:

$$\begin{aligned} s(x) &= a_1 \ s_1(x) \\ \|s\|^2_{L^2} &= \sum a_j^2 \\ \|s\|^2_{\sup} &= a_1^2 \ |s_1(x)|^2 = a_1^2 \ b_n(x) \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\|s\|^2_{\sup} \leq \|s\|^2_{L^2} \ b_n(x) \leq c^2 \ P(n)\|s\|^2_{L^2}$$

pour $c$ une constante vérifiant: $b_n(x)/P(n) \ \leq c^2$ pour tout $n$ et pour tout $x$.

La seconde flèche de (8) définit sur $H^0(Y, L^{\otimes n+1} \ |_Y)$ un élément de volume réel $V^{n+1}_{q,L^2}$ induit par le produit quotient $L^2$ donné par cette surjection. On compare ce volume quotient au volume $L^2$ par la fonction positive $\gamma(n)$ qui vérifie l'équation $V^n_{Y,L^2} = \gamma(n)V^n_{q,L^2}$. La multiplication par $s$ induit sur $H^0(X, L^{\otimes n})$ un produit noté $\langle \ , \rangle_{s,L^2}$: $\langle v, v' \rangle_{s,L^2} = (sv, sv')_{L^2}$. On désigne par $V^n_{s,L^2}$ l'élément de volume réel de $H^0(X, L^{\otimes n})$ qui donne à la boule unité de ce produit le volume 1 et on le compare au volume $L^2$ par la fonction positive $\delta(n)$ vérifiant l'équation: $V^n_{X,L^2} = \delta(n)V^n_{s,L^2}$. Pour finir, on définit la fonction positive $\varphi(n)$ par l'égalité:

$$V^{n+1}_{X,L^2} = \varphi(n+1) \ V^n_{s,L^2} \otimes V^{n+1}_{q,L^2}$$

On a alors:

$$g(n+1) = \frac{\varphi(n+1)}{\delta(n)\gamma(n+1)} \tag{10}$$

Pour prouver 3.1, on montrera que :

i. $\log \varphi(n) = o(n^r)$.
ii. $\log \gamma(n) = o(n^r)$.
iii. $\log \delta(n) = P(n) \int_X \log |s(x)|^2 \ dx + o(n^r)$.

**Lemme 3.4** $\log \varphi(n) = o(n^r)$.

*Preuve.* On considère une suite exacte de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels: $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. On se donne un produit hermitien sur $V$ et on considère sur $V'$ le produit induit et sur $V''$ le produit quotient. Soient $p$ et $q$ les dimensions respectives de $V'$ et $V''$ sur $\mathbb{C}$. On fixe une base orthonormée de $V$ sur $\mathbb{C}$, $X_1, \ldots, X_{p+q}$ telle que $X_1, \ldots, X_p$ soit une base orthonormée de $V'$ et $\overline{X}_{p+1}, \ldots, \overline{X}_{p+q}$ soit une base orthonormée de $V''$. Soient $\eta$, $\eta'$ et $\eta''$ les éléments de volumes respectifs de $V$, $V'$ et $V''$ qui donnent aux boules unités des espaces respectifs le volume 1. Alors, on a:

$$\eta = \frac{1}{a(p+q)} X_1 \wedge \ldots \wedge X_{p+q} \wedge iX_1 \ldots \wedge iX_{p+q}$$

où $a(p+q)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^{2(p+q)}$ pour le produit scalaire ordinaire. D'où:

$$\eta = \frac{a(p)\ a(q)}{a(p+q)}\ \eta' \otimes \eta'' \tag{11}$$

Alors, si $P$ et $Q$ sont les polynômes de Hilbert-Samuel respectifs de $L$ sur $X$ et $L|_Y$ sur $Y$, il vient:

$$\varphi(n+1) = \frac{a(P(n))\ a(Q(n+1))}{a(P(n+1))} \tag{12}$$

Ce qui donne:

$$\log \varphi(n) = o(n^r) \tag{13}$$

**Proposition 3.5** *Avec les notations précédentes, il existe un entier $n_0$ et une constante $B$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $t$ dans $H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y)$:*

$$\|t\|_{q,L^2} \leq B\|t\|_{L^2}$$

d'où le corollaire suivant:

**Corollaire 3.6** $\log \gamma(n) = o(n^r)$.

*Preuve.* Par 3.5 et 3.3 on a:

$$\| \ \|_{q,L^2} \leq B\| \ \|_{L^2}$$

$$\| \ \|_{L^2} \leq \| \ \|_{\sup} \leq \| \ \|_{q,\sup} \leq cP(n)^{\frac{1}{2}} \ \| \ \|_{q,L^2}$$

Il vient alors:

$$\frac{1}{cP(n)^{\frac{1}{2}}} \ \| \ \|_{L^2} \leq \| \ \|_{q,L^2} \leq \ B\| \ \|_{L^2}$$

Et comme $\dim H^0(Y, L^{\otimes n+1}|_Y)$ est un polynôme en $n$ de degré $r-1$, on obtient: $\log \gamma(n) = o(n^r)$.

*Preuve* (de la proposition 3.5). Cet énoncé est une conséquence directe des théorèmes d'extension $L^2$ d'Ohsawa [19] et Manivel [17]. Nous indiquons brièvement comment le déduire des énoncés de [17]. Dans notre situation, $Y$ est le diviseur lisse de $X$ défini par la

section $s$ de $L$; celle-ci est donc partout transverse à la section nulle et on applique le corollaire 1 de [17] dans la situation où le fibré vectoriel $E$ est $L$. On a évidemment $P(E) = X$ car $E$ est de rang 1, et $\mathcal{O}_{E^*}(1) = L$. On choisit maintenant $n_0$ suffisamment grand pour que $L^{n_0} \otimes K_X^*$ soit ample, et l'on obtient que le morphisme de restriction $H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(Y, L^{\otimes n})$ est surjectif pour tout $n \geq n_0$ avec les estimations $L^2$ du théorème 1 de [17]. C'est-à-dire, en faisant usage de la remarque 2: *Il existe une constante $M$ ne dépendant que de $Y$ telle que toute section $t$ de $H^0(Y, L^{\otimes n})$ se relève en une section $T$ de $H^0(X, L^{\otimes n})$ vérifiant*

$$\int_X \frac{|T|^2 dx}{(1+|s|^2)^2} \leq M \|t\|_{L^2}^2$$

La proposition 3.5 s'en déduit immédiatement en observant que le terme de gauche est minoré par $(1+\|s\|_{\sup}^2)^{-2}\|T\|_{L^2}^2$ et que l'on a évidemment $\|t\|_{q,L^2} \leq \|T\|_{L^2}$. Dans le cas où $r = 1$ ($Y$ discret), ce résultat a été obtenu par Ullmo [25] et Zhang [27] en utilisant les estimations $L^2$ de Hörmander-Bombieri-Skoda [21]. Dans ce cas on peut montrer que la constante $B$ tend vers 0; en utilisant la proposition 3.2 il est en fait facile de voir que la meilleure constante $B$ est équivalente à $1/\sqrt{n}$. Il semble probable que ce soit également le cas en dimension plus grande.

Il reste donc pour achever la preuve de 3.1 à démontrer (iii). Soit l'inclusion:

$$H^0(X, L^{\otimes n}) \overset{\cdot s}{\hookrightarrow} H^0(X, L^{\otimes n+1})$$

Il existe une base orthonormée de $H^0(X, L^{\otimes n})$ pour le produit $L^2$ $(\ ,\ )$ qui est orthogonale pour le produit induit $\langle\ ,\ \rangle_{s,L^2}$. On la note $X_1, \ldots, X_N$ avec $N = P(n)$. Dans cette base, la matrice de $\langle\ ,\ \rangle_{s,L^2}$ s'écrit $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ avec $\lambda_j > 0$. On peut exprimer:

$$\begin{aligned} V_{X,L^2}^n &= a(P(n))\, X_1 \wedge \ldots \wedge X_N \wedge iX_1 \wedge \ldots \wedge iX_N \\ V_{s,L^2}^n &= a(P(n))\, \frac{X_1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \wedge \ldots \wedge \frac{X_N}{\lambda_N^{\frac{1}{2}}} \wedge i\frac{X_1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} \wedge \ldots \wedge i\frac{X_N}{\lambda_N^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

On a alors:

$$V_{s,L^2}^n = \frac{1}{\prod_{j=1}^N \lambda_j}\, V_{X,L_2}^n$$

On note $m_s$ : $H^0(X, L^{\otimes n}) \overset{\cdot s}{\to} H^0(X, L^{\otimes n+1})$ et $m_s^*$ son dual quand on munit les espaces de leurs produits $L^2$. D'où si $\phi_{n,s}$ désigne $m_s^* \circ m_s$ on a: $\prod_{j=1}^N \lambda_j = \det \phi_{n,s}$ et donc :

$$\delta(n) = \det \phi_{n,s}$$

**Théorème 3.7** *On a la limite suivante:*

$$\frac{1}{P(n)} \log\det \phi_{n,s} \to \int_X \log|s|^2\, dx\ , \qquad n \to +\infty \tag{14}$$

*Preuve.* On a par définition $\lambda_j = \|s \otimes X_j\|^2_{L^2} = \int_X |s|^2|X_j|^2 dx$. Observons avant tout que la quantité $\frac{1}{P(n)} \log\det \phi_{n,s}$ n'est autre que le logarithme de la moyenne géométrique des valeurs propres $\lambda_j$. Par conséquent, si on modifie $s$ en la multipliant par une constante $c$, cette quantité est translatée de $2\log c$, ainsi que l'intégrale de $\log \|s\|^2$ car le volume total de $dx$ est 1. On supposera donc désormais que $\|s\|_{\sup} < 1$, ce qui implique que toutes les valeurs propres $\lambda_j$ sont inférieures à 1. Nous décomposons le théorème 3.7 en deux inégalités :

**Lemme 3.8** *On a*

$$\liminf P(n)^{-1} \log\det \phi_{n,s} \geq \int_X \log |s|^2 dx$$

*Preuve.* La base $(X_j)$ étant orthonormée pour le produit scalaire $L^2$, l'élément de volume $|X_j|^2 dx$ est de volume total 1 sur $X$. On a par conséquent pour chaque $j = 1, \ldots, N$ $\log \int_X |s|^2|X_j|^2 dx \geq \int_X (\log |s|^2)|X_j|^2 dx$. En sommant ces inégalités sur $j$ et en utilisant le fait que l'on peut calculer la fonction $b_n$ définie par la proposition 3.2 dans une base orthonormée quelconque (ici $(X_j)$), on obtient :

$$\frac{1}{P(n)} \sum_{j=1}^{N} \log \lambda_j \geq \int_X \log |s|^2 (\frac{1}{P(n)} b_n) dx. \tag{15}$$

La proposition 3.2 nous assure que la fonction $b_n/P(n)$ converge uniformément sur $X$ vers la constante 1, le lemme 3.8 se déduit donc immédiatement de (15).

**Lemme 3.9** *On a*

$$\limsup P(n)^{-1} \log\det \phi_{n,s} \leq \int_X \log |s|^2 dx$$

*Preuve.* La stratégie de la démonstration est la suivante : comme les valeurs propres de $\phi_{n,s}$ sont toutes inférieures à 1, il suffit pour majorer son déterminant $\delta(n)$ de le contrôler sur un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L^{\otimes n})$. Idéalement, on cherche un sous-espace (de dimension équivalente à $P(n)$) contenant une base orthonormée de vecteurs propres $X_j$ prenant leur masse sur de petits ouverts disjoints, de telle sorte que l'inégalité de concavité (15) puisse être ramenée au cas d'égalité ($|s|$ constante). Cela n'est malheureusement pas possible dans la catégorie holomorphe, et c'est pourquoi nous allons devoir étendre notre analyse aux espaces propres du laplacien antiholomorphe de $L^{\otimes n}$ correspondant aux petites valeurs propres. Nous introduisons quelques notations (*cf.* [5]). Dans ces notations, le sous-espace de $H^0(X, L^{\otimes n})$ sur lequel le déterminant de $\phi_{n,s}$ est facile à majorer est l'espace $\Psi_n(\mathcal{F}_n(\mu))$ construit ci-dessous, et c'est la majoration (21) qui confirme notre approche. On note $\Delta''_n = (D'' + \delta'')^2$ le laplacien antiholomorphe associé à la connexion $D''$ et à la métrique du fibré $L^{\otimes n}$ induite par celle de $L$, que nous considérerons comme un opérateur non borné à domaine dense de l'espace des sections de carré intégrable de $L^{\otimes n}$ sur $X$ (noté $L^2(X, L^{\otimes n})$). Pour un ouvert $\Omega$ de $X$ on définit également l'opérateur $\Delta''_{n,\Omega}$ qui est le même opérateur différentiel, avec conditions de Dirichlet au bord de $\Omega$. Si on se donne un réel $\mu > 0$, on note $\mathcal{H}_n(\Omega, \mu)$ la somme directe des espaces propres de $\frac{1}{n}\Delta''_{n,\Omega}$ associés aux valeurs propres inférieures ou égales

à $\mu$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace $L^2(\Omega, L^{\otimes n})$. Soit maintenant $(\Omega_k)_{k=1,\dots,M}$ une famille d'ouverts de $X$ deux à deux disjoints. On pose $\mathcal{F}_n(\mu) = \bigoplus_k \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu)$, et on note

$$\begin{array}{rccc} \Psi_n : & \mathcal{F}_n(\mu) & \longrightarrow & H^0(X, L^{\otimes n}) \\ & (u_k)_k & \mapsto & P_0(u_1 + \cdots + u_M) \end{array}$$

où $P_0$ est le projecteur de Bergman (*i.e.* projecteur orthogonal de $L^2(X, L^{\otimes n})$ sur $H^0(X, L^{\otimes n})$). Dans la suite, , on identifiera la famille $(u_k)$ et son image $u$ par l'injection canonique de $\mathcal{F}_n(\mu)$ dans $L^2(X, L^{\otimes n})$. Le lemme suivant généralise le lemme 3.3 de [5] :

**Lemme 3.10** *Si $\mu < \pi V$ et $n$ est suffisamment grand, $\Psi_n$ est injective. En outre, on a*

$$\|\Psi_n(u) - u\|_{L^2}^2 \leq (\pi V)^{-1}\mu \|u\|_{L^2}^2 \quad si \quad u \in \mathcal{F}_n(\mu).$$

*Preuve.* Notons $H(u) = \int_X < \frac{1}{n}\Delta_n'' u, u > dx = \frac{1}{n}\int_X |D''u|^2 dx$ (*resp.* $H_\Omega(v) = \int_\Omega < \frac{1}{n}\Delta_n'' v, v > dx$) si $u \in \mathrm{Dom}\,\Delta_n''$ (*resp.* $v \in \mathrm{Dom}\Delta_{n,\Omega}''$). On a alors, si $u = (u_k)_k \in \mathcal{F}_n(\mu)$,

$$H(u) = \sum_{k=1}^{M} H_{\Omega_k}(u_k) \leq \mu \sum_k \int_{\Omega_k} |u_k|^2 dx = \mu \|u\|_{L^2}^2. \tag{16}$$

Par le lemme 3.2 de [5] on sait que la limite inférieure de la première valeur propre non nulle $\mu_1^n$ de $\frac{1}{n}\Delta_n''$ sur $X$ est supérieure au minimum sur $X$ des valeurs propres de la courbure $ic(L)$ par rapport à la métrique $\omega$, donc à $2\pi V$ puisque dans notre situation, toutes les valeurs propres de $ic(L)$ sont égales à cette constante. Pour $n$ suffisamment grand, on a donc $\mu_1^n \geq \pi V > \mu$. Pour un tel $n$, prenons un élément $u$ dans le noyau de $\Psi_n$. $u$ est dans l'orthogonal de l'espace des sections holomorphes qui est égal au noyau de $\Delta_n''$, ce qui implique : $H(u) \geq \mu_1^n \|u\|_{L^2}^2$ d'une part. D'autre part, d'après (16), on a $H(u) \leq \mu \|u\|_{L^2}^2$. Ces deux inégalités impliquent bien que $u$ est nulle. Posons maintenant $\tilde{u} = u - \Psi_n(u)$. C'est la projection orthogonale de $u$ sur l'orthogonal de $H^0(X, L^{\otimes n})$, donc $H(\tilde{u}) \geq \mu_1^n \|\tilde{u}\|_{L^2}^2$ et $H(u) = H(\tilde{u}) \leq \mu \|u\|_{L^2}^2$ d'après (16). De ces deux inégalités on déduit $\|\tilde{u}\|_{L^2}^2 \leq (\mu/\mu_1^n)\|u\|_{L^2}^2$, ce qui achève la preuve du lemme.

Le lemme 3.10 signifie que l'application $\Psi_n$ injecte l'espace $\mathcal{F}_n(\mu)$ de façon quasi-isométrique dans $H^0(X, L^{\otimes n})$. Le lemme 3.11 ci-dessous signifie que l'application $\Psi_n$ est également proche d'une isométrie pour la forme quadratique $q_n$ définie sur $L^2(X, L^{\otimes n})$ par : $q_n(u) = \int_X |s|^2 |u|^2 dx$. Notons que, si $u$ est holomorphe, on a évidemment $q_n(u) =< u, \phi_{n,s}(u) >_{L^2}$.

**Lemme 3.11** *Si $\mu < \pi V$ et $u \in \mathcal{F}_n(\mu)$, on a*

$$|q_n(u) - q_n(\Psi_n(u))| \leq 3(\pi V)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\mu}\, \|u\|_{L^2}^2.$$

*Preuve.* On a ponctuellement $|u(x)|^2 - |\Psi_n(u)(x)|^2 = |u(x) - \Psi_n(u)(x)|^2 + 2Re < \Psi_n(u)(x), (u - \Psi_n(u))(x) >$ d'où (en tenant compte du fait que $\|s\|_{sup} < 1$) :

$$\begin{aligned} |\int_X |s|^2(|u|^2 - |\Psi_n(u)|^2)dx| &\leq \int_X ||u(x)|^2 - |\Psi_n(u)(x)|^2| dx \\ &\leq \|u - \Psi_n(u)\|_{L^2}^2 + 2\int_X |\Psi_n(u)|\,||u| - |\Psi_n(u)||dx \\ &\leq \|u - \Psi_n(u)\|_{L^2}^2 + 2\|\Psi_n(u)\|_{L^2}\|u - \Psi_n(u)\|_{L^2} \end{aligned}$$

d'où le lemme 3.11 d'après l'estimation du lemme 3.10 en tenant compte de la majoration de $\mu$.

Nous en venons à la preuve de 3.9, qui repose sur une succession de majorations utilisant les lemmes précédents. Tous les déterminants de formes quadratiques qui apparaîtront sont pris par rapport au produit $L^2$ sur le même espace. La première majoration exprime comme nous l'avons annoncé que toutes les valeurs propres de $\phi_{n,s}$ sont inférieures à 1, et que $\mathrm{Im}\Psi_n \subset H^0(X, L^{\otimes n})$ :

$$\det \phi_{n,s} = \det[q_{n|H^0(X,L^{\otimes n})}] \leq \det[q_{n|\mathrm{Im}\Psi_n}]. \tag{17}$$

Pour majorer le déterminant de $q_n$ sur $\mathrm{Im}\Psi_n$, nous nous ramenons sur $\mathcal{F}_n(\mu)$ en appliquant $\Psi_n^*$. Le lemme 3.10 nous permet de contrôler la distortion entre le produit scalaire $L^2$ de $\mathcal{F}_n(\mu)$ et celui transposé par $\Psi_n$ :

$$\det[q_{n|\mathrm{Im}\Psi_n}] \leq \left(\frac{1}{1-\sqrt{\mu/\pi V}}\right)^{2\dim \mathcal{F}_n(\mu)} \det[q_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}]. \tag{18}$$

Un théorème élémentaire d'algèbre linéaire affirme que le déterminant d'une matrice hermitienne positive est majoré par le produit de ses termes diagonaux. Pour un $n$ donné on choisit une base orthonormée $(h_l^k)_{l,k}$ de $\mathcal{F}_n(\mu)$ composée pour chaque $k$ d'une base $L^2$-orthonormée de $\mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu)$, et on obtient

$$\begin{aligned}
\log\det[q_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}] &\leq \sum_{k,l} \log q_n \circ \Psi_n(h_l^k) && (19)\\
&= \sum_{k,l} \log(q_n(h_l^k) + 3\sqrt{\mu/\pi V}) && (20)\\
&\leq \sum_{k} \log(\sup_{\Omega_k} |s|^2 + 3\sqrt{\mu/\pi V}) \dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu). && (21)
\end{aligned}$$

Pour passer de (19) à (20), nous avons utilise 3.11. Notons que la même majoration appliquée à une base orthonormée de $H^0(X, L^{\otimes n})$ aurait conduit à l'inégalité $\det \phi_{n,s} \leq \sup_X \log |s|^2 P(n)$ qui converge simplement vers l'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique des valeurs propres de $\phi_{n,s}$.

Déduire 3.9 de (21) est aisé. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|s\|_{\sup} + 3\varepsilon < 1$. La fonction $\log(|s|^2 + 3\varepsilon)$ étant uniformément continue sur $X$, son intégrale est approchée à $\varepsilon$ près par toute somme de Riemann associée à un pavage de $X$ de maille $\eta > 0$ donnée. On réalise un tel pavage en recouvrant $X$ par des ouverts $\Omega_k$ deux à deux disjoints, dont l'union des adhérences vaut $X$ (pratiquement, on prendra pour $\Omega_k$ des cubes de côté $< \eta/2r$ dans des ouverts de carte). Le pavage $\Omega_k$ est désormais fixé.

On fixe $\mu = \pi V \varepsilon^2$. Le Corollaire 2.4 de Demailly [6] s'écrit dans notre situation (cf. également le théorème 3.14 et la définition (1.5) de [6]) :

$$\dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu) \sim P(n)\, Vol(\Omega_k)$$

lorsque $n \to +\infty$. En effet, la fonction $\nu_B$ considérée dans notre situation est $\nu_L(2(\pi r V + \mu)) = V^r \sum_{p\in\mathbb{N}^r}[2\mu + 2\pi V r - \sum_{j=1}^r (2p_j+1)2\pi V]_+^0$ où le symbole $[x]_+^0$ prend par convention la valeur 1 si $x > 0$, et 0 sinon. Cette fonction vaut donc $V^r$ pour $0 < \mu < \pi V$, et l'on a bien sûr $P(n) = V^r n^r + o(n^r)$. Notons que cet équivalent peut également se déduire de la limite (1b) du théorème 1.1 de [5]. Il vient pour $n \geq n_0$ :

$$\dim \mathcal{H}_n(\Omega_k, \mu) \geq Vol(\Omega_k)P(n)(1-\varepsilon). \tag{22}$$

De (21) et (22) on tire (en tenant compte du fait que $\log(|s|^2 + 3\varepsilon) \leq 0$ sur $X$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(n)} \log\det[g_n \circ \Psi_{n|\mathcal{F}_n(\mu)}] &\leq (1-\varepsilon)\sum_k \sup_{\Omega_k} \log(|s|^2+3\varepsilon)\, Vol(\Omega_k) \\ &\leq (1-\varepsilon)(\int_X \log(|s|^2+3\varepsilon)dx + \varepsilon) \end{aligned} \tag{23}$$

pour $n \geq n_0$. En utilisant (17) et (18) on trouve

$$\limsup_n \frac{1}{P(n)} \log\det \phi_{n,s} \leq (1-\varepsilon)(\int_X \log(|s|^2+3\varepsilon)dx + \varepsilon) - 2\log(1-\varepsilon) \tag{24}$$

Le lemme 3.9, et par conséquent le théorème 3.7, est démontré. Ceci termine la preuve de (iii) et donc de 3.1.

Notons que ce résultat étend à la fonction log un théorème de Boutet de Monvel et Guillemin (théorème 3.13 de [1]) démontré par une méthode entièrement différente pour les fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

**Remarque 3.12** On aura besoin dans la partie 4 de la généralisation suivante de la proposition 3.1: $L$ étant supposé ample, on considére $j$ un entier tel que $L^{\otimes j}$ soit très ample et on fixe une section $s$ de $H^0(X, L^{\otimes j})$ tel que $\mathrm{div}(s) = Y$ soit lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduit dans le cas $r = 1$. Pour tout entier $p$ compris entre 0 et $j-1$ et pour $n$ assez grand on a la suite exacte suivante:

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes nj+p}) \xrightarrow{s} H^0(X, L^{\otimes(n+1)j+p}) \to H^0(Y, L^{\otimes(n+1)j+p}|_Y) \to 0$$

on définit pour généraliser 3.1 les fonctions $g_p(n)$ par:

$$V_{X,L^2}^{(n+1)j+p} = g_p(n+1) V_{X,L^2}^{nj+p} \otimes V_{Y,L^2}^{(n+1)j+p}$$

De façon analogue à 3.1 on prouve que pour tout entier $p$ verifiant $0 \leq p \leq j-1$

$$\frac{1}{P(nj)} \log g_p(n) \to -\int_X \log|s|^2\, dx \qquad n \to +\infty$$

# 4 Théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique"

On reprend les notations de l'introduction où $X \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ est un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension $r$ et $L$ un faisceau inversible ample sur $X$ muni en

chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive $ic(L_\sigma)$. On pose $A = \oplus_{n\geq 0} H^0(X, L^{\otimes n})$ algèbre graduée de type fini sur $\mathcal{O}_K$ et on considère le plongement canonique:

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n \tag{25}$$

L'espace $W_n$ est muni de l'élément de volume sup $V^n_{X,\sup}$ qui donne à la boule unité sup le volume 1, de l'élément de volume $L^2$ noté $V^n_{X,L^2}$ et de l'élément de volume $V^n_{X,k}$ ($k \in \mathbb{R}$) défini dans 2.1 pour la $\mathcal{O}_K$−algèbre $A$. On compare ces éléments de volumes par les fonctions positives $f_X(n,k)$ et $h_X(n)$ définies par les équations:

$$\begin{aligned} V^n_{X,k} &= f_X(n,k) V^n_{X,L^2} \\ V^n_{X,L^2} &= h_X(n) V^n_{X,\sup} \end{aligned}$$

**Proposition 4.1**

$$\log(h_X(n)) = o(n^{r+1}) \tag{26}$$

*Preuve.* Comme la dimension de $H^0(X_K, L_K^{\otimes n})$ est polynômiale en $n$ de degré $r$, le corollaire 3.3 implique la proposition.

**Proposition 4.2** *Il existe un unique nombre réel $k$ tel que:*

$$\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1}). \tag{27}$$

*Remarque.* On prouvera dans la suite qu'il existe une fonction réelle $\eta(k)$ tel que

$$\log(f_X(n,k)) = \eta(k) n^{r+1} + o(n^{r+1})$$

La fonction $\eta$ est affine. En effet par 2.1 on a

$$\log(f_X(n,k)) - \log(f_X(n,k')) = c(k-k')n^{r+1} + o(n^{r+1})$$

dans cette équation $c$ désigne le coefficient dominant de $\sum_{j=0}^{n-1} P(j)$ et $P$ le polynôme de Hilbert–Samuel algébrique de $A \otimes_{\mathcal{O}_K} K$.

$$c = \frac{(L_K)^r}{(r+1)!}$$

Ceci prouve l'unicité de $k$.

*Preuve.* Comme on l'a indiqué dans la remarque, on va prouver que pour tout nombre réel $k$ il existe un nombre réel $\eta(k)$ tel que $\log f_X(n,k) = \eta(k) n^{r+1} + o(n^{r+1})$.

A)Cas très ample:

On fera une démonstration par récurrence sur $r$ =dim$X_K$. $L$ étant très ample, il existe alors un plongement $\phi : X \to P^N_{\mathcal{O}_K}$ tel que $\phi^*(\mathcal{O}(1)) = L$. Par le théorème de Bertini et après une extension de $K$ il existe une section $l$ non nulle de $\mathcal{O}(1)$ sur $P^N_{\mathcal{O}_K}$ qui coupe $X_K$ en une sous variété de dimension $r-1$ lisse dans le cas $r \geq 2$ et réduite dans le cas $r = 1$. Soit $s = \phi^*(l)$. Le faisceau $L^{\otimes -1}$ faisceau d'idéaux de div($s$) se décompose au moyen d'une décomposition

primaire en $L^{\otimes -1} = I \cap J$ où $J$ est à support vertical $V$ et $I$ définit un fermé plat sur la base à fibre générique lisse (=div($s_K$)) de dimension $r-1$, on le note $H$. On a alors pour $n$ assez grand la suite exacte suivante :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(H, L^{\otimes n+1}\mid_H) \to 0 \tag{28}$$

- En posant $M = \oplus_{n\geq 0} H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I)$ et en considérant le plongement canonique:

$$H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \hookrightarrow \oplus_\sigma H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes K_\sigma = W_n$$

  On obtient sur $W_n$ les éléments de volumes suivants

  1. $V^n_{X,L^2}$
  2. $V^n_{X,k}$ donné par 2.1 relativement à $A$
  3. $Z^n_k$ donné par 2.1 relativement à $M$

- On note $B = \oplus_{n\geq 0} H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H)$ et on considère l'inclusion:

$$H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H) \hookrightarrow \oplus_\sigma H^0(H, L^{\otimes n}\mid_H) \otimes K\sigma = \Omega_n$$

  $\Omega_n$ devient muni des éléments de volumes suivants:

  1. $V^n_{H,k}$ donné par la définition 2.1 relativement a $B$
  2. $V^n_{H,L^2}$ le volume $L^2$ obtenu par restriction des métriques

En appliquant alors la proposition 2.2 à la suite (28) on obtient:

$$V^{n+1}_{X,k} = V^{n+1}_{H,k} \otimes Z^n_k \tag{29}$$

On veut comparer les différents éléments de volume définis sur les termes de la suite exacte

$$0 \to W_n \to W_{n+1} \to \Omega_{n+1} \to 0$$

obtenue par tensorisation de (28). Pour cela on définit les fonctions positives $g$, $f_X$, $f_H$ et $t_X$ par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} V^{n+1}_{X,L^2} &= g(n+1) V^n_{X,L^2} \otimes V^{n+1}_{H,L^2} \\ V^n_{X,k} &= f_X(n,k) V^n_{X,L^2} \\ V^n_{H,k} &= f_H(n,k) V^n_{H,L^2} \\ Z^n_k &= t_X(n,k) V^n_{X,L^2} \end{aligned}$$

La relation (29) nous donne l'équation :

$$f_X(n+1,k) = \frac{t_X(n,k) f_H(n+1,k)}{g(n+1)} \tag{30}$$

On considère les deux suites exactes de faisceaux :

$$0 \to I.J \to I \to I \otimes \mathcal{O}_X/J \to 0$$

$$0 \to I.J \to I \cap J \to \mathrm{Tor}^1(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X/J) \to 0$$

où $I \cap J = L^{\otimes -1}$.
On note dans la suite $\mathcal{T} = \mathrm{Tor}^1(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X/J)$ qui est un faisceau à support dans $V$. Ces deux suites nous induisent pour $n$ assez grand les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I.J) \;&\to\; H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to \\ &\to\; H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J) \to 0 \end{aligned} \tag{31}$$

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I.J) \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T}) \to 0 \tag{32}$$

Les modules $H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)$ et $H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})$ sont de torsion, on obtient alors par additivité de la fonction $\chi$ définie dans la partie 2 appliquée aux suites exactes (31) et (32) la relation :

$$\begin{aligned} \log(t_X(n,k)) - \log(f_X(n,k)) \;&=\; \log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) - \\ &\quad - \log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})) \end{aligned} \tag{33}$$

D'où par (30) et (33) on trouve :

$$\begin{aligned} \log(f_X(n+1,k)) \;-\; \log(f_X(n,k)) &= \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) + \\ &\quad + \log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) - \\ &\quad - \log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})) \end{aligned} \tag{34}$$

Dans cette équation le terme de gauche admet un développement asymptotique de la forme $\alpha n^r + o(n^r)$ en effet,

- par hypothèse de récurrence (H est plat à fibre générique lisse) on a:

$$\log(f_H(n+1,k)) = c_H(k-\mu)n^r + o(n^r)$$

- Pour développer en fonction de $n$ les deux quantités

$$\log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I \otimes \mathcal{O}_X/J)) \text{ et } \log(\#H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes \mathcal{T})),$$

  on décompose $V$ en somme de sous-variétés connexes sans intersection contenues dans les fibres et donc de dimension $\leq r$. On applique alors le théorème de Hilbert–Samuel algébrique à ces sous-variétés pour déduire que chacune de ces deux quantités admet un développement de la forme $c'n^r + o(n^r)$

- on a le résultat suivant:

$$\log g(n) = \eta n^r + o(n^r)$$

Pour justifier ceci on pose $g(n) = \prod_\sigma g_\sigma(n)$ où $g_\sigma$ compare les volumes $L^2$ dans la suite exacte suivante:

$$0 \to H^0(X_K, L_K^{\otimes n}) \otimes_\sigma K_\sigma \to H^0(X_K, L_K^{\otimes n+1}) \otimes_\sigma K_\sigma \to H^0(H_K, L_K^{\otimes n+1} \mid_{H_K}) \otimes_\sigma K_\sigma \to 0$$

On a prouvé dans 3.1 que pour une place comlexe $\sigma$ il existe un nombre réel $\eta_\sigma$ tel que $\log g_\sigma(n) = \eta_\sigma n^r + o(n^r)$. Ce résultat s'étend à une place réelle car les métriques sont stables par conjugaison. Ce qui donne l'équivalent annoncé.

D'ou il existe un nombre réel $\eta(k)$ tel que $\log f_X(n,k) = \eta(k) n^{r+1} + o(n^{r+1})$.

Il reste donc pour finir la preuve de 4.2 à débuter la récurrence, c'est le cas $r = 1$. Nous avons fixé une section $s$ de $H^0(X, L)$ à fibre générique réduite. Le faisceau $L^{\otimes -1}$ faisceau d'idéaux de div$(s)$ se décompose en $L^{\otimes -1} = I \cap J$ avec $J$ à support vertical $V$ et $I$ définissant un fermé fini et plat sur la base à fibre générique réduite (=div$(s_K)$) noté $H$. Il s'ensuit que $H = \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ pour une $\mathcal{O}_K$−algèbre finie et réduite $\mathcal{A}$. Avec les notations précédentes on obtient l'équation:

$$\log(f_H(n,k)) = -\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V_{H,k}^n) + \chi(L^{\otimes n} \mid_H, V_{H,L^2}^n) \ .$$

Par la définition 2.1 et le fait que le polynôme de Hilbert–Samuel algébrique de $\oplus_n L^{\otimes n} \mid_H \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ est constant, on déduit que $\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V_{H,k}^n)$ est une fonction affine. Il en est de même pour $\chi(L^{\otimes n} \mid_H, V_{H,L^2}^n)$ à cause du théorème de Riemann–Roch arithmétique appliqué à $\mathcal{A}$ (et aprés réduction à un ordre d'un corps de nombres, voir [18] et [22]). Il s'ensuit que $\log f_H(n,k)$ est une fonction affine. Ce résultat nous permet en reprenant les mêmes étapes que la preuve générale de terminer la démonstration.

B)Cas général:

Il sera déduit du cas A, en effet il existe un entier $j$ tel que $L^{\otimes j}$ soit très ample. En considérant une bonne section de $H^0(X, L^{\otimes j})$, en faisant la même récurrence et en utilisant la remarque 3.12 on prouve que pour tout entier $p$ compris entre 0 et $j-1$ il existe une fonction $\eta_p(k)$ tel que $\log f_X(nj+p,k) = \eta_p(k) n^{r+1} + o(n^{r+1})$. Il reste alors pour terminer la preuve de voir que les fonctions $\eta_p(k)$ sont égales et de poser $\eta(k) = \frac{\eta_p(k)}{j^{r+1}}$. Or l'égalité des $\eta_p(k)$ peut être démontrée par la même récurrence et au moyen de la remarque 3.12 qui nous assure de l'unicité de la contribution à l'infini.

**Théorème principal** (boule unité sup) *Soient $X \to \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}_K$ un schéma projectif plat à fibre générique lisse de dimension $r$ et $L$ un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive. On désigne par $B_n$ la boule unité pour la norme sup de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, alors quand $n$ tend vers l'infini la quantité:*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}\big( -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n))\big)$$

*tend vers une limite finie appelée l'auto-intersection de L. On la note* $(L)^{r+1}$.

*Remarque.* Nous avons noté $V^n_{X,\sup}$ l'élément de volume réel de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes \mathbb{R}$ qui donne à la boule unité sup $B_n$ le volume 1. Il découle l'égalité suivante:

$$-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(B_n)) = -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,\sup})).$$

*Preuve.* Soit k l'unique nombre réel donné par la proposition 4.2 tel que $\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1})$ , on définit l'auto-intersection de $L$ par la formule $(L)^{r+1} = (L_K)^r k$. Il s'ensuit le calcul suivant:

$$\begin{aligned} -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,\sup})) &= \chi(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{X,k}) + \log(f_X(n,k)h_X(n)) && (35)\\ &= k\sum_{j=0}^{n-1} P(j) + o(n^{r+1}) && (36)\\ &= \frac{(L)^{r+1}}{(r+1)!}n^{r+1} + o(n^{r+1}) && (37) \end{aligned}$$

Le théorème suivant est une version équivalente du théorème précédent portant sur la boule unité $L^2$.

**Théorème principal** (boule unité $L^2$) *Avec les mêmes conditions et notations du théorème précédent, on a la limite suivante quand n tend vers l'infini:*

$$\frac{(r+1)!}{n^{r+1}}(-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}))) + \log(\mathrm{vol}(C_n))) \to (L)^{r+1}.$$

*où $C_n$ est la boule unité pour la norme $L^2$ de $H^0(X, L^{\otimes n}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.*

*Preuve.* C'est un corollaire directe de la comparaison entre volume sup et volume $L^2$ dans 4.1.

Nous déduisons du théorème principal (boule unité sup) le critère suivant pour l'existence de sections de norme sup plus petite que 1 en chaque place.

**Corollaire** *Si $(L)^{r+1} > 0$ alors $H^0_{Ar}(X, L^{\otimes n}) \neq 0$ pour n assez grand.*

*Preuve.* C'est une application simple du premier théorème de Minkowski.

### Remarques 4.3

1) L'énoncé du théorème de Hilbert–Samuel algébrique est le suivant : *Soient A une algèbre graduée de type fini sur un anneau artinien et M un A−module gradué de type fini $M = \oplus_{n\geq 0} M_n$. Il existe un polynôme numérique $P_M$ appelé polynôme de Hilbert–Samuel de M, vérifiant $P_M(n) =$* longueur $(M_n)$ *pour n assez grand.* Bienque nous nous soyons permis d'appeler le théorème principal théorème de Hilbert–Samuel

"arithmétique", l'analogie avec la situation algébrique s'arrête au terme dominant qui s'est avéré jusqu'à maintenant suffisant pour les applications (voir corollaire précédent).

2) S. Zhang dans [27] généralise le théorème de Hilbert–Samuel "arithmétique" à un schéma projectif et plat sans supposer la fibre générique lisse en utilisant une désingularisation de cette fibre générique.

3) L'auto–intersection définie dans le théorème principal coincide avec celle obtenue à partir des théories d'intersection d'Elkik dans [8] et de Gillet et Soulé dans [12] et [13]. Elle coincide aussi dans le cas d'une surface arithmétique avec l'auto–intersection d'Arakelov (voir section 5).

