THÈSES D'ORSAY

BERTRAND LEMAIRE

Représentation p-adique et corps locaux proches

Thèses d'Orsay, 1994

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1994__0382__P0_0>

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

03704

ORSAY
n d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS - SUD
CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

par

Bertrand LEMAIRE

SUJET : REPRESENTATIONS P-ADIQUES ET CORPS LOCAUX PROCHES

soutenue le 8 fevrier 1994 devant la commission d'examen composée de

MM. Laurent CLOZEL
Guy HENNIART
Gérard LAUMON
Marie-France VIGNERAS
Jean-Loup WALDSPURGER

Remerciements

Comment remercier Guy Henniart qui m'a tellement donné tout au long de ces années de thèse (et de DEA) passées sous sa "direction" ? Un bien vilain mot en vérité pour qualifier son infinie patience (combien de démonstrations hasardeuses voire complètement fausses, combien de constructions acrobatiques, lui ai-je proposées avant d'en arriver à une version qui se tienne...?), la richesse, semble-t-il inépuisable, des thèmes de recherche qu'il propose, mais aussi – mais surtout – la conception tellement ludique qu'il a des mathématiques. Merci de m'avoir permis, ces quelques années durant, de jouer un peu avec lui.

Je suis très reconnaissant aux deux rapporteurs, J. Rogawski et J.L. Waldspurger, d'avoir accepté de lire le manuscrit et de m'avoir si rapidement fait part des corrections à y apporter. Je remercie aussi L. Clozel, G. Laumon et M.F. Vignéras, avec la prose desquels j'ai passé le plus clair de ces deux dernières années, et dont la présence dans le jury me fait très plaisir.

Je voudrais remercier M. Andler et à nouveau G. Henniart qui, alors que je suivais leurs cours de DEA respectifs, ont su me faire confiance et me guider au moment où je ne savais pas trop bien où j'allais.

Enfin, *un grazie enorme* à Valentina pour m'avoir si bien soutenu (supporté serait plus juste !) dans les moments critiques où les mathématiques prenaient vraiment trop de place dans ma tête.

Présentation

Cette thèse est composée de cinq chapitres, traitant tous de questions liées à la théorie des représentations lisses de $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est un corps local de caractéristique >0 (à corps résiduel fini). L'idée de départ était d'exploiter l'idée de D. Kazhdan selon laquelle la théorie d'un corps local de caractéristique >0 est limite des théories de corps locaux de caractéristique nulle et de même corps résiduel, quand l'indice de ramification absolu tend vers l'infini. On espérait ainsi montrer, pour $\mathbf{GL}_N(F)$, la conjecture de Howe et peut-être l'intégrabilité locale des caractères. Ces deux résultats ont été obtenus mais grâce à des arguments plus intrinsèques que ceux issus seulement d'une comparaison des caractéristiques. En effet, si le principe de D. Kazhdan s'applique naturellement aux problèmes liés aux algèbres de Hecke relatives à un sous-groupe de congruence de niveau fixé (conjecture de Howe), il devient d'autant plus difficile à utiliser que les dits problèmes ont à voir avec l'analyse harmonique sur le groupe. D'où le recours aux constructions de Bushnell & Kutzko à chaque fois que l'on a besoin d'informations locales sur le comportement des orbites voisines d'un élément dans le groupe. Les cinq chapitres, de difficulté croissante, glissent progressivement du premier type de préoccupations (comparaison de l'analyse harmonique sur $\mathbf{GL}_N$ pour des corps locaux proches) vers le second (analyse harmonique sur $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est fixé), le chapitre 4 illustrant bien la complémentarité des deux approches.

Chapitre 1: **Algèbres de Hecke et corps locaux proches** (1-22).

Chapitre 2: **Représentations génériques et corps locaux proches** (23-44).

Chapitre 3: **Intégrales orbitales sur $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est un corps local de caractéristique >0** (45-106).

Chapitre 4: **La conjecture de Howe pour $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est un corps local de caractéristique >0** (107-153).

Chapitre 5: **Intégrabilité locale des caractères de $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est un corps local non archimédien de caractéristique quelconque** (155-184).

Chacun des chapitres est précédé d'une introduction dans laquelle nous tentons d'expliquer le problème et les ingrédients qui nous ont permis de le résoudre. Ces chapitres ont été rédigés dans le désordre et de manière relativement indépendante (on peut donc aussi les lire dans le désordre), ce qui entraîne quelques redites dont nous nous excusons. Les références à l'intérieur d'un chapitre renvoient à la fin de ce chapitre.

Résumé des résultats

La lettre F désigne un corps local non archimédien à corps résiduel de cardinal q. Le plus souvent F est de caractéristique non nulle p. On note **G**(F) le groupe $\mathbf{GL}_N(F)$ (pour un entier $N \geq 2$), K_F le sous-groupe maximal standard $\mathbf{GL}_N(\mathcal{O}_F)$ et K_F^n (pour n entier ≥ 1) les sous-groupes de congruence modulo $\mathcal{P}_F^n$ de K_F. On note aussi B_F le sous-groupe d'Iwahori standard de **G**(F) et B_F^n (pour n entier ≥ 1) les sous-groupes de congruence correspondants.

Fixons un entier $n \geq 1$. D. Kazhdan a prouvé que si r est un entier assez grand et si E est un corps local non archimédien r-proche de F (au sens où $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \simeq \mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E^r$), alors les algèbres de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F^n)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$ sont isomorphes.

Le premier chapitre de la thèse est consacrée à un résultat (plus général) obtenu en remplaçant K_F^n par B_F^n ; ce résultat est aussi beaucoup plus précis au sens où l'on prouve que l'entier $r = n$ suffit. On utilise pour cela une description explicite par générateurs et relations de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ due à R. Howe.

Dans le deuxième chapitre, on étudie les représentations génériques de **G**(F) ayant un vecteur non nul fixe sous le groupe B_F^n. On montre que ces représentations sont classées par les sous-modules d'un module $\mathcal{E}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ sur $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$. On montre ensuite que, pourvu que les corps F et E soient (n+1)-proches, les espaces vectoriels $\mathcal{E}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ et $\mathcal{E}(\mathbf{G}(E),B_E^n)$ sont isomorphes, l'action de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ se transportant sur celle de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),B_E^n)$.

On voit aussi que si deux représentations irréductibles génériques de **G**(F) et **G**(E) (ayant un vecteur non nul fixe sous B_F^n et B_E^n respectivement) se correspondent, leurs conducteurs sont égaux ou bien tous deux strictement plus grands que n (il semble du reste assez naturel de pousser l'investigation, ce que faute de temps nous n'avons pas pu faire, en montrant que les facteurs L et ε de paires sont eux aussi conservés).

Le troisième chapitre constitue une mise au point sur les problèmes d'intégrales orbitales pour $\mathbf{GL}_N(F)$ quand le corps F est de caractéristique >0. La littérature ne contient pas de traitement satisfaisant dans ce cadre, même si des énoncés et des idées de démonstrations ont été rédigés. Pour cette mise au point, on s'appuie essentiellement sur l'article de R. Howe *Fourier transforms and germs of characters*, Math. Ann. **208** (1974), et sur une prébublication de G. Laumon *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties*, Pub. Math. Univ. Paris-Sud (1991). On établit soigneusement les normalisations et les énoncés de descente, non à partir de la décomposition de Jordan comme il est d'usage en caractéristique nulle, mais à partir d'une décomposition plus générale et indépendante de la caractéristique; on établit aussi la théorie des germes et leur indépendance au voisinage des éléments semi-simples séparables. De manière plus originale, on obtient, grâce aux travaux de Bushnell & Kutzko, un résultat explicite de constance locale des intégrales orbitales sur les nappes de Dixmier, précisant ainsi et généralisant un énoncé d'Harish-Chandra pour les éléments réguliers. Cette normalisation nous permet de prouver l'indépendance des germes au voisinage des éléments semi-simples inséparables. On poursuit avec une démonstration détaillée du théorème de caractérisation des intégrales orbitales et du théorème de densité des intégrales orbitales régulières séparables.

Dans le quatrième chapitre, on donne la preuve (une preuve) de la conjecture de Howe pour $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est de caractéristique $p > 0$. On procède par comparaison avec la caractéristique nulle, où le résultat a été démontré par L. Clozel (et d'ailleurs pour n'importe quel groupe réductif). Qu'une telle démonstration soit possible a été, il y a quelques années déjà, suggéré par D. Kazhdan. La conjecture de Howe affirme que si K est un sous-groupe ouvert compact de **G**(F) et si Ω est une partie *compacte modulo conjugaison* dans **G**(F) au sens où Ω est fermée et contenue dans Ad**G**(F)(W) pour une partie compacte W⊂**G**(F), les restrictions à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$(**G**(F),K) des distributions invariantes à support dans Ω forment un espace de dimension finie. On peut se contenter de prendre $K=K_F^n$ pour n assez grand et de choisir pour W une union finie de doubles classes $K_F g K_F$ (g∈**G**(F)), laquelle union a un sens indépendamment du choix de F. On fixe l'entier n et la "forme" de la partie W. L'idée est alors de comparer la situation sur F à celle sur des corps locaux E de caractéristique nulle de plus en plus proches de F (c'est-à-dire de plus en plus ramifiés sur $\mathbb{Q}_p$) et de voir alors que la dimension de l'espace en question pour E ne dépend en fait que du cardinal du corps résiduel de E. Le point crucial dans cette démonstration, et qui occupe les n° 1 et 2 du chapitre, consiste à prouver que les intégrales orbitales elliptiques sur **G**(F), vues comme formes linéaires sur $\mathcal{H}$(**G**(F),K_F^n), se "relèvent" en caractéristique nulle (i.e. sur le groupe **G**(E) pour une extension $E/\mathbb{Q}_p$ suffisamment proche de F) grâce aux isomorphismes du chapitre 1. Il s'agit là d'une sorte d'énoncé de constance locale uniforme plus précis (on donne en effet une formule explicite pour les intégrales orbitales elliptiques des fonctions de l'algèbres de Hecke $\mathcal{H}$(**G**(F),K_F^n)) et plus délicat à obtenir que celui d'Harish-Chandra (*A submersion principle and its applications*, proc. Indian Acad. sci. (Math. Sci.) 90 (1981)).

Dans le cinquième et dernier chapitre, il s'agit de prouver que les caractères-distributions des représentations admissibles irréductibles de $\mathbf{GL}_N$(F) (F toujours de caractéristique >0) sont des fonctions localement intégrables sur $\mathbf{GL}_N$(F). En caractéristique nulle, ce résultat est dû à Harish-Chandra, dont une technique essentielle est de passer à l'algèbre de Lie grâce à l'application exponentielle. En caractéristique >0, F. Rodier, utilisant l'application $X \mapsto 1+X$, a pu étendre les résultats de Harish-Chandra en prouvant l'intégrabilité locale au voisinage des éléments séparables. Les éléments inséparables posent plus de problèmes; le caractère a à leur voisinage un comportement à priori plus compliqué et les techniques traditionnelles de descente ne s'appliquent plus. Pour aborder ces éléments, l'idée est de construire, grâce à la corestriction modérée de Bushnell & Kutzko, une "descente" qui, combinée à une utilisation assez fine du principe de submersion – décidément vraiment très fécond – d'Harish-Chandra, permet de ramener l'étude à celle d'une distribution invariante sur l'algèbre de Lie d'un groupe plus petit (le centralisateur de l'élément étudié). On peut alors utiliser les puissants résultats de R. Howe sur les germes de caractères (valables pour $\mathbf{GL}_N$ en toute caractéristique). En fait, cette construction (qui traite tout aussi bien les éléments séparables) simplifie l'approche de F. Rodier puisqu'elle permet de faire l'économie de quelques démonstrations délicates dues au passage du groupe à son algèbre de Lie.

Chapitre 1

Algèbres de Hecke et corps locaux proches

On appelle *corps local non archimédien* un corps commutatif localement compact, non discret, ultramétrique et à corps résiduel fini. Si F est un tel corps, on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$.

Rappelons les deux possibilités ([Weil] chap. I, theorem 5 et theorem 8):

— Si F est de caractéristique 0, alors F est une extension algébrique finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques pour un entier premier p, et $\mathcal{O}_F$ est constitué des éléments entiers sur l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques.

— Si F est de caractéristique >0, alors F est isomorphe au corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O}_F=\mathbb{F}_q[[\varpi]]$ des séries formelles en une indéterminée ϖ à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_q$.

Définition 0.1. — *On dit que deux corps locaux non archimédiens* F *et* L *sont* m*-proches pour entier* $m\geq 1$ *si les anneaux quotients* $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^m$ *et* $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L^m$ *sont isomorphes.*

□

Rappelons le résultat de D. Kazhdan ([Kazh]).

Soit **G** un $\mathbb{Z}$-groupe réductif déployé. Pour tout anneau commutatif A, on note **G**(A) le groupe des A-points de **G**.

Soit F un corps local non archimédien. On munit le groupe **G**(F) de la topologie $\mathcal{P}_F$-adique induite par F et l'on note $K_F\subset\mathbf{G}(F)$ le sous-groupe ouvert compact maximal $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$. Pour chaque entier $m\geq 1$, soit K_F^m le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F^m$ de K_F, c'est-à-dire le noyau de la projection $K_F\to\mathbf{G}(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^m)$. Chacun de ces sous-groupes est distingué dans K_F et la famille $\{K_F^m\}_{m\geq 1}$ forme un système fondamental de voisinages ouverts compacts de l'unité dans **G**(F).

Soit dg_F la mesure de Haar sur **G**(F) telle que

$$\mathrm{vol}(K_F, dg_F)=1,$$

et pour tout sous-groupe ouvert compact H de **G**(F), soit $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ l'*algèbre de Hecke de* **G**(F) *relative à* H (munie du produit de convolution $*$ induit par la mesure dg_F). Explicitement, c'est l'espace vectoriel des fonctions $f\colon \mathbf{G}(F)\to\mathbb{C}$ telles que

(i) f est H-biinvariante, i.e. $f(hgh')=f(g)$ pour tout $g\in \mathbf{G}(F)$ et tout couple $(h,h')\in H$,

(ii) f est à support compact,

muni de la multiplication $\mathbb{C}$-bilinéaire

$$f*\phi(x)=\int_{\mathbf{G}(F)} f(g_F)\phi(g_F{}^{-1}x)dg_F \quad (x\in \mathbf{G}(F))$$

pour toutes fonctions $f,\phi:\mathbf{G}(F)\to\mathbb{C}$ H-biinvariantes à support compact. Ainsi, $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ est une $\mathbb{C}$-algèbre associative et $e_H=(\mathrm{vol}(H,dg_F))^{-1}\mathbf{1}_H$ ($\mathbf{1}_H$ désignant la fonction caractéristique de H) est l'élément unité de cette algèbre.

Si H' est un sous-groupe ouvert compact de H, alors $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)\subset\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H')$ (inclusion d'algèbres) mais $e_H\neq e_{H'}$ si $H'\neq H$.

Soit

$$\mathcal{H}(\mathbf{G}(F))=\bigcup_H \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)=\bigcup_{m\geq 1}\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^m)$$

où H parcourt l'ensemble sous-groupes ouverts compacts de $\mathbf{G}(F)$, l'*algèbre de Hecke de* $\mathbf{G}(F)$ (munie du produit de convolution $*$ défini ci-dessus) des fonctions $\mathbf{G}(F)\to\mathbb{C}$ localement constantes et à support compact. C'est une algèbre associative mais sans élément unité.

Soit m un entier ≥ 1 et soient F et L deux corps locaux m-proches. Supposons donné un triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ où

$$\lambda:\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^m \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^m$$

est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_L) une uniformisante de F (resp L) satifaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F{}^m)=\varpi_L+\mathcal{P}_L{}^m$. L'isomorphisme d'anneaux λ induit un isomorphisme de groupes

$$\beta=\beta(\lambda):K_F/K_F{}^m \xrightarrow{\cong} K_L/K_L{}^m.$$

La décomposition de Cartan pour $\mathbf{G}(F)$ et $\mathbf{G}(L)$

$$\mathbf{G}(F)=\coprod_{(\alpha)} K_F\varpi_F{}^{(\alpha)}K_F \quad \left(\varpi_F{}^{(\alpha)}=\mathrm{diag}\left(\varpi_F{}^{\alpha_1},\ldots,\varpi_F{}^{\alpha_N}\right)\right)$$

et

$$\mathbf{G}(L)=\coprod_{(\alpha)} K_L\varpi_L{}^{(\alpha)}K_L \quad \left(\varpi_L{}^{(\alpha)}=\mathrm{diag}\left(\varpi_L{}^{\alpha_1},\ldots,\varpi_L{}^{\alpha_N}\right)\right),$$

où (α) parcourt l'ensemble des suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1\leq\ldots\leq\alpha_N)$ $(\alpha_i\in\mathbb{Z})$, permet de construire une bijection (ne dépendant que du triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$)

$$K_F{}^m k_1\varpi_F{}^{(\alpha)}k_2K_F{}^m \mapsto \beta(k_1K_F{}^m)\varpi_L{}^{(\alpha)}\beta(k_2K_F{}^m) \quad ((k_1,k_2)\in K_F\times K_F)$$

entre les doubles classes $K_F{}^m\backslash\mathbf{G}(F)/K_F{}^m$ de $\mathbf{G}(F)$ et les doubles classes $K_L{}^m\backslash\mathbf{G}(L)/K_L{}^m$ de $\mathbf{G}(L)$ ([Kazh] lemma 1.2), laquelle bijection induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces

$$\xi(\lambda,\varpi_F,\varpi_L):\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^m)\xrightarrow{\cong}\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),K_L{}^m).$$

Le résultat de D. Kazhdan s'énonce en ces termes ([Kazh] theorem A) : *il existe un entier* $m_0\geq m$ *tel que, pour tous corps locaux* m_0*-proches* F *et* L *et tout triplet* $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ *comme ci-dessus, l'isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-espaces vectoriels* $\xi(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ *induit un isomorphisme de* $\mathbb{C}$*-algèbres.*

Remarque 0.2. — Les conséquences de ce résultat quant à la théorie des représentations en caractéristique positive sont extrêmement séduisantes. En effet, si n est un entier ≥ 1 et F un corps local de caractéristique $p>0$ à corps résiduel de cardinal $q=p^r$, alors F est n-proche de L pour toute extension finie L de $\mathbb{Q}_p$ de degré résiduel r et d'indice de ramification supérieur où égal à n. Comme l'ensemble $\mathcal{E}^n(\mathbf{G}(F))$ des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles de $\mathbf{G}(F)$ ayant un vecteur non nul fixé par $K_F{}^n$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$-modules simples de dimension finie (cf. [Be-Ze] prop. 2.10), l'isomorphisme

$$\left(\sigma,\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F),K_F{}^n\right),W\right)\mapsto\left(\sigma\circ\xi^{-1},\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L),K_L{}^n\right),W\right)$$

de la catégorie des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$-modules sur celle des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),K_L{}^n)$-modules, induit une bijection entre $\mathcal{E}^n(\mathbf{G}(F))$ et $\mathcal{E}^n(\mathbf{G}(L))$. Ainsi, la théorie des représentations de $\mathbf{G}(F)$ est limite des théories des représentations de $\mathbf{G}(L)$ quand l'indice de ramification de $L/\mathbb{Q}_p$ tend vers l'infini. On peut illustrer la fécondité de ce principe par deux exemples: le théorème de densité des caractères-distributions des représentations admissibles irréductibles de $\mathbf{G}(F)$ dans l'espace des distributions Ad$\mathbf{G}(F)$-invariante sur $\mathbf{G}(F)$ ([Kazh] theorem B); la conjecture de Howe pour le groupe $\mathbf{GL}_N(F)$, le point central de la démonstration consistant à construire un relèvement uniforme à $\mathbf{GL}_N(L)$ des intégrales orbitales elliptiques des fonctions de $\mathcal{H}(\mathbf{GL}_N(F),K_F{}^n)$ (cf. le chapitre 4)).

□

D. Kazhdan a conjecturé que l'entier $m_0=m$ vérifiait cette propriété.

L'objet de ce chapitre 1 est de montrer, pour $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$ (N entier ≥ 2), une variante (légèrement plus forte) de cette conjecture. Soit F un corps local non archimédien et soit B_F le sous-groupe d'Iwahori supérieur de $\mathbf{G}(F)$ (i.e l'image inverse par la projection $K_F\to\mathbf{G}(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F)$ du sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F)$ formé par les matrices triangulaires supérieures). Pour chaque entier $m\geq 1$, soit $B_F{}^m$ le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F{}^m$ de B_F, c'est-à-dire le groupe des matrices $b=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ de B_F telles que

$$\begin{cases} b_{i,j}\in\mathcal{P}_F{}^m & \text{si } 1\leq i<j\leq N\\ b_{i,i}\in 1+\mathcal{P}_F{}^m & \text{si } 1\leq i\leq N\\ b_{i,j}\in\mathcal{P}_F{}^{m+1} & \text{si } 1\leq j<i\leq N\end{cases}$$

(ne pas confondre cette filtration avec celle, plus fine, induite par les puissances du radical de Jacobson de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire minimal de $\mathbf{M}_N(F)$ ayant B_F pour groupe multiplicatif, cf. la remarque 2.2.2).

Si n est un entier ≥ 1, on montre (numéro 2), grâce à la présentation de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ par générateurs et relations donnée par R. Howe ([Howe] chap. 3, theorem 2.1) et rappelée dans le numéro 1, que pour tous corps locaux n-proches F et L, la donnée d'un triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$, où $\lambda:\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^n\to\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^n$ est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_L) une uniformisante de F (resp. L) satisfaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F{}^n)=\varpi_L+\mathcal{P}_L{}^n$, induit (la construction ne dépendant que du triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$) un isomorphisme d'algèbres

$$\zeta=\zeta\left(\lambda,\varpi_F,\varpi_L\right):\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F),B_F{}^n\right)\xrightarrow{\ \cong\ }\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L),B_L{}^n\right).$$

On étend ensuite le résultat aux sous-groupes H de $\mathbf{G}(F)$ contenant $B_F{}^n$ (donc en particulier au sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F{}^n$ du sous-groupe ouvert compact maximal K_F de $\mathbf{G}(F)$) en vérifiant que la restriction de l'isomorphisme ζ ci-dessus à la sous-algèbre $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ induit un isomorphisme d'algèbres

$$\zeta_H : \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), H) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(\mathbf{G}(L), H'),$$

où H' est le sous-groupe de $\mathbf{G}(L)$ défini par $\zeta(1_H)=1_{H'}$. Signalons que pour les groupes $H=K_F$ et $H=B_F$, on connaissait depuis longtemps la structure de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ donc en particulier le fait que cette structure ne dépend que du cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ ([Sata] pour $H=K_F$ (1963), [Iw-Ma] §3 pour $H=B_F$ (1965)).

On peut justifier ce contrôle du degré de proximité de deux corps locaux F et L nécessaire à l'obtention d'un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n) \to \mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L^n)$ par les travaux de P. Deligne côté galoisien. Il a en effet montré que la sous-catégorie pleine de la catégorie des extensions finies séparables de F formées des extensions F'/F ayant un $n^{\text{ième}}$ groupe de ramification en notation supérieure $\mathrm{Gal}(F'/F)^n$ trivial, ne dépend (à équivalence unique à isomorphisme unique près) que du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)=(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n, \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{n+1}, \varepsilon_{F,n}(F))$ où $\varepsilon_{F,n}$ désigne le morphisme de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$-modules $\mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{n+1} \to \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$ induit par l'injection $\mathcal{P}_F \to \mathcal{O}_F$ par passage au quotient. De même, côté automorphe, l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ ne dépend (à isomorphisme unique à isomorphisme unique près) que du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$. En d'autres termes, l'isomorphisme d'algèbres $\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ ne dépend que de (λ,λ_{+1}) où λ_{+1}: $\mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{n+1} \to \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_L^{n+1}$ est l'isomorphisme de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$-modules défini par $\lambda_{+1}(\alpha(\varpi_F+\mathcal{P}_F^{n+1})=\lambda(\alpha)(\varpi_L+\mathcal{P}_L^{n+1})$ pour tout $\alpha\in \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$ (cf. la proposition 2.1.2).

1. Présentation d'algèbres de Hecke par générateurs et relations ([Howe]).

1.1. Soient

— F un corps local non archimédien.

— $q=[\mathcal{O}_F:\mathcal{P}_F]$ le cardinal du corps résiduel de F.

— ϖ_F une uniformisante de F.

— N un entier ≥ 2 et $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$. On identifie naturellement le centre de $\mathbf{G}(F)$ à $F^\times$.

— $\mathcal{B}_F$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire minimal de $\mathbf{M}_N(F)$ formé des matrices de $\mathbf{M}_N(\mathcal{O}_F)$ triangulaires supérieures modulo $\mathcal{P}_F$, $\mathcal{B}_F^1$ le radical de Jacobson de $\mathcal{B}_F$ formé des matrices de $\mathcal{B}_F$ dont les coefficients diagonaux appartiennent à $\mathcal{P}_F$ et $\mathcal{B}_F^m$ ($m\in\mathbb{Z}$) les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{B}_F^1$.

— $B_F=\mathcal{B}_F^\times$ le groupe multiplicatif de $\mathcal{B}_F$ (c'est un sous-groupe d'Iwahori de $\mathbf{G}(F)$) et pour chaque entier $m\geq 1$, $B_F^m=1+\mathcal{B}_F^{Nm}=1+\varpi_F^m\mathcal{B}_F$ (c'est un sous-groupe distingué de B_F).

On fixe un entier $n\geq 1$ et l'on s'intéresse à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$.

1.2. Pour tout élément $g\in\mathbf{G}(F)$, soit

$$f_g = \mathrm{vol}(B_F^n, dg_F)^{-1} \mathbf{1}_{B_F^n g B_F^n}$$

$\mathbf{1}_X$ désignant (pour toute partie ouverte compacte X de $\mathbf{G}(F)$) la fonction caractéristique de X. Les fonctions f_g ($g\in B_F^n\backslash\mathbf{G}(F)/B_F^n$) constituant une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$, on est a priori tenté d'exhiber un système de représentants Δ dans $\mathbf{G}(F)$ des doubles classes $B_F^n\backslash\mathbf{G}(F)/B_F^n$ de $\mathbf{G}(F)$ puis de déterminer les relations existant entre les f_g (où g parcourt Δ) à l'aide des formules de multiplication suivantes. Pour tout couple $(x,y)\in\mathbf{G}(F)\times\mathbf{G}(F)$

$$f_x * f_y = \sum_{z\in\Delta} c_{x,y,z}\, f_z \tag{1}$$

où les coefficients $c_{x,y,z}$ sont calculés comme suit. Le groupe $B_F^n(x)=B_F^n \cap \mathrm{Ad}x(B_F^n)$ est ouvert compact donc d'indice fini dans B_F^n. Il existe par conséquent des éléments $g_1,\ldots,g_m$ dans B_F^n tels que B_F^n est union disjointe des classes $g_1B_F^n(x),\ldots,g_mB_F^n(x)$. Ainsi, la double classe $B_F^nxB_F^n$ est union disjointe des classes $g_1xB_F^n,\ldots,g_mxB_F^n$. On définit de la même manière le groupe $B_F^n(y)$ et des éléments $h_1,\ldots,h_k$ dans B_F^n tels que la double classe $B_F^nyB_F^n$ est union disjointe des classes $h_1yB_F^n,\ldots,h_kyB_F^n$. Alors $c_{x,y,z}$ est le nombre de paires (i,j) telles que $z^{-1}g_ixh_jy$ appartient au groupe B_F^n (cf. [Shim] n° 3.1).

L'astuce de la méthode développée par R. Howe, et qui permet de faire l'économie de la détermination problématique de l'ensemble Δ, tient toute entière dans la proposition suivante, conséquence des formules ci-dessus ([Howe] chap. 3, prop. 2.2):

Proposition 1.2.1. — *Soit* G *un groupe localement compact unimodulaire et* H *un sous-groupe ouvert compact de* G. *Soit* dg *une mesure de Haar sur* G *et pour chaque élément* g *de* G, *soit* $f_g=\mathrm{vol}(H,dg)^{-1}\mathbf{1}_{HgH}$. *Si* x *et* y *sont deux éléments de* G *tels que*

$$\mathrm{vol}(HxH\,,dg)\mathrm{vol}(HyH\,,dg)=\mathrm{vol}(H\,,dg)\mathrm{vol}(HxyH\,,dg)$$

alors

$$f_x * f_y = f_{xy}$$

où $*$ désigne le produit de convolution induit par la mesure dg (cf. l'introduction).

□

On considérera donc, comme générateurs de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$, les éléments f_b ($b\in B_F$) et les éléments f_w ($w\in W^*$), W^* désignant un système de représentants dans $\mathbf{G}_F$ des doubles classes $B_F\backslash\mathbf{G}(F)/B_F$. En effet, tout élément $g\in\mathbf{G}(F)$ peut s'écrire sous la forme $g=bwb'$ pour un (unique) élément $w\in W^*$ et un couple $(b,b')\in B_F\times B_F$. Comme le groupe B_F^n est distingué dans B_F, on a la relation

$$B_F{}^n gB_F{}^n = bB_F{}^n wB_F{}^n b'$$

laquelle entraîne l'égalité

$$\mathrm{vol}(B_F{}^n b, dg_F)\,\mathrm{vol}(B_F{}^n wb'B_F{}^n, dg_F)=\mathrm{vol}(B_F{}^n, dg_F)\,\mathrm{vol}(B_F{}^n gB_F{}^n, dg_F)$$

donc (proposition 1.2.1 pour x=b et y=wb')

$$f_b * f_{wb'} = f_g$$

et l'égalité

$$\mathrm{vol}(B_F{}^n wB_F{}^n, dg_F)\,\mathrm{vol}(B_F{}^n b', dg_F)=\mathrm{vol}(B_F{}^n, dg_F)\,\mathrm{vol}(B_F{}^n wb'B_F{}^n, dg_F)$$

donc (proposition 1.2.1 pour x=w et y=b')

$$f_w * f_{b'} = f_{wb'}\,.$$

En définitive (grâce à l'associativité du produit de convolution)

$$f_g = f_b * f_w * f_{b'}\,.$$

Remarque 1.2.2. — R. Howe travaille en fait avec $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F)//B_F^n)$, l'algèbre de Hecke de $\mathbf{G}(F)$ relative à B_F^n munie du produit de convolution induit par la mesure de Haar sur $\mathbf{G}(F)$

donnant volume 1 à $B_F{}^n$. On passe immédiatement d'une formulation à l'autre grâce à l'isomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n) \to \mathcal{H}(\mathbf{G}(F)//B_F{}^n)$, $f \mapsto \mathrm{vol}(B_F{}^n,dg_F)f$.

□

1.3. Systèmes de Tits généralisés et volumes des doubles classes ([Iw-Ma]).

Soit $\{e_{c,d}(F)\}_{1\le c,d\le N}$ la base canonique de $\mathbf{M}_N(F)$.

Pour chaque $1\le i\le N-1$, soit $s_i(F)=1-(e_{i,i}(F)+e_{i+1,i+1}(F))+e_{i,i+1}(F)+e_{i+1,i}(F)$ l'élément de $\mathbf{G}(F)$ qui, agissant à gauche par translation, permute les lignes i et i+1.

Soit

$$s_N(\varpi_F)=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & & \varpi_F{}^{-1} \\ \hline & I_{N-2} & \\ \hline \varpi_F & & 0 \end{array}\right)$$

et soit

$$t(\varpi_F)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ \varpi_F & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le corps F et l'uniformisante ϖ_F étant fixés pour tout le numéro 1, on notera plus simplement $s_i=s_i(F)$ $(1\le i\le N-1)$, $s_N=s_N(\varpi_F)$ et $t=t(\varpi_F)$.

Avec la convention $s_0=s_N$, on a les relations (pour tous $1\le i,j\le N$),

$$s_is_j=s_js_i \quad \text{si } |i-j| (\mathrm{mod}\ N)>1 \tag{1}$$

$$s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1} \quad \text{si } N>2 \tag{2}$$

$$ts_it^{-1}=s_{i-1}. \tag{3}$$

Soit $W^a=W^a(\varpi_F)$ le sous-groupe de $\mathbf{G}(F)$ engendré par t et les involutions s_i $(1\le i\le N)$ (ou, ce qui revient au même, par t et s_1).

Le groupe W^a se décompose en un produit semi-direct

$$W^a=S_N\ltimes D \tag{4}$$

où $S_N=S_N(F)$ est le $N^{\text{ième}}$ groupe de permutations engendré par les involutions s_i $(1\le i\le N-1)$ et $D=D(\varpi_F)$ le groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}^N$) des matrices diagonales de la forme

$$\varpi_F{}^{(\alpha)}=\mathrm{diag}\left(\varpi_F{}^{\alpha_1},\varpi_F{}^{\alpha_2},\ldots,\varpi_F{}^{\alpha_N}\right),\ (\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)\in\mathbb{Z}^N.$$

Notons que le groupe W^a se décompose aussi en

$$W^a=\langle t\rangle\ltimes W \tag{5}$$

où $\langle t\rangle$ est le groupe (isomorphe à $\mathbb{Z}$) engendré par t et $W=W(\varpi_F)$ le groupe engendré par les involutions s_i $(1\le i\le N)$.

Soit **A** le tore diagonal de **G** et $N_F=S_N\ltimes\mathbf{A}(F)=W^a\ltimes\mathbf{A}(\mathcal{O}_F)$. Alors ([Iw-Ma]) le triplet $(\mathbf{G}(F),B_F,N_F)$ est un *système de Tits généralisé* (cf. [Iwah] n°1 pour la définition) avec pour groupe quotient

$$N_F/(B_F\cap N_F)\cong W^a$$

Rappelons quelques-unes des propriétés du triplet $(\mathbf{G}(F),B_F,N_F)$ (cf. [Iwah] n°1 pour une liste plus exhaustive):

(i) $\mathbf{G}(F)$ est union disjointe des doubles classes B_FwB_F ($w\in W^a$). C'est la décomposition dite de Bruhat-Tits.

(ii) L'élément t normalise B_F et le normalisateur de B_F dans $\mathbf{G}(F)$ est union disjointe des classes $t^\alpha B_F$ ($\alpha\in\mathbb{Z}$).

(iii) $\mathbf{G}(F)^0=\coprod_{w\in W}B_FwB_F$, est un sous-groupe distingué de $\mathbf{G}(F)$ et, notant $N_F{}^0=N_F\cap\mathbf{G}(F)^0$, le triplet $(\mathbf{G}(F)^0,B_F,N_F{}^0)$ est un *système de Tits* avec pour groupe quotient

$$N_F{}^0/(B_F\cap N_F{}^0)\cong W.$$

On appelle W (resp. W^a) le *groupe de Weyl* (resp. le *groupe de Weyl généralisé*) du triplet $(\mathbf{G}(F),B_F,N_F)$.

Le groupe de Weyl W est naturellement doté d'une *fonction longueur* ℓ: $W\to\mathbb{N}$. En effet, tout élément $w\in(W-\{1\})$ peut s'écrire sous la forme

$$w=s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_r}\quad(1\le i_k\le N)$$

avec r minimal. On note $\ell(w)$ cet r minimal et l'on pose $\ell(1)=0$. Tout élément $w'\in W^a$ s'écrivant de manière unique sous la forme

$$w'=t^dw$$

pour un entier d et un élément w de W (cf. la décomposition 1.3.(5)), on étend cette fonction longueur au groupe de Weyl généralisé en posant $\ell(w')=\ell(w)$.

Le lemme suivant est démontré par N. Iwahori & H. Matsumoto ([Iw-Ma] prop. 1.10 et prop. 3.2).

Lemme 1.3.1. — *Pour tout élément* $w\in W^a$ *on a*

$$[B_F:B_F\cap\mathrm{Ad}w(B_F)]=[\mathcal{B}_F:\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Ad}w(\mathcal{B}_F)]=q^{\ell(w)}$$

où $q=[\mathcal{O}_F:\mathcal{P}_F]$ *est le cardinal du corps résiduel de* F.

□

Pour la clarté de l'exposé (et parcequ'elle nous sera utile dans les chapitres suivant), on donne une description relativement explicite, donc assez lourde, de l'action par conjugaison du groupe de Weyl généralisé W^a sur $\mathbf{M}_N(F)$.

L'action de l'élément t est donnée par les relations

$$\begin{cases}(\mathrm{Ad}t(g))_{i,j}=g_{i+1,j+1},\ i\in\{1,\dots,N-1\},j\in\{1,\dots,N-1\}\\(\mathrm{Ad}t(g))_{N,N}=g_{1,1}\\(\mathrm{Ad}t(g))_{i,N}=\varpi_F{}^{-1}g_{i,1},\ i\in\{1,\dots,N-1\}\\(\mathrm{Ad}t(g))_{N,j}=\varpi_Fg_{1,j},\ i\in\{1,\dots,N-1\}\end{cases}$$

pour tout élément $g=(g_{i,j})_{1\le i,j\le N}\in\mathbf{M}_N(F)$. En particulier

$$\mathrm{Ad}t(\mathcal{B}_F)=\mathcal{B}_F.$$

Si $c\in\{1,...,N-1\}$, l'action de l'involution s_c est donnée par les relations

$$\begin{cases}(\mathrm{Ad}s_c(g))_{i,j}=g_{i,j} \text{ si } i\notin\{c,c+1\} \text{ et } j\notin\{c,c+1\}\\ (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c,j}=g_{c+1,j} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c+1,j}=g_{c,j} \text{ si } j\notin\{c,c+1\}\\ (\mathrm{Ad}s_c(g))_{i,c}=g_{i,c+1} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_c(g))_{i,c+1}=g_{i,c} \text{ si } i\notin\{c,c+1\}\\ (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c,c}=g_{c+1,c+1} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c+1,c+1}=g_{c,c}\\ (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c,c+1}=g_{c+1,c} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_c(g))_{c+1,c}=g_{c,c+1}\end{cases}$$

pour tout élément $g=(g_{i,j})_{1\le i,j\le N}\in\mathbf{M}_N(F)$. Pour chaque couple d'entiers (i,j) tel que $1\le i<j\le N$, on définit l'entier $a_{i,j}(s_c)\in\{0,1\}$ par $a_{i,j}(s_c)=0$ si $(i,j)\neq(c,c+1)$ et $a_{c,c+1}(s_c)=1$. Alors

$$\mathrm{Ad}s_c(\mathcal{B}_F)=\left\{g=(g_{i,j})\in\mathbf{M}_N(F),\ \begin{array}{l} g_{i,j}\in\mathcal{P}_F^{a_{i,j}(s_c)} \text{ si } i<j\\ g_{i,i}\in\mathcal{O}_F\\ g_{j,i}\in\mathcal{P}_F^{1-a_{i,j}(s_c)} \text{ si } i<j\end{array}\right\}.$$

Pour $c=N$, l'action de l'involution s_N est donnée par les relations

$$\begin{cases}(\mathrm{Ad}s_N(g))_{i,j}=g_{i,j} \text{ si } i\notin\{1,N\} \text{ et } j\notin\{1,N\}\\ (\mathrm{Ad}s_N(g))_{1,j}=\varpi_F^{-1}g_{N,j} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_N(g))_{N,j}=\varpi_F g_{1,j} \text{ si } j\notin\{1,N\}\\ (\mathrm{Ad}s_N(g))_{i,N}=\varpi_F^{-1}g_{i,1} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_N(g))_{i,1}=\varpi_F g_{i,N} \text{ si } i\notin\{N,1\}\\ (\mathrm{Ad}s_N(g))_{1,1}=g_{N,N} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_N(g))_{N,N}=g_{1,1}\\ (\mathrm{Ad}s_N(g))_{1,N}=\varpi_F^{-2}g_{N,1} \text{ et } (\mathrm{Ad}s_N(g))_{N,1}=\varpi_F^{2}g_{1,N}\end{cases}$$

pour tout élément $g=(g_{i,j})_{1\le i,j\le N}\in\mathbf{M}_N(F)$. Pour chaque couple d'entier (i,j) tel que $1\le i<j\le N$, on définit l'entier $a_{i,j}(s_N)\in\{-1,0\}$ par $a_{i,j}(s_N)=0$ si $(i,j)\neq(1,N)$ et $a_{1,N}(s_N)=-1$. Alors,

$$\mathrm{Ad}s_N(\mathcal{B}_F)=\left\{g=(g_{i,j})\in\mathbf{M}_N(F),\ \begin{array}{l} g_{i,j}\in\mathcal{P}_F^{a_{i,j}(s_N)} \text{ si } i<j\\ g_{i,i}\in\mathcal{O}_F\\ g_{j,i}\in\mathcal{P}_F^{1-a_{i,j}(s_N)} \text{ si } i<j\end{array}\right\}.$$

Par induction croissante sur la longueur $\ell(w)$ des élément $w\in W$ et grâce à la description de l'action des générateurs s_i ($i\in\{1,...,N\}$) du groupe de Weyl W donnée ci-dessus, pour chaque couple d'entiers (i,j) tel que $1\le i<j\le N$, on déduit l'existence (et l'unicité) d'une application

$$a_{i,j}:W\to\mathbb{Z}$$

telle que

$$\mathrm{Ad}w(\mathcal{B}_F)=\left\{g=(g_{i,j})_{1\le i,j\le N},\ \begin{array}{l} g_{i,j}\in\mathcal{P}_F^{a_{i,j}(w)} \text{ si } i<j\\ g_{i,i}\in\mathcal{O}_F\\ g_{j,i}\in\mathcal{P}_F^{1-a_{i,j}(w)} \text{ si } i<j\end{array}\right\}$$

pour tout élément $w\in W$. Compte-tenu de la décomposition 1.3.(5) et puisque l'élément t normalise l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{B}_F$ de $\mathbf{M}_N(F)$, on étend naturellement ces applications $a_{i,j}$ au groupe de weyl généralisé W^a en posant

$$a_{i,j}(wt^k)=a_{i,j}(w)\quad (1\le i<j\le N)$$

pour tout élément $w\in W$ et tout $k\in\mathbb{Z}$. Par ailleurs, la décomposition 1.3.(4) assurant que les coefficients diagonaux d'un éléments $Adw(g)\in \mathbf{M}_N(F)$ ($g\in\mathbf{M}_N(F)$, $w\in W^a$) sont, modulo permutation, les mêmes que ceux de g, on a clairement les relations

$$Adw(B_F)=\left\{\begin{array}{ll} g=(g_{i,j})\in\mathbf{G}(F), & g_{i,j}\in\mathcal{P}_F^{a_{i,j}(w)} \text{ si } i<j \\ & g_{i,i}\in\mathcal{O}_F^\times \\ & g_{j,i}\in\mathcal{P}_F^{1-a_{i,j}(w)} \text{ si } i<j \end{array}\right\}$$

et

$$Adw(B_F{}^n)=\left\{\begin{array}{ll} g=(g_{i,j})\in\mathbf{G}(F), & g_{i,j}\in\mathcal{P}_F^{a_{i,j}(w)+n} \text{ si } i<j \\ & g_{i,i}\in 1+\mathcal{P}_F^n \\ & g_{j,i}\in\mathcal{P}_F^{1-a_{i,j}(w)+n} \text{ si } i<j \end{array}\right\}$$

pour tout élément $w\in W^a$.

Précisons encore un peu cette description. Pour chaque $w\in W^a$ on note $k(w)$ l'unique entier tel que $w=w_1t^{k(w)}$ pour un élément (unique lui aussi) $w_1\in W$ (cf. la décomposition 1.3.(5)) et $m(w)$ l'entier défini par $m(w)=\max(\ell(w),|k(w)|)$. Alors, par induction croissante sur l'entier $m(w)$ et grâce à la description de l'action des générateurs du groupe W^a donnée ci-dessus, on déduit, pour chaque élément $w\in W^a$ et chaque couple d'entiers (i,j) tel que $1\le i,j\le N$, l'existence (et l'unicité) d'un couple d'entiers $(c,d)=(c_{i,j}(w),d_{i,j}(w))$, $1\le c,d\le N$, tel que

$$(Adw(g))_{i,j}=\varpi_F^{\alpha_{i,j}(w)}g_{c,d}$$

pour tout élément $g=(g_{i,j})_{1\le i,j\le N}\in\mathbf{M}_N(F)$, l'élément $\alpha_{i,j}(w)$ étant défini par

$$\alpha_{i,j}(w)=\begin{cases} a_{i,j}(w) & \text{si } 1\le i<j\le N \text{ et } 1\le c<d\le N \\ a_{i,j}(w)-1 & \text{si } 1\le i<j\le N \text{ et } 1\le d<c\le N \\ 0 & \text{si } i=j \\ 1-a_{j,i}(w) & \text{si } 1\le j<i\le N \text{ et } 1\le c<d\le N \\ -a_{j,i}(w) & \text{si } 1\le j<i\le N \text{ et } 1\le d<c\le N \end{cases}$$

Ainsi, notant σ la matice de permutation définie par $\sigma=s_{N-1}\dots s_1$, on a la relation

$$(c_{i,j}(t),d_{i,j}(t))=(c_{i,j}(\sigma),d_{i,j}(\sigma))$$

pour chaque couple $(i,j)\in\{1,\dots N\}\times\{1,\dots N\}$, donc la relation (cf. la formule 1.3.(3))

$$(c_{i,j}(s_N),d_{i,j}(s_N))=(c_{i,j}(Ad\sigma(s_1)),d_{i,j}(Ad\sigma(s_1)))$$

pour chaque couple d'entiers (i,j) tel que $1\le i,j\le N$. En définitive, l'action par conjugaison du groupe de Weyl généralisé $W^a(=W^a(\varpi_F))$ sur un élément $g\in\mathbf{M}_N(F)$ est, modulo multiplication des coefficients de g par une puissance entière de l'uniformisante ϖ_F, une action de permutation. Sans nécessairement la rappeler explicitement, nous utiliserons assez fréquemment cette propriété dans ce chapitre et dans les chapitres suivants.

Le lemme suivant découle alors directement du lemme 1.3.1 (précisément de l'égalité

$$[\mathcal{B}_F:\mathcal{B}_F\cap Adw(\mathcal{B}_F)]=q^{\ell(w)}$$

pour tout élément $w \in W^a$).

Lemme 1.3.2. — *Pour tout élément* $w \in W^a$ *on a*

$$\ell(w) = \sum_{1 \le i < j \le N} |a_{i,j}(w)|.$$

□

Corollaire 1.3.3. — *Pour tout élément* $w \in W^a$ *on a*

$$\left[B_F{}^n : B_F{}^n \cap \mathrm{Ad}w\left(B_F{}^n\right)\right] = q^{\ell(w)}.$$

Démonstration.

Le groupe $B_F{}^n$ étant normalisé par t, la décomposition 1.3.(5) ramène la démonstration du corollaire 1.3.3 au cas où w appartient au groupe de Weyl W.

Il s'agit de montrer que l'indice du groupe $B_F{}^n \cap \mathrm{Ad}w(B_F{}^n)$ dans le groupe $B_F{}^n$ est égal à l'indice du groupe $\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}w(\mathcal{B}_F)$ dans le groupe $\mathcal{B}_F$.

Il est clair, compte tenu de la description donnée plus haut de l'action par conjugaison sur $M_N(F)$ des éléments du groupe de Weyl W, que pour tout élément $\tau \in W$ et tout $i \in \{1,\dots,N\}$, il existe un unique couple d'entiers (r,k), $1 \le r < k \le N$, tel que $a_{r,k}(\tau s_i) \ne a_{r,k}(\tau)$. De plus, cet unique couple satisfait l'égalité

$$|a_{r,k}(\tau s_i) - a_{r,k}(\tau)| = 1.$$

On en déduit que si $\sigma = \tau\, s_i$ ($1 \le i \le N$) est un élément de W tel que $\ell(\sigma) = \ell(\tau) + 1$, alors le groupe $\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\sigma(\mathcal{B}_F)$ est contenu dans le groupe $\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\tau(\mathcal{B}_F)$. En effet, si (r,k) ($1 \le r < k \le N$) est l'unique couple d'entiers tel que $a_{r,k}(\sigma) \ne a_{r,k}(\tau)$, le lemme 1.3.2 entraîne la relation

$$|a_{r,k}(\sigma)| = 1 + |a_{r,k}(\tau)|,$$

et l'on peut distinguer deux cas: ou bien $a_{r,k}(\sigma) > 0$, auquel cas $a_{r,k}(\tau) = a_{r,k}(\sigma) - 1$ et

$$\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\sigma(\mathcal{B}_F) = \left\{ g \in \left(\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\tau(\mathcal{B}_F)\right),\ g_{r,k} \in \mathcal{P}_F^{a_{r,k}(\sigma)} \right\};$$

ou bien, $a_{r,k}(\sigma) < 0$, auquel cas $a_{r,k}(\tau) = a_{r,k}(\sigma) + 1$ et

$$\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\sigma(\mathcal{B}_F) = \left\{ g \in \left(\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}\tau(\mathcal{B}_F)\right),\ g_{k,r} \in \mathcal{P}_F^{1-a_{r,k}(\sigma)} \right\}.$$

Soit w un élément de W de longueur $\ell(w) = r \ge 1$ et

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r}$$

une décomposition minimale de w. Pour chaque $k \in \{1,\dots, r\}$, soit w_k l'élément de W défini par

$$w_k = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_k}.$$

Alors, pour chaque $k \in \{1,\dots, r-1\}$, l'égalité $\ell(w_{k+1}) = \ell(w_k) + 1$ entraîne l'inclusion

$$\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}w_{k+1}(\mathcal{B}_F) \subset \mathcal{B}_F \cap \mathrm{Ad}w_k(\mathcal{B}_F),$$

et l'application $x \mapsto 1 + \varpi_F{}^n x$, $\mathcal{B}_F \to B_F{}^n$, induit, par restriction et passage au quotient, un isomorphisme de groupes

$$\left(\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F)\right)/\left(\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_{k+1}(\mathcal{B}_F)\right) \xrightarrow{\cong} \left(B_F{}^n \cap \mathrm{Adw}_k(B_F{}^n)\right)/\left(B_F{}^n \cap \mathrm{Adw}_{k+1}(B_F{}^n)\right).$$

En effet, pour tout couple $(x,y)\in(\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F))\times(\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F))$,

$$\left(1+\varpi_F{}^n x\right)\left(1+\varpi_F{}^n y\right)=1+\varpi_F{}^n(x+y)+\varpi_F{}^{2n}(xy)$$

avec $\varpi_F{}^n(xy)\in\varpi_F{}^n(\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F))\subset\varpi_F(\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F))\subset\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_{k+1}(\mathcal{B}_F)$.

D'où l'on déduit (avec la convention $w_0=1$),

$$\begin{aligned}\left[B_F{}^n : B_F{}^n \cap \mathrm{Adw}(B_F{}^n)\right] &= \prod_{k=0}^{r-1}\left[B_F{}^n \cap \mathrm{Adw}_k(B_F{}^n) : B_F{}^n \cap \mathrm{Adw}_{k+1}(B_F{}^n)\right]\\ &= \prod_{k=0}^{r-1}\left[\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F) : \mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_{k+1}(\mathcal{B}_F)\right]\end{aligned}$$

avec, pour chaque $k\in\{0,\dots, r-1\}$, l'égalité (cf. l'expression de $\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_{k+1}(\mathcal{B}_F)$ en fonction de $\mathcal{B}_F\cap\mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F)$ donnée plus haut)

$$\left[\mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_k(\mathcal{B}_F) : \mathcal{B}_F \cap \mathrm{Adw}_{k+1}(\mathcal{B}_F)\right]=q.$$

D'où le résultat.

□

1.4. Présentation de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ par générateurs et relations ([Howe]).

Soit $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$ la partie de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ formée par les éléments

$$\begin{cases} f_{s_i}\,,\ 1\le i\le N.\\ f_t\,,\ f_{t^{-1}}.\\ f_b\,,\ b\in B_F.\end{cases}$$

Théorème 1.4. ([Howe] chap 3, theorem 2.1) — *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ *est engendrée par la partie* $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$, *les éléments de* $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$ *étant soumis aux relations suivantes*:

Relations A:

(1) $f_{s_c}*f_{s_d}=f_{s_d}*f_{s_c}$ *si* $|c-d|(\mathrm{mod}\ N)>1$.

(1) $f_{s_c}*f_{s_{c+1}}*f_{s_c}=f_{s_{c+1}}*f_{s_c}*f_{s_{c+1}}$ *si* $0\le c\le N-1$ *et* $N\ge 3$.
(Il n'y a pas de relation si N=2*).*

(3) $f_{s_c}*f_{s_c}=q\sum_x f_x$, $x\in\left(\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n)\right).B_F{}^n/B_F{}^n$, *si* $1\le c\le N-1$.

Relation B:

$f_t*f_x*f_{t^{-1}}=f_{\mathrm{Adt}(x)}$ *pour* $x=s_c$ $(1\le c\le N)$ *ou* $x\in B_F$.

Relations C:

(1) $f_b=f_1$ *pour tout* $b\in B_F{}^n$ *et* f_1 *est l'élément unité de l'algèbre* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$.

(2) $f_x*f_y=f_{xy}$ *pour tout couple* $(x,y)\in B_F\times B_F$.

(3) $f_{s_c}*f_x=f_{\mathrm{Ads}_c(x)}*f_{s_c}$ *pour tout* $1\le c\le N$ *et tout* $x\in B_F\cap\mathrm{Ads}_c(B_F)$.

(4) *Pour tout* $x\in\mathcal{O}_F$ *et tout* $1\leq c\leq N-1$, *soit* $u_c(x)$ *l'élément de* B_F *défini par*

$$u_c(x)=1+xe_{c,c+1}(F).$$

Pour tout $x\in\mathcal{O}_F^\times$ *et tout* $1\leq c\leq N-1$, *soit* $v_c(x)$ *l'élément de* B_F *défini par*

$$v_c(x)=1+(x-1)e_{c,c}(F)-(x^{-1}+1)e_{c+1,c+1}(F).$$

Avec ces notations

$$f_{s_c}*f_{u_c(x)}*f_{s_c}=q\left(f_{u_c(x^{-1})}*f_{s_c}*f_{v_c(x)}*f_{u_c(x^{-1})}\right) \textit{pour tout } 1\leq c\leq N-1 \textit{ et tout } x\in\mathcal{O}_F^\times.$$

De plus, la partie $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$ *et les relations* A,B,C *définissent une présentation de l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$.

□

Signalons que nous avons, dans l'énoncé ci-dessus, légèrement modifié deux relations du théorème 2.1 de R. Howe: dans la relation C(1), il manque au texte de R. Howe la relation (indispensable) $f_b=f_1$ pour tout $b\in B_F^n$; dans la relation C(4), nous avons remplacé la condition $1\leq c\leq N$ par celle $1\leq c\leq N-1$, la relation correspondante pour $c=N$ se déduisant des précédentes grâce à la relation (relation B pour $x=s_1$)

$$f_t*f_{s_1}*f_{t^{-1}}=f_{s_N}.$$

Quelques commentaires sur l'obtention (ou la vérification) des relations A,B,C du théorème 1.4:

— En notant que le groupe $B_F\ltimes\langle t\rangle$ est exactement le normalisateur du groupe B_F^n dans $\mathbf{G}(F)$, les relations B, C(1),C(2) et C(3) découlent directement de la proposition 1.2.1.

— Les relations A(1) et A(2) traduisent, via la proposition 1.2.1 et le corollaire 1.3.3, les relations 1.3.(1) et 1.3.(2) dans le groupe de Weyl généralisé W^a.

— Les relations A(3) et C(4) s'obtiennent de manière un peu moins directe. Pour chacune d'elle, on détermine à la main le support K_ϕ de la fonction ϕ située à gauche de l'égalité. C'est une union finie de doubles classes du type $B_F^r g B_F^r$ et ϕ est combinaison linéaire des fonctions caractéristiques de ces doubles classes, chacune affectée d'un coefficient non nul. Il suffit alors de vérifier que ϕ est en fait K_ϕ-biinvariante donc multiple de la fonction caractéristique de K_ϕ. Le calcul de ϕ en un point quelconque de K_ϕ donne la valeur du multiple en question (cf. [Howe] chap. 3, n° 2).

La décomposition de Bruhat-Tits (n° 1.3 propriété (i) du triplet $(\mathbf{G}(F),B_F,N_F)$) nous assure que la partie $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$ engendre l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$. En effet, si w et w' sont deux éléments de W^a tels que $\ell(ww')=\ell(w)+\ell(w')$, alors la proposition 1.2.1 et le corollaire 1.3.3 entraînent l'égalité $f_{ww'}=f_w*f_{w'}$. Les éléments s_c $(1\leq c\leq N)$ et t engendrant W^a, toute fonction f_w $(w\in W^a)$ est produit dans $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ des fonctions f_x $(x=s_c$, t ou $t^{-1})$.

Il reste à montrer que les relations A,B,C définissent bien l'algèbre $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$. On donne le schéma de la démonstration de R. Howe: soit $\mathcal{A}$ l'algèbre libre engendrée par les éléments de $\mathcal{G}(\varpi_F,n)$ sujets aux relations A,B,C. Pour éviter les confusions, notons $\diamond$ la loi de multiplication dans l'algèbre $\mathcal{A}$. Comme les relations A,B,C sont satisfaites dans $\mathcal{A}$, on a un morphisme surjectif d'algèbres

$$\zeta:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n).$$

Pour montrer l'injectivité de ζ, on construit une section linéaire

$$\delta : \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), B_F{}^n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

définie de manière suivante: si w est un élément de longueur r de W^a et si

$$w = t^d s_{c_1} s_{c_2} \ldots s_{c_r} \quad (1 \le c_j \le N,\ d \in \mathbb{Z})$$

est une décomposition minimale de w, soit ϕ_w l'élément de $\mathcal{A}$ défini par

$$\phi_w = \left(f_{t^{\varepsilon(d)}}\right)^{\varepsilon(d)d} \diamond f_{s_{c_1}} \diamond f_{s_{c_2}} \diamond \cdots \diamond f_{s_{c_r}}$$

$$\left(|d| = \varepsilon(d)d\,,\ \left(f_{t^{\varepsilon(d)}}\right)^{\varepsilon(d)d} = \underbrace{f_{t^{\varepsilon(d)}} \diamond \cdots \diamond f_{t^{\varepsilon(d)}}}_{|d|\ \text{fois}} \right).$$

Les relations A(1) et A(2) montrent que ϕ_w ne dépend pas de la décomposition minimale de w choisie. Si g est un élément de $\mathbf{G}(F)$, il existe un unique élément w de W^a et des éléments b,b' de B_F tels que g=bwb'. Soit alors ϕ_g l'élément de $\mathcal{A}$ défini par

$$\phi_g = \phi_b * \phi_w * \phi_{b'}.$$

Les relations C(1) et C(2) montrent que ϕ_g ne dépend que de la double classe $B_F{}^n g B_F{}^n$. Soit δ la section linéaire de ζ définie par

$$\delta(f_g) = \phi_g$$

pour tout $g \in \mathbf{G}(F)$. On conclut en montrant, toujours grâce aux relations A,B,C du théorème 1.4, que l'image $\delta(\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n))$ de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ par δ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$ stable par multiplication (disons à gauche) par les générateurs de $\mathcal{A}$, donc coïncide avec $\mathcal{A}$. L'injectivité de ζ en découle.

2. Isomorphismes d'algèbres de Hecke.

2.1. Soit n un entier ≥ 1 et soient F et L deux corps locaux n-proches à corps résiduel de cardinal q. Soit un triplet $(\lambda, \varpi_F, \varpi_L)$ où

$$\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^n \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^n$$

est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_L) une uniformisante de F (resp. L) satisfaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F + \mathcal{P}_F{}^n) = \varpi_L + \mathcal{P}_L{}^n$.

Soit

$$\lambda_{+1} : \mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F{}^{n+1} \xrightarrow{\ \cong\ } \mathcal{P}_L/\mathcal{P}_L{}^{n+1}$$

l'isomorphisme de groupes additifs défini par

$$\lambda_{+1}\left(x + \mathcal{P}_F{}^{n+1}\right) = \varpi_L\left(\lambda\left(\varpi_F{}^{-1}x + \mathcal{P}_F{}^n\right)\right)$$

pour tout $x \in \mathcal{P}_F$. Soit δ: $B_F \to B_L/B_L{}^n$ l'application définie par l'égalité $\delta(b) = b' + B_L{}^n$ pour tout élément $b = (b_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in B_F$ et tout élément $b' = (b'_{i,j})_{1 \le i,j \le N} \in B_L$ tel que

$$\begin{cases} b'_{i,j} + \mathcal{P}_L{}^n = \lambda\left(b_{i,j} + \mathcal{P}_F{}^n\right) \text{ si } 1 \le i \le j \le N \\ b'_{i,j} + \mathcal{P}_L{}^{n+1} = \lambda_{+1}\left(b_{i,j} + \mathcal{P}_L{}^{n+1}\right) \text{ si } 1 \le j < i \le N \end{cases}.$$

Comme l'isomorphisme de groupes additifs λ_{+1} induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$-modules pour la structure de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$-module sur le groupe $\mathcal{P}_L/\mathcal{P}_L^{n+1}$ donnée par

$$\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n \times \mathcal{P}_L/\mathcal{P}_L^{n+1} \to \mathcal{P}_L/\mathcal{P}_L^{n+1},\ \left(x+\mathcal{P}_F^n, y+\mathcal{P}_L^{n+1}\right) \mapsto \lambda\left(x+\mathcal{P}_F^n\right).\left(y+\mathcal{P}_L^{n+1}\right),$$

l'application $\delta : B_F \to B_L/B_L^n$ ci-dessus se factorise en un isomorphisme de groupes

$$\beta : B_F/B_F^n \xrightarrow{\cong} B_L/B_L^n .$$

Soit

$$\gamma : W^*(\varpi_F) \xrightarrow{\cong} W^*(\varpi_L)$$

l'isomorphisme de groupes défini par

$$\begin{cases} \gamma(s_i(F)) = s_i(L) & (1 \leq i \leq N-1) \\ \gamma\left(s_N(\varpi_F)\right) = \gamma\left(s_N(\varpi_L)\right) \\ \gamma\left(t(\varpi_F)\right) = \gamma\left(t(\varpi_L)\right) \end{cases} .$$

Pour tout élément $g \in \mathbf{G}(F)$, soit $f_g \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), B_F^n)$ la fonction définie par

$$f_g = \mathrm{vol}\left(B_F^n, dg_F\right)^{-1} \mathbf{1}_{B_F^n g B_F^n},$$

et pour tout élément $g' \in \mathbf{G}(L)$, soit $\phi_{g'} \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(L), B_F^n)$ la fonction définie par

$$\phi_{g'} = \mathrm{vol}\left(B_L^n, dg_L\right)^{-1} \mathbf{1}_{B_L^n g' B_L^n} .$$

Soit

$$\zeta : \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F), B_F^n\right) \longrightarrow \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L), B_L^n\right)$$

l'isomorphisme d'espaces vectoriels donné par son action (induite par β et γ) sur les éléments f_g ($g \in \mathbf{G}(F)$), laquelle est définie de manière suivante. Si g appartient à $\mathbf{G}(F)$, il existe un unique élément $w \in W^*(\varpi_F)$ et un couple (non nécessairement unique) $(b,c) \in B_F \times B_F$ tels que g se décompose en $g = bwc$ (décomposition de Bruhat-Tits, cf. le numéro 1.3). On pose $\zeta(f_g) = \phi_{g'}$ où $g' = b'\gamma(w)c'$, le couple $(b',c') \in B_L \times B_L$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} \beta\left(b + B_F^n\right) = b' + B_L^n \\ \beta\left(c + B_F^n\right) = c' + B_L^n \end{cases} .$$

Les fonctions f_g et $\phi_{g'}$ ne dépendant que des doubles classes $B_F^n g B_F^n$ et $B_L^n g' B_L^n$ respectivement (cf. les relations C(1) et C(2) du théorème 1.4), l'application ζ est bien définie et ne dépend que du triplet $(\lambda, \varpi_F, \varpi_L)$.

La proposition suivante est le résultat central de ce chapitre.

Proposition 2.1.1. — *L'application $\zeta = \zeta(\lambda, \varpi_F, \varpi_L)$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres (et même d'anneaux)*

$$\zeta : \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F), B_F^n\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L), B_L^n\right).$$

Démonstration.

L'application ζ induisant, par restriction, une bijection de la partie $\mathcal{g}(\varpi_F,n)\subset\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ sur la partie $\mathcal{g}(\varpi_L,n)\subset\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n)$, il suffit de vérifier qu'elle préserve les relations A,B,C du théorème 1.4.

Relation A(1)

Pour tout couple d'entiers (c,d) tel que $1\leq c,d\leq N$ et $|c-d|>1(\mathrm{mod}N)$, on a (par définition de l'application ζ)

$$\begin{aligned}\zeta\left(f_{s_c(F)}\right)*\zeta\left(f_{s_d(F)}\right) &= \phi_{s_c(L)}*\phi_{s_d(L)}\\ &= \phi_{s_d(L)}*\phi_{s_c(L)}\\ &= \zeta\left(f_{s_d(F)}\right)*\zeta\left(f_{s_c(F)}\right).\end{aligned}$$

Relation A(2)

Idem.

Relation A(3)

Pour tout couple d'entiers (c,d) tel que $1\leq c,d\leq N$ et $c\neq d$, et tout élément $x\in F$ (resp. $x'\in L$), soit $u_{c,d}(x)\in\mathbf{G}(F)$ (resp. $u_{c,d}(x')\in\mathbf{G}(L)$) l'élément défini par

$$u_{c,d}(x)=1+xe_{c,d}(F)\quad\left(\text{resp. } u_{c,d}(x')=1+x'\,e_{c,d}(x')\right).$$

Pour tout entier $1\leq c\leq N-1$, on a la décomposition

$$\mathrm{Ads}_c(F)\left(B_F{}^n\right).B_F{}^n=\coprod_\eta u_{c+1,c}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)B_F{}^n,$$

η parcourant une famille de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$. Comme l'entier n est ≥ 1, $\mathrm{Ads}_c(F)(B_F{}^n)\subset B_F$ et

$$\begin{aligned}\beta\left(\mathrm{Ads}_c(F)\left(B_F{}^n\right).B_F{}^n\right) &= \coprod_\eta \beta\left(u_{c+1,c}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)B_F{}^n\right)\\ &= \coprod_\mu u_{c+1,c}\left(\varpi_L{}^n\mu\right)B_L{}^n\\ &= \mathrm{Ads}_c(L)\left(B_L{}^n\right).B_L{}^n,\end{aligned}$$

μ parcourant une famille de représentants dans $\mathcal{O}_L$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$. D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\zeta\left(f_{s_c(F)}\right)*\zeta\left(f_{s_c(F)}\right) &= \phi_{s_c(L)}*\phi_{s_c(L)}\\ &= q\sum_\mu \phi_{u_{c+1,c}\left(\varpi_L{}^n\mu\right)}\\ &= q\sum_\eta \zeta\left(f_{u_{c+1,c}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)}\right).\end{aligned}$$

Relation B

Pour tout $x\in B_F\cup\{s_1,s_2,\ldots,s_N\}$, on a

$$\begin{aligned}\zeta\left(f_{t(\varpi_F)}\right)*\zeta\left(f_x\right)*\zeta\left(f_{t(\varpi_F)}\right) &= \phi_{t(\varpi_L)}*\phi_{x'}*\phi_{t(\varpi_L)^{-1}}\\ &= \phi_{\mathrm{Ad}\,t(\varpi_L)(x')}\\ &= \zeta\left(f_{\mathrm{Ad}\,t(\varpi_F)(x)}\right)\end{aligned}$$

où l'élément $x'\in G(L)$ est défini comme suit.

Si $x=s_c(F)$ $(1\leq c\leq N-1)$, alors $x'=s_c(L)$.

Si $x=s_N(\varpi_F)$, alors $x'=s_N(\varpi_L)$.

Si $x\in B_F$, alors x' est un quelconque représentant dans B_L de la classe $\beta(x+B_F{}^n)\in B_L/B_L{}^n$ (et donc $\beta(\mathrm{Adt}(\varpi_F)(x)+B_F{}^n)=\mathrm{Adt}(\varpi_L)(x')$).

Relation C(1)

Par définition de ζ.

Relation C(2)

Idem en remarquant que $\beta(xy+B_F{}^n)=\beta(x+B_F{}^n)\beta(y+B_F{}^n)$ pour tout couple $(x,y)\in B_F\times B_F$.

Relation C(3)

Idem en remarquant que pour tout entier $1\leq c\leq N-1$ et tout élément $x\in(B_F\cap \mathrm{Ads}_c(F)(B_F))$, $\beta(\mathrm{Ads}_c(F)(x)+B_F{}^n)=\mathrm{Ads}_c(L)(x')+B_L{}^n$ pour tout élément $x'\in B_F$ tel que $\beta(x+B_F{}^n)=x'+B_L{}^n$.

Relation C(4)

Pour tout entier $1\leq c\leq N-1$ et tout élément $x\in \mathcal{O}_F{}^\times$, on a

$$\begin{aligned}\zeta(f_{s_c(F)})*\zeta(f_{u_c(x)})*\zeta(f_{s_c(F)}) &= \phi_{s_c(L)}*\phi_{u_c(y)}*\phi_{s_c(L)}\\ &= q\left(\phi_{u_c(y^{-1})}*\phi_{s_c(L)}*\phi_{v_c(y)}*\phi_{u_c(y^{-1})}\right)\\ &= q\left(\zeta\left(f_{u_c(x^{-1})}\right)*\zeta(f_{s_c(F)})*\zeta(f_{v_c(x)})*\zeta\left(f_{u_c(x^{-1})}\right)\right)\end{aligned}$$

où y est un quelconque représentant dans $\mathcal{O}_L{}^\times$ de la classe $\lambda(x+\mathcal{P}_F{}^n)$ de $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^n$.

□

Si $(\pi,G(F),V)$ est une représentation lisse, on note V^n le sous-espace de V formé par les vecteurs fixes sous l'action de $B_F{}^n$ et $(\pi^n,\mathcal{H}(G(F),B_F{}^n),V^n)$ le $\mathcal{H}(G(F),B_F{}^n)$-module V^n induit par $(\pi,G(F),V)$. Rappelons (cf. [Be-Ze] prop. 2.10) que l'application $\pi\mapsto\pi^n$ induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles $(\pi,G(F),V)$ telles que $V^n\neq 0$ sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}(G(F),B_F{}^n)$-modules simples de dimension finie (et même, comme on le montrera plus loin (cf. le chapitre 2, n° 1) une équivalence de catégories entre la catégories des représentations lisses $(\pi,G(F),V)$ engendrées par V^n et la catégories des $\mathcal{H}(G(F),B_F{}^n)$-modules).

Corollaire 2.1.2. — *L'application*

$$(\pi,G(F),V)\mapsto\left(\pi^n\circ\zeta^{-1},\mathcal{H}(G(L),B_L{}^n),V^n\right)$$

induit une bijection entre les classes de représentations admissibles irréductibles $(\pi,G(F),V)$ *telles que* $V^n\neq 0$ *et les classes de représentations admissibles irréductibles* $(\rho,G(L),W)$ *telles que* $W^n\neq 0$.

□

En accord avec la philosophie de R.P. Langlands, P. Deligne a montré le même phénomène pour les représentations linéaires (complexes continues) de dimension finie du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F_s/F)$, F_s désignant une clôture séparable de F ([Deli]). Soit $\mathcal{E}(F)$ la catégorie des extensions finies séparables de F et, pour chaque entier $n\geq 1$, soit $\mathcal{E}_n(F)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}(F)$ des extensions F'/F ayant un n-ième groupe de ramification en notation supérieure $\mathrm{Gal}(F'/F)^n$ trivial (cf. [Deli] (appendice) pour la généralisation de la théorie de la ramification et des fonctions de Herbrand aux extensions finies séparables non galoisiennes). P. Deligne introduit les triplets (R,M,ε) formés d'un anneau de valuation tronqué à corps résiduel parfait R, d'un R-module libre de rang un M et d'un épimorphisme ε de M sur l'idéal maximal de R. Via l'organisation de ces triplets en une catégorie, il montre que le triplet

$$\mathrm{Tr}_n(F)=\left(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n},\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n+1},\varepsilon_{F,n}\right)$$

où $\varepsilon_{F,n}:\mathcal{P}_F/\mathcal{P}_F^{\,n+1}\to\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n}$ est le morphisme de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n}$-modules induit par l'inclusion $\mathcal{P}_F\to\mathcal{O}_F$ par passage au quotient, permet de reconstituer la catégorie $\mathcal{E}_n(F)$ à équivalence unique à isomorphisme (du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$) unique près. Son résultat est valable pour tout corps valué complet pour une valuation discrète et à corps résiduel parfait (tout triplet (R,M,ε) est du reste isomorphe à un $\mathrm{Tr}_e(E)$ pour un entier $e\geq 1$ et un tel corps E, cf. [Deli] n° 1.2). Noter que la classe d'isomorphisme d'un triplet (R,M,ε) est déterminée par celle de l'anneau R, mais le triplet (R,M,ε) n'est pas déterminé à isomorphisme unique prés par R, il admet des automorphismes non triviaux mais triviaux sur $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n}$ (P. Deligne illustre cette subtilité par l'exemple suivant: si $F=\mathbb{F}_p((X))$, on ne sait pas reconstituer la catégorie $\mathcal{E}_1(F)$ des extensions modérément ramifiées de F rien qu'en terme du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$. En effet, l'automorphisme de F, $X\mapsto aX$, trivial sur $\mathbb{F}_p$, où $a\in\mathbb{F}_p^{\times}$ est une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité pour un entier $m>1$ et premier à p, aurait sinon un prolongement naturel en un automorphisme d'ordre m de l'extension séparable $F'=\mathbb{F}_p((X^{1/m}))$ de F, ce qui est impossible). Fixons une clôture séparable F_s de F. Alors la catégorie $\mathcal{E}_n(F)$ détermine le groupe profini $Q^n(\mathrm{Gal}(F_s/F))=\mathrm{Gal}(F_s/F)/\mathrm{Gal}(F_s/F)^n$ à automorphisme intérieur prés ([Deli] 3.5). Le groupe $Q^n(\mathrm{Gal}(F_s/F))$ ne dépend donc, à automorphisme intérieur près, que du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$, ce que pouvait déjà suggérer l'isomorphisme canonique de l'abélianisé de $Q^n(\mathrm{Gal}(F_s/F)$ avec le complété profini du groupe multiplicatif $F^{\times}/(1+\mathcal{P}_F^{\,n})$ fourni par la théorie du corps de classe.