# 5 Comparaison avec les théories d'intersection

## 5.1 Cas d'une surface arithmétique

On suppose que $X$ est une surface arithmétique (donc $r = 1$) et que $L$ est muni en chaque place $\sigma$ de $\Phi$ d'une métrique permise (voir [18] et [10]). Nous pouvons alors calculer l'auto–intersection de $L$ au sens d'Arakelov qu'on note : $(L, L)_{Ar}$. on se propose de montrer que l'auto–intersection d'Arakelov coincide avec celle définie dans le théorème principal.
Pour $n$ assez grand on note $V^n_{Falt}$ l'élément de volume de Faltings de $W_n$ défini dans [10] et [18]. Le théorème de Riemann–Roch de Faltings prouvé dans [10] donne :

$$-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{Falt})) = \frac{1}{2}(L, L)_{Ar}\, n^2 + O(n) \tag{38}$$

On compare le volume de Faltings au volume $L^2$ par la fonction positive $u(n)$ définie par l'équation :

$$V^n_{Falt} = u(n) V^n_{L^2}$$

Faltings a prouvé dans [10] (voir aussi [7]) que $-\log(u(n)) \leq o(n^2)$ ce qui donne :

**Lemme 5.1** *On a l'inégalité :* $(L, L)_{Ar} \leq (L, L)$.

*Preuve.*

$$\begin{aligned}
-\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{Falt})) &= \tfrac{1}{2}(L, L)_{Ar}\, n^2 + o(n^2) && (39)\\
&= -\log(\mathrm{vol}(H^0(X, L^{\otimes n}), V^n_{L^2})) - \log(u(n)) && (40)\\
&= \tfrac{1}{2}(L, L) n^2 + o(n^2) - \log(u(n)) && (41)\\
&\leq \tfrac{1}{2}(L, L) n^2 + o(n^2) && (42)
\end{aligned}$$

où pour passer de (40) à (41), nous avons utilisé la version $L^2$ du théorème principal. Le lemme se déduit alors de ces inégalités.
Les méthodes que nous avons développées dans les sections précédentes nous permettent de prouver la proposition suivante :

**Proposition 5.2** *On a l'égalité :* $(L,L)_{Ar} = (L,L)$.

*Preuve.* Montrer l'égalité des deux auto–intersections revient à prouver que $\log(u(n)) = o(n^2)$. On peut toujours trouver un diviseur horizontal réduit $H$, un diviseur vertical à distance finie $V$, un réel $\lambda$ et un entier $m$ tels que $L^{\otimes m} = \mathcal{O}_X(H + V + \lambda[X_\infty])$ où l'égalité est une isométrie de faisceaux avec métriques permises. En utilisant les relations évidentes suivantes :

$$(L^{\otimes m})^2 = m^2(L)^2 \quad \text{et} \quad (L^{\otimes m})^2_{Ar} = m^2(L)^2_{Ar}$$
$$(L(\lambda[X_\infty]))^2 = (L)^2 + 2\lambda \deg(L_K)$$
$$(L(\lambda[X_\infty]))^2_{Ar} = (L)^2_{Ar} + 2\lambda \deg(L_K)$$

on peut supposer que $L = \mathcal{O}_X(H + V)$. On note $k = (L,L)_{Ar}/\deg(L)$ et $V_k^n$ l'élément de volume défini dans 2.1 comme au dédut de la section 4. On compare $V_k^n$ au volume de Faltings $V_{Falt}^n$ par la fonction positive $v(n)$ vérifiant : $V_{Falt}^n = v(n)V_k^n$. La relation (38) et la définition 2.1 nous montrent que $\log(v(n)) = O(n)$. On ramène ainsi la démonstration à prouver que $\log(f(n,k)) = o(n^2)$ où $f(n,k)$ compare les volumes $V_k^n$ et $V_{L^2}^n$ comme dans la section 4. On désigne par $I$ et $J$ les faisceaux d'ideaux respectifs de $H$ et $V$. Les suites exactes que nous avons introduit dans la preuve de la proposition 4.2 deviennent ($X$ est régulier) pour $n$ assez grand :

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(X, L^{\otimes n+1}) \to H^0(H, L_{|H}^{\otimes n+1}) \to 0$$

$$0 \to H^0(X, L^{\otimes n}) \to H^0(X, L^{\otimes n+1} \otimes I) \to H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V}) \to 0$$

ce qui nous permet de déduire avec les mêmes notations que la section précédente (et en particulier de la preuve du 4.2) la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) \;=\; & \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) + \\ & + \log(\#H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})) \end{aligned} \tag{43}$$

la proposition 3.1 nous donne :

$$\frac{1}{P(n)} \log(g(n)) \to -\Sigma_\sigma \varepsilon_\sigma \int_{X_\sigma} \log(|s|)\mu_\sigma, \qquad n \to +\infty$$

où $P(n)$ est le polynôme de Hilbert–Samuel algébrique de $L_\sigma$ et $\mu_\sigma$ est la métrique d'Arakelov de $X_\sigma$ qui coincide avec $ic(L_\sigma)/\deg(L)$ par définition de la métrique permise. Or pour tout $\sigma$ on a $\int_{X_\sigma} \log(|s|)\mu_\sigma = 0$. En effet, il suffit de considérer le cas où $H_K$ est un point $P$, alors $|s(Q)|_\sigma = G_\sigma(P_\sigma, Q)$ pour tout point $Q$ de $X_\sigma$ où les fonctions $G_\sigma$ sont les fonctions de Green définies dans [18], l'integrale est alors nulle par définition. D'où $\log(g(n)) = o(n)$.
On rappelle que $V_{H,\sup}^n$ désigne l'élément de volume induit sur $H^0(X, L_{|H}^{\otimes n}) \otimes \mathbb{R}$ par restriction des métriques de $L$ aux points qui forment le diviseur de $H_\sigma$ et que $V_{H,k}^n$ est l'élément de volume défini dans 2.1. Il découle alors :

$$\log(f_H(n,k)) = -\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,k}^n) + \chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,\sup}^n).$$

Par la définition 2.1, on a :

$$\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,k}^n) = (L, L)_{A_r}\, n + \deg(L_K)\chi(\mathcal{O}_K).$$

Par le théorème de Riemann–Roch arithmétique appliqué à $H$ (et après réduction à un ordre d'un corps de nombres voir [18] et [22]), on obtient :

$$\chi(H^0(H, L_{|H}^{\otimes n}), V_{H,\sup}^n) = (L, \mathcal{O}_X(H))_{A_r}\, n + O(1).$$

Comme $H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})$ est de torsion, on tire :

$$\log(\#H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})) = (L, \mathcal{O}_X(V))_{A_r}\, n + O(1).$$

La relation (43) et les développements précédents nous permettent de conclure que

$$\log(f_X(n+1, k)) - \log(f_X(n, k)) = o(n)$$

et par suite que $\log(f_X(n, k)) = o(n^2)$ ce qui termine la preuve.

**Exemple** La proposition 5.2 nous permet de donner des exemples pour lesquels nous sommes capables de calculer l'auto–intersection. Considérons le cas d'une courbe elliptique semi-stable. Soient $E$ une section de $X$ et $L = \mathcal{O}_X(E)$ muni de ses métriques permises canoniques. L. Szpiro a montré dans [23] que $(L, L) = -\log(|\Delta_{\min}|)/12$ où $\Delta_{\min}$ est le discriminant minimal de $X$ et $|\Delta_{\min}|$ sa norme. Ce qui nous montre que quand $X$ n'a pas bonne réduction partout $(L, L) < 0$. Remarquons que bien que le critère d'existence de sections effectives que nous avons donné ne s'applique pas, $L$ possède une section effective au sens d'Arakelov puisqu'il est donné comme faisceau associé à une section.

## 5.2 Cas général

On considère de nouveau le cas général et on se propose de prouver que l'auto–intersection de $L$ définie dans le théorème principal coincide avec celle obtenue à partir des théories d'intersection de [8] ou [13]. Plaçons nous dans la situation de [8] c'est à dire $X \to$Spec $\mathcal{O}_K$ projectif, Cohen-Macaulay à fibre générique lisse. Soit $L$ un faisceau inversible ample muni en chaque place à l'infini d'une métrique hermitienne à courbure positive . On note $(L)_{El}^{r+1}$ l'auto–intersection de $L$ définie dans [8] et $(L)^{r+1}$ celle obtenue à partir du théorème principal.

**Proposition 5.3** *On a l'égalité :* $(L)^{r+1} = (L)_{El}^{r+1}$.

*Preuve.* La preuve consiste en une récurrence sur la dimension de la fibre générique $r$. Dans la suite nous esquissons le passage de $r$ à $r-1$, l'initialisation de la récurrence étant identique à 5.2. Quitte à remplacer $L$ par un multiple, on peut choisir une section $s$ de $L$ telle que $s_K$ définisse un diviseur lisse et telle que $s$ soit $\mathcal{O}_K$ régulière aux points des fibres singulières de $X \to$ Spec $\mathcal{O}_K$. On a alors $L = \mathcal{O}_X(V + H)$ où $H$ est un diviseur de Cartier plat sur Spec $\mathcal{O}_K$ et $V$ vertical constitué de fibres lisses. On pose alors $k = (L)_{El}^{r+1}/(L_K)^r$. Montrer

l'égalité des deux auto-intersections revient à voir que $\log(f_X(n,k)) = o(n^{r+1})$. La relation de récurrence (34) devient dans notre cas :

$$\begin{aligned} \log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) &= \log(f_H(n+1,k)) - \log(g(n+1)) + \\ &\quad + \log(\#H^0(V, L^{\otimes n+1} \otimes I_{|V})) \end{aligned} \tag{44}$$

En utilisant la proposition 3.1, l'hypothèse de récurrence et la relation I.1.1 d) de [8] entre $(L, \ldots, L, \mathcal{O}_X(H))$ et $(L_{|H})^r$, on obtient que :

$$\log(f_X(n+1,k)) - \log(f_X(n,k)) = o(n^r)$$

ce qui termine la preuve.

# Bibliographie

UNIVERSITE PARIS SUD
BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE
ORSAY

[1] L. BOUTET DE MONVEL et V. GUILLEMIN, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Math. Studies 99, Princeton University Press 1981.

[2] J.-M. BISMUT et G. LEBEAU, *Complex immersion and Quillen metrics*, Publ. Math. Inst. hautes Etud. Sci. 74, (1991), p. 1-298.

[3] J.-M. BISMUT et E. VASSEROT, *Comportement asymptotique de la torsion analytique associée aux puissances d'un fibré en droites*, C. R. Acad. Sci. Paris, 307, (1988), p. 799-781.

[4] T. BOUCHE, *Convergence de la métrique de Fubini-Study d'un fibré linéaire positif*, Ann. Ins. Fourier, 40, fasc. 1, (1990), p. 117-130.

[5] T. BOUCHE, *Asymptotic results for hermitian line bundles: the heat kernel approch*, Prépub. Inst. Fourier, (1993).

[6] J.-P. DEMAILLY, *Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la $d''$−cohomologie*, Ann. Inst. Fourier Grenoble 35, (1985), p. 189-229.

[7] R. ELKIK, *Fonctions de Green, volumes de Faltings application aux surfaces arithmétiques* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, Astérisque 127, (1985), p. 89-112.

[8] R. ELKIK, *Métriques sur les fibrés d'intersection*, Duke Math. J. 61 No. 1, (1990), p. 303-328.

[9] G. FALTINGS, *Lectures on the arithmetic Riemann–Roch theorem*, Annals of Mathematics studies 127, (1992), Princeton University press.

[10] G. FALTINGS, *Calculus on arithmetic surfaces*, Ann. of Math. 119, (1984), p. 387-424.

[11] H. GILLET et C. SOULÉ, *An arithmetic Riemann–Roch Theorem*, Inventiones Math. 110, (1992), p. 473-543.

[12] H. GILLET et C. SOULÉ, *Arithmetic intersection theory*, Publ. Math. IHES 72, (1990), p. 94-174.

[13] H. GILLET et C. SOULÉ, *Characteristic classes for algebraic vector bundles with hermitian metrics, I, II*, Ann. Math. 131, (1990), p. 163-203 et 205-238.

[14] H. GILLET et C. SOULÉ, *Amplitude arithmétique*, C. R. Acad. Sci. Paris 307, (1988), p. 887-890.

[15] C. F. LAU et R. RUMELY, *Arithmetic capacities on $P^N$*, à paraitre dans Math. Zeit.

[16] C. F. LAU, R. RUMELY et R. VARLEY, *Existence of sectional capacity*, University of Georgia, Mathematics preprint series, N. 25, vol I, (1993)

[17] L. MANIVEL, *Un théorème de prolongement $L^2$ de sections holomorphes d'un fibré hermitien*, Math. Z. 212,(1993), p. 107-122

[18] L. MORET-BAILLY, *Métriques permises* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, Astérisque 127, (1985), p. 29-87.

[19] T. OHSAWA, *On the extension of $L^2$ holomorphic functions II*, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., 24, (1988), p. 265-275.

[20] P. PHILIPPON, *Sur des hauteurs alternatives.I*, Math. Ann. 289, (1991), p. 255-283.

[21] H. SKODA, *Remarques à propos des théorèmes d'annulation pour les fibrés semi-positifs*, dans Séminaire P. Lelong et H. Skoda (Analyse) 1978-1979, p. 252-258, Lectures Notes in Math. 822 Springer-Verlag.

[22] L. SZPIRO, *Degrés, intersections, hauteurs* dans Séminaire sur les pinceaux arithmétiques: la conjecture de Mordell, Astérisque 127 (1985), p. 11-28.

[23] L. SZPIRO, *Sur les propriétés numériques du dualisant-relatif d'une surface arithmétique* dans The Grothendieck Festschrift, vol. 3, (1990) Basel Boston Berlin Birkhäuser, p. 229-246

[24] G. TIAN, *On a set of polarized Kahler metrics on algebraic manifolds*, J. Differential Geometry 32, (1990), p. 99-130

[25] E. ULLMO, *Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique*, à paraitre dans American Journal of Math..

[26] P. VOJTA, *Siegel's theorem in the compact case*, Ann. of Math. 133, (1991), p. 509-548.

[27] S. ZHANG, *Positive Line Bundles on Arithmetic Varieties*, (1992), à paraitre dans The Journal of AMS.

# Chapitre III

# Auto–intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$

Ce chapitre reprend un article écrit conjointement avec E. Ullmo.

## 1 Introduction et énoncés des résultats

Une surface arithmétique est l'unique modèle régulier minimal d'une courbe lisse et géométriquement connexe de genre $g$ non nul sur un corps de nombres. Arakelov [1] a développé en 1972 une théorie des intersections pour les diviseurs "compactifiés" sur une telle surface. Cette théorie permet d'attacher à la courbe des invariants numériques analogues à ceux définis dans le cadre géométrique : l'auto–intersection du dualisant relatif et le degré de son image directe. Ces invariants sont centraux dans les preuves de la conjecture de Mordell sur les corps de fonctions en toute caractéristique dues à Parshin, Arakelov et Szpiro [21]. On s'intéresse ici à l'auto–intersection du dualisant relatif.
Faltings a prouvé dans [9] qu'elle est positive ou nulle en tout genre et nulle pour les courbes elliptiques. On conjecture qu'en genre $g \geq 2$, l'auto–intersection du dualisant relatif est strictement positive. Cette conjecture a été prouvée par Zhang [26] pour les courbes ayant au moins une fibre de mauvaise réduction. Grâce à ces travaux et ceux de Burnol [3], cette conjecture est prouvée pour certaines courbes à bonne réduction partout. La signification arithmétique de cet invariant Arakelovien a été donnée par Szpiro [22]. Il a démontré que la non nullité de l'auto–intersection du dualisant relatif dans le cas lisse est équivalente à la conjecture de Bogomolov. Cette conjecture affirme que les points arithmétiques d'une courbe plongée dans sa jacobienne sont discrets pour la "topologie de Néron–Tate". C'est une généralisation du théorème de Raynaud [19] (conjecture de Lang) sur la finitude de l'ensemble des points de $X(\overline{K})$ qui sont de torsion après plongement de la courbe dans sa jacobienne.
L'auto–intersection du dualisant relatif n'est connue explicitement que pour les courbes elliptiques (où elle est nulle) et pour les courbes de genre 2 [2]. Dans ce travail, nous calculons l'auto–intersection du dualisant relatif des courbes modulaires $X_0(N)$ pour des entiers $N$ sans facteurs carrés.

## 1.1 Théorie d'Arakelov sur les surfaces arithmétiques

Soient $K$ un corps de nombres et $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers. Soient $X$ une courbe lisse et géométriquement connexe de genre $g$ non nul sur $K$ et $X_{\mathcal{O}_K}$ son modèle régulier minimal. Quitte à élargir $K$, on suppose que $X_{\mathcal{O}_K}$ est semi-stable. Pour tout plongement $\sigma$ de $K$ dans $\mathbb{C}$, on note $X_\sigma$ la surface de Riemann obtenue à partir de $X$ par le changement de base défini par $\sigma$. La surface $X_\sigma$ est munie d'une $(1,1)$-forme canonique

$$\nu_\sigma = \frac{i}{2g}\sum_{i=1}^{g}\omega_i \wedge \overline{\omega}_i,$$

pour une base orthonormée $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ de $H^0(X_\sigma, \Omega^1)$ où $\Omega^1$ est le faisceau des différentielles holomorphes sur $X_\sigma$ pour le produit scalaire :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{i}{2}\int_{X_\sigma} \alpha \wedge \overline{\beta}.$$

Arakelov a défini une théorie des intersections pour les fibrés inversibles sur $X_{\mathcal{O}_K}$ munis en chaque place à l'infini $\sigma$ de $K$ d'une métrique permise (à courbure proportionnelle à $\nu_\sigma$). Le faisceau $\omega$, dualisant relatif de $X_{\mathcal{O}_K}$ sur Spec $\mathcal{O}_K$ est canoniquement muni de métriques permises [1, 18]. Son auto-intersection $\frac{1}{[K:\mathbb{Q}]}\omega^2$ ne dépend pas du corps $K$.

## 1.2 Auto-intersection du dualisant relatif de $X_0(N)$

Soit $N \geq 1$ un entier. La courbe $X_0(N)$ est la compactification de l'espace de module des courbes elliptiques muni d'un sous-groupe cyclique d'ordre $N$. Elle a une structure de courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$. Si $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$ $X_0(N)$ est de genre $g$ non nul. Si de plus $N$ est sans facteurs carrés, le modèle régulier minimal de $X_0(N)$ sur Spec $\mathbb{Z}$, noté $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ est semi-stable. La courbe $X_0(N)$ sur $\mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe au quotient $\Gamma_0(N)\backslash(\mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{Q}))$, où $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré et $\Gamma_0(N)$ est le sous-groupe modulaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ ; \ ad - Nbc = 1 \right\}$$

Soient $d\mu_0$ la métrique de Poincaré définie sur $\mathcal{H}$ par $d\mu_0 = \dfrac{dx\ dy}{y^2}$ et vol le volume de $X_0(N)$ pour cette métrique.

**Théorème A** *Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout entier $N$ premier à 6 et sans facteurs carrés, l'auto-intersection du dualisant relatif de la courbe modulaire $X_0(N)$ est bornée supérieurement par :*

$$0 < \omega^2 \leq -8\pi \frac{g-1}{\mathrm{vol}} \lim_{s \to 1}\left(\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1}\right) + O_\varepsilon(N^{1+\varepsilon})$$

*où $Z(s)$ est la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$.*

Il est à noter que l'on ne sait pas établir le comportement asymptotique en $N$ du terme constant en 1 de la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$. Bien que notre intérêt principal soit de borner l'auto–intersection du dualisant relatif, le théorème A donne une majoration non triviale de ce terme constant. Nous détaillerons dans la suite les différentes étapes de la preuve de ce théorème. Soient $E_\infty$ et $E_0$ les sections de $X_0(N)_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z})$ correspondantes aux deux pointes 0 et $\infty$. Soient $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$ deux diviseurs verticaux de $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ vérifiant :

$$(\omega - (2g-2)E_x + \Phi_x, F) = 0 \text{ pour tout } F \text{ vertical}$$

où $x$ désigne respectivement 0 et $\infty$. La proposition suivante lie $\omega^2$ à la géométrie des pointes sur $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$.

**Proposition B** *On a l'inégalité :*

$$\omega^2 \leq -4g(g-1)(E_0, E_\infty) + \frac{1}{g-1}(g(\Phi_0, \Phi_\infty) - \frac{\Phi_0^2 + \Phi_\infty^2}{2})$$

*avec égalité si $N$ est premier à 6, sans facteurs carrés et possède un diviseur premier congru à 3 modulo 4 et un diviseur premier congru à 2 modulo 3.*

Cette proposition est une conséquence du théorème de Manin–Drinfeld qui nous assure qu'un diviseur de degré 0 de $X_0(N)$ à support dans les pointes est de torsion dans la jacobienne [5, 15, 7] et de la comparaison entre hauteur de Néron–Tate et intersection d'Arakelov due à Faltings et Hriljac [9, 11, 18]. La description du modèle régulier minimal de $X_0(N)$ due à Deligne et Rapoport [4, 16] nous permet de calculer les diviseurs verticaux $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$. Le théorème A se ramène ainsi au calcul de l'intersection d'Arakelov des deux sections $E_0$ et $E_\infty$. Ces deux sections ne se coupent pas à distance finie, leurs intersection est par suite entièrement à l'infini : $(E_0, E_\infty) = -g_{Ar}(0, \infty)$ où $g_{Ar}$ est la fonction de Green d'Arakelov sur $X_0(N)$ définie dans la section suivante.

## 1.3 Groupes Fuchsiens de première espèce

Soit $\Gamma$ un groupe Fuchsien de première espèce c'est à dire un sous–groupe discret de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ tel que le quotient $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ soit non compact de volume fini. Soient $X$ la courbe modulaire associée à $\Gamma$ et $g$ son genre qu'on suppose non nul. L'espace $\mathcal{S}(2, \Gamma)$ des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma$ s'identifie avec l'espace des formes différentielles globales $H^0(X, \Omega^1)$ où $\Omega^1$ est le faisceau canonique de $X$. Le produit scalaire hermitien de Petersson $\langle f, h\rangle$ de deux formes paraboliques $f$ et $h$ dans $\mathcal{S}(2, \Gamma)$ est défini par:

$$\langle f, h\rangle = \int_X y^2\ f(z)\overline{h}(z)\ d\mu_0(z).$$

Soit $f_1, \ldots, f_g$ une base orthonormée de $\mathcal{S}(2,\Gamma)$ pour le produit de Petersson. La $(1,1)$–forme canonique d'Arakelov sur $X$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \nu(z) &= \frac{i}{2g}\sum_{i=1}^{g}|f_i(z)|^2\, dz\wedge d\bar{z} = F(z)\, d\mu_0(z) \\ F(z) &= \frac{1}{g}\, y^2 \sum_{i=1}^{g}|f_i(z)|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

La fonction de Green d'Arakelov [1, 6] $g_{A_r}$ est l'unique fonction $C^\infty$ sur $X\times X\backslash\Delta$ ($\Delta$ désignant la diagonale) verifiant:

$$\begin{aligned} &i) \quad \partial_z\partial_{\bar{z}} g_{A_r}(z,w) = i\pi(\nu(z)-\delta_w) \\ &ii) \quad \int_X g_{A_r}(z,w)\,\nu(z) = 0 \quad \forall w\in X \end{aligned} \tag{2}$$

où $\delta_w$ est l'opérateur de Dirac en $w$. Dans le cas des courbes modulaires, on peut définir d'autres fonctions de Green $G_s(z,w)$ plus adaptées à la structure de quotient de $\mathcal{H}$ par un groupe Fuchsien [14, 10]. La définition exacte de ces fonctions sera donnée dans la section 2.2, retenons ici leur propriété principale. Pour tout nombre complexe $s$ on désigne par $\mathrm{D}_s$ l'opérateur différentiel du demi–plan de Poincaré $\mathcal{H}$ défini par

$$\mathrm{D}_s = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+s(1-s)\,\mathrm{Id}$$

où Id est l'identité. La fonction $G_s(z,w)$ pour $s$ tel que $\Re(s)>1$, inverse l'opérateur $\mathrm{D}_s$ agissant sur l'espace $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ des fonctions $\Gamma$–invariantes de carré intégrable pour la métrique de Poincaré : pour toute fonction $\alpha(z)$ dans $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$

$$\mathrm{D}_s\int_X G_s(z,t)\alpha(t)d\mu_0(t) = \alpha(z).$$

La fonction $G_s(z,w)$ admet un prolongement méromorphe sur le demi–plan $\Re(s)>\frac{1}{2}$ avec un pôle simple en $s=1$ de résidu $-(\mathrm{vol})^{-1}$ indépendament des variables $z$ et $w$ (vol désigne le volume de $X$ pour la métrique de Poincaré).
Une autre classe de fonctions $\Gamma$–invariantes annulées par l'opérateur $D_s$ est donnée par les séries d'Eisenstein. Pour les définir introduisons les notations suivantes. Pour chaque pointe $\kappa$ de $X$, on note $\Gamma_\kappa$ le stabilisateur de $\kappa$ dans $\Gamma$. On fixe un élément $\sigma_\kappa\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ tel que $\sigma_\kappa(\kappa)=\infty$ et $\sigma_\kappa\Gamma_\kappa\sigma_\kappa^{-1}=\Gamma_0$ où $\Gamma_0=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & b\\ 0 & \pm1\end{pmatrix}\ b\in\mathbb{Z}\right\}$. La série d'Eisenstein en la pointe $\kappa$, $E_\kappa(z,s)$ est obtenue par prolongement méromorphe à tout le plan complexe de la série absolument convergente pour $\Re(s)>1$ :

$$E_\kappa(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\kappa\backslash\Gamma}(\mathrm{Im}(\sigma_\kappa\gamma z))^s.$$

Elle admet un pôle simple en $s=1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1}$ indépendant de la variable $z$.
Une fonction $\Gamma$–invariante $f$ vérifie : $f(\sigma_\kappa^{-1}(z+1)) = f(\sigma_\kappa^{-1}(z))$ et admet par suite un

développement de Fourier en la pointe $\kappa$

$$f(\sigma_\kappa^{-1}(z)) = \sum_n a_n(y,\kappa)\exp(2i\pi nx).$$

Le terme constant du développement de Fourier de la série d'Eisentein $E_\kappa(z,s)$ en la pointe $l$ est de la forme $\delta_{\kappa,l}y^s + \varphi_{\kappa,l}(s)y^{1-s}$ [12] où $\delta_{\kappa,l}$ est le symbole de Krönecker. Les fonctions $\varphi_{\kappa,l}(s)$ admettent des prolongements méromorphes à tout le plan complexe avec des pôles simples en $s=1$ de résidus $(\mathrm{vol})^{-1}$.

## 1.4 Fonction de Green d'Arakelov aux pointes

Le théorème suivant donne l'intérprétation spectrale de la fonction de Green d'Arakelov aux pointes pour une courbe modulaire associée à un groupe Fuchsien de première espèce, de genre non nul et ayant au moins deux pointes.

**Théorème C** *Soit $X$ une courbe modulaire associée à un groupe Fuchsien de première espèce de genre non nul. Soient $\kappa$ et $l$ deux pointes différentes de $X$, alors*

$$\begin{aligned} g_{Ar}(\kappa,l) &= -2\pi\lim_{s\to 1}(\varphi_{\kappa,l}(s) - \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)}) - \frac{2\pi}{\mathrm{vol}} \\ &\quad +2\pi\lim_{s\to 1}(\frac{1}{\mathrm{vol}\ s(s-1)} + \int_{X\times X} G_s(z,w)\nu(z)\nu(w)) \\ &\quad +2\pi\lim_{s\to 1}(\int_X E_\kappa(z,s)\nu(z) + \int_X E_l(w,s)\nu(w) - \frac{2}{\mathrm{vol}(s-1)}) \end{aligned}$$

Ce théorème découle de la comparaison des deux fonctions de Green $G_s$ et $g_{Ar}$ et sera démontré dans la section 2. En général le théorème de Stokes est suffisant pour comparer deux fonctions de Green. Dans notre cas une difficulté supplémentaire provient de la singularité de la métrique de Poincaré aux pointes. Elle est contournée au moyen d'une méthode de calcul due à Maass. Les fonctions qui apparaissent dans le théorème C, admettent des pôles simples en $s=1$. Leurs résidus en 1 sont au signe près $(\mathrm{vol})^{-1}$ (voir section 1.3). Leurs termes constants dans les développements de Laurent au voisinage de 1 sont beaucoup moins explicites. Ils sont aussi d'inégale importance pour nous. Certains sont négatifs et seront trivialement bornés par 0. Le terme constant le plus difficile à controler est celui de la transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov. Nous introduisons dans la section suivante cette transformée et énonçons le théorème principal que nous prouverons dans la section 3 pour les courbes modulaires modulaires $X_0(N)$ pour des entiers $N$ impairs et sans facteurs carrés.

## 1.5 Transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$

La transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$ est définie par :

$$R_F(s) = \int_{X_0(N)} E_\infty(z,s)\nu(z) = \int_{X_0(N)} F(z)E_\infty(z,s)d\mu_0(z).$$

Cette fonction est convergente pour $\Re(s) > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe au voisinage de 1 avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1}$. On désigne par $C_F$ son terme constant de telle sorte que le développement de Laurent de $R_F$ au voisinage de 1 soit :

$$R_F(s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)} + C_F + O(s-1).$$

**Théorème D** *Soit $N$ un entier impair, sans facteurs carrés tel que la courbe modulaire $X_0(N)$ est de genre strictement positif. La transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov sur $X_0(N)$ relative à la pointe 0 coincide avec celle relative à la pointe $\infty$ :*

$$R_F(s) = \int_{X_0(N)} F(z)E_\infty(z,s)d\mu_0(z) = \int_{X_0(N)} F(z)E_0(z,s)d\mu_0(z)$$

*Son terme constant $C_F$ est donné par :*

$$C_F = -\frac{1}{2g\mathrm{vol}} \lim_{s\to 1}\left(\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1}\right) + \frac{\Gamma'(2) + \gamma - \log(4\pi)}{4\pi g} + O_\epsilon\left(\frac{1}{N^{2-\epsilon}}\right)$$

*où $Z(s)$ est la fonction zêta de Selberg pour $\Gamma_0(N)$ et $\gamma$ est la constante d'Euler.*

Le $O_\epsilon(\frac{1}{N^{2-\epsilon}})$ du théorème D est complétement explicite en fonction de $N$ (voir proposition 3.3.6). Dans le cas du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, Zagier [24] applique la méthode de Rankin–Selberg aux noyaux donnant les opérateurs de Hecke sur l'espace des formes modulaires paraboliques de poids $k > 2$. La métrique d'Arakelov peut être vue comme la trace d'un tel opérateur pour $\Gamma_0(N)$. Malheuresement ces noyaux divergent en poids 2. Nous interprétons la métrique d'Arakelov comme la trace de la décomposition spectrale du noyau de Selberg de poids 2 sur l'espace propre du laplacien $\Delta_2$ agissant sur les formes automorphes de poids 2 relatif à la valeur propre 0. La méthode de Rankin–Selberg appliquée aux noyaux de Selberg de poids 0 et à leurs décompositions spectrales est une stratégie proposée par Zagier [25] pour retrouver la formule de trace de Selberg. Il suffit pour cela d'identifier les résidus. Notre méthode consiste à écrire la décomposition spectrale de la différence des noyaux de Selberg de poids 0 et 2. On applique ensuite la méthode de Rankin–Selberg à chaque membre de cette égalité pour la fonction particulière $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$. Le théorème D s'obtient en identifiant les termes constants et en prenant la limite quand $t$ tend vers l'infini.

*Remerciements* L. Szpiro nous a proposé d'étudier ce sujet, nous tenons à le remercier chaleuresement pour ses nombreux conseils et encouragements. Des remarques écrites et orales de S. Zhang nous ont été extremement précieuses pour l'élaboration de ce travail, nous tenons à lui exprimer notre gratitude. Nos remerciements vont aussi à D. Zagier pour ses travaux sans lesquels ce papier n'aurait pas vu le jour. Nous remercions L. Clozel, B. Edixhoven, E. Fouvry et J. Tilouine pour les discussions dont ce texte a bénéficié.

# 2 Interprétation spectrale de la fonction de Green d'Arakelo des courbes modulaires

Cette section est consacrée à la preuve du théorème C. Soient $\Gamma$ un groupe Fuchsien de première espèce et $X$ la courbe modulaire associée de genre non nul. On reprend les notation et définition introduites dans la section 1.3 relatives à ce groupe, en particulier la métrique d'Arakelov définie par (1) et fonction de Green d'Arakelov définie dans (2). Toute fonction $g$ symétrique, $C^\infty$ sur $X \times X \backslash \Delta$ et vérifiant $\partial_z \partial_{\bar{z}} g(z,w) = i\pi(\nu(z) - \delta_w)$, différe de $g_{A_\Gamma}$ par une constante. On fixe parmis ces fonctions, $g$ telle que

$$\int_{X \times X} g(z,w)\ d\mu_0(z) d\mu_0(w) = 0. \tag{3}$$

Le théorème C sera prouvé en évaluant d'abord $g$ en deux pointes différentes puis en calculant la différence entre $g$ et $g_{A_\Gamma}$.
Soit $\mathcal{D}$ un domaine fondamental non borné de $\Gamma$. Soit $Y > 1$, on fixe pour chaque pointe $\kappa$ le voisinage $\mathcal{D}_\kappa(Y)$ et son bord $\mathcal{C}_\kappa(Y)$ définis par:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\kappa(Y) &= \{z \in \mathcal{D} \text{ tel que } \mathrm{Im}(\sigma_\kappa(z)) > Y\} \\ \mathcal{C}_\kappa(Y) &= \{z \in \mathcal{D} \text{ tel que } \mathrm{Im}(\sigma_\kappa(z)) = Y\} \end{aligned}$$

La fonction de Green $g$ induit sur $\mathcal{H}$ une fonction $\Gamma$–invariante qui sera encore notée $g$. Son développement de Fourier en la pointe $\kappa$ est donné par:

$$g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy), w) = \sum_m b_m(y,w,\kappa) \exp(2i\pi m x). \tag{4}$$

## 2.1 Etude spectrale

On rappelle que $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ désigne l'espace des fonctions $\Gamma$–invariantes de carré intégrable pour la mesure de Poincaré. Cet espace se décompose via l'opérateur $\mathrm{D}_0$ sous la forme

$$L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0) = \oplus_{n\geq 0}\ \mathbb{C}[\varphi_n] \oplus \mathcal{E}$$

où $\varphi_n$ est une famille orthonormée de fonctions propres de $\mathrm{D}_0$ de valeurs propres associées $-\lambda_n$ et $\mathcal{E}$ est la partie relative au spectre continu. La famille non bornée $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ forme le spectre discret de l'opérateur $\mathrm{D}_0$. On note $s_n$ et $r_n$ les nombres complexes vérifiant $\lambda_n = s_n(1-s_n) = 1/4 + r_n^2$ ($r_n$ est réel ou imaginaire pur). La partie relative au spectre continu est donnée par l'isomorphisme suivant:

$$\begin{aligned} (L^2(\mathbb{R}_+))^\Phi &\to \mathcal{E} \\ (f_\kappa)_{\kappa\in\Phi} &\to \sum_\kappa \int_0^{+\infty} f_\kappa(t) E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it)\ dt \end{aligned}$$

où $L^2(\mathbb{R}_+)$ désigne les fonctions de $\mathbb{R}_+$ de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue, $E_\kappa(z,s)$ est la série d'Eisenstein en la pointe $\kappa$ et $\Phi$ est l'ensemble des pointes de $\Gamma$.

Soit $\alpha \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ de décomposition spectrale

$$\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} A_n\varphi_n(z) + \sum_{\kappa} \int_0^{+\infty} h_\kappa(t) E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it)\ dt$$

alors

$$\begin{aligned} A_n &= (\alpha, \varphi_n) = \int_X \alpha(z)\overline{\varphi}_n(z)\ d\mu_0(z) \\ h_\kappa(t) &= \frac{1}{2\pi}(\alpha, E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it)) = \frac{1}{2\pi}\int_X \alpha(z) E_\kappa(z, \frac{1}{2} - it)\ d\mu_0(z) \end{aligned}$$

et sa norme $L^2$ est donnée par

$$\|\alpha\|^2 = \sum_n |A_n|^2 + 2\pi \sum_\kappa \int_0^{+\infty} |h_\kappa(t)|^2\ dt$$

On fixe pour toute la suite la décomposition spectrale de la fonction $F$ définie dans (1)

$$F(z) = \sum_{n\geq 0} A_n\varphi_n(z) + \sum_\kappa \int_0^{+\infty} A_\kappa(t) E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it)\ dt \tag{5}$$

On se propose d'étudier la forme hermitienne induite par $g$ et définie pour $\alpha, \beta \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ par

$$Q(\alpha, \beta) = \int_{X\times X} \overline{\alpha}(z) g(z, w)\beta(w)\ d\mu_0(z) d\mu_0(w)$$

**Proposition 2.1.1** *Soient $\alpha, \beta \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ qui se décomposent suivant:*

$$\alpha(z) = \sum_n \theta_n\varphi_n(z) + \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \theta_\kappa(t) E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it) dt$$

$$\beta(z) = \sum_n \rho_n\varphi_n(z) + \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \rho_\kappa(t) E_\kappa(z, \frac{1}{2} + it) dt$$

*alors*

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= 2\pi\Big[\sum_{n>0} -\frac{1}{\lambda_n}\overline{\theta}_n\rho_n - 2\pi\sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{\overline{\theta}_\kappa(t)\rho_\kappa(t)}{\frac{1}{4} + t^2}\ dt \\ &+ \rho_0\sqrt{\mathrm{vol}}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}A_n\overline{\theta}_n + 2\pi\sqrt{\mathrm{vol}}\ \rho_0\ \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{A_\kappa(t)\overline{\theta}_\kappa(t)}{\frac{1}{4} + t^2}\ dt \\ &+ \overline{\theta}_0\sqrt{\mathrm{vol}}\sum_{n>0}\frac{1}{\lambda_n}\overline{A}_n\rho_n + 2\pi\sqrt{\mathrm{vol}}\ \overline{\theta}_0\ \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{\overline{A}_\kappa(t)\rho_\kappa(t)}{\frac{1}{4} + t^2}\ dt\ \Big] \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition est basée sur une méthode de calcul due à Maass que nous allons développer dans la suite.

Soient $f$ une fonction $C^\infty$, $\Gamma$–invariante sur $\mathcal{H}$ et son développement de Fourier en la pointe $\kappa$:

$$f(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy)) = \sum_m a_m(y,\kappa)\exp(2i\pi m x).$$

Soit $Y$ un réel assez grand, on appelle partie compacte de $f$ la fonction

$$f^Y(z) = \begin{cases} f(z) - a_0(\mathrm{Im}\ \sigma_\kappa(z),\kappa) & \text{si } \mathrm{Im}\ \sigma_\kappa(z) > Y \text{ pour un } \kappa \\ f(z) & \text{sinon} \end{cases}$$

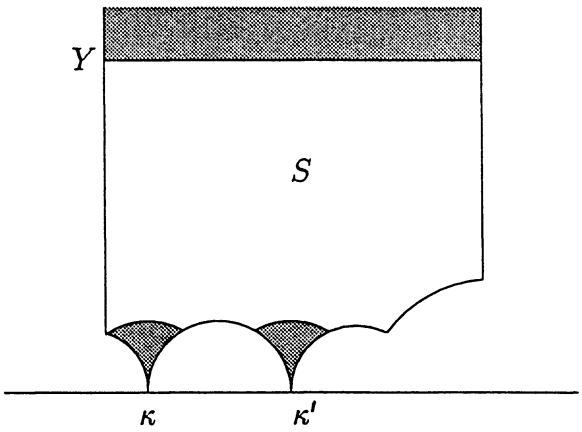
On suppose que $f$ vérifie $\mathrm{D}_0 f = s(s-1)f$ et que $f^Y \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ (c'est en particulier le cas de la série d'Eisenstein $E_\kappa(z,s)$ et des fonctions $\varphi_n$). On a alors le lemme suivant:

**Lemme 2.1.1** *Soit $w$ tel que* $\mathrm{Im}\ \sigma_\kappa(w) \neq Y$ *pour toutes les pointes $\kappa$, alors*

$$\int_X g(z,w)f^Y(z)\ d\mu_0(z) = -\frac{2\pi}{s(s-1)}\int_X f^Y(z)\nu(z) + \frac{2\pi}{s(s-1)}f^Y(w)$$
$$+\frac{1}{s(s-1)}\sum_\kappa (a_0'(Y,\kappa)b_0(Y,w,\kappa) - b_0'(Y,w,\kappa)a_0(Y,\kappa))$$

*où $b_0(Y,w,\kappa)$ est le terme constant du développement de Fourier de $g(z,w)$ en la pointe $\kappa$.*

*Preuve.* Soit $S = \mathcal{D}\backslash\bigcup_\kappa \mathcal{D}_\kappa(Y)$




$$\int_S g(z,w)f(z)\ d\mu_0(z) = \frac{1}{s(s-1)}\int_S g(z,w)\mathrm{D}_0 f(z)\ d\mu_0(z)$$

Posons $d = \partial + \overline{\partial}$ et $d^c = \dfrac{\partial - \overline{\partial}}{4i\pi}$ alors $dd^c = -\dfrac{\partial\overline{\partial}}{2i\pi}$ d'où

$$\mathrm{D}_0 f(z)\ d\mu_0(z) = 4\pi\ dd^c f(z)$$

En appliquant Stokes à $S$ on trouve

$$\begin{aligned}\int_S g(z,w)f(z)\ d\mu_0(z) &= \frac{4\pi}{s(s-1)}\int_S g(z,w)dd^c f(z) \\ &= \frac{4\pi}{s(s-1)}\int_S dd^c[g(z,w)]f(z) \\ &- \frac{4\pi}{s(s-1)}\sum_\kappa \int_{C_\kappa(Y)} g(z,w)d^c f(z) - f(z)d^c g(z,w)\end{aligned}$$

Or $d^c = \frac{1}{4\pi}(\frac{\partial}{\partial x}dy - \frac{\partial}{\partial y}dx)$ d'où

$$\begin{aligned} & - 4\pi \int_{C_\kappa(Y)} g(z,w)d^c f(z) - f(z)d^c g(z,w) \\ &= \int_{C_\kappa(Y)} (g(z,w)\frac{\partial}{\partial y}f(z) - f(z)\frac{\partial}{\partial y}g(z,w))dx \\ &= \sum_m b_{-m}(Y,w,\kappa)a'_m(Y,\kappa) - a_m(Y,\kappa)b'_{-m}(Y,w,\kappa) \end{aligned}$$

De la relation $\mathrm{D}_0 f = s(s-1)f$ on tire

$$a''_m = a_m(\frac{s(s-1)}{y^2} + 4\pi m^2). \tag{6}$$

dans cette équation on a noté $a_m$ pour $a_m(y,\kappa)$ afin d'alléger les notations. Il découle alors pour $m \neq 0$

$$a_m(y) = \alpha_m\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi|m|y) + \beta_m\sqrt{y}I_{s-1/2}(2\pi|m|y)$$

où $K_{s-1/2}$ et $I_{s-1/2}$ sont les fonctions de Bessel modifiées [12, 14]. Pour $m = 0$ la solution est

$$a_0(y) = \begin{cases} \alpha_0 y^s + \beta_0 y^{1-s} & \text{si } s \neq \frac{1}{2} \\ \alpha_0\sqrt{y} + \beta_0\sqrt{y}\log(y) & \text{quand } s = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Du fait que $f^Y \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ on obtient $\beta_m = 0$ pour $m \neq 0$. Des estimations classiques sur les fonctions de Bessel [10] nous permettent de déduire que pour $m \neq 0$

$$\begin{aligned} a_m(y,\kappa) &= O(\exp(-2\pi|m|y)) \\ a'_m(y,\kappa) &= O(\exp(-2\pi|m|y)) \end{aligned}$$

D'autre part, comme $g$ est $C^\infty$ sur $X \times X\backslash\Delta$ alors pour tout entier $m$ on a

$$\begin{aligned} b_m(y,w,\kappa) &= O(1) \\ b'_m(y,w,\kappa) &= O(1) \end{aligned}$$

Revenons à notre calcul, il découle de l'équation (6) la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial y}(b_{-m}a'_m - a_m b'_{-m}) = b_{-m}a''_m - a_m b''_{-m} = a_m[b_{-m}(\frac{s(s-1)}{y^2} + 4\pi m^2) - b''_{-m}]$$

Tenant compte de cette relation et des estimation établies précédemment, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \sum_{m\neq 0} b_{-m}a'_m - a_m b'_{-m} \\ &= -\int_Y^{+\infty} \sum_{m\neq 0} a_m[b_{-m}(\frac{s(s-1)}{y^2} + 4\pi m^2) - b''_{-m}]\, dy \\ &= \int_Y^{+\infty}\int_0^1 f^Y(\sigma_\kappa^{-1}(z))\mathrm{D}_s g(\sigma_\kappa^{-1}(z),w)\, d\mu_0(z) \\ &= \int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} f^Y(z)\mathrm{D}_0 g(z,w)d\mu_0(z) + s(1-s)\int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} f^Y(z)g(z,w)d\mu_0(z) \\ &= 4\pi\int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} f^Y(z)dd^c g(z,w) - s(s-1)\int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} f^Y(z)g(z,w)d\mu_0(z) \end{aligned}$$

En recollant les termes on trouve:

$$\int_X g(z,w)f^Y(z)\ d\mu_0(z) = \frac{4\pi}{s(s-1)}\int_X f^Y(z)dd^c g(z,w)$$
$$+\ \frac{1}{s(s-1)}\sum_\kappa (a_0'(Y,\kappa)b_0(Y,w,\kappa) - b_0'(Y,w,\kappa)a_0(Y,\kappa))$$

Le lemme découle alors de la définition de la fonction de Green $g$.