On peut traduire ces résultats sur nos isomorphismes d'algèbres de Hecke. Comme on l'a dit plus haut, la classe d'isomorphisme d'un triplet $T=(R,M,\varepsilon)$ ne dépend que de celle de l'anneau R. Précisément, si $T'=(R',M',\varepsilon')$ est un autre triplet, tout isomorphisme $\iota: R\to R'$ se relève en un isomorphisme $\eta=(\iota,\iota_{+1}) : T\to T'$. Si ω est un générateur de M, relever ι en η revient à relever le générateur $\iota\circ\varepsilon(\omega)$ de l'idéal maximal de R' en un générateur ω' de M'. Définissant alors $\iota_{+1}:M\to M'$ par $\iota_{+1}(x\omega)=\omega'\iota(x)$ $(x\in R)$, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\iota_{+1}} & M' \\ \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon'} \\ R & \xrightarrow{\iota} & R' \end{array}$$

est bien un diagramme commutatif (cf. [Deli] n° 1.1). Comme pour la sous-catégorie $\mathcal{E}_n(F)$ de $\mathcal{E}(F)$ côté galoisien, on peut donc s'attendre côté automorphe à ce que la classe d'isomorphisme du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$ détermine celle de l'algèbre $\mathcal{H}(G(F),B_F^{\,n})$ à isomorphisme (de l'algèbre) unique à isomorphisme (du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$) unique près. Autrement dit, il s'agit de vérifier que l'isomorphisme $\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ de la proposition 2.1.1 ne dépend pas vraiment du triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ mais seulement du couple (λ,λ_{+1}) induit par le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$.

Proposition 2.1.2. — *Soient* F *et* L *deux corps locaux* n-*proches et soit* (λ,λ_{+1}) *un isomorphisme du triplet* $\mathrm{Tr}_n(F)$ *sur le triplet* $\mathrm{Tr}_n(L)$. *Soient* (ϖ_F,ϖ_L) *et* (ϖ_F',ϖ_L') *deux couples d'uniformisantes de* F *et* L *tels que* $\lambda_{+1}(\varpi_F\alpha)=\varpi_L\lambda(\alpha)$ *et* $\lambda_{+1}(\varpi_F'\alpha)=\varpi_L'\lambda(\alpha)$ *pour tout élément* $\alpha\in\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{\,n}$. *Alors*

$$\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)=\zeta(\lambda,\varpi_F',\varpi_L').$$

Démonstration.

On pose $\zeta=\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ et $\zeta'=\zeta(\lambda,\varpi_F',\varpi_L')$. Il est clair (cf. le numéro 2.1) que les triplets $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ et $(\lambda,\varpi_F',\varpi_L')$ induisent le même isomorphisme de groupes β : $B_F/B_F^n \to B_L/B_L^n$. Par conséquent,

$$\zeta(f_b)=\zeta'(f_b)$$

pour tout élément $b\in B_F$. Comme on a aussi

$$\zeta\left(f_{s_c(F)}\right)=\phi_{s_c(L)}=\zeta'\left(f_{s_c(F)}\right)$$

pour tout $c\in\{1,\dots,N-1\}$, on est ramené à montré les égalités

$$\zeta\left(f_{s_N(\varpi_F)}\right)=\zeta'\left(f_{s_N(\varpi_F)}\right) \text{ et } \zeta\left(f_{t(\varpi_F)}\right)=\zeta'\left(f_{t(\varpi_F)}\right).$$

Soient $u\in\mathcal{O}_F^\times$ tel que $\varpi_F'=u\varpi_F$ et $v\in\mathcal{O}_L^\times$ tel que $\varpi_L'=v\varpi_F$. Alors, $s_N(\varpi_F')=s_N(\varpi_F)\delta(u)$ avec $\delta(u)=\mathrm{diag}(u,1,\dots,1,u^{-1})$ et $s_N(\varpi_L')=s_N(\varpi_L)\delta(v)$ avec $\delta(v)=\mathrm{diag}(v,1,\dots,1,v^{-1})$. On a donc

$$\zeta'\left(f_{s_N(\varpi_F)}\right)=\zeta'\left(f_{s_N(\varpi_F')}*f_{\delta(u)^{-1}}\right)=\phi_{s_N(\varpi_L')}*\zeta'\left(f_{\delta(u)^{-1}}\right).$$

Or, les relations $\lambda_{+1}(u\varpi_F+\mathcal{P}_F^{n+1})=\varpi_L\lambda(u+\mathcal{P}_F^n)$ et $\lambda_{+1}(u\varpi_F+\mathcal{P}_F^{n+1})=v\varpi_L+\mathcal{P}_L^{n+1}$ entraînant l'égalité $\lambda(u+\mathcal{P}_F^n)=v+\mathcal{P}_L^n$, on a

$$\zeta'\left(f_{\delta(u)^{-1}}\right)=\phi_{\delta(v)^{-1}}$$

et donc

$$\zeta'\left(f_{s_N(\varpi_F)}\right)=\phi_{s_N(\varpi_L')}*\phi_{\delta(v)^{-1}}=\phi_{s_N(\varpi_L')\delta(v)^{-1}}=\phi_{s_N(\varpi_L)}.$$

En remarquant que $t(\varpi_F')=t(\varpi_F)\mathrm{diag}(u,1,\dots,1)$ et $t(\varpi_L')=t(\varpi_L)\mathrm{diag}(v,1,\dots,1)$, le même raisonnement entraîne l'égalité

$$\zeta\left(f_{t(\varpi_F)}\right)=\zeta'\left(f_{t(\varpi_F)}\right).$$

D'où la proposition 2.1.2.

□

Remarquer (cf. la subtilité évoquée plus haut côté galoisien) que si (λ,λ_{+1}) est un isomorphisme du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$ sur le triplet $\mathrm{Tr}_n(L)$, et si ϖ_L et ϖ_L' sont deux uniformisantes de L telles que $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F^n)=\varpi_L+\mathcal{P}_L^n$ et $\lambda_{+1}(\varpi_F+\mathcal{P}_F^{n+1})\neq\varpi_L+\mathcal{P}_L^{n+1}$ pour une uniformisante ϖ_F de F, alors l'élément $t(\varpi_L')$ n'appartient pas à la classe $t(\varpi_L)B_L^n$ de $B_L^n\backslash G(L)/B_L^n$, et la fonction caractéristique de la classe $t(\varpi_F)B_F^n$ de $B_F^n\backslash G(F)/B_F^n$ a une image différente pour les isomorphismes $\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ et $\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L')$.

Considérons deux corps locaux F et L n-proches et un isomorphisme η du triplet $\mathrm{Tr}_n(F)$ sur le triplet $\mathrm{Tr}_n(L)$. Fixons aussi une clôture séparable $\mathbf{F}_s$ de F et une clôture séparable $\mathbf{L}_s$ de L. Parmi les compatibilités montrées par P. Deligne, signalons que l'isomorphisme de groupes

$$\nu(\eta): Q^n\left(\mathrm{Gal}(\mathbf{F}_s/F)\right)\xrightarrow{\cong} Q^n\left(\mathrm{Gal}(\mathbf{L}_s/L)\right)$$

(bien défini à isomorphisme intérieur près) induit une bijection entre les classes d'équivalence de représentations (complexes, continues et de dimension finie) de $\mathrm{Gal}(F_s/F)$ triviales sur $\mathrm{Gal}(F_s/F)^n$ et les classes d'équivalence de représentations de $\mathrm{Gal}(L_s/L)$ triviales sur $\mathrm{Gal}(L_s/L)^n$, laquelle bijection préserve les facteurs L et ε. Dans le même ordre d'idées côté automorphe, on montre dans le chapitre 3 que l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres $\zeta(\eta)$ induit une bijection entre les classes d'équivalence de représentations (admissibles irréductibles) génériques de $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ telles que $V^n\neq 0$ et les classes d'équivalences représentations génériques $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ telles que $V'^n\neq 0$, laquelle bijection préserve le conducteur $m(\pi)$ des représentations π telles que $m(\pi)\leq n$. Nous n'avons pu, faute de temps (mais nous y reviendrons plus tard), pousser plus avant cette question; il semble qu'on puisse, en utilisant l'équation fonctionnelle de Godement-Jacquet, obtenir le même résultat pour les représentations non génériques. De même pour les facteurs L et ε de paires.

2.2. Si X est une partie ouverte compacte $B_F{}^n$-biinvariante de $\mathbf{G}(F)$, soit $\zeta(X)$ la partie de $\mathbf{G}(L)$ définie par

$$\zeta(\mathbf{1}_X)=\mathbf{1}_{\zeta(X)}.$$

Proposition 2.2.1. — *Soit* H *un sous-groupe ouvert compact de* $\mathbf{G}(F)$ *contenant* $B_F{}^n$. *Alors* $H'=\zeta(H)$ *est un sous-groupe ouvert compact de* $\mathbf{G}(L)$ *contenant* B_L *et l'application* ζ *de la proposition 2.1.1 induit, par restriction à la sous-algèbre* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ *de* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$, *un isomorphisme d'algèbres (et même d'anneaux)*

$$\zeta_H:\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)\xrightarrow{\cong}\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),H').$$

Démonstration.

Il est clair que H' est une partie ouverte compacte $B_L{}^n$-biinvariante de $\mathbf{G}(L)$ contenant $B_L{}^n$ et stable par multiplication. Quant à la structure de groupe, il suffit de vérifier que si $h'\in H'$ alors $h'^{-1}\in H'$. Soit donc un élément $h'\in H'$ et soit une décomposition de h' en $h'=b'w'c'$ pour un couple $(b',c')\in B_L\times B_L$ et un élément $w'\in W^*(\varpi_L)$. Soit un couple $(b,c)\in B_F\times B_F$ satisfaisant les relations $\beta(b+B_F{}^n)=b'+B_L{}^n$ et $\beta(c+B_F{}^n)=c'+B_L{}^n$, et soit w l'élément de $W^*(\varpi_F)$ défini par l'égalité $\gamma(w)=w'$. De la relation

$$H'\supset B_L{}^n h' B_F{}^n = b' B_L{}^n w B_L{}^n c' = \zeta\left(B_F{}^n bwc B_F{}^n\right),$$

on déduit que la double classe $B_F{}^n bwc B_F{}^n$ est contenue dans H. Par conséquent $(bwc)^{-1}\in H$ et la double classe

$$\begin{aligned}\zeta\left(B_F{}^n c^{-1}w^{-1}b^{-1}B_F{}^n\right) &= \beta\left(c^{-1}B_F{}^n\right)\gamma\left(w^{-1}\right)\beta\left(b^{-1}B_F{}^n\right)\\ &= c'^{-1}\,B_L{}^n w'^{-1}\,B_L{}^n b'^{-1}\\ &= B_L{}^n h'^{-1}\,B_L{}^n\end{aligned}$$

est contenue dans $\zeta(H)=H'$.

Rappelons que l'idempotent $e_H\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F))$ est défini par

$$e_H=\mathrm{vol}\left(H,dg_F\right)^{-1}\mathbf{1}_H.$$

L'égalité

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H) &= e_H * \mathcal{H}(\mathbf{G}(F)) * e_H \\ &= e_H * \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), B_F{}^n) * e_H\end{aligned}$$

entraîne la relation

$$\begin{aligned}\zeta(\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)) &= \zeta(e_H * \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n) * e_H) \\ &= \zeta(e_H) * \zeta(\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)) * \zeta(e_H) \\ &= e_{H'} * \mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n) * e_{H'} \\ &= \mathcal{H}(\mathbf{G}(L),H')\end{aligned}$$

où $e_{H'}$ est l'idempotent de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L))$ défini par

$$e_{H'} = \mathrm{vol}(H', dg_L)^{-1} \mathbf{1}_{H'}.$$

Ainsi la restriction de l'application ζ à la sous-algèbre $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H)$ de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ induit une bijection, donc un isomorphisme d'algèbres (et même d'anneaux car $\zeta_H(e_H)=e_{H'}$)

$$\zeta_H : \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),H) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(\mathbf{G}(L),H').$$

□

Remarque 2.2.2. — Pour chaque partition ordonnée de N, $\alpha=(\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_r)$, $\alpha_1+\ldots+\alpha_r=N$, $r=r(\alpha)$, soit la chaîne de $\mathcal{O}_F$-réseaux $\mathcal{L}(\alpha)=\mathcal{L}(\alpha)_j$ ($j\in\mathbb{Z}$) dans F^N définie par (cf. [Bush] §1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\alpha)_0 &= \mathcal{O}_F{}^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_F{}^{\alpha_{r-1}} \oplus \mathcal{O}_F{}^{\alpha_r} \\ \mathcal{L}(\alpha)_1 &= \mathcal{O}_F{}^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_F{}^{\alpha_{r-1}} \oplus \mathcal{P}_F{}^{\alpha_r} \\ &\cdots \\ \mathcal{L}(\alpha)_{r-1} &= \mathcal{O}_F{}^{\alpha_1} \oplus \mathcal{P}_F{}^{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{P}_F{}^{\alpha_r} \\ \mathcal{L}(\alpha)_{j+kr} &= \varpi_F{}^k \mathcal{L}(\alpha)_j \text{ pour tout } 0 \leq j < r \text{ et tout } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{Q}(\alpha)_F$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathbf{M}_N(F)=\mathrm{End}_F(F^N)$ défini par

$$\mathcal{Q}(\alpha)_F = \{g \in \mathbf{M}_N(F),\ g\mathcal{L}(\alpha)_i \subset \mathcal{L}(\alpha)_i\ (i \in \mathbb{Z})\}$$

et $\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^1$ le radical de Jacobson de $\mathcal{Q}(\alpha)_F$ défini par

$$\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^1 = \{g \in \mathcal{Q}(\alpha)_F, g\mathcal{L}(\alpha)_i \subset \mathcal{L}(\alpha)_{i+1}\ (i \in \mathbb{Z})\}.$$

En tant qu'idéal fractionnaire de $\mathcal{Q}(\alpha)_F$, le radical $\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^1$ est inversible et l'on a

$$(\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^1)^m = \{g \in \mathcal{Q}(\alpha)_F, g\mathcal{L}(\alpha)_i \subset \mathcal{L}(\alpha)_{i+m}\ (i \in \mathbb{Z})\}$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$. On pose $\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^m=(\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^1)^m$ ($m\in\mathbb{Z}$)

Soit $Q(\alpha)_F=\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^\times \subset \mathbf{G}(F)$ le groupe multiplicatif de $\mathcal{Q}(\alpha)_F$ et pour chaque entier $m\geq 1$, soit $Q(\alpha)_F{}^m=1+\mathcal{Q}(\alpha)_F{}^m$. Pour chaque $m\geq 1$, $Q(\alpha)_F{}^m$ est un sous-groupe distingué de $Q(\alpha)_F$.

Rappelons que tout $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathbf{M}_N(F)$ est conjugué par un élément de $\mathbf{G}(F)$ à un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{Q}(\alpha)_F$ pour une partition α de N (cf. [Bush] (1.8))).

Soient α_1 et α_N les partitions définies par $\alpha_1=(1\geq\cdots\geq 1)$ et $\alpha_N=(N)$. Alors $\mathcal{Q}(\alpha_1)_F=\mathcal{B}_F$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire minimal et $\mathcal{Q}(\alpha_N)_F=\mathbf{M}_N(\mathcal{O}_F)$ un $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire maximal de $\mathbf{M}_N(F)$. Pour toute partition (α) de N, on a la double inclusion

$$B_F = Q(\alpha_1)_F \subset Q(\alpha)_F \subset Q(\alpha_N) = K_F,$$

l'inclusion

$$B_F{}^n = Q(\alpha_1)_F{}^{Nn} \subset Q(\alpha)_F{}^m$$

pour tout entier $m \geq 1$ tel que $r(\alpha)n \geq m$, et l'inclusion

$$Q(\alpha)_F{}^m \subset Q(\alpha_N)_F{}^n = K_F{}^n$$

pour tout entier $m \geq 1$ tel que $r(\alpha)n \leq m$.

Dans les chapitres suivants, on utilisera abondamment ces objets (en fait seulement les $\mathcal{O}_F$-ordres héréditaires $\mathcal{Q}(\alpha)_F$ *principaux*, c'est-à-dire tels que $\alpha_i - \alpha_{i+1} = \alpha_j - \alpha_{j+1}$ pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1 \leq i,j < r(\alpha)$, ingrédients essentiels de la théorie des *strates* de $\mathbf{M}_N(F)$ développée par C.J. Bushnell & P.C. Kutzko (cf. par exemple la proposition 2.4.2 du chapitre 4, où pour relever les intégrales orbitales elliptiques des fonctions f appartenant à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G(F),K_F{}^n)$ (n fixé) on est amené à relever les *strates simples* elliptiques de $\mathbf{M}_N(F)$).

□

3. Références.

[Bush] C.J. BUSHNELL – *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of GL_N*, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 184-210.

[Deli] P. DELIGNE – *Les corps locaux de caractéristique p comme limites de corps locaux de caractéristique 0* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[Howe] R. HOWE. – *Harish-Chandra homomorphisms for p-adics groups*, CBMS Regional Conference Series in Math., n° **59**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1985.

[Iwah] N. IWAHORI. – *Generalized Tits System (Bruhat decomposition) on p-adic semi-simple groups* in Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. of Symp. in Pure Math. **9** (1966), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 71-83.

[Iw-Ma] N. IWAHORI. & H. MATSUMOTO – *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p-adic chevalley groups*, Publ. Math. I.H.E.S. **25** (1965), 5-48.

[Kazh] D. KAZHDAN. – *Representations of groups over close local fields*, Journal d'Analyse Math. **47** (1986), 175-179.

[Sata] I. SATAKE. – *Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields*, Publ. Math. I.H.E.S. **18** (1963), 1-69.

[Shim] G. SHIMURA. – *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1971.

[Weil] A. WEIL. – *Basic number theory*, Grundlehren Math. Wiss., 3rd edit., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

Chapitre 2

Représentations génériques et corps locaux proches

Soit N un entier ≥ 2, F un corps local non archimédien (i.e. un corps commutatif localement compact, non discret, ultramétrique et à corps résiduel fini), $\mathbf{G}(F)=\mathbf{GL}_N(F)$ et $\mathbf{U}(F)$ le sous-groupe triangulaire strict supérieur de $\mathbf{G}(F)$. Soit ψ un caractère additif non trivial de F et Θ_ψ le caractère de $\mathbf{U}(F)$ défini par

$$\Theta_\psi(u)=\prod_{1\leq i\leq N-1}\psi(u_{i,i+1})$$

pour tout élément $u=(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ de $\mathbf{U}(F)$. Soit $(\tau_F,\mathbf{G}(F),E(\mathbf{G}(F),\psi))$ l'induite lisse du caractère Θ_ψ de $\mathbf{U}(F)$ à $\mathbf{G}(F)$, i.e. la représentation de $\mathbf{G}(F)$ agissant par translation à droite sur l'espace $E(\mathbf{G}(F),\psi)$ des fonctions $f: \mathbf{G}(F)\to\mathbb{C}$ telles que

(i) $f(ug)=\Theta(u)f(g)$ pour tout $u\in\mathbf{U}(F)$ et tout $g\in\mathbf{G}(F)$.

(ii) Il existe un sous-groupe ouvert compact K_f de $\mathbf{G}(F)$ tel que $f(gk)=f(g)$ pour tout $k\in K_f$ et tout $g\in\mathbf{G}(F)$ (condition de lissité).

Soit π une représentation lisse de $\mathbf{G}(F)$. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de $E(\mathbf{G}(F),\psi)$ est appelé *modèle de Whittaker de π par rapport à ψ* si $\mathcal{W}$ est invariant sous l'action de τ_F et si la restriction de τ_F à $\mathcal{W}$ est équivalente à π. Il est clair qu'un modèle de Whittaker peut être défini par un opérateur d'entrelacement injectif de π à τ_F.

Une représentation lisse de $\mathbf{G}(F)$ est dite *générique* si elle admet un modèle de Whittaker par rapport à ψ. La propriété de généricité d'une représentation ne dépend pas du caractère additif non trivial ψ de F choisi. Deux questions se posent alors naturellement (surtout pour les représentations irréductibles):

- Soit π une représentation lisse de $\mathbf{G}(F)$. Est-elle générique?
- Soit π une représentation générique de $\mathbf{G}(F)$. Admet-elle plusieurs modèles de Whittaker par rapport à ψ ?

Des réponses à ces questions ont été partiellement données par M. Gel'fand & D. Kazhdan ([Ge-Ka]) puis complétées par F. Rodier ([Rodi]): les représentations admissibles irréductibles supercuspidales de $\mathbf{G}(F)$ sont génériques ([Rodi] theorem 1) et toute représentation admissible irréductible de $\mathbf{G}(F)$ admet au plus un modèle de Whittaker par rapport à ψ ([Rodi] theorem 3).

Soient n un entier ≥ 1, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$, B_F le sous-groupe d'Iwahori supérieur de $\mathbf{G}(F)$ (i.e. le groupe multiplicatif de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire minimal $\mathcal{B}_F$ de $\mathbf{M}_N(\mathcal{O}_F)$ formé par les matrices triangulaires supérieures modulo $\mathcal{P}_F$) et $B_F{}^n$ le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F{}^n$ de B_F (cf. le chapitre 1). Soit $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ l'algèbre de Hecke des fonctions f: $\mathbf{G}(F)\to\mathbb{C}$ telles que

(i) f est $B_F{}^n$-biinvariante, i.e. f(bgb')=f(b) pour tout $g\in\mathbf{G}(F)$ et tout couple $(b,b')\in B_F{}^n\times B_F{}^n$,

(ii) le support de f est union finie de doubles classes HgH, $g\in\mathbf{G}(F)$,

munie du produit de convolution induit par la mesure de Haar dg_F sur $\mathbf{G}(F)$ telle que

$$\mathrm{vol}(\mathbf{G}(\mathcal{O}_F),dg_F)=1$$

(cf. le chapitre 1).

Si $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ est une représentation lisse, on note V^n le sous-espace vectoriel de V formé par les vecteurs fixes sous l'action de $B_F{}^n$ et $(\pi^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),V^n)$ le $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-module V^n associé à $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$. Rappelons que le foncteur $\pi\mapsto\pi^n$ (de la catégorie des représentations lisses de $\mathbf{G}(F)$ sur celle des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-modules) induit une bijection de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ telles que $V^n\neq 0$ sur l'ensemble des classes d'isomorphismes de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-modules simples de dimension finie (cf. [Be-Ze] prop. 2.10)

On a montré dans le chapitre 1 que pour tout L, corps local non archimédien n-proche de F, la donnée d'un triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ où $\lambda:\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^n\to\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^n$ est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_L) une uniformisante de F (resp. L) satisfaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F{}^n)=\varpi_L+\mathcal{P}_L{}^n$, induit un isomorphisme d'algèbres (chapitre 1, prop. 2.1.1)

$$\zeta=\zeta(\lambda,\varpi_F,\varpi_L):\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)\xrightarrow{\cong}\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n),$$

lequel induit à son tour un isomorphisme de catégories

$$(\sigma,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),\omega)\mapsto(\sigma\circ\zeta^{-1},\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n),\omega)$$

entre la catégorie des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-modules et celle des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n)$-modules. On montre dans ce chapitre que, pourvu que les corps F et L soient n+1 proches, cet isomorphisme de catégories (combiné au foncteur $(\pi,\mathbf{G}(F),V)\mapsto(\pi^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),V^n)$) induit une bijection, notée $'\pi'\mapsto\zeta('\pi')$, entre les classes d'équivalence de représentations génériques $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrées par V^n (i.e telles que $\pi(\mathbf{G}(F))V^n=V$) et les classes d'équivalence de représentations génériques $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ engendrées par V'^n. De plus, cette bijection préserve l'exposant $m(\pi)$ du facteur ε (défini dans [Go-Ja] par $\varepsilon(s,\pi,\varphi)=\varepsilon_\pi(q^{-s},\varphi)$, $\varepsilon_\pi(T,\varphi)=c(\pi,\varphi)T^{m(\pi)}$ pour tout caractère additif φ: $F\to\mathbb{C}^\times$ de conducteur $\mathcal{O}_F$, où q est le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$) des classes de représentations génériques irréductibles π de $\mathbf{G}(F)$ telles que $m(\pi)\leq n$.

La démonstration se fait en trois étapes. On commence par vérifier (numéro 1) que le groupe $B_F{}^n$ vérifie un certain nombre de propriétés permettant d'affirmer, grâce au corollaire 3.9 de [Deli], que le foncteur $\pi\mapsto\pi^n$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations lisses $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrées par V^n et la catégorie des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-modules. Par conséquent la généricité ou non d'une représentation lisse $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrée par V^n se lit sur le module $(\pi^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),V^n)$ au sens où $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ est générique si et seulement si $(\pi^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),V^n)$ est isomorphe à un sous-module de $(\tau_F{}^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n),E(\mathbf{G}(F),\psi)^n)$. Puis (numéro 2) on donne des formules explicites pour l'action $\tau_F{}^n$ de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ sur $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$, formules grâce auxquelles on montre (numéro 3) que si F et L sont (n+1)-proches, alors il existe un caractère additif non trivial χ de L et un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces

$$\rho_{\psi,\chi}:E(\mathbf{G}(F),\psi)^n\xrightarrow{\cong}E(\mathbf{G}(L),\chi)^n$$

tels que $\rho\circ\tau_F{}^n(f)=\tau_L{}^n(\zeta(f))\circ\rho$ pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$. D'où la bijection annoncée. Quant à la propriété de compatibilité avec le conducteur, elle résulte directement du critère donné par H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro et Shalika ([J.P-S.S]) et de la proposition 2.2.1 du chapitre 1.

1. Le groupe $B_F{}^n$ est un "bon" sous-groupe ouvert compact de G(F).

1.1. Décomposition d'Iwahori et module de Jacquet.

Soient

— $U_1=\mathbf{U}(F)$.

— A_1 le tore diagonal de $\mathbf{G}(F)$.

— $P_1=A_1U_1$ le sous-groupe de Borel *standard* de $\mathbf{G}(F)$.

— S_N le $N^{\text{ième}}$ groupe de permutation, naturellement identifié au sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$ agissant par permutation de la base canonique de F^N.

On dit qu'un sous-groupe de Levi M (resp. une paire parabolique (P,A)) de $\mathbf{G}(F)$ est *semi-standard* si $M\supset A_1$ (resp. $P\supset A_1$). On dit qu'un sous-groupe parabolique P (resp. une paire parabolique (P,A)) de $\mathbf{G}(F)$ est *standard* si $P\supset P_1$ (resp. $P\supset P_1$ et $A\subset A_1$). Enfin on dit qu'un sous-groupe de Levi M de $\mathbf{G}(F)$ est *standard* si M est composante de Levi d'un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}(F)$ (autrement dit si M est produit diagonal de groupes linéaires dans $\mathbf{G}(F)$). On renvoie, pour plus d'informations sur ces objets, à [Spri] ou [Cart] n° 2.1.

Lemme 1.1.1. — *Soit* P *un sous-groupe parabolique semi-standard de* $\mathbf{G}(F)$ *de radical unipotent* U, M *la composante de Levi semi-standard de* P *et* $P=U^-M$ *le sous-groupe parabolique de* $\mathbf{G}(F)$ *opposé à* U. *Alors*

$$B_F{}^n=\left(B_F{}^n\cap U^-\right)\left(B_F{}^n\cap M\right)\left(B_F{}^n\cap U\right).$$

Démonstration.

Le parabolique P est conjugué à un parabolique standard P' par un élément du groupe S_N. En effet, il existe un élément $g\in\mathbf{G}(F)$ tel que $\mathrm{Ad}g(P)=P'\supset P_1$. Comme A_1 et $\mathrm{Ad}g(A_1)$ sont deux sous-tores déployés maximaux de P', il existe un élément $u'\in\mathrm{Ad}g(U)\subset U_1$ tel que l'on ait $\mathrm{Ad}u'g(A_1)=A_1$. Par conséquent u'g appartient au normalisateur $N_{\mathbf{G}(F)}(A_1)=S_N\ltimes A_1$ de A_1 dans $\mathbf{G}(F)$. Décomposant g en $g=u'^{-1}wa$ ($w\in S_N$ et $a\in A_1$), on obtient $\mathrm{Ad}w(P)=\mathrm{Ad}u'(P')=P'$.

Soit $\{e_{i,j}\}_{1\le i,j\le N}$ la base canonique de $\mathbf{M}_N(F)$ et ϖ_F une uniformisante de F. Pour chaque couple (i,j) tel que $1\le i,j\le N$, soit $u_{i,j}(\alpha)$ ($\alpha\in F$) l'élément de $\mathbf{M}_N(F)$ défini par $u_{i,j}(\alpha)=1+\alpha e_{i,j}$. Pour chaque couple (i,j) tel que $1\le i<j\le N$, soit $a_{i,j}=a_{i,j}(w^{-1})$ l'entier défini par (cf. le chapitre 1, n° 1.3)

$$\mathrm{Ad}w^{-1}\left(B_F{}^n\right)=\left\{\begin{array}{ll} g=\left(g_{i,j}\right)\in\mathbf{G}(F), & g_{i,j}\in\mathcal{P}_F{}^{a_{i,j}+n}\ \text{si}\ i<j\\ & g_{i,i}\in 1+\mathcal{P}_F{}^n\\ & g_{j,i}\in\mathcal{P}_F{}^{1-a_{i,j}+n}\ \text{si}\ i<j\end{array}\right\}.$$

Soit g un élément de $\mathrm{Ad}w^{-1}(B_F{}^n)$. Les transformations élémentaires

$$x\mapsto u_{j,i}\left(\varpi_F{}^{1-a_{i,j}+n}\alpha\right)x\quad\left(1\le i<j\le N,\ \alpha\in\mathcal{O}_F\right)\tag{*}$$

et

$$x \mapsto x u_{i,j}\left(\varpi_F^{a_{i,j}+n}\alpha\right) \quad (1 \leq i < j \leq N,\ \alpha \in \mathcal{O}_F) \tag{**}$$

sont toutes dans $\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n)$, et il est clair qu'en effectuant sur g (par éliminations successives) un nombre fini de transformations élémentaires du type (*) et (**), on peut obtenir un élément de A donc de $A \cap B_F{}^n$. Pour chaque couple couple (i,j) tel que $1 \leq i < j \leq N$,

$$u_{j,i}{}^{1-a_{i,j}+n}(\mathcal{O}_F) \subset \left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'^-\right) \amalg \left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap M'\right)$$

et

$$u_{i,j}{}^{a_{i,j}+n}(\mathcal{O}_F) \subset \left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap M'\right) \amalg \left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'\right),$$

où $U' = \mathrm{Adw}(U)$, $U'^- = \mathrm{Adw}(U^-)$ et $M' = \mathrm{Adw}(M)$. Comme l'inverse d'une transformation élémentaire du type (*) (resp. (**)) est encore une transformation élémentaire du type (*) (resp. (**)) et comme le sous-groupe de Levi M' de **G**(F) normalise les groupes U' et U'^-, on a montré que g appartient à

$$\left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'^-\right)\left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap M'\right)\left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'\right).$$

Par conséquent

$$\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) = \left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'^-\right)\left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap M'\right)\left(\mathrm{Adw}^{-1}(B_F{}^n) \cap U'\right).$$

Le lemme 1.1.1 vient en appliquant Adw à cette expression.

□

Si P est un sous-groupe parabolique de **G**(F) de radical unipotent de U, M une composante de Levi de P et $(\pi, \mathbf{G}(F), V)$ une représentation lisse, on note V_U l'espace des co-invariants de U dans V (i.e. $V_U = V/\langle \pi(u)v - v,\ u \in U,\ v \in V \rangle$) et (π_U, M, V_U) le module de Jacquet non unitaire (cf. [Be-Ze] n° 3.12).

Proposition 1.1.2. ([Deli] prop. 3.5.2) — *Soit* P *un sous-groupe parabolique semi-standard de* **G**(F) *de radical unipotent* U *et* M *la composante de Levi semi-standard de* P. *Alors pour toute représentation lisse* $(\pi, \mathbf{G}(F), V)$, *la restriction de Jacquet* $\pi \to \pi_U$ *induit une surjection*

$$\pi^{B_F{}^n} \longrightarrow (\pi_U)^{M \cap B_F{}^n}.$$

□

Noter que cette proposition généralise aux représentations lisses de **G**(F) un résultat montré par Jacquet pour les représentations lisses admissibles (cf. [Be-Ze] n° 3.16).

1.2. On vérifie dans ce numéro que le groupe $B_F{}^n$ vérifie les conditions (3.7.1) et (3.7.2) de [Deli] permettant d'appliquer le corollaire 3.9 de [Deli].

Lemme 1.2.1. (condition (3.7.1) de [Deli])— *Soit* M *un sous-groupe de Levi de* **G**(F). *Alors, pour tout sous-groupe parabolique* P=MU *de* **G**(F) *de radical unipotent* U *et de composante de Levi* M, *et pour tout groupe* H *conjugué de* $B_F{}^n$ *dans* **G**(F), *la classe de conjugaison dans* M *de* $H_M = (H \cap P)/(H \cap U)$ *est indépendante de* P *et* H.

Démonstration.

(i) Supposons pour commencer que M est un sous-groupe de Levi standard. Alors P est conjugué par un élément w de S_N à un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}(F)$ et la décomposition d'Iwasawa $\mathbf{G}(F)=P_1S_NB_F$ entraîne la décomposition $\mathbf{G}(F)=PS_NB_F$. Comme le groupe B_F normalise le groupe $B_F{}^n$, il existe un couple $(p,s)\in P\times S_N$ tel que $H=\mathrm{Adps}(B_F{}^n)$.

Soit $\gamma : P \to M$ la projection sur la composante de Levi M identifiée au quotient réductif maximal P/U de P. De l'égalité

$$H\cap P=\mathrm{Adp}\big(\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap P\big),$$

on déduit que $\gamma(H\cap P)$ est conjugué dans M à $\gamma(\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap P)$. Or (lemme 1.1.1)

$$\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap P=\big(\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap M\big)\big(\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap U\big),$$

par conséquent $\gamma(\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap P)=\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap M$ et l'on est ramené à montrer qu'il existe un élément $m\in M$ tel que $\mathrm{Ads}(B_F{}^n)\cap M=\mathrm{Adm}(B_F{}^n\cap M)$.

Montrons, par induction sur la longueur ℓ (cf. le chapitre 1, n° 1.3) des éléments de S_N que, pour tout sous-groupe de Levi semi-standard L de $\mathbf{G}(F)$ et tout élément $w\in S_N$, il existe un élément $x\in L$ tel que $\mathrm{Adw}(B_F{}^n)\cap L=\mathrm{Adx}(B_F{}^n\cap L)$.

Si $\ell(w)=0$, alors $w=1$ et il n'y a rien a montrer.

Si $\ell(w)=1$, alors w est une permutation élémentaire $s_c=s_c(F)$ pour un entier $c\in\{1,\dots,N-1\}$ et (cf. le chapitre 1, n° 1.3)

$$\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n)=\left\{\begin{array}{ll} g=(g_{i,j})\in\mathbf{G}(F), & g_{i,j}\in\mathcal{P}_F{}^n \text{ si } i<j \text{ et } (i,j)\neq(c,c+1)\\ & g_{c,c+1}\in\mathcal{P}_F{}^{1+n}\\ & g_{i,i}\in 1+\mathcal{P}_F{}^n\\ & g_{j,i}\in\mathcal{P}_F{}^{1+n} \text{ si } i<j \text{ et } (i,j)\neq(c,c+1)\\ & g_{c+1,c}\in\mathcal{P}_F{}^n \end{array}\right\}.$$

Ainsi, ou bien $s_c\in L$ et $\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n)\cap L=\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n\cap L)$, ou bien $s_c\notin L$ et $\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n)\cap L=B_F{}^n\cap L$.

Soit k un entier ≥ 1. Supposons la propriété vraie pour tous les élément de S_N de longueur inférieur ou égale à k et considérons un élément $w\in S_N$ de longueur $\ell(w)=k+1$. On écrit w sous la forme $w=s_c\sigma$ pour un entier $c\in\{1,\dots,N-1\}$ et un élément $\sigma\in S_N$ de longueur $\ell(\sigma)=k$. Comme $\mathrm{Ads}_c(L)$ est encore un sous-groupe de Levi semi-standard de $\mathbf{G}(F)$, il existe un élément $x=\mathrm{Ads}_c(y)\in\mathrm{Ads}_c(L)$ tel que $\mathrm{Ad}\sigma(B_F{}^n)\cap\mathrm{Ads}_c(L)=\mathrm{Adx}(B_F{}^n\cap\mathrm{Ads}_c(L))$. D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{Adw}(B_F{}^n)\cap L &=\mathrm{Ads}_c\big(\mathrm{Ad}\sigma(B_F{}^n)\cap\mathrm{Ads}_c(L)\big)\\ &=\mathrm{Ads}_c x\big(B_F{}^n\cap\mathrm{Ads}_c(L)\big)\\ &=\mathrm{Ady}s_c\big(B_F{}^n\cap\mathrm{Ads}_c(L)\big)\\ &=\mathrm{Ady}\big(\mathrm{Ads}_c(B_F{}^n)\cap L\big).\end{aligned}$$

On conclut grâce à l'hypothèse de récurrence (car $\ell(s_c)=1$).

(ii) Passons au cas général. Soit $M'=\mathrm{Adg}(M)$, $g\in\mathbf{G}(F)$, un conjugué standard du Levi M. Alors $P'=\mathrm{Adg}(P)$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de $\mathbf{G}(F)$ de radical unipotent $U'=\mathrm{Adg}(U)$. Soient $\gamma : P \to M$ la projection sur la composante de Levi M identifiée au quotient réductif maximal P/U de P et $\gamma' : P' \to M'$ la projection sur la composante de Levi M' identifiée au quotient réductif maximal P'/U' de P'. Le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\gamma} & M \\ {\scriptstyle Adg}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Adg} \\ P' & \xrightarrow{\gamma'} & M' \end{array}$$

est commutatif. Soit x un élément de **G**(F) tel que $H=Adx(B_F{}^n)$, et soit $y=gx$. Alors

$$\begin{aligned}\gamma(H\cap P) &= Adg^{-1}\circ\gamma'\circ Adg(H\cap P)\\ &= Adg^{-1}\circ\gamma'(Adg(H)\cap P').\end{aligned}$$

Or Adg(H) est un conjugué de $B_F{}^n$ dans **G**(F), donc (point (i) de la démonstration) il existe un élément $m'\in M'$ tel que $\gamma'(Adg(H)\cap P')=Adm'(\gamma'(Adg(B_F{}^n)\cap P'))$. D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\gamma(H\cap P) &= Adg^{-1}(Adm'(\gamma'(Adg(B_F{}^n)\cap P')))\\ &= Adg^{-1}m'g(Adg^{-1}\circ\gamma'\circ Adg(B_F{}^n\cap P))\\ &= Adm(\gamma(B_F{}^n\cap P))\end{aligned}$$

avec $m=Adg^{-1}(m')\in M$.

□

Lemme 1.2.2. (condition 3.7.1 de [Deli]) — *Pour tout sous-groupe parabolique* P=MU *de* **G**(F) *de composante de Levi* M *et de radical unipotent* U, *et pour toute représentation lisse* $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$, *la restriction de Jacquet* $\pi\to\pi_U$ *induit une surjection*

$$\pi^{B_F{}^n}\longrightarrow(\pi_U)^{\gamma(P\cap B_F{}^n)}$$

où $\gamma: P\to M$ *désigne la projection sur la composante de Levi* M *identifiée à* P/U.

Démonstration.

Pour M standard, c'est exactement la proposition 1.1.2.

Dans le cas général, considérons $M'=Adg(M)$, $g\in\mathbf{G}(F)$, un conjugué standard du sous-groupe de Levi M. Soient $P'=Adg(P)$ (c'est un sous-groupe parabolique semi-standard de **G**(F)) et $U'=Adg(U)$ le radical unipotent de P'.

Soit $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ une représentation lisse admissible et soit V(U) le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\pi(u)v-v$ $(u\in U, v\in V)$. Alors, pour tout $v\in V$,

$$\begin{aligned}&\left(v+V(U)\in V_U{}^{\gamma(B_F{}^n\cap P)}\subset V_U=V/V(U)\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(\pi(p)v\in v+V(U)\text{ pour tout }p\in B_F{}^n\cap P\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(\pi(gp)v\in\pi(g)v+V(U')\text{ pour tout }p\in B_F{}^n\cap P\right)\end{aligned}$$

car $\pi(g)V(U)=V(U')$. Comme $\mathbf{G}(F)=P'S_NB_F$ (cf. les premières lignes de la démonstration du lemme 1.2.1), on peut décomposer l'élément g en $g=u'm'wb_1$ $(u'\in U', m'\in M', w\in S_N$ et $b_1\in B_F)$. Comme l'Iwahori B_F normalise le groupe $B_F{}^n$ et comme $Adg(P)=P'=Adwb_1(P)$, quand p parcourt le groupe $B_F{}^n\cap P$, $Adwb_1(p)$ parcourt le groupe $Adw(B_F{}^n)\cap Adwb_1(P)=Adw(B_F{}^n)\cap P'$. On en déduit

$$\begin{aligned}&\left(\pi(gp)v\in\pi(g)v+V(U')\text{ pour tout }p\in Adg(B_F{}^n)\cap P'\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(\pi(u'm'xwb_1)v\in\pi(g)v+V(U')\text{ pour tout }x\in Adw(B_F{}^n)\cap P'\right)\\ \Leftrightarrow\ &\left(\pi(x)\pi(wb_1)v\in\pi(wb_1)v+V(U')\text{ pour tout }x\in Adw(B_F{}^n)\cap P'\right)\end{aligned}$$

car $\pi((u'm')^{-1})V(U')=V(U')$. Soient $P''=Adw^{-1}(P')$ (c'est un sous-groupe parabolique semi-standard de **G**(F)), $U''=Adw^{-1}(U')$ le radical unipotent de P'', $M''=Adw^{-1}(M')$ la composante de Levi semi-standard de P'' et $\gamma'':P''\to M''$ la projection sur le groupe M'' identifié au quotient réductif maximal P''/U'' de P''. Alors $\gamma''(B_F{}^n\cap P'')=B_F{}^n\cap M''$ (lemme 1.1.1) et

$$\begin{aligned}
&\left(\pi(x)\pi(wb_1)v\in\pi(wb_1)v+V(U')\text{ pour tout } x\in Adw\left(B_F{}^n\right)\cap P'\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left(\pi(y)\pi(b_1)v\in\pi(b_1)v+V(U'')\text{ pour tout } y\in B_F{}^n\cap P''\right)\\
\Leftrightarrow\ &\left(\pi(b_1)v+V(U'')\in V_{U''}{}^{B_F{}^n\cap M''}\subset V_{U''}=V/V(U'')\right).
\end{aligned}$$

Comme le sous-groupe de Levi M'' de **G**(F) est semi-standard, pour tout $v\in V$ tel que la classe $\pi(b_1)v+V(U'')$ de $V/V(U'')$ est fixée par la restriction de $\pi_{U''}$ à $B_F{}^n\cap M''$, la proposition 1.1.2 nous dit qu'il existe un élément v_1 fixé par la restriction de π à $B_F{}^n$ tel que $\pi(b_1)v$ appartient à la classe $v_1+V(U'')$ de $V/V(U'')$. Or, $U''=Adw^{-1}(U')=Adb_1g(U')=Adb_1(U)$, par conséquent pour tout $v_1\in V$, $\pi(b_1{}^{-1})(v_1+V(U''))=\pi(b_1{}^{-1})(v_1)+V(U)$. Le groupe B_F normalisant $B_F{}^n$, on en déduit que v_1 est fixé par la restriction de π à $B_F{}^n$ si et seulement si il en est de même pour $\pi(b_1{}^{-1})(v_1)$.

D'où le lemme 1.2.2.

□

On peut donc énoncer pour $B_F{}^n$ le résultat de P. Deligne démontré pour tout sous-groupe ouvert compact de **G**(F) vérifiant les lemmes 1.1.1, 1.2.1, et 1.2.2. Rappelons que pour toute représentation lisse $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$, V^n désigne le sous-espace vectoriel de V formé par les vecteurs fixes sous l'action de $B_F{}^n$.

Proposition 1.2.3. ([Deli] corollaire 3.9) — *Le foncteur*

$$\left(\pi,\mathbf{G}(F),V\right)\mapsto\left(\pi^n,\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F),B_F{}^n\right),V^n\right)$$

induit une équivalence de catégories entre

(i) *la catégorie des représentations lisses* $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ *engendrées par* V^n,

(ii) *la catégorie des* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$*-modules.*

□

2. Le $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$-module $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$.

2.1. Description du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$.

Rappelons quelques notations introduites au numéro 1.3 du chapitre 1, auquel on peut se reporter pour plus de détails.

Soit $\{e_{c,d}(F)\}_{1\le c,d\le N}$ la base canonique de $\mathbf{M}_N(F)$.

Pour chaque $1\le i\le N-1$, soit $s_i(F)=1-(e_{i,i}(F)+e_{i+1,i+1}(F))+e_{i,i+1}(F)+e_{i+1,i}(F)$ l'élément de **G**(F) qui, agissant à gauche par translation, permute les lignes i et i+1.

Soit ϖ_F une uniformisante de F.

Soient $s_N(\varpi_F)=1+\varpi_F e_{N,1}(F)+\varpi_F{}^{-1}e_{1,N}(F)$ et $t(\varpi_F)=1+\varpi_F e_{N,1}(F)+\Sigma_{1\le k\le N-1}\,e_{k,k+1}(F)$.

Soit $W(\varpi_F)$ le *groupe de weyl* engendré par les involutions $s_i(F)$ ($i\in\{1,\ldots,N-1\}$) et $s_N(\varpi_F)$.

Soit $W^a(\varpi_F)$ le *groupe de Weyl généralisé* engendré par le groupe de Weyl $W(\varpi_F)$ et l'élément $t(\varpi_F)$.

Pour chaque couple d'entiers (i,j) tel que $1\leq i,j\leq N$, soit $u_{i,j}(\alpha)$ ($\alpha\in F$) l'élément de $\mathbf{M}_N(F)$ défini par $u_{i,j}(\alpha)=1+\alpha e_{i,j}$ et, pour toute partie Λ de F, soit $u_{i,j}(\Lambda)=\{u_{i,j}(\alpha),\ \alpha\in\Lambda\}$.

Pour tout le numéro 2, on notera simplement $s_i=s_i(F)$ $(1\leq i\leq N-1)$, $s_N=s_N(\varpi_F)$, $t=t(\varpi_F)$, $W^a=W^a(\varpi_F)$ et $\Theta=\Theta_\psi$.

Partant de la décomposition d'Iwasawa

$$\mathbf{G}(F)=\coprod_{w\in W^a}\mathbf{U}(F)wB_F\,,$$

on commence par déterminer les doubles classes $\mathbf{U}(F)wbB_F{}^n$ ($w\in W^a$, $b\in B_F$) supportant un élément non trivial de l'espace $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$. On distingue deux cas:

(i) w est un élément de W^a tel que le caractère Θ est trivial sur $\mathbf{U}(F)\cap wB_F{}^n w^{-1}$. Comme l'Iwahori B_F normalise le groupe $B_F{}^n$, pour tout $b\in B_F$ le sous-espace de $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ des fonctions à support dans $\mathbf{U}(F)wbB_F{}^n$ est de dimension 1 .

(ii) w est un élément de W^a tel que le caractère Θ est non trivial sur $\mathbf{U}(F)\cap wB_F{}^n w^{-1}$. Alors le support de tout élément de $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ est d'intersection vide avec $\mathbf{U}(F)wB_F$.

Remarquons qu'à $w\in W^a$ fixé, la trivialité ou non de Θ sur $\mathbf{U}(F)\cap wB_F{}^n w^{-1}$ ne dépend que de *l'exposant* $c(\psi)$ *du conducteur* du caractère additif ψ de F (i.e l'entier $c=c(\psi)$ tel que ψ est trivial sur $\mathcal{P}_F{}^c$ et non trivial sur $\mathcal{P}_F{}^{c-1}$). En effet, rappelons (cf. le chapitre 1, n° 1.3) qu'à chaque élément $w\in W^a$ on peut associer des entiers $a_{i,j}(w)$ $(1\leq i<j\leq N)$ définis par

$$\mathrm{Ad}w\left(B_F{}^n\right)=\left\{\begin{array}{ll} g=\left(g_{i,j}\right)\in\mathbf{G}(F), & g_{i,j}\in\mathcal{P}_F{}^{a_{i,j}(w)+n}\ \text{si } i<j\\ & g_{i,i}\in 1+\mathcal{P}_F{}^n\\ & g_{j,i}\in\mathcal{P}_F{}^{1-a_{i,j}(w)+n}\ \text{si } i<j\end{array}\right\}.$$

Ainsi, pour chaque élément $w\in W^a$,

$$\left(\Theta|_{\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}w(B_F{}^n)}\equiv 1\right)\Leftrightarrow\left(c(\psi)\leq\max\left\{a_{i,i+1}(w),\ 1\leq i\leq N-1\right\}\right).$$

Soit $\Omega=\Omega(\varpi_F,c(\psi),n)$ la partie de W^a définie par

$$\Omega=\left\{w\in W^a,\ \Theta|_{\mathbf{U}(F)\cap\mathrm{Ad}w(B_F{}^n)}\equiv 1\right\},$$

et, pour chaque élément $g\in\mathbf{G}(F)$, soit $h_g\in E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ la fonction définie par les conditions suivantes:

(i) Si Θ est non trivial sur $\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n g^{-1}$ (i.e. si $g\notin\mathbf{U}(F)\Omega B_F=\coprod_{w\in\Omega}\mathbf{U}(F)wB_F$), alors $h_g\equiv 0$.

(ii) Si Θ est trivial sur $\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n g^{-1}$ (i.e. si $g\in\mathbf{U}(F)\Omega B_F$), alors

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\left(h_g\right)=\mathbf{U}(F)gB_F{}^n\\ h_g(ugb)=\Theta(u)\text{ pour tout } u\in\mathbf{U}(F)\text{ et tout } b\in B_F{}^n\,.\end{cases}$$

De la définition ci-dessus, on déduit la relation d'homogénéité

$$h_g=\Theta(u)h_{ugb}\qquad\textbf{(R)}$$

pour tout $g\in\mathbf{G}(F)$, tout $u\in\mathbf{U}(F)$ et tout $b\in B_F{}^n$.

Si, pour chaque $w\in\Omega$, on fixe (arbitrairement) une famille $B_F(w,n)$ de représentants dans B_F des classes de

$$\left(B_F\cap\mathrm{Ad}w^{-1}(\mathbf{U}(F))\right)\backslash B_F/B_F{}^n=\left(\left(B_F\cap\mathrm{Ad}w^{-1}(\mathbf{U}(F))\right).B_F{}^n\right)\backslash B_F\,,$$

alors les éléments h_{wb} ($w\in\Omega$, $b\in B_F(w,n)$) forment une base de l'espace vectoriel $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$.

2.2. Pour tout élément $g\in\mathbf{G}(F)$, soit f_g l'élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ défini par

$$f_g=\mathrm{vol}\left(B_F{}^n,dg_F\right)^{-1}\mathbf{1}_{B_F{}^n g B_F{}^n},$$

1_X désignant (pour toute partie ouverte compacte X de $\mathbf{G}(F)$) la fonction caractéristique de X.

Les éléments f_g ($g\in B_F\cup\{t,t^{-1},s_1\}$) engendrent l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$. En effet, d'après R. Howe ([Howe] chap. 3, theorem 2.1; cf. le chapitre 1, prop. 2.1.1), les éléments f_g ($g\in B_F\cup\{t,t^{-1}\}\cup\{s_i\}_{1\le i\le N}$) engendrent $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ et

$$f_{t^{-1}}*f_{s_i}*f_t=f_{s_{i+1}}$$

pour tout entier $1\le i\le N-1$.

Le morphisme d'algèbres $\tau_F{}^n:\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E(\mathbf{G}(F),\psi)^n)$ est donc complètement déterminé par l'action des f_g ($g\in B_F\cup\{t,t^{-1},s_1\}$).

Proposition 2.2.
(1) — *Pour tout* $x\in B_F\cup\{t,t^{-1}\}$ *et tout* $y\in\mathbf{G}(F)$,

$$\tau_F{}^n(f_x)(h_y)=h_{yx^{-1}}.$$

(2) — *Pour tout* $\alpha\in F$, *soit* $u_{1,2}(\alpha)$ *l'élément de* $\mathbf{U}(F)$ *défini par*

$$u_{1,2}(\alpha)=1+\alpha e_{1,2}(F).$$

Alors, pour tout $y\in\mathbf{G}(F)$,

$$\tau_F{}^n\left(f_{s_1}\right)\left(h_y\right)=\sum\nolimits_\eta h_{y u_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta)s_1},$$

où η *parcourt un système de représentants dans* $\mathcal{O}_F$ *des éléments du corps résiduel* $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$.

Démonstration.

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbf{G}(F)\times\mathbf{G}(F)$ et tout élément g de $\mathbf{G}(F)$, on a

$$\begin{aligned}\tau_F{}^n(f_x)(h_y)(g)&=\int_{\mathbf{G}(F)}f_x(g_F)h_y(gg_F)dg_F\\&=\int_{\mathbf{U}(F)yB_F{}^n}f_x(g^{-1}g_F)h_y(g_F)dg_F\\&=\mathrm{vol}(B_F{}^n,dg_F)\left(\mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap\mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right),du\right)\right)^{-1}\int_{\mathbf{U}(F)}f_x(g^{-1}uy)\Theta(u)du\\&=\left(\mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap\mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right),du\right)\right)^{-1}\int_{\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n xB_F{}^n y^{-1}}\Theta(u)du,\end{aligned}$$

où du désigne une quelconque mesure de Haar sur le groupe unimodulaire $\mathbf{U}(F)$.

Si $x\in B_F\cup\{t,t^{-1}\}$, x normalise le groupe $B_F{}^n$ et l'intersection $\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n xy^{-1}$ est non vide si et seulement si $\mathbf{U}(F)yx^{-1}B_F{}^n=\mathbf{U}(F)gB_F{}^n$. Par conséquent

$$\int_{\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n xy^{-1}}\Theta(u)du=\begin{cases}0\text{ si }g\notin\mathbf{U}(F)yx^{-1}B_F{}^n\text{ ou si }\mathbf{U}(F)yx^{-1}B_F\not\subset\coprod_{w\in\Omega}\mathbf{U}(F)wB_F\\ \mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap\mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right),du\right)\Theta(u)\text{ si }\begin{cases}g=uyx^{-1}b,\ (u,b)\in\mathbf{U}(F)\times B_F{}^n\\ \mathbf{U}(F)yx^{-1}B_F\subset\coprod_{w\in\Omega}\mathbf{U}(F)wB_F\end{cases}\end{cases}.$$

D'où le point (1) de la proposition 2.2.

Quant au point (2), on se ramène à la démonstration ci-dessus grâce à la décomposition

$$B_F{}^n s_1 B_F{}^n = \coprod_\eta B_F{}^n s_1 u_{1,2}\left(-\varpi_F{}^n \eta\right)$$

où η parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$. En effet, en posant $x=s_1$ dans le premier calcul de la démonstration du point (1), on obtient

$$\begin{aligned}\tau_F{}^n\left(f_{s_1}\right)\left(h_y\right)(g) &= \left(\mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right), du\right)\right)^{-1}\int_{\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n s_1 B_F{}^n y^{-1}} \Theta(u)du \\ &= \left(\mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right), du\right)\right)^{-1}\sum_\eta \int_{\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n s_1 u_{1,2}\left(-\varpi_F{}^n\eta\right)y^{-1}} \Theta(u)du\end{aligned}$$

pour tout couple $(y,g)\in \mathbf{G}(F)\times\mathbf{G}(F)$. Pour chaque η, l'intersection $\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n s_1 u_{1,2}(-\varpi_F{}^n\eta)y^{-1}$ est non vide si et seulement si $\mathbf{U}(F)yu_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta)s_1B_F{}^n=\mathbf{U}(F)gB_F{}^n$. En reprenant les arguments utililisés plus haut, on obtient, pour chaque η, l'égalité

$$\left(\mathrm{vol}\left(\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}y\left(B_F{}^n\right), du\right)\right)^{-1}\int_{\mathbf{U}(F)\cap gB_F{}^n s_1 u_{1,2}\left(-\varpi_F{}^n\eta\right)y^{-1}} \Theta(u)du = h_{yu_{1,2}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)s_1}(g).$$

D'où le point (2) de la proposition 2.2.

□

3. Corps locaux proches.

3.1. Soient F et L deux corps locaux n-proches, et soit $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ un triplet où

$$\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^n \xrightarrow{\;\cong\;} \mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L{}^n$$

est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_L) une uniformisante de F (resp. L) satisfaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F{}^n)=\varpi_L+\mathcal{P}_L{}^n$.

Soit

$$\zeta=\zeta\left(\lambda,\varpi_F,\varpi_L\right):\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F),B_F{}^n\right)\xrightarrow{\;\cong\;}\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L),B_L{}^n\right)$$

l'isomorphisme d'algèbres induit par le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ (chapitre 1, prop. 2.1.1). Alors la proposition 1.2.3 nous assure que le foncteur

$$\left(\pi,\mathbf{G}(F),V\right)\mapsto\left(\pi^n\circ\zeta^{-1},\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L),B_L{}^n\right),V^n\right)$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations lisses $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrées par V^n et celle des $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_F{}^n)$-modules. Pour pouvoir remonter à $\mathbf{G}(L)$, on peut décrire un quasi-inverse de la restriction du foncteur $(\pi',\mathbf{G}(L),V')\mapsto(\pi'^n,\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_F{}^n),V'^n)$ à la catégorie des représentations lisses $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ engendrées par V'^n. Soit

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L)\right)=\bigcup_{m\geq 1}\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(L),B_L{}^m\right)$$

l'algèbre de Hecke des fonctions $\mathbf{G}(L)\to\mathbb{C}$ localement constantes à support compact (cf. le chapitre 1) et, pour chaque entier $m\geq 1$, soit $e_{L,m}$ l'idempotent de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L))$ défini par

$$e_{L,m}=\left(\mathrm{vol}\left(B_L{}^m,dg_L\right)\right)^{-1}\mathbf{1}_{B_L{}^m}.$$

Alors, identifiant naturellement la catégorie des représentations lisses $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ avec celle des modules lisses $(\pi',\mathcal{H}(\mathbf{G}(L)),V')$ (un $\mathcal{H}(\mathbf{G}(L))$-module V' est dit lisse si $V'=\cup_{m\geq 1} e_{L,m}V'$, cf. [Be-Ze] n° 2.5), le foncteur

$$\iota_{L,n}: W' \mapsto \left(\mathcal{H}(\mathbf{G}(L)) * e_{L,n}\right) \otimes_{\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n)} W'$$

est un adjoint à gauche du foncteur $\pi'\mapsto\pi'^n$ (cf. [Deli] corollaire 3.9) et un quasi-inverse de la restriction du foncteur $\pi'\mapsto\pi'^n$ à la catégorie des représentations lisses $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ engendrées par V'^n. Ainsi, le foncteur

$$\pi \mapsto \zeta(\pi) = \iota_{L,n} \circ \left(\pi^n \circ \zeta^{-1}\right)$$

induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations lisses $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrées par V^n et celle des représentations lisses $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ engendrées par V'^n, et à fortiori une bijection

$$'\pi' \mapsto \zeta('\pi')$$

entre les classes d'équivalence de représentations lisses $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ engendrées par V^n et les classes d'équivalence de représentations lisses $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ engendrées par V'^n.

3.2. On montre dans ce numéro comment le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ fixé au n° 3.1 induit un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de l'espace $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ sur l'espace $E(\mathbf{G}(L),\chi)^n$.

Pour chaque élément $x\in\mathbf{G}(F)$, soit $f_x\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n)$ la fonction définie par

$$f_x = \mathrm{vol}\left(B_F{}^n, dg_F\right)^{-1} \mathbf{1}_{B_F{}^n x B_F{}^n}.$$

De même, pour chaque élément $y\in\mathbf{G}(L)$, soit $\phi_y\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L{}^n)$ la fonction définie par

$$\phi_y = \mathrm{vol}\left(B_L{}^n, dg_L\right)^{-1} \mathbf{1}_{B_L{}^n y B_L{}^n}.$$

On suppose à partir d'ici, et jusqu'à la fin du chapitre, que le caractère additif ψ de F introduit dans l'introduction est de conducteur $\mathcal{P}_F{}^n$.

Soit χ un caractère additif de L de conducteur $\mathcal{P}_L{}^n$ tel que $\chi\circ\lambda(\alpha+\mathcal{P}_F{}^n)=\psi(\alpha+\mathcal{P}_F{}^n)=\psi(\alpha)$ pour tout élément $\alpha\in\mathcal{O}_F$.

Soient Θ_ψ et Θ_χ les caractères des groupes $\mathbf{U}(F)$ et $\mathbf{U}(L)$ respectivement induits par ψ et χ.

Soient $\Omega_1=\Omega(\varpi_F, c(\psi), n)$ et $\Omega_2=\Omega(\varpi_L, c(\chi), n)$ les parties (définies au numéro 2.1) du groupe $W^\bullet(\varpi_F)$ et du groupe $W^\bullet(\varpi_L)$) respectivement. Avec les notations introduites au numéro 2.1, et compte tenu de l'hypothèse $c(\psi)=c(\chi)=n$, on a

$$\Omega_1 = \left\{ w \in W^\bullet(\varpi_F),\ a_{i,i+1}(w) \geq 0,\ 1\leq i \leq N-1 \right\}$$

et

$$\Omega_2 = \left\{ w' \in W^\bullet(\varpi_L),\ a_{i,i+1}(w') \geq 0,\ 1\leq i \leq N-1 \right\}.$$

Pour chaque élément $x\in\mathbf{G}(F)$, soit $h_x\in E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ la fonction définie par les conditions suivantes:

(i) Si la restriction du caractère Θ_ψ au groupe $\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}x(B_F{}^n)$ est non triviale, c'est-à-dire si x n'appartient pas à $\mathbf{U}(F)\Omega_1 B_F$, alors $h_x\equiv 0$.

(ii) Si la restriction du caractère Θ_ψ au groupe $\mathbf{U}(F)\cap \mathrm{Ad}x(B_F{}^n)$ est triviale, c'est-à-dire si x appartient à $\mathbf{U}(F)\Omega_1 B_F$, alors

$$\begin{cases} \mathrm{supp}(h_x) = \mathbf{U}(F)xB_F{}^n \\ h_x(uxb) = \Theta_\psi(u) \text{ pour tout } u\in\mathbf{U}(F) \text{ et tout } b\in B_F{}^n \end{cases}.$$

De même, pour chaque élément $x'\in\mathbf{G}(L)$, soit $\delta_{x'}\in E(\mathbf{G}(L),\chi)^n$ la fonction définie par les conditions suivantes:

(i) Si la restriction du caractère Θ_χ au groupe $\mathbf{U}(L)\cap \mathrm{Ad}x'(B_L{}^n)$ est non triviale, c'est-à-dire si x' n'appartient pas à $\mathbf{U}(L)\Omega_2 B_L$, alors $\delta_{x'}\equiv 0$.

(ii) Si la restriction du caractère Θ_χ au groupe $\mathbf{U}(L)\cap \mathrm{Ad}x'(B_L{}^n)$ est triviale, c'est-à-dire si x' appartient à $\mathbf{U}(L)\Omega_2 B_L$, alors

$$\begin{cases} \mathrm{supp}(\delta_{x'}) = \mathbf{U}(L)x'B_L{}^n \\ h_{x'}(ux'b) = \Theta_\chi(u) \text{ pour tout } u\in\mathbf{U}(L) \text{ et tout } b\in B_L{}^n \end{cases}.$$

Soit

$$\gamma : W^*(\varpi_F) \xrightarrow{\ \cong\ } W^*(\varpi_L)$$

l'isomorphisme de groupes induit par le couple (ϖ_F,ϖ_L) (cf. le chapitre 1, n° 3.1).

L'isomorphisme de groupes γ induit, par restriction, une bijection de la partie Ω_1 de $W^*(\varpi_F)$ sur la partie Ω_2 de $W^*(\varpi_L)$. En effet, l'égalité

$$a_{i,j}(w) = a_{i,j}(\gamma(w)) \quad (1\le i<j\le N)$$

pour tout élément $\gamma\in W^*(\varpi_F)$ entraîne la relation

$$\begin{aligned}(w\in\Omega_1) &\Leftrightarrow (a_{i,i+1}(w)\ge 0 \text{ pour tout } 1\le i\le N-1)\\ &\Leftrightarrow (a_{i,i+1}(\gamma(w))\ge 0 \text{ pour tout } 1\le i\le N-1)\\ &\Leftrightarrow (\gamma(w)\in\Omega_2).\end{aligned}$$

Soit

$$\beta : B_F/B_F{}^n \xrightarrow{\ \cong\ } B_L/B_L{}^n$$

l'isomorphisme de groupes induit par le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_L)$ (cf. le chapitre 1, n° 1.3) et, pour chaque couple $(w,b)\in W^*(\varpi_F)\times B_F$, soit $\rho(h_{wb})$ l'élément de $E(\mathbf{G}(L),\chi)^n$ défini par

$$\rho(h_{wb}) = \delta_{\gamma(w)b'}$$

où b' désigne un quelconque représentant dans B_L de la classe $\beta(bB_F{}^n)$ de $B_L/B_L{}^n$.

Lemme 3.2. — *L'application ρ est bien définie sur* $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ *et elle induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels*

$$\rho_{\psi,\chi} : E(\mathbf{G}(F),\psi)^n \xrightarrow{\ \cong\ } E(\mathbf{G}(L),\chi)^n.$$

Démonstration.

Pour chaque couple $(w,b)\in\Omega_F\times B_F$, le sous-espace de $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ des fonctions à support dans $\mathbf{U}(F)wbB_F{}^n$ est de dimension 1, engendré par h_{wb}. Montrer que l'application ρ est bien définie sur l'espace $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n$ revient donc à montrer qu'elle préserve, pour chaque couple $(w,b)\in\Omega_1\times B_F$, la relation d'homogénéité (R) du numéro 2.1 appliquée à l'élément h_{wb}. Donnons-nous donc un tel tel couple (w,b) et montrons que

$$\Theta_\psi(\mathrm{Adw}(x))\rho(h_{wxb})=\rho(h_{wb})$$

pour tout élément x appartenant à $B_F\cap \mathrm{Adw}^{-1}(U(F))$. L'élément w appartenant à Ω_1, $a_{i,i+1}(w)$ est un entier ≥ 0 pour chaque $i\in\{1,...,N-1\}$. On a vu au chapitre 1, n° 1.3, qu'à chaque couple d'entiers (i,j) $(1\leq i,j\leq N)$, on pouvait associer un couple d'entiers $(c,d)=(c_{i,j}(w),d_{i,j}(w))$, tel que

$$(\mathrm{Adw}(g))_{i,j}=\varpi_F^{\alpha_{i,j}(w)}g_{c,d}$$

pour tout élément $g=(g_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}\in G(F)$, l'entier $\alpha_{i,j}(w)$ s'exprimant explicitement en fonction de $a_{i,j}(w)$ (en particulier, pour chaque $i\in\{1,...,N-1\}$, on a $\alpha_{i,i+1}(w)=a_{i,j+1}(w)$ si $c_{i,i+1}(w)<d_{i,i+1}(w)$ et $\alpha_{i,i+1}(w)=a_{i,j+1}(w)-1$ si $d_{i,i+1}(w)<c_{i,i+1}(w)$). Il est clair que

$$(c_{i,i+1}(w),d_{i,i+1}(w))=(c_{i,i+1}(\gamma(w)),d_{i,i+1}(\gamma(w)))$$

pour chaque $i\in\{1,...,N-1\}$. Par conséquent (cf. la construction de l'isomorphisme de groupes β donnée dans le chapitre 1, n° 2.1), pour chaque $i\in\{1,...,N-1\}$,

$$\lambda\left((\mathrm{Adw}(x))_{i,i+1}+\mathcal{P}_F^{\,n}\right)=(\mathrm{Ad}\gamma(w)(x'))_{i,i+1}+\mathcal{P}_L^{\,n}$$

pour tout élément $x\in B_F$ et tout élément $x'\in B_L$ tel que $x'B_L^{\,n}=\beta(xB_F^{\,n})$. L'hypothèse

$$\chi\circ\lambda(\eta+\mathcal{P}_F^{\,n})=\psi(\eta+\mathcal{P}_F^{\,n})$$

pour tout élément $\eta\in\mathcal{O}_F$ entraîne donc l'égalité

$$\Theta_\psi(\mathrm{Adw}(x))=\Theta_\chi(\mathrm{Ad}\gamma(w)(x'))$$

pour tout élément $x\in B_F\cap\mathrm{Adw}^{-1}(U(F))$ et tout élément $x'\in B_L$ tel que $x'B_L^{\,n}=\beta(yB_F^{\,n})$. Ainsi

$$\begin{aligned}\rho(h_{wxb})&=\delta_{\gamma(w)x'b'}\\&=\Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(w)(x'^{-1})\right)\delta_{\gamma(w)b'}\\&=\Theta_\psi\left(\mathrm{Adw}(x^{-1})\right)\rho(h_{wb})\end{aligned}$$

pour tout élément $x\in B_F\cap\mathrm{Adw}^{-1}(U(F))$, x' (resp. b') désignant un quelconque représentant dans B_L de la classe $\beta(xB_F^{\,n})$ (resp. $bB_F^{\,n}$) de $B_L/B_L^{\,n}$.

Donc l'application ρ est bien définie sur l'espace $E(G(F),\psi)^n$ et induit, pour chaque couple $(w,b)\in\Omega_1\times B_F$, un isomorphisme du sous-espace vectoriel de $E(G(F),\psi)^n$ des fonctions à support dans $U(F)wbB_F^{\,n}$ sur le sous-espace vectoriel de $E(G(L),\chi)^n$ des fonctions à support dans $U(F)\gamma(w)\beta(bB_F^{\,n})$.

Quant à la seconde assertion du lemme 3.2, compte tenu de l'égalité $\gamma(\Omega_1)=\Omega_2$ et grâce au résultat établi ci-dessus, il suffit de montrer que l'application

$$U(F)wbB_F^{\,n}\mapsto U(L)\gamma(w)\beta(bB_L^{\,n})$$

induit une bijection de l'ensemble des doubles classes $U(F)gB_F^{\,n}$ de $U(F)\Omega_1B_F$ sur l'ensemble des doubles classes $U(L)g'B_L^{\,n}$ de $U(L)\Omega_2B_L$. Fixons un élément $w\in W'(\varpi_F)$. Il est clair que l'isomorphisme β: $B_F/B_F^{\,n}\to B_L/B_L^{\,n}$ envoie le sous-groupe $(B_F\cap\mathrm{Adw}^{-1}(U(F))B_F^{\,n}$ de $B_F/B_F^{\,n}$ sur le sous-groupe $(B_L\cap\mathrm{Ad}\gamma(w)^{-1}(U(L))B_L^{\,n}$ de $B_L/B_L^{\,n}$, par conséquent l'application $bB_F^{\,n}\mapsto\beta(bB_F^{\,n})$ induit une bijection de l'ensemble des doubles classes $U(F)wbB_F^{\,n}$ de $U(F)wB_F$ sur l'ensemble des doubles classes $U(F)\gamma(w)b'B_F^{\,n}$ de $U(F)\gamma(w)B_L$. On conclut grâce à la décomposition d'Iwasawa (cf. le numéro 2.1) pour G(F) et pour G(L).

□

3.3. Grâce aux formules de la proposition 2.2 et modulo une hypothèse supplémentaire concernant le caractère χ, on montre que l'isomorphisme $\rho_{\psi,\chi}$ du lemme 3.2. entrelace les modules $(\tau_F{}^n, \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F{}^n), E(\mathbf{G}(F),\psi)^n)$ et $(\tau_L{}^n, \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_L{}^n), E(\mathbf{G}(L),\chi)^n)$. On en déduit que si les corps F et L sont (n+1)-proches, l'application $'\pi' \mapsto \zeta('\pi')$ induit une bijection entre les classes de représentations génériques de **G**(F) et les classes de représentation génériques de **G**(L).

Commençons par un lemme technique. On rappelle que la fonction longueur ℓ: $W^a(\varpi_F) \rightarrow \mathbb{N}$ sur le groupe de Weyl généralisé $W^a(\varpi_F)$ peut être définie par (chapitre 1, lemme 1.3.2)

$$\ell(w) = \sum_{1 \leq i,j \leq N} |a_{i,j}(w)|$$

pour tout $w \in W^a(\varpi_F)$.

Lemme 3.3.1. — *Soient* w *un élément de* $W^a(\varpi_F)$ *et* c *un entier tel que* $1 \leq c \leq N-1$. *Alors* $\ell(ws_c(F)) = \ell(w)+1$ *si et seulement si* $\mathrm{Ad}w(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) \subset B_F$.

Démonstration.

Comme $\ell(t(\varpi_F)^k w) = \ell(w)$ pour tout entier k et puisque $t(\varpi_F)$ normalise le groupe B_F, on peut supposer que $w \in W(\varpi_F)$.

On suppose que $\ell(ws_c) = \ell(w)+1$ avec $s_c = s_c(F)$. Alors (cf. le chapitre 1, n° 1.3) Il existe un unique couple d'entiers (r,k), $1 \leq r,k \leq N$, $r \neq k$, et un unique $m \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\mathrm{Ad}ws_c(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) = u_{r,k}(\mathcal{P}_F{}^m).$$

L'action par conjugaison du groupe de Weyl $W(\varpi_F)$ sur un élément $g \in \mathbf{G}(F)$ étant, modulo multiplication des coefficients de g par une puissance entière de l'uniformisante ϖ_F, une action de permutation (cf. le chapitre 1, n° 1.3), on a aussi la relation

$$\mathrm{Ad}w\left(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)\right) = \mathrm{Ad}ws_c\left(u_{c+1,c}(\mathcal{O}_F)\right) = u_{k,r}\left(\mathcal{P}_F{}^{-m}\right)$$

On distingue deux cas:

Si $r<k$, alors $m = a_{r,k}(ws_c) = -(1-a_{r,k}(w)) = -1+a_{r,k}(w)$. La description explicite de l'action par conjugaison des éléments du groupe $W(\varpi_F)$ sur le groupe B_F (cf. le chapitre 1, n° 1.3) assurant l'existence et l'unicité d'un couple d'entiers (i,j), $1 \leq i<j \leq N$, tel que $a_{i,j}(ws_c) \neq a_{i,j}(w)$, l'hypothèse $\ell(ws_c(F)) = \ell(w)+1$ entraîne la relation

$$\left|a_{r,k}(ws_c)\right| = 1 + \left|a_{r,k}(w)\right|. \qquad (*)$$

Si $m>0$, l'égalité $a_{r,k}(w) = 1+m$ contredit la relation (*). Par conséquent $m<0$, et on a la série d'inclusions $\mathrm{Ad}w(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) \subset u_{k,r}(\mathcal{P}_F{}^1) \subset B_F$.