Quand $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$, on peut améliorer le lemme précédent et on trouve

**Lemme 2.1.2** *Si $f \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ et $\lambda = s(s-1) \neq 0$, alors*

$$\int_X f(z)g(z,w)d\mu_0(z) = -\frac{2\pi}{s(s-1)}\int_X f(z)\nu(z) + \frac{2\pi}{s(s-1)}f(w)$$

*Preuve.* Ceci découle du lemme précédent en faisant tendre $Y$ vers l'infini et au moyen de la vérification suivante :

$$\lim_{Y\to+\infty} b_0(Y,w,\kappa)a_0'(Y,\kappa) - a_0(Y,\kappa)b_o'(Y,w,\kappa) = 0$$

En effet

$$b_o(Y,w,\kappa) = \int_0^1 g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),w)dx \to g(\kappa,w) \text{ quand } Y \to +\infty$$

$$\begin{aligned} b_0'(Y,w,\kappa) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),w)dx \\ &= -4\pi\int_0^1 d^c g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),w) \\ &= -4\pi\int_Y^{+\infty}\int_0^1 dd^c g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy),w) \\ &= -4\pi\int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} dd^c g(z,w) = 2\pi\int_{\mathcal{D}_\kappa(Y)} \nu(z) \end{aligned}$$

dés que Im $\sigma_\kappa(w) < Y$. Comme $f_1, f_2 \ldots f_g$ sont des formes paraboliques, il découle l'équivalent suivant:

$$b_o'(Y,w,\kappa) \simeq C^{te}\exp(-4\pi Y)$$

d'autre part $a_0(Y,\kappa) = \alpha_\kappa Y^s + \beta_\kappa Y^{1-s}$ avec $s \in [1/2, 1[\cup\{1/2+it \quad t \in \mathbb{R}\}$ car $f$ est une fonction propre pour une valeur propre non nulle de $D_0$ dans $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$. Ceci justifie la limite annoncée et par suite le lemme.

On peut aussi appliquer le lemme 2.1.1 aux séries d'Eisenstein. Pour cela on fixe les notations suivantes: le développement de Fourier de la série d'Eisenstein $E_\kappa(z,s)$ (avec $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$) au voisinage de la pointe $l$ est donné par

$$E_\kappa(\sigma_l^{-1}(x+iy),s) = \sum_m \Phi_{\kappa,m}(y,s,l)\exp(2i\pi mx)$$

Il est alors connu que [12]

1. $D_0 E_\kappa(z,s) = s(s-1)E_\kappa(z,s)$ et $E_\kappa^Y(z,s) \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$

2. $\Phi_{\kappa,0}(y,s,l) = \delta_{\kappa,l} y^s + \varphi_{\kappa,l}(s) y^{1-s}$ où les $\varphi_{\kappa,l}(s)$ sont des fonctions méromorphes de $s$ dont les pôles sont parmis les $s \in [1/2, 1]$ tel que $s(s-1)$ est une valeur propre de $D_0$.

3. Il découle de la preuve du lemme 2.1.1 que pour $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{\kappa,m}(Y,s,l) &= O(\exp(-2\pi|m|Y)) \\ \Phi'_{\kappa,m}(Y,s,l) &= O(\exp(-2\pi|m|Y)) \end{aligned}$$

**Lemme 2.1.3**

$$\begin{aligned} \int_X g(z,w) E_\kappa(z, \frac{1}{2}+it) d\mu_0(z) &= \frac{2\pi}{1/4+t^2} \int_X E_\kappa(z, \frac{1}{2}+it)\nu(z) \\ &\quad - \frac{2\pi}{1/4+t^2} E_\kappa(w, \frac{1}{2}+it) \end{aligned}$$

*Preuve.* Remarquons d'abord que $\int_X E_\kappa(z, \frac{1}{2}+it)\nu(z)$ est convergente. Reprenons ensuite la preuve du lemme 2.1.1, cette preuve est basée sur la limite suivante pour $m \neq 0$:

$$\lim_{Y \to +\infty} b_{-m} a'_m - a_m b'_{-m} = 0$$

Ce résultat est aussi valable pour $m = 0$ dans le cas des séries d'Eisenstein $E_\kappa(z, 1/2+it)$ comme nous l'avons signalé dans la preuve du lemme 2.1.2.

*Preuve.* (de la proposition 2.1.1) Elle découle simplement des 3 lemmes précédents et de la normalisation (3) de la fonction $g$.

La proposition 2.1.1 induit l'égalité formelle suivant:

$$\begin{aligned} g(z,w) &= 2\pi \Big[ \sum_{n>0} -\frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(z)\overline{\varphi}_n(w) \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2} E_\kappa(z, \frac{1}{2}+it) E_\kappa(w, \frac{1}{2}-it)\, dt \\ &+ \sum_{n>0} \frac{A_n}{\lambda_n} \varphi_n(z) + \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{A_\kappa(t)}{\frac{1}{4}+t^2} E_\kappa(z, \frac{1}{2}+it)\, dt \\ &+ \sum_{n>0} \frac{\overline{A}_n}{\lambda_n} \overline{\varphi}_n(w) + \sum_\kappa \int_0^{+\infty} \frac{\overline{A}_\kappa(t)}{\frac{1}{4}+t^2} E_\kappa(w, \frac{1}{2}-it)\, dt \Big] \end{aligned}$$

Le problème de cette expression est qu'elle n'est pas convergente.

## 2.2 Fonction de Green aux pointes

On introduit dans cette section d'autres fonctions de Green $G_s(z,w)$ plus adaptées à la structure de quotient sur $X$. En les comparant à la fonction de Green d'Arakelov, on donnera un sens à l'expression précédente. Soit $s$ un nombre complexe de partie réelle $> \frac{1}{2}$, on s'intéresse aux fonctions $k_s(z,w)$ sur le demi-plan de Poincaré vérifiant les propiétés suivantes :

1. $k_s(\gamma z, \gamma w) = k_s(z,w)$ pour tout $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$
2. $k_s(z,w)$ est $C^\infty$ quand $z$ varie dans $\mathcal{H}\backslash\{w\}$
3. $k_s(z,w) = \frac{1}{2\pi}\log|z-w| + O(1)$ au voisinage de $w$
4. $\mathrm{D}_s k_s(z,w) = 0$ pour $z \in \mathcal{H}\backslash\{w\}$
5. $k_s(z,w)$ est suffisament petite au voisinage du bord de $\mathcal{H}$

La propriété 1 est équivalente au fait que $k_s(z,w)$ est fonction de la distance hyperbolique :

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{\mathrm{Im}z\ \mathrm{Im}w} \tag{7}$$

On prend pour $k_s$ la fonction

$$k_s(z,w) = -\frac{1}{2\pi}Q_{s-1}(\frac{u(z,w)}{2}+1)$$

où

$$Q_{s-1}(u) = \int_0^{+\infty}(u+\sqrt{u^2-1}\cosh t)^{-s}dt \quad \text{pour } u > 1$$

est la fonction de Legendre du second espèce. On obtient la fonction de Green pour $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ en prenant la moyenne de la fonction $k_s$ sur le groupe $\Gamma$. Quand $s$ est de partie réelle strictement plus grande que 1, la fonction :

$$G_s(z,w) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma} k_s(u(z,\gamma w))$$

est uniformément et absolument convergente sur tout compact de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ ne comportant pas de points $(z,w)$ $\Gamma$-équivalents. La fonction $G_s(z,w)$ inverse l'opérateur différentiel $D_s$ : pour tout $\alpha(z) \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$

$$\mathrm{D}_s \int_X G_s(z,t)\alpha(t)d\mu_0(t) = \alpha(z).$$

On en déduit que formellement

$$\begin{aligned} G_s(z,w) &= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{s(1-s)-\lambda_n}\varphi_n(z)\overline{\varphi}_n(w) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\sum_\kappa\int_0^{+\infty}\frac{1}{s(1-s)-\frac{1}{4}-t^2}E_\kappa(z,\frac{1}{2}+it)E_\kappa(w,\frac{1}{2}-it)dt \end{aligned}$$

On note

$$F_s(z) = \int_X G_s(z,t)F(t)d\mu_0(t) = \int_X G_s(z,t)\nu(t)$$

où la fonction $F$ est la fonction définie dans (1). La décomposition spectrale de $F_s(z)$ s'obtient à partir de (5) :

$$\begin{aligned} F_s(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{A_n}{s(1-s)-\lambda_n}\varphi_n(z) \\ &+ \sum_{\kappa}\int_0^{+\infty} \frac{A_\kappa(t)}{s(1-s)-\frac{1}{4}-t^2}E_\kappa(z,\frac{1}{2}+it)dt \end{aligned}$$

Soit $s$ un réel $> 1$, du fait que $F(z) = \overline{F}(z)$ et $\overline{G}_s(z,w) = G_s(w,z)$ ($s$ réel), on a :

$$\overline{F}_s(w) = \int_X F(t)G_s(t,w)\ d\mu_0(t) = \int_X G_s(t,w)\nu(t)$$

Enfin pour toute pointe $\kappa$, pour tout réel $y > 0$ et $m \in \mathbb{Z}$ on fixe les m–ème coefficients des développements de Fourier de $F$ et $F_s$ en la pointe $\kappa$ :

$$\begin{aligned} a_m(y,s,\kappa) &= \int_0^1 F_s(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy))\exp(-2i\pi mx)dx \\ h_m(y,\kappa) &= \int_0^1 F(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy))\exp(-2i\pi mx)dx \end{aligned}$$

**Proposition 2.2.1** *Pour tout réel $s \geq 1$, la somme suivante est uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$:*

$$\begin{aligned} H_s(z,w) &= 2\pi \sum_{n>0} \frac{1}{\lambda_n(s(s-1)+\lambda_n)}\varphi_n(z)\overline{\varphi}_n(w) \\ &+ \sum_{\kappa}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{4}+t^2)[s(s-1)+\frac{1}{4}+t^2]}E_\kappa(z,\frac{1}{2}+it)E_\kappa(w,\frac{1}{2}-it)dt \\ &- 2\pi \sum_{n>0} \frac{1}{\lambda_n(s(s-1)+\lambda_n)}(A_n\varphi_n(z)+\overline{A}_n\overline{\varphi}_n(w)) \\ &- \sum_{\kappa}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\frac{1}{4}+t^2)[s(s-1)+\frac{1}{4}+t^2]}(A_\kappa(t)E_\kappa(z,\frac{1}{2}+it)+\overline{A}_\kappa(t)E_\kappa(w,\frac{1}{2}-it))dt \end{aligned}$$

*et pour $s > 1$, on a l'égalité:*

$$g(z,w) - 2\pi G_s(z,w) + 2\pi F_s(z) + 2\pi\overline{F}_s(w) = -\frac{2\pi}{\text{vol } s(s-1)} - s(s-1)H_s(z,w)$$

*Preuve.* La proposition découle de la décomposition spectrale de $F_s$, des expressions de $g$ et de $G_s$ comme formes quadratiques et du fait que $\sum_{n\neq 0}\frac{1}{\lambda_n^2}$ est convergente. Toutes les séries et toutes les intégrales intervenant dans $H_s(z,w)$ convergent absolument et uniformément

quand $(z,w)$ varient dans un compact de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ vers la série ou l'intégrale correspondante quand $s$ tend vers 1. Par ailleurs pour tout $s\geq 1$, $H_s(z,w)$ est une fonction de $L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}\times\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0\times d\mu_0)$.

Soient $\kappa$ et $l$ deux pointes différentes. On se propose de calculer $g(\kappa,l)$ :

$$g(\kappa,l)=\lim_{Y\to+\infty}\int_0^1\int_0^1 g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),\sigma_l^{-1}(\eta+iY))dx\ d\eta$$

**Lemme 2.2.1** *Pour tout $Y$ assez grand on a*

$$\int_0^1\int_0^1 g(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),\sigma_l^{-1}(\eta+iY))dx\ d\eta=-\frac{2\pi}{\text{vol}\ s(s-1)}+$$

$$+\frac{2\pi}{1-2s}Y^{2-2s}\varphi_{\kappa,l}(s)-2\pi\int_0^1 F_s(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY))dx-2\pi\int_0^1\overline{F}_s(\sigma_l^{-1}(\eta+iY))d\eta+$$

$$-s(s-1)\int_0^1\int_0^1 H_s(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),\sigma_l^{-1}(\eta+iY))dx\ d\eta$$

*Preuve.* Le lemme 2.2.1 est une conséquence directe de la proposition 2.2.1 quand on sait que [10]

$$\int_0^1 G_s(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),\sigma_l^{-1}(\eta+iY))dx=\frac{Y^{1-s}}{1-2s}E_\kappa(\sigma_l^{-1}(\eta+iY),s)$$

et que d'après [12]

$$\int_0^1 E_\kappa(\sigma_l^{-1}(\eta+iY),s)d\eta=Y^{1-s}\varphi_{\kappa,l}(s)$$

**Lemme 2.2.2** *On a la limite suivante*

$$g(\kappa,l)=\lim_{Y\to+\infty}\lim_{s\to 1}\left[-\frac{2\pi}{\text{vol}\ s(s-1)}+\frac{2\pi}{1-2s}Y^{2-2s}\varphi_{\kappa,l}(s)-2\pi(a_0(Y,s,\kappa)+\overline{a}_0(Y,s,l))\right]$$

*Preuve.* Immédiat quand on a remarqué que

$$s(s-1)\int_0^1\int_0^1 H_s(\sigma_\kappa^{-1}(x+iY),\sigma_l^{-1}(\eta+iY))dx\ d\eta\to 0\quad\text{quand}\quad s\to 1$$

UNIVERSITÉ BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUES ORSAY

On note pour la suite $h(y,\kappa)=h_0(y,\kappa)$ le terme constant du développement de Fourier de $F$ en la pointe $\kappa$.

**Proposition 2.2.2** *Pour toute pointe $\kappa$, pour tout $s>1$ et tout $y>0$, le terme constant du développement de Fourier en la pointe $\kappa$ de $F_s$ est :*

$$a_0(y,s,\kappa)=-\int_0^{+\infty}t_s(y,y')\frac{h(y',\kappa)}{y'^2}dy'$$

*où $t_s(y,y')$ est la fonction de Green associée à l'opérateur*

$$M = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{s(1-s)}{y^2}$$

*et donnée par*

$$t_s(y,y') = \frac{1}{2s-1}\begin{cases} y'^s y^{1-s} & si \;\; y' \leq y \\ y'^{1-s} y^s & si \;\; y \leq y' \end{cases}$$

*Preuve.* Par définition de la fonction de Green $G_s(z,w)$ on a

$$\mathrm{D}_s F_s(z) = \mathrm{D}_s \int_X G_s(z,t) F(t) d\mu_0(t) = F(z),$$

Par suite

$$\mathrm{D}_0 F_s(z) = F(z) + s(s-1) F_s(z). \tag{8}$$

L'équation (8) implique la relation suivante au niveau des termes constants :

$$M a_0(y,s,\kappa) = -\frac{h(y,\kappa)}{y^2}$$

On pose $\psi_s(y,\kappa) = -\int_0^{+\infty} t_s(y,y') \frac{h(y',\kappa)}{y'^2} dy'$ alors $\psi_s$ vérifie l'équation $M\ \psi_s(y,\kappa) = -\frac{h(y,\kappa)}{y^2}$ d'où il existe deux réels $A$ et $B$ tels que

$$a_0(y,s,\kappa) = \psi_s(y,\kappa) + Ay^s + By^{1-s}$$

L'intégrale $\int_X F_s(z) d\mu_0(z)$ existe donc $\frac{a_0(y,s,\kappa)}{y^2}$ est intégrable au voisinage de l'infini. Ceci prouve que $A = 0$ car $\frac{\psi_s(y,\kappa)}{y^2}$ est intégrable au voisinage de l'infini comme le montre l'expression de $\psi$ suivante :

$$\psi_s(y,\kappa) = -\frac{1}{2s-1}[y^{1-s}\int_0^y y'^s \frac{h(y',\kappa)}{y'^2} dy' + y^s \int_y^{+\infty} y'^{1-s} \frac{h(y',\kappa)}{y'^2} dy'] \tag{9}$$

D'où l'égalité

$$a_0(y,s,\kappa) = \psi_s(y,\kappa) + By^{1-s} \tag{10}$$

Pour prouver la proposition 2.2.2, il faut prouver que $B = 0$. Ce sera une conséquence des lemmes 2.2.3 et 2.2.4.
Soit $Y$ un réel assez grand, on définit la fonction suivante :

$$\widetilde{E}_\kappa^Y(z,s) = \begin{cases} E_\kappa(z,s) - (\mathrm{Im}\ \sigma_\kappa(z))^s & \text{si } \mathrm{Im}\ \sigma_\kappa(z) > Y \\ E_\kappa(z,s) & \text{sinon} \end{cases}$$

**Lemme 2.2.3** *Pour toute pointe $\kappa$, pour tout réel $s > 1$ et pour tout réel $Y$ assez grand on a :*

$$\int_X \tilde{E}_\kappa^Y(z,s)\nu(z) = \int_X \tilde{E}_\kappa^Y(z,s)F(z)d\mu_0(z) = -sY^{s-1}a_0(Y,s,\kappa) + Y^s a_0'(Y,s,\kappa)$$

*Preuve.* Fixons comme dans la preuve du lemme 2.1.1 $S = \mathcal{D}\backslash \bigcup_\kappa \mathcal{D}_\kappa(Y)$

$$\begin{aligned}
\int_S E_\kappa(z,s)F_s(z)d\mu_0(z) &= \frac{1}{s(s-1)}\int_S F_s(z)\mathrm{D}_0 E_\kappa(z,s)d\mu_0(z) \\
&= \frac{4\pi}{s(s-1)}\int_S F_s(z)dd^c E_\kappa(z,s) \\
&= \frac{4\pi}{s(s-1)}\int_S E_\kappa(z,s)dd^c F_s(z) \\
&- \frac{4\pi}{s(s-1)}\sum_l \int_{C_l(Y)} F_s(z)d^c E_\kappa(z,s) - E_\kappa(z,s)d^c F_s(z) \\
&= \frac{1}{s(s-1)}\int_S E_\kappa(z,s)\mathrm{D}_0 F_s(z)d\mu_0(z) \\
&+ \frac{1}{s(s-1)}\sum_l\sum_m [\Phi'_{\kappa,m}(Y,s,l)a_{-m}(Y,s,l) - \\
&\quad -a'_{-m}(Y,s,l)\Phi_{\kappa,m}(Y,s,l)]
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\int_S E_\kappa(z,s)\mathrm{D}_s F_s(z)d\mu_0(z) = \int_S E_\kappa(z,s)\nu(z) \\
= &-\sum_l\sum_m [\Phi'_{\kappa,m}(Y,s,l)a_{-m}(Y,s,l) - a'_{-m}(Y,s,l)\Phi_{\kappa,m}(Y,s,l)]
\end{aligned}$$

Par ailleurs l'équation (8) prouve que $a_m(y,s,l)$ vérifie l'équation différentielle :

$$a''_m - (4\pi m^2 + \frac{s(s-1)}{y^2})a_m = \frac{h_m(y,\kappa)}{y^2}$$

Cette équation est étudiée dans [14]. On exprime $a_m$ en terme des fonctions de Bessel et de la fonction de Green associée à l'opérateur différentiel donné par l'équation précédente ( on élimine les mauvaises solutions en utilisant le fait que $F_s \in L^2(\Gamma\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$). En utilisant cette expression et les estimations données précédemment sur $\Phi_{\kappa,m}$, on prouve que pour $m \neq 0$

$$\lim_{Y\to+\infty} \Phi'_{\kappa,m}(Y,s,l)a_{-m}(Y,s,l) - a'_{-m}(Y,s,l)\Phi_{\kappa,m}(Y,s,l) = 0$$

Pour $m = 0$ et à cause de l'expression (10) de $a_0(y,s,\kappa)$ (c'est à dire $A = 0$), on a

$$\begin{aligned}
\lim_{+\infty} Y^{-s}a_0(Y,s,l) &= 0 \\
\lim_{+\infty} Y^{1-s}a_0'(Y,s,l) &= 0
\end{aligned}$$

On finit la preuve du lemme 2.2.3 en copiant le calcul de la preuve du lemme 2.1.1.

**Lemme 2.2.4** *Pour toute pointe $\kappa$, pour tout réel $s > 1$ et pour tout réel $Y$ assez grand, on a*

$$\int_X \widetilde{E}_\kappa^Y(z,s)F(z)d\mu_0(z) = \int_0^Y y^s \frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy$$

*Preuve.* Par définition de $\widetilde{E}_\kappa^Y(z,s)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_X \widetilde{E}_\kappa^Y(z,s)F(z)d\mu_0(z) &= \int_X E_\kappa(z,s)F(z)d\mu_0(z) \\
&- \int_Y^{+\infty}\int_0^1 y^s F(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy))\frac{dx\ dy}{y^2} \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 y^s F(\sigma_\kappa^{-1}(z))\frac{dx\ dy}{y^2} \\
&- \int_Y^{+\infty}\int_0^1 y^s F(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy))\frac{dx\ dy}{y^2} \\
&= \int_0^Y y^s \frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy
\end{aligned}$$

Pour finir la preuve de la proposition 2.2.2, on remarque que :

$$\begin{aligned}
\psi_s'(y,\kappa) &= -\frac{1-s}{2s-1}y^{-s}\int_0^y y'^s\frac{h(y',\kappa)}{y'^2}dy' - \frac{s}{2s-1}y^{s-1}\int_y^{+\infty} y'^{1-s}\frac{h(y',\kappa)}{y'^2}dy' \\
&= \frac{1-s}{y}\psi_s(y,\kappa) - y^{s-1}\int_y^{+\infty} y'^{1-s}\frac{h(y',\kappa)}{y'^2}dy'
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.3 nous donne alors

$$\begin{aligned}
&\int_X \widetilde{E}_\kappa^Y(z,s)\nu(z) = -sY^{s-1}(\psi_s(Y,\kappa) + BY^{1-s}) \\
+\ & Y^s(\frac{1-s}{Y}\psi_s(Y,\kappa) - Y^{s-1}\int_Y^{+\infty} y'^{1-s}\frac{h(y',\kappa)}{y'^2}dy' + B(1-s)Y^{-s}) \\
=\ & (1-2s)B + \int_0^Y y'^s\frac{h(y,\kappa)}{y'^2}dy'
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.4 prouve que $B = 0$. Ceci finit la preuve de la proposition 2.2.2.

**Lemme 2.2.5** *Soient $\kappa$ et $l$ deux pointes différentes de $X$, on a*

$$\begin{aligned}
g(\kappa,l) &= \lim_{Y\to+\infty}\lim_{s\to 1}[-\frac{2\pi}{vol\ s(s-1)} + \frac{2\pi}{1-2s}Y^{2-2s}\varphi_{\kappa,l}(s) \\
&+ \frac{2\pi}{2s-1}Y^{1-s}(\int_0^{+\infty} y^s\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy + \int_0^{+\infty} y^s\frac{h(y,l)}{y^2}dy)]
\end{aligned}$$

*Preuve.* D'après la proposition 2.2.2,

$$\begin{aligned}
a_0(Y,s,\kappa) &= -\frac{Y^{1-s}}{2s-1}\int_0^{+\infty} y^s\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy \\
&- \frac{1}{2s-1}[Y^s\int_Y^{+\infty} y^{1-s}\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy - Y^{1-s}\int_Y^{+\infty} y^s\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy]
\end{aligned}$$

Le lemme 2.2.5 est alors une conséquence directe du lemme 2.2.2 quand on a remarqué que $h(y,l) = \overline{h}(y,l)$ et que

$$\lim_{Y\to+\infty}\lim_{s\to 1} Y^s \int_Y^{+\infty} y^{1-s}\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy - Y^{1-s}\int_Y^{+\infty} y^s\frac{h(y,\kappa)}{y^2}dy = 0.$$

**Lemme 2.2.6** *La différence entre les deux fonctions de Green $g$ et $g_{A_r}$ est donnée par :*

$$g_{A_r}(z,w) - g(z,w) = \lim_{s\to 1}\left(\frac{2\pi}{\text{vol } s(s-1)} + 2\pi\int_{X\times X} G_s(z,w)\nu(z)\nu(w)\right)$$

*Preuve.* Les deux fonctions $g$ et $g_{A_r}$ vérifient l'équation $\partial_z\partial_{\overline{z}}g(z,w) = i\pi(\nu(z) - \delta_w)$. Elles différent donc par une constante qui se calcule à partir de la normalisation $\int_X g_{A_r}(z,w)\nu(z) = 0$ et ceci pour tout $w \in X$. On en déduit

$$\begin{aligned} g_{A_r}(z,w) - g(z,w) &= -\int_X g(z,w)\nu(z) \\ &= -\int_{X\times X} g(z,w)\nu(z)\nu(w) \\ &= \lim_{s\to 1}\left(\frac{2\pi}{\text{vol } s(s-1)} + 2\pi\int_{X\times X} G_s(z,w)\nu(z)\nu(w)\right) \end{aligned}$$

La dérnière étape de ce calcul découle de la proposition 2.2.1.
Le théorème C découle des lemmes 2.2.5 et 2.2.6.

# 3 Interprétation automorphe de la fonction de Green d'Arakelov de $X_0(N)$ aux pointes

## 3.1 Introduction

Soit $N$ un entier impair sans facteurs carrés. On se propose de prouver dans cette section le théorème D. On désigne dans la suite par $X$ la courbe modulaire $X_0(N)$. On commence par rappeler la méthode de Rankin–Selberg [25] qui sera l'outil central de cette section.

### 3.1.1 Méthode de Rankin-Selberg

Soit $f$ une fonction de $\mathcal{H}$, $\Gamma_0(N)$–invariante de développement de Fourier en la pointe $\kappa$ donné par

$$f(\sigma_\kappa^{-1}(x+iy)) = \sum_m a_m(y,\kappa)\exp(2i\pi mx)$$

On suppose que $f$ est à décroissance rapide quand $z$ tend vers la pointe $\kappa$, ($a_0(y,\kappa) = O(y^{-M})$ pour tout $M > 0$ quand $y$ tend vers l'infini), alors pour tout $s$ tel que $\Re(s) > 1$, l'égalité suivante s'établie entre intégrales absolument convergentes

$$R_{f,\kappa}(s) = \int_X f(z)E_\kappa(z,s)d\mu_0(z) = \int_0^{+\infty} a_0(y,\kappa)y^{s-2}dy$$

La fonction $R_{f,\kappa}(s)$ est holomorphe sur $\Re(s) > 1$, elle admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1} \int_X f(z) d\mu_0(z)$. Ces propriétés sont dues au fait que la série d'Eisenstein $E_\kappa(z, s)$ admet un prolongement méromorphe au plan complexe avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1}$ indépendant de la variable $z$.

On applique classiquement cette méthode aux formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Soit $f \in \mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$ une telle forme de développement de Fourier $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz}$. La méthode de Rankin-Selberg donne :

$$\int_X y^2 |f(z)|^2 E_\infty(z, s) d\mu_0(z) = \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^{s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^2}{n^{s+1}}$$

Quand $f$ est une newform, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^2}{n^{s+1}}$ coincide à des facteurs zêta près avec la série $L_2$ de la forme $f$ et admet par suite un produit Eulerien. La transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov s'interprète comme la moyenne des transformées de Rankin–Selberg d'une base orthonormée pour le produit scalaire de Petersson de l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$.
On appliquera aussi cette méthode (comme l'a fortement suggéré Zagier [25]) aux noyaux de Selberg de poids 0 et 2.

### 3.1.2 Noyau de Selberg de poids 0

Soit $k$ une fonction de $C^4(\mathbb{R}_+)$. On suppose qu'il existe deux réels $\alpha > 1$ et $C > 0$ tels que pour tout entier $i$ compris entre 0 et 4 on a :

$$|k^{(i)}(t)| \leq \frac{C}{(t+4)^{\alpha+i}} \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{11}$$

On définit à partir de $k$ une fonction de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ qui est $\Gamma_0(N)$–invariante de la manière suivante :

$$K_0(z, w) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_0(N)} k(u(z, \gamma w))$$

où $u$ est la distance hyperbolique (7). Cette fonction est absolument et uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ [10]. Elle définit par convolution un opérateur de $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$. La transformée de Selberg $h$ de $k$ donne une décomposition spectrale de cet opérateur. Elle est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Q(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(w + v^2) dv \text{ pour } w \geq 0 \\ g(u) &= Q(e^u + e^{-u} - 2) \\ h(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \exp(iru) du \end{aligned} \tag{12}$$

La transformée de Selberg inverse est donnée par :

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\exp(-iru)dr \\ k(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x+t^2)dt \text{ pour } x \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

La décomposition spectrale de $K_0$ est donnée par :

$$\begin{aligned} K_0(z,w) &= h(\frac{i}{2})\frac{1}{\text{vol}} + \sum_{i>0} h(r_i)\varphi_i(z)\overline{\varphi}_i(w) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\sum_{\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)E_\kappa(z,1/2+ir)E_\kappa(w,1/2-ir)dr \end{aligned} \tag{14}$$

### 3.1.3 Formes automorphes de poids 2

Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on définit les fonctions $H$ et $j$ par :

$$\begin{aligned} H(z,w) &= \frac{w-\overline{z}}{z-\overline{w}} \\ j_\gamma(z) &= \frac{(cz+d)^2}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

**Définition 3.1.1** *On dit qu'une fonction $f$ est automorphe de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ si la relation suivante est vérifiée :*

$$f_{/[\gamma,2]} = f(\gamma z)j_\gamma(z)^{-1} = f(z)$$

*pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$.*

Soit $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H},2)$ l'espace des formes automorphes de poids 2 de carré intégrable par rapport à la mesure de Poincaré. On note $\Delta_2$ le laplacien de poids 2 défini par :

$$\Delta_2 = y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) - 2iy\frac{\partial}{\partial x}$$

Ce laplacien agit sur les formes automorphes de poids 2 puisqu'il vérifie la relation $\Delta_2(f_{/[\gamma,2]}) = \Delta_2 f_{/[\gamma,2]}$ et $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H},2)$ se décompose via $\Delta_2$ en

$$L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H},2) = \oplus_i \mathbb{C}[\psi_i] \oplus \mathcal{E}$$

où $\psi_i$ est une famille orthonormée de fonctions propres de $\Delta_2$ de valeur propre associée $-\lambda_i$ et $\mathcal{E}$ est la partie relative au spectre continu de $\Delta_2$. La famille $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots$ forme le spectre discret de $\Delta_2$. Les valeurs propres non nulles de $\Delta_2$ coincident avec les valeurs propres non nulles de $\mathrm{D}_0$ agissant sur $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ et les espaces propres associés sont

isomorphes. Soit $\lambda_i$ un réel, on note $L^2(\lambda_i, 2)$ (resp. $L^2(\lambda_i, 0)$) l'espace propre associé à la valeur propre $-\lambda_i$ de $\Delta_2$ (resp. de $D_0$). Pour tout $\lambda_i \neq 0$, le morphisme

$$I : L^2(\lambda_i, 0) \to L^2(\lambda_i, 2)$$

défini par $I = iy\partial_x + y\partial_y$ établit cet isomorphisme et vérifie la relation $(If_1, If_2) = \lambda(f_1, f_2)$. L'espace propre relatif à la valeur propre 0 est isomorphe à l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(2, \Gamma_0(N)) & \to & L^2(0,2) \\ f & \to & yf(z) \end{array}$$

La partie relative au spectre continu $\mathcal{E}$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} L^2(\mathbb{R}_+)^\Phi & \to & \mathcal{E} \\ (f_\kappa)_{\kappa\in\Phi} & \to & \sum_\kappa \int_0^{+\infty} f_\kappa(t) E_{\kappa,2}(z, 1/2 + it)dt \end{array}$$

où $E_{\kappa,2}(z, 1/2+it)$ est la série d'Eisenstein de poids 2 en la pointe $\kappa$ définie par prolongement méromorphe de la série convergente pour $\Re(s) > 1$

$$E_{\kappa,2}(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\kappa\backslash\Gamma_0(N)} \mathrm{Im}(\sigma_\kappa\gamma z)^s j_\gamma(z)^{-1}$$

On remarque que $I\ E_\kappa(z,s) = sE_{\kappa,2}(z,s)$. Reprenons les notations du début

1. Soit $\varphi_n$ une famille orthonormée de fonctions propres de $D_0$ dans $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$ de valeurs propres associées $-\lambda_n$ avec $\lambda_i = 1/4 + r_i^2 = s_i(1-s_i)$. Il découle alors que $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} I\varphi_n$ est une famille orthonormée de fonctions propres de $\Delta_2$ dans $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, 2)$.

2. Soit $f_1, \ldots, f_g$ une base orthonormée pour le produit de Petersson de $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$. La famille $yf_1, \ldots, yf_g$ forme une base orthonormée de $L^2(0,2)$. On rappelle que $F(z)$ désigne la fonction $\frac{y^2}{g}\sum_{i=1}^{g} |f_i(z)|^2$

Soit $k$ une fonction de $C^4(\mathbb{R}_+)$ vérifiant la condition (11). On définit à partir de $k$ une fonction de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ qui est automorphe de poids 2 en chaque variable de la manière suivante

$$K_2(z,w) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} k(u(z,\gamma\ w))H(z,\gamma\ w)j_\gamma(w)$$

Cette série est absolument et uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ et définit par convolution un opérateur de $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, 2)$. La décomposition spectrale de cet

opérateur est donnée en fonction de la transformée de Selberg de poids 2, $h$ de $k$ qui se calcule par les formules :

$$\begin{aligned} Q(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} k(w+v^2)\frac{\sqrt{w+4}+iv}{\sqrt{w+4}-iv}dv \quad \text{pour } w \geq 0 \\ g(u) &= Q(e^u+e^{-u}-2) \\ h(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\exp(iru)dr \end{aligned} \tag{15}$$

La transformée de Selberg inverse est donnée par les formules :

$$\begin{aligned} g(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\exp(-iru)dr \\ k(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x+t^2)\frac{\sqrt{x+4+t^2}-t}{\sqrt{x+4+t^2}+t}dt \quad \text{pour } x \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

La décomposition spectrale de $K_2$ est donnée par :

$$\begin{aligned} K_2(z,w) &= h(\frac{i}{2})\sum_l y^2 f_l(z)\overline{f}_l(w) + \sum_{i>0}\frac{h(r_i)}{\lambda_i}I\varphi_i(z)\overline{I\varphi_i}(w) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\sum_\kappa E_{\kappa,2}(z,1/2+it)\overline{E}_{\kappa,2}(w,1/2+it)dt \end{aligned} \tag{17}$$

Soit $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, on désigne par $R_\gamma(z)$ la fonction de $\mathcal{H}$ donnée par

$$R_\gamma(z) = k(u(z,\gamma\, z))H(z,\gamma\, z)j_\gamma(z)$$

**Lemme 3.1.1** *La série* $\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} R_\gamma(z)$ *est absolument convergente sur* $\mathcal{H}$. *De plus :*

*i) Soit $g$ le genre de $X_0(N)$ alors*

$$K_2(z,z) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_0(N)} R_\gamma(z) = gh(\frac{i}{2})F(z)+$$

$$+\sum_{i>0}\frac{h(r_i)}{\lambda_i}|I\varphi_i(z)|^2 + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\sum_\kappa |E_{\kappa,2}(z,1/2+it)|^2 dt$$

*ii) Pour tout entier $l$, $F_l(z) = \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(N)\\ tr\,\gamma=l}} R_\gamma(z)$ est une fonction $\Gamma_0(N)$-invariante*

*Preuve.* Le premier point découle de l'étude précédente de $K_2(z,w)$. Le second point se déduit simplement de la relation suivante :

$$R_\gamma(\delta\, z) = R_{\delta^{-1}\gamma\delta}(z) \quad \text{pour } \gamma,\delta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

qui se vérifie à partir des formules.

Le lemme précédent fait le lien entre les deux applications de la méthode de Rankin–Selberg que nous avons donné. D'une part l'expression des noyaux de Selberg comme moyenne sur le groupe $\Gamma_0(N)$ permet de calculer leurs transformées de Rankin–Selberg de manière agréable (section 3.2). C'est une somme sur les traces possibles (différentes de 2 et $-2$) d'un produit de deux termes dont l'un est une fonction zêta $\zeta_N(s,l)$ qui ne dépend que du niveau $N$ et de la trace $l$ et l'autre plus analytique ne dépend que de la fonction de départ $k$ et de la trace $l$ noté $I_i(k,s,l)$ ($i = 0,2$ désigne le poids). D'autre part les décompositions spectrales de ces noyaux font apparaitre la fonction $F(z)$ (lemme 3.1.1–i)). Leurs transformées de Rankin–Selberg contiennent par suite celle de la métrique d'Arakelov. Par un procédé limite mené dans la section 3.3, on arrivera à éliminer du coté spectrale les contributions autres que celle de la métrique d'Arakelov. On considèrera pour cela la fonction $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$. Quand $t$ tend vers l'infini, cette fonction converge vers l'opérateur de Dirac en $\frac{i}{2}$. Du coté noyaux de Selberg, le contrôle de la limite sera possible quand on aura donné des expressions simples de $I_i(k,s,l)$ en fonction des transformées de Selberg $h$ de $k$.

## 3.2 Décomposition spectrale et méthode de Rankin–Selberg

Soit $h(r)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions :

i) $h(r) = h(-r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$

ii) $h$ admet un prolongement holomorphe sur la bande $|\mathrm{Im}(r)| < \frac{A}{2}$ pour un réel $A > 1$

iii) $h(r)$ est à décroissance rapide sur cette bande

Notons $k_0$ (resp. $k_2$) sa tranformée de Selberg inverse de poids 0 (resp. 2). Sous les conditions précédentes $k_0$ et $k_2$ vérifient la condition (11) avec un $\alpha = \frac{1+A}{2}$. On se propose d'appliquer la méthode de Rankin-Selberg aux décompositions spectrales (14) et (17). Nous détaillons dans la suite le calcul relatif aux noyaux de poids 2, les calculs pour les noyaux de poids 0 étant de même nature, plus simples et déjà fait par Zagier pour $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dans [25], nous donnons juste le résultat à la fin de cette section.

### 3.2.1 Aspect automorphe

On calcule dans cette section la transformée de Rankin–Selberg des $F_l$ pour $|l| \neq 2$. La proposition suivante justifie la convergence de la méthode.