Si $r>k$, alors $m = 1-a_{k,r}(ws_c) = -a_{k,r}(w)$ et l'hypothèse $\ell(ws_c(F)) = \ell(w)+1$ entraîne (mêmes arguments que ci-dessus) la relation

$$\left|a_{k,r}(ws_c)\right| = 1 + \left|a_{k,r}(w)\right|. \qquad (**)$$

Si $m>0$, alors l'égalité $a_{k,r}(w) = 1-a_{r,k}(w) = 1+m$ contredit la relation (**). Donc $m<0$ et $\mathrm{Ad}w(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) \subset u_{k,r}(\mathcal{O}_F) \subset B_F$.

Reciproquement, supposons que $\ell(ws_c) = \ell(w)-1$. Alors, le raisonnement effectué ci-dessus en remplaçant w par $w' = ws_c$ montre que $\mathrm{Ad}w(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) = u_{r,k}(\mathcal{P}_F{}^m)$ pour un couple d'entiers (r,k), $1 \leq r,k \leq N$, $r \neq k$, et un entier $m<0$. Donc $\mathrm{Ad}w(u_{c,c+1}(\mathcal{O}_F)) \not\subset B_F$.

□

Soit χ un caractère additif de L de conducteur n supposé satisfaire les hypothèses (H_1) et (H_2) suivantes[(1)] :

(H_1): $\chi\circ\lambda(\eta+\mathcal{P}_F^n)=\psi(\eta+\mathcal{P}_F^n)=\psi(\eta)$ pour tout élément $\eta\in\mathcal{O}_F$.

(H_2): Il existe une famille $\{\alpha_i\}_{1\le i\le q-1}$ (où q est le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$) de représentants dans $\mathcal{O}_F^\times$ des éléments du groupe $(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F)^\times$ et une famille $\{\alpha'_i\}_{1\le i\le q-1}$ d'éléments de $\mathcal{O}_L^\times$ telles que
(i) $\lambda(\alpha_i+\mathcal{P}_F^n)=\alpha'_i+\mathcal{P}_L^n$ pour chaque $1\le i\le q-1$.
(ii) $\psi((\varpi_F\alpha_i)^{-1})=\chi((\varpi_L\alpha'_i)^{-1})$ pour chaque $1\le i\le q-1$.

Soit $\rho=\rho_{\psi,\chi}$: $E(\mathbf{G}(F),\psi)^n\to E(\mathbf{G}(F),\chi)^n$ l'isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces du lemme 3.2. (qui n'a besoin, pour vivre, que de l'hypothèse (H_1)).

Poposition 3.3.2. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *pour tout fonction* $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$, *le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
E(\mathbf{G}(F),\psi)^n & \xrightarrow{\tau_F^n(f)} & E(\mathbf{G}(F),\psi)^n \\
\downarrow\rho & & \downarrow\rho \\
E(\mathbf{G}(L),\chi)^n & \xrightarrow{\tau_L^n(\zeta(f))} & E(\mathbf{G}(L),\chi)^n
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration.

Les fonctions f_x ($x\in B_F\cup\{s_1(F),t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$) engendrent l'algèbre $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ et les fonctions h_{wb} ($(w,b)\in W^a(\varpi_F)\times B_F$) engendrent l'espace vectoriel $E(\mathbf{G}(F),\Theta_F)^n$, donc il suffit de vérifier l'égalité

$$\rho\circ\tau_F^n(f_x)(h_{wb})=\tau_L^n(\zeta(f_x))\circ\rho\,(h_{wb})$$

pour tout élément $x\in B_F\cup\{s_1(F),t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$ et tout couple $(w,b)\in W^a(\varpi_F)\times B_F$.

La démonstration est longue mais la démarche est assez répétitive. On traite séparément les cas $x\in B_F\cup\{t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$ et $x=s_1(F)$. Comme le point (2) de la proposition 2.2 pouvait déjà l'indiquer, le cas $x=s_1(F)$ est le plus délicat à vérifier; on procède pour ce faire par étapes successives, ces étapes étant dictées par les différentes formes que peut prendre l'élément b apparaissant dans la fonction h_{wb}.

Cas (1) — $x\in B_F\cup\{t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$.
Alors pour tout couple (w,b) appartenant à $W^a(\varpi_F)\times B_F$, on a (proposition 2.2.(1))

$$\tau_F^n(f_x)(h_{wb})=h_{wbx^{-1}}\,.$$

On traite séparément le cas $x\in B_F$ et le cas $x\in\{t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$.

Cas (1-1) — $x\in B_F$.
Soient b' (resp. x') un élément de B_L tel que $\beta(bB_F^n)=b'B_L^n$ (resp. $\beta(xB_F^n)=x'B_L^n$). Comme β est un isomorphisme de groupes, on a $\beta(bx^{-1}B_F^n)=b'x'^{-1}B_L^n$, et donc

(1) On donne ici les conditions les moins fortes nous permettant de montrer la proposition 3.3.2.

$$\begin{aligned}\rho\circ\tau_F{}^n(f_x)(h_{wb}) &= \rho\left(h_{wbx^{-1}}\right)\\ &= \delta_{\gamma(w)b'x'^{-1}}\\ &= \tau_L{}^n(\phi_{x'})(\delta_{\gamma(w)b'})\\ &= \tau_L{}^n(\zeta(f_x))\circ\rho(h_{wb}).\end{aligned}$$

Cas (1-2) — $x\in\{t(\varpi_F),t(\varpi_F)^{-1}\}$.

Soit b' un élément de B_L tel que $\beta(bB_F{}^n)=b'B_L{}^n$. On a $\gamma(t(\varpi_F))=t(\varpi_L)$, par conséquent (cf. la construction de l'isomorphisme β, chapitre 1, n° 1.3) $\beta(\mathrm{Ad}x(b)B_F{}^n)=\mathrm{Ad}\gamma(x)(b')B_L{}^n$ et de l'égalité $wbx^{-1}=wx^{-1}\mathrm{Ad}x(b)$, on déduit la relation

$$\begin{aligned}\rho\circ\tau_F{}^n(f_x)(h_{wb}) &= \rho\left(h_{wx^{-1}\mathrm{Ad}x(b)}\right)\\ &= \delta_{\gamma(w)\gamma(x)^{-1}\mathrm{Ad}\gamma(x)(b')}\\ &= \tau_L{}^n(\phi_{\gamma(x)})(\delta_{\gamma(w)b'})\\ &= \tau_L{}^n(\zeta(f_x))\circ\rho(h_{wb}).\end{aligned}$$

Cas (2) — $x=s_1(F)$.

Alors, pour tout couple (w,b) appartenant à $W^s(\varpi_F)\times B_F$, on a (proposition 2.2.(2))

$$\tau_F{}^n(f_x)(h_{wb})=\sum_\eta h_{wbu_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta)x}$$

où η parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$. Avec la convention $\alpha_0=0$, la décomposition de B_F en

$$B_F=\coprod_{0\le i\le q-1} u_{1,2}(\alpha_i)(B_F\cap\mathrm{Ad}x(B_F))$$

nous permet d'écrire b sous la forme

$$b=u_{1,2}(\alpha_i)b_1$$

pour un unique couple (i,b_1) appartenant à $\{0,\ldots,q-1\}\times(B_F\cap\mathrm{Ad}x(B_F))$.

Soit $x'=s_1(L)$ et soit b'_1 un élément de $B_L\cap\mathrm{Ad}x'(B_L)$ tel que

$$\begin{cases}\beta(b_1B_F{}^n)=b'_1B_L{}^n\\ \beta(\mathrm{Ad}x(b_1)B_F{}^n)=\mathrm{Ad}x'(b'_1)B_L{}^n\end{cases}$$

c'est-à-dire tel que

$$\begin{cases}\beta(b_1B_F{}^n)=b'_1B_L{}^n\\ \lambda\left(\varpi_F{}^{-1}(b_1)_{1,2}+\mathcal{P}_F{}^n\right)=\varpi_L{}^{-1}(b'_1)_{1,2}+\mathcal{P}_L{}^n.\end{cases}$$

Pour chaque $\eta\in\mathcal{O}_F$, soit η' un élément de $\mathcal{O}_L$ tel que $\lambda(\varpi_F{}^{n-1}\eta+\mathcal{P}_F{}^n)=\varpi_L{}^{n-1}\eta'+\mathcal{P}_L{}^n$. On distingue deux cas:

Cas (2-1) — $\mathrm{Ad}w(u_{1,2}(F))=\{u_{1,2}(\nu),\ \nu\in F\}\subset U(F)$ ou bien $i=0$.

L'égalité (rappelons que x désigne l'involution $s_1(F)$)

$$w\,bu_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta)\,x=\mathrm{Ad}w(u_{1,2}(\alpha_i))\,wx\,\mathrm{Ad}x\left(b_1u_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta)\right)$$

pour tout $\eta\in F$ et la relation d'homogénéité (R) du numéro 2.1, entraînent la relation

$$\tau_F{}^n(f_x)(h_{wb}) = \Theta_\psi\left(\mathrm{Adw}\left(u_{1,2}(-\alpha_i)\right)\right)\sum_\eta h_{w\mathrm{Adx}\left(b_1 u_{1,2}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)\right)}$$

où η parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^n$. Les hypothèses $\beta(\mathrm{Adx}(b_1)B_F{}^n)=\mathrm{Adx}'(b'_1)B_L{}^n$ et $\lambda(\varpi_F{}^{n-1}\eta+\mathcal{P}_F{}^n)=\varpi_L{}^{n-1}\eta'+\mathcal{P}_L{}^n$ $(\eta\in\mathcal{O}_F)$ entraînent l'égalité $\beta(\mathrm{Adx}(b_1u_{1,2}(\varpi_F{}^n\eta))B_F{}^n)=\mathrm{Adx}'(b'_1u_{1,2}(\varpi_L{}^n\eta'))B_L{}^n$ pour tout $\eta\in\mathcal{O}_F$. En appliquant le raisonnement effectué ci-dessus dans l'autre sens, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\rho\left(h_{wx\mathrm{Adx}\left(b_1u_{1,2}\left(\varpi_F{}^n\eta\right)\right)}\right) &= \delta_{\gamma(w)x'\mathrm{Adx}'\left(b'_1u_{1,2}\left(\varpi_L{}^n\eta'\right)\right)}\\ &= \Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(w)(\alpha'_i)\right)\delta_{\gamma(w)u_{1,2}(\alpha'_i)b'_1u_{1,2}\left(\varpi_L{}^n\eta'\right)x'}\end{aligned}$$

pour tout $\eta\in\mathcal{O}_F$. Or, $\beta(bB_F{}^n)=u_{1,2}(\alpha'_i)b'_1B_L{}^n$ et quand η parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$, η' parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_L$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$. Par conséquent

$$\rho(f_x)(h_{wb}) = \Theta_\psi\left(\mathrm{Adw}\left(u_{1,2}(-\alpha_i)\right)\right)\Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(w)\left(u_{1,2}(\alpha_i)\right)\right)\tau_L{}^n(f_{x'})\left(h_{\gamma(w)b'}\right)$$

et l'on est ramené à montrer l'égalité

$$\Theta_\psi\left(\mathrm{Adw}\left(u_{1,2}(\alpha_i)\right)\right) = \Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(w)\left(u_{1,2}(\alpha'_i)\right)\right). \qquad (*)$$

Il existe un entier m et un couple (r,k), r<k, tels que $\mathrm{Adwx}(u_{1,2}(\nu))=u_{r,k}(\varpi_F{}^m\nu)$ pour tout élément $\nu\in F$. Si $k\neq r+1$, $\mathrm{Adwx}(u_{1,2}(\mathcal{O}_F))$ (resp. $\mathrm{Ad}\gamma(wx)(u_{1,2}(\mathcal{O}_L))$ est contenu dans le noyau du caractère Θ_ψ (resp. Θ_χ) et (*) est l'égalité triviale. Si $k=r+1$, alors $m=a_{r,r+1}(w)\geq 0$ (car w appartient à Ω_1) et

$$\begin{aligned}\Theta_\psi\left(\mathrm{Adw}\left(u_{1,2}(\alpha_i)\right)\right) &= \Theta_\psi\left(u_{r,r+1}\left(\varpi_F{}^m\alpha_i\right)\right)\\ &= \psi\left(\varpi_F{}^m\alpha_i\right)\\ &= \chi\circ\lambda\left(\varpi_F{}^m\alpha_i+\mathcal{P}_F{}^n\right)\\ &= \chi\left(\varpi_L{}^m\alpha'_i\right)\\ &= \Theta_\chi\left(u_{r,r+1}\left(\varpi_L{}^m\alpha'_i\right)\right)\\ &= \Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(w)\left(u_{1,2}(\alpha'_i)\right)\right)\end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse (H_1) sur χ.

Cas (2-2) — $\mathrm{Adw}(u_{1,2}(F))\not\subset U(F)$ (i.e. $\mathrm{Adwx}(u_{1,2}(F))\subset U(F)$) et $i\in\{1,\ldots,q-1\}$.
De la relation

$$\begin{pmatrix}1&0\\ \nu&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\nu^{-1}\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu&0\\ 0&-\nu^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\nu^{-1}\\ 0&1\end{pmatrix}$$

pour tout $\nu\in F^\times$, on déduit l'égalité

$$\mathrm{Adx}\left(u_{1,2}(\alpha_i)\right) = u_{1,2}(\alpha_i{}^{-1})\,x\,v_1(\alpha_i)\,u_{1,2}(\alpha_i{}^{-1})$$

où $v_1(\nu)=1+(\nu-1)e_{1,1}(F)-(\nu^{-1}-1)e_{2,2}(F)$ $(\nu\in F^\times)$. Par conséquent

$$\begin{aligned} wbu_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta)x &= wx\,Adx(u_{1,2}(\alpha_i))\,Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta)) \\ &= wx\,u_{1,2}(\alpha_i^{-1})\,x\,v_1(\alpha_i)u_{1,2}(\alpha_i^{-1})Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta)) \\ &= Adwx(u_{1,2}(\alpha_i^{-1}))\,w\,v_1(\alpha_i)u_{1,2}(\alpha_i^{-1})Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta)) \end{aligned}$$

pour tout η appartenant à $F^{\times}$, et

$$\tau_F^{\,n}(f_x)(h_{wb}) = \Theta_\psi(Adwx(u_{1,2}(-\alpha_i^{-1})))\sum_\eta h_{wv_1(\alpha_i)u_{1,2}(\alpha_i^{-1})Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta))}$$

où η parcourt une famille de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$. Les hypothèses $\beta(Adx(b_1)B_F^{\,n})=Adx'(b'_1)B_L^{\,n}$ et $\lambda(\varpi_F^{\,n-1}\eta+\mathcal{P}_F^{\,n})=\varpi_L^{\,n-1}\eta'+\mathcal{P}_L^{\,n}$ $(\eta\in\mathcal{O}_F)$ entraînent l'égalité

$$\beta(v_1(\alpha_i)u_{1,2}(\alpha_i^{-1})Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta))B_F^{\,n})=v_1(\alpha'_i)u_{1,2}(\alpha'^{-1}_i)Adx'(b'_1u_{1,2}(\varpi_L^{\,n}\eta'))B_L^{\,n}$$

pour tout $\eta\in\mathcal{O}_F$. D'où l'on déduit la relation

$$\begin{aligned} \rho\left(h_{wv_1(\alpha_i)u_{1,2}(\alpha_i^{-1})Adx(b_1u_{1,2}(\varpi_F^{\,n}\eta))}\right) &= \delta_{\gamma(w)v_1(\alpha'_i)u_{1,2}(\alpha'^{-1}_i)Ad\gamma(x)(b'_1u_{1,2}(\varpi_L^{\,n}\eta'))} \\ &= \Theta_\chi(Ad\gamma(wx)(u_{1,2}(\alpha'^{-1}_i)))\,\delta_{\gamma(w)u_{1,2}(\alpha'_i)b'_1u_{1,2}(\varpi_L^{\,n}\eta')\gamma(x)} \end{aligned}$$

pour tout $\eta\in\mathcal{O}_F$. Or, $\beta(bB_F^{\,n})=u_{1,2}(\alpha'_i)b'_1B_L^{\,n}$ et quand η parcourt une famille de représentants dans $\mathcal{O}_F$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$, η' parcourt une famille de représentants dans $\mathcal{O}_L$ des éléments du corps résiduel $\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L$. Par conséquent

$$\rho(f_x)(h_{wb}) = \Theta_\psi(Adwx(u_{1,2}(-\alpha_i^{-1})))\,\Theta_\chi(Ad\gamma(wx)(u_{1,2}(\alpha'^{-1}_i)))\,\tau_L^{\,n}(f_{x'})(h_{\gamma(w)b'})$$

et l'on est ramenés à montrer l'égalité

$$\Theta_\psi(Adwx(u_{1,2}(\alpha_i^{-1}))) = \Theta_\chi(Ad\gamma(wx)(u_{1,2}(\alpha'^{-1}_i))). \qquad (**)$$

Pour ce faire, on distingue à nouveau deux cas.

Cas (2-2-1) — $\ell(wx)=\ell(w)-1$.

Alors $Adwx(u_{1,2}(\mathcal{O}_F))\subset B_F\cap U(F)=U(\mathcal{O}_F)$ (lemme 3.3.1). Précisément, il existe un couple (r,k), $r<k$, et un entier $m\geq 0$ tels que $Adwx(u_{1,2}(\nu))=u_{r,k}(\varpi_F^{\,m}\nu)$ pour tout $\nu\in F$. Si $k\neq r+1$, $Adwx(u_{1,2}(\mathcal{O}_F))$ (resp. $Ad\gamma(wx)(u_{1,2}(\mathcal{O}_L))$ est contenu dans le noyau de Θ_ψ (resp. de Θ_χ) et (**) est l'égalité triviale. Si $k=r+1$, alors $Adwx(u_{1,2}(\alpha_i^{-1}))=u_{r,r+1}(\varpi_F^{\,m}\alpha_i^{-1})$ et l'égalité (**) découle alors de l'hypothèse (H_1) sur χ (même raisonnement que pour le cas (2-1).

Cas (2-2-2) — $\ell(wx)=\ell(w)+1$.

Alors $Adw(u_{1,2}(\mathcal{O}_F))\subset B_F\cap U^-(F)=U^-(\mathcal{P}_F)$ (lemme 3.3.1) où U^- désigne le sous-groupe unipotent triangulaire inférieur de G. Précisément, il existe un couple (r,k), $r<k$, et un entier $m\geq 1$ tels que $Adw(u_{1,2}(\nu))=u_{k,r}(\varpi_F^{\,m}\nu)$ pour tout $\nu\in F$. Donc $Adwx(u_{1,2}(\nu))=u_{r,k}(\varpi_F^{\,-m}\nu))$ pour tout $\nu\in F$. Si $k\neq r+1$, $Adw(u_{1,2}(\mathcal{O}_F))$ (resp. $Ad\gamma(w)(u_{1,2}(\mathcal{O}_L))$ est contenu dans le noyau de Θ_ψ (resp. de Θ_χ) et (**) est l'égalité triviale. Si $k=r+1$, $a_{r,r+1}(w)=1-m$ est ≥ 0 (car w appartient à Ω_1) et donc $m=1$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \Theta_\psi(Adwx(u_{1,2}(\alpha_i^{-1}))) &= \Theta_\psi\left(u_{r,r+1}\left((\varpi_F\alpha_i)^{-1}\right)\right) \\ &= \psi\left((\varpi_F\alpha_i)^{-1}\right). \end{aligned}$$

Or, l'hypothèse (H_2) sur χ nous assurant l'égalité

$$\psi\left(\left(\varpi_F\alpha_i\right)^{-1}\right)=\chi\left(\left(\varpi_L\alpha'_i\right)^{-1}\right),$$

en appliquant dans l'autre sens l'enchaînement ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\chi\left(\left(\varpi_L\alpha'_i\right)^{-1}\right) &= \Theta_\chi\left(u_{r,r+1}\left(\left(\varpi_L\alpha'_i\right)^{-1}\right)\right)\\ &= \Theta_\chi\left(\mathrm{Ad}\gamma(wx)\left(u_{1,2}\left(\alpha'^{-1}_i\right)\right)\right).\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3.3. — *Si les corps* F *et* L *sont* (n+1)*-proches, alors la bijection* $'\pi'\mapsto\zeta('\pi')$ *introduite au n° 3.1 induit une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations génériques* $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ *engendrées par* V^n *et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations génériques* $(\pi',\mathbf{G}(L),V')$ *engendrées par* V'^n.

Démonstration.

Soit

$$\lambda_{+1}:\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^{n+1}\xrightarrow{\cong}\mathcal{O}_L/\mathcal{P}_L^{n+1}$$

un isomorphisme d'anneaux relevant l'isomorphisme $\lambda:\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n\to\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^n$ et

$$\lambda_{-1}:\mathcal{P}_F^{-1}/\mathcal{P}_F^n\xrightarrow{\cong}\mathcal{P}_L^{-1}/\mathcal{P}_L^n$$

l'isomorphisme de groupes additifs défini par

$$\lambda_{-1}\left(\varpi_F^{-1}\alpha\right)=\varpi_L^{-1}\alpha'+\mathcal{P}_F^n,\ \lambda_{+1}\left(\alpha+\mathcal{P}_F^{n+1}\right)=\alpha'+\mathcal{P}_L^{n+1},$$

pour tout élément $\alpha\in\mathcal{O}_F$.

Soit χ un caractère de conducteur n du groupe additif L tel que $\chi\circ\lambda_{-1}(\alpha+\mathcal{P}_F^n)=\psi(\alpha)$ pour tout $\alpha\in\mathcal{P}_F^{-1}$. Ainsi, χ vérifie l'hypothèse (H_1) et l'hypothèse (H_2) pour toute famille $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq q-1}$ de représentants dans $\mathcal{O}_F^\times$ des éléments du groupe $(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F)^\times$ et toute famille $\{\alpha'_i\}_{1\leq i\leq q-1}$ d'éléments de $\mathcal{O}_L^\times$ telle que $\lambda_{+1}(\alpha_i+\mathcal{P}_F^{n+1})=\alpha'_i+\mathcal{P}_L^{n+1}$ pour chaque $i\in\{1,\dots,q-1\}$. On peut donc appliquer la proposition 3.3.2.

Soient $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ une représentation générique engendrée par V^n et $\mathcal{W}(\pi,\psi)\subset E(\mathbf{G}(F),\psi)$ un modèle de Whittaker de π par rapport à ψ. Soit ι un $\mathbb{C}$-isomorphisme de V sur $\mathcal{W}(\pi,\psi)$ tel que $\iota\circ\pi(g)=\tau_F(g)\circ\iota$ pour tout élément $g\in\mathbf{G}(F)$ et soit $\mathcal{Q}^n\subset E(\mathbf{G}(L),\chi)^n$ l'image de $\mathcal{W}(\pi,\psi)^n$ par l'isomorphisme $\rho_{\psi,\chi}$. Alors, pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),B_F^n)$ le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} V^n & \xrightarrow{\ \iota\ } & \mathcal{W}(\pi,\psi)^n & \xrightarrow{\ \rho_{\psi,\chi}\ } & \mathcal{Q}^n\\ \downarrow{\scriptstyle \pi^n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_F^n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_L^n(\zeta(f))}\\ V^n & \xrightarrow{\ \iota\ } & \mathcal{W}(\pi,\psi)^n & \xrightarrow{\ \rho_{\psi,\chi}\ } & \mathcal{Q}^n \end{array}$$

est commutatif. Les modules $(\pi^n\circ\zeta^{-1},\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L^n),V^n)$ et $(\tau_L^n\circ\zeta,\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L^n),\mathcal{Q}^n)$ sont donc isomorphes et la sous-représentation de $(\tau_L,\mathbf{G}(L),E(\mathbf{G}(L),\chi))$ engendrée par $\mathcal{Q}^n$ est dans la classe $\zeta('\pi')$.

Réciproquement, si $(\pi,\mathbf{G}(F),V)$ est une représentation lisse non générique, la classe de représentation $\zeta('\pi')$ de $\mathbf{G}(L)$ ne peut être générique. En effet, si $\zeta('\pi')$ est générique, le module $(\pi^n\circ\zeta^{-1},\mathcal{H}(\mathbf{G}(L),B_L^n),V^n)$ est isomorphe (grâce à la proposition 1.2.3) à un sous-module de $(\tau_L{}^n, \mathcal{H}(G(L),B_L{}^n), E(G(L),\chi)^n)$ et la construction ci-dessus entraîne que π est équivalente à une sous-représentation de $(\tau_F, G(F), E(G(F),\psi))$, contradiction.

□

Remarque 3.3.4. — Si l'on s'intéresse seulement aux sous-représentations de τ_F, alors on a plus qu'une bijection à équivalence près. Avec les hypothèses du corollaire 3.3.3, l'application

$$V \mapsto V' = \tau_L(\mathcal{H}(G(L))).\rho(V^n)$$

induit une bijection entre l'ensemble des sous-représentations V de $(\tau_F, G(F), E(G(F),\psi))$ engendrées par V^n et l'ensemble des sous-représentations V' de $(\tau_L, G(L), E(G(L),\chi))$ engendrées par $V'^n = \rho(V^n)$.

□

Remarque 3.3.5. — On peut de la même manière traiter le cas $n=0$ et $B_F{}^0 = B_F$. L'action de $\mathcal{H}(G(F),B_F)$ sur le sous-espace $E(G(F),\psi)^0$ de $E(G(F),\psi)$ formé par les vecteurs fixes sous l'action de B_F est donnée en posant $n=0$ dans les formules de la proposition 2.2, les seuls générateurs à considérer étant les f_g $(g \in \{t, t^{-1}, s_1\})$. Le lemme 3.2 est vrai si F et L ont même corps résiduel (i.e. sont 1-proches), et la proposition 3.3.2 et son corollaire 3.3.3 sont vrais pourvu que F et L soient 2-proches.

□

3.4. A toute représentation admissible irréductible π de G(F), on peut associer ([Go-Ja]) des facteurs $L(s,\pi)$ et $\varepsilon(s,\pi,\varphi)$ de la forme

$$L(s,\pi) = \left(P_\pi(q^{-s})\right)^{-1},\ P_\pi \in \mathbb{C}[T],\ P_\pi(0) = 1,$$

$$\varepsilon(s,\pi,\varphi) = \varepsilon_\pi(q^{-1},\varphi),\ \varepsilon_\pi(T,\varphi) = c(\pi,\varphi)T^m,$$

où q est le cardinal du corps résiduel $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$ et $\varphi: F \to \mathbb{C}^\times$ un caractère additif non trivial. Comme l'entier m ne dépend que du conducteur du caractère φ, on note $m(\pi)$ l'entier défini par

$$\varepsilon_\pi(T,\varphi) = c(\pi,\varphi)T^{m(\pi)}$$

pout tout caractère φ de conducteur $\mathcal{O}_F$.

Pour les représentations génériques irréductibles π, H. Jacquet, I.I. Piatetski-Shapiro et J. Shalika ont donné un critère permettant de déterminer l'entier $m(\pi)$:

Théorème 3.4.1. ([J.P-S.S] theorem 5.1) — *Soit* $(\pi, G(F), V)$ *une représentation admissible irréductible. Alors*

(1) $m(\pi) \geq 0$.

(2) *Soit* $P_F(0) = G(\mathcal{O}_F)$ *et, pour chaque entier* $a \geq 1$, *soit* $P_F(a) \subset G(\mathcal{O}_F)$ *le sous-groupe mirabolique de niveau* a *défini par*

$$P_F{}^n = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} & & & v_1 \\ & X & & \vdots \\ & & & v_{N-1} \\ \hline u_1 & \cdots & u_{N-1} & y \end{array} \right),\ \text{où} \begin{cases} X \in GL_{N-1}(\mathcal{O}_F) \\ y \in 1 + \mathcal{P}_F{}^a \\ u_j \in \mathcal{P}_F{}^a \end{cases} \right\}.$$

Alors, pour chaque entier $a \geq 0$,

$$\left(V^{P_F(a)} \neq 0\right) \Leftrightarrow \left(m(\pi) \leq a\right)$$

□

Pour tout entier a tel que $0 \leq a \leq n$, $B_F{}^n$ est contenu dans $P_F(a)$ et l'isomorphisme d'algèbres du numéro 3.1

$$\zeta : \mathcal{H}\left(G(F), B_F{}^n\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\left(G(L), B_L{}^n\right)$$

induit, par restriction à la sous-algèbre $\mathcal{H}(G(F),P_F(a))$ de $\mathcal{H}(G(F),B_F{}^n)$, un isomorphisme d'algèbres (chapitre 1, prop. 2.2.1)

$$\zeta_{P_F(a)} : \mathcal{H}\left(G(F), P_F(a)\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\left(G(L), P_L(a)\right).$$

Comme

$$B_F{}^n \subset P_F(n) \text{ et } B_F{}^n \not\subset P_F(n+1),$$

le corollaire 3.3.3 et le théorème 3.4.1 entraînent directement le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.2. — *Si les corps* F *et* L *sont* (n+1)*-proche, alors l'application* $'\pi' \mapsto \zeta('\pi')$ *induit, pour chaque entier* a *tel que* $0 \leq a \leq n$, *une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence de représentations génériques irréductibles* $(\pi, G(F), V)$ *telles que* $m(\pi) = a$ *et les classes de représentations génériques irréductibles* $(\pi', G(L), V')$ *telles que* $m(\pi') = a$.

□

Comme nous l'avons déjà dit à la fin de l'introduction du chapitre 1, il semble qu'en utilisant l'équation fonctionelle de Godement-Jacquet on puisse assez facilement généraliser le corollaire 3.4.2 à toutes les représentations admissibles irréductibles; de même pour les facteurs L et ε de paires. A suivre, donc...

4. Références.

[Be-Ze] I.N. BERNSTEIN & A.V. ZELEVINSKY. – *Representations of the group $GL_N(F)$ where F is a local non-archimedean field,* Uspechi Mat. Nauk. **31**, n° 3 (1976), 5-70.

[Cart] P. CARTIER. – *Representations of p-adic groups: a survey*, Proc. of Symp. in Pure Math. **33**, part. 1 (1979), Amer. Math. Soc., Providence, 111-155.

[Deli] P. DELIGNE. – *Le centre de Bernstein,* in Representations des groupes reductifs sur un corps local, Hermann, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[Ge-Ka] I.M. GELFAND & D.A. KAZHDAN. – *Representations of the group GL(n,K) where K is a local field* in Lie groups and their representations, Halstead Press, Budapest, 1974.

[Go-Ja] H. GODEMENT & H. JACQUET. – *Zeta functions of simple algebras*, Lectures Notes in Mathematics, n° **260**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[Howe] R. HOWE. – *Harish-Chandra homomorphisms for p-adics groups*, CBMS, Regional Conference Series in Math., n° **59**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1985.

[J.P-S.S] H. JACQUET, I.I. PIATETSKI-SHAPIRO & J. SHALIKA. – *Conducteur des représentations du groupe linéaire*, Math. Ann. **256** (1981), 199-214.

[Rodi] F. RODIER. – *Whittaker models for admissible representations of reductive p-adics groups*, Proc. of Symp. in Pure Math. **26** (1973), Amer. Math. Soc., Providence, 425-430.

[Spri] T.A. SPRINGER. – *Reductive groups*, Proc. of Symp. in Pure Math., **33**, part 1 (1979), Amer. Math. Soc., Providence, 3-27.

Chapitre 3

Intégrales orbitales sur $GL_N(F)$ où F est un corps local de caractéristique >0[1]

Ce chapitre – à inscrire dans le cadre "nettoyons la caractéristique p"...– ne prétend à aucune originalité. Nous avons simplement rassemblé, en écrivant complètement les démonstrations qui manquaient, un certain nombre de résultats concernant les intégrales orbitales de $G=GL_N(F)$, où F est un corps local non archimédien (i.e. un corps commutatif localement compact, non discret, ultramétrique et à corps résiduel fini) de caractéristique >0. Premier pas, donc, dans l'entreprise qui consiste à étendre à la caractéristique >0 les résultats d'analyse harmonique connus pour n'importe quel groupe réductif en caractéristique 0 (cf. les chapitres 4 et 5 pour la suite du voyage).

Quelques remarques sur l'organisation du chapitre et les sources utilisées:

1. Notations.

2. Classes de conjugaisons de G. On rappelle la structure des classes de conjugaison de G (paramétrisation; décomposition de G en nappes regroupant les orbites de même dimension; fermeture d'une orbite, d'une nappe) partant des orbites unipotentes (cf. [Howe]) puis généralisant aux orbites quelconques (cf. [Laum] n°(4.3) et n°(4.8)). Les complications dues à la caractéristique positive sont essentiellement les suivantes: les orbites inséparables (i.e. dont au moins une composante irréductible du polynôme minimal est inséparable sur F) dégénèrent lorsqu'on passe à une clôture algèbrique $\bar{F}$ de F (il existe par exemple des éléments semi-simples dans G au sens de [Bour] Alg. VIII, §9, n°2, déf. 2, qui deviennent unipotents modulo le centre lorsque considérés dans $GL_N(\bar{F})$; on n'a plus la décomposition de Jordan en parties semi-simple et unipotente commutant entre elles). Signalons le rôle central joué par la proposition 2.2.6.1 (exprimant la fermeture d'une orbite de G en termes de l'orbite dans un sous-groupe de Levi M de G d'un élément $s\in M$ semi-simple dans M) pour la théorie des intégales orbitales, puisque c'est grâce à elle qu'on peut, dans le numéro 3, montrer leur convergence.

---

[1] Toutes les techniques utilisées dans ce chapitre sont indépendantes de la caractéristique et donc à fortiori valables pour F corps local non archimédien de caractéristique nulle.

3. Intégrales orbitales sur G. On montre, grâce aux travaux de R. Howe ([Howe] prop. 5) dans le cas unipotent et usant des idées de [De-Ka-Vi] déjà rédigées par G. Laumon ([Laum] n°(4.8)), la convergence des intégrales orbitales sur G. On rappelle les propriétés de descente des dites intégrales, propriétés nous conduisant à adopter une normalisation qui leur est compatible. Les points suivants sont cités dans [De-Ka-Vi] mais, à notre connaissance, non rédigés en caractéristique >0; on a donc puisé avec beaucoup de circonspection dans la littérature écrite en caractéristique 0 (utilisant principalement la thèse de J. Rogawski ([Roga]) et l'article de M.F. Vigneras ([Vign])): développement en germes d'intégrales orbitales au voisinage des éléments semi-simples; homogénéité des germes au voisinage des éléments centraux; indépendance linéaire des germes au voisinage des éléments semi-simples séparables.

4. Une bonne normalisation des intégrales orbitales. Caractérisation, indépendance des germes et densité. On a jusqu'à présent soigneusement évité de s'approcher de trop près des éléments inséparables de G. On ne peut en effet traiter ces éléments en se contentant d'adapter, comme nous l'avons fait dans le numéro 3, les techniques développées en caractéristique 0. L'idée, suggérée dans [De-Ka] puis [De-Ka-Vi], est de produire une normalisation rendant, pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ (où $C_{c,\infty}(G)$ désigne l'espace des fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$ localement constantes et à support compact), les intégrales orbitales de f localement constantes sur chaque nappe. Pour ce faire, on utilise les travaux de C.J. Bushnell & P.C. Kutzko ([Bu-Ku]) permettant de contrôler assez finement le comportement des éléments voisins d'un élément $s \in G$ irréductible dans G (i.e. dont le polynôme minimal est irréductible sur F) sous l'action de G par conjugaison. On en déduit une normalisation pour ces éléments, normalisation que l'on étend à tous les éléments de G grâce aux propriétés de descente des intégrales orbitales montrées dans le n° 3 (signalons qu'aux points séparables, cette normalisation ne coïncide pas avec celle définie par M.F. Vignéras dans [Vign], cf. la remarque 4.1.4). Ainsi normalisée, l'intégrale orbitale d'une fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ est localement constante sur chaque nappe. En particulier les germes d'intégrales orbitales $[b_x(.)]_{G,s}$ (s semi-simple dans G) induits par cette normalisation sont constants sur chaque nappe. On en déduit une caractérisation des intégrales orbitales sur G: ce sont les fonctions $\Phi: G \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

(i) la restriction de Φ à chaque nappe de G est localement constante.

(ii) Φ est AdG-invariante.

(iii) Il existe une partie compacte ω de G telle que pour chaque nappe X de G, le support de la restriction à X de la fonction Φ (c'est-à-dire la partie $\{x \in X, \Phi(x) \neq 0\}$ grâce au point (i)) est contenu dans $AdG(\omega)$.