**Proposition 3.2.1** *Pour toute pointe $\kappa$ et tout nombre complexe $s$ vérifiant $1 < \Re(s) < 1+A$ on a :*

$$\sum_{|l|\neq 2} \int_X |E_\kappa(z,s)| \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\ \gamma = l}} |R_\gamma(z)|\, d\mu_0(z) < \infty$$

*En particulier, pour tout entier $l$ tel que $|l| \neq 2$, l'intégrale est convergente.*

*Preuve.* Soit $\sigma = \Re(s)$. Pour toute pointe $\eta$ de $\Gamma_0(N)$, fixons $\sigma_\eta \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\sigma_\eta(\eta) = \infty$ et considérons le voisinage $V_\eta$ de la pointe $\eta$ donné par :

$$V_\eta = \{\sigma_\eta^{-1}(x+iy) \text{ tel que } -1/2 \leq x \leq 1/2 \text{ et } y \geq 2\}$$

La preuve de la proposition se réduit à voir que

$$\sum_{|l|\neq 2} \int_{V_\eta} |E_\kappa(z,s)| \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\ \gamma = l}} |R_\gamma(z)| d\mu_0(z) < \infty$$

pour toutes les pointes de $\Gamma_0(N)$. Soit

$$\sum_{|l|\neq 2} \int_2^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\ \gamma = l}} |R_{\sigma_\eta \gamma \sigma_\eta^{-1}}(z)| y^{-1-\sigma} dx dy < \infty$$

pour $\eta \neq \kappa$ et

$$\sum_{|l|\neq 2} \int_2^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\ \gamma = l}} |R_{\sigma_\kappa \gamma \sigma_\kappa^{-1}}(z)| y^{\sigma-2} dx dy < \infty$$

La proposition 3.2.1 est donc conséquence du lemme suivant :

**Lemme 3.2.1** *Pour tout réel $\sigma$ compris entre* 1 *et* $A+1$ *on a :*

$$\sum_{|l|\neq 2} \int_2^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{\gamma \in SL_2(\mathbb{Z}) \\ tr\ \gamma = l}} |R_\gamma(z)| y^{\sigma-2} dx dy < \infty$$

*Preuve.* Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace $l$, pour tout $z \in \mathcal{H}$ on a :

$$|R_\gamma(z)| \leq C \frac{y^{2\alpha}}{|cz^2 + (d-a)z - b|^{2\alpha}}$$

où $\alpha = \frac{A+1}{2}$. Posons $\theta = d - a$, alors $\theta$ vérifie la relation $\theta^2 + 4bc = l^2 - 4$. Les matrices $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de trace $l$ sont en bijection avec les triplets $(c, b, \theta) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\theta^2 + 4bc = l^2 - 4$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ tr\ \gamma = l}} |R_\gamma(z)| &\leq C y^{2\alpha} \sum_{\substack{c,b,\theta \\ \theta^2 + 4bc = l^2 - 4}} \frac{1}{|cz^2 + \theta z - b|^{2\alpha}} \\ &\leq 2Cy^{2\alpha} \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{1}{c^{2\alpha}} \sum_{\substack{\theta \bmod(2c) \\ \theta^2 \equiv l^2 - 4 \bmod(4c)}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|(z+k)^2 + \frac{\theta}{c}(z+k) - \frac{b}{c}|^{2\alpha}} \end{aligned}$$

On pose

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|z^2 + \frac{\theta}{c}z - \frac{b}{c}|^{2\alpha}} dx$$

L'inégalité de Cauchy–Shwartz implique :

$$Q \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{2\alpha}} \times \begin{cases} y^{1-4\alpha} & \text{pour } |l| > 2 \\ (y^2 - \frac{4-l^2}{4c^2})^{\frac{1}{2}-2\alpha} & \text{pour } |l| < 2 \end{cases}$$

La convergence annocée dans le lemme pour $|l| < 2$ découle de cette inégalité et du fait que le nombre de solutions $\theta$ mod$(2c)$ de l'équation $\theta^2 \equiv l^2 - 4$ mod$(4c)$ est $O(c^\varepsilon)$ quand $c$ tend vers l'infini pour tout $\varepsilon > 0$. On traite enfin le cas des $|l| > 2$, l'inégalité précédente implique :

$$\int_2^{+\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ tr\ \gamma = l}} |R_\gamma(z)|\ y^{\sigma-2} dx\ dy$$

$$\leq\ 2C \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{1}{(c)^{2\alpha}} \sum_{\substack{\theta \bmod(2c) \\ \theta^2 \equiv l^2 - 4 \bmod(4c)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{2\alpha}} \int_2^{+\infty} y^{\sigma-2\alpha-1} dy$$

On en déduit la convergence pour tout $l$ tel que $|l| > 2$ de l'intégrale associée en tenant compte de l'estimation précédente sur le nombre de solutions de l'équation $\theta^2 \equiv l^2 - 4$ mod$(4c)$. On est ramené au lemme suivant :

**Lemme 3.2.2** *Pour tout $\alpha > 1$,*

$$\sum_{|l|>2} \sum_{c=1}^{+\infty} \frac{1}{(c)^{2\alpha}} \sum_{\substack{\theta mod(2c) \\ \theta^2 \equiv l^2 - 4mod(4c)}} 1 \tag{18}$$

*est finie*

*Preuve.* On décompose (18) en deux sous-sommes :

$$\Sigma_1 = \sum_{|l|>2} \sum_{c=1}^{|l|} \frac{1}{(c)^{2\alpha}} \sum_{\substack{\theta \mathrm{mod}(2c) \\ \theta^2 \equiv l^2 - 4\mathrm{mod}(4c)}} 1$$

$$\Sigma_2 = \sum_{|l|>2} \sum_{c>|l|} \frac{1}{(c)^{2\alpha}} \sum_{\substack{\theta \mathrm{mod}(2c) \\ \theta^2 \equiv l^2 - 4\mathrm{mod}(4c)}} 1$$

La convergence de $\Sigma_1$ est due au fait que le nombre de solutions $\theta$ mod$(2c)$ de l'équation $\theta^2 \equiv l^2 - 4$ mod$(4c)$ est $O(c^\varepsilon)$ quand $c$ tend vers l'infini pour tout $\varepsilon > 0$. La convergence de $\Sigma_2$ peut s'obtenir de la façon suivante : signalons d'abord que pour tout nombre complexe $s$ tel que $\Re(s) > 1$, la série suivante

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0 \\ \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}\ c \neq 0}} \frac{1}{|c|^{2s}}$$

est convergente. Remarquons ensuite que les doubles classes (quand $c \neq 0$) sont en bijection avec les matrices $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $0 \leq a, d < c$. la somme $\Sigma_2$ porte sur des matrices $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour lesquelles $a + d = l$ avec $|l| < c$ et $d - a = \theta$ avec $0 \leq \theta < 2c$, ce qui donne $0 \leq |a|, |d| < 3c/2$ et par suite chaque double classe est représentée au plus 7 fois dans $\Sigma_2$ ce qui montre que

$$\Sigma_2 \leq 7 \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0 \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0 \\ \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix} \; c \neq 0}} \frac{1}{|c|^{2\alpha}} < \infty$$

Ceci termine la preuve du lemme et par suite de la proposition 3.2.1.

La fin de cette section sera consacrée au calcul de la transformée de Rankin–Selberg des $F_l$ pour $|l| \neq 2$. Nous aurons besoin des définitions et notations suivantes.

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés. Soient $\Sigma_l$ l'ensemble des formes quadratiques de discriminant $l^2 - 4$, de la forme $\Phi(x, y) = N\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$ avec $\alpha, \beta$ et $\gamma$ des entiers. On rappelle l'identification suivante entre les matrices de $\Gamma_0(N)$ de trace $l$ et $\Sigma_l$ :

$$\begin{aligned} \{\gamma \in \Gamma_0(N) \text{ tel que } tr\ \gamma = l\} &\rightarrow \Sigma_l \\ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} &\rightarrow \Phi_\gamma(x, y) = Ncx^2 + (d - a)xy - by^2 \end{aligned}$$

On note $\Delta_l^d = \{\gamma \in \Gamma_0(N) \text{ tel que } tr\ \gamma = l\} \times \{(Nm, dn) \neq (0, 0)\}_{/\{\pm 1\}}$. Le groupe $\Gamma_0(N)$ agit à droite sur $\Delta_l^d$ en préservant la quantité $\Phi_\gamma(dn, -Nm)$ de la manière suivante : pour $\gamma \in \Gamma_0(N)$ et $(\delta, (Nm, dn)) \in \Delta_l^d$

$$(\delta, (Nm, dn)).\gamma = (\gamma^{-1}\delta\gamma, (Nm, dn)\gamma)$$

Soient :

$$\begin{aligned} \Delta_l^{d+} &= \{(\gamma, (Nm, dn)) \in \Delta_l^d \text{ tel que } \Phi_\gamma(dn, -Nm) > 0\} \\ \Delta_l^{d-} &= \{(\gamma, (Nm, dn)) \in \Delta_l^d \text{ tel que } \Phi_\gamma(dn, -Nm) < 0\} \end{aligned}$$

sur lesquels agit $\Gamma_0(N)$. Comme $|l| \neq 2$, $\Delta_l^d = \Delta_l^{d+} \cup \Delta_l^{d-}$. On note enfin $\gamma_l = \begin{pmatrix} l/2 & l^2/4 - 1 \\ 1 & l/2 \end{pmatrix}$.

**Proposition 3.2.2** *Pour tout nombre complexe $s$ tel que $1 < \Re(s) < 1 + A$ et pour tout entier $l$ tel que $|l| \neq 2$, on a*

$$\int_X E_\infty(z, s) F_l(z) d\mu_0(z) = \frac{1}{\zeta(2s)} \zeta_N(s, l) I_2(s, l)$$

*où*

$$\begin{aligned} I_2(s, l) &= \int_{\mathcal{H}} R_{\gamma_l}(z) y^s d\mu_0(z) + \int_{\mathcal{H}} R_{\gamma_{-l}}(z) y^s d\mu_0(z) \\ \zeta_N(s, l) &= \prod_{p/N} \frac{1}{1 - p^{-2s}} \sum_{d/N} \mu(d) \sum_{\Delta_l^{d+}/\Gamma_0(N)} \frac{1}{\Phi(dn, -Nm)^s} \end{aligned}$$

*et $\mu$ est la fonction de Möbius.*

*Preuve.* On établit simplement la relation

$$E_\infty(z,s) = \frac{1}{\zeta(2s)} \prod_{p/N} \frac{1}{1-p^{-2s}} \sum_{d/N} \mu(d) \sum_{(m,n)}' \frac{y^s}{|Nmz+dn|^{2s}}$$

où le symbole $\sum'$ désigne la somme sur les couples $(m,n) \neq (0,0)$ modulo la multiplication par $-1$. La proposition 3.2.1 nous permet d'écrire

$$\int_X E_\infty(z,s) F_l(z) d\mu_0(z) = \frac{1}{\zeta(2s)} \prod_{p/N} \frac{1}{1-p^{-2s}} \times$$
$$\sum_{d/N} \mu(d) \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\,\gamma = l}} \sum_{(Nm,dn)}' \int_X R_\gamma(z) \frac{y^s}{|Nmz+dn|^{2s}} d\mu_0(z).$$

L'action de $\Gamma_0(N)$ sur $\Delta_l^d$ est libre, il découle alors :

$$\int_X E_\infty(z,s) F_l(z) d\mu_0(z) = \frac{1}{\zeta(2s)} \prod_{p/N} \frac{1}{1-p^{-2s}} \times$$
$$\sum_{d/N} \mu(d) \sum_{\Delta_l^d/\Gamma_0(N)} \int_{\mathcal{H}} R_\gamma(z) \frac{y^s}{|Nmz+dn|^{2s}} d\mu_0(z)$$
$$= \frac{1}{\zeta(2s)} \prod_{p/N} \frac{1}{1-p^{-2s}} \sum_{d/N} \mu(d) \Big( \sum_{\Delta_l^{d+}/\Gamma_0(N)} \int_{\mathcal{H}} R_\gamma(z) \frac{y^s}{|Nmz+dn|^{2s}} d\mu_0(z)$$
$$+ \sum_{\Delta_l^{d-}/\Gamma_0(N)} \int_{\mathcal{H}} R_\gamma(z) \frac{y^s}{|Nmz+dn|^{2s}} d\mu_0(z) \Big)$$

Soit $(\gamma, (Nm, dn)) \in \Delta_l^{d+}$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix}$. Posons $\theta = d - a$ et

$$M = \begin{pmatrix} dn & -\theta\frac{dn}{2} - bNm \\ -Nm & Ncdn - \theta\frac{Nm}{2} \end{pmatrix}.$$

En faisant le changement de variable de $\mathcal{H}$ par la matrice $\dfrac{1}{\sqrt{\Phi_\gamma(dn,-Nm)}} M$, on trouve

$$\int_{\mathcal{H}} R_\gamma(z) \frac{y^s}{|Nmz+n|^{2s}} d\mu_0(z) = \frac{1}{\Phi_\gamma(dn,-Nm)^s} \int_{\mathcal{H}} R_\eta(z) y^s d\mu_0(z)$$

Il s'en suit que la contribution de $\Delta_l^{d+}$ à la transformée de Rankin–Selberg de $F_l$ est

$$\sum_{\Delta_l^{d+}/\Gamma_0(N)} \frac{1}{\Phi_\gamma(dn,-Nm)^s} \int_{\mathcal{H}} R_\eta(z) y^s d\mu_0(z)$$

Pour calculer la contribution de $\Delta_l^{d-}$, remarquons que si $(\gamma,(Nm,dn)) \in \Delta_l^{d-}$ alors $(-\gamma,(Nm,dn)) \in \Delta_{-l}^{d+}$ et que $R_\gamma(z) = R_{-\gamma}(z)$. Cette contribution est donc

$$\sum_{\Delta_l^{d+}/\Gamma_0(N)} \frac{1}{\Phi_\gamma(dn,-Nm)^s} \int_{\mathcal{H}} R_{\gamma_{-l}}(z) y^s d\mu_0(z)$$

Ceci termine la preuve de la proposition 3.2.2.

### 3.2.2 Lien avec les fonctions zêta des corps quadratiques

Soit $N$ un entier impair et sans facteurs carrés. Soit $l$ un entier tel que $|l| \neq 2$, le but de cette section est l'étude des séries $\zeta_N(s,l)$. On commence par caractériser les entiers $l$ qui peuvent être la trace d'une matrice de $\Gamma_0(N)$. Sous cette condition, on montrera que $\zeta_N(s,l)$ est méromorphe avec un pôle simple en $s=1$ et on calculera son résidu. On prouvera sous la condition : il n'existe pas de premier divisant $N$ dont le carré divise $l^2-4$, un lien entre $\zeta_N(s,l)$ et la fonction zêta du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{l^2-4})$.

**Lemme 3.2.3** *Soient $N$ un entier impair et sans facteurs carrés et $l$ un entier. Il existe une matrice $\gamma \in \Gamma_0(N)$ de trace $l$ si et seulement si $l^2-4$ est un carré modulo les premiers divisant $N$.*

*Preuve.* Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ de trace $l$. Les entiers $a$ et $d$ sont alors solutions de l'équation $X^2 - lX + 1 + Ncb = 0$. Cette équation admet des solutions modulo un premier $p$ divisant $N$ si et seulement si son discriminant $l^2-4$ est un carré modulo $p$ ($p$ est différent de 2). Inversement, il est facile de voir que si cette condition est réalisée la matrice $\gamma$ existe.

On suppose dans toute la suite que $N$ est impair sans facteurs carrés. Soit $\Phi(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$ une forme quadratique à coefficients entiers. On adopte dans la suite la notation classique $\Phi = [a,b,c]$ et on désigne par $D = b^2-4ac$ son discriminant. On suppose que $D \neq 0$ et que $\Phi$ est définie positive si $D<0$. On pose $\mathrm{Aut}(\Phi) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \Phi \circ \gamma = \Phi\}$ et on définit la série de Dirichlet $\zeta_\Phi(s)$ par :

$$\zeta_\Phi(s) = \sum_{\substack{(n,m) \in \mathbb{Z}^2/\mathrm{Aut}(\Phi) \\ \Phi(n,m)>0}} \frac{1}{\Phi(n,m)^s}$$

qui est absolument convergente pour $\Re(s) > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe à tous le plan complexe avec un pôle simple en $s=1$ de résidu

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_\Phi(s) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\sqrt{|D|}} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(\Phi)|} & D<0 \\ \frac{1}{\sqrt{|D|}} \log(\varepsilon_\Phi) & D>0 \end{cases}$$

où $\varepsilon_\Phi$ est l'unité fondamentale de $\Phi$ c'est à dire la plus grande valeur propre de $M$, où $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est une matrice de trace positive telle que $\mathrm{Aut}(\Phi) = \{\pm M^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

Soit $l$ un entier tel que $|l| \neq 2$ et $l^2 - 4$ est un carré modulo tous les diviseurs premiers de $N$. On se propose d'exprimer $\zeta_N(s,l)$ en fonction de certaines séries $\zeta_\Phi(s)$ ce qui nous permetra de calculer son résidu. Soit $K_l$ l'ensemble des formes quadratiques à coefficients entiers de discriminant $l^2 - 4$. Les groupes $\Gamma_0(N)$ et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ agissent à droite respectivement sur $\Sigma_l$ et $K_l$ par composition. Pour tout diviseur $d$ de $N$, on définit le morphisme de groupe $*d$ par :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_0(N) & \to & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \gamma = \begin{pmatrix} x & y \\ Nz & t \end{pmatrix} & \to & \gamma^{*d} = \begin{pmatrix} x & \frac{N}{d}y \\ dz & t \end{pmatrix} \end{array}$$

et on note $\Gamma_0(N)^{*d}$ l'image de $\Gamma_0(N)$ par ce morphisme. On note aussi $*d$ l'injection de $\Sigma_l$ dans $K_l$ donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_l & \to & K_l \\ \Phi = [Na, b, c] & \to & \Phi^{*d} = [da, b, \frac{N}{d}c] \end{array}$$

On note $\Sigma_l^{*d}$ l'image de $\Sigma_l$ par $*d$. Ce morphisme respecte les actions de $\Gamma_0(N)$ et de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ au sens suivant : $(\Phi \circ \gamma)^{*d} = \Phi^{*d} \circ \gamma^{*d}$, on note $*d$ le morphisme quotient.

**Lemme 3.2.4** *Pour tout $s$ de partie réelle strictement plus grande que* 1,

$$\zeta_N(s,l) = \prod_{p/N} \frac{1}{1-p^{-2s}} \sum_{\Sigma_l/\Gamma_0(N)} \sum_{d/N} \frac{\mu(d)}{(Nd)^s} [\mathrm{Aut}\Phi^{*d} : \mathrm{Aut}\Phi^{*d} \cap \Gamma_0(N)^{*d}] \zeta_{\Phi^{*d}}(s)$$

*Preuve.* Il suffit de remarquer que $\Phi(dn, -Nm) = dN\Phi^{*d}(n, -m)$.
On fait la convention $\zeta_\Phi(s) = 0$ si $\Phi$ est définie négative. On déduit

**Proposition 3.2.3** *Pour tout entier $l$ tel que $|l| \neq 2$ et $l^2 - 4$ est un carré modulo tous les diviseurs premiers de $N$, on a*

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_N(s,l) = \frac{1}{\sqrt{|l^2-4|}} \prod_{p/N} \frac{1}{1+p} \sum_{\Phi \in \Sigma_l/\Gamma_0(N)} \begin{cases} \log(\varepsilon_\Phi^N) & |l| > 2 \\ \frac{\pi}{|\mathrm{Aut}(\Phi)\cap\Gamma_0(N)|} & |l| < 2 \end{cases}$$

*où $\varepsilon_\Phi^N$ désigne la plus grande valeur propre de $M$ et $M \in SL_2(\mathbb{Z})$ est la matrice de trace positive telle que* $\mathrm{Aut}(\Phi) \cap \Gamma_0(N) = \{\pm M^n \ n \in \mathbb{Z}\}$.

*Preuve.* Cette proposition découle du lemme 3.2.4 et de la déscription précédente des résidus des séries $\zeta_\Phi$. Remarquons d'abord que si $|l| < 2$, alors le résidu annoncé dans le lemme est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{|l^2-4|}} \prod_{p/N} \frac{1}{1+p} \sum_{\substack{\Phi \in \Sigma_l/\Gamma_0(N) \\ \text{définie positive}}} \frac{2\pi}{|\mathrm{Aut}(\Phi) \cap \Gamma_0(N)|}$$

Le morphisme de groupe $*d$ établit une bijection entre $\mathrm{Aut}(\Phi)\cap\Gamma_0(N)$ et $\mathrm{Aut}(\Phi^{*d})\cap\Gamma_0(N)^{*d}$. Le lemme est donc claire dans le cas $|l| < 2$. Pour le prouver dans le cas $|l| > 2$, fixons $M, T \in$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de traces positives telles que $\mathrm{Aut}(\Phi)\cap\Gamma_0(N) = \{\pm M^n\ n \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathrm{Aut}(\Phi^{*d}) = \{\pm T^n\ n \in \mathbb{Z}\}$. Alors $\mathrm{Aut}(\Phi^{*d}) \cap \Gamma_0(N)^{*d} = \{\pm T^{in}\ n \in \mathbb{Z}\}$ où $i$ est l'indice de $\mathrm{Aut}(\Phi^{*d}) \cap \Gamma_0(N)^{*d}$ dans $\mathrm{Aut}(\Phi^{*d})$. De plus $T^i = M^{*d}$ à cause de l'isorphisme induit par $*d$ entre les stabilisateurs des deux formes quadratiques. On déduit que $T^i$ et $M$ ont les mêmes valeurs propres et par suite $i\log(\varepsilon_{\Phi^{*d}}) = \log(\varepsilon_\Phi^N)$ avec les notations de la proposition. Ceci termine la preuve de la proposition 3.2.3.

**Proposition 3.2.4** *Soit $l$ un entier. On suppose que pour tout nombre premier $p$ divisant $N$, $l^2-4$ n'est pas divisible par $p^2$ et est un carré modulo $p$, alors :*

$$\zeta_N(s,l) = \prod_{p/N} \frac{1}{1+p^s} \prod_{p/N} (1 + (\frac{l^2-4}{p}))\zeta_1(s,l)$$

*où $\zeta_1(s,l)$ est relative à $SL_2(\mathbb{Z})$ et $(\frac{n}{p})$ est le symbole de Legendre.*

Remarquons que la condition restrictive sur les diviseurs premiers de $N$ : $l^2-4$ n'est pas divisible par $p^2$, est toujours vérifiée quand $|l| < 2$ (car $N$ est impair) et que la formule n'est pas valable dans le cadre général. L'importance de ces formules provient du fait qu'elle séparent les dépendances en $N$ et $l$. Les séries $\zeta_1(s,l)$ sont étudiées par Zagier dans [24], elle sont produit de la série zêta du corps quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{l^2-4})$ par une série de Dirichlet finie.
La preuve de la proposition passe par l'étude du morphisme $\psi_d$ défini pour tout diviseur $d$ de $N$ comme composée des deux morphismes suivants :

$$\Sigma_l^{*d}/\Gamma_0(N)^{*d} \to K_l/\Gamma_0(N)^{*d} \to K_l/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

**Lemme 3.2.5** *Soit $l$ un entier. On suppose que pour tout nombre premier $p$ divisant $N$, $l^2-4$ n'est pas divisible par $p^2$ et est un carré modulo $p$, alors $\psi_d$ est un morphisme surjectif dont toutes les fibres ont le même cardinal qui est*

$$\prod_{p/N} (1 + (\frac{l^2-4}{p})).$$

*Preuve.* Commençons par la surjectivité de $\psi_d$. Soit $\Phi = [a,b,c]$ une forme quadratique de $K_l$, la surjectivité de $\psi_d$ en $\Phi.\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est équivalente à l'existence d'une matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que $\Phi \circ M \in \Sigma_l^{*d}$. Ceci revient à trouver $M$ tel que $\Phi(\alpha,\gamma) \equiv 0$ mod$(d)$ et $\Phi(\beta,\delta) \equiv 0$ mod$(\frac{N}{d})$. Soit $p$ un diviseur premier de $d$. Comme $l^2-4$ est un carré modulo $p$, il existe une solution non triviale de $\Phi(x,y) = 0$ dans $F_p$. Il est possible de relever ces solutions en un couple $(\alpha,\gamma)$ d'entiers premiers entre eux qui se réduisent en une solution non triviale modulo tous les $p$ divisant $d$ (voir plus loin pour la condition premiers entre eux). En transformant $\Phi$ par une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ dont la première colone est $(\alpha,\gamma)$, on peut supposer que $\Phi = [da,b,c]$. La matrice $M$ qu'on cherche doit vérifier $\Phi(\beta,\delta) \equiv 0$

$\mathrm{mod}(\frac{N}{d})$ et $\gamma \equiv 0 \mod(d)$. Soit $p$ un diviseur premier de $\frac{N}{d}$, on désigne par $(x_p, y_p)$ un couple d'entiers qui donne modulo $p$ une solution non triviale de $\Phi(x,y) = 0$. On définit :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{q/\frac{N}{d}} (\prod_{p/\frac{N}{q}} p) x_q \\ y &= \sum_{q/\frac{N}{d}} (\prod_{p/\frac{N}{q}} p) y_q + \sum_{q/d} (\prod_{p/\frac{N}{q}} p) \end{aligned}$$

Il s'en suit que $(x,y)$ est une solution non triviale de $\Phi(x,y) = 0$ modulo tous les premiers $p$ divisant $\frac{N}{d}$ et que $y$ et $d$ sont premiers entre eux. Soit $e = \mathrm{pgcd}(x,y)$, il est alors claire que $e$ et $N$ sont premiers entre eux. Le couple $(x', y') = (\frac{x}{e}, \frac{y}{e})$ fournit un couple d'entiers premiers entre eux qui vérifient $\Phi(x', y') \equiv 0 \mod(\frac{N}{d})$ et $y'$ est premier avec $d$. En utilisant le théorème de Bezout, on peut trouver une matrice $M$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ tel que sa deuxième colonne soit $(x', y')$ et son coefficient $\gamma$ soit multiple de $d$. Ceci termine la preuve de la surjectivité de $\psi_d$. Afin d'évaluer le cardinal des fibres de $\psi_d$, on a besoin de la caractérisation suivante du quotient à droite de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par $\Gamma_0(N)^{*d}$ dont la démonstration facile est laissée au lecteur :

**Lemme 3.2.6** *Soient $d = p_1 \dots p_r$ et $\frac{N}{d} = q_1 \dots q_n$ les décompositions en facteurs premiers de $d$ et de $\frac{N}{d}$. L'application :*

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(N)^{*d} \to \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}/p_1\mathbb{Z}} \times \dots\dots \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}/p_r\mathbb{Z}} \times \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z}} \times \dots\dots \mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}/q_n\mathbb{Z}}$$

*qui consiste à envoyer une matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ vers $(\alpha, \gamma)$ mod $(p_i)$ sur les $r$ premières composantes et vers $(\beta, \delta)$ mod $(q_j)$ sur les $n$ dernières composantes est une bijection.*

Soit $\Phi.\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ une orbite de $K_l/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, on se propose de calculer le cardinal de la fibre de $\psi_d$ en $\Phi.\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Il est possible de prendre $\Phi \in \Sigma_l^{*d}$ grâce à la surjectivité de $\psi_d$. Soit $\gamma_i$ un système de représentants de classes à droite de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ modulo $\Gamma_0(N)^{*d}$ : $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \sqcup \gamma_i \Gamma_0(N)^{*d}$.

**Lemme 3.2.7** *L'intersection de l'orbite $\Phi.SL_2(\mathbb{Z})$ avec $\Sigma_l^{*d}$ est la réunion disjointe des orbites $\Phi.\gamma_i\Gamma_0(N)^{*d}$ pour toutes les matrices $\gamma_i$ telles que $\Phi.\gamma_i$ appartient à $\Sigma_l^{*d}$*

On prouve d'abord le lemme suivant

**Lemme 3.2.8** *Soit $\Phi$ une forme quadratique de $\Sigma_l^{*d}$ telle que pour tout nombre premier $p$ divisant $N$, $l^2 - 4$ n'est pas divisible par $p^2$ et est un carré modulo $p$, alors*

$$\mathrm{Aut}(\Phi) \subset \Gamma_0(N)^{*d}$$

*Preuve.* Soit $\Phi = [da, b, \frac{N}{d}c]$ et notons $t$ le contenu de $\Phi$ c'est à dire le pgcd des entiers $da$, $b$ et $\frac{N}{d}c$. Soit $\Phi' = \Phi/t = [d\frac{a}{t}, \frac{b}{t}, \frac{N}{d}\frac{c}{t}]$, alors $\Phi'$ est une forme quadratique primitive de $\Sigma_l^{*d}$. En effet $t$ et $N$ sont premiers entre eux car $t^2$ divise $l^2 - 4$. En plus $\mathrm{Aut}(\Phi) = \mathrm{Aut}(\Phi')$. Le lemme découle de la déscription donnée dans [13] du stabilisateur d'une forme primitive.
On peut alors finir la preuve du lemme 3.2.7 de la façon suivante : soient $\gamma_i$ et $\gamma_j$ tels que

$\Phi.\gamma_k \in \Sigma_l^{*d}$ pour $k \in \{i,j\}$. Si $\Phi.\gamma_i = \Phi.\gamma_j\gamma$ avec $\gamma \in \Gamma_0(N)^{*d}$ alors $\gamma_i^{-1}\gamma_j\gamma \in \mathrm{Aut}(\Phi.\gamma_i)$. Comme $\Phi.\gamma_i \in \Sigma_l^{*d}$, le lemme 3.2.8 nous assure que $\mathrm{Aut}(\Phi.\gamma_i) \subset \Gamma_0(N)^{*d}$. Par suite $\gamma_i^{-1}\gamma_j\gamma$ appartient à $\Gamma_0(N)^{*d}$ et donc $\gamma_i^{-1}\gamma_j \in \Gamma_0(N)^{*d}$, ce qui est impossible.

Il découle donc que le cardinal de la fibre de $\psi_d$ en $\Phi.\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est égal au nombre de classes $\gamma_i$ tel que $\Phi.\gamma_i \in \Sigma_l^{*d}$. Le lemme 3.2.5 est conséquence du lemme suivant :

**Lemme 3.2.9** *Le nombre de classes $\gamma_i$ telles que $\Phi.\gamma_i \in \Sigma_l^{*d}$ vaut*

$$\prod_{p/N}(1+(\frac{l^2-4}{p}))$$

*Preuve.* Notons $\Phi = [da, b, \frac{N}{d}c]$ et $\gamma = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. La condition $\Phi.\gamma \in \Sigma_l^{*d}$ est équivalente aux deux équations $\Phi(x,z) \equiv 0 \bmod(d)$ et $\Phi(y,t) \equiv 0 \bmod(\frac{N}{d})$ c'est à dire :

$$\begin{aligned} z(bx + \frac{N}{d}cz) &\equiv 0 \bmod(d) \\ y(day + bt) &\equiv 0 \bmod(\frac{N}{d}) \end{aligned}$$

Ces équations donnent, modulo la déscription du lemme 3.2.6, une équation homogène non triviale de degré 2 sur $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$ pour chaque diviseur premier $p$ de $N$ (si cette équation est triviale modulo un certain $p$ alors $p^2$ divise $l^2-4$). Le nombre de solutions pour un premier $p$ est 1 si $b$ est mutiple de $p$ et 2 sinon. Les premiers $p$ qui divisent $N$ et $b$ divisent aussi $l^2-4$ car $l^2-4 = b^2-4Nac$ et inversement ceux qui divisent $l^2-4$ et $N$ divisent $b$. Ceci termine la preuve du lemme 3.2.9. La proposition 3.2.4 découle de l'expression de $\zeta_N$ donnée dans le lemme 3.2.4 et des résultats des lemmes 3.2.5 et 3.2.8.

### 3.2.3 Développement du terme cuspidal

On calcule dans cette partie la transformée de Rankin–Selberg de

$$P(z) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ |tr\ \gamma| = 2}} R_\gamma(z) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\sum_\kappa |E_{\kappa,2}(z, 1/2+ir)|^2 dr$$

en utilisant la méthode de Rankin–Selberg :

$$\int_X P(z)E_\infty(z,s)d\mu_0(z) = \int_0^{+\infty} p(y)y^{s-2}dy$$

où $p(y)$ est le terme constant du développement de Fourier de $P(z)$ défini par

$$p(y) = \int_{-1/2}^{1/2} P(x+iy)dx.$$

**Lemme 3.2.10** *Pour toute pointe $\kappa$, on note $a_\kappa(y,r)$ le terme constant du développement de Fourier en la pointe $\infty$ de $E_{\kappa,2}(z,\frac{1}{2}+ir)$. On a*

$$\sum_\kappa |a_\kappa(y,r)|^2 = 2y + y^{1+2ir}\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2}-ir)\frac{\frac{1}{2}+ir}{\frac{1}{2}-ir} + y^{1-2ir}\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2}+ir)\frac{\frac{1}{2}-ir}{\frac{1}{2}+ir}$$

*Preuve.* La relation $IE_\kappa(z,\frac{1}{2}+ir) = (\frac{1}{2}+ir)E_{\kappa,2}(z,\frac{1}{2}+ir)$ nous assure que

$$a_\kappa(y,r) = \delta_{\kappa,\infty}y^{\frac{1}{2}+ir} + \frac{\frac{1}{2}-ir}{\frac{1}{2}+ir}\varphi_{\kappa,\infty}(\frac{1}{2}+ir)y^{\frac{1}{2}-ir}.$$

On en déduit que

$$\sum_\kappa |a_\kappa(y,r)|^2 = y + y\sum_\kappa |\varphi_{\kappa,\infty}(\frac{1}{2}+ir)|^2$$
$$+y^{1+2ir}\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2}-ir)\frac{\frac{1}{2}+ir}{\frac{1}{2}-ir} + y^{1-2ir}\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2}+ir)\frac{\frac{1}{2}-ir}{\frac{1}{2}+ir}$$

On obtient le lemme puisque la matrice des termes constants des séries d'Eisenstein est unitaire sur $\mathrm{Im}(s) = \frac{1}{2}$ [12].
On pose

$$\begin{aligned}
p_1(y) &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\substack{\gamma\in\Gamma_0(N)\\ |tr\,\gamma|=2\ \gamma\notin\Gamma_0}} R_\gamma(x+iy)dx \\
p_2(y) &= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\gamma\in\Gamma_0} R_\gamma(z)dx - \frac{1}{2\pi}y\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)dr \\
p_3(y) &= -\frac{y}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2}-ir)\frac{\frac{1}{2}+ir}{\frac{1}{2}-ir}y^{2ir}dr \\
p_4(y) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\int_{-1/2}^{1/2}\sum_\kappa |\widetilde{E}_{\kappa,2}(z,\frac{1}{2}+ir)|^2 dx\ dr
\end{aligned}$$

où

$$\widetilde{E}_{\kappa,2}(z,\frac{1}{2}+ir) = E_{\kappa,2}(z,\frac{1}{2}+ir) - a_\kappa(y,r)$$

Le terme constant $p(y)$ se décompose grâce au lemme 3.2.10 en

$$p(y) = p_1(y) + p_2(y) + p_3(y) + p_4(y)$$

**Lemme 3.2.11** *La contribution de $p_1(y)$ est donnée par :*

$$p_1(y) = \frac{1}{2}\sum_{d/N}\sum_{\substack{k\neq 0\\ (k,\frac{N}{d})=1}}\sum_{\substack{\sigma\in\Gamma_0\backslash\Gamma_0(\frac{N}{d})/\Gamma_0\\ \sigma\notin\Gamma_0}} (\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\sigma^{-1}\left(\begin{smallmatrix}1 & dk\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\sigma}(x+iy)dx +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\sigma^{-1}\left(\begin{smallmatrix}-1 & dk\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)\sigma}(x+iy)dx)$$

*Preuve.* les matrices de trace 2 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 1-a & b \\ -c & 1+a \end{pmatrix}$ avec $a^2 = bc$. Chaque matrice est conjuguée dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à une unique matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. L'entier $k$ est le pgcd de $b$ et $c$ de signe celui de $b$.

$$\begin{pmatrix} 1-a & b \\ -c & 1+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-k\gamma\delta & k\delta^2 \\ -k\gamma^2 & 1+k\gamma\delta \end{pmatrix}$$

On suppose que la matrice de départ est dans $\Gamma_0(N)$, soit $d$ =pgcd$(b, N)$. Le coefficient $\gamma$ est par suite multiple de $\frac{N}{d}$. On retrouve ainsi toutes les matrices de $\Gamma_0(N)$ de trace 2. Ceci justifie la relation :

$$\sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_0(N) \\ tr\,\gamma = 2\ \gamma \notin \Gamma_0}} R_\gamma(z) = \sum_{d/N} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ (k, \frac{N}{d}) = 1}} \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma_0(\frac{N}{d}) \\ \sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & dk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma \notin \Gamma_0}} R_{\sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & dk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma}(z)$$

$$= \sum_{d/N} \sum_{\substack{k \neq 0 \\ (k, \frac{N}{d}) = 1}} \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma_0(\frac{N}{d})/\Gamma_0 \\ \sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & dk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma \notin \Gamma_0}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{\sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & dk \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma}(z+n)$$

Pour déduire le lemme, il suffit de remarquer que la condition $\sigma^{-1}\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\sigma \notin \Gamma_0$ est équivalente à la condition $\sigma \notin \Gamma_0$.

**Lemme 3.2.12** *Soit* $\tau = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de trace* $l$ *tel que* $c \neq 0$ *et* $|l| = 2$. *On note* $\varepsilon = sign(c)$ *alors*

$$\int_{\mathcal{H}} R_\tau(z) y^s d\mu_0(z) = \frac{1}{|c|^s} \int_{\mathcal{H}} R_{\begin{pmatrix} \varepsilon t/2 & 0 \\ 1 & \varepsilon t/2 \end{pmatrix}}(z) y^s d\mu_0(z)$$

*Preuve.* En remarquant que $R_\gamma(z) = R_{-\gamma}(z)$, on se ramène au cas de $c > 0$. Le lemme s'obtient en faisant le changement de variable par la matrice $M = \frac{1}{\sqrt{c}}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a-d}{2} \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
Pour tout entier $M$, on pose

$$L_M(s) = \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma_0 \backslash \Gamma_0(M)/\Gamma_0 \\ \sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}\ c \neq 0}} \frac{1}{|c|^{2s}}$$

$$\zeta_M(s) = \sum_{\substack{k \geq 1 \\ (k, M) = 1}} \frac{1}{k^s}$$

**Proposition 3.2.5** *Pour tout* $s$ *tel que* $1 < \Re(s) < A$, *on a*

$$\int_0^{+\infty} p_1(y) y^{s-2} dy = \Big(\sum_{d/N} \frac{1}{d^s} \zeta_{\frac{N}{d}}(s) L_{\frac{N}{d}}(s)\Big)\ I_2(s, 2)$$

*où*

$$I_2(s,2) = \int_{\mathcal{H}} R_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)}(z) y^s d\mu_0(z) + \int_{\mathcal{H}} R_{\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)}(z) y^s d\mu_0(z)$$

*Preuve.* La proposition découle au moins formellement des deux lemmes précédents en remarquant que si $\sigma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}$ alors $\sigma \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ -kc^2 & * \end{pmatrix}$. Les convergences nécessaires pour pouvoir intérvertir les intégrales comme nous l'avons fait se démontrent de la même façon que la proposition 3.2.1.

**Lemme 3.2.13** *Pour tout $s$ de partie réelle plus petite que $A$,*

$$I_2(s,2) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(u^2)\frac{2i-u}{2i+u}|u|^{s-1}du.$$

*Preuve.* Le changement de variable donné par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ implique :

$$I_2(s,2) = \int_{\mathcal{H}} R_{\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(z)\frac{y^s}{|z|^{2s}}d\mu_0(z) + \int_{\mathcal{H}} R_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}(z)\frac{y^s}{|z|^{2s}}d\mu_0(z)$$

$$= 2\int_0^{+\infty} k_2(\frac{1}{y^2})\Re(\frac{2iy-1}{2iy+1})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y^{s-2}}{(x^2+y^2)^s}dxdy.$$

On déduit le lemme en tenant compte de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^2)^{-s}dt = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}.$$

On se propose maintenant d'évaluer la contribution de $p_2(y)$.

**Lemme 3.2.14** *Pour tout $y > 0$, on a*

$$p_2(y) = y\sum_{l>0}(\psi(ly) + \psi(-ly))$$

*où*

$$\psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(u^2)\frac{2-iu}{2+iu}\exp(2i\pi uy)du$$

*Preuve.* D'une part

$$\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in\Gamma_0} R_\gamma(x+iy) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} k_2(\frac{l^2}{y^2})\frac{2iy-l}{2iy+l} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k_2(\frac{l^2}{y^2})\frac{2-i\frac{l}{y}}{2+i\frac{l}{y}},$$

d'autre part

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = g(0) = Q(0) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(v^2)\frac{2-iv}{2+iv}dv = \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\frac{v^2}{y^2})\frac{2-i\frac{v}{y}}{2+i\frac{v}{y}}dv.$$

D'où

$$p_2(y) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} k_2(\frac{l^2}{y^2})\frac{2-i\frac{l}{y}}{2+i\frac{l}{y}} - \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\frac{v^2}{y^2})\frac{2-i\frac{v}{y}}{2+i\frac{v}{y}}dv$$

Par sommation de Poisson on trouve :

$$p_2(y) = \sum_{l\neq 0}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\frac{u^2}{y^2})\frac{2-i\frac{u}{y}}{2+i\frac{u}{y}}\exp(2i\pi lu)du$$

Ce qui implique le lemme.
Il découle donc que la contribution de $p_2$ à la transformée de Rankin–Selberg de $P$ est :

$$\int_0^{+\infty} p_2(y)y^{s-2}dy = \zeta(s)\int_0^{+\infty}(\psi(y)+\psi(-y))y^{s-1}dy.$$

**Lemme 3.2.15** *Pour tout réel positif $y$,*

$$\psi(y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} rQ'(r^2)I(-2\pi yr,\omega)dr$$

*où $\omega$ est défini par $\sinh(\omega) = \frac{2}{r}$ et pour tout couple de réels $(x,\omega)$, la fonction $I(x,\omega)$ est donnée par :*

$$I(x,\omega) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi$$

*Preuve.*

$$\psi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(u^2)\frac{2+iu}{2-iu}\exp(-2i\pi uy)du$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(u^2+t^2)\frac{\sqrt{u^2+4+t^2}-t}{\sqrt{u^2+4+t^2}+t}\,\frac{2+iu}{2-iu}\exp(-2i\pi yu)dtdu$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(u^2+t^2)\left(\frac{2+iu}{\sqrt{u^2+4+t^2}+t}\right)^2\exp(-2i\pi yu)dtdu$$

Posons $u+it = re^{i\varphi}$ et $\sinh(\omega) = \dfrac{2}{r}$, on obtient :

$$\psi(y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} Q'(r^2)\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2\exp(-2i\pi yr\cos(\varphi))rdrd\varphi$$

Ce qui implique le lemme.
Soit $J_0$ la fonction de Bessel de poids 0 définie par :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi$$

**Lemme 3.2.16** *Soit $x$ et $\omega$ deux nombres réels positifs, alors*

$$\begin{aligned} I(x,\omega)+I(-x,\omega) &= 4\pi J_0(x) + 8\pi x\cosh(\omega)\exp(-x\sinh(\omega)) \\ &- 8\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x\cosh(\theta+\omega))}{\cosh^2(\theta)}d\theta. \end{aligned}$$

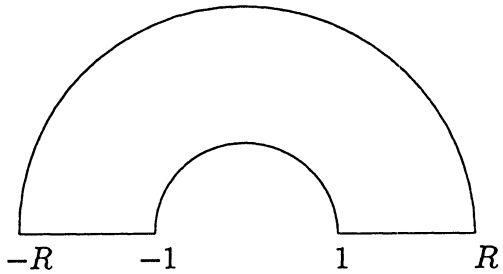
*Preuve.* Remarquons d'abord que

$$\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}=\frac{ie^{\omega}-e^{i\varphi}}{ie^{\omega}+e^{i\varphi}}.$$

On considère la fonction :

$$f(z)=\frac{1}{z}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-z}{ie^{\omega}+z}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(z+z^{-1}))=-\frac{4ie^{\omega}}{(ie^{\omega}+z)^2}\exp(i\frac{x}{2}(z+z^{-1}))$$

Supposons que $x>0$. Soit $R$ un réel $>1$, on intègre $f$ sur le contour indiqué par la figure suivante :



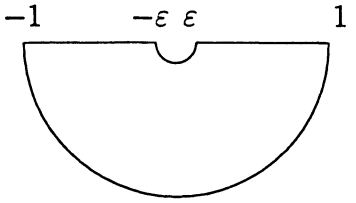

On obtient :

$$\begin{aligned}
& i\int_0^{\pi}\left\{\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2-1\right\}\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi && (19)\\
- & \int_{-R}^{-1}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y} && (20)\\
- & i\int_0^{\pi}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-Re^{i\varphi}}{ie^{\omega}+Re^{i\varphi}}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(Re^{i\varphi}+\frac{1}{R}e^{-i\varphi}))d\varphi && (21)\\
- & \int_1^{R}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y} && (22)\\
= & \ 0
\end{aligned}$$

Faisant tendre $R$ vers l'infini dans cette égalité. L'expression (21) tend vers 0 car $x>0$, on déduit :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi}\left\{\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2-1\right\}\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi=\\
-i & \int_{-\infty}^{-1}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y}\\
-i & \int_1^{+\infty}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon$ un réel tel que $0 < \varepsilon < 1$, on intègre $f$ sur le contour indiqué par la figure suivante :




On obtient :

$$
\begin{aligned}
& i\int_{\pi}^{2\pi}\left\{\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2-1\right\}\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi && (23)\\
- & \int_{\varepsilon}^{1}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y} && (24)\\
- & i\int_{\pi}^{2\pi}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-\varepsilon e^{i\varphi}}{ie^{\omega}+\varepsilon e^{i\varphi}}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(\varepsilon e^{i\varphi}+\frac{1}{\varepsilon}e^{-i\varphi}))d\varphi && (25)\\
- & \int_{-1}^{-\varepsilon}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y} && (26)\\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

On fait tendre $\varepsilon$ vers 0. L'expression (25) tend vers 0, on déduit :

$$
\begin{aligned}
& \int_{\pi}^{2\pi}\left\{\left(\frac{\sinh(\omega)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\omega)+\sin(\varphi)}\right)^2-1\right\}\exp(ix\cos(\varphi))d\varphi = \\
-i & \int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y}
\end{aligned}
$$

La somme de ces deux limites implique :

$$
\begin{aligned}
I(x,\omega)-2\pi J_0(x) &= -i\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\frac{ie^{\omega}-y}{ie^{\omega}+y}\right)^2-1\right\}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))\frac{dy}{y}\\
&= -4e^{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(ie^{\omega}+y)^2}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))dy
\end{aligned}
$$

On suppose $x < 0$ et on recommence les calculs d'intégrales sur les contours obtenus par symétrie par rapport à l'axe réel des contours précédents. La seule différence avec le calcul précédent est que $f$ n'est plus holomorphe sur le domaine d'intégration. En effet $z = -ie^{\omega}$ est pôle de $f$ de résidu :

$$\mathrm{Res}_{-ie^{\omega}} f = 4x\cosh(\omega)\exp(x\sinh(\omega))$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} I(x,\omega) - 2\pi J_0(x) &= 4e^{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(ie^{\omega}+y)^2}\exp(i\frac{x}{2}(y+\frac{1}{y}))dy \\ &- 8\pi x\cosh(\omega)\exp(x\sinh(\omega)) \end{aligned}$$

Le lemme se déduit simplement par changement de variable $y = e^{\theta}$.

On déduit du lemme 3.2.16 l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \psi(y)+\psi(-y) &= -2\int_0^{+\infty} g'(u)J_0(4\pi y\sinh(\frac{u}{2}))du \\ &- 16\pi y e^{-4\pi y}\int_0^{+\infty} g'(u)\cosh(\frac{u}{2})du \\ &+ \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} g'(u)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(4\pi y\sinh(\frac{u}{2})\cosh(\theta+\omega))}{\cosh^2(\theta)}d\theta du \end{aligned}$$

où $\omega$ est tel que $\sinh(\omega)\sinh(\frac{u}{2}) = 1$. Qu'on écrit par intégration par partie sous la forme :

$$\begin{aligned} \psi(y)+\psi(-y) &= 16\pi y e^{-4\pi y}g(0) + 4\pi y e^{-4\pi y}h(\frac{i}{2}) - 2ye^{-4\pi y}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr \\ &- 2\int_0^{+\infty} g'(u)J_0(4\pi y\sinh(\frac{u}{2}))du \\ &+ \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} g'(u)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(4\pi y\sinh(\frac{u}{2})\cosh(\theta+\omega))}{\cosh^2(\theta)}d\theta du \end{aligned}$$

**Proposition 3.2.6** *Pour tout $s$ tel que $1 < \Re(s) < \inf(A, \frac{3}{2})$, on a*

$$\int_0^{+\infty}(\psi(y)+\psi(-y))y^{s-1}dy = -i\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}{2^{s+1}\pi^{s+\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)}{\Gamma(1-\frac{s}{2}-ir)}rh(r)dr$$

$$+\frac{4}{(4\pi)^{s+1}}\Gamma(s+1)g(0) + \frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^s}h(\frac{i}{2}) - \frac{2}{(4\pi)^{s+1}}\Gamma(s+1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr$$

$$-\frac{1}{2^{2s-3}\pi^{s+1}}\Gamma(s)\sin(\frac{s\pi}{2})g(0)\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(s\theta)}{\cosh^2(\theta)}d\theta$$

$$-\frac{1}{2^{2s-1}\pi^{s+1}}\Gamma(s)\sin(\frac{s\pi}{2})\int_0^{+\infty} g(u)\sinh(\frac{u}{2})\times$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\theta}{\cosh(\theta)[\cosh(\theta)\cosh(\frac{u}{2})+\sinh(\theta)]^{s+1}}du$$

*Preuve.* Voir [25] pour le calcul de la transformée de Mellin de

$$\int_0^{+\infty} g'(u)J_0(4\pi y\sinh(\frac{u}{2}))du.$$

Quant à la transformée de Mellin de

$$\int_0^{+\infty} g'(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi y \sinh(\frac{u}{2}) \cosh(\theta + \omega))}{\cosh^2(\theta)} d\theta du$$

elle vaut

$$\Gamma(s) \sin(\frac{s\pi}{2}) \int_0^{+\infty} g'(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{\cosh^2(\theta)[\cosh(\theta)\cosh(\frac{u}{2}) + \sinh(\theta)]^s} du$$

pour $-1 < \Re(s) < \frac{3}{2}$. Ce fait ce prouve en deux étapes, d'abord pour $-1 < \Re(s) < 0$ toutes les intégrales y compris celle en $y$ sont absolument convergentes. On peut donc les intervertir, l'expression découle de [8] 6.5 (1). Ensuite on établit que la transformée de Mellin est convergente et holomorphe sur la bande $-1 < \Re(s) < \frac{3}{2}$. Le comportement asymptotique en $y^{-\frac{1}{2}}$ de certaines fonctions intermédière impose la borne $\frac{3}{2}$. L'expression de la proposition découle par intégration par partie valable sur la bande $-1 < \Re(s) < \frac{3}{2}$.

**Lemme 3.2.17** *Pour tout $s$ tel que $1 < \Re(s) < A$, on a*

$$\int_0^{+\infty} p_3(y) y^{s-2} dy = -\frac{1}{2} h(\frac{is}{2}) \varphi_{\infty,\infty}(\frac{1+s}{2}) \frac{1-s}{1+s}$$

*où $\varphi_{\infty,\infty}(s)$ est le terme constant de la série d'Eisenstein en la pointe $\infty$ $E_\infty(z,s)$.*

*Preuve.* La fonction $\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2} - ir)$ a un pôle simple en $r = \frac{i}{2}$ et holomorphe sur le reste de la bande $0 \leq \mathrm{Im}(r) < \frac{A}{2}$ et $\frac{\frac{1}{2} + ir}{\frac{1}{2} - ir}$ est holomorphe sur cette bande avec un zéro en $r = \frac{i}{2}$. Il découle alors que l'intégrant de $p_3$ est holomorphe sur la bande. Soit $c$ un réel tel que $\frac{1}{2} < c < \frac{A}{2}$, le théorème des résidus nous permet d'écrire :

$$p_3(y) = -\frac{y}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} h(t) \varphi_{\infty,\infty}(\frac{1}{2} - ir) \frac{1+2ir}{1-2ir} y^{2ir} dr$$

Posons $s = -2ir$, alors

$$p_3(y) = \frac{iy}{4\pi} \int_{2c-i\infty}^{2c+i\infty} h(\frac{is}{2}) \varphi_{\infty,\infty}(\frac{1+s}{2}) \frac{1-s}{1+s} y^{-s} ds$$

La transformée de Mellin inverse nous permet de déduire le lemme.
On termine cette section par un calcul de la contribution de $p_4$.

**Lemme 3.2.18** *Soit $f(z)$ une fonction $\Gamma_0(N)$-invariante à décroissance rapide en la pointe $\infty$. On suppose qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $D_0 f = -\lambda f$, alors*

$$\int_X |If(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) = (\lambda + \frac{s(s-1)}{2}) \int_X |f(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z)$$

*Preuve.* Soit $r$ tel que $\lambda = \frac{1}{4} + r^2$. Du fait que $\mathrm{D}_0 f = -\lambda f$ on déduit que le développement de Fourier en la pointe $\infty$ de $f$ est donné par [10] :

$$f(x+iy) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sqrt{y} K_{ir}(2\pi|n|y) \exp(2i\pi nx)$$

où $K_{ir}$ est la fonction de Bessel modifiée qui est dans ce cas réelle car $r$ est soit réel soit imaginaire pure. Remarquons ensuite que $|a_n| = |a_{-n}|$. Pour cela considérons l'opérateur défini sur l'espace des fonctions $\Gamma_0(N)$-invariantes par : $f(z) \to f(-\overline{z})$. Comme $\mathrm{D}_0 f = -\lambda f$ alors il existe $\alpha$ tel que $f(-\overline{z}) = \alpha f(z)$ [12]. Cet opérateur est involutif donc $\alpha^2 = 1$ et $a_n = \alpha a_{-n}$.

$$\begin{aligned} |If|^2 &= \frac{1}{2}\mathrm{D}_0|f|^2 - \frac{1}{2} f \mathrm{D}_0 \overline{f} - \frac{1}{2}\overline{f}\mathrm{D}_0 f + iy^2(\partial_x f \partial_y \overline{f} - \partial_x \overline{f} \partial_y f) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{D}_0|f|^2 + \lambda|f|^2 + iy^2(\partial_x f \partial_y \overline{f} - \partial_x \overline{f} \partial_y f) \end{aligned}$$

Le terme constant du développement de Fourier en la pointe $\infty$ de $iy^2(\partial_x f \partial_y \overline{f} - \partial_x \overline{f} \partial_y f)$ est nul car $|a_n| = |a_{-n}|$. La méthode de Rankin–Selberg implique alors :

$$\begin{aligned} &\int_X |If(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) = \\ &\quad \frac{1}{2}\int_X \mathrm{D}_0|f(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) + \lambda \int_X |f(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) \end{aligned}$$

Le lemme découle de l'égalité

$$\int_X \mathrm{D}_0|f(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) = s(s-1)\int_X |f(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z)$$

qui s'obtient à partir du théorème de Stokes.
On applique ce lemme d'une part aux fonctions propres de $D_0$ sur $L^2(\Gamma_0(N)\backslash\mathcal{H}, d\mu_0)$, on obtient :

$$\int_X |I\varphi_i(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z) = (\lambda_i + \frac{s(s-1)}{2}) \int_X |\varphi_i(z)|^2 E_\infty(z,s) d\mu_0(z)$$

D'autre part, le lemme 3.2.18 peut être étendu aux fonctions $\widetilde{E}_{\kappa,2}(\frac{1}{2} + ir)$ :

$$\begin{aligned} &\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^{+\infty} |\widetilde{E}_{\kappa,2}(z, \frac{1}{2} + ir)|^2 y^{s-2} dx dy = \\ &\quad (1 + \frac{s(s-1)}{2(\frac{1}{4} + r^2)}) \int_{-1/2}^{1/2}\int_0^{+\infty} |\widetilde{E}_\kappa(z, \frac{1}{2} + ir)|^2 y^{s-2} dx dy \end{aligned}$$

Cette relation ramène le calcul de la contribution de $p_4$ au cas des séries d'Eisenstein de poids 0.
Les pointes de $X_0(N)$ ($N$ sans facteurs carrés) sont en bijection avec les diviseurs $d$ de $N$

et $\{d/N, d$ divisant $N\}$ donnent un système complet de pointes inéquivalentes (dans cette identification la pointe 0 correspond à 1 et la pointe $\infty$ à $1/N$). On désigne par $E_{d/N}(z,s)$ la série d'Eisenstein de $\Gamma_0(N)$ en la pointe $d/N$ et par $E(z,s)$ l'unique série d'Eisenstein de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. On fixe le développement de Fourier de ces séries en la pointe $\infty$

$$E(z,s) = y^s + \varphi_0(s)y^{1-s} + \sum_{m\neq 0} 2\pi^s\Gamma(s)^{-1}|m|^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\varphi_m(s)\exp(2i\pi mx)$$

$$E_{d/N}(z,s) = \delta_{d,1}y^s + \varphi_{d/N,\infty,0}(s)y^{1-s} + \sum_{m\neq 0} 2\pi^s\Gamma(s)^{-1}|m|^{s-\frac{1}{2}}\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)\varphi_{d/N,\infty,m}(s)\exp(2i\pi mx)$$

On sait d'autre part que [12] :

$$\begin{aligned}\varphi_0(s) &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\\ \varphi_m(s) &= \frac{1}{\zeta(2s)}\sum_{d/m\ d>0} d^{1-2s} = \frac{\sigma_{1-2s}(m)}{\zeta(2s)}\end{aligned}$$

On établit simplement la relation :

$$E_{d/N}(z,s) = \frac{1}{N^s}\prod_{p/N}\frac{p^{2s}}{p^{2s}-1}\sum_{d_1/\frac{N}{d},\ d_2/d}\frac{\mu(d_1d_2)}{(d_1d_2)^s}E(\frac{Nd_2}{dd_1}z,s)$$

où $\mu$ est la fonction de Möbius. On en déduit le lemme suivant dont la première partie est donnée dans [10]

**Lemme 3.2.19**

$$\varphi_{d/N,\infty,0}(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\prod_{p/\frac{N}{d}}\frac{p-1}{p^{2s}-1}\prod_{p/d}\frac{p^s-p^{1-s}}{p^{2s}-1}$$

*et pour* $m\neq 0$

$$\varphi_{d/N,\infty,m}(s) = d^s\frac{\mu(\frac{N}{d})}{\zeta(2s)}\prod_{p/N}\frac{1}{p^{2s}-1}\sum_{\substack{m=d_1d_2m'\\ d_1/\frac{N}{d},\ d_2/d}} d_1\frac{\mu(d_1d_2)}{d_2^{2s-1}}\sigma_{1-2s}(m')$$

Ces formules impliquent la proposition suivante :

**Proposition 3.2.7**

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^{+\infty} |\widetilde{E}_{d/N}(z,\frac{1}{2}+ir)|^2 y^{s-2}dxdy = d\pi^{1-s}\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}\times$$

$$\frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ir)\Gamma(\frac{1}{2}+ir)}\frac{\zeta(s-2ir)\zeta(s+2ir)}{\zeta(1-2ir)\zeta(1+2ir)}\times$$

$$\prod_{p/N}\frac{1}{(1+p^{-s})(p^{1+2ir}-1)(p^{1-2ir}-1)}\prod_{p/d}(1-p^{-s-2ir})(1-p^{-s+2ir})\prod_{p/\frac{N}{d}} Z_p(s,r)$$

*où $Z_p(s,r)$ est définie par :*

$$\begin{aligned} Z_p(s,r) &= (1-p^{-s-2ir})(1-p^{-s+2ir})+p^{-s}(1+p^{-s})(1-p^{1+2ir})(1-p^{1-2ir}) \\ &+ p^{-s-2ir}(1-p^{1+2ir})(1-p^{-s-2ir})+p^{-s+2ir}(1-p^{1-2ir})(1-p^{-s+2ir}) \end{aligned}$$

*Preuve.* En appliquant la méthode de Rankin–Selberg à $|\widetilde{E}_{d/N}(z,\frac{1}{2}+ir)|^2$, on obtient :

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_0^{+\infty} |\widetilde{E}_{d/N}(z,\frac{1}{2}+ir)|^2 y^{s-2}dxdy =$$

$$\frac{4\pi}{\Gamma(\frac{1}{2}+ir)\Gamma(\frac{1}{2}-ir)}(\sum_{m\neq 0}\frac{|\varphi_{d/N,\infty,m}(\frac{1}{2}+ir)|^2}{|m|^s})(\int_0^{+\infty} K_{ir}(2\pi y)^2 y^{s-1}dy)$$

La première parenthèse se calcule à partir des expressions données dans le lemme 3.2.19. Ces expressions montrent qu'à des factorisations évidentes près, $\varphi_{d/N,\infty,m}$ est multiplicative. La somme chérchée admet donc un produit Eulerien qu'on calcule simplement [23]. La seconde parenthèse vaut $\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2}{8\pi^s\Gamma(s)}\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)$.

### 3.2.4 Formules finales

On rappelle que $N$ est un entier impair sans facteurs carrés. On résume dans la proposition suivante le calcul mené dans cette section :

**Proposition 3.2.8** *Pour tout $s$ tel que $1<\Re(s)<\inf(\frac{3}{2},A)$, on a*

$$gh(\frac{i}{2})R_F(s)+\sum_{i>0}\frac{h(r_i)}{\lambda_i}R_{|I\varphi_i|^2}(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{\zeta(2s)}\sum_{*}\zeta_N(s,l)I_2(s,l)$$

$$+\ (\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s))I_2(s,2)+A_2(s)+A_3(s)+A_4(s)$$

*où*

$$I_2(s,l) = \int_{\mathcal{H}} R_{\gamma_l}(z)y^s d\mu_0(z)+\int_{\mathcal{H}} R_{\gamma_{-l}}(z)y^s d\mu_0(z) \quad \text{pour } |l|\neq 2$$

$$
\begin{aligned}
I_2(s,2) &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(u^2)\frac{2i-u}{2i+u}|u|^{s-1}du \\
A_2(s) &= -i\zeta(s)\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}{2^{s+1}\pi^{s+\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)}{\Gamma(1-\frac{s}{2}-ir)}rh(r)dr \\
&+ \zeta(s)\frac{4}{(4\pi)^{s+1}}\Gamma(s+1)g(0)+\zeta(s)\frac{\Gamma(s+1)}{(4\pi)^s}h(\frac{i}{2}) \\
&- \zeta(s)\frac{2}{(4\pi)^{s+1}}\Gamma(s+1)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr \\
&- \zeta(s)\frac{1}{2^{2s-3}\pi^{s+1}}\Gamma(s)\sin(\frac{s\pi}{2})g(0)\int_0^{+\infty}\frac{\sinh(s\theta)}{\cosh^2(\theta)}d\theta \\
&- \zeta(s)\frac{1}{2^{2s-1}\pi^{s+1}}\Gamma(s)\sin(\frac{s\pi}{2})\int_0^{+\infty} g(u)\sinh(\frac{u}{2})\times \\
&\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\theta}{\cosh(\theta)[\cosh(\theta)\cosh(\frac{u}{2})+\sinh(\theta)]^{s+1}}du \\
A_3(s) &= -\frac{1}{2}h(\frac{is}{2})\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1+s}{2})\frac{1-s}{1+s} \\
A_4(s) &= -\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2}{4\pi^s\Gamma(s)}\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}\prod_{p/N}\frac{1}{(1+p^{-s})}\int_{-\infty}^{+\infty} h(r)(1+\frac{s(s-1)}{2(\frac{1}{4}+r^2)})\times \\
&\qquad \frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ir)\Gamma(\frac{1}{2}+ir)}\frac{\zeta(s-2ir)\zeta(s+2ir)}{\zeta(1-2ir)\zeta(1+2ir)}\times
\end{aligned}
$$

$$
\prod_{p/N}\frac{1}{(p^{1+2ir}-1)(p^{1-2ir}-1)}(\sum_{d/N} d\prod_{p/d}(1-p^{-s-2ir})(1-p^{-s+2ir})\prod_{p/\frac{N}{d}} Z_p(s,r))dr
$$

*et le symbole* $\sum_*$ *désigne la somme sur les entiers* $l$ *de valeur absolue différente de* 2 *tels que* $l^2-4$ *est un carré modulo tous les diviseurs premiers de* $N$

De même la méthode de Rankin–Selberg appliquée à la décomposition spectrale (14) donne :

**Proposition 3.2.9** *Pour tout* $s$ *tel que* $1<\Re(s)<A$, *on a*

$$
\sum_{i>0} h(r_i)R_{|\varphi_i|^2}(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta(2s)}\sum_* \zeta_N(s,l)I_0(s,l)
$$

$$
+(\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s))I_0(s,2)+B_2(s)+B_3(s)+B_4(s)
$$

*où*

$$
\begin{aligned}
I_0(s,l) &= \int_{\mathcal{H}} k_0(u(z,\gamma_l z))y^s d\mu_0(z)+\int_{\mathcal{H}} k_0(u(z,\gamma_{-l}z))y^s d\mu_0(z) \quad \text{pour } |l|\neq 2 \\
I_0(s,2) &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(u^2)|u|^{s-1}du
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_2(s) &= -i\zeta(s)\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{1-s}{2})}{2^{s+1}\pi^{s+\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)}{\Gamma(1-\frac{s}{2}-ir)}rh(r)dr \\
B_3(s) &= -\frac{1}{2}h(\frac{is}{2})\varphi_{\infty,\infty}(\frac{1+s}{2}) \\
B_4(s) &= -\frac{\Gamma(\frac{s}{2})^2}{4\pi^s\Gamma(s)}\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}\prod_{p/N}\frac{1}{(1+p^{-s})}\int_{-\infty}^{+\infty}h(r)\times \\
&\quad \frac{\Gamma(\frac{s}{2}-ir)\Gamma(\frac{s}{2}+ir)}{\Gamma(\frac{1}{2}-ir)\Gamma(\frac{1}{2}+ir)}\frac{\zeta(s-2ir)\zeta(s+2ir)}{\zeta(1-2ir)\zeta(1+2ir)}\times
\end{aligned}
$$

$$
\prod_{p/N}\frac{1}{(p^{1+2ir}-1)(p^{1-2ir}-1)}(\sum_{d/N}d\prod_{p/d}(1-p^{-s-2ir})(1-p^{-s+2ir})\prod_{p/\frac{N}{d}}Z_p(s,r))dr
$$

## 3.3 Terme constant de la transformée de Rankin–Selberg de la métrique d'Arakelov

Soit $N$ un entier impair sans facteurs carrés tel que le genre de la courbe modulaire $X_0(N)$ est non nul. La métrique d'Arakelov introduite dans la section 1.3 est définie par $\nu(z) = F(z)d\mu_0(z)$. On désigne par $R_F$ sa transformée de Rankin–Selberg :

$$
R_F(s) = \int_X E_\infty(z,s)\nu(z) = \int_X F(z)E_\infty(z,s)d\mu_0(z)
$$

La fonction $R_F(s)$ est convergente pour $\Re(s) > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1}$. On note $C_F$ son terme constant de telle sorte que le développement de Laurent de $R_F$ soit :

$$
R_F(s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)} + C_F + O(s-1)
$$

Cette section sera entièrement consacrée à la preuve du théorème D. Elle est l'aboutissement des techniques développées dans les sections précédentes. En effet le terme $C_F$ sera obtenu en faisant la différence des deux formules données par les propositions 3.2.8 et 3.2.9 pour la fonction $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$ et en prenant la limite quand $t$ tend vers l'infini.

### 3.3.1 Contribution hyperbolique et fonction Zêta de Selberg

On étudie dans cette partie la fonction

$$
\begin{aligned}
f(s) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\zeta(2s)}\sum_{*\ |l|>2}\zeta_N(s,l)(I_2(s,l)-I_0(s,l)) \\
&= \frac{1}{\zeta(2s)}\sum_{*\ l>2}\zeta_N(s,l)(I_2(s,l)-I_0(s,l)) \qquad (27)
\end{aligned}
$$

**Proposition 3.3.1** *La fonction $f(s)$ est holomrphe au voisinage de* 1 *et*

$$f(1) = -\frac{6}{\pi} \sum_{* \ l>2} \mathrm{Res}_{s=1}\zeta_N(s,l)(\frac{1}{2n}h(\frac{i}{2}) - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}\exp(-2ir\log(n))dr)$$

*où* $n = \dfrac{l+\sqrt{l^2-4}}{2}$.

On commence par montrer que $I_2(1,l) = I_0(1,l)$. Ce qui donne un sens à la valeur en 1 de chaque terme de la somme (27), cette valeur sera calculée dans la proposition 3.3.2.

On fixe $l$ tel que $l > 2$ et on pose $\Delta = l^2 - 4$. Les valeurs propres de $\gamma_l$ sont $n = \dfrac{l+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $n^{-1}$.

**Lemme 3.3.1** *Pour tout $s$ de partie réelle $< A$,*

$$I_2(s,l) = \Delta^{s/2}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\Delta(1+\xi^2))\frac{i(n^2+1)+\xi(n^2-1)}{i(n^2+1)-\xi(n^2-1)}B(s,\xi)d\xi$$

$$I_0(s,l) = \Delta^{s/2}\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(\Delta(1+\xi^2))B(s,\xi)d\xi$$

*où*

$$B(s,\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}}{(y^2+(1+\xi y)^2)^s}dy + \int_0^{+\infty} \frac{y^{s-1}}{(y^2+(1-\xi y)^2)^s}dy$$

*Preuve.* Soit $M = \Delta^{-1/4}\begin{pmatrix} \sqrt{\Delta}/2 & -\sqrt{\Delta}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$M\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}M^{-1} = \gamma_l \quad \text{et} \quad M\begin{pmatrix} -n^{-1} & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}M^{-1} = \gamma_{-l}.$$

D'où

$$I_2(s,l) = \Delta^{s/2}[\int_{\mathcal{H}} R_{\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}}(z)\frac{y^s}{|z+1|^{2s}}d\mu_0(z) +$$

$$\int_{\mathcal{H}} R_{\begin{pmatrix} -n^{-1} & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}}(z)\frac{y^s}{|z+1|^{2s}}d\mu_0(z)]$$

On obtient la partie du lemme relative à $I_2$ en explicitant la définition de $R_\gamma$ et en faisant le changement de variable $\xi = \frac{x}{y}$. L'expression de $I_0$ découle d'un calcul analogue.

**Lemme 3.3.2** *Le développement de $B(s,\xi)$ au voisinage de* 1 *est :*

$$B(s,\xi) = \pi + (s-1)A(\xi) + O((s-1)^2)$$

*où*

$$A(\xi) = \frac{\pi}{2}\log(\xi^2+1) + \int_{-\infty}^{+\infty} \log(\frac{|y|}{y^2+1})\frac{dy}{y^2+1}$$

*Preuve.* Le terme constant de $B(s,\xi)$ vaut $B(1,\xi)=\pi$. Le terme suivant du développement est :

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \int_0^{+\infty} \log\left(\frac{|y|}{y^2+(1+\xi y)^2}\right)\frac{dy}{y^2+(1+\xi y)^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \log\left(\frac{|y-\xi|}{y^2+1}\right)\frac{dy}{y^2+1} \end{aligned}$$

Le théorème des résidus nous permet de déduire le lemme.

**Lemme 3.3.3** *Soit $g$ la transformée de Fourier de $h$ donnée par* (13), *alors :*

$$I_0(1,l) = I_2(1,l) = \pi g(2\log(n))$$

*Preuve.* Le lemme résulte du lemme 3.3.1, de la valeur en 1 de $B(s,\xi)$ et des relations (12) et (15) donnant les transformées de Selberg.

**Proposition 3.3.2** *Pour tout $s$ tel que $\Re(s) < A$ :*

$$I_2(s,l) - I_0(s,l) = (s-1)A_l + O((s-1)^2)$$

*où*

$$A_l = -\frac{\pi}{2n}h(\frac{i}{2}) + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(r)}{1/4+r^2}\exp(-2ir\log(n))dr$$

*Preuve.* D'après le lemme 3.3.1, 3.3.2 et 3.3.3,

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(\Delta(1+\xi^2))\frac{i\frac{n^2+1}{n^2-1}+\xi}{i\frac{n^2+1}{n^2-1}-\xi}\log(1+\xi^2)d\xi \\ &- \frac{\pi}{2}\sqrt{\Delta}\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(\Delta(1+\xi^2))\log(1+\xi^2)d\xi \end{aligned}$$

En réutilisant le lemme 3.3.3, on trouve :

$$\begin{aligned} A_l &= \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} k_2(x^2+\Delta)\frac{\sqrt{\Delta+4}+ix}{\sqrt{\Delta+4}-ix}\log(x^2+\Delta)dx \\ &- \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} k_0(x^2+\Delta)\log(x^2+\Delta)dx \end{aligned}$$

On aura besoin des définitions suivantes : pour tout $\eta$ positif, on fixe $\theta$ tel que $\sinh(\theta) = \sqrt{\frac{\Delta+4}{\eta}}$ et on pose

$$\begin{aligned} J(\eta) &= \Re\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2\log(\eta\cos^2(\varphi)+\Delta)d\varphi \\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log(\eta\cos^2(\varphi)+\Delta)d\varphi \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.4** *Soit $Q$ la fonction définie par $g(u) = Q(e^u + e^{-u} - 2)$ dans (3), alors :*

$$A_l = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} Q(\eta + \Delta)J'(\eta)d\eta$$

*Preuve.* Les expressions (13) et (16) de la transformée de Selberg inverse impliquent :

$$A_l = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x^2 + \Delta + t^2)\log(x^2 + \Delta)dtdx -$$

$$\Re\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Q'(x^2 + \Delta + t^2)\left(\frac{\sqrt{\Delta + 4} + ix}{\sqrt{x^2 + \Delta + 4 + t^2} + t}\right)^2 \log(x^2 + \Delta)dtdx$$

On pose $\eta = x^2 + t^2$, on obtient

$$A_l = \int_0^{+\infty}\int_{-\sqrt{\eta}}^{\sqrt{\eta}} Q'(\eta + \Delta)\log(\eta - t^2 + \Delta)dt\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta - t^2}} -$$

$$\Re\int_0^{+\infty}\int_{-\sqrt{\eta}}^{\sqrt{\eta}} Q'(\eta + \Delta)\left(\frac{\sqrt{\Delta + 4} + i\sqrt{\eta - t^2}}{\sqrt{\eta + \Delta + 4} + t}\right)^2 \log(\eta - t^2 + \Delta)dt\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta - t^2}}$$

On fait le changement de variable $t = \sqrt{\eta}\sin(\varphi)$, on trouve :

$$A_l = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} Q'(\eta + \Delta)J(\eta)d\eta$$

L'expression de $A_l$ donnée dans le lemme découle par intégration par partie en remarquant que $J(0) = 0$ et en tenant compte du comportement asymptotique de $Q'$ en l'infini.
La suite de la preuve de la proposition 3.3.2 passe par un calcul de $J'(\eta)$. On a choisi de ne pas inclure ce calcul fastidieux et complètement indépendant de ce qui précède dans le coeur du texte. On démontrera dans l'appendice le résultat suivant :

**Lemme 3.3.5** *Pour tout $\eta$ positif,*

$$J'(\eta) = \frac{\pi}{2\eta}\left(\frac{\sqrt{\Delta + 4}}{\sqrt{\Delta + \eta + 4}} + \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta + \eta}}\right)(2 - e^{u-\alpha} - e^{\alpha - u})$$

*où*

$$\begin{aligned} u &= 2\log\frac{\sqrt{\eta + \Delta} + \sqrt{\eta + \Delta + 4}}{2} \\ \alpha &= 2\log(n) \end{aligned}$$

On peut maintenant finir la preuve de la proposition 3.3.2. On fait le changement de variable $\eta + \Delta = 4\sinh^2(\frac{u}{2})$ dans l'expression de $A_l$ donnée dans le lemme 3.3.4, on trouve

$$A_l = -\pi\int_\alpha^{+\infty} g(u)\sinh(\frac{u - \alpha}{2})du$$

La proposition 3.3.2 découle simplement de cette expression.

*Preuve.* (de la proposition 3.3.1). Les propositions 3.2.8 et 3.2.9 nous assurent que $f$ admet un prolongement méromorphe au voisinage de 1 avec au plus un pôle simple en 1. Le lemme 3.3.1 implique que $I_2(s,l) - I_0(s,l) = O(l^{\sigma-1-A})$ où $\sigma = \Re(s)$, uniformément en $s$. D'autre part $\zeta_N(s,l)$ est bornée par $c.|\zeta(s)|^2$ pour $\Re(s) > 1$ où $c$ est une constante qui ne dépend que de $N$. On en déduit aisément l'holomorphie de $f$ en 1 ainsi que la valeur de $f(1)$ donnée dans la proposition 3.3.1.

On prend pour $h$ la fonction $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$. Sa transformée de Fourier $g$ est donnée par

$$g(t,u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp(-\frac{t}{4} - \frac{u^2}{4t})$$

**Définition 3.3.1** *Pour toute matrice hyperbolique $\gamma$, on note $N(\gamma) = v^2$ où $v$ est la valeur propre de $\gamma$ dont le carré est supérieur à 1. On désigne par $\gamma_0$ le générateur de trace positive du commutant de $\gamma$. La matrice $\gamma$ est dite primitive si $\gamma = \gamma_0$. On note*

$$\begin{aligned}\Theta(t) &= \sum_{l>2}\sum_{\substack{[\gamma]\\ \mathrm{tr}\gamma = l}} \frac{\log N(\gamma_0)}{\sqrt{l^2-4}} g(t, \log N(\gamma)) \\ Z(s) &= \prod_{\substack{\gamma_0 \text{ primitive}\\ \text{non conjugué}}} \prod_{k=0}^{\infty}(1-\exp(-(s+k)\log N(\gamma_0)))\end{aligned}$$

*où $\sum_{[\gamma]}$ désigne la somme sur les classes de conjugaison dans $\Gamma_0(N)$ de matrices de trace donnée. La fonction $\Theta(t)$ est la contribution hyperbolique à la formule de trace de Selberg pour $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$ et $Z(s)$ la fonction zêta de Selberg de $\Gamma_0(N)$.*

**Proposition 3.3.3** *La valeur en 1 de la contribution hyperbolique pour $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$ est $f(1) = -\frac{1}{2\mathrm{vol}}\int_0^t \Theta(\xi)d\xi$. Cette contribution se développe quand $t$ tend vers l'infini en*

$$-\frac{1}{2\ \mathrm{vol}}\int_0^t \Theta(\xi)d\xi = -\frac{t}{2\mathrm{vol}} - \frac{1}{2\mathrm{vol}}\lim_{s\to 1}(\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1}) + \frac{1}{2\mathrm{vol}} + o(1)$$

*Preuve.* On établit simplement (avec les notations de la proposition 3.3.1) que :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\frac{h(t,r)}{\frac{1}{4}+r^2}\exp(-2ir\log(n))dr = \frac{1}{2}\int_0^t g(\xi, 2\log(n))d\xi$$

La proposition 3.3.1 et la proposition 3.2.3 impliquent que la contribution hyperbolique est dans ce cas :

$$\begin{aligned}f(1) &= -\frac{3}{2\pi}\prod_{p/N}\frac{1}{p+1}\sum_{l>2}\sum_{[\gamma]}\frac{\log N(\gamma_0)}{\sqrt{l^2-4}}\int_0^t g(\xi, \log N(\gamma))d\xi \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{vol}}\int_0^t \Theta(\xi)d\xi\end{aligned}$$

Le comportement asymptotique de cette contribution découle du lemme suivant :

**Lemme 3.3.6** *L'intégrale* $\int_0^t \Theta(\xi)d\xi$ *est équivalente à* $t$ *en l'infini et*

$$\int_0^{+\infty}(\Theta(t)-1)dt = \lim_{s\to 1}(\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1}) - 1$$

*Preuve.* L'intégrabilité de $\Theta(\xi)$ en 0 est due au fait qu'il existe un réel $t_0 > 0$ tel que les fonctions $\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-t/4}e^{-\log^2 N(\gamma)/(4t)}$ sont croissantes pour tout $\gamma \in \Gamma_0(N)$ et pour $0 < t < t_0$. On se ramène ainsi à l'étude de l'intégrale $\int_1^t \Theta(\xi)d\xi$. La formule de trace de Selberg pour $\Gamma_0(N)$ et $h(t,r)$, qui se déduit à partir de la proposition 3.2.9 en identifiant les résidus (stratégie proposée par Zagier [25], voir aussi [10] page 413), implique l'équivalence annoncée. Dans cette formule seule la valeur propre 0 donne une contribution qui n'est pas intégrable au voisinage de l'infini. Il s'en suit que $\int_0^{+\infty}(\Theta(t)-1)dt$ est convergente, sa valeur découle du lien suivant entre la fonction $\Theta(t)$ et la dérivée logarithmique de la fonction zêta de Selberg ([17], [10] page 497) :

$$\frac{1}{2s-1}\frac{Z'(s)}{Z(s)} = \int_0^{+\infty} e^{-s(s-1)t}\Theta(t)dt$$

Pour cela il suffit de faire tendre $s$ vers 1 dans

$$\int_0^{+\infty} e^{-s(s-1)t}(\Theta(t)-1)dt = (\frac{1}{2s-1}\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s(s-1)})$$

UNIVERSITÉ PARIS BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUE ORSAY

Ceci termine la preuve du lemme 3.3.6 et de la proposition 3.3.3.

### 3.3.2 Contribution parabolique

On étudie la contribution de

$$(\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s))(I_2(s,2)-I_0(s,2))$$

**Lemme 3.3.7** *On a l'égalité :*

$$I_2(1,2) = I_0(1,2) = \pi g(0)$$

*Preuve.* Découle directement des expressions de $I_0(s,2)$ et $I_2(s,2)$ données dans les propositions 3.2.8 et 3.2.9.
La connaissance des deux termes suivants du développement au voisinage de 1 de $I_2(s,2) - I_0(s,2)$ s'impose à cause du pôle double en $s=1$ de $\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s)$. Signalons que $I_0(s,2)$ s'exprime simplement en fonction de $g$ [25]. Nous ne somme malheureusement pas en mesure de donner une telle expression pour $I_2(s,2)$. La proposition suivante qui donne le premier terme du développement sera suffisante :

**Proposition 3.3.4** *Pour tout $s$ de partie réelle $< A$ :*

$$\frac{\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}(I_2(s,2)-I_0(s,2))) = (s-1)A_2 + O((s-1)^2)$$

*où*

$$A_2 = -\frac{1}{2}h(\frac{i}{2}) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr$$

*Preuve.* Les propositions 3.2.8 et 3.2.9 impliquent :

$$\begin{aligned} A_2 = 2\Re\int_0^{+\infty} k_2(u^2)\frac{2+iu}{2-iu}\log(u)du \\ -2\int_0^{+\infty} k_0(u^2)\log(u)du \end{aligned}$$

Le calcul est ensuite identique à la preuve de la proposition 3.3.2.
Le terme suivant du développement au voisinage de 1 de cette contribution nous semble inaccessible par calcul. Dans le cas de $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$, on le note $C_2(t)$ :

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}(I_2(s,2)-I_0(s,2)) = \\ &-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t,r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr)(s-1) + C_2(t)(s-1)^2 + O((s-1)^3) \end{aligned}$$

**Lemme 3.3.8** *Pour tout $s$ de partie réelle plus grande que 1,*

$$\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s) = \frac{1}{N^s}\prod_{p/N}\frac{1}{1+p^s}\sum_{d/N}\prod_{p/\frac{N}{d}}(p-1)\prod_{p/d}(p^s+1)\ \frac{\zeta(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}$$

*Preuve.* La fonction $L_N(s)$ est liée au terme constant de la série d'Eisenstein $\varphi_{\infty,\infty}(s)$ par la relation [12] :

$$\varphi_{\infty,\infty}(s) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}L_N(s)$$

Le lemme se déduit de l'expression de $\varphi_{\infty,\infty}(s)$ donnée au lemme 3.2.19.

**Lemme 3.3.9** *Pour tout $s$ tel que $\Re(s) > 1$, ona*

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}(\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s)) = \frac{d(N)}{\mathrm{vol}(s-1)^2} + \\ &+\ \frac{1}{\mathrm{vol}}[d(N)(\frac{a\pi}{6}+3\gamma) + (d(N)-1)\sigma_{-1}(N) - d(N)\sum_{p/N}\frac{1+2p}{1+p}\log(p)]\frac{1}{s-1} \\ &+\ O(1) \end{aligned}$$

*$d(N)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de $N$, $\gamma$ est la consante de l'Euler et $a$ est la dérivée en 1 de $\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$.*

*Preuve.* Découle directement du lemme 3.3.8 en remarquant que pour tout entier $M$ sans facteurs carrés :

$$\sum_{d/M}\prod_{p/\frac{M}{d}}(p-1)\prod_{p/d}(p+1)=Md(M)$$

Il s'en suit que la contribution du terme parabolique pour $h(t,r)=\exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$ se développe au voisinage de 1 en :

$$\begin{aligned}
&(\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s))(I_2(s,2)-I_0(s,2))=\\
&\quad-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr)\frac{d(N)}{\mathrm{vol}(s-1)}+\frac{d(N)}{\mathrm{vol}}C_2(t)\\
&\quad-\frac{1}{\mathrm{vol}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(r)}{\frac{1}{4}+r^2}dr)[d(N)(\frac{a\pi}{6}+3\gamma)+(d(N)-1)\sigma_{-1}(N)\\
&\qquad-d(N)\sum_{p/N}\frac{1+2p}{1+p}\log(p)]+O(s-1)
\end{aligned}\tag{28}$$

### 3.3.3 Contribution elliptique

C'est la contribution des traces $-1,0,1$. Les propositions 3.2.4, 3.2.8 et 3.2.9 impliquent qu'elle vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\zeta(2s)}\prod_{p/N}\frac{1}{1+p^s}[&\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))\zeta_1(s,0)(I_2(s,0)-I_0(s,0))\\
&+2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))\zeta_1(s,1)(I_2(s,1)-I_0(s,1))]
\end{aligned}$$

On ne considère dans cette section que le cas de la fonction $h(t,r)=\exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$. On fixe les développements suivants au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\zeta(2s)}\zeta_1(s,0)(I_2(s,0)-I_0(s,0)) &= \frac{C_{0,0}(t)}{s-1}+C_{0,1}(t)+O(s-1)\\
\frac{1}{2\zeta(2s)}\zeta_1(s,1)(I_2(s,1)-I_0(s,1)) &= \frac{C_{1,0}(t)}{s-1}+C_{1,1}(t)+O(s-1)
\end{aligned}$$

où $C_{i,j}(t)$ pour $i,j\in\{0,1\}$ sont des fonctions de $t$.