(iv) En chaque point semi-simple s de G, Φ induit un germe de fonctions $[\Phi(.)]_{G,s}$ combinaison linéaires des germes $[b_x(.)]_{G,s}$.

Signalons que cette caractérisation est (assez peu clairement) énoncée dans [De-Ka-Vi]. On montre ensuite, grâce la normalisation ci-dessus, la propriété d'indépendance des germes au voisinage des éléments semi-simples inséparables, propriété à laquelle – soyons franc – on ne s'attendait pas (que de temps perdu à chercher un contre-exemple!). Enfin, on montre le théorème de densité des intégrales orbitales semi-simples régulières séparables dans l'espace des distributions AdG-invariantes sur G. Il s'obtient en deux temps en suivant les indications de [De-Ka-Vi]: on commence, grâce à la propriété d'indépendance des germes au voisinage des éléments semi-simples, par montrer qu'une intégrale orbitale nulle sur l'ouvert des éléments semi-simples réguliers séparables est nulle sur G tout entier; on passe aux distributions AdG-invariante en rangeant les nappes par dimension d'orbites croissante et grâce aux résultats de I.M. Gelfand & D.A. Kazhdan ([Ge-Ka] prop. 1).

1. Notations.

1.1. Soient:

— F un corps local de caractéristique $p>0$, à corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de cardinal q. On fixe ϖ une uniformisante de F, ce qui permet d'identifier F à $\mathbb{F}_q((\varpi))$, le corps des séries formelles en l'indéterminée ϖ sur $\mathbb{F}_q$.

— $\mathcal{O}=\mathcal{O}_F=\mathbb{F}_q[[\varpi]]$ l'anneau des entiers de F.

— $\mathcal{P}=\mathcal{P}_F=\varpi\mathcal{O}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$.

— $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi|_F=q^{-1}$.

— N un entier ≥ 2 et $\mathfrak{g}=\mathbf{M}_N(F)$ l'algèbre des matrices $N\times N$ sur F, munie de la topologie ϖ-adique induite par F. On note encore $|\ |_F$ la norme sur $\mathfrak{g}$ donnée par la plus grande valeur absolue des coefficients. La fermeture, et plus généralement toutes les notions topologiques utilisées, feront référence, sauf mention du contraire, à la topologie ϖ-adique.

— $\mathfrak{g}^0=\mathbf{M}_N(\mathcal{O})$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire maximal standard de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^i=\varpi^i\mathbf{M}_N(\mathcal{O})$, $i\in\mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathfrak{g}^1$ de $\mathfrak{g}^0$.

— $G=GL_N(F)$ le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{g}$.

— $K=GL_N(\mathcal{O})$ le groupe multiplicatif de $\mathfrak{g}^0$. C'est un sous-groupe ouvert compact maximal de G.

— $K^i=1+\mathfrak{g}^i$ (i entier ≥ 1) le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}^i$ de K. C'est un sous-groupe distingué de K.

— $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments unipotents de G.

— T_0 le tore diagonal de G, B_0 le sous-groupe de Borel de G formé par les matrices triangulaires supérieures et U_0 le radical unipotent de B_0 formé par les matrices triangulaires supérieures unipotentes.

1.2. Soient (P,A) une *paire parabolique de* G ([Cart] n° 2.1), U le radical unipotent de P et M le centralisateur de A dans G. Un sous-groupe ouvert compact maximal K_P de G est dit *en bonne position par rapport à* (P,A), s'il vérifie la décomposition

$$P\cap K_P=(M\cap K_P)(U\cap K_P).$$

Ainsi, K est en bonne position par rapport à la paire (B_0,T_0) (cf. [Be-Ze] lemma 3.11.(a)).

On note Ad l'action de G sur $\mathfrak{g}$ par conjugaison. Si H est un sous-groupe de G, Y une partie de $\mathfrak{g}$ et x un élément de $\mathfrak{g}$, on note

$$\mathrm{AdH}(Y)=\{\mathrm{Adh}(y),\ h\in H,\ y\in Y\},$$

$$H_x=\{h\in H,\ \mathrm{Adh}(x)=x\}\ \text{le fixateur de x dans H},$$

$$O_H(x)=\mathrm{AdH}(x)\ \text{l'AdH-orbite de x}.$$

Si P est un sous-groupe parabolique de G, on note

$$\delta_P:P\to q^{\mathbb{Z}}\subset\mathbb{Q}^\times$$

le caractère module usuel sur P déterminé par la relation

$$\delta_P(p')=d(\mathrm{Ad}p'(p))/dp\quad(p'\in P)$$

pour toute mesure de Haar (à droite ou à gauche) dp sur P.

Si M est un sous-groupe de Levi de G, on définit la fonction $D_{M\backslash G}: M\to F$ par

$$D_{M\backslash G}(m)=\det{}_{\mathrm{Lie}(M)\backslash\mathrm{Lie}(G)}\left(1-\mathrm{Ad}m^{-1}\right)\quad(m\in M).$$

1.3. Si Ω est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_{c,\infty}(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur Ω, localement constantes et à support compact. Le dual algébrique $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω. Si T est une distribution sur Ω, on note

$$\int_{\Omega} f(x)dT(x) \text{ ou } T(f)$$

la valeur de T sur l'élément f de $C_{c,\infty}(\Omega)$.

Si f est une fonction sur Ω à valeurs complexes, on appelle support de f (et l'on note supp(f)) l'ensemble des points $w \in \Omega$ tels que pour tout voisinage $\mathcal{W}_w$ de w dans Ω, f n'est pas identiquement nulle $\mathcal{W}_w$. De même, si $T \in \mathcal{D}(\Omega)$, on appelle support de T (et l'on note supp(T)), l'ensemble des points $w \in \Omega$ tels que pour tout voisinage $\mathcal{W}_w$ de w dans Ω, T n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{W}_w$.

Si Γ est une partie ouverte (resp. fermée) de Ω, on identifie $C_{c,\infty}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{D}(\Gamma)$) à l'espace des fonctions (resp. distributions) sur Ω à support dans Γ (cf. [Be-Ze] n°1.7).

Soit $\tau : G \rightarrow Aut(G)$ une action de G sur G. Elle induit de manière naturelle une action sur l'espace $C_{c,\infty}(G)$ et une action sur $\mathcal{D}(G)$ que l'on note respectivement τ^* et τ:

$$\left(\tau^*g(f)\right)(x) = f\left(\tau g^{-1}(x)\right), \; g \in G, \; f \in C_{c,\infty}(G), \; x \in G.$$
$$\left(\tau g(T)\right)(f) = T\left(\tau^* g^{-1}(f)\right), \; g \in G, \; T \in \mathcal{D}(G), \; f \in C_{c,\infty}(G).$$

Si Ω est une partie AdG-invariante de G, on note $C_0(\Omega)$ le sous-espace de $C_{c,\infty}(\Omega)$ engendré par les fonctions de la forme

$$f - Ad^*g(f), \; f \in C_{c,\infty}(\Omega), \; g \in G.$$

2. Structure des classes de conjugaison de G.

Les "faits" rappelés dans cette section sont aujourd'hui bien connus (bien que les références réellement utilisables en caractéristique >0 soient relativement rares). Une remarque cependant: nous avons choisi de présenter les résultats de manière progressive, à savoir partant des orbites unipotentes ([Howe]) puis généralisant aux orbites quelconques (cf. [Laum]). Nous sommes bien conscient des répétitions engendrées par une telle présentation, mais nous espérons ainsi mettre en valeur le rôle fondamental joué par les éléments unipotents dans l'analyse harmonique sur G.

2.1. Les classes de conjugaison unipotentes de G.

2.1.1. On note Π_N l'ensemble des partitions (ordonnées) de N, c'est à dire l'ensemble des suites

$$(\alpha) = \left(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r\right),$$
$$\alpha_i \text{ entier } \geq 1, \; \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = N.$$

A tout élément $(\alpha) = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r)$ de Π_N, on associe la partition duale $(\hat{\alpha}) \in \Pi_N$, définie par

$$(\hat{\alpha}) = \left(\hat{\alpha}_1 \geq \hat{\alpha}_2 \geq \cdots \geq \hat{\alpha}_m\right)$$

$$\widehat{\alpha}_j=\#\{1\leq i\leq r,\ \alpha_i\geq j\},\ \mathrm{m}=\max\{j\geq 1,\ \widehat{\alpha}_j\neq 0\}.$$

On peut exprimer cette dualité en termes de diagrammes de Young: le diagramme de Young de la partition (α) est formé de r lignes comportant respectivement $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ cases; la partition duale a un diagramme de Young formé de r colonnes comportant respectivement $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ cases, se déduisant du diagramme de Young de (α) par symétrie par rapport à la seconde diagonale (cf. [Mac.D] chap. I, n° 1). Un exemple:

$$(\alpha)=(5\geq 4\geq 1)\ \leftrightarrow\ \begin{array}{c|c|c|c|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & & & \end{array}\ \rightarrow\ \begin{array}{c|c|c} \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & \end{array}\ \leftrightarrow\ (\widehat{\alpha})=(3\geq 2\geq 2\geq 2\geq 1)$$

Si $(\alpha)=(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r)$ est une partition de N, on pose (convention que l'on utilisera tout au long du chapitre) $\alpha_i=0$ pour tout $i\in\{r+1,\dots,N\}$.

On a sur Π_N une relation d'ordre partielle "$\prec$", définie comme suit. Soient deux partitions de N, $(\alpha)=(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r)$ et $(\beta)=(\beta_1\geq\beta_2\geq\cdots\geq\beta_k)$. Alors,

$$(\alpha)\prec(\beta)\ \Leftrightarrow\ \left(\alpha_1+\cdots+\alpha_i\leq\beta_1+\cdots+\beta_i\ \ \text{pour tout}\ i\geq 1\right).$$

On vérifie aisément (cf. [Mac.D] chap. I, (1.11)) la propriété

$$(\alpha)\prec(\beta)\Leftrightarrow(\widehat{\beta})\prec(\widehat{\alpha}).$$

Enfin, on dira que deux partitions (α) et (β) de N telles que $(\alpha)\prec(\beta)$ sont *adjaçantes* s'il n'existe pas de partition (γ) de N telle que $(\gamma)\neq(\alpha)$, $(\gamma)\neq(\beta)$ et $(\alpha)\prec(\gamma)\prec(\beta)$.

2.1.2. L'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments unipotents de G est union finie de classes de conjugaison, ces dernières étant paramétrées par les éléments de Π_N. Rappelons la construction (on peut, par exemple, se référer à [Howe]):

A tout élément $u\in\mathcal{U}$, on associe les objets suivants: le drapeau $\{V_{u,i}\}_{0\leq i\leq r}$ de F^N défini par

$$V_{u,i}=\ker\{(u-1)^i:F^N\to F^N\},\ 0\leq i\leq r,$$
$$r-1=\mathrm{rang}(u-1),$$

la partition $(\lambda)_u$ de N définie par

$$(\lambda)_u=(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r),$$
$$\lambda_i=\dim(V_{u,i})-\dim(V_{u,i-1}),\quad 1\leq i\leq r,$$

et la partition duale $(\alpha)_u$. On appelle $(\alpha)_u$ la *partition de* N *associée à* u.

Ainsi, l'application

$$\xi:u\mapsto(\alpha)_u$$

induit une bijection de l'ensemble des AdG-orbites de $\mathcal{U}$ sur Π_N.

2.1.3. On construit de manière tout à fait classique une section de ξ à valeurs dans U_0. Pour tout entier $n\geq 1$, on définit le bloc de Jordan J_n

$$J_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(F) \text{ si } n \geq 2,\ J_1 = 1(\in F).$$

Si v est un élément unipotent de $GL_n(F)$ de polynôme minimal $(T-1)^n$, on peut identifier le F-espace vectoriel F^n avec $F[T]/((T-1)^n)$ et l'action de v sur F^n avec la multiplication par T. Alors $\{(T-1)^{n-1},\ldots,(T-1),1\}$ est une base de $F[T]/((T-1)^n)$ et J_n est la matrice de la multiplication par T dans cette base.

A tout élément $(\alpha)=(\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_r)$ de Π_N, on associe la matrice diagonale par blocs

$$u_{(\alpha)} = \mathrm{diag}\left(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_r}\right) \in U_0.$$

Alors, l'application

$$(\alpha) \mapsto u_{(\alpha)}$$

est une section de ξ.

Pour tout $(\alpha)\in\Pi_N$, on note $O_{(\alpha)}$ l'orbite $O_G(u_{(\alpha)})$.

2.1.4. Fermeture des orbites unipotentes.

On associe canoniquement à tout élément unipotent de G un sous-groupe parabolique de G. Soient $x\in\mathcal{U}$, $\{V_{x,i}\}_{0\leq i\leq r}$ le drapeau de F^N défini au numéro 2.1.2 et $P_{(x)}$ le sous-groupe parabolique de G stabilisant ce drapeau. On appelle $P_{(x)}$ *le sous-groupe parabolique de* G *associé à* x.

La proposition suivante ([Howe], lemme 2) est la clé de voûte de toute la construction. C'est grâce à elle que R. Howe montre la convergence des intégrales orbitales unipotentes de G indépendamment de la caractéristique ([Howe], prop. 5).

Proposition 2.1.4.1. — *Soient* $x\in\mathcal{U}$, $P=P_{(x)}$ *le sous-groupe parabolique de* G *associé à* x *et* U *le radical unipotent de* P. *Alors* $O_P(x)$ *est dense dans* U *pour la topologie* ϖ*-adique.*

□

Comme le groupe U est fermé dans G, la partie AdC(U) est fermée dans G pour toute partie compacte $C\subset G$. D'où le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4.2. — *Soit* K_P *un sous-groupe ouvert compact de* G *tel que* $G=K_PP$. *Alors* $\mathrm{Ad}K_P(U)$ *est la fermeture de* $O_G(x)$ *dans* G *pour la topologie* ϖ*-adique.*

□

Remarque 2.1.4.3. — Comme

$$U=\left\{y \in G,\ (y-1)V_{x,i}\subset V_{x,i-1},\ 1\leq i\leq r\right\},$$

tout élément $y\in U$ induit par passage au quotient pour chaque $i\in\{2,\ldots,r\}$, une application

$$(y-1)_i : V_{x,i}/V_{x,i-1} \to V_{x,i-1}/V_{x,i-2}.$$

Le lemme 2 de [Howe] dit très exactement que l'orbite $\mathcal{O}_P(y)$ de y dans P est dense dans U pour la topologie ϖ-adique si et seulement si les applications $(y-1)_i$, $1 \leq i \leq r$, sont toutes injectives.

□

On peut, de manière équivalente, exprimer les résultats précédents en termes de partitions de N.

Proposition 2.1.4.4. — *Pour tout* $x \in \mathcal{U}$, $\overline{\mathcal{O}_G(x)}^G = \coprod_{(\beta) \prec (\alpha)_x} \mathcal{O}_{(\beta)}$.

Démonstration.

Comme la fermeture de l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$ est une partie AdG-invariante de $\mathcal{U}$ (cf. le corollaire 2.1.4.2), il suffit de montrer qu'une orbite unipotente $\mathcal{O}_{(\beta)}$ ($(\beta) \in \Pi_N$) est contenue dans cette fermeture si et seulement si $(\beta) \prec (\alpha)_x$.

Soit $(\beta) = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_m)$ une partition de N et soit y un élément de l'orbite $\mathcal{O}_{(\beta)}$. Alors (cf. le numéro 2.1.3) le F[T]-module F^N induit par y est isomorphe au F[T]-module

$$\oplus_{1 \leq i \leq r} F[T]/(T-1)^{\beta_i}$$

et la suite

$$\left\{(T-1)^{\beta_1}, (T-1)^{\beta_2}, \ldots, (T-1)^{\beta_m}\right\}$$

est la suite des diviseurs élémentaires associés à y. Ainsi ([Bour], Alg. VII, §5 appendice, n° 3, prop. 5), pour chaque $i \in \{1,\ldots,N\}$, le polynôme

$$(T-1)^{\beta_N + \beta_{N-1} + \cdots + \beta_{N-i+1}}$$

est le p.g.c.d. des mineurs d'ordre i de la matrice $(T-y) \in \mathbf{GL}_N(F[T])$.

Notons $(\alpha) = (\alpha)_x = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_m)$ la partition de N associée à x.

Si une orbite unipotente $\mathcal{O}_{(\beta)}$ est dans la fermeture dans G de l'orbite $\mathcal{O}_{(\alpha)}$ pour une partition $(\beta) = (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_m)$ de N, il est clair que cette partition vérifie la relation

$$\alpha_N + \alpha_{N-1} + \cdots \alpha_{N-i+1} \leq \beta_N + \beta_{N-1} + \cdots + \beta_{N-i+1}$$

pour chaque entier $i \in \{1,\ldots;N\}$. D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{O}_{(\beta)} \subset \overline{\mathcal{O}_{(\alpha)}}^G\right) &\Rightarrow \left(\beta_1 + \cdots + \beta_k \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{pour tout } k \in \{1,\ldots,N\}\right) \\ &\Rightarrow \left((\beta) \prec (\alpha)\right).\end{aligned}$$

Quant à l'implication inverse (dont nous ne donnons pas la preuve explicite), elle s'obtient, après réduction du problème grâce à la transitivité de la relation d'ordre partielle "$\prec$" au cas de deux partitions de N adjaçantes $(\beta) \prec (\alpha)$, en produisant une application algébrique $\varphi : F \to G$ telle que $\varphi(0) \in \mathcal{O}_{(\beta)}$ et $\varphi(x) \in \mathcal{O}_{(\alpha)}$ pour tout $x \in F^\times$.

□

En particulier, la proposition 2.1.4.4 nous dit que $\mathcal{O}_G(1) = 1$ est l'unique AdG-orbite unipotente fermée de G et qu'elle est contenue dans la fermeture dans G (pour la topologie ϖ-adique) de chaque AdG-orbite unipotente de G.

2.2. Les classes de conjugaisons de G.

2.2.1. Tout élément x de G définit sur le F-espace vectoriel F^N une structure de F[T]-module V_x. Deux éléments x et y de G sont dans la même AdG-orbite si et seulement si les F[T]-modules V_x et V_y sont isomorphes.

Ainsi, l'application $x \mapsto V_x$ induit une bijection entre

(1) Les AdG-orbites de G.

(2) Les classes d'isomorphisme de F[T]-modules W vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \dim_F(W) = N \\ T.W = W \end{cases}.$$

De la même manière qu'on a paramétré les orbites unipotentes par les partitions ordonnées de N, on peut définir une paramétrisation pour les orbites quelconques. On note Π l'ensemble des partitions (ordonnées), une partition étant par définition une suite d'entiers ≥ 0 presque tous nuls $(\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_\iota \geq \cdots)$. A toute partition $(\delta) = (\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_\iota \geq \cdots)$, on peut associer un poids $|\delta|$ et une longueur long(δ), respectivement définis par

$$|\delta| = \sum_{i \geq 1} \delta_i ,$$

$$\mathrm{long}(\delta) = \begin{cases} \max\{i \geq 1,\ \delta_i \neq 0\} \text{ si } |\delta| \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On note Φ_F l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré ≥ 1 de F[T], excepté le polynôme T.

La théorie des modules sur les anneaux principaux nous permet d'affirmer l'existence d'une application

$$G \times \Phi_F \to \Pi,\ (x,f) \mapsto \beta_x(f) = \left(\beta_{x,1}(f) \geq \beta_{x,2}(f) \geq \cdots\right),$$

telle que, pour chaque élément x de G, on ait un isomorphisme de F[T]-modules

$$V_x \cong \bigoplus_{\substack{f \in \Phi_F \\ i \geq 1}} F[T]/\left(f^{\beta_{x,i}(f)}\right).$$

Ainsi ([Bour] Alg.VII, §5, n°1, Prop.3), l'application $\beta : x \mapsto \beta_x$ induit une bijection entre

(1) les classes de conjugaison de G.

(2) les applications $\mu : \Phi_F \to \Pi$ telles que $\|\mu\| = N$ où (définition)

$$\|\mu\| = \sum_{f \in \Phi_F} \deg(f) |\mu(f)|.$$

Si $\mu : \Phi_F \to \Pi$, on définit le *support de* μ par $\mathrm{supp}(\mu) = \{f \in \Phi_F,\ |\mu|_F \neq 0\}$.

Si $\mu : \Phi_F \to \Pi$ est une application telle que $\|\mu\| = N$, on fixe (arbitrairement) un ordre sur l'ensemble (fini) supp(μ), ordre auquel il sera fait référence tout au long du chapitre. Noter que cet ordre ne joue aucun rôle dans la théorie qui nous intéresse (cf. la définition 3.3.1, propriété (4)), même si des constructions intermédiaires en dépendent (cf. le numéro 2.2.6).

2.2.2. On construit, tout aussi classiquement qu'au paragraphe 2.1.3, une section de β.

A tout polynôme $f \in \Phi_F$ écrit sous la forme $f(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \cdots - a_1 T - a_0$, $a_i \in F$, on associe le bloc de Jordan $J_1(f) \in \mathbf{GL}_r(F)$ (appelé aussi *matrice compagnon de* f) donné par

$$J_1(f)=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Si, de plus, m est un entier ≥ 2, on note $J_m(f) \in \mathbf{GL}_{mr}(F)$ la matrice définie par

$$J_m(f)=\left(\begin{array}{c:c:c:c:c} J_1(f) & E_r & 0_r & \cdots & 0_r \\ \hdashline 0_r & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & & \ddots & 0_r \\ \hdashline \vdots & & \ddots & \ddots & E_r \\ \hdashline 0_r & \cdots & \cdots & 0_r & J_1(f) \end{array}\right)$$

où la matrice $E_r \in \mathbf{M}_r(F)$ est donnée par

$$E_r=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si y est un élément de $GL_{mr}(F)$ de polynôme minimal $f(T)^m$, on peut identifier le F-espace vectoriel F^{mr} avec $F[T]/(f(T)^m)$ et l'action de y sur F^{mr} avec la multiplication par T. Alors

$$\left\{\begin{array}{l} f(T)^{m-1}, Tf(T)^{m-1}, \ldots, T^{r-1}f(T)^{m-1}; \ldots \\ \qquad\qquad \ldots; f(T), Tf(T), \ldots, T^{r-1}f(T); 1, T, \ldots, T^{r-1} \end{array}\right\}$$

est une base de $F[T]/(f(T)^m)$ et $J_m(f) \in \mathbf{GL}_{mr}(F)$ est la matrice de la multiplication par T dans cette base.

Si $\mu : \Phi_F \to \Pi$ est une application satisfaisant la condition $\|\mu\| = N$, on définit l'élément x_μ de G par

$$x_\mu = \mathrm{diag}\left(J_{m_{1,1}}(f_1), \ldots, J_{m_{1,d_1}}(f_1), \ldots, J_{m_{k,1}}(f_k), \ldots, J_{m_{k,d_k}}(f_k)\right),$$

où les blocs de Jordan sont définis et rangés de manière suivante :

$$\mathrm{supp}(\mu) = \{f_1, \ldots, f_k\} \text{ (ordre arbitraire fixé au numéro 2.2.1)},$$
$$\mu(f_j) = (m_{j,1} \geq m_{j,2} \geq \cdots),$$
$$d_j = \mathrm{long}(\mu(f_j)),\ 1 \leq j \leq k.$$

Alors, l'application

$$\mu \mapsto x_\mu$$

est une section de β.

Pour toute application $\mu : \Phi_F \to \Pi$ telle que $\|\mu\| = N$, on note O_μ l'AdG-orbite de x_μ.

2.2.3. Décomposition de G en nappes de Dixmier.

La théorie des diviseurs élémentaires ([Bour] Alg. VII, §5, n°1, prop.2) permet d'associer à tout élément x de G une suite (unique) $\{f_{x,i}\} \subset F[T]$, $1 \leq i \leq r_x$, de polynômes unitaires de degrés ≥ 1 telle que

$$\begin{cases} f_{x,i+1} \text{ divise } f_{x,i},\ 1 \leq i \leq r_x - 1 \\ V_x \cong \bigoplus_i F[T]/(f_{x,i}), \text{ isomorphisme de } F[T]\text{-modules} \end{cases}$$

On définit alors une partition $(\alpha)_x$ de N par

$$(\alpha)_x = (\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_{r_x}),$$
$$\alpha_i = \deg(f_{x,i}),\ 1 \leq i \leq r_x.$$

Cette application

$$G \to \Pi_N,\ x \mapsto (\alpha)_x,$$

prolonge bien évidemment l'application

$$\xi : \mathcal{U} \to \Pi_N,\ u \mapsto (\alpha)_u,$$

définie au numéro 2.1.2.

A toute partition $(\alpha) = (\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_r)$ de N, on associe la *nappe de Dixmier* $X_{(\alpha)} \subset G$ définie par

$$X_{(\alpha)} = \{x \in G, (\alpha)_x = (\alpha)\}.$$

Proposition 2.2.3.1. —
(i) *Chaque nappe contient une unique orbite unipotente.*
(ii) *Chaque nappe est une partie* AdG-*invariante de* G *et*

$$G = \coprod_{(\alpha) \in \Pi_N} X_{(\alpha)}.$$

(iii) *Soit* $(\alpha) \in \Pi_N$. *Alors pour tout* $x \in X_{(\alpha)}$, *la dimension de l'orbite* $O_G(x)$ (*en tant que variété* ϖ-*adique*) *est*

$$N^2 - \sum_j (\hat{\alpha}_j)^2.$$

(iv) *Soit* $(\alpha) \in \Pi_N$. *Alors la fermeture de la nappe* $X_{(\alpha)}$ *dans* G *pour la topologie* ϖ-*adique vérifie la relation d'inclusion*

$$\overline{X_{(\alpha)}}^G \subset \coprod_{(\beta) \prec (\alpha)} X_{(\beta)}$$

et $X_{(\alpha)}$ *est ouverte dans* $\coprod_{(\beta) \prec (\alpha)} X_{(\beta)}$.

Démonstration.

(i) et (ii) sont évidents.

(iii) Il est clair que la dimension de $O_G(x)$ coïncide avec $N^2 - \dim(G_x)$. Or, l'algèbre de Lie de G_x s'identifie à $\mathrm{End}_{F[T]}(V_x)$ dont la dimension est bien connue ([Jaco] theorem 3.16).

(iv) A tout élément x de G, on associe la suite $\{f_{x,1}, f_{x,2}, \dots, f_{x,N}\} \subset F[T]$ où $\{f_{x,i}\}$, $1 \leq i \leq r_x$, est la suite des diviseurs élémentaires associés à x et $f_{x,i} = 1$ pour $r_x < i \leq N$. Alors ([Bour] Alg. VII, §5 appendice, n° 3, prop.5), pour tout entier $1 \leq i \leq N$,

$$h_{x,i} = f_{x,N} \dots f_{x,N-i+1}$$

est le p.g.c.d. des mineurs d'ordre i de la matrice $T-x \in GL_N(F[T])$.

Par conséquent, si $(\alpha)=(\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_d)$ est une partition de N (et toujours avec la convention $\alpha_i = 0$ pour tout entier i tel que $d < i \leq N$) on a la relation

$$\begin{aligned}\left(y \in \overline{X_{(\alpha)}}^{G}\right) &\Rightarrow \left(\alpha_N + \dots + \alpha_{N-i+1} \leq \deg(h_{y,i}) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\right) \\ &\Rightarrow \left(\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \deg(f_{y,1} \dots f_{y,k}) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq N\right) \\ &\Rightarrow (\alpha)_y \prec (\alpha).\end{aligned}$$

La première assertion du point (iv) est montrée.

Quant à la seconde assertion du point (iv), elle résulte de la première grâce à la transitivité de la relation d'ordre partielle "$\prec$". En effet, pour toute partition (β) de N, la partie $\amalg_{(\gamma)\prec(\beta)} X_{(\gamma)}$ est union des fermetures dans G des nappes $X_{(\gamma)}$ $((\gamma) \prec (\beta))$ donc est fermée dans G. Comme la partie $(\amalg_{(\beta)\prec(\alpha)} X_{(\beta)}) - X_{(\alpha)}$ est union des parties $\amalg_{(\gamma)\prec(\beta)} X_{(\gamma)}$ $((\beta)\prec(\alpha)$, $(\beta)\neq(\alpha))$, elle est fermée dans G donc dans $\amalg_{(\beta)\prec(\alpha)} X_{(\beta)}$ et par conséquent (passage au complémentaire) $X_{(\alpha)}$ est ouverte dans $\amalg_{(\beta)\prec(\alpha)} X_{(\beta)}$.

□

Remarque 2.2.3.2. — La fermeture (pour la topologie ϖ-adique) d'une nappe $X_{(\alpha)}$ de G n'est, en général, pas égale à l'union des nappes $X_{(\beta)}$ $((\beta)\prec(\alpha))$. Considérons par exemple les partitions $(\alpha)=(3\geq 1)$ et $(\beta)=(2\geq 2)$ de $N=4$ (on a bien $(\beta)\prec(\alpha)$) et un élément $x \in \mathbf{GL}_4(F)$ ayant un polynôme minimal Q(T) de degré 2 irréductible sur F. Cet élément x appartient à la nappe $X_{(\beta)}$ mais n'appartient pas à la fermeture dans $\mathbf{GL}_4(F)$ de la nappe $X_{(\alpha)}$ (il n'est en effet pas possible d'approcher d'aussi près que l'on veut le polynôme caractéristique $Q(T)^2$ de x par un polynôme ayant une racine dans F).

□

2.2.4. Fermeture des classes de conjugaisons de G en termes de partitions.

Proposition 2.2.4.1. — *Soit* x *un élément de* G. *Alors, la fermeture de l'orbite* $O_G(x)$ *dans* G *pour la topologie* ϖ*-adique est l'union disjointe des orbites* O_μ *où* μ *parcourt l'ensemble (fini) des applications* $\Phi_F \to \Pi$ *telles que*

$$\begin{cases} |\mu(f)| = |\beta_x(f)| = N_f & \textit{pour tout } f \in \Phi_F \\ \mu(f) \prec \beta_x(f) \ \left(\textit{dans } \Pi_{N_f}\right) & \textit{pour tout } f \in \Phi_F \end{cases}.$$

Démonstration.

Il s'agit, peu ou prou, des mêmes arguments que ceux utilisés pour démontrer la proposition 2.1.4.4 et le point (iv) de la proposition 2.2.3.1.

A tout élément y de G, on associe la suite $\{f_{y,1}, f_{y,2}, \dots, f_{y,N}\} \subset F[T]$ où $\{f_{y,i}\}$, $1 \leq i \leq r_y$, est la suite des diviseurs élémentaires associés à x et $f_{y,i} = 1$ pour $r_y < i \leq N$. Alors ([Bour] Alg. VII, §5 appendice, n°3, prop.5), pour tout entier $1 \leq i \leq N$,

$$h_{y,i} = f_{y,N} \dots f_{y,N-i+1}$$

est le p.g.c.d. des mineurs d'ordre i de la matrice $T-x \in GL_N(F[T])$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\left(y \in \overline{O_G(x)}^G\right) &\Rightarrow \left(h_{x,i} \text{ divise } h_{y,i} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\right) \\ &\Rightarrow \left(f_{y,1} \dots f_{y,k} \text{ divise } f_{x,1} \dots f_{x,k} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq N\right) \\ &\Rightarrow \left(|\beta_y(f)| = |\beta_x(f)| \text{ et } \beta_y(f) \prec \beta_x(f) \text{ pour tout } f \in \Phi_F\right).\end{aligned}$$

Quant à l'implication inverse, elle s'obtient, après réduction du problème au cas d'un élément x dont le polynôme minimal possède une unique composante irréductible sur F, de la même manière que dans le cas unipotent (cf. les indications données à la fin de la démonstration de la proposition 2.1.4.4).

□

Corollaire 2.2.4.2. —

(1) *Les éléments de* G *d'*AdG*-orbite fermée dans* G *pour la topologie* ϖ*-adique sont les éléments* x *tels que* $\beta_{x,i}(f) \in \{0,1\}$ *pour tout* $f \in \Phi_F$ *et tout entier* $i \geq 1$ *(c'est à dire les éléments semi-simples au sens de [Bou] Alg. VIII, §9, n°1, déf. 1).*

(2) *La fermeture d'une* AdG*-orbite O de* G *pour la topologie* ϖ*-adique est union de O et d'un nombre fini d'*AdG*-orbites de dimensions (en tant que variétés* ϖ*-adiques) strictement inférieures à la dimension de O. En particulier, toute* AdG*-orbite de* G *est une sous-variété* ϖ*-adique localement fermée dans* G.

□

2.2.5. Lexique.

On dira qu'un élément x de G est:

— *Primaire* si $\#\{\mathrm{supp}(\beta_x)\}=1$.

— *Régulier* si $\mathrm{long}(\beta_x(f)) \leq 1$ pour tout $f \in \Phi_F$.

— *Semi-simple* si $\beta_{x,i}(f) \in \{0,1\}$ pour tout $f \in \Phi_F$ et tout entier $i \geq 1$.

— *Irréductible* (ou *simple* ?) si x est primaire et semi-simple (autrement dit si x a un polynôme minimal irréductible sur F).

— *Elliptique* si x est irréductible et régulier (autrement dit si x a un polynôme caractéristique irréductible sur F).

— *Séparable* si tout polynôme $f \in \Phi_F \cap \{\mathrm{supp}(\beta_x)\}$ est séparable sur F.

Par respect des traditions, on note

$$G_{reg} = \{x \in G, \text{ semi-simple séparable et régulier}\},$$

et

$$G_{ell} = \{x \in G, \text{ elliptique et séparable}\} \subset G_{reg}.$$

Remarquons que les éléments semi-simples séparables de G sont exactement les éléments "absolument semi-simples" au sens de [Bour] Alg.VIII, §9, n°2,déf. 2.

Remarque 2.2.5.1. — Signalons pour éviter les confusions que nos éléments semi-simples (resp. semi-simples séparables, resp. irréductibles) sont les éléments fermés (resp. semi-simples, resp. elliptiques) de [Laum].

□

Remarque 2.2.5.2. — On peut dire que cette distinction entre éléments semi-simples et éléments semi-simples séparables est, bien souvent, à l'origine de nos difficultés à transposer les techniques développées en caractéristique 0. Des phénomènes de dégénérescence des orbites semi-simples inséparables par extension algébrique du corps de base, par exemple, compliquent notablement l'analyse harmonique sur le groupe G.

Considérons l'élément

$$x=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varpi \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_p(\mathbb{F}_p((\varpi))).$$

Il est elliptique dans $GL_p(\mathbb{F}_p((\varpi)))$ mais conjugué dans $GL_p\left(\mathbb{F}_p\left(\left(\varpi^{p^{-1}}\right)\right)\right)$ à l'élément

$$y=\begin{pmatrix} \varpi^{p^{-1}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \varpi^{p^{-1}} \end{pmatrix} \in GL_p\left(\mathbb{F}_p\left(\left(\varpi^{p^{-1}}\right)\right)\right),$$

lequel est loin d'être semi-simple puisque produit de la matrice scalaire $\varpi^{p^{-1}}\mathrm{Id}$ par un élément unipotent régulier.

□

Remarque 2.2.5.3. — Avec ces définitions, et compte tenu du lemme 2.2.3.1.(iii), la strate régulière $X_{(N)}$ est l'ensemble des AdG-orbites de G de dimension maximale. A l'opposé, on a la strate centrale $X_{(1\geq\cdots\geq 1)}$ (identifiée au groupe $F^{\times}$) qui regroupe les éléments dont l'AdG-orbite est de dimension nulle.

□

On généralise naturellement les définitions de ce n° à tout groupe isomorphe à un produit (fini) de groupes linéaires sur F (donc en particulier à tout sous-groupe de Levi de G). Si

$$\iota : M \xrightarrow{\cong} GL_{N_1}(F)\times\cdots\times GL_{N_k}(F)$$

est un tel groupe, on dira qu'un élément $m\in M$ est primaire (resp. régulier, semi-simple, irréductible, elliptique, séparable) dans M si chaque composante de m à travers l'isomorphisme ι est primaire (resp. régulière, semi-simple, irréductible, elliptique, séparable).

2.2.6. Fermeture des orbites de G en termes des orbites fermées des sous-groupes de Levi de G.

Soit x un élément de G et soit $\{f_1,\ldots,f_r\}$ l'ensemble $\mathrm{supp}(\beta_x)$ des composantes irréductibles du polynôme minimal de x (ordonné arbitrairement au numéro 2.2.1). Pour chaque $i\in\{1,\ldots,r\}$, soient $m_i = |\beta_x(f_i)|$ la multiplicité de f_i dans le polynôme caractéristique de x et W_i le *sous-espace caractéristique* de F^N défini par

$$W_i = \ker\{f_i(x)^{m_i} : F^N \to F^N\}.$$

Alors ([Bour] Alg.VII, §5, n°1, proposition.3), F^N se décompose en

$$F^N = \bigoplus_{1\leq i\leq r} W_i.$$

Soit M' le sous-groupe de Levi de G défini par

$$M' = (g \in G,\ gW_i \subset W_i,\ 1 \leq i \leq r) = \prod_{1\leq i\leq r} GL(W_i),$$

et soit P' le sous-groupe parabolique P' de G de composante de Levi M', défini par

$$P' = \{g \in G,\ g(W_1 \oplus \cdots \oplus W_i) \subset W_1 \oplus \cdots \oplus W_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r\}.$$

Le sous-groupe parabolique P' dépend clairement de l'ordre fixé arbitrairement au numéro 2.2.1 sur l'ensemble supp(β_x).