**Proposition 3.3.5** *La contribution elliptique à la transformée de Rankin-Selberg pour la fonction $h(t,r)=\exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$ se développe au voisinage de 1 en :*

$$\frac{\pi}{3\mathrm{vol}}[\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))C_{0,0}(t)+2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))C_{1,0}(t)]\frac{1}{s-1}$$

$$+\frac{\pi}{3\text{vol}}[\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))C_{0,1}(t)+2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))C_{1,1}(t)]$$
$$-\frac{\pi}{3\text{vol}}\sum_{p/N}\frac{p}{1+p}\log(p)[\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))C_{0,0}(t)+2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))C_{1,0}(t)]$$
$$+O(s-1)$$

Il est possible d'exprimer les $C_{i,j}(t)$ en fonction de $t$, ce qui nous permettra de lire leurs limites quand $t$ tend vers l'infini. Le calcul étant très lourd, nous avons préféré le contourner. L'avantage de la proposition 3.3.5 est qu'elle sépare les dépendances en $N$ et $t$. Nous utiliserons dans la section finale les propositions 3.2.8 et 3.2.9 pour prouver que ces fonctions convergent vers des limites finies quand $t$ tend vers l'infini. Nous donnerons même ces limites pour $C_{0,0}(t)$ et $C_{1,0}(t)$ grâce à l'expression du genre de $X_0(N)$.

### 3.3.4 Preuve du théorème D

On note $\sigma_0(N) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice permute les pointes 0 et $\infty$ et vérifie $\sigma_0(N)^{-1}\Gamma_0\sigma_0(N) = \Gamma_\infty$ où $\Gamma_0$ et $\Gamma_\infty$ sont les fixateurs des pointes 0 et $\infty$ dans $\Gamma_0(N)$, donc

$$E_0(z,s) = \sum_{\gamma\in\Gamma_0\backslash\Gamma_0(N)} (\text{Im}(\sigma_0(N)\gamma z))^s .$$

Comme $\sigma_0(N)^{-1}\Gamma_0(N)\sigma_0(N) = \Gamma_0(N)$, alors $E_0(\sigma_0(N)z,s) = E_\infty(z,s)$.
D'autre part $F(\sigma_0(N)z) = F(z)$ car on peut prendre une base orthonormée pour le produit de Petersson de formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ qui est propre pour l'involution d'Atkin. On en déduit la première partie du théorème D. La deuxième partie de ce théorème est une forme allégée de la proposition suivante :

**Proposition 3.3.6** *Il existe trois constantes réelles $C_0$, $C_1$ et $C_2$ telles que*

$$\begin{aligned} C_F &= -\frac{1}{2g\ \text{vol}}\lim_{s\to 1}(\frac{Z'(s)}{Z(s)}-\frac{1}{s-1})+\frac{\Gamma'(2)+\gamma-\log(4\pi)}{4\pi g} \\ &+ \frac{1}{g\ \text{vol}}(1+\gamma+\frac{a\pi}{12}+d(N)(C_2-\frac{a\pi}{12}-\frac{3}{2}\gamma)-\frac{1}{2}(d(N)-1)\sigma_{-1}(N)) \\ &+ \frac{1}{g\ \text{vol}}(-\sum_{p/N}\frac{p^2}{p^2-1}\log(p)+\frac{d(N)}{2}\sum_{p/N}\frac{1+2p}{1+p}\log(p)) \\ &+ \frac{1}{g\ \text{vol}}(\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))[\frac{1}{4}\sum_{p/N}\frac{p}{1+p}\log(p)+C_0] \\ &\qquad +\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))[\frac{1}{3}\sum_{p/N}\frac{p}{1+p}\log(p)+C_1]) \end{aligned}$$

*où $\gamma$ est la constante d'Euler et $a$ est la dérivée en 1 de $\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$.*

*Preuve.* On commence par faire la différence des deux expressions données par les propositions 3.2.8 et 3.2.9 pour $h(t,r) = \exp(-t(\frac{1}{4}+r^2))$, on trouve en tenant compte du lemme 3.2.18 :

$$\begin{aligned} gR_F(s) + \frac{s(s-1)}{2}\sum_{i>0}\frac{h(t,r_i)}{\lambda_i}R_{|\varphi_i|^2}(s) = \\ +\frac{1}{2\zeta(2s)}\sum_{*}\zeta_N(s,l)(I_2(s,l)-I_0(s,l)) \\ +(\sum_{d/N}\frac{1}{d^s}\zeta_{\frac{N}{d}}(s)L_{\frac{N}{d}}(s))(I_2(s,2)-I_0(s,2)) \\ +A_2(s)-B_2(s)+A_3(s)-B_3(s)+A_4(s)-B_4(s) \end{aligned} \tag{29}$$

L'étude menée dans la section 3.2 montre que toutes ces fonctions ont au plus des pôles simples en $s=1$. On écrira dans la suite l'égalité des résidus et des termes constants des différentes fonctions apparaissant dans l'équation précédente à $t$ fixé. On fera ensuite tendre le paramétre $t$ vers l'infini pour déduire la proposition 3.3.6 et le théorème D. Pour cela commençons par détailler ces contributions.

La fonction $\frac{s(s-1)}{2}\sum_{i>0}\frac{h(t,r_i)}{\lambda_i}R_{|\varphi_i|^2}(s)$ est holomorphe en $s=1$, elle ne contribue pas par suite au résidu. Sa contribution au terme constant vaut $\frac{1}{2\mathrm{vol}}\sum_{i>0}\frac{h(t,r_i)}{\lambda_i}$ qui tend vers zéro quand $t$ tend vers l'infini.

A partir des expressions de $A_4$ et $B_4$ données dans les propositions 3.2.8 et 3.2.9, on établit simplement que les contributions de $A_4(s)-B_4(s)$ aux résidu et terme constant tendent vers zéro quand $t$ tend vers l'infini.

La fonction $A_3(s)$ est holomorphe en $s=1$, elle ne contribue donc qu'au terme constant par $(2\mathrm{vol})^{-1}$. Le développement suivant de $\varphi_{\infty,\infty}(s)$ au voisinage de 1 déduit du lemme 3.2.19 :

$$\varphi_{\infty,\infty}(s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)} + \frac{1}{\mathrm{vol}}(2\gamma + \frac{a\pi}{6} - 2\sum_{p/N}\frac{p^2}{p^2-1}\log(p)) + O(s-1)$$

implique que :

$$-B_3(s) = \frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)} + \frac{1}{\mathrm{vol}}(\gamma + \frac{a\pi}{12} - \sum_{p/N}\frac{p^2}{p^2-1}\log(p)) + \frac{t}{2\mathrm{vol}} + O(s-1)$$

La contribution de $A_3(s)-B_3(s)$ contient un terme linéaire en $t$. Ce terme se simplifie avec un autre provenant de la contribution hyperbolique (voir proposition 3.3.3). La somme de ces deux contributions admet la limite finie quand $t$ tend vers l'infini : $(\mathrm{vol})^{-1}$ pour le résidu et

$$-\frac{1}{2\mathrm{vol}}\lim_{s\to 1}(\frac{Z'(s)}{Z(s)} - \frac{1}{s-1}) + \frac{1}{\mathrm{vol}}(1+\gamma+\frac{a\pi}{12} - \sum_{p/N}\frac{p^2}{p^2-1}\log(p))$$

pour le terme constant.

Il est simple de prouver que les contributions de $A_2(s)-B_2(s)$ quand $t$ tend vers l'infini vallent $1/4\pi$ pour le résidu et $(\Gamma'(2)+\gamma-\log(4\pi))/4\pi$ pour le terme constant.

**Lemme 3.3.10** *Les fonctions $C_{i,j}(t)$ pour $i,j \in \{0,1\}$ et $C_2(t)$ qui apparaissent dans les contributions parabolique et elliptique admettent des limites finies quand $t$ tend vers l'infini. Ces limites seront notées $C_{i,j}$ et $C_2$. De plus $C_{0,0} = -3/(4\pi)$ et $C_{1,0} = -1/(2\pi)$.*

*Preuve.* Les égalités des résidus et termes constants des fonctions apparaissant dans (29) écrites pour un certain nombre de $\Gamma_0(N)$ permettent d'exprimer les $C_{i,j}(t)$ et $C_2(t)$ en fonctions des autres contributions. L'étude précédemment menée montre que ces fonctions admettent des limites finies. Quant à la valeur de ces limites pour $C_{0,0}(t)$ et $C_{1,0}(t)$, elles se déduisent de l'égalité suivante des résidus prise quand $t$ tend vers l'infini :

$$\frac{g}{\mathrm{vol}} = \frac{\pi}{3\mathrm{vol}}[\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))C_{0,0} + 2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))C_{1,0}] - \frac{d(N)}{2\mathrm{vol}} + \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{\mathrm{vol}}$$

C'est à dire

$$g = 1 + \frac{1}{12}\prod_{p/N}(p+1) + \frac{\pi}{3}[\prod_{p/N}(1+(\frac{-1}{p}))C_{0,0} + 2\prod_{p/N}(1+(\frac{-3}{p}))C_{1,0}] - \frac{d(N)}{2}$$

L'expression du genre de $X_0(N)$ en fonction de $N$ nous permet de déduire les limites $C_{0,0}$ et $C_{1,0}$.
La proposition 3.3.6 découle de l'égalité des termes constants des différentes fonctions apparaissant dans (29) prise quand $t$ tend vers l'infini.

# 4 Auto–intersection du dualisant relatif de $X_0(N)$ : FIN

## 4.1 Preuve de la proposition B

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés tel que la courbe modulaire $X_0(N)$ soit de genre non nul. Soient $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ le modèle régulier minimal de $X_0(N)$ sur $\mathbb{Z}$, $E_0$ et $E_\infty$ les sections correspondantes aux pointes 0 et $\infty$ et $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$ des diviseurs verticaux tels que :

$$(\omega - (2g-2)E_x + \Phi_x, F) = 0 \text{ pour tout diviseur vertical } F.$$

On note $\Phi$ un diviseur vertical tel que :

$$(E_0 - E_\infty + \Phi, F) = 0 \text{ pour tout diviseur vertical } F.$$

On peut prendre pour $\Phi$ le diviseur $\frac{1}{2g-2}(\Phi_\infty - \Phi_0)$. La formule de Faltings Hriljac [9, 11, 18] implique que

$$(w - (2g-2)E_x + \Phi_x)^2 \leq 0$$

où $x$ désigne respectivement les pointes 0 et $\infty$. Si de plus $\omega$ possède un multiple à support dans les pointes, par le théorème de Manin–Drinfeld [7, 15, 5], ces inégalités deviennent des égalités. On déduit :

$$w^2 \leq -2g(g-1)(E_0^2 + E_\infty^2) + \frac{1}{2}(\Phi_0^2 + \Phi_\infty^2).$$

En utilisant de nouveau le théorème de Manin–Drinfeld et la formule de Falting Hriljac, on obtient $(E_0 - E_\infty + \Phi)^2 = 0$. On en déduit simplement l'inégalité de la proposition B. On est alors ramené au lemme suivant qui caractérise les entiers $N$ tels que le faisceau des différentielles $\omega$ de $X_0(N)$ possède un multiple à support dans les pointes.
Soient $\Gamma$ un sous groupe de congruence de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et $X_\Gamma$ la courbe modulaire associée. Soit $f_\Gamma : X(\Gamma) \to \mathbb{P}^1$ le morphisme naturel obtenu à partir de l'inclusion de $\Gamma$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Le morphisme $f_\Gamma$ n'est ramifié qu'éventuellement au dessus des points $P_i$, $P_j$ et $P_\infty$ correspondant aux orbites des points $i$, $j$ et $\infty$ de $\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$.

**Lemme 4.1.1** *Si l'indice de ramification de $f_\Gamma$ est constant au dessus de $P_i$ et constant au dessus de $P_j$, alors $X_\Gamma$ possède un diviseur canonique dont un multiple est à support dant les pointes. C'est en particulier le cas si $\Gamma$ est distingué dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Pour les sous-groupes $\Gamma_0(N)$, cette condition est réalisée si $N$ est premier à 6, sans facteurs carrés et possède un diviseur premier congru à 3 modulo 4 et un diviseur premier congru à 2 modulo 3.*

*Preuve.* On note $K_{X(\Gamma)}$ et $K_{\mathbb{P}^1}$ des diviseurs canoniques respectifs de $X(\Gamma)$ et $\mathbb{P}^1$. La formule de Hurwitz s'écrit dans ce cas

$$\begin{aligned} K_{X(\Gamma)} &\sim f_\Gamma^* K_{\mathbb{P}^1} + \sum_{P \in \mathbb{P}^1} \sum_{f_\Gamma(Q)=P} (e_Q - 1)Q \\ &\sim f_\Gamma^* K_{\mathbb{P}^1} + \frac{e_i - 1}{e_i} f_\Gamma^*(P_i) + \frac{e_j - 1}{e_j} f_\Gamma^*(P_j) + \sum_{f_\Gamma(q)=P_\infty} (e_Q - 1)Q \end{aligned}$$

où $e_i$ (resp. $e_j$) désigne l'indice de ramification commun à tous les points au dessus de $P_i$ (resp. $P_j$). La première partie du lemme découle alors car tous les points sont équivalent sur $\mathbb{P}^1$. Le reste du lemme est donné par la proposition 1.43 page 24 de [20].

## 4.2 Calcul à distance finie

Soit $N$ un entier sans facteurs carrés premier à 6. Le genre de la courbe $X_0(N)$ (que l'on suppose non nul) est :

$$g_N = 1 + \frac{1}{12} \prod_{p/N} (1+p) - \frac{1}{4} \prod_{p/N} (1 + (\frac{-1}{p})) - \frac{1}{3} \prod_{p/N} (1 + (\frac{-3}{p})) - \frac{1}{2} d(N)$$

où $d(N)$ est le nombre de diviseurs positifs de $N$ et $(\frac{-}{p})$ est le symbole de Legendre modifié :

$$(\frac{-1}{p}) = \begin{cases} 0 & p = 2 \\ 1 & p \equiv 1\ (4) \\ -1 & p \equiv 3\ (4) \end{cases}$$

$$(\frac{-3}{p}) = \begin{cases} 0 & p = 3 \\ 1 & p \equiv 1\ (3) \\ -1 & p \equiv 2\ (3) \end{cases}$$

Le modèle régulier minimal, $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$, de $X_0(N)$ sur $\mathbb{Z}$ est semi-stable. Les deux sections $E_0$ et $E_\infty$ ne se coupent pas à distance finie. On va décrire dans la suite la géométrie à distance finie de $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ [4, 16] ce qui nous permettra de calculer les diviseurs $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$.

### Déscription de $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ à distance finie

La courbe $X_0(N)_{\mathbb{Z}}$ a bonne réduction sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$. Si $p$ est un diviseur premier de $N$, le schéma $X_0(N)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est réduit et singulier sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On écrit $N = pM = pq_1 \dots q_\nu$ avec $M$ premier à $p$. On pose $Q = \prod_{i=1}^{\nu}(q_i + 1)$ et

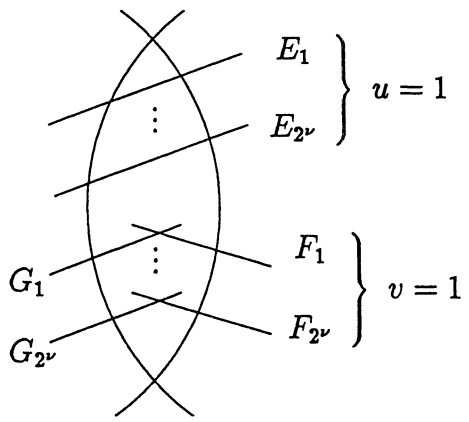
$$u = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 7 \text{ ou } 11 \pmod{12} \text{ et } q_i \equiv 1 \pmod 4 \ i = 1 \dots \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 5 \text{ ou } 11 \pmod{12} \text{ et } q_i \equiv 1 \pmod 3 \ i = 1 \dots \nu \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fibre $X_0(N)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est formé de deux copies de $X_0(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et d'un certain nombre de $\mathbb{P}^1$. Les deux courbes $X_0(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se coupent transversallement en tous les points supersinguliers d'invariant modulaire différent de 0 et 1728 (le point $x$ d'une copie se colle au point $x^{(p)}$ image de $x$ par le Frobenius de l'autre copie). Le nombre de points d'intersection de ces deux copies est

$$S'_p = Q\frac{p-1}{12} - 2^\nu(\frac{u}{2} + \frac{v}{3}).$$

Les composantes $\mathbb{P}^1$ sont de deux type. D'une part les $\mathbb{P}^1$ qu'on note $E_i$ qui n'existent que si $u = 1$, leur nombre dans ce cas est $2^\nu$. Chaque $E_i$ coupe chaque copie de $X_0(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en un point supersingulier d'invariant modulaire 0. D'autre part les $\mathbb{P}^1$ qu'on note $F_i$ et $G_i$ qui vont par paire et qui n'existent que si $v = 1$, leur nombre dans ce cas est $2^\nu$. Dans chaque paire $\{F_i, G_i\}$, $F_i$ coupe $G_i$ en un point, $F_i$ coupe une copie de $X_0(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en un point supersingulier d'invariant modulaire 1728 et $G_i$ coupe de même l'autre copie. Enfin, les deux pointes 0 et $\infty$ passent chacune par une une copie de $X_0(M)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On note ces copies $C_0$ et $C_\infty$ ( la pointe 0 passe par $C_0$ et la pointe $\infty$ par $C_\infty$).



**Proposition 4.2.1** *Les intersections des diviseurs $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$ sont :*

$$\Phi_0^2 = \Phi_\infty^2 = -(\Phi_0, \Phi_\infty) = -12(g_N - 1)^2 \sum_{p/N} \frac{1}{p-1} \prod_{q/\frac{N}{p}} \frac{1}{q+1} \log(p)$$

*Preuve.* Il suffit de faire le calcul place par place. Soit $p$ un diviseur premier de $N$. On désigne par $\Phi_{0,p}$ et $\Phi_{\infty,p}$ les composantes respectives de $\Phi_0$ et $\Phi_\infty$ en la place $p$. La déscription de la fibre étant symétrique par rapport aux pointes 0 et $\infty$, alors $\Phi_{0,p}^2 = \Phi_{\infty,p}^2$. L'égalité de cette valeur commune avec $-(\Phi_{0,p}, \Phi_{\infty,p})$ découle du fait que $(\Phi_{0,p} + \Phi_{\infty,p})^2 = 0$. En effet, il suffit de remarquer $\omega - (g_N - 1)E_0 - (g_N - 1)E_\infty$ est de degré nul sur tout diviseur vertical. Dans la suite, on calcule ces diviseurs verticaux cas par cas.

Cas de $(u, v) = (0, 0)$ :
Dans ce cas $S'_p = Q\dfrac{p-1}{12}$ et la relation suivante s'établie entre $g_N$ et $g_M$ : $g_N = 2g_M + S'_p - 1$. Pour l'obtenir, il suffit d'écrire $(\omega, C_0 + C_\infty) = 2g_N - 2$. Il découle donc

$$\Phi_{0,p} = -\frac{g_N - 1}{S'_p} C_0 \quad \text{et} \quad \Phi_{\infty,p} = -\frac{g_N - 1}{S'_p} C_\infty$$

D'où

$$\Phi_{0,p}^2 = \Phi_{\infty,p}^2 = -(\Phi_{0,p}, \Phi_{\infty,p}) = -\frac{(g_N - 1)^2}{S'_p}$$

Cas de $(u, v) = (1, 0)$ :

$$\Phi_{0,p} = -\frac{g_N - 1}{2S'_p + 2^\nu}(2C_0 + \sum_{i=1}^{2^\nu} E_i)$$

$$\Phi_{\infty,p} = -\frac{g_N - 1}{2S'_p + 2^\nu}(2C_\infty + \sum_{i=1}^{2^\nu} E_i)$$

Il découle donc

$$\Phi_{0,p}^2 = \Phi_{\infty,p}^2 = -(\Phi_{0,p}, \Phi_{\infty,p}) = -2\frac{(g_N - 1)^2}{2S'_p + 2^\nu}$$

Cas de $(u, v) = (0, 1)$ :
On fait la convention que les $F_i$ coupent $C_0$ et les $G_i$ coupent $C_\infty$. Alors :

$$\Phi_{0,p} = -\frac{g_N - 1}{3S'_p + 2^\nu}(3C_0 + 2\sum_{i=1}^{2^\nu} F_i + \sum_{i=1}^{2^\nu} G_i)$$

$$\Phi_{\infty,p} = -\frac{g_N - 1}{3S'_p + 2^\nu}(3C_\infty + 2\sum_{i=1}^{2\nu} G_i + \sum_{i=1}^{2^\nu} F_i)$$

$$\Phi_{0,p}^2 = \Phi_{\infty,p}^2 = -(\Phi_{0,p}, \Phi_{\infty,p}) = -3\frac{(g_N - 1)^2}{3S'_p + 2^\nu}$$

Cas de $(u,v)=(1,1)$ :

$$\Phi_{0,p}=-\frac{g_N-1}{6S'_p+5\ 2^\nu}(6C_0+3\sum_{i=1}^{2^\nu}E_i+4\sum_{i=1}^{2^\nu}F_i+\sum_{i=1}^{2^\nu}G_i)$$

$$\Phi_{\infty,p}=-\frac{g_N-1}{6S'_p+5\ 2^\nu}(6C_\infty+3\sum_{i=1}^{2^\nu}E_i+4\sum_{i=1}^{2^\nu}G_i+\sum_{i=1}^{2^\nu}F_i)$$

Il découle donc :

$$\Phi_{0,p}^2=\Phi_{\infty,p}^2=-(\Phi_{0,p},\Phi_{\infty,p})=-6\frac{(g_N-1)^2}{6S'_p+5\ 2^\nu}$$

On résume ces cas par la formule générale suivante :

$$\Phi_{0,p}^2=\Phi_{\infty,p}^2=-(\Phi_{0,p},\Phi_{\infty,p})=-\frac{(g_N-1)^2}{S'_p+2^\nu(\frac{u}{2}+\frac{v}{3})}$$

La proposition découle de cette expression.

## 4.3 Preuve du théorème A

Les propositions B et 4.2.1 impliquent :

$$\omega^2\leq 4g(g-1)g_{A_T}(0,\infty)+O_\varepsilon(N^{1+\varepsilon})$$

D'autre part le théorème C appliqué aux pointes 0 et $\infty$ donne :

$$\begin{aligned}g_{A_T}(0,\infty) &= -2\pi\lim_{s\to1}(\varphi_{0,\infty}(s)-\frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)})-\frac{2\pi}{\mathrm{vol}}\\ &+2\pi\lim_{s\to1}(\frac{1}{\mathrm{vol}\ s(s-1)}+\int_{X_0(N)\times X_0(N)}G_s(z,w)\nu(z)\nu(w))\\ &+2\pi\lim_{s\to1}(\int_{X_0(N)}E_0(z,s)\nu(z)+\int_{X_0(N)}E_\infty(w,s)\nu(w)-\frac{2}{\mathrm{vol}(s-1)})\end{aligned}$$

Les termes négatifs dans $g_{A_T}(0,\infty)$ seront trivialement bornés par 0. C'est le cas de $-\frac{2\pi}{\mathrm{vol}}$. C'est aussi le cas de

$$L=\lim_{s\to1}(\int_{X_0(N)\times X_0(N)}G_s(z,w)\nu(z)\nu(w)+\frac{1}{\mathrm{vol}\ s(s-1)})\leq 0$$

En effet, la décomposition spectrale de $F$ étant fixée dans (5) :

$$F(z)=\sum_{n\geq0}A_n\varphi_n(z)+\sum_\kappa\int_0^{+\infty}A_\kappa(t)E_\kappa(z,\frac{1}{2}+it)dt$$

En utilisant la définition de $G_s(z,w)$ (voir 2.2), on obtient :

$$\int_{X_0(N)\times X_0(N)}G_s(z,w)\nu(z)\nu(w)+\frac{1}{\mathrm{vol}\ s(s-1)}=\sum_{n\geq1}\frac{|A_n|^2}{s(1-s)-\lambda_n}$$

$$+2\pi\sum_{\kappa}\int_0^{+\infty}\frac{|A\kappa(t)|^2}{s(1-s)-\frac{1}{4}-t^2}dt$$

Comme $\sum|A_n|^2$ est convergente, on déduit que la limite de cette quantité quand $s$ tend vers 1 est :

$$L=-\sum_{n\geq 1}\frac{|A_n|^2}{\lambda_n}-2\pi\sum_{\kappa}\int_0^{+\infty}\frac{|A_\kappa(t)|^2}{\frac{1}{4}+t^2}dt\leq 0$$

D'autre part, le théorème D implique

$$8\pi g(g-1)(\int_{X_0(N)}E_\infty(z,s)\nu(z)+\int_{X_0(N)}E_0(w,s)\nu(w)-\frac{2}{\mathrm{vol}(s-1)})$$

$$\leq -8\pi\frac{g-1}{\mathrm{vol}}\lim_{s\to 1}(\frac{Z'(s)}{Z(s)}-\frac{1}{s-1})+O_\epsilon(N^\epsilon)$$

car $\dfrac{\Gamma'(2)+\gamma-\log(4\pi)}{4\pi g}\leq 0$ et $g=O_\epsilon(N^{1+\epsilon})$. Il reste alors à étudier $\varphi_{0,\infty}(s)$. Le lemme 3.2.19 implique l'expression suivante :

$$\varphi_{0,\infty}(s)=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)}\prod_{p/N}\frac{p^s-p^{1-s}}{p^{2s}-1}$$

Son développement au voisinage de 1 est :

$$\varphi_{0,\infty}(s)=\frac{1}{\mathrm{vol}(s-1)}+\frac{1}{\mathrm{vol}}(2\gamma+\frac{a\pi}{6}+\sum_{p/N}\frac{1+2p-p^2}{p^2-1}\log(p))+O(s-1)$$

où $\gamma$ est la constante d'Euler et $a$ est la dérivée en 1 de la fonction $\sqrt{\pi}\dfrac{\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)\zeta(2s)}$. Ceci termine la preuve du théorème A.

# Appendice

Cet appendice est consacré à la preuve très calculatoire du lemme 3.3.5. Reprenons les notations de la section 3.3.1 : Soit $\eta>0$, on fixe $\theta$ tel que $\sinh(\theta)=\sqrt{\dfrac{\Delta+4}{\eta}}$ et on pose

$$\begin{aligned}J(\eta) &= \Re\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2\log(\eta\cos^2(\varphi)+\Delta)d\varphi\\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log(\eta\cos^2(\varphi)+\Delta)d\varphi\end{aligned}$$

On introduit les deux relations suivantes dont l'une a été utilisée dans la preuve du lemme 3.2.16 et qui seront d'une grande utilités pour le reste de l'appendice :

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)} &= \frac{ie^{\theta}-e^{i\varphi}}{ie^{\theta}+e^{i\varphi}} \\
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2 &= i\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2
\end{aligned}$$

Il est facile de montrer que (voir [10] page 399) :

$$\Re\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2 d\varphi = \pi$$

Ce qui implique que $J(\eta) = J_1(\eta) + J_2(\eta)$ où :

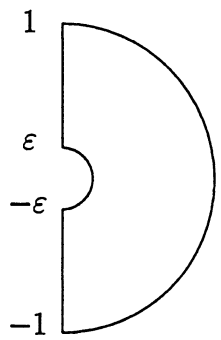
$$\begin{aligned}
J_1(\eta) &= \Re\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2 \log(\cos(\varphi)+i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})d\varphi \\
&- \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log(\cos(\varphi)+i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2(\eta) &= \Re\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2 \log(\cos(\varphi)-i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})d\varphi \\
&- \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\log(\cos(\varphi)-i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})d\varphi
\end{aligned}$$

Pour calculer $J_1$, on considère la fonction :

$$\log(\frac{1}{2}(z+z^{-1})+i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})\left(\frac{ie^{\theta}-z}{ie^{\theta}+z}\right)^2\frac{1}{z}$$

qu'on intégre sur le demi disque unité droit privé d'un petit disque centré en l'origine de rayon $\varepsilon$.



Notons $y_0 = \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}+1} - \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}$. La fonction considérée est holomorphe sur le domaine fixé, le théorème des résidus implique par suite :

$$i\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \log(\cos(\varphi) + i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}) \left(\frac{\sinh(\theta)+i\cos(\varphi)}{\cosh(\theta)+\sin(\varphi)}\right)^2 d\varphi \tag{30}$$

$$+ \int_1^{\varepsilon} \log(\frac{i}{2}(y-\frac{1}{y}) + i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}) \left(\frac{ie^{\theta}-iy}{ie^{\theta}+iy}\right)^2 \frac{dy}{y} \tag{31}$$

$$+ i\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \log(\frac{1}{2}(\varepsilon e^{i\varphi} + \frac{1}{\varepsilon}e^{-i\varphi}) + i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}) \left(\frac{ie^{\theta}-\varepsilon e^{i\varphi}}{ie^{\theta}+\varepsilon e^{i\varphi}}\right)^2 d\varphi \tag{32}$$

$$+ \int_{-\varepsilon}^{-1} \log(\frac{i}{2}(y-\frac{1}{y}) + i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}) \left(\frac{ie^{\theta}-iy}{ie^{\theta}+iy}\right)^2 \frac{dy}{y} = 0 \tag{33}$$

On traite ces termes un à un. Commençons par (32), ce terme vaut

$$i\int_{\pi/2}^{-\pi/2} (\log(\frac{1}{2\varepsilon}) - i\varphi + O(\varepsilon))(1+O(\varepsilon))d\varphi$$

La partie imaginaire de cette expression est : $\pi\log(2\varepsilon) + O(\varepsilon\log\varepsilon)$.
Pour étudier (31), remarquons que $\operatorname{Im}\log(i(\frac{1}{2}(y-\frac{1}{y}) + \sqrt{\frac{\Delta}{\eta}}))$ vaut $\frac{\pi}{2}$ pour $y_0 < y < 1$ et $-\frac{\pi}{2}$ pour $\varepsilon < y < y_0$. Il est donc facile de déduire que la partie imaginaire de l'expression (31) est égale à

$$\frac{\pi}{2}\int_1^{y_0} \left(\frac{e^{\theta}-y}{e^{\theta}+y}\right)^2 \frac{dy}{y} - \frac{\pi}{2}\int_{y_0}^{\varepsilon} \left(\frac{e^{\theta}-y}{e^{\theta}+y}\right)^2 \frac{dy}{y}$$

De même, la partie imaginaire de (33) vaut :

$$\frac{\pi}{2}\int_{\varepsilon}^{1} \left(\frac{e^{\theta}+y}{e^{\theta}-y}\right)^2 \frac{dy}{y}$$

On considère la fonction $\log(\frac{1}{2}(z+z^{-1}) + i\sqrt{\frac{\Delta}{\eta}})$ qu'on intègre sur le même contour, le calcul se fait de la même façon. On déduit, en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0,

$$J_1(\eta) = \frac{\pi}{2}\int_{y_0}^{1} \left[\left(\frac{e^{\theta}-y}{e^{\theta}+y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y} - \frac{\pi}{2}\int_0^{y_0} \left[\left(\frac{e^{\theta}-y}{e^{\theta}+y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y} - \frac{\pi}{2}\int_0^{1} \left[\left(\frac{e^{\theta}+y}{e^{\theta}-y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y}$$

On établit de même l'expression

$$J_2(\eta) = \frac{\pi}{2}\int_{y_0}^{1} \left[\left(\frac{e^{\theta}+y}{e^{\theta}-y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y} - \frac{\pi}{2}\int_0^{y_0} \left[\left(\frac{e^{\theta}+y}{e^{\theta}-y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y} - \frac{\pi}{2}\int_0^{1} \left[\left(\frac{e^{\theta}-y}{e^{\theta}+y}\right)^2 - 1\right]\frac{dy}{y}$$

Il découle

$$J(\eta) = -\pi \int_0^{y_0} \left[ \left( \frac{e^\theta - y}{e^\theta + y} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{y} - \pi \int_0^{y_0} \left[ \left( \frac{e^\theta + y}{e^\theta - y} \right)^2 - 1 \right] \frac{dy}{y}$$

Posons $y = \exp(-u)$ et $y_0 = \exp(-u_0)$, l'expression de $J$ devient :

$$J(\eta) = -\pi \int_{u_0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{e^\theta - e^{-u}}{e^\theta + e^{-u}} \right)^2 - 1 \right] du - \pi \int_{u_0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{e^\theta + e^{-u}}{e^\theta - e^{-u}} \right)^2 - 1 \right] du$$

Le lemme 3.3.5 se déduit par dérivation de cette expression et en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{e^\theta - e^{-u}}{e^\theta + e^{-u}} \right)^2 = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{e^\theta - e^{-u}}{e^\theta + e^{-u}} \right)^2 .$$

# Bibliographie


[1] S. JU. ARAKELOV *Intersection theory of divisors on arithmetic surface,* Math. USSR Izverstija Vol. **8** (1974) No 6, p. 1167-1180.

[2] J.-B. BOST, J.-F. MESTRE, L. MORET-BAILLY *Sur le calcul explicite des "classes de Chern" des surfaces arithmétiques de genre* 2, dans *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif")*, Astérisque No **183**, 1990, p. 69-105.

[3] J.-F. BURNOL *Weierstrass points on arithmetic surfaces,* Invent. Math. **107**, (1992), p. 421-432.

[4] P. DELIGNE, M. RAPOPORT *Schémas de modules des courbes elliptiques*, dans *Modular functions of one variable II*, Lectures Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag, New-York 1973.

[5] V. G. DRINFEL'D *Two thorems on modular curves*, Functional Analysis and its Application, Vol. **7** No 2, Translated from Russian 1973, p. 155-156

[6] R. ELKIK *Fonctions de Green, volumes de Faltings applications aux surfaces arithmétiques,* dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque No **127**, 1985, p. 89-112.

[7] R. ELKIK *Le théorème de Manin-Drinfeld,* dans *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif")*, Astérisque No **183**, 1990, p. 59-67.

[8] A. ERDELYI et al. *Tables of integral transforms*, Vol I, McGraw-Hill, New York 1954.

[9] G. FALTINGS *Calculus on arithmetic surfaces,* Ann. of Math. **119** (1984), p. 387-424.

[10] D. A. HEJHAL *The Selberg trace formula for* PSL$(2,\mathbb{R})$ volume Lectures Notes in Mathematics **1001**, Springer-Verlag, New-York 1983.

[11] P. HRILJAC *Heights and Arakelov intersection theory*, American Journal of Math. 1983.

[12] T. KUBOTA *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha and John Wiley, Tokyo-New York.

[13] E. LANDAU *Elementary number theory*, Chelsea Publishing Company, New York.

[14] S. LANG $SL_2(\mathbb{R})$, Addison–Wesley Publishing Company.

[15] J. MANIN *Parabolic points and zeta functions of modular curves*, Izv. Akad. Nauk SSSR., Vol **6** No 1 (1972), AMS Translation, p. 19-64.

[16] B. MAZUR *Modular curves and the Eisenstein ideal,* Pub. Math. IHES, No **47**, (1977), p. 33-186.

[17] H. P. McKEAN *Selberg's trace formula as applied to a compact Riemann surface*, Comm. on Pure and Applied Math., Vol **25**, (1972), p. 225-246.

[18] L. MORET–BAILLY *Métriques permises,* dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque No **127**, 1985, p. 29-87.

[19] M. RAYNAUD *Courbes sur une variété abélienne et points de torsion*, Invent. Math. **71**, 1983.

[20] G. SHIMURA *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1971.

[21] L. SZPIRO *propriétés numériques du faisceau dualisant relatif*, dans *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins* 2, Astérisque **86**, (1981), p. 44-78.

[22] L. SZPIRO *Sur les propriétés numériques du dualisant relatif d'une surface arithmétique,* dans *The Grothendieck Festschrift,* Vol. III, Birkhäuser Boston-Basel-Berlin 1990, p. 229-245.

[23] E. C. TITCHMARSH *The theory of the Riemann zeta–function*, 2–ème édition, Clarendon Press Oxford 1986.

[24] D. ZAGIER *Modular forms whose coefficients involve zeta–fonctions of quadratic fields,* dans *Modular fonctions of one variable VI,* Lecture Notes in Mathematics No. **627**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1977, p. 107-169.

[25] D. ZAGIER *Eisenstein series and the Selberg–trace formula I,* dans *Automorphic forms, representation theory and arithmetic,* Bombay Colloquium 1979, Tata Inst. of Fund. Res., Bombay, p. 303-354.

[26] S. ZHANG *Admissible pairing on a curve,* Inven. Math. **112**, (1993), p. 171-193.

# Chapitre IV

# Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$

Ce chapitre reprend un article écrit conjointement avec E. Ullmo qui paraîtra dans Duke Math. Journal.

## 1 Introduction

Soit $N \geq 1$ un entier. La courbe $X_0(N)$ est la compactification de l'espace de module des courbes elliptiques muni d'un sous-groupe cyclique d'ordre $N$. Elle a une structure de courbe algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$. Si $N \notin \{1, \ldots, 10, 12, 13, 16, 18, 25\}$ $X_0(N)$ est de genre $g$ non nul. La courbe $X_0(N)$ sur $\mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe au quotient $\Gamma_0(N)\backslash(\mathcal{H} \cup \mathbf{P}^1(\mathbb{Q}))$, où $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \mathrm{Im} z > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré et $\Gamma_0(N)$ est le sous-groupe modulaire de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ défini par :

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ Nc & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\ ;\ ad - Nbc = 1 \right\}$$

L'espace $H^0(X_0(N)_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$ où $\Omega^1$ est le faisceau des différentielles holomorphes sur $X_0(N)_{\mathbb{C}}$ s'identifie au moyen du $q$-développement avec l'espace $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$ des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Ce dernier est muni du produit scalaire de Petersson défini pour $f$ et $g$ dans $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$ par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{X_0(N)} y^2 f(z) \overline{g}(z) d\mu_0(z)$$

où $d\mu_0(z) = \dfrac{dxdy}{y^2}$ est la métrique de Poincaré.

Les opérateurs de Hecke $T_p$, pour les premiers $p$ ne divisant pas $N$, agissent sur $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$. Ce sont des opérateurs auto-adjoints pour le produit scalaire de Petersson. Les formes primitives sont les formes propres pour les opérateurs $T_p$, orthogonales à l'espace des formes anciennes et normalisées par $a_1 = 1$ ($a_1$ est le premier coefficient du $q$-développement). On prouve dans la première section le théorème suivant :

**Théorème A** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $m$ sans facteurs carrés et pour toute forme primitive $f$ de $\Gamma_0(m)$, on a*

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} |yf(z)| \leq C_\varepsilon m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

Ce théorème implique que le produit scalaire de Petersson d'une forme primitive de $\Gamma_0(N)$ par elle même est borné par $B_\varepsilon N^{2+\varepsilon}$ où $B_\varepsilon$ est une constante ne dépendant que de $\varepsilon$. Quand $N$ est premier, Zagier [13] prouve que le produit scalaire de Petersson d'une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ est en $N\log^3(N)$.
Le théorème A est central dans la comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré sur $X_0(N)$. La métrique de Poincaré est bien adaptée à la structure de quotient de $\mathcal{H}$ par $\Gamma_0(N)$ mais elle est singulière aux pointes. Dans sa théorie des intersections, Arakelov a dégagé l'importance de la métrique obtenue par restriction à la courbe de la métrique plate de la Jacobienne. En particulier, elle permet d'avoir une formule d'adjonction et étend l'accouplement de Néron–Tate à des diviseurs de degré non nul. Elle est essentiellement l'unique à satisfaire ces propriétés [5]. Dans le cas de $X_0(N)$, cette métrique est définie par $\nu(z) = F(z)d\mu_0(z)$ où

$$F(z) = \frac{y^2}{g}\sum_{i=1}^{g} |f_i(z)|^2$$

pour une base orthonormée $f_1 \dots f_g$ de $\mathcal{S}(2,\Gamma_0(N))$ pour le produit scalaire de Petersson. En comparant les métriques d'Arakelov et de Poincaré, on pourra profiter pour la théorie des intersections d'Arakelov sur $X_0(N)$ de la structure de quotient par un sous–groupe de congruence.

**Théorème B** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $A_\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $N$ sans facteurs carrés,*

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} F(z) \leq A_\varepsilon N^{1+\varepsilon}.$$

La théorie d'Atkin–Lehner [3] permet de choisir une base adaptée aux actions des opérateurs de Hecke. Elle n'est pas orthonormée. L'orthogonalisation de cette base est obtenue au moyen de la méthode de Rankin–Selberg. Le contrôle des normes est assuré par le théorème A.

Le théorème A s'applique aussi aux courbes elliptiques de Weil semi–stable sur $\mathbb{Q}$. Une telle courbe $E$ est munie d'une paramétrisation modulaire $\varphi : X_0(N) \to E$. La courbe elliptique est dite de Weil forte si le morphisme induit sur l'homologie $H_1(X_0(N),\mathbb{Z}) \to H_1(E,\mathbb{Z})$ est surjectif [7]. Soit $\alpha$ une différentielle de Néron de $E$ alors $\varphi^*\alpha = 2\pi c_E f(z)dz$ où $f$ est une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ et $c_E$ est la constante de Manin. Un théorème de Carayol [4] nous assure que $N$ est le conducteur de $E$. La conjecture de Taniyama–Weil affirme que toute courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$ est de Weil[1]. Szpiro [11] a énoncé la conjecture suivante (conjecture du discriminant sur $\mathbb{Q}$) : *Il existe deux constantes $C$ et $k$ telles que pour toute courbe elliptique $E$ semi–stable sur $\mathbb{Q}$ de conducteur $N_E$ et de discriminant minimal*

[1] A. Wiles a annoncé une preuve de cette conjecture pour les courbes elliptiques semi–stables sur $\mathbb{Q}$.

$\Delta_E$ *on a :* $|\Delta_E| \leq CN_E^k$. Il a par ailleurs remarqué [11] que sous Taniyama–Weil, une borne polynômiale, en le conducteur, du degré de la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique de Weil forte semi–stable sur $\mathbb{Q}$ implique la conjecture du discriminant sur $\mathbb{Q}$.

**Corollaire C** *L'existence d'une borne supérieure polynômiale, en le conducteur, du degré de la paramétrisation modulaire d'une courbe elliptique de Weil forte semi–stable sur $\mathbb{Q}$ est équivalente à l'existence d'une borne supérieure pour la hauteur modulaire de la courbe elliptique logarithmique en le conducteur.*

*Preuve.* Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte semi–stable sur $\mathbb{Q}$ et $\varphi : X_0(N) \to E$ sa paramétrisation modulaire. En utilisant la relation $\varphi^*\alpha = c_E f(z)dz$, on trouve ([10] proposition 3.1) :

$$\frac{1}{2}\log\deg(\varphi) = h(E/\mathbb{Q}) + \frac{1}{2}\log\langle f, f\rangle + \log(2\pi c_E)$$

où $\langle f, f\rangle$ est le produit scalaire de Petersson de $f$ et $h(E/\mathbb{Q})$ est la hauteur modulaire de Faltings de la courbe elliptique $E$. Par un théorème de Raynaud, la constante de Manin $c_E$ est uniformément bornée quand $N$ est sans facteurs carrés. Le théorème A d'une part et l'existence d'une borne inférieure universelle $e^{-4\pi}/4\pi$ pour le produit de Petersson d'une forme primitive ([10] ou lemme 3.7) d'autre part impliquent le corollaire.

# 2 Norme sup d'une forme primitive

Dans la suite $N$ désigne un entier sans facteurs carrés. On rappelle les notations et définitions suivantes. Si $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice à coefficients entiers de déterminant positif et $f \in \mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$, on définit la forme $f|_2 U$ par :

$$f_{|_2}U(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} f(Uz)$$

On désigne par Im la fonction partie imaginaire sur $\mathcal{H}$, on établit simplement la relation $|\mathrm{Im}\ f|(Uz) = |\mathrm{Im}\ f_{|_2}U|(z)$.
Les opérateurs de Hecke $T_p$ avec $p$ premier à $N$ et les opérateurs $U_q$ et $W_q$ pour $q$ divisant $N$ introduit par Atkin et Lehner dans [3] agissent sur l'espace des formes paraboliques $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$. On rappelle que les actions de $T_p$ et $U_q$ sur une forme $f$ dont le développement de Fourier est $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{2i\pi nz}$ sont données par

$$\begin{aligned} f|T_p &= \sum_{n\geq 1}(a_{np} + pa_{\frac{n}{p}})e^{2i\pi nz} \\ f|U_q &= \sum_{n\geq 1} a_{nq}e^{2i\pi nz} \end{aligned}$$

avec la convention $a_\alpha = 0$ si $\alpha$ n'est pas entier. Pour définir l'opérateur $W_q$ ($q$ divisant $N$), on fixe deux entiers $\beta$ et $\gamma$ tels que $q^2\beta - N\gamma = q$ et on pose $W_q = \begin{pmatrix} q\beta & 1 \\ N\gamma & q \end{pmatrix}$. L'opérateur

$W_q$ associe à $f$ la forme $f_{|_2}W_q$ et cette définition ne dépend pas de $\beta$ et $\gamma$. Cet opérateur peut être défini par n'importe quelle matrice de la forme $\begin{pmatrix} qx & y \\ Nz & qw \end{pmatrix}$ de déterminant $q$ ([3] lemme 8). On en déduit que $W_q$ est équivalent à $\prod_{i=1}^{r} W_{q_i}$ modulo $\Gamma_0(N)$ où $q = q_1 \dots q_r$ est la décomposition en facteurs premiers de $q$. Quand $q = N$, $W_N$ est l'involutin d'Atkin donnée classiquement par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -N & 0 \end{pmatrix}$. On rappelle qu'une forme $f$ de $\mathcal{S}(2, \Gamma_0(N))$ est dite forme primitive si elle est nouvelle (orthogonale à l'espace des formes anciennes), normalisée par $a_1 = 1$ et forme propre pour tous les opérateurs de Hecke $T_p$ avec $p$ premier à $N$. La théorie d'Atkin–Lehner étudie ces formes. Le théorème 3 de [3] montre q'une forme primitive est forme propre pour $U_q$ et $W_q$ pour tout diviseur premier $q$ de $N$ et que

$$\begin{aligned} f|T_p &= a_p f \quad (p,N)=1 \\ f|U_q &= a_q f \quad q/N \\ f|W_q &= \lambda(q) f \quad q/N \end{aligned}$$

avec $\lambda(q) =^{\pm} 1$. De plus comme $N$ est sans facteurs carrés $a_q = -\lambda(q)$. Il découle du fait que $W_q$ est équivalent à $\prod_{i=1}^{r} W_{q_i}$ modulo $\Gamma_0(N)$ que la forme primitive $f$ est forme propre pour $W_q$ de valeur propre $\lambda(q) =^{\pm} 1$ et ceci pour tous les diviseurs $q$ de $N$.

Soit $m$ un entier sans facteurs carrés. On fixe pour tout diviseur $q$ de $m$, deux entiers $\beta$ et $\gamma$ tels que $\frac{m}{q}\beta - q\gamma = 1$ et on note $B_q = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ q\gamma & \frac{m}{q} \end{pmatrix}$. Soit $j$ un entier compris entre 0 et $q-1$, on désigne par $A_{q,j}$ la matrice $A_{q,j} = B_q \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & j \end{pmatrix}$.

**Lemme 2.1** *Les matrices $A_{q,j}$ pour $q$ divisant $m$ et $0 \le j \le q-1$ forment un système de représentants de classes à gauche de $\Gamma_0(m)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

*Preuve.* Soient deux couples $(q,j)$ et $(q',j')$ où $q, q'$ sont des diviseurs de $m$ et $0 \le j \le q-1$ et $0 \le j' \le q'-1$, on a

$$A_{q,j}A_{q',j'}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ \frac{m}{q'}q\gamma - \frac{m}{q}q'\gamma' + \frac{m}{q}\frac{m}{q'}(j-j') & * \end{pmatrix}$$

En supposant $A_{q,j}A_{q',j'}^{-1} \in \Gamma_0(m)$, on prouve simplement que $(q,j) = (q',j')$. Ceci montre que les matrices $A_{q,j}$ ne sont pas équivalents à gauche modulo $\Gamma_0(m)$. Comme leurs nombre $\sum_{q/m} q$ est l'indice de $\Gamma_0(m)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, ils fournissent un système complet de représentants de classes à gauche.

*Preuve.* (du théorème A) Soient $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ et $f(z) = \sum_{n>0} a_n e^{2i\pi nz}$ son développement de Fourier. L'estimation de Ramanujan–Petersson sur les valeurs propres des opérateurs de Hecke donne $|a_n| \le d(n)\sqrt{n}$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de $n$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $B_\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier $n$, $d(n) \le B_\varepsilon n^\varepsilon$ (voir [12] par

exemple). On note $\mathcal{F}$ l'unique domaine fondamental non borné de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ contenu dans la bande $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. L'ensemble $\mathcal{D} = \cup_{q/m} \cup_{0\leq j\leq q-1} A_{q,j}\mathcal{F}$ est un domaine fondamental de $\Gamma_0(m)$. La fonction $|yf(z)|$ est $\Gamma_0(m)$-invariante. Il suffit donc de la considérer sur $\mathcal{D}$. Soit $q$ un diviseur de $m$ différent de $m$ et $0 \leq j \leq q-1$, on se propose de borner $|yf(z)|$ sur $A_{q,j}\mathcal{F}$. On désigne par $W_{\frac{m}{q}}$ la matrice $\begin{pmatrix} \frac{m}{q}\beta & 1 \\ m\gamma & \frac{m}{q} \end{pmatrix}$ où $\beta$ et $\gamma$ sont fixées au début de cette section. Elle définit l'opérateur $W_{\frac{m}{q}}$ (indépendament de $\beta$ et $\gamma$). Par le théorème 3 de [3] on a $f_{|_2}W_{\frac{m}{q}} = \lambda(\frac{m}{q})f$ avec $\lambda(\frac{m}{q}) =^{+}_{-} 1$. On établit simplement que $B_q = W_{\frac{m}{q}}\begin{pmatrix} \frac{q}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $z \in \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\ .f|(A_{q,j}z) &= |\mathrm{Im}\ .f|(W_{\frac{m}{q}}\frac{q}{m(-z+j)}) = |\mathrm{Im}\ .f_{|_2}W_{\frac{m}{q}}|(\frac{q}{m(-z+j)}) \\ &= |\mathrm{Im}\ .f|(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & 0 \end{pmatrix}\frac{z-j}{q}) = |\mathrm{Im}\ .f|(\frac{z-j}{q}) \end{aligned}$$

la dernière égalité étant assurée par le fait que $f$ est forme propre de l'involution d'Atkin. Soit $0 \leq j \leq m-1$, il reste à étudier $f$ sur les ensembles $A_{m,j}\mathcal{F}$. La matrice $B_m$ définie dans le lemme 2.1 est dans $\Gamma_0(m)$. On déduit que pour tout $z \in \mathcal{F}$ :

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\ .f|(A_{m,j}z) &= |\mathrm{Im}\ .f|(\frac{1}{-z+j}) \\ &= |\mathrm{Im}\ .f|(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m & 0 \end{pmatrix}\frac{z-j}{m}) = |\mathrm{Im}\ .f|(\frac{z-j}{m}) \end{aligned}$$

On déduit que

$$\sup_{z\in\mathcal{H}}|yf(z)| \leq \sup_{q/m}\sup_{y\geq\frac{\sqrt{3}}{2q}}|yf(z)| \leq B_\varepsilon \sup_{[\frac{1}{2m},\infty)}\sum_{n>0} yn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny}$$

Le théorème A se ramène ainsi au lemme suivant :

**Lemme 2.2** *Il existe un nombre réel $A > 0$ tel que pour tout $x > 0$, on a*

$$\sup_{y\in[x,\infty)} y\sum_{n>0} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny} \leq Ax^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

*Preuve.* Soit $n_0 = [\frac{1+2\varepsilon}{4\pi x}]+1$ où $[z]$ désigne la partie entiere de $z$. La fonction de la variable $n$, $n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny}$ est décroissante sur $[n_0,\infty)$ pour tout $y \geq x$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} y\sum_{n>n_0} n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny} &\leq \int_{\frac{1+2\varepsilon}{4\pi\varepsilon}}^{+\infty} yt^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ty}dt \\ &\leq x^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\int_{\frac{1+2\varepsilon}{4\pi}}^{+\infty} t^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi t}dt \end{aligned}$$

D'autre part le maximum de la fonction de $y$ : $yn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny}$ est atteint en $y = 1/(2\pi n)$, d'où

$$\sum_{0<n\leq n_0} yn^{\frac{1}{2}+\varepsilon}e^{-2\pi ny} \leq \frac{1}{2e\pi}\sum_{0<n\leq n_0} n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq Cx^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

Ceci termine la preuve du lemme et par suite celle du théorème A.

# 3 Comparaison des métriques d'Arakelov et de Poincaré

On fixe dans toute cette partie un entier $N$ sans facteurs carrés. On résume dans la proposition suivante le théorème principal de la théorie d'Atkin–Lehner ([3] théorème 5) :

**Proposition 3.1** *L'espace $\mathcal{S}(2,\Gamma_0(N))$ des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ est somme directe orthogonale de classes. Les classes sont anciennes ou nouvelles, elles sont formées par des formes propres pour tous les opérateurs de Hecke $T_p$ ($p$ premier à $N$) avec les mêmes valeurs propres. Deux classes différentes ont des valeurs propres distinctes pour une infinité de $T_p$ ($p$ premier à $N$). Chaque nouvelle classe est de dimension 1 et engendrée par une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$. Chaque ancienne classe possède une base (à priori non orthogonale) de la forme $\{f(dz)\}$ où $f$ est une forme primitive de $\Gamma_0(m)$ pour un diviseur strict $m$ de $N$ et $d$ parcourt tous les diviseurs de $\frac{N}{m}$. Inversement un tel ensemble de formes paraboliques est une base d'une ancienne classe.*

On note dans la suite $\langle\ ,\ \rangle_N$ le produit scalaire de Petersson sur $X_0(N)$. Cette notation est utile car on aura souvent à changer de niveau. Soient $m$ un diviseur de $N$ et $g$ une forme parabolique pour $\Gamma_0(m)$, on établit simplement que $\langle g,g\rangle_N = \prod_{p/\frac{N}{m}}(p+1)\langle g,g\rangle_m$.

**Proposition 3.2** *Soit $N$ un entier sans facteurs carrés. La fonction $F(z)$ qui compare les métriques d'Arakelov et de Poincaré pour $X_0(N)$ s'exprime sous la forme :*

$$F(z) = \frac{1}{g}\sum_{m/N}\ \sum_{\substack{f \text{ primitive}\\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} H(f,N)(z)$$

*où $H(f,N)(z)$ est définie par*

$$H(f,N)(z) = y^2\frac{1}{\langle f,f\rangle_N}\prod_{p/\frac{N}{m}}(1-\frac{a_p^2}{(p+1)^2})^{-1}\sum_{d,d'/\frac{N}{m}}\mu(d)\mu(d')dd'a(R/r)\prod_{p/R/r}\frac{1}{p+1}f(dz)\overline{f}(d'z).$$

*Dans cette équation, les $a(n)$ désignent les coefficients du développement de Fourier de la forme primitive $f$ et pour tout couple $(d,d')$, $R$ est le* ppcm *de $d$ et $d'$ et $r$ est leur* pgcd.

On commence par le lemme suivant :

**Lemme 3.1** *La fonction $F(z)$ s'exprime sous la forme :*

$$F(z) = \frac{1}{g}\sum_{m/N}\ \sum_{\substack{f \text{ primitive}\\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} H(f,N)(z)$$

*où $H(f,N)(z)$ est définie par*

$$H(f,N)(z) = y^2 \sum_{d,d'/\frac{N}{m}} a_{d,d'} f(dz)\overline{f}(d'z)$$

*la matrice $A = (a_{d,d'})_{d,d'/\frac{N}{m}}$ est telle que $\overline{A}^{-1} = (\langle f(dz), f(d'z)\rangle_N)_{d,d'/\frac{N}{m}}$.*

*Preuve.* Soient $m$ un diviseur de $N$ et $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$. Soit $g_1, \dots g_r$ une base orthonormée pour Petersson de la classe définie par $\{f(dz)\}$, $d$ divisant $\frac{N}{m}$. On pose

$$H(f,N)(z) = y^2 \sum_i |g_i(z)|^2.$$

La proposition 3.1 implique la décomposition

$$F(z) = \frac{1}{g} \sum_{m/N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} H(f,N)(z).$$

L'expression proposée dans le lemme découle par changement de base.

**Lemme 3.2** *Soit $m$ un diviseur de $N$. Soient $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)e^{2i\pi nz}$ son développement de Fourier. Soient $d$ et $d'$ deux diviseurs de $\frac{N}{m}$. Le produit scalaire de Petersson des deux formes paraboliques pour $\Gamma_0(N)$ , $f(dz)$ et $f(d'z)$ est donné par :*

$$\langle f(dz), f(d'z)\rangle_N = \frac{1}{dd'} a(\frac{R}{r}) \prod_{p/\frac{R}{r}} \frac{1}{p+1} \langle f, f\rangle_N$$

UNIVERSITÉ PARIS SUD BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUE ORSAY

*où $R$ est le* ppcm *de $d$ et $d'$ et $r$ leur* pgcd.

*Preuve.* On désigne par $E_\infty(z,s)$ la série d'Eisenstein pour $\Gamma_0(N)$ obtenue par prolongement méromorphe à tout le plan complexe de la série absolument convergente sur $\Re(s) > 1$ :

$$E_\infty(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} (\mathrm{Im}\gamma z)^s$$

où $\Gamma_\infty = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \; k \in \mathbb{Z} \right\}$ est le fixateur de la pointe $\infty$ dans $\Gamma_0(N)$ [6]. La série $E_\infty(z,s)$ admet un pôle simple en $s = 1$ de résidu $(\mathrm{vol})^{-1}$ indépendament de la variable $z$ où vol désigne le volume de $X_0(N)$ pour la métrique de Poincaré. L'intégrale

$$\int_{X_0(N)} y^2 f(dz)\overline{f}(d'z) E_\infty(z,s) d\mu_0(z)$$

est convergente pour $\Re(s) > 1$. Elle admet un prolongement méromorphe au voisinage de 1 avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu $\langle f(dz), f(d'z)\rangle_N(\mathrm{vol})^{-1}$. Soit $R$ le ppcm de $d$ et $d'$. On établit simplement pour $\Re(s) > 1$,

$$\int_{X_0(N)} y^2 f(dz)\overline{f}(d'z)E_\infty(z,s)d\mu_0(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{a(\frac{R}{d}n)a(\frac{R}{d'}n)}{(Rn)^{s+1}} \int_0^{+\infty} y^s e^{-4\pi y} dy.$$

Signalons pour cela que les coefficients $a(n)$ sont réels car ils sont valeurs propres d'opérateurs auto-adjoints (les opérateurs de Hecke $T_p$, $p$ premier à $m$ et les opérateurs $W_q$ pour $q$ divisant $m$). La méthode classique pour étudier ces fonctions de $s$ est due à Rankin et Selberg. Elle est exposée dans [1, 9, 14]. Le lemme 3.2 se ramène alors au lemme suivant :

**Lemme 3.3** *Soit $m$ un entier sans facteurs carrés. Soient $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)e^{2i\pi nz}$ son développement de Fourier. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux entiers premiers entre eux sans facteurs carrés et premiers au niveau $m$. On a*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(\beta n)}{(\alpha\beta n)^{s+1}} = \frac{a(\alpha\beta)}{\alpha\beta} \prod_{p/\alpha\beta} \frac{1}{1+p^s} \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)^2}{n^{s+1}}.$$

Commençons par le lemme suivant :

**Lemme 3.4** *Soit $m$ un entier sans facteurs carrés. Soient $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n)e^{2i\pi nz}$ son développement de Fourier. Soit $\alpha$ un entier premier au niveau $m$ et sans facteurs carrés, alors*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} = \frac{a(\alpha)}{\alpha} \prod_{p/\alpha} \frac{1}{1+p^s} \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)^2}{n^{s+1}}.$$

*Preuve.* Soit $\alpha$ un entier premier au niveau $m$ et sans facteurs carrés. Soit $p$ un premier ne divisant pas $\alpha m$. La relation de récurrence liant les coefficients du développement de Fourier d'une forme primitive implique :

$$a(p\alpha n) = a(p)a(\alpha n) - pa(\alpha n/p)$$

avec la convention $a(x) = 0$ si $x$ n'est pas entier. On déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1} \frac{a(p\alpha n)a(n)}{(p\alpha n)^{s+1}} &= \frac{a(p)}{p^{s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} - \frac{1}{p^s} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha\frac{n}{p})a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} \\
&= \frac{a(p)}{p^{s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} - \frac{1}{p^s} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(pn)}{(\alpha pn)^{s+1}} \\
&= \frac{a(p)}{p^{s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} - \frac{a(p)}{p^{2s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} \\
&\qquad + \frac{1}{p^{2s}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(\frac{n}{p})}{(\alpha n)^{s+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a(p)}{p^{s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}} - \frac{a(p)}{p^{2s+1}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}}$$
$$+ \frac{1}{p^{2s}} \sum_{n\geq 1} \frac{a(p\alpha n)a(n)}{(p\alpha n)^{s+1}}$$

Ce qui prouve la relation suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a(p\alpha n)a(n)}{(p\alpha n)^{s+1}} = \frac{a(p)}{p} \frac{1}{1+p^s} \sum_{n\geq 1} \frac{a(\alpha n)a(n)}{(\alpha n)^{s+1}}$$

Le lemme 3.4 découle par récurrence. Le lemme 3.3 se déduit du lemme 3.4 et de la relation générale suivante

$$a(dn) = \sum_{r/d} \mu(r) r a(d/r) a(n/r)$$

où $d$ est un entier sans facteurs carrés premier au niveau $m$ et $\mu$ est la fonction de Möbius avec la convention $a(x) = 0$ si $x$ n'est pas entier.
Soient $m$ un diviseur de $N$ et $n = \frac{N}{m}$. Soient $f$ une forme primitive pour $\Gamma_0(m)$ et $f(z) = \sum_{n\geq 1} a(n) e^{2i\pi n z}$ son développement de Fourier. On désigne par $B$ la matrice $B = (b_{d,d'})_{d,d'/n}$ où

$$b_{d,d'} = \frac{1}{dd'} a(R/r) \prod_{p/\frac{R}{r}} \frac{1}{1+p}$$

avec $R$ le ppcm de $d$ et $d'$ et $r$ leur pgcd. Le lemme 3.2 implique que

$$(\langle f(dz), f(d'z)\rangle_N)_{d,d'/\frac{N}{m}} = \langle f, f\rangle_N B.$$

La proposition 3.2 se ramène au calcul de l'inverse de la matrice $B$ :

**Lemme 3.5** *Soit $C$ la matrice $C = (c_{d,d'})_{d,d'/n}$ avec*

$$c_{d,d'} = \mu(d)\mu(d') dd' a(R/r) \prod_{p/R/r} \frac{1}{1+p}$$

*où $\mu$ est la fonction de Möbius, $R$ est le* ppcm *de $d$ et $d'$ et $r$ leur* pgcd. *On a*

$$BC = CB = \prod_{p/n} (1 - \frac{a(p)^2}{(1+p)^2})\ Id$$

*où $Id$ est la matrice identité.*

Remarquons que par l'estimation de Ramanujan–Petersson, $1 \neq \frac{a(p)^2}{(1+p)^2}$. Le lemme 3.5 calcul donc l'inverse de la matrice $B$.

*Preuve.* A toute application multiplicative $\varepsilon : \{d \mid d/n\} \to \{\pm 1\}$, on associe les vecteurs colonnes suivants :

$$V_\varepsilon = \begin{pmatrix} \vdots \\ \varepsilon(d)\frac{d}{n} \\ \vdots \end{pmatrix}_{d/n} \qquad W_\varepsilon = \begin{pmatrix} \vdots \\ \varepsilon(d)\frac{1}{d} \\ \vdots \end{pmatrix}_{d/n}$$

**Lemme 3.6** *Pour toute application multiplicative $\varepsilon : \{d \mid d/n\} \to \{\pm 1\}$, on a*

$$\begin{aligned} BV_\varepsilon &= \frac{1}{n}\prod_{p/n}(1+\varepsilon(p)\frac{a(p)}{1+p})W_\varepsilon \\ CW_\varepsilon &= n\prod_{p/n}(1-\varepsilon(p)\frac{a(p)}{1+p})V_\varepsilon \end{aligned}$$

*Preuve.* On prouvera la première égalité, la seconde est identique. Soit $d_1$ un diviseur de $n$, alors

$$\sum_{d/n} b_{d_1,d}\varepsilon(d)\frac{d}{n} = \frac{1}{nd_1}\sum_{d/n}\varepsilon(d)a(R/r)\prod_{p/\frac{R}{r}}\frac{1}{1+p} \tag{1}$$

L'application

$$\begin{aligned} R/r : \{d \mid d/n\} &\longrightarrow \{d \mid d/n\} \\ d &\longmapsto \frac{\text{ppcm}(d,d_1)}{\text{pgcd}(d,d_1)} \end{aligned} \tag{2}$$

est une bijection. En effet, soient $d$ et $d'$ deux diviseurs de $n$ tels que $R/r = \frac{R'}{r'}$. En écrivant $d = rc$, $d_1 = rc_1$, $d' = r'c'$ et $d_1 = r'c'_1$, on déduit que $cc_1 = c'c'_1$. Comme $c$ et $c'$ sont premiers à $d_1$ et $c_1$ et $c'_1$ divisent $d_1$, on obtient $c_1 = c'_1$. D'où $r = r'$ et par suite $R = R'$ et $d = d'$. D'autre part avec les mêmes notations

$$\frac{\varepsilon(d)}{\varepsilon(d_1)} = \frac{\varepsilon(c)}{\varepsilon(c_1)} = \varepsilon(c)\varepsilon(c_1) = \varepsilon(cc_1) = \varepsilon(R/r).$$

La somme (1) devient alors

$$\varepsilon(d_1)\frac{1}{nd_1}\sum_{d/n}\varepsilon(R/r)a(R/r)\prod_{p/\frac{R}{r}}\frac{1}{1+p} = \frac{1}{n}\prod_{p/n}(1+\varepsilon(p)\frac{a(p)}{1+p})\varepsilon(d_1)\frac{1}{d_1}$$

grâce au changement de variable donné par la bijection (2). Ceci termine la preuve du lemme 3.6. On en déduit

$$CBV_\varepsilon = \prod_{p/n}(1-\frac{a(p)^2}{(1+p)^2})V_\varepsilon$$

Le lemme 3.5 découle en remarquant que les vecteurs $V_\varepsilon$ pour $\varepsilon$ parcourant l'ensemble des applications multiplicatives des diviseurs de $n$ dans $\{\pm 1\}$ forment une base.

*Preuve.* (de la proposition 3.2) La proposition 3.2 découle du lemme 3.1, du lemme 3.2 qui

calcule la matrice $(\langle f(dz), f(d'z)\rangle_N)_{d,d'/\frac{N}{m}}$ et du lemme 3.5 qui calcule son inverse.
*Preuve.* (du théorème B) Soit $N$ un entier sans facteurs carrés. La proposition 3.2 implique que :

$$F(z) = \frac{1}{g} \sum_{m/N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} H(f,N)(z)$$

D'autre part le théorème A implique :

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} H(f,N)(z) \leq C_\varepsilon^2 m^{1+2\varepsilon} \frac{1}{\langle f,f\rangle_N} \prod_{p/\frac{N}{m}} (1 - \frac{a(p)^2}{(1+p)^2})^{-1} \sum_{d,d'/\frac{N}{m}} |a(\frac{R}{r})| \prod_{p/\frac{R}{r}} \frac{1}{1+p} \tag{3}$$

En utilisant la bijection (2) et la multiplicativité des coefficients $a(n)$, on établit simplement que

$$\sum_{d,d'/\frac{N}{m}} |a(R/r)| \prod_{p/\frac{R}{r}} \frac{1}{1+p} = d(N/m) \prod_{p/\frac{N}{m}} (1 + \frac{|a(p)|}{1+p})$$

où $d(x)$ est le nombre de diviseurs de $x$. On a le lemme facile suivant dont la preuve est laissée au lecteur (voir sinon [10]) :

**Lemme 3.7** *Pour tout entier $m$ et toute forme primitive $f$ de $\Gamma_0(m)$, on a : $\langle f,f\rangle_m \geq e^{-4\pi}/(4\pi)$.*

L'inégalité (3) implique alors

$$\sup_{z\in\mathcal{H}} H(f,N)(z) \leq 4\pi e^{4\pi} C_\varepsilon^2 m^{1+2\varepsilon} d(N/m) \prod_{p/\frac{N}{m}} \frac{1}{p+1-|a(p)|} \tag{4}$$

L'estimation de Ramanujan–Petersson sur les coefficients d'une forme primitive implique

$$0 \leq \frac{1}{p+1-|a(p)|} \leq \frac{1}{(\sqrt{p}-1)^2}$$

Cette estimation et l'inégalité (4) implique le théorème B car

$$\sum_{m/N} \sum_{\substack{f \text{ primitive} \\ \text{pour } \Gamma_0(m)}} d(N/m) = g.$$

# Bibliographie


[1] A. ABBES, E. ULLMO *Auto-intersection du dualisant relatif des courbes modulaires* $X_0(N)$, preprint 94.

[2] S. JU. ARAKELOV *Intersection theory of divisors on arithmetic surface,* Math. USSR Izverstija Vol. **8** (1974) No 6, p. 1167-1180.

[3] A. O. L. ATKIN, J. LEHNER *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185**, (1970), p. 134-160.

[4] H. CARAYOL *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sc. ENS **19**, (1986), p. 409-468.

[5] C. GASBARRI *Accouplement de Deligne et hauteurs de Néron-Tate*, preprint 94.

[6] T. KUBOTA *Elementary theory of Eisenstein series*, Kodansha and John Wiley, Tokyo-New York.

[7] B. MAZUR *Courbes elliptiques et symboles modulaires*, Séminaire Bourbaki, exposé 414, Juin 1972.

[8] L. MORET-BAILLY *Métriques permises,* dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Astérisque No **127**, 1985, p. 29-87.

[9] G. SHIMURA *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. Lond. Math. Soc. **31**, (1975), p. 79-98.

[10] J. H. SILVERMAN *Heights and elliptic curves*, dans *Arithmetic geometry*, Spinger-Verlag, New-York 1986.

[11] L. SZPIRO *Discriminant et conducteur des courbes elliptiques,* dans *Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques (à la recherche de "Mordell effectif")*, Astérisque No **183**, 1990, p. 7-18.

[12] G. TENENBAUM *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Institut Elie Cartan **13**.

[13] D. ZAGIER *Modular parametrizations of elliptic curves,* Canad. Math. Bull. Vol. **28** (3), (1985), p. 372-384.

[14] D. ZAGIER *Eisenstein series and the Selberg-trace formula I,* dans *Automorphic forms, representation theory and arithmetic,* Bombay Colloquium 1979, Tata Inst. of Fund. Res., Bombay, p. 303-354.

# Chapitre V

# A propos de la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques modulaires

Ce chapitre reprend un article écrit conjointement avec E. Ullmo.

## 1 Introduction

Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte [7] sur $\mathbb{Q}$ et $\varphi : X_0(N) \to E$ sa paramétrisation modulaire. Par un théorème de Carayol [3] $N$ est le conducteur de $E$. Soient $E_{\mathbb{Z}}$ le modèle de Néron de $E$ sur $\mathbb{Z}$, $\Omega^1_{E/\mathbb{Z}}$ le faisceau des différentielles relatives de $E_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{Z}$ et $\alpha_E$ une différentielle de Néron c'est à dire une $\mathbb{Z}$–base de $H^0(X_0(N)_{\mathbb{Z}}, \Omega^1_{E/\mathbb{Z}})$. La différentielle $\varphi^*(\alpha_E)$ est un vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke $T_p$. Elle est donnée par $\varphi^*(\alpha_E) = 2\pi c_E f_E dz$ où $f_E$ est une forme primitive pour $\Gamma_0(N)$ et $c_E$ est une constante rationnelle appelée constante de Manin. On choisit $\alpha_E$ tel que $c_E$ soit positive. Manin conjecture que $c_E$ vaut 1. Soit $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$, il est facile de voir que $c_E \in \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Edixhoven [5] montre que $c_E$ est en fait un entier. Mazur [8] a prouvé que $c_E$ est une unité de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2m}]$. Ce résultat a été amélioré par Raynaud qui a montré que si $m$ est impair alors la valuation 2–adique $v_2(c_E) \leq 1$ (voir proposition 3.1).

**Théorème A** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$ et $p$ un nombre premier ne divisant pas $N$. La constante de Manin $c_E$ n'est pas divisible par $p$.*

Pour $p > 2$, le théorème A est contenu dans les travaux de Mazur. Néanmoins, l'information nouvelle donnée en 2 permet de déduire le corollaire suivant :

**Corollaire B** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur impair $N$ et $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$.*

***i)*** *$c_E$ est une unité de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.*

*ii) Si $N$ est sans facteurs carrés et premier à 2 alors la constante de Manin $c_E$ de $E$ vaut 1.*

On prouve le théorème A en calculant le degré de la paramétrisation de Weil forte de deux manières différentes. La première est due à Zagier [13], elle compare le degré de la paramétrisation au nombre de congruence $r$ (le plus grand entier $r$ tel qu'il existe une forme modulaire parabolique $g$ de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$, orthogonale à $f_E$ pour le produit scalaire de Petersson et congrue à $f_E$ modulo $r$). La seconde méthode est géométrique. Elle établit un deuxième lien entre le degré de la paramétrisation $\varphi$ et le nombre de congruence $r$ faisant intervenir la constante de Manin $c_E$. Par cette méthode on est naturellement amené à considérer des congruences de $f_E$ relativement à l'espace cotangent en l'origine au modèle de Néron de la jacobienne de $X_0(N)$. On obtient le théorème A en comparant ces deux notions de congruence.

Nous avons inclus dans ce texte (proposition 3.1) la démonstration du résultat de Raynaud : *si $m$ est impair alors la valuation 2-adique $v_2(c_E) \leq 1$.* Le point central de ce résultat traite du défaut d'exactitude des modèles de Néron semi-abéliens sur un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions de caractéristique 0, de corps résiduel de caractéristique $p > 0$ et d'indice de ramification absolu $e$ dans le cas limite $e = p - 1$. Il a été annoncé pour la première fois dans une lettre de M. Raynaud à J. F. Mestre et J. Oesterlé. M. Raynaud nous a communiqué cette lettre et a accepté que nous la publiions en annexe à ce papier.
Notons que dans cette lettre Raynaud a prouvé la conjecture de Manin pour les courbes elliptiques semi-stables sauf peut être dans les deux cas suivants (voir corollaire A.4)

i) $E$ est une courbe elliptique à réduction ordinaire en 2 telle que le groupe des points de 2-torsion $E[2]$ soit produit d'un groupe étale par un groupe de type multiplicatif (comme dans un relèvement canonique de Serre–Tate),

ii) $E$ a mauvaise réduction semi-stable en 2 et la valuation 2-adique du discriminant minimal de $E$ est multiple de 2.

Dans le cas semi-stable, il reste donc à prouver la conjecture de Manin pour le cas ii).

Nous remercions M. Raynaud pour son aide et d'avoir accepté que nous publiions sa lettre. Nous sommes très reconnaissant à B. Edixhoven et J. Tilouine pour leurs remarques et commentaires qui ont été d'une grande utilité pour l'élaboration de ce travail.

# 2 Formes modulaires et algèbre de Hecke

## 2.1 Formes modulaires

Soit $N \geq 1$ un entier tel que $X_0(N)$ soit de genre non nul. On désigne par $M_0(N)$ l'espace de modules grossier des courbes elliptiques généralisées munies d'un sous-schéma en groupes cyclique d'ordre $N$ qui coupe toute composante irréductible de chaque fibre géométrique. C'est une courbe projective sur Spec $\mathbb{Z}$ lisse sur Spec $\mathbb{Z}[1/N]$ dont la fibre générique est $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$. Soient $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$ et $S = \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. La structure

de $M_0(N)_S$ a été étudiée par Deligne et Rapoport [4]. Soit $p$ un diviseur premier de $N$ qui ne divise pas $m$, la fibre $M_0(N)_{\mathbb{F}_p}$ est formée de deux copies de $M_0(\frac{N}{p})_{\mathbb{F}_p}$ qui se coupent transversallement aux points supersinguliers. La courbe relative $M_0(N)_S$ est donc semi-stable sur $S$. On désigne par $\Omega$ le faisceau dualisant relatif de $M_0(N)_S$ sur $S$. Pour tout $p \in S$, le morphisme canonique :

$$H^0(M_0(N)_S, \Omega) \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} H^0(M_0(N)_{\mathbb{F}_p}, \Omega)$$

est un isomorphisme.

On note $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N))$ l'espace des formes modulaires paraboliques de poids 2 pour $\Gamma_0(N)$. Il s'identifie canoniquement avec $H^0(X_0(N)_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$ où $\Omega^1$ est le faisceau des différentielles holomorphes sur $X_0(N)_{\mathbb{C}}$. Soit $R \subset \mathbb{C}$ un anneau, on désigne par $\mathcal{S}_R(2, \Gamma_0(N))$ le sous-groupe de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N))$ des formes modulaires dont le $q$-développement (développement de Fourier en la pointe $\infty$) est à coefficients dans $R$ et par $B^0(R) \subset R[[q]]$ le groupe de ces $q$-développements. Il est bien connu que $B^0(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R = B^0(R)$ (ceci découle aussi du lemme 2.1 de ce texte). On définit pour tout anneau $R$ :

$$B^0(R) = B^0(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \subset R[[q]].$$

On note $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]}(2, \Gamma_0(N))$ et $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N))$.

La paire formée par la courbe de Tate sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}][[q]]$ et son sous-groupe $\mu_N$ induit le morphisme :

$$\tau : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}][[q]]) \longrightarrow M_0(N)_S$$

qui identifie $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}][[q]]$ au complété formel de $M_0(N)_S$ le long de la section relative à la pointe $\infty$. Le $q$-développement sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ est le morphisme induit par $\tau$

$$q\text{-exp} : H^0(M_0(N)_S, \Omega) \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{m}][[q]].$$

C'est un morphisme injectif :

$$q\text{-exp} : H^0(M_0(N)_S, \Omega) \longrightarrow B^0(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]). \tag{1}$$

Mazur [6] montre que le $q$-développement (1) est un isomorphisme sur $\mathbb{Z}$ pour $N$ premier. Dans le cas général, le $q$-développement n'est pas un isomorphisme sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Toutefois, il induit un isomorphisme en toute place $p$ ne divisant pas $N$

$$q\text{-exp} : H^0(M_0(N)_{\mathbb{F}_p}, \Omega) \xrightarrow{\sim} B^0(\mathbb{F}_p)$$

On note $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$ la jacobienne de $X_0(N)_{\mathbb{Q}}$ et $J_0(N)_S$ son modèle de Néron sur $S$. On désigne par $M_0(N)^l$ le plus grand ouvert de $M_0(N)$ lisse sur $S$ (obtenu en enlevant les points doubles en caractéristique $p$ divisant $N$ et ne divisant pas $m$). Le plongement canonique $X_0(N)_{\mathbb{Q}} \to J_0(N)_{\mathbb{Q}}$ qui envoie $\infty$ sur 0 se prolonge en un morphisme $M_0(N)^l \to J_0(N)_S$. Ce dernier induit un isomorphisme

$$H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) \xrightarrow{\sim} H^0(M_0(N)^l, \Omega) = H^0(M_0(N)_S, \Omega)$$

où $\Omega^1_{J/S}$ est le faisceau des différentielles de $J_0(N)_S$ sur $S$.

## 2.2 Algèbre de Hecke

L'algèbre de Hecke $\mathbb{T}$ est la sous-algèbre de l'algèbre des endomorphismes de $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$ engendrée par les opérateurs de Hecke $T_p$ pour $p$ premier ne divisant pas $N$ et les opérateurs d'Atkin $U_l$ pour $l$ premier divisant $N$ (que l'on note aussi $T_l$). Soit $p$ un nombre premier, l'opérateur $T_p$ est l'endomorphisme de $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$ associé à la correspondance de $X_0(N)$ définie du point de vue modulaire par :

$$(E, A) \mapsto \sum_B (E/B, (A+B)/B)$$

où $E$ est une courbe elliptique, $A$ un sous-groupe d'ordre $N$ et $B$ parcourt les sous-groupes d'ordre $p$ de $E$ qui coupent trivialement $A$. Soit $d$ un diviseur de $N$ tel que $d$ et $\frac{N}{d}$ sont premiers entre eux, l'involution d'Atkin $W_d$ est l'involution de $X_0(N)$ définie du point de vue modulaire par :

$$(E, A) \mapsto (E/A_1, (A+E_d)/A_1)$$

où $E$ est une courbe elliptique, $A$ un sous-groupe d'ordre $N$, $E_d$ est le sous-groupe des points de $d$-torsion de $E$ et $A_1$ l'unique sous-groupe d'ordre $d$ de $A$.
Quand $N$ est premier, Ribet [10] et Mazur [6] ont montré que $\mathbb{T}$ coïncide avec l'algèbre des endomorphismes de $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$.

L'algèbre $\mathbb{T}$ est libre sur $\mathbb{Z}$ de rang $g$ le genre de $X_0(N)$. Elle agit sur $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N)) = H^0(X_0(N)_{\mathbb{C}}, \Omega^1) = H^0(J_0(N)_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$. Cette action est donnée pour toute forme $f$ de $q$-développement $f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ par :

$$\begin{aligned} T_p^* f &= \sum_n a_{pn} q^n + p \sum_n a_n q^{pn} \\ U_l^* f &= \sum_n a_{ln} q^n \end{aligned} \tag{2}$$

Pour tout entier $n = p^k$ et $k \geq 2$, on pose $T_n = T_p T_{p^{k-1}} - pT_{p^{k-2}}$ si $p$ ne divise pas $N$ et $T_n = (T_p)^k$ sinon et pour $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ on pose $T_n = \prod_i T_{p_i^{\alpha_i}}$. On a la relation $a_1(T_n^* f) = a_n(f)$.

L'algèbre de Hecke $\mathbb{T}$ préserve $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N))$ et agit par suite sur $B^0(R)$ pour tout anneau $R$. Elle agit aussi sur $H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) = H^0(M_0(N)_S, \Omega)$. Cette action coïncide avec l'action de $\mathbb{T}$ sur $B^0(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}])$ via le $q$-développement.