Après avoir isolé les composantes primaires de x, on s'intéresse d'un peu plus près à chacune d'elles. Pour chaque $i \in \{1,\ldots,r\}$, on introduit le drapeau de F-sous-espaces vectoriels de W_i

$$0 = W_{i,0} \underset{\neq}{\subset} W_{i,1} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} W_{i,m_i} = W_i,$$

défini par

$$W_{i,k} = \ker\{f_i(x)^k : W_i \to W_i\},\ 0 \leq k \leq m_i.$$

Soit P_i'' ($i \in \{1,\ldots,r\}$), le sous-groupe parabolique de $GL(W_i)$ défini par

$$P_i'' = \{g \in GL(W_i),\ gW_{i,k} \subset W_{i,k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq m_i\},$$

et soit P'' le sous-groupe parabolique de M' défini par

$$P'' = \prod_{1\leq i\leq r} P_i'' \subset \prod_{1\leq i\leq r} GL(W_i) = M'.$$

Soient U' et U'' les radicaux unipotents respectivement de P' et P'', et soit P le sous-groupe parabolique de G défini par

$$P = P''U' \subset M'U' = P' \subset G,$$

de radical unipotent

$$U = U''U'.$$

On appelle M' le *sous-groupe de Levi de* G *associé aux composantes primaires de* x, P *le sous-groupe parabolique de* G *associé à* x et $P'' = P \cap M'$ *le sous-groupe parabolique de* M' *associé à* x. Noter que les groupes M' et P'' dépendent canoniquement de x, tandis que le groupe P dépend de x et de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de x. Si x est primaire dans G, alors M'=G et l'on note $P_{(x)}$ le groupe P=P''. Ainsi, pour x unipotent, cette définition coïncide avec celle du numéro 2.1.4.

La proposition suivante généralise la proposition 2.1.4.1 (fermeture de l'Ad$P_{(x)}$-orbite d'un élément $x \in \mathcal{U}$) à un quelconque élément de G.

Proposition 2.2.6.1. — *Soient* x *un élément de* G, M' *le sous-groupe de Levi de* G *associé aux composantes primaires de* x, P *(resp.* P"*) le sous-groupe parabolique de* G *(resp. de* M'*) associé à* x *et* U *le radical unipotent de* P. *Soit* M *une composante de Levi de* P" *et* $x=x_M x_U$ *(*$x_M \in M$ *et* $x_U \in U$*) la décomposition de* x *suivant* P=MU. *Alors*

(1) *Le centralisateur* G_x *de* x *dans* G *est contenu dans* P".

(2) x_M *est irréductible dans* M.

(3) $O_P(x)$ *est dense dans* $O_M(x_M)U$ *pour la topologie* ϖ*-adique.*

Démonstration ([Laum] lemma (4.8.4)).

On reprend, sans les réexpliciter, les constructions et les notations du numéro 2.2.6.

(1) Tout élément du centralisateur G_x de x dans G commutant, pour chaque $1 \leq i \leq r$, à n'importe quelle puissance de l'endomorphisme $f_i(x)$ de F^N, on a immédiatement

$$G_x \subset P" = P \cap M'.$$

(2) Soit U" le radical de P" et

$$\pi : P" \to P"/U"$$

son quotient réductif maximal. On a

$$P"/U" = \prod_{i=1}^{r} \prod_{k=1}^{m_i} GL(W_{i,k}/W_{i,k-1}).$$

Pour tout couple d'entiers (i,k) tel que $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \leq m_i$, la composante $\pi(x)_{i,k}$ de $\pi(x)$ dans $GL(W_{i,k}/W_{i,k-1})$ a un polynôme minimal égal à f_i, donc est irréductible dans le groupe linéaire $GL(W_{i,k}/W_{i,k-1})$. Comme M est une composante de Levi de P",

$$\pi(x) = \pi(x_M)$$

et la restriction de π à M induit un isomorphisme de M sur P"/U". Donc x_M est irréductible dans M.

(3) Pour tout élément $p \in P$ décomposé en $p = mv$ ($m \in M$, $v \in U$), on a l'égalité

$$Ad(p)x = Adm(x_M) Adm\left(Adx_M{}^{-1}(v) x_U v^{-1}\right).$$

L'élément x_M de M étant irréductible dans M, il est semi-simple dans M, et une extension immédiate du corollaire 2.2.4.2 permet d'affirmer que l'AdM-orbite de x_M est fermée dans M pour la topologie ϖ-adique. D'où l'inclusion

$$\overline{O_P(x)}^G \subset O_M(x_M)U.$$

La fermeture dans G de l'orbite $O_P(x)$ est encore une partie AdP-invariante de G. Par conséquent il suffit, pour obtenir l'inclusion inverse, de montrer la relation

$$v \in U \Rightarrow x_M v \in \overline{O_P(x)}^G.$$

Soit U' le sous-groupe unipotent de P tel que U=U"U' (produit semi-direct). Pour tout élément $u" \in U"$, M' est le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de $x_M u"$, par conséquent

$$\det_{\mathrm{Lie}(U')}\left(1 - Ad(x_M u")\right) \neq 0$$

car le centralisateur de $x_M u''$ est contenu dans M', et l'application

$$U' \to U', \; u' \mapsto (x_M u'')^{-1} u' x_M u'' u'^{-1}.$$

est un isomorphisme de variétés ϖ_F-adiques. Soit v un élément de U et soit $v=v''v'$ ($v''\in U''$ et $v'\in U'$) la décomposition de v suivant U''U'. Alors il existe un élément $u'\in U'$ tel que

$$v' = (x_M u'')^{-1} u' x_M u'' u'^{-1}.$$

Par conséquent $x_M v \in \mathrm{Ad}U'(x_M U'')$ et l'on est ramené à montrer la relation

$$u'' \in U'' \Rightarrow x_M u'' \in \overline{O_{P''}(x)}^G,$$

laquelle découle directement de l'égalité ([Laum], lemma (4.8.4))

$$\overline{O_{P''}(x)}^G = \pi^{-1}\left(O_{P''/U''}(\pi(x))\right).$$

□

Comme l'orbite $O_M(x_M)$ est une partie fermée de M et comme $O_M(x_M)U$ est l'image inverse de $O_M(x_M)$ par la projection de P sur son quotient réductif maximal identifié à M, $O_M(x_M)U$ est une partie fermée de G. Par conséquent $\mathrm{Ad}C(O_M(x_M)U)$ est une partie fermée de G pour tout compact $C\subset G$. D'où le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.6.2. — *Soit* K_P *est un sous-groupe ouvert compact de* G *tel que* $G=K_P P$. *Alors*

$$\overline{O_G(x)}^G = \mathrm{Ad}K_P\left(O_M(x_M)U\right).$$

□

2.2.7. L'AdG-orbite fermée associée à un élément de G.

On note

$$G \to F[T], \; x \mapsto P_{car}(x),$$

l'application "polynôme caractéristique" sur G.

Pour tout $x\in G$, l'AdG-orbite $\{s\in G$, s semi-simple et $P_{car}(s)=P_{car}(x)\}$ est (prop. 2.2.4.1) l'unique AdG-orbite fermée contenue dans la fermeture de $O_G(x)$ pour la topologie ϖ-adique. On l'appelle l'AdG-*orbite fermée associée à* x.

Si s est un élément semi-simple de G, on définit la partie fermée $A_G(s)$ de G

$$\begin{aligned} A_G(s) &= \left\{x\in G, \; P_{car}(x)=P_{car}(s)\right\} \\ &= \left\{x\in G, \; |\beta_x(f)| = |\beta_s(f)| \text{ pour tout } f\in\Phi_F\right\} \\ &= \left\{x\in G \text{ d'AdG-orbite fermée associée } O_G(s)\right\}. \end{aligned}$$

La proposition suivante est conséquence directe de la théorie des modules sur les anneaux principaux ([Bour] Alg.VII, §5, n°1, prop.3) rappelée au numéro 2.2.1.

Proposition 2.2.7.1. — *Soit* $s\in G$ *semi-simple,* $\{f_1,\dots,f_r\}$ *le support de* β_s *et, pour chaque entier* i *tel que* $1\le i\le r$, *soit* $N_i = |\beta_s(f_i)|$ *le poids de la partition* $\beta_s(f_i)$. *Alors il existe une partie finie* $\mathcal{F}(s)\subset G$ *en bijection avec avec l'ensemble*

$$\Pi_{N_1}\times\cdots\times\Pi_{N_r}$$

telle que

$$A_G(s)=\coprod_{x\in\mathcal{F}(s)} \mathcal{O}_G(x),$$

et $A_G(s)$ *est la fermeture dans* G *de l'unique* AdG-*orbite régulière* $\mathcal{O}_\mu$ *de* G *telle que*

$$\mathrm{supp}(\mathcal{O}_\mu)=\mathrm{supp}(\beta_s).$$

□

Tout élément $x\in G$ séparable s'écrit d'une façon et d'une seule sous la forme $x=s_xu_x$ avec $s_x\in G$ semi-simple dans G, $u_x\in\mathcal{U}$ et $s_xu_x=u_xs_x$ ([Bour] Alg VII, §5, n°4, prop. 11 et prop. 12). On appelle s_x (resp. u_x) la *partie semi-simple* (resp. la *partie unipotente*) de x, et $x=s_xu_x$ la *décomposition de Jordan* de x. Avec ces définitions, si s est un élément semi-simple séparable de G, on a clairement

$$A_G(s)=\{x\in G \text{ tels que } s_x\in\mathcal{O}_G(s)\}.$$

D'où la version suivante de la proposition 2.2.7.1 pour les éléments semi-simples séparables de G.

Corollaire 2.2.7.2. — *Soit* $s\in G$ *un élément semi-simple séparable. Alors*

$$A_G(s)=\coprod_{u\in\mathcal{U}(s)} \mathcal{O}_G(su)$$

pour toute famille $\mathcal{U}(s)\subset G_s$ *de représentants des* AdG_s-*orbites unipotentes de* G_s.

□

2.2.8. Décompositions standard.

Soit x un élément de G. On dira que la décomposition (ordonnée) de la fermeture de $\mathcal{O}_G(x)$ dans G en

$$\overline{\mathcal{O}_G(x)}^G=\coprod_{0\le i\le m}\mathcal{O}_G(x_i)$$

est une *décomposition standard* si $\dim(\mathcal{O}_G(x_i))\le\dim(\mathcal{O}_G(x_{i+1}))$ pour chaque entier $0\le i\le m-1$. Ainsi (cf. le numéro 2.2.7) $\mathcal{O}_G(x_0)$ est l'AdG-orbite fermée associée à x et (corollaire 2.2.4.2.(2)) x appartient à $\mathcal{O}_G(x_m)$. De plus, pour chaque entier $0\le k\le m$, $\coprod_{0\le i\le k}\mathcal{O}_G(x_i)$ est une partie fermée dans G et l'orbite $\mathcal{O}_G(x_k)$ est une partie ouverte dans $\coprod_{0\le i\le k}\mathcal{O}_G(x_i)$. En effet (à nouveau grâce au corollaire 2.2.4.2.(2)), $\coprod_{0\le i\le k}\mathcal{O}_G(x_i)$ est union de la fermeture dans G de chacune des orbites qu'elle contient et l'orbite $\mathcal{O}_G(x_k)$ est une sous-variété ϖ-adique lisse de même dimension que $\coprod_{0\le i\le k}\mathcal{O}_G(x_i)$.

De même, si $s\in G$ est un élément semi-simple dans G, on dira que la décomposition (ordonnée) de $A_G(s)$ en

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le d}\mathcal{O}_G(x_i)$$

est une *décomposition standard* si $\dim(\mathcal{O}_G(x_i))\le\dim(\mathcal{O}_G(x_{i+1}))$ pour chaque entier $0\le i\le d-1$, autrement dit si l'union disjointe ordonnée $\coprod_{0\le i\le d}\mathcal{O}_G(x_i)$ est une décomposition standard de la fermeture dans G de l'unique AdG-orbite régulière de G contenue dans $A_G(s)$ (cf. la proposition 2.2.7.1).

Si s est un élément semi-simple séparable de G, on écrira systématiquement toute décomposition standard de $A_G(s)$ sous la forme

$$A_G(s)=\coprod_{0\leq i\leq d}\mathcal{O}_G(su_i),$$

pour des éléments u_i parcourant une famille de représentants dans $\mathcal{U}\cap G_s$ des AdG_s-orbites unipotentes de G_s (cf. le corollaire 2.2.7.2).

Enfin, on dira que la décomposition (ordonnée) de G en

$$G=\coprod_{0\leq i\leq r}X_{(\alpha(i))}$$

est une *décomposition standard* si $\dim(u_{(\alpha(i))})\leq\dim(u_{(\alpha(i+1))})$ pour chaque entier $0\leq i\leq r-1$ (autrement dit si les nappes sont rangées par dimension d'orbites croissante). Ainsi (proposition 2.2.3.1) $X_{(\alpha(0))}$ est la nappe centrale de G et $X_{(\alpha(r))}$ est la nappe régulière de G. De plus, pour chaque entier $0\leq k\leq r$, le point (iv) de la proposition 2.2.3.1 assure (grâce aux mêmes arguments que ci-dessus) que la partie $\coprod_{0\leq i\leq k}X_{(\alpha(i))}$ est fermée dans G et que la nappe $X_{(\alpha(k))}$ est ouverte dans $\coprod_{0\leq i\leq k}X_{(\alpha(i))}$.

3. Intégrales orbitales sur G.

3.1. Convergence.

Soit dg la mesure de Haar sur G normalisée par K (i.e. telle que vol(K,dg)=1).

Si $s\in G$ est semi-simple dans G, le centralisateur G_s de s dans G est (non canoniquement) isomorphe à un produit

$$GL_{N_1}(F_1)\times\cdots\times GL_{N_r}(F_r)\quad\left(\sum_{1\leq i\leq r}[F_i:F]N_i=N\right),$$

pour des extensions finies $F_1,\ldots,F_r$ de F. En particulier, G_s est unimodulaire et la donnée d'une mesure de Haar dg_s sur le centralisateur G_s de s dans G induit une mesure invariante $dg_s\backslash dg$ sur l'espace homogène $G_s\backslash G$ ([Weil] chap. II, §9). On peut alors définir l' *intégrale orbitale au point* s *dans* G

$$I^G(f,s,dg_s)=\int_{G_s\backslash G}f(Adg^{-1}(s))dg_s\backslash dg$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. Comme l'orbite $\mathcal{O}_G(s)$ est fermée dans G, cette intégrale est absolument convergente (c'est même une somme finie, la restriction de f à $\mathcal{O}_G(s)$ restant localement constante à support compact).

On aimerait que cette construction fût possible dans le cas général, c'est-à-dire pour n'importe quel élément $x\in G$. Cette généralisation se heurte à deux difficultés: le centralisateur dans G d'un élément qui n'est pas semi-simple est-il encore unimodulaire? Si tel est le cas, l'intégrale orbitale définie ci-dessus pour un élément qui n'est pas semi-simple (donc dont l'orbite n'est pas fermée dans G) est-elle encore convergente? On peut trouver la réponse à ces deux questions dans [Laum] (lemma (4.8.6) et lemma (4.8.11)). La méthode qui permet de montrer le deuxième point est une généralisation de celle qu'a utilisée R. Howe pour montrer la convergence des intégrales orbitales unipotentes indépendamment de la caractéristique ([Howe] prop. 5).

Lemme 3.1.1 (cf. [Laum] lemma (4.8.6) — *Pour tout* $x\in G$, *le centralisateur* G_x *de* x *dans* G *est unimodulaire.*

□

Proposition 3.1.2. — *Soient* x *un élément de* G *et* dg_x *une mesure de Haar sur le centralisateur* G_x *de* x *dans* G. *Alors, pour toute fonction* $f\in C_{c,\infty}(G)$, *l'intégrale orbitale*

$$I^G(f,x,dg_x)=\int_{G_x\backslash G} f(\mathrm{Ad}g^{-1}(x))dg_x\backslash dg.$$

est absolument convergente.

Démonstration .

Soient M' le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de x, P (resp. P") le sous-groupe parabolique de G (resp. de M') associé à x, U le radical unipotent de P et M une composante de Levi de P" (cf. le numéro 2.2.6). Soient $s=x_M\in M$ et $w=x_U\in U$ les éléments tels que $x=sw$. Soient A le centre de M et K_P un sous-groupe ouvert compact de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A) de G. Soient dk_P, dm, du, les mesures de Haar respectivement sur K_P, M et U normalisées par

$$\mathrm{vol}(K_P,dk_P)=\mathrm{vol}(M\cap K_P,dm)=\mathrm{vol}(U\cap K_P,du)=1.$$

On a alors la formule d'intégration (cf. [Cart] n° 4.1))

$$\int_G f(g)dg=\iiint_{M\times U\times K_P} f(muk_P)dmdudk_P$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. On a vu (proposition 2.2.6.1.(1)) que $G_x=P_x$. Par conséquent, la mesure dg_x sur le groupe unimodulaire G_x induit une mesure invariante $dg_x\backslash dmdu$ sur l'espace homogène $G_x\backslash P$ ([Weil] chap. II, §9) et la formule d'intégration ci-dessus entraîne alors l'égalité

$$I^G(f,x,dg_x)=\iint_{G_x\backslash M\times U} \mathrm{Ad}^*k_P(f)(u^{-1}m^{-1}xmu)dk_P(dg_x\backslash dmdu)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. Il s'agit pour l'instant d'une égalité formelle, au sens où le terme situé à gauche de l'égalité est convergent si et seulement si le terme situé à droite l'est.

L'AdP-orbite $O_P(x)$ s'identifie (en tant que variété ϖ-adique) à l'espace homogène $P_x\backslash P$. On note $d\alpha$ la mesure sur $O_P(x)$ déduite par identification de la mesure quotient $dg_x\backslash dmdu$ sur $P_x\backslash P$ définie ci-dessus. Alors, la relation

$$m_1u_1m^{-1}u^{-1}=m_1m^{-1}u^{-1}\mathrm{Ad}p(u_1)$$

pour tout couple $(m_1,u_1)\in M\times U$ et tout $p=um\in P$ ($u\in U$, $m\in M$), entraîne que la mesure $d\alpha$ sur $O_P(x)$ vérifie l'égalité

$$d(\mathrm{Ad}p(\alpha))=\delta_P(p)d\alpha$$

pour tout élément $p\in P$.

Le sous-groupe de Levi M étant (non canoniquement) isomorphe à un produit de groupes linéaires, une extension immédiate du lemme 3.1.1 entraîne que le centralisateur M_s de s dans M est unimodulaire. La partie $O_M(s)U$ de P s'identifie naturellement (en tant que variété variété ϖ-adique) à l'espace homogène $M_s\backslash P$. Soit dm_s une mesure de Haar (arbitrairement choisie) sur M_s. Elle induit une mesure invariante $dm_s\backslash dm$ sur l'espace homogène $M_s\backslash M$ ([Weil] chap II,

§9) et l'on note $d\beta$ la mesure sur $\mathcal{O}_M(s)U$ déduite par identification de la mesure $(dm_s\backslash dm)du$ sur $M_s\backslash MU$. Alors, posant $[a,b]=Ada(b)b^{-1}$ pour tout couple $(a,b)\in G\times G$, la relation

$$Adp(m_1^{-1}sm_1u_1)=Admm_1^{-1}(s)[(Admm_1^{-1})^{-1},u]Adp(u_1)$$

pour tout couple $(m_1,u_1)\in M\times U$ et tout $p=um\in P$ ($u\in U$, $m\in M$) entraîne que la mesure $d\beta$ sur $\mathcal{O}_M(s)U$ vérifie l'égalité

$$d(Adp(\beta))=\delta_P(p)d\beta$$

pour tout élément $p\in P$. Ainsi, $d\beta$ induit une mesure $d\gamma$ sur l'ouvert dense et AdP-invariant (proposition 2.2.6.1.(3))

$$\mathcal{O}_P(x)\subset\mathcal{O}_M(s)U$$

vérifiant l'égalité

$$d(Adp(\gamma))=\delta_P(p)d\gamma$$

pour tout élément $p\in P$.

On en déduit ([Weil] chap II, §9) l'existence d'une constante $c>0$ (dépendant clairement de la mesure dm_s que l'on s'est donnée sur M_s) telle que

$$d\alpha=cd\gamma.$$

Enfin, la partie fermée

$$(\mathcal{O}_M(s)U-\mathcal{O}_P(x))\subset\mathcal{O}_M(y)U$$

ayant une mesure nulle pour $d\beta$, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} I^G(f,x,dg_x) &= \int_{\mathcal{O}_P(x)}\int_{K_P} Ad^*k_P(f)(\alpha)dk_Pd\alpha \\ &= c\int_{\mathcal{O}_P(x)}\int_{K_P} Ad^*k_P(f)(\gamma)dk_Pd\gamma \\ &= c\int_{M_y\backslash M}\int_U\int_{K_P} Ad^*k_P(f)\left(m^{-1}smu\right)dk_P(dm_y\backslash dm)du \end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. Comme l'AdM-orbite de s est fermée dans M (car s est semi-simple et même irréductible dans M, proposition 2.2.6.1.(2)), cette expression est absolument convergente pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

□

Les propositions 3.1.1 et 3.1.2 se généralisent bien entendu à tout groupe isomorphe à un produit (fini) de groupes linéaires

$$\prod_{1\le i\le r} GL_{N_i}(F_i),$$

les F_i étant, par exemple, des extensions finies de F. Si H est un sous-groupe de G de ce type, on note dh la mesure de Haar sur H qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de H (lesquels sont tous dans la même AdH-orbite). Si x est un élément de H, et dh_x une mesure de Haar sur le centralisateur H_x de x dans H, on définit *l'intégrale orbitale au point* x *dans* H

$$I^H(f,x,dh_x)=\int_{H_x\backslash H} f\left(Adh^{-1}(x)\right)dh_x\backslash dh$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(H)$.

3.2. Propriétés de descente.

Soient (P,A) une paire parabolique de G, U le radical unipotent de P, M une composante de Levi de P, A le centre de M et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P,A). Soient dk_P et du les mesures de Haar respectivement sur K_P et U telles que

$$\mathrm{vol}(K_P, dk_P) = \mathrm{vol}(U \cap K_P, du) = 1.$$

A toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, on associe le *terme* K_P*-invariant de* f *suivant* P, $f^P \in C_{c,\infty}(M)$, défini par

$$f^P(m) = \delta_P^{1/2}(m) \iint_{U \times K_P} \mathrm{Ad}^* k_P(f)(mu) dk_P du \quad (m \in M).$$

L'intégrale est absolument convergente; c'est même en fait une somme finie.

La proposition suivante traduit la propriété de descente des intégrales orbitales utilisée pour établir leur convergence (cf. la démonstration de la proposition 3.1.2).

Proposition 3.2.1. — *Soient* x *un élément de* G, M' *le sous-groupe de Levi de* G *associé aux composantes primaires de* x *et* P *(resp.* P"*) le sous-groupe parabolique de* G *(resp. de* M'*) associé à* x *(cf. le numéro 2.2.6). Soient* M *une composante de Levi de* P", A *le centre de* M, K_P *un sous-groupe ouvert compact maximal de* G *en bonne position par rapport à la paire parabolique* (P,A) *de* G *et* $s = x_M$ *la composante de* x *suivant* M. *Alors, pour toute mesure de Haar* dg_x *sur le centralisateur* G_x *de* x *dans* G, *il existe une unique mesure de Haar* dm_s *sur le centralisateur* M_s *de* s *dans* M *telle que*

$$I^G(f, x, dg_x) = I^M(f^P, s, dm_s)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, *où* f^P *désigne le terme*K_P*-invariant de* f *suivant* P.

□

On s'intéresse ensuite aux sous-groupes de Levi de G contenant le centralisateur G_x d'un élément x de G donné. La démonstration que nous donnons reprend à l'identique celle de G. Laumon ([Laum] prop. (4.3.11)) énoncée et démontrée pour x semi-simple.

Proposition 3.2.2. — *Soit* x *un élément de* G, dg_x *une mesure de Haar sur le centralisateur* G_x *de* x *dans* G *et* L *un sous-groupe de Levi de* G *contenant* G_x. *Soient* A *le centre de* L, Q *un sous-groupe parabolique de* G *de composante de Levi* L *et* K_Q *un sous-groupe ouvert compact maximal de* G *en bonne position par rapport à la paire parabolique* (Q,A) *de* G. *Alors*

$$I^G(f, x, dg_x) = \left(|D_{L\backslash G}(x)|_F\right)^{-1/2} I^L(f^Q, x, dg_x)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ *où* f^Q *désigne le terme* K_Q*-invariant de* f *suivant* Q *et où* $D_{L\backslash G}$ *est la fonction sur* L *définie par (rappel)*

$$D_{L\backslash G}(\ell) = \det_{\mathrm{Lie}(L)\backslash \mathrm{Lie}(G)}(1 - \mathrm{Ad}\,\ell^{-1}) \quad (\ell \in L).$$

Démonstration.

Soit U le radical unipotent de Q et soient dk_Q, $d\ell$ et du les mesures de Haar respectivement sur K_Q, L et U telles que

$$\mathrm{vol}(K_Q, dk_Q) = \mathrm{vol}(L \cap K_Q, d\ell) = \mathrm{vol}(U \cap K_Q, du) = 1.$$

Appliquant la formule d'intégration (cf. [Cart] n° 4.1)

$$\int_G F(g)dg = \iiint_{L \times U \times K_Q} F(\ell u k_Q) d\ell\, du\, dk_Q$$

pour toute fonction F intégrable sur G, on obtient (proposition 3.1.2)

$$I^G(f, x, dg_x) = \iiint_{L_x \backslash L \times U \times K_Q} f(k_Q^{-1} u^{-1} \ell^{-1} x \ell u k_Q) dk_Q du (dg_x \backslash d\ell)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$. Pour chaque élément $\ell \in L$, l'application

$$U \to U,\ u \mapsto (\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x))^{-1} u^{-1} (\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x)) u,$$

est un isomorphisme de variétés ϖ-adiques, de Jacobien constant

$$J(x) = J(\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x))$$

où

$$J(y) = \left| \det_{\mathrm{Lie}(U)} (1 - \mathrm{Ad} y^{-1}) \right|_F \quad (y \in L).$$

Ainsi, en effectuant le changement de variables $u_1 = (\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x))^{-1} u^{-1} \mathrm{Ad}\ell(x) u$, on obtient

$$\begin{aligned} I^G(f, x, dg_x) &= \iiint_{L_x \backslash L \times U \times K_Q} f(k_Q^{-1} \ell^{-1} x \ell u_1 k_Q)\, dk_Q (J(x) \backslash du_1)(dg_x \backslash d\ell) \\ &= J(x)^{-1} \int_{L_x \backslash L} \delta_Q(\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x))^{-1/2} f^Q(\mathrm{Ad}\ell^{-1}(x))\, dg_x \backslash d\ell \\ &= \left(J(x) (\delta_Q(x))^{1/2} \right)^{-1} I^L(f^Q, x, dg_x) \end{aligned}$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$. On conclut en remarquant que,

$$|D_{L \backslash G}(\ell)|_F = \delta_Q(\ell)(J(\ell))^2$$

pour tout $\ell \in L$.

□

Remarque 3.2.3. — La formule de descente de la proposition 3.2.2 montre en particulier que, pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, l'intégrale orbitale $I^L(f^Q, x, dg_x)$ ne dépend pas du choix du sous-groupe parabolique Q de G de composante de Levi L ni du sous-groupe ouvert compact maximal K_Q de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (Q,A) (bien que le terme K_Q-invariant de f suivant Q, lui, en dépende).

□

3.3. Normalisation.

Soit M un sous-groupe de Levi de G; il est (non canoniquement) isomorphe à un produit de groupes linéaires

$$M \xrightarrow{\ \iota\ } \mathbf{GL}_{N_1}(F) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{N_r}(F) \quad \left(N_i \geq 1,\ \sum_{1 \leq i \leq r} N_i = N \right),$$

et, pour chaque élément $m \in M$, soit

$$\iota(m)=\prod_{1\le i\le r} m_i \quad \left(m_i\in \mathbf{GL}_{N_i}(F)\right)$$

la décomposition de m à travers cet isomorphisme. Comme

$$\iota(M_m)=\left(\mathbf{GL}_{N_1}(F)\right)_{m_1}\times\cdots\times\left(\mathbf{GL}_{N_r}(F)\right)_{m_r}$$

pour tout élément $m\in M$, un élément $s\in M$ irréductible dans M a un centralisateur M_s dans M isomorphe à un produit de r groupes linéaires sur des extensions finies de F. Pour un tel s, tous les sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_s sont donc dans la même AdM_s-orbite et, notant dm_s la mesure de Haar sur M_s donnant volume 1 à ces sous-groupes, on définit $I^M(.,s)$ *l'intégrale normalisée au point* s *dans* M par

$$I^M(.,s)=I^M(.,s,dm_s).$$

Définition 3.3.1. (Normalisation) — *Soient* x *un élément de* G, M' *le sous-groupe de Levi de* G *associé aux composantes primaires de* x *et* P *(resp.* P"*) le sous-groupe parabolique de* G *(resp. de* M'*) associé à* x *(cf. le numéro 2.2.6). Soient* M *une composante de Levi de* P", A *le centre de* M *et* K_P *un sous-groupe ouvert compact maximal de* G *en bonne position par rapport à la paire parabolique* (P,A). *Soient* $s=x_M\in M$ *la composante de* x *suivant* M *(c'est un élément irréductible dans* M, *proposition 2.2.6.1.(2)) et* dg_x *la mesure de Haar sur le centralisateur* $G_x=P''_x$ *telle que*

$$I^G(f,x,dg_x)=I^M(f^P,s)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ (f^P *désignant le terme* K_P*-invariant* de f *suivant* P). *On note alors* $I^G(.,x)$ l'intégrale normalisée au point x dans G, *définie par*

$$I^G(f,x)=I^G(f,x,dg_x)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

Cohérence de la définition 3.3.1.

Stricto sensu, on a seulement besoin de vérifier que la définition de $I^G(.,x)$ donnée ci-dessus ne dépend ni du choix de la composante de Levi M de P", ni du choix du sous-groupe ouvert compact maximal K_P (points (1) et (2) ci-dessous). On vérifie aussi que l'intégrale orbitale normalisée $I^G(.,x)$ ne dépend pas vraiment de x mais seulement de l'orbite $O_G(x)$ au sens où $I^G(.,x)=I^G(.,y)$ pour tout élément $y\in O_G(x)$ (point (3)), et qu'elle est indépendante de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de x (point (4)).

Soit U (resp. U") le radical unipotent de P (resp. P").

(1) On suppose que le groupe M est fixé et l'on se donne $K_{P,1}$ et $K_{P,2}$ deux sous-groupes ouverts compacts maximaux de G en bonne position par rapport à (P,A) (où A est le centre de M). Soit p un élément de P tel que $K_{P,2}=Adp(K_{P,1})$. Soient $dK_{P,i}$ et du_i (i=1,2) les mesures de Haar sur $K_{P,i}$ et U telles que

$$vol(K_{P,i})=Vol(K_{P,i}\cap U,du_i)=1,\ i=1,2.$$

L'égalité $K_{P,2}\cap U=Adp(K_{P,1}\cap U)$ entraîne la relation

$$\begin{aligned}vol\left(K_{P,2}\cap U,du_1\right)&=vol\left(Adp\left(K_{P,1}\cap U\right),du_1\right)\\&=\delta_P(p)\,vol\left(AdK_{P,1}\cap U,du_1\right)=\delta_P(p),\end{aligned}$$

et donc l'égalité

$$du_1=\delta_P(p)du_2.$$

Soit dm la mesure de Haar sur M normalisée par

$$\mathrm{Vol}(K_{P,i}\cap M,\ dm)=1,\ i=1,2.$$

Ceci à un sens car $K_{P,i}\cap M$ (i=1,2) est un sous-groupe ouvert compact maximal de M. Soit dm_s la mesure de Haar sur le centralisateur M_s de s dans M qui donne volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_s. On a donc deux mesures $d\beta_1$ et $d\beta_2$ sur la sous-variété ϖ-adique $\mathcal{O}_M(s)U$ de P, déduites respectivement des mesures $(dm_s\backslash dm)du_1$ et $(dm_s\backslash dm)du_2$ par identification de $\mathcal{O}_M(s)U$ avec l'espace homogène $M_s\backslash P$. Il est clair qu'elles vérifient la relation

$$d\beta_1=\delta_P(p)d\beta_2.$$

Par conséquent la mesure $d\beta_2$ est l'image de la mesure $d\beta_1$ par l'homéomorphisme de variétés ϖ-adiques

$$\mathcal{O}_M(s)U\to\mathcal{O}_M(s)U,\ \beta\mapsto \mathrm{Adp}(\beta).$$

On en déduit l'égalité

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{O}_M(s)U}\int_{K_{P,1}}\mathrm{Ad}^*k_{P,1}(f)f(\beta_1)dk_{P,1}d\beta_1 &=\int_{\mathcal{O}_M(s)U}\int_{K_{P,2}}\mathrm{Ad}^*p(f)\left(k_{P,2}{}^{-1}\mathrm{Adp}(\beta_1)k_{P,2}\right)dk_{P,2}d\beta_1\\ &=\int_{\mathcal{O}_M(s)U}\int_{K_{P,2}}\mathrm{Ad}^*k_{P,2}\left(\mathrm{Ad}^*p(f)\right)(\beta_2)dk_{P,2}d\beta_2\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

On conclut en remarquant que

$$I^G(f,x,dg_x)=I^G(\mathrm{Ad}^*p(f),x,dg_x)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ et toute mesure dg_x sur le centralisateur G_x de x dans G.

(2) Vérifions maintenant que la définition 3.3.1 ne dépend pas de la composante de Levi M de P" choisie. Soient M_1 et M_2 deux composantes de Levi de P", et soit A_i, i=1,2 , le centre de M_i. Soit $u\in U''$ un élément tel que $M_2=\mathrm{Adu}(M_1)$. Notant $x=s_1u_1$ et $x=s_2u_2$ ($s_i\in M_i$ et $u_i\in U''$) les décompositions de x respectivement suivant M_1U'' et M_2U'', on a les relations

$$s_2=\mathrm{Adu}(s_1)$$

et

$$u_2=us_1{}^{-1}u^{-1}s_1u_1\,.$$

Soit $K_{P,1}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A_1) de G et soit $K_{P,2}=\mathrm{Adu}(K_{P,1})$. Il est clair que $K_{P,2}$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire (P,A_2). Soit dm_1 la mesure de Haar sur M_1 telle que

$$\mathrm{vol}\left(K_{P,1}\cap M_1,dm_1\right)=1,$$

et soit dm_{s_1} la mesure de Haar sur le centralisateur M_{s_1} de s_1 dans M_1 telle que

$$I^{M_1}(.,s_1)=I^{M_1}(.,s_1,dm_{s_1})$$

en tant que distributions sur M_1. Alors

$$\begin{aligned} I^{M_2}(h,s_2) &= \int_{M_{s_1}\backslash M_1} h(Adu(m_1^{-1})Adu(s_1)Adu(m_1))dm_{s_1}\backslash dm_1 \\ &= I^{M_1}(Ad^*u^{-1}(h),s_1) \end{aligned}$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(M_1)$. La relation

$$Ad^*u^{-1}(f^{P,2}) = (Ad^*u^{-1}(f))^{P,1}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ (où $f^{P,i}\in C_{c,\infty}(M_i)$ désigne le terme $K_{P,i}$-invariant de f suivant P), jointe au fait que l'intégrale orbitale $I^G(.,x,dg_x)$ définie par une mesure de Haar sur le centralisateur G_x de x dans G est une distribution AdG-invariante sur G, entraînent l'égalité

$$I^{M_1}(f^{P,1},s_1) = I^{M_2}(f^{P,2},s_2)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

(3) L'intégrale orbitale normalisée $I^G(.,x)$ ne dépend que de l'orbite $O_G(x)$ au sens où

$$I^G(f,y) = I^G(f,x)$$

pour tout élément $y\in O_G(x)$ et toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. En effet, soit $y=Ad\gamma(x)$, $\gamma\in G$, un élément de l'orbite $O_G(x)$ et soit dg_y la mesure de Haar sur le centralisateur $G_y=Ad\gamma(G_x)$ de y dans G telle que $I^G(.,y)=I^G(.,y,dg_y)$ (en tant que distributions sur G). Soit $Ad\gamma(dm_s)$ l'image de la mesure de Haar dm_s sur M_s par l'homéomorphisme de variétés ϖ-adiques

$$M_s \xrightarrow{Ad\gamma} (\gamma M\gamma^{-1})_{\gamma M\gamma^{-1}}.$$

Alors (définition 3.3.1),

$$\begin{aligned} I^G(f,y) &= I^G(f,y,dg_y) \\ &= I^{Ad\gamma(M)}(f^{Ad\gamma(P)},Ad\gamma(s),Ad\gamma(dm_s)) \\ &= I^M(Ad^*\gamma^{-1}(f^{Ad\gamma(P)}),s,dm_s) \end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ (où $f^{Ad\gamma(P)}\in C_{c,\infty}(Ad\gamma(M))$ désigne le terme $Ad\gamma(K_P)$-invariant de f suivant $Ad\gamma(P)$). Or

$$Ad^*\gamma^{-1}(f^{Ad\gamma(P)}) = (Ad^*\gamma^{-1}(f))^P$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. En définitive,

$$\begin{aligned} I^G(f,y) &= I^G(Ad^*\gamma^{-1}(f),x) \\ &= I^G(f,x) \end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, car la distribution $I^G(.,x)$ est AdG-invariante sur G.