**Lemme 2.1** *L'accouplement*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} \times \mathcal{S}_{\mathbb{Z}} & \to & \mathbb{Z} \\ (t, f) & \mapsto & a_1(t^* f) \end{array}$$

*est parfait.*

*Preuve.* On a sur $\mathbb{C}$ l'accouplement parfait

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N)) & \to & \mathbb{C} \\ (t, f) & \mapsto & a_1(t^* f) \end{array}$$

où $\mathbb{T}_{\mathbb{C}} = \mathbb{T} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Il induit donc un isomorphisme

$$\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N)) \xrightarrow{a_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \ .$$

Il s'agit de voir que le morphisme induit sur $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{a_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. L'injectivité est assurée par l'injectivité sur $\mathbb{C}$. Soit $\psi$ une forme $\mathbb{Z}$–linéaire sur $\mathbb{T}$. L'isomorphisme sur $\mathbb{C}$ implique l'existence d'une forme modulaire $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N))$ telle que $\psi(t) = a_1(t^* f)$. La forme $f$ est en fait dans $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ car le coefficient $a_n$ de son $q$–développement à l'infini est $\psi(T_n)$ qui est dans $\mathbb{Z}$. Ceci implique la surjectivité du morphisme $a_1$ et termine la preuve du lemme.

Une forme $f$ de $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N))$ est dite primitive si elle est nouvelle (orthogonale à l'espace des formes anciennes pour le produit scalaire de Petersson), forme propre pour tous les opérateurs de Hecke et normalisée par $a_1(f) = 1$ où $a_1$ est le premier coefficient de son $q$–développement. On lui associe alors le caractère $\chi_f$ de $\mathbb{T}$ défini par $t^* f = \chi_f(t) f$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

# 3 Congruence entre formes modulaires et constante de Manin

On reprend les notations de l'introduction où $E$ est une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$ et $\varphi : X_0(N) \to E$ sa paramétrisation modulaire. Soient $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$ et $S = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$. Le morphisme $\varphi$ induit deux morphismes sur $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: E \longrightarrow J_0(N)_{\mathbb{Q}} \\ \varphi_2 &: J_0(N)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow E \end{aligned}$$

On désigne par $A$ le noyau du morphisme $\varphi_2$. Comme $E$ est de Weil forte, le schéma en groupes $A$ est connexe. C'est une variété abélienne. Soit $A^\vee$ la variété duale de $A$. On note $A_S$ (resp. $A_S^\vee$) les modèles de Néron de $A$ (resp. de $A^\vee$) sur $S$. On rappelle que $J_0(N)_S$ désigne le modèle de Néron de $J_0(N)_{\mathbb{Q}}$ sur $S$ et $E_S$ celui de $E$ sur $S$. Par la propriété universelle des modèles de Néron les morphismes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ se prolongent en

$$E_S \xrightarrow{\varphi_1} J_0(N)_S \longrightarrow A_S^\vee$$

$$A_S \longrightarrow J_0(N)_S \xrightarrow{\varphi_2} E_S$$

Soient $\varphi_1^*$ et $\varphi_2^*$ les morphismes :

$$\begin{aligned} H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) &\xrightarrow{\varphi_1^*} H^0(E_S, \Omega^1_{E/S}) \\ H^0(E_S, \Omega^1_{E/S}) &\xrightarrow{\varphi_2^*} H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) \end{aligned}$$

induits par $\varphi_1$ et $\varphi_2$.

**Proposition 3.1 (Mazur–Raynaud)** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$ et $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$. Si $m$ est impair alors la valuation 2-adique $v_2(c_E) \leq 1$.*

*Preuve.* Considérons la suite exacte de variétés abéliennes $1 \to A_{\mathbb{Q}} \to J_0(N)_{\mathbb{Q}} \to E_{\mathbb{Q}} \to 1$ et la suite $A_{\mathbb{Z}_2} \to J_0(N)_{\mathbb{Z}_2} \to E_{\mathbb{Z}_2}$ des $\mathbb{Z}_2$–modèles de Néron correspondante. Comme $J_0(N)_{\mathbb{Z}_2}$ est à réduction semi–abélienne, le théorème A.1 (voir annexe) implique l'existence d'un entier $r$ ($= 1$ ou $0$) tel que la suite

$$0 \to \mathrm{Lie}(A_{\mathbb{Z}_2}) \to \mathrm{Lie}(J_0(N)_{\mathbb{Z}_2}) \to \mathrm{Lie}(E_{\mathbb{Z}_2}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \to 0$$

est exacte. Soit $H$ le conoyau du morphisme $\mathrm{Lie}(A_{\mathbb{Z}_2}) \to \mathrm{Lie}(J_0(N)_{\mathbb{Z}_2})$. C'est un $\mathbb{Z}_2$–module libre de rang 1. On désigne par $H^\vee$ son dual sur $\mathbb{Z}_2$ et par $\beta$ une base de $H^\vee$. On a alors les deux suites exactes

$$0 \longrightarrow H^\vee \longrightarrow H^0(J_0(N)_{\mathbb{Z}_2}, \Omega^1) \longrightarrow H^0(A_{\mathbb{Z}_2}, \Omega^1) \longrightarrow 0 \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow H^0(E_{\mathbb{Z}_2}, \Omega^1) \longrightarrow H^\vee \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} H^\vee \otimes \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{i} & H^0(M_0(N)_{\mathbb{F}_2}, \Omega) \\ & & \downarrow \quad q\text{–exp} \\ & & \mathbb{F}_2[[q]] \end{array}$$

où $i$ est injectif à cause de la suite (3).

On remarque que le $q$–développement de $\overline{\beta}$ (classe de $\beta$ modulo 2) est non nul. En effet, si $N$ est impair $M_0(N)_{\mathbb{F}_2}$ est lisse et la nullité du $q$–développement de $\overline{\beta}$ implique que $\overline{\beta} = 0$ ce qui n'est pas le cas. Si $N$ est pair alors $M_0(N)_{\mathbb{F}_2}$ est formée de deux composantes irréductibles. La nullité du $q$–développement de $\overline{\beta}$ implique que $\overline{\beta}$ est nulle sur la composante irréductible de la pointe $\infty$. Or $\overline{\beta}$ est propre pour l'involution d'Atkin $W_N$ qui échange les deux composantes irréductibles. Il s'en suit que $\overline{\beta}$ est nulle sur $M_0(N)_{\mathbb{F}_2}$ ce qui n'est pas le cas.

Si $r = 0$ alors $\alpha_E = \beta$ et le $q$-développement de $\overline{\beta}$ est donné par la classe de $c_E(q + a_2q^2 + \ldots)$ modulo 2 où $q + a_2q^2 + \ldots$ est le $q$–développement de $f_E$. Il découle que $v_2(c_E) = 0$.

Si $r = 1$ alors $\alpha_E = 2\beta$ et $c_E$ est multiple de 2. Le $q$–développement de $\overline{\beta}$ est alors donné par la classe de $c_E/2(q + a_2q^2 + \ldots)$ modulo 2. Ceci implique que $v_2(c_E) = 1$.

**Lemme 3.1** *On désigne par $W(f_E)$ l'orthogonal à la forme primitive $f_E$ dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N))$ pour le produit scalaire de Petersson. On a alors la suite exacte de $\mathbb{T}$–modules :*

$$0 \to W(f_E) \longrightarrow \mathcal{S}_{\mathbb{C}}(2, \Gamma_0(N)) \xrightarrow{\varphi_1^*} H^0(E_{\mathbb{C}}, \Omega^1) \to 0 \tag{5}$$

*Preuve.* Comme $\varphi_1^* \neq 0$ et $\dim H^0(E_{\mathbb{C}}, \Omega^1) = 1$ alors $\varphi_1^*$ est surjectif. Il reste à prouver que $W(f_E)$ est dans le noyau de $\varphi_1^*$. La théorie d'Atkin–Lehner [1] implique que $W(f_E)$ est somme directe de classes, chaque classe est formée de formes propres pour tous les

opérateurs $T_p$ ($p$ premier à $N$) avec les mêmes valeurs propres. Soient $g$ une forme d'une telle classe et $g = \sum_{n\geq 1} b_n q^n$ son développement de Fourier à l'infini. Soit $f_E = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ le développement de Fourier de $f_E$. Soit $p$ un premier ne divisant pas $N$. L'opérateur de Hecke $T_p$ agit sur $E$ comme la multiplication par $a_p$. Il s'en suit que $T_p^*(\varphi_1^*(g)) = a_p\varphi_1^*(g)$. Or $T_p^*(\varphi_1^*(g)) = \varphi_1^*(T_p(g)) = b_p\varphi_1^*(g)$. Comme les classes de $f_E$ et de $g$ sont différentes, il existe au moins un $p$ tel que $a_p \neq b_p$, on déduit que $\varphi_1^*(g) = 0$. Ceci termine la preuve du lemme.

On considère l'analogue de la suite exacte (5) sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ :

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow H^0(M_0(N)_S, \Omega) \xrightarrow{\varphi_1^*} I \longrightarrow 0 \tag{6}$$

où $I$ est l'image de $H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) = H^0(M_0(N)_S, \Omega)$ dans $H^0(E_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$ et

$$L_1 = W(f_E) \cap H^0(M_0(N)_S, \Omega).$$

On a alors une injection canonique de $I$ dans $H^0(E_S, \Omega^1_{E/S})$ dont le conoyau sera noté $\mathcal{D}$.

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow H^0(E_S, \Omega^1_{E/S}) \longrightarrow \mathcal{D} \longrightarrow 0$$

En fait on a la proposition suivante qui montre que $\mathcal{D}$ est trivial mais ce résultat basé sur le théorème A.1 de Raynaud n'est pas indispensable (et ne sera pas utilisé) pour la preuve du théorème A.

**Proposition 3.2** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$, et $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$. On a la suite exacte de $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$-modules libres*

$$0 \to W(f_E) \cap H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) \to H^0(J_0(N)_S, \Omega^1_{J/S}) \xrightarrow{\varphi_1^*} H^0(E_S, \Omega^1_{E/S}) \to 0$$

*Preuve.* Le seul point non évident est la surjectivité de $\varphi_1^*$. Soit $p \in S$ un nombre premier différent de 2. Comme $E$ est de Weil forte, $\varphi_1$ est une immersion fermée sur $\mathbb{Q}$. Le modèle de Néron $J_0(N)_{\mathbb{Z}}$ est à réduction semi-abélienne, par un théorème de Raynaud ([2] théorème 4 page 187) le morphisme qui étend $\varphi_1$ aux modèles de Néron sur $\mathbb{Z}_p$ est aussi une immersion fermée. D'où la surjectivité de $\varphi_1^*$ sur $\mathbb{Z}_p$ pour $p \neq 2$.
Si 2 ne divise pas $m$, le théorème précédent ne s'applique plus sur $\mathbb{Z}_2$. On utilise alors le théorème A.1 qui implique en particulier que la suite des algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(E_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(J_0(N)_{\mathbb{Z}_2}) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^\vee_{\mathbb{Z}_2})$$

est exacte. Ceci montre que le conoyau de $\mathrm{Lie}(E_{\mathbb{Z}_2}) \to \mathrm{Lie}(J_0(N)_{\mathbb{Z}_2})$ est sans torsion donc libre. On en déduit la surjectivité de la flèche duale c'est à dire de $\varphi_1^*$ sur $\mathbb{Z}_2$. Ceci termine la preuve de la proposition 3.2.

La suite exacte (6) sera comparée à une autre suite exacte obtenue en remplaçant $H^0(M_0(N)_S, \Omega)$ par $\mathcal{S}_m = \mathcal{S}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]}(2, \Gamma_0(N))$. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & L_1 & \to & H^0(M_0(N)_S, \Omega) & \xrightarrow{\varphi_1^*} & I & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & L_2 & \to & \mathcal{S}_m & \longrightarrow & \varphi_1^*(\mathcal{S}_m) & \to 0
\end{array}$$

où $\varphi_1^*(\mathcal{S}_m)$ est l'image de $\mathcal{S}_m$ par $\varphi_1^*$ dans $H^0(E_{\mathbb{C}}, \Omega^1)$ et $L_2 = W(f_E) \cap \mathcal{S}_m$.

Le conoyau de la flèche naturelle $I \to \varphi_1^*(\mathcal{S}_m)$ sera noté $\mathcal{C}$.

On appelle nombre de congruence et on note $r$ l'entier positif défini par l'une des propriétés équivalentes suivantes :

**i)** $r = \#(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N))/(W(f_E) \cap \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N)) \oplus \mathbb{Z} f_E))$.

**ii)** $r$ est le plus grand entier tel qu'il existe une forme modulaire $g$ dans $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N)) \cap W(f_E)$ vérifiant $f_E \equiv g \bmod(r)$ (c'est à dire que $f_E$ et $g$ ont même $q$–développement dans $B^0(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})$).

**Proposition 3.3** *Soient $E$ une courbe elliptique de Weil forte de conducteur $N$, et $m$ le plus grand carré parfait divisant $N$. Soit $p \in S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$ et $v_p$ la valution $p$–adique, on a :*

$$v_p(\deg \varphi) + v_p(\#\mathcal{C}) = v_p(r) + v_p(c_E) + v_p(\#\mathcal{D})$$

*Preuve.* Le degré de la paramétrisation modulaire $\varphi : X_0(N) \to E$ est

$$\deg \varphi = \#H^0(E_{\mathbb{Z}}, \Omega^1)/\mathbb{Z}\varphi_1^*(c_E f_E) \ .$$

où $E_{\mathbb{Z}}$ est le modèle de Néron de $E$ sur $\mathbb{Z}$. En effet $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est la multiplication par $\deg \varphi$ sur $E$ et $\varphi_2^*(\alpha_E) = c_E f_E$. On considère les suites exactes

$$0 \to I/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(c_E f_E) \to \varphi_1^*(\mathcal{S}_m)/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(c_E f_E) \to \mathcal{C} \to 0$$

$$0 \to I/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(c_E f_E) \to H^0(E_S, \Omega^1_{E/S})/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(c_E f_E) \to \mathcal{D} \to 0$$

Elles montrent que

$$\#(\varphi_1^*(\mathcal{S}_m)/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(c_E f_E))\#\mathcal{D} = (c_E)_m \ \#(\varphi_1^*(\mathcal{S}_m)/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(f_E))\#\mathcal{D} = (\deg \varphi)_m \ \#\mathcal{C} \qquad (7)$$

où $(\deg \varphi)_m$ (resp. $(c_E)_m$) est le plus grand diviseur de $\deg \varphi$ (resp. de $c_E$) premier à $m$. Le morphisme $\varphi_1^*$ établit un isomorphisme entre

$$\mathcal{S}_m/(\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]f_E \oplus L_2) \xrightarrow{\sim} \varphi_1^*(\mathcal{S}_m)/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(f_E) \ .$$

D'autre part on a un isomorphisme

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N))/(W(f_E) \cap \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N)) \oplus \mathbb{Z} f_E) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{m}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_m/(L_2 \oplus \mathbb{Z}[\frac{1}{m}]f_E)$$

Il découle que $\#(\varphi_1^*(\mathcal{S}_m)/\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]\varphi_1^*(f_E)) = r_m$ où $r_m$ est le plus grand diviseur de $r$ premier à $m$. On obtient la proposition en prenant la valuation $p$–adique dans l'équation (7).

*Remarque* En utilisant la proposition 3.2, la proposition 3.3 devient :

$$v_p(\deg(\varphi)) + v_p(\#\mathcal{C}) = v_p(r) + v_p(c_E).$$

**Proposition 3.4** *Sous les conditions et avec les notations précédentes, tout diviseur premier de $\#\mathcal{C}$ divise $N$. De plus $\mathcal{C}$ est trivial si $N$ est premier.*

*Preuve.* Soit $p$ un nombre premier ne divisant pas $N$. On a l'isomorphisme (voir section 2.1)

$$H^0(M_0(N)_{\mathbb{F}_p}, \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_m \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]} \mathbb{F}_p \ .$$

UNIVERSITE PARIS SUD BIBLIOTHEQUE MATHEMATIQUE ORSAY

On en déduit l'isomorphisme

$$I \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]} \mathbb{F}_p \xrightarrow{\sim} \varphi_1^*(\mathcal{S}_m) \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]} \mathbb{F}_p \ .$$

D'où $p$ ne divise pas $\#\mathcal{C}$. Le cas de $N$ premier découle de l'isomorphisme

$$H^0(M_0(N)_{\mathbb{Z}}, \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \ .$$

Pour prouver le théorème A, on a besoin d'introduire quelques notations et de rappeler un résultat de Zagier [13]. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & J_0(N)_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{\varphi_2} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \varphi_1 \uparrow & & & & \\ & & & & E & & & & \end{array}$$

Il induit une isogénie

$$\begin{array}{rccc} \beta : & E \times A & \rightarrow & J_0(N)_{\mathbb{Q}} \\ & (x, y) & \mapsto & \varphi_1(x) - y \end{array}$$

dont le noyau est $A \cap \varphi_1(E)$. Ce noyau est isomorphe à $(\mathbb{Z}/\deg\varphi\mathbb{Z})^2$ car $\varphi_2 \circ \varphi_1$ est la multiplication par $\deg\varphi$ sur $E$.

On note $\mathrm{End}^0(V) = \mathrm{End}(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ pour toute variété abélienne $V$. l'isogénie $\beta$ induit la décomposition $\mathrm{End}^0(J_0(N)_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathrm{End}^0(E) \times \mathrm{End}^0(A)$. Soit $e$ l'idempotent de $\mathrm{End}^0(J_0(N)_{\mathbb{Q}})$ qui est l'identité sur $E$ et 0 sur $A$. C'est un élément de $\mathbb{T}_{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{End}^0(J_0(N)_{\mathbb{Q}})$. Le lemme suivant est dû à Zagier [13] :

**Lemme 3.2 (Zagier)** ***i)*** *Le dénominateur de $e$ dans $\mathrm{End}(J_0(N)_{\mathbb{Q}})$ (c'est à dire le plus petit entier positif $m$ tel que $me \in \mathrm{End}(J_0(N)_{\mathbb{Q}})$) est $\deg\varphi$.*

***ii)*** *Le dénominateur de $e$ dans $\mathbb{T}$ est $r$.*

***iii)*** *Le degré de la paramétrisation $\deg\varphi$ divise $r$. On a $r = \deg\varphi$ si $N$ est premier.*

*Preuve.* Le iii) découle de i) et ii) et de l'inclusion $\mathbb{T} \subset \mathrm{End}(J_0(N)_{\mathbb{Q}})$ qui est une égalité si $N$ est premier [6] (cette divisibilité a été annoncée dans l'autre sens dans [13]).

On montre le premier point i) en utilisant l'isogénie $\beta$. le second ii) est moins évident. On désigne par $\mathbb{T}'$ l'image de $\mathbb{T}$ dans $\mathrm{End}^0(A)$ et par $\chi_E$ le caractère de $\mathbb{T}$ associé à la forme primitive $f_E$. Soit $\mathcal{B}$ le conoyau du morphisme $\mathbb{T} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}'$ somme directe du caractère $\chi_E$ et du morphisme naturel de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}'$, c'est un groupe cyclique. Ce morphisme envoie un élément $t$ de $\mathbb{T}$ sur le couple $(et, (1-e)t)$. On en déduit que le dénominateur de $e$ dans $\mathbb{T}$ est $\#\mathcal{B}$. Le ii) du lemme 3.2 découle alors du lemme suivant :

**Lemme 3.3** *On a l'égalité :*

$$\#\mathcal{B} = \#((\mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}')/\mathbb{T}) = \#(\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}/(f_E\mathbb{Z} \oplus \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N)) \cap W(f_E))) = r.$$

*Preuve.* On considère la suite exacte :

$$0 \to \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}' \longrightarrow \mathcal{B} \to 0 \tag{8}$$

et la suite duale :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}', \mathbb{Z}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{T}, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathcal{B}, \mathbb{Z}) \to 0 \tag{9}$$

Le lemme 2.1 implique l'isomorphisme :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{a_1} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{T}, \mathbb{Z})$$

Sous cette identification, on établit l'isomorphisme

$$f_E\mathbb{Z} \oplus \mathcal{S}_{\mathbb{Z}}(2, \Gamma_0(N)) \cap W(f_E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{T}', \mathbb{Z})$$

Le lemme 3.3 découle de la suite exacte (9) et de l'égalité $\#\mathcal{B} = \#\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathcal{B}, \mathbb{Z})$.

*Preuve* (du théorème A). Soit $p$ un nombre premier ne divisant pas $N$. La proposition 3.3 implique que $v_p(\deg\varphi) + v_p(\#\mathcal{C}) = v_p(r) + v_p(c_E) + v_p(\#\mathcal{D})$ où $v_p$ est la valuation $p$-adique. La proposition 3.4 implique que $v_p(\#\mathcal{C}) = 0$. Par le lemme 3.2, $\deg\varphi$ divise $r$. D'où

$$v_p(r) + v_p(c_E) + v_p(\#\mathcal{D}) = v_p(\deg\varphi) \leq v_p(r)$$

Ceci montre que $v_p(c_E) = 0$ et termine la preuve du théorème. Il découle aussi que $v_p(\#\mathcal{D}) = 0$ ce qui redonne pour les premiers ne divisant pas $N$ la proposition 3.2.

# A Défaut d'exactitude des modèles de Néron semi-abéliens (d'après M. Raynaud)

Soit $R$ un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions $K$ de caractéristique 0, de corps résiduel $k$ de caractéristique $p > 0$ et d'indice de ramification absolu $e$.

Considérons une suite exacte de $K$-variétés abéliennes :

$$0 \longrightarrow A_K \longrightarrow B_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 0$$

et les modèles de Néron sur $R$ correspondants :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C\ .$$

On suppose que $B$ est semi-abélien. Il en est donc de même de $A$ et $C$. Le morphisme $B \to C$ est alors plat (mais pas nécessairement surjectif) et son noyau $A'$ est donc égal à l'adhérence schématique de $A_K$ dans $B$. Le morphisme $A \to B$ se factorise à travers $A'$ et on a $A{=}A'$ si et seulement si $A'$ est lisse, c'est à dire si le morphisme $B \to C$ est lisse, ou encore si le morphisme $\mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C)$ est surjectif. C'est toujours le cas si $e < p - 1$ ([2] théorème 4 p. 187). Le théorème suivant traite le cas limite $e = p - 1$, où on contrôle encore la situation.

**Théorème A.1 (Raynaud)** *Soit $R$ un anneau de valuation discrète complet de corps de fractions $K$ de caractéristique 0, de corps résiduel $k$ de caractéristique $p > 0$ et d'indice de ramification absolu $e$. Soient $0 \to A_K \to B_K \to C_K \to 0$ une suite exacte de $K$-variétés abéliennes et les modèles de Néron sur $R$ correspondants $A \to B \to C$. On suppose que $B$ est semi-abélien et que $e = p - 1$. Alors il existe un entier $r$ tel que la suite*

$$0 \to \mathrm{Lie}(A) \to \mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C) \to (R/pR)^r \to 0$$

*est exacte.*

On donnera des énoncés plus précis et plus techniques dans le cas où $C_K$ est une courbe elliptique.

Tous les schémas en groupes considérés dans la suite sont commutatifs.

Soit $G$ un $R$–schéma en groupes fini et plat annulé par une puissance de $p$. Il existe une suite exacte de $R$–schémas en groupes finis et plats :

$$0 \longrightarrow G^c \longrightarrow G \longrightarrow G^{et} \longrightarrow 0$$

où $G^c$ est connexe et $G^{et}$ est étale sur $R$. Le sous–schéma en groupes $G^c$ est ouvert et fermé, il est le plus grand sous–schéma en groupes connexe contenu dans $G$.

On désigne par $G^\mu$ le plus grand sous–schéma en groupes de $G$ de type multiplicatif. $G^\mu$ et $G^{et}$ s'échangent par dualité de Cartier. Comme $G$ est d'ordre une puissance de $p$, $G^\mu$ est connexe. On a donc la filtration en trois crans :

$$0 \subset G^\mu \subset G^c \subset G\ .$$

On désigne par $G^b$ ($b$ pour biconnexe) le quotient intermédiaire $G^c/G^\mu$.

Si $u : G \to H$ est un morphisme entre deux $R$–schémas en groupes finis et plats, $u$ est compatible avec les filtrations précédentes. En effet, il est clair pour des raisons topologiques que $u$ envoie $G^c$ dans $H^c$. Par dualité, on trouve que $u_{/G^\mu}$ se factorise à travers $H^\mu$.

Rappelons que lorsque $e < p - 1$, la catégorie des $R$–schémas en groupes finis et plats est abélienne et le foncteur $G \to G_K$ est pleinement fidèle ([9] corollaire 3.3.6).

Lorsque $e = p - 1$, il est encore vrai que le foncteur $G \to G_K$ est pleinement fidèle à condition de se limiter :

- soit à la catégorie (*) des $R$–schémas en groupes connexes (i.e. $G^{et} = 0$)
- soit à la catégorie (**) duale de la précédente (i.e. $G^\mu = 0$).

Ceci résulte facilement de [9] par dévissage de la proposition 3.3.2–3) et de 3.3.7.

En revanche si on accepte à la fois des groupes étales et des groupes de type multiplicatif, on perd la pleine fidélité. En effet, $R$ contient les racines $p$–èmes de 1, et on peut envoyer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mu_p$ en envoyant 1 sur une racine d'ordre $p$. La flèche obtenue est alors un isomorphisme sur $K$ sans être un isomorphisme sur $R$.

Il est commode de dire qu'un $K$–schéma en groupes fini est de type étale (resp. connexe, resp. multiplicatif, resp. biconnexe) s'il se prolonge en un $R$–schéma en groupes fini et plat

étale (resp. connexe, resp. multiplicatif, resp. biconnexe). *Un $K$-schéma en groupes peut donc être à la fois de type multiplicatif et de type étale, mais alors il est nécessairement annulé par $p$* car un hensélisé strict de $R$ ne contient pas les racines $p^2$-èmes de 1.

Un $S$-groupe $p$-divisible, où $S$ est un schéma, est un système inductif $G = \varinjlim G(n)$, où $G(n)$ est un schéma en groupes fini et plat annulé par $p^n$, et où les flèches de transition sont des monomorphismes qui s'insèrent dans des suites exactes courtes fppf :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow G(n) \longrightarrow & G(n+m) & \longrightarrow & G(m) & \longrightarrow 0 \\ & g & \longrightarrow & p^n g & \end{array}$$

Nous dirons qu'un $K$-groupe $p$-divisible est de type entier (resp. étale, resp. connexe, resp. multiplicatif, resp. biconnexe) s'il est la fibre générique d'un $R$-groupe $p$-divisible (resp. d'un $R$-groupe $p$-divisible étale, resp. connexe, resp. multiplicatif, resp. biconnexe).

Rappelons le résultat fondamental de J. Tate ([12] théorème 4) : *le foncteur $G \mapsto G_K$ des $R$-groupes $p$-divisibles dans les $K$-groupes $p$-divisibles est pleinement fidèle.*
En particulier lorsqu'un $K$-groupe $p$-divisible a un type celui-ci est unique, contrairement à ce qui peut se passer pour un groupe fini. Notons aussi que le type est invariant par isogénie.

Soit $A$ le $R$-modèle de Néron d'un $K$-schéma abélien $A_K$. On suppose $A$ semi-abélien. Soit $A(n)$ le noyau de la multiplication par $p^n$ dans $A$. C'est un schéma en groupes quasi-fini et plat. Notons $A(n)^f$ la partie finie de $A(n)$. $A(n)^f$ possède une filtration en trois crans $A(n)^\mu \subset A(n)^c \subset A(n)^f$. On désigne par $A(\infty)$ (resp. $A_K(\infty)$) le système inductif formé par les $A(n)$ (resp. $A_K(n)$). On définit les systèmes inductifs

$$A^\mu = \varinjlim A(n)^\mu \quad A^c = \varinjlim A(n)^c \quad A^b = \varinjlim A(n)^b$$

Alors on a une suite exacte de $R$-groupes $p$-divisibles :

$$0 \longrightarrow A^\mu \longrightarrow A^c \longrightarrow A^b \longrightarrow 0$$

Par passage à la fibre générique on obtient une filtration du $K$-groupe $p$-divisible $A_K(\infty)$ :

$$0 \subset (A^\mu)_K \subset (A^c)_K \subset A_K(\infty)$$

**Lemme A.1** *Soit $A$ un $R$-schéma semi-abélien. Alors le quotient $A_K(\infty)/(A^c)_K$ est de type étale. On le note $A_K^{et}$.*

*Preuve.* La fibre spéciale connexe $A_k^0$ de $A$ est extension d'une variété abélienne $A'_k$ de dimension $a'$ par un tore $T_k$ de dimension $t$. Soit $a$ la dimension de $A_K$ qui est aussi la dimension de $A_k$ : $a = t + a'$.

On désigne par $A'_k(\infty)$ le $k$-groupe $p$-divisible des points de $p$-torsion de $A'_k$ et par $0 \subset (A'_k)^\mu \subset (A'_k)^c \subset A'_k(\infty)$ sa filtration canonique. Soit $m'$ la hauteur de $(A'_k)^\mu$. Comme $A'_k$ est isogène à sa duale, $(A'_k)^{et}$ est aussi de hauteur $m'$ et par suite $(A'_k)^b$ est de hauteur $2a' - 2m'$.

On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow T_k(\infty) \longrightarrow A_k(\infty) \longrightarrow A'_k(\infty) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow T_k(\infty) \longrightarrow (A_k)^\mu \longrightarrow (A'_k)^\mu \longrightarrow 0$$

La hauteur de $(A^\mu)_k = (A_k)^\mu$ est donc $t+m'$. Finalement $A^c$ est de hauteur $t+m'+2a'-2m' = t+2a'-m' = 2a-(t+m')$.

On désigne par $E_K$ le dual de Cartier de $((A^\vee)^\mu)_K$ où $A^\vee$ est le $R$–modèle de Néron de la variété duale de $A_K$. C'est un quotient de type étale de $A_K(\infty)$. Comme $A_K$ est isogène à sa duale, $E_K$ est de hauteur $t+m'$. Le $K$–morphisme de $(A^c)_K$ dans $E_K$ se prolonge par le théorème de Tate (rappelé au début de cette section) en un $R$–morphisme de $A^c$ dans un $R$–groupe $p$–divisible étale, il est donc nul. D'où une flèche surjective de $A_K(\infty)/(A^c)_K$ dans $E_K$. Comme ces deux groupes $p$–divisibles ont la même hauteur $t+m'$, cette flèche est un isomorphisme.

*Remarque* : Si $A_K$ n'a pas bonne réduction $A_K(\infty)$ n'est pas de type entier.

Considérons une suite exacte de $K$–variétés abéliennes :

$$0 \longrightarrow A_K \longrightarrow B_K \longrightarrow C_K \longrightarrow 0$$

et la suite des $R$–modèles de Néron correspondants supposés semi–abéliens :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

On a une suite exacte de $K$–groupes $p$–divisibles :

$$0 \longrightarrow A_K(\infty) \longrightarrow B_K(\infty) \longrightarrow C_K(\infty) \longrightarrow 0$$

et une filtration de $B_K(\infty)$ en trois crans :

$$0 \subset (B^\mu)_K \subset (B^c)_K \subset B_K(\infty)$$

dont les quotients successifs sont respectivement de type multiplicatif, biconnexe et étale (lemme A.1). Cette filtration induit sur $A_K(\infty)$ une filtration par des groupes qui ne sont pas nécessairement divisibles. C'est ce phénomène qui va entraîner le défaut de lissité de la flèche $B \to C$.

**Lemme A.2** *Les flèches $B^\mu \to C^\mu$ et $B^c \to C^c$ sont des épimorphismes de groupes $p$–divisibles (c'est à dire que les morphismes correspondant de groupes formels sont fidèlement plats).*

*Preuve.* Les épimorphismes de groupes $p$–divisibles découlent du fait que $C^0$ est un quotient plat de $B^0$.

**Lemme A.3** ***i)*** *$(B^c)_K \cap A_K(\infty)$ est extension d'un groupe fini de type étale $E_K$ annulé par $p$, par $(A^c)_K$.*

***ii)*** *$(B^\mu)_K \cap A_K(\infty)$ est extension d'un groupe fini $F_K$ par $(A^\mu)_K$; le morphisme canonique $F_K \to E_K$ est un isomorphisme. En particulier $F_K$ est de type étale.*

***iii)*** *Les morphismes $A^\mu \to B^\mu$, $A^b \to B^b$ et $A^c \to B^c$ sont des immersions fermées.*

*Preuve.*
i) Il existe un $K$–groupe $p$–divisible $L_K$ et un épimorphisme :

$$(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K \longrightarrow L_K \longrightarrow 0$$

tels que tout morphisme de $(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K$ dans un $K$–groupe $p$–divisible se factorise à travers $L_K$. $L_K$ est de type entier car pour tout $n$, $L_K(n)$ est la fibre générique d'un $R$–schéma en groupes fini et plat [9]. On désigne par $L$ le $R$–groupe $p$–divisible de fibre générique $L_K$. Le morphisme

$$(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K \longrightarrow A_K(\infty)/(A^c)_K$$

induit un monomorphisme de $K$–groupes $p$–divisibles $L_K \to A_K(\infty)/(A^c)_K$ et par suite un morphisme de $L$ dans un $R$–groupe $p$–divisible étale. La composante connexe $L^c$ s'envoie sur 0, elle est donc nulle. De même le morphisme :

$$(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K \longrightarrow (B^c)_K/(A^c)_K$$

induit un monomorphisme $L_K \to (B^c)_K/(A^c)_K$ et donc un morphisme de $L$ dans un $R$–groupe $p$–divisible connexe. Ce morphisme est nul car $L$ est étale. Ceci montre que $L_K$ est nul. La composante divisible de $(B^c)_K \cap A_K(\infty)$ est donc $(A^c)_K$. Le quotient fini $(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K = E_K$ est à la fois de type connexe et étale (car contenu dans $A_K(\infty)/(A^c)_K$). Il est donc annulé par $p$.
ii) On prouve de même que les quotients $(B^\mu)_K \cap (A^c)_K/(A^\mu)_K$ et $(B^\mu)_K \cap A_K(\infty)/(A^c)_K$ sont finis. On en déduit que la composante $p$–divisible de $(B^\mu)_K \cap A_K(\infty)$ est $(A^\mu)_K$. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (A^\mu)_K & \longrightarrow & (B^\mu)_K \cap A_K(\infty) & \longrightarrow & F_K & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & (A^c)_K & \longrightarrow & (B^c)_K \cap A_K(\infty) & \longrightarrow & E_K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Le quotient $(B^c)_K \cap A_K(\infty)/(B^\mu)_K \cap A_K(\infty)$ est contenu dans $(B^b)_K$, en particulier, il n'a pas de quotient non nul de type étale. On en déduit que la flèche canonique

$$(A^b)_K \to (B^c)_K \cap A_K(\infty)/(B^\mu)_K \cap A_K(\infty)$$

est un isomorphisme. Par le lemme du serpent le morphisme naturel $E_K \to F_K$ est aussi un isomorphisme.
iii) se teste sur la fibre générique puisqu'on est dans la catégorie (*).

Notons $p^r$ le rang de $F_K$ de sorte que sur l'extension maximale non ramifiée de $K$, $F_K$ devient isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^r$.

Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique entre $R$–modules libres :

$$\varprojlim s^*\Omega^1_{A(n)^c/R} \longrightarrow s^*\Omega^1_{A/R}$$

($s$ est la section unité) ou encore une identification entre leurs duaux sur $R$ : $\mathrm{Lie}(A^c) = \mathrm{Lie}(A)$. On a aussi la suite exacte de $R$–modules libres :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^\mu) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^c) \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^b) \longrightarrow 0$$

et des suites exactes analogues pour $B$ et $C$.
*Preuve* (du théorème A.1). Le théorème découle des deux suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^b) \longrightarrow \mathrm{Lie}(B^b) \longrightarrow \mathrm{Lie}(C^b) \longrightarrow 0 \tag{10}$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Lie}(A^\mu) \longrightarrow \mathrm{Lie}(B^\mu) \longrightarrow \mathrm{Lie}(C^\mu) \longrightarrow (R/pR)^r \longrightarrow 0 \tag{11}$$

La suite exacte (10) résulte de l'assertion correspondante sur les groupes $p$–divisibles :

$$0 \longrightarrow A^b \longrightarrow B^b \longrightarrow C^b \longrightarrow 0 \tag{12}$$

En effet $A^b \to B^b$ est une immersion fermée et $B^b \to C^b$ est un épimorphisme. D'autre part, il résulte de la preuve du lemme A.3 que la suite $0 \to (A^b)_K \to (B^b)_K \to (C^b)_K \to 0$ est exacte. D'où la hauteur de $B^b$ (qui est aussi la hauteur de $(B^b)_K$) est la somme des hauteurs de $A^b$ et de $C^b$. On en déduit l'exactitude au centre de la suite (12).

Soient $H(n)$ le noyau du morphisme $B(n)^\mu \to C(n)^\mu$ et $H$ la limite inductive des $H(n)$. Pour tout $n$, $H(n)$ est un schéma en groupes fini et plat sur $R$. On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow B^\mu \longrightarrow C^\mu \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow A^\mu \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où $F$ est un groupe multiplicatif annulé par $p$ par le lemme A.3 ii). La suite exacte (11) découle de ces deux suites exactes et du fait que le $R$–module des différentielles invariantes de $\mu_{p^n}$ est $R/p^nR$.

**Corollaire A.1** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C)$ *est surjectif.*

2) $B \to C$ *est lisse.*

3) *Le noyau de* $B^\mu \to C^\mu$ *est* $p$*–divisible (et est alors* $A^\mu$*).*

4) $(B(1)^\mu)_K \cap A_K(\infty) = (A(1)^\mu)_K$.

5) $(B(1)^\mu)_K \to (C(1)^\mu)_K$ *est surjectif.*

6) $A_K^{et} \to B_K^{et}$ *est injectif.*

7) $A_K^{et}(1) \to B_K^{et}(1)$ *est injectif.*

*Preuve.* L'équivalence de 1) et 2) est claire et on a vu qu'elle est équivalente à 3). Les conditions 4) et 5) sont des reformulations de 3). La condition 6) équivaut à 3) compte–tenu de l'isomorphisme $F_K \xrightarrow{\sim} E_K$ du lemme A.3. La condition 7) est une reformulation de 6).

**Corollaire A.2** *Soit* $0 \to (C_K)^\vee \to (B_K)^\vee \to (A_K)^\vee \to 0$ *la suite exacte duale de la précédente et* $C^\vee$, $B^\vee$ *et* $A^\vee$ *les* $R$*–modèles de Néron corèspondants. Alors* $B \to C$ *est lisse si et seulement si* $B^\vee \to A^\vee$ *est lisse.*

*Preuve.* La condition 5) du corollaire A.1 devient par dualité la condition 7) pour la suite duale.

**Corollaire A.3** $\mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C)$ *est surjectif dans les cas suivants :*

***i)*** *Le plus grand sous-groupe de* $A_K(1)$ *non ramifié sur* $R$ *est égal à* $(A(1)^\mu)_K$. *C'est en particulier le cas si* $A_K^{et} = 0$.

***ii)*** *Le plus grand quotient de* $C_K(1)$ *non ramifié sur* $R$ *est* $C_K^{et}(1)$. *C'est en particulier le cas si* $C^\mu = 0$

Les conditions i) et ii) s'échangent par dualité compte–tenu du fait que $C^\mu$ est nul si et seulement si $(C^\vee)_K^{et} = 0$.

**Corollaire A.4** *Supposons que* $C_K$ *est une courbe elliptique. Alors* $\mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C)$ *est surjectif sauf peut être si* $C_K(1)$ *est non ramifié sur* $R$. *Il revient au même de dire que* $\mathrm{Lie}(B) \to \mathrm{Lie}(C)$ *est surjectif sauf peut être dans les cas suivants :*

***i)*** $C$ *est une courbe elliptique à réduction ordinaire telle que* $C(1)$ *soit produit d'un groupe étale par un groupe de type multiplicatif (comme dans un relèvement canonique de Serre–Tate),*

***ii)*** $C_K$ *à réduction torique et (sur l'hensélisé strict de* $R$*), la période* $q$ *"à la Tate" est une puissance* $p$*–ème*

*Preuve.* Une courbe elliptique est auto–duale et on applique la condition ii) du corollaire A.3.

# Bibliographie


[1] A. O. L. ATKIN, J. LEHNER *Hecke operators on* $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185**, (1970), p. 134-160.

[2] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD *Néron models*, Springer–Verlag New York, 1990.

[3] H. CARAYOL *Sur les représentations l–adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sc. ENS **19**, (1986), p. 409-468.

[4] P. DELIGNE, M. RAPOPORT *Schémas de modules des courbes elliptiques*, dans *Modular functions of one variable II*, Lectures Notes in Mathematics **349**, Springer-Verlag, New-York 1973.

[5] B. EDIXHOVEN *On the Manin constants of modular elliptic curves* dans *Arithmetic algebraic geometry* Progress in Math. Volume **89**, p. 25–39, Birkhäuser (1989).

[6] B. MAZUR *Modular curves and the Eisenstein ideal,* Pub. Math. IHES, No **47**, (1977), p. 33-186.

[7] B. MAZUR *Courbes elliptiques et symboles modulaires*, Séminaire Bourbaki, exposé 414, Juin 1972.

[8] B. MAZUR *Rational isogenies of prime degree*, Invent. math. **44**, 1978, p. 129–162.

[9] M. RAYNAUD *Schémas en groupes de type* $(p, \ldots, p)$, Bul. S.M.F. t. **102**, 1974, p. 241–280.

[10] K. RIBET *Endomorphisms of semi–stable abelian varieties over number fields*, Ann. of Math. **101**, (1975), p. 555–562.

[11] G. SHIMURA *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1971.

[12] J. TATE *p–Divisible groups*, Proceedings of a conference on local fields, Nuffic summer school Driebergen, 1966, p. 158–183.

[13] D. ZAGIER *Modular parametrizations of elliptic curves,* Canad. Math. Bull. Vol. **28** (3), (1985), p. 372-384.