On peut donc parler de la mesure AdG-invariante sur l'orbite $O_G(x)$ induite par la normalisation 3.3.1.

(4) La normalisation 3.3.1 est indépendante de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de x. En effet, soient P" le sous-groupe parabolique de M' associé à x, U" le radical unipotent de P", U' le sous-groupe unipotent de P tel que U=U"U' (produit semi-direct) et P'=M'U' (cf. le numéro 2.2.6). Soit K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A) de G. Notant A' le centre de M', il est clair que K_P est en bonne position par rapport à la paire parabolique (P',A') de G. Soit $K_{P''}=K_P\cap M'$. C'est un sous-groupe ouvert compact maximal de M' en bonne position par rapport à la paire parabolique (P",A) de M'. On

peut donc, pour chaque fonction $\phi \in C_{c,\infty}(M')$, former le terme $K_{P''}$-invariant $\phi^{P''} \in C_{c,\infty}(M)$ de ϕ suivant P''

$$\phi^{P''}(m) = \delta_{P''}{}^{1/2}(m) \iint_{K_{P''} \times U''} Ad^* k_{P''}(h)(mu'') dk_{P''} du'' \quad (m \in M),$$

où $\delta_{P''}: P'' \to q^Z$ désigne le caractère module sur P'' et où $dk_{P''}$ et du'' sont les mesures de Haar respectivement sur $K_{P''}$ et U'' telles que

$$\mathrm{vol}(K_{P''}, dk_{P''}) = \mathrm{vol}(U'', du'') = 1.$$

Les relations $U = U''U'$ et $K_{P''} = K_P \cap M'$ entraînent alors l'égalité

$$\left(f^{P'}\right)^{P''} = f^P$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ (où $f^{P'} \in C_{c,\infty}(M')$ désigne le terme K_P-invariant de f suivant P'). La relation (proposition 3.2.2)

$$\begin{aligned} I^{M'}(f^{P'}, x, dg_x) &= \left(\left|D_{M' \backslash G}(x)\right|_F\right)^{1 \backslash 2} I^G(f, x, dg_x) \\ &= \left(\left|D_{M' \backslash G}(x)\right|_F\right)^{1 \backslash 2} I^M\left(\left(f^{P'}\right)^{P''}, s\right) \end{aligned}$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ et la propriété d'unicité de la proposition 3.2.1, entraînent que la mesure de Haar dg_x sur le centralisateur $G_x = M'_x$ de x dans G est définie comme l'unique mesure de Haar satisfaisant la relation

$$I^{M'}(h, x, dg_x) = \left(\left|D_{M' \backslash G}(x)\right|_F\right)^{1 \backslash 2} I^M\left(h^{P''}, s\right)$$

pour toute fonction $h \in C_{c,\infty}(M')$. La définition de dg_x est donc bien indépendante de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble β_x.

□

Grâce à la propriété (4) ci-dessus, on étend naturellement la normalisation 3.3.1 à tout groupe isomorphe à un produit de groupes linéaires

$$\prod_{1 \le i \le r} GL_{N_i}(F_i),$$

les F_i étant par exemple des extensions finies de F. Si H est un sous-groupe de ce type et h un élément de H, on définit $I^H(.,h)$, *l'intégrale orbitale normalisée au point* h *dans* H, composante par composante grâce à la propriété ([Hari 1] corollary of lemma 16)

$$C_{c,\infty}\left(\prod_{1 \le i \le r} GL_{N_i}(F_i)\right) = \bigotimes_{1 \le i \le r} C_{c,\infty}\left(GL_{N_i}(F_i)\right).$$

La normalisation 3.3.1 traduisant directement la propriété de descente de la proposition 3.2.1, il est naturel de se demander si elle est compatible avec la seconde propriété de descente (proposition 3.2.2). Pour répondre à cette question, on aura besoin du petit lemme suivant.

Lemme 3.3.3. — *Soit un élément* $x \in G$, *<u>primaire</u> dans* G *et soit* L *un sous-groupe de Levi de* G *contenant le centralisateur* G_x *de* x *dans* G. *Alors* $L = G$.

Démonstration.

On peut (par exemple) raisonner en termes de modules.

Soit L un sous-groupe de Levi de G contenant G_x et soit

$$F^N = R_1 \oplus \cdots \oplus R_r$$

la décomposition de F^N définissant L, c'est-à-dire telle que

$$L = \{g \in G,\ g(R_k) = R_k\ ,\ k = 1,\dots,r\}.$$

Soit

$$1_N = e_1 \oplus \cdots \oplus e_k$$

la décomposition de l'élément unité 1_N de $\mathrm{End}_F(F^N)$ en somme de projecteurs $e_k \in \mathrm{End}_F(F^N, R_k)$. Pour chaque $k \in \{1,\dots,r\}$, la condition $G_x \subset L$ entraîne que l'élément e_k commute à tous les éléments de G_x donc à tous les éléments de $\mathrm{Lie}(G_x)$ (en effet si $H \in \mathrm{Lie}(G_x)$, alors $1+\varpi^m H$ appartient G_x pour un entier m suffisamment grand, donc $(\varpi^{-m}1_N+H) \in G_x$ commute à e_k et par suite H commute lui aussi à e_k). Par conséquent ([Jaco] corollary 1 of theorem 3.17), pour chaque $k \in \{1,\dots,r\}$, l'idempotent e_k appartient au sous-anneau F[x] de $\mathrm{End}_F(F^N)$. Comme l'élément x est supposé primaire, son polynôme minimal possède une unique composante irréductible $Q(T) \in F[T]$ et

$$F[x] \cong F[T]/\left(Q(T)^\alpha\right)$$

pour un entier $\alpha \geq 1$. Enfin, comme l'anneau F[x] possède un unique idempotent non nul (la condition $\Phi(x)^2 = \Phi(x)$ entraîne que $\Phi(T)^2 - \Phi(T) = \Phi(T)(1-\Phi(T))$ appartient à l'idéal $(Q(T))^\alpha$ et donc que Q(T) divise $\Phi(T)(1-\Phi(T))$), on a $r=1$ c'est-à-dire $L=G$.

□

Proposition 3.3.4. — *Soient un élément* $x \in G$, L *un sous-groupe de Levi de* G *contenant* G_x, Z *le centre de* L, Q *un sous-groupe parabolique de* G *de composante de Levi* L *et* K_Q *un sous-groupe ouvert compact maximal de* G *en bonne position par rapport à la paire parabolique* (Q,Z). *Alors on a l'égalité entre intégrales orbitales normalisées*

$$I^G(f, x) = I^L(f^Q, x)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ ($f^Q \in C_{c,\infty}(L)$ *désignant le terme* K_Q*-invariant de f suivant* Q).

Démonstration.

Soit M' le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de x et soit P' le sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M' induit par l'ordre, arbitrairement fixé au numéro 2.2.1, sur l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de x. (cf. le numéro 2.2.6). L'élément $x \in M'$ est primaire dans M', par conséquent l'égalité $G_x = M'_x$ et le lemme 3.3.3 généralisé à un produit de groupes linéaires entraînent l'inclusion

$$M' \subset L \subset G.$$

Soient P (resp. P") le sous-groupe parabolique de G (resp. de M') associé à x (cf. le numéro 2.2.6). Soient M une composante de Levi de P", A le centre de M, $s = x_M$ la composante de x suivant M et dm_s la mesure de Haar sur le centralisateur M_s de s dans M donnant volume 1 aux sous-groupes ouverts compacts maximaux de M_s. Comme l'énoncé de la proposition 3.3.4 est indépendant du choix de K_Q (cf. la remarque 3.2.3), la double inclusion $A \supset A' \supset Z$ permet de supposer le groupe K_Q en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A). Alors (définition 3.3.1)

$$I^G(f,x)=I^M(f^P,s,dm_s)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ (où f^P désigne le terme K_Q-invariant de f suivant P).

Soit U" le radical unipotent de P". Le groupe $K_{P''}=M'\cap K_Q$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de M' en bonne position par rapport à la paire parabolique (P",A) de M' et l'on peut, pour chaque fonction $\phi\in C_{c,\infty}(M')$, former le terme $K_{P''}$-invariant $\phi^{P''}\in C_{c,\infty}(M)$ de ϕ suivant P"

$$\phi^{P''}(m)=\delta_{P''}{}^{1/2}(m)\iint_{(K_{P''})\times U''}\mathrm{Ad}^*k_{P''}(h)(mu'')dk_{P''}du'' \quad (m\in M),$$

où $\delta_{P''}$: $P''\to q^{\mathbb{Z}}$ désigne le caractère module sur P" et où $dk_{P''}$ et du" sont les mesures de Haar respectivement sur $K_{P''}$ et U" telles que

$$\mathrm{vol}(K_{P''},dk_{P''})=\mathrm{vol}(U'',du'')=1.$$

Soit dg_x la mesure de Haar sur le centralisateur $G_x=M'_x$ de x dans G telle que (proposition 3.2.1 généralisée à un produit de groupes linéaires sur F)

$$I^{M'}(\phi,x,dg_x)=I^M(\phi^{P''},s,dm_s)$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(M')$.

Les relations U=U"U' (où U' désigne le radical unipotent de P') et $K_{P''}=K_Q\cap P$ assurant l'égalité

$$\left(f^{P'}\right)^{P''}=f^P \quad (f\in C_{c,\infty}(G))$$

où $f^{P'}\in C_{c,\infty}(M')$ désigne le terme K_Q-invariant de f suivant P', la proposition 3.2.2 entraîne la relation

$$\begin{aligned}I^G(f,x) &= I^M\left(\left(f^{P'}\right)^{P''},s,dm_s\right)\\ &= I^{M'}\left(f^{P'},x,dg_x\right)\\ &= \left(\left|D_{M'\backslash G}(x)\right|_F\right)^{1/2} I^G(f,x,dg_x)\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

Puis on reprend à l'identique le raisonnement effectué ci-dessus en remplaçant G par son sous-groupe de Levi L. Le groupe $L\cap P$ est un sous-groupe parabolique de L de radical unipotent $L\cap U$ et $L\cap K_Q$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de L en bonne position par rapport à la paire parabolique ($L\cap P$,A) de L. Alors (définition 3.3.1 étendue à un produit de groupes linéaires sur F)

$$I^L(h,x)=I^M(h^{L\cap P},s,dm_s)$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(L)$, où $h^{L\cap P}\in C_{c,\infty}(M)$ désigne le terme ($L\cap K_Q$)-invariant de h suivant $L\cap P$. De la même manière, le groupe $L\cap P'$ est un sous-groupe parabolique de L de radical unipotent $L\cap U'$ et $L\cap K_Q$ est en bonne position par rapport à la paire ($L\cap P'$,A'). D'où l'on déduit (proposition 3.2.2)

$$\begin{aligned}I^L(h,x) &= I^M\left(\left(h^{L\cap P'}\right)^{P''},s,dm_s\right)\\ &= I^{M'}\left(h^{L\cap P'},x,dg_x\right)\\ &= \left(\left|D_{M'\backslash L}(x)\right|_F\right)^{1/2} I^L(h,x,dg_x)\end{aligned}$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(L)$ (où $h^{L\cap P'}\in C_{c,\infty}(M')$ désigne le terme K_L-invariant de h suivant le parabolique $L\cap P'$).

On conclut grâce la relation (proposition 3.2.2)

$$I^G(f,x,dg_x)=\left(\left|D_{L\backslash G}(x)\right|\right)^{-1/2} I^L(f^Q,x,dg_x)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(L)$ et à l'égalité

$$\left|D_{M'\backslash G}(x)\right|^{1/2}\left|D_{L\backslash G}(x)\right|^{-1\backslash 2}\left|D_{M'\backslash L}(x)\right|^{-1\backslash 2}=1.$$

□

3.4. Développements en germes au voisinage des éléments semi-simples.

Soit s un élément semi-simple de G et soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\leq i\leq m} O_G(x_i)$$

une décomposition standard de $A_G(s)$ (cf. le numéro 2.2.8). Pour chaque entier k, $0\leq k\leq m$, on note

$$O_k=\coprod_{0\leq i\leq k} O_G(x_i)$$

la partie fermée de G formée par l'union (disjointe) des k premières AdG-orbites de cette décomposition.

Lemme 3.4.1. — *Il existe un jeu de fonctions* $\{f_{s,0},f_{s,1},\ldots,f_{s,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ *tel que*
(1) $\mathrm{supp}(f_{s,k})\cap O_k\subset O_G(x_k)$, $0\leq k\leq m$ (supp(f) *désignant le support de la fonction* f).
(2) $I^G(f_{s,k},x_i)=\delta_{i,k}$, $0\leq i,k\leq m$ ($\delta_{i,k}=0$ si $i\neq k$, $\delta_{i,i}=1$).

Démonstration.

On montre le lemme 3.4.1 par induction sur le nombre d'AdG-orbites de $A_G(s)$.
Soit un entier $k\in\{0,\ldots,m-1\}$.
Supposons que l'on a construit des fonctions $(f_i)_k\in C_{c,\infty}(G)$, $0\leq i\leq k$, vérifiant les conditions

$$\begin{cases}\mathrm{supp}\big((f_i)_k\big)\cap O_i\subset O_G(x_i), & 0\leq i\leq k\\ I^G\big((f_i)_k,x_j\big)=\delta_{i,j}, & 0\leq i,j\leq k\end{cases}$$

(pour k=0, c'est une trivialité car $I^G(1_W,x_0)>0$ pour toute partie ouverte compacte W de G d'intersection non vide avec l'orbite $O_G(s)$). On veut passer au cran k+1. Soit C une partie ouverte compacte de G. Alors $AdC(x_{k+1})$ est une partie ouverte compacte de l'orbite $O_G(x_{k+1})$, donc de volume $\alpha>0$ pour la mesure AdG-invariante sur $O_G(x_{k+1})$ induite par la normalisation 3.3.1. Par conséquent la fonction

$$\psi=\alpha^{-1}1_{AdC(x_{k+1})}$$

appartient à $C_{c,\infty}(O_G(x_{k+1}))$ et satisfait l'égalité

$$I^G(\psi,x_{k+1})=1.$$

Comme $\mathcal{O}_{k+1}$ est une partie fermée dans G et $\mathcal{O}_G(x_{k+1})$ une partie ouverte dans $\mathcal{O}_{k+1}$, la fonction (à valeurs complexes) sur $\mathcal{O}_{k+1}$ prolongeant ψ par 0 sur $\mathcal{O}_{k+1}-\mathcal{O}_G(x_{k+1})$ appartient à $C_{c,\infty}(\mathcal{O}_{k+1})$, donc il existe une fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$ qui vérifie

$$\begin{cases} h|_{\mathcal{O}_G(x_{k+1})}=\psi \\ \operatorname{supp}(h)\cap\mathcal{O}_{k+1}\subset\mathcal{O}_G(x_{k+1}) \end{cases}.$$

On définit alors les fonctions $(f_i)_{k+1}\in C_{c,\infty}(G)$

$$\begin{cases} (f_{k+1})_{k+1}=h \\ (f_i)_{k+1}=(f_i)_k-I^G((f_i)_k,x_{k+1})h,\ 0\leq i\leq k \end{cases}.$$

En définitive, les fonctions $f_{s,i}=(f_i)_m$, $0\leq i\leq m$, répondent à la question.

□

Corollaire 3.4.2. — *Pour tout entier* $a\geq 1$, *il existe un jeu de fonction* $\{f_{s,0},f_{s,1},\ldots,f_{s,m}\}$ *contenu dans* $C_{c,\infty}(sK^a)$ *et vérifiant les conditions (1) et (2) du lemme 3.4.1.*

Démonstration.

Les conditions (1) et (2) du lemme 3.4.1 ne dépendant pas vraiment des éléments $x_i\in A_G(s)$ $(0\leq i\leq m)$ mais seulement des orbites $\mathcal{O}_G(x_i)$ induites par ces éléments, on peut supposer que la famille $\{x_i\}_{0\leq i\leq m}$ est contenue dans le voisinage ouvert compact sK^a de s dans G.

On reprend à l'identique la démonstration du lemme 3.4.1.

Soit un entier $k\in\{0,\ldots,m-1\}$ et supposons que l'on a construit des fonctions $(f_i)_k\in C_{c,\infty}(G)$, $0\leq i\leq k$, vérifiant les conditions

$$\begin{cases} \operatorname{supp}((f_i)_k)\subset sK^a \\ \operatorname{supp}((f_i)_k)\cap\mathcal{O}_i\subset\mathcal{O}_G(x_i),\ 0\leq i\leq k \\ I^G((f_i)_k,x_j)=\delta_{i,j},\ 0\leq i,j\leq k \end{cases}$$

(pour $k=0$, c'est une trivialité car $I^G(1_W,x_0)>0$ pour toute partie ouverte compact W de sK^a d'intersection non vide avec $\mathcal{O}_G(s)$, donc en particulier pour $W=sK^a$). Pour passer au cran suivant, considérons une partie ouverte compacte C de G telle que la partie $\mathrm{Ad}C(x_{k+1})$ soit contenue dans sK^a (par exemple $C=K^b$ pour un entier $b\geq a$ suffisamment grand). On définit alors la fonction $\psi\in C_{c,\infty}(\mathcal{O}_G(x_{k+1}))$ comme dans la démonstration du lemme 3.4.1. Comme la partie $\mathrm{Ad}C(x_{k+1})$ est ouverte dans $\mathcal{O}_{k+1}\cap sK^a$, et comme $\mathcal{O}_{k+1}\cap sK^a$ est fermée dans sK^a, il existe une fonction $h\in C_{c,\infty}(sK^a)$ telle que

$$\begin{cases} h|_{\mathcal{O}_G(x_{k+1})}=\psi \\ \operatorname{supp}(h)\cap\mathcal{O}_{k+1}\subset\mathcal{O}_G(x_{k+1}) \end{cases}.$$

Les fonctions $(f_i)_{k+1}$ définies dans la démonstration du lemme 3.4.1 ont alors toutes un support contenu dans sK^a et le corollaire 3.4.2 est montré.

□

Soit s un élément semi-simple de G. Deux fonctions complexes f et h définies respectivement sur un voisinage V_f et V_h de s dans G sont déclarées (G,s)-*équivalentes* s'il existe un voisinage $W\subset V_f\cap V_h$ de s dans G sur lequel f et h coïncident. On rappelle qu'une classe de (G,s)-équivalence est un *germe de fonction au point* s *dans* G. On note $[f(.)]_{G,s}$ la classe de (G,s)-équivalence d'une fonction f: $G \to \mathbb{C}$. Il est clair qu'une action $\tau: G \to \mathrm{Aut}(G)$ induisant une action τ^* sur les fonctions f: $G \to \mathbb{C}$ (cf. le numéro 1.3), elle induit aussi une action sur les germes, notée encore τ^* et donnée par $\tau^*g([f(.)]_{G,s})=[\tau^*g(f)(.)]_{G,\tau g(s)}$ $(g\in G)$.

Proposition 3.4.3. (Développement en germes) — *Soient* s *un élément semi-simple de* G *et* $\mathcal{F}(s)$ *une famille (arbitraire) de représentants dans* G *des* AdG-*orbites de* $A_G(s)$. *Alors, pour chaque* $x\in\mathcal{F}(s)$, *il existe un unique germe de fonction* $[a_x(.)]_{G,s}$ *(ne dépendant que de l'orbite* $O_G(x)$ *et pas du choix de la famille* $\mathcal{F}(s)$*) au point* s *dans* G *tel que*

$$\left[I^G(f,.)\right]_{G,s}=\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} I^G(f,x)\left[a_x(.)\right]_{G,s}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. *De plus, pour chaque* $x\in\mathcal{F}(s)$,

$$\mathrm{Ad}^*g\left(\left[a_x(.)\right]_{G,s}\right)=\left[a_x(.)\right]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}$$

pour tout élément $g\in G$.

Démonstration.

<u>Existence</u>. Soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le m} O_G(x_i)\quad \left(x_i\in\mathcal{F}(s)\right)$$

une décomposition standard de $A_G(s)$ (c'est-à-dire qu'on ordonne l'ensemble $\mathcal{F}(s)$ de telle manière que la décomposition ci-dessus soit standard) et soit $\{f_{s,0},f_{s,1},\dots,f_{s,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ un jeu de fonctions qui vérifie les conditions du lemme 3.4.1 pour cette décomposition.

Soit $f\in C_{c,\infty}(G)$ et soit $\eta\in C_{c,\infty}(G)$ la fonction définie par

$$\eta=f-\sum_{0\le i\le m} I^G(f,x_i)f_{s,i}.$$

Les intégrales orbitales $I^G(\eta,g)$ de la fonction η sont nulles pour tout $g\in A_G(s)$. Par conséquent ([Vign] prop. 2.1), il existe une fonction $\psi\in C_0(G)$ qui coïncide avec η sur $A_G(s)$. Comme la fonction $\psi-\eta$ est nulle sur $A_G(s)$, on peut appliquer le lemme 2.4 de [Vign] et conclure à l'existence d'un voisinage ouvert, AdG-invariant et compact modulo conjugaison (c'est à dire contenu dans AdG(C) pour une partie compacte C de G) de s dans G sur lequel $\psi-\eta$ est nulle (l'article de M.F. Vignéras est écrit pour la caractéristique 0 mais la démonstration de ces deux résultats est indépendante de la caractéristique).

Ainsi, les germes

$$\left[I^G(f_{s,i},.)\right]_{G,s},\ 0\le i\le m,$$

vérifient l'égalité

$$\left[I^G(h,.)\right]_{G,s}=\sum_{0\le i\le m} I^G(h,x_i)\left[I^G(f_{s,i},.)\right]_{G,s}$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$.

<u>Unicité</u>. Soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le m} O_G(x_i)\quad \left(x_i\in\mathcal{F}(s)\right)$$

une décomposition standard de $A_G(s)$. Supposons qu'il existe, pour chaque entier $0\le i\le m$, un germe de fonction $[a_i(.)]_{G,s}$ au point s dans G, tel que

$$\sum_{0\leq i\leq m} I^G(f,x_i)[a_i(.)]_{G,s}=0$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. Soit $\{f_{s,0},f_{s,1},\ldots,f_{s,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ un jeu de fonction vérifiant les conditions du lemme 3.4.1 pour la décomposition de $A_G(s)$ ci-dessus. On a alors

$$0=\sum_{0\leq i\leq m} I^G(f_{s,k},x_i)[a_i(.)]_{G,s}=[a_k(.)]_{G,s}$$

pour chaque entier $0\leq k\leq m$.

Indépendance quant au choix de $\mathcal{F}(s)$. Soit $\mathcal{E}(s)$ une autre famille de représentants dans G des AdG-orbites de $A_G(s)$. Pour chaque $y\in\mathcal{E}(s)$, soit $[a'_y(.)]_{G,s}$ le germe au point s dans G associé à y pour la famille $\mathcal{E}(s)$ (grâce aux propriétés d'existence et d'unicité montrées ci-dessus) et pour chaque $x\in\mathcal{F}(s)$, soit $y(x)\in\mathcal{E}(s)$ l'élément défini par $y(x)=\mathcal{O}_G(x)\cap\mathcal{E}(s)$. Alors, la propriété d'invariance (3) de la normalisation 3.3.1 entraînant la relation

$$\begin{aligned}\left[I^G(f,.)\right]_{G,s}&=\sum_{y\in\mathcal{E}(s)} I^G(f,y)\left[a'_y(.)\right]_{G,s}\\&=\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} I^G(f,x)\left[a'_{y(x)}(.)\right]_{G,s}\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, l'unicité des germes $[a_x(.)]_{G,s}$ $(x\in\mathcal{F}(s))$ montrée ci-dessus entraîne l'égalité

$$\left[a_x(.)\right]_{G,s}=\left[a'_{y(x)}(.)\right]_{G,s}$$

pour tout élément $x\in\mathcal{F}(s)$.

Propriété d'invariance. Quant à la dernière assertion de l'énoncé 3.4.3, grâce à nouveau à la propriété d'invarince (3) de la normalisation 3.3.1, on a

$$\mathrm{Ad}^*g\left(\left[I^G(f,.)\right]_{G,s}\right)\underset{\text{déf}}{=}\left[\mathrm{Ad}^*g\left(I^G(f,.)\right)\right]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}=\left[I^G(f,.)\right]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ et tout élément $g\in G$. Par conséquent, le développement en germes au point s dans G entraîne la relation

$$\left[I^G(f,.)\right]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}=\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} I^G(f,x)\mathrm{Ad}^*g\left([a_x(.)]_{G,s}\right)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ et tout élément $g\in G$, et l'unicité du germe $[a_x(.)]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}$ $(x\in\mathcal{F}(s))$ au point Adg(s) dans G entraîne l'égalité

$$\mathrm{Ad}^*g\left(\left[a_x(.)\right]_{G,s}\right)=\left[a_x(.)\right]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}$$

pour tout $x\in\mathcal{F}(s)$ et tout $g\in G$ donc pour tout couple $(x,g)\in A_G(s)\times G$.

□

Remarque 3.4.4. —

(1) On a une autre propriété d'invariance (des supports), liée à la propriété d'invariance montrée ci-dessus. Fixons un élément s semi-simple dans G, une famille $\mathcal{F}(s)$ de représentants dans G des AdG-orbites de $A_G(s)$ et, pour chaque $x\in\mathcal{F}(s)$, un représentant $a_x:G\rightarrow\mathbb{C}$ du germe $[a_x(.)]_{G,s}$ au point s dans G. Alors pour tout élément $g\in G$ la fonction $\mathrm{Ad}^*g(a_x):G\rightarrow\mathbb{C}$ est un représentant du germe $[a_x(.)]_{G,\mathrm{Ad}g(s)}$ au point Adg(s) dans G (c'est la propriété d'invariance ci-dessus). De plus, si l'on fixe $f\in C_{c,\infty}(G)$ et $g\in G$, alors V(s,f) est un voisinage ouvert de s dans

G tel que $I^G(f,y)=\Sigma_{x\in\mathcal{F}(s)} I^G(f,x)\, a_x(y)$ pour tout élément $y\in V(s,f)$ si et seulement si $Adg(V(s,f))$ est un voisinage ouvert de $Adg(s)$ dans G tel que $I^G(f,y')=\Sigma_{x\in\mathcal{F}(s)} I^G(f,x) Ad^*g(a_x)(y')$ pour tout élément $y'\in Adg(V(s,f))$. Bien entendu, si l'on prend pour chaque représentant a_x une intégrale orbitale sur G, cette remarque est une trivialité.

(2) Les germes $[a_x(.)]_{G,s}$ $(x\in A_G(s))$, en tant que germes d'intégrales orbitales sur G normalisées comme en 3.3.1, dépendent de cette normalisation. On verra plus loin (corollaire 4.2.2) qu'il existe une normalisation des intégrales orbitales sur G induisant des germes constants sur chaque nappe de G.

□

3.5. Homogénéité des germes au voisinages des éléments centraux.

Pour tout élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$ ($F^\times$ étant naturellement identifié au centre de G) et toute fonction $f\in C_{c,\infty}(AdG(K^1))$, on note $f^t\in C_{c,\infty}(AdG(1+t\mathfrak{g}^1))$ la fonction définie par

$$\begin{cases} f^t(1+tx)=f(1+x) \text{ pour tout } x\in AdG(\mathfrak{g}^1) \\ f^t(g)=0 \text{ si } g\notin AdG(1+t\mathfrak{g}^1) \end{cases}.$$

Lemme 3.5.1. — *Soient* $u\in\mathcal{U}$ *et* $t\in\mathcal{O}-\{0\}$. *alors*

$$I^G(f^t,u)=|t|_F^{\dim(O_G(u))/2} I^G(f,u)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(AdG(K^1)$.

Démonstration.[2]

Quitte à conjuguer l'unipotent u dans G, on peut supposer que $u=u_{(\alpha)}$ pour une partition ordonnée $(\alpha)=(\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_r)$ de N (cf. le numéro 2.1.3). Soit n l'élément nilpotent de G défini par $n=u-1$ et soit la matrice diagonale par blocs $y=diag(y_1,\ldots,y_r)$ donnée par

$$y_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t^{\alpha_i-2} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t^{\alpha_i-1} \end{pmatrix}\in GL_{\alpha_i}(F),\ 1\leq i\leq r.$$

On vérifie sans difficulté que $Ady^{-1}(1+n)=1+tn$. Ainsi

$$\begin{aligned} I^G(f^t,u) &= \int_{G_u\backslash G} f^t(g^{-1}ug)dg_u\backslash dg \\ &= \left|\det_{Lie(G_u)\backslash Lie(G)}(Ady)\right|_F \int_{G_u\backslash G} f^t(g^{-1}y^{-1}uyg)dg_u\backslash dg \\ &= \left|\det_{Lie(G_u)\backslash Lie(G)}(Ady)\right|_F I^G(f,u) \end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(AdG(K^1)$. Comme

$$\left|\det_{Lie(G)}(Ady)\right|=1,$$

[2] Si la caractéristique p du corps F est > N, alors n est l'un des générateurs d'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ isomorphe à $sl_2(F)$ (théorème de Jacobson-Morosow) et l'on peut facilement adapter le travail de J. Rogawski ([Roga] lemma 7).

le problème se ramène à montrer l'égalité

$$\left|\det_{\mathrm{Lie}(G_u)}\left(\mathrm{Ad}y^{-1}\right)\right|_F = |t|_F^{\dim O_G(u)/2}.$$

Ce résultat est bien connu (et souvent cité), mais comme nous n'avons trouvé aucune référence dans la littérature, nous proposons ci-dessous une démonstration.(3)

Soit

$$\{0\} = V_{u,0} \subsetneq V_{u,1} \subsetneq \cdots \subsetneq V_{u,r} = F^N$$

le drapeau de F^N défini par

$$V_{u,i} = \ker\left(n^i : F^N \to F^N\right)$$

pour chaque $i \in \{0,1,\ldots,r\}$. Soient $P=P_{(u)}$ le sous-groupe parabolique de G associé à u, U le radical unipotent de P, M la composante de Levi semi-standard de P et $\{W_i\}_{1\leq i\leq r}$ la famille de sous-espaces vectoriels de F^N telle que

$$\begin{cases} V_{u,i} = W_i \oplus V_{u,i-1}\,,\ i=1,\ldots,r \\ M = \left\{p \in P,\ pW_i = W_i\,,\ i=1,\ldots,r\right\} \end{cases}.$$

Pour chaque couple $(i,j) \in \{1,\ldots,r\}\times\{1,\ldots,r\}$, soit $W_{i,j}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ défini par

$$W_{i,j} = \mathrm{Hom}_F\left(W_j, W_i\right).$$

Ainsi,

$$\mathrm{Lie}(U) = \oplus_{1\leq i<j\leq r} W_{i,j} \subset \oplus_{1\leq i\leq j\leq r} W_{i,j} = \mathrm{Lie}(P).$$

Pour chaque entier $i \in \{2,\ldots,r\}$, notons

$$n_i : W_i \to W_{i-1}$$

l'injection induite par la restriction de n à W_i (cf. la remarque 2.1.4.3). Pour tout élément x appartenant à Lie(P), on note $x = \oplus_{1\leq i\leq j\leq r} x_{i,j}$ la décomposition de x suivant $\oplus_{1\leq i\leq j\leq r} W_{i,j}$. On sait que le centralisateur G_u de u dans G est contenu dans P (proposition 2.2.6.1). Avec la notation $[a,b] = \mathrm{Ad}a(b)b^{-1}$ ($(a,b)\in G\times G$) et la convention $n_1 = 0 = n_{r+1}$, on a

$$\left[n\,, x_{i,j}\right] = n_i \circ x_{i,j} - x_{i,j} \circ n_{j+1}$$

pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1\leq i\leq j\leq r$ et tout élément $x_{i,j} \in W_{i,j}$. Par suite

$$\begin{aligned} [n\,, x] &= \sum\nolimits_{1\leq i\leq j\leq r} n_i \circ x_{i,j} - x_{i,j} \circ n_{j+1} \\ &= \sum\nolimits_{1\leq i\leq j\leq r-1} n_{i+1} \circ x_{i+1,j+1} - x_{i,j} \circ n_{j+1} \end{aligned}$$

pour tout élément $x \in \mathrm{Lie}(P)$. D'où l'on déduit

$$\mathrm{Lie}(G_u) = \left\{x \in \mathrm{Lie}(P),\ n_{i+1} \circ x_{i+1,j+1} = x_{i,j} \circ n_i\ \ \forall (i,j) \text{ tel que } 1\leq i\leq j\leq r-1\right\}.$$

Pour chaque entier $i \in \{1,\ldots,r\}$, soit E_i le sous-espace vectoriel de Lie(P) défini par

$$E_i = \bigoplus_{k=1}^{r-i} W_{1+k,\,i+k}$$

---

(3) En voici une autre, tellement plus simple, indiquée par J.L. Waldspurger: l'espace $\mathrm{Lie}(G_u)\backslash\mathrm{Lie}(G)$ est symplectique pour la forme bilinéaire $(X,Y) \mapsto \mathrm{Trace}(n\,[X\,,Y\,])$ et Ady en est une similitude de rapport t.

et soit d_i la dimension du F-espace vectoriel $\mathrm{Lie}(G_u)\cap E_i$. Comme les applications n_k $(2\leq k\leq r)$ sont injectives, pour chaque $i\in\{1,\ldots,r\}$ l'espace vectoriel $\mathrm{Lie}(G_u)\cap E_i$ s'identifie naturellement au sous-espace de $W_{1,i}$ formé par les éléments $x_{1,i}\in W_{1,i}$ tels que

$$x_{1,i}\left(n_{i+1}\circ\cdots\circ n_{i+k}(W_{i+k})\right)\subset n_2\circ\cdots\circ n_{1+k}(W_{1+k})$$

pour chaque $k\in\{1,\ldots,r-i\}$. Un calcul facile entraîne alors (avec la convention $\hat{\alpha}_{r+1}=0$)

$$d_i=\sum\nolimits_{1\leq k\leq 1+r-i}\hat{\alpha}_k\left(\hat{\alpha}_{i+k-1}-\hat{\alpha}_{i+k}\right)\qquad\left(i\in\{1,\ldots,r\}\right).$$

En remarquant que la restriction de l'application $\mathrm{Ad}y^{-1}$ au sous-espace E_i $(i\in\{1,\ldots,r\})$ de $\mathfrak{g}$ agit scalairement par multiplication par t^{i-1}, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\left|\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_u)}\left(\mathrm{Ad}y^{-1}\right)\right|_F &= \prod_{1\leq i\leq r}\left|\det\nolimits_{\mathrm{Lie}(G_u)\cap E_i}\left(\mathrm{Ad}y^{-1}\right)\right|_F\\ &= \prod_{1\leq i\leq r}|t|_F^{(i-1)d_i}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i\leq r}(i-1)d_i &= \sum_{1\leq k\leq r}\hat{\alpha}_k\left(\sum_{1\leq i\leq r+1-k}(i-1)\left(\hat{\alpha}_{i+k-1}-\hat{\alpha}_{i+k}\right)\right)\\ &= \sum_{1\leq k\leq r}\hat{\alpha}_k\left(\sum_{k+1\leq j\leq r}\hat{\alpha}_j\right)\\ &= 1/2\left(N^2-\sum_{1\leq k\leq r}\hat{\alpha}_k^{\,2}\right)\\ &= 1/2\,\dim\left(\mathcal{O}_{(\alpha)}\right).\end{aligned}$$

D'où le lemme 3.5.1.

□

Proposition 3.5.2. — *Soit*

$$A_G(1)=\coprod_{0\leq i\leq m}\mathcal{O}_G(u_i)$$

une décomposition standard de l'ensemble des éléments unipotents de G *et soit un jeu de fonctions* $\{f_{1,0},f_{1,1},\ldots,f_{1,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ *vérifiant les conditions du lemme 3.4.1 pour cette décomposition. Alors il existe un voisinage* W *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *tel que pour chaque* $i\in\{0,\ldots,m\}$,

$$I^G\left(f_{1,i},1+tX\right)=|t|_F^{\dim(U_X)-\left(\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2\right)}\,I^G\left(f_{1,i},1+X\right)$$

pour tout $X\in W$ *et tout* $t\in\mathcal{O}-\{0\}$, U_X *désignant le radical unipotent du sous-groupe parabolique de* G *associé à* $1+X$.

Démonstration.

S'agissant d'un résultat portant sur les germes d'intégrales orbitales au point 1 dans G, on peut supposer (grâce à la propriété d'unicité de la proposition 3.4.3) que le jeu de fonctions $\{f_{1,0},f_{1,1},\ldots,f_{1,m}\}$ vérifiant les conditions du lemme 3.4.1 pour la décomposition standard de $A_G(1)$ de l'énoncé est contenu dans le sous-espace $C_{c,\infty}(K^1)$ de $C_{c,\infty}(G)$ (corollaire 3.4.2).

Soit un élément $1+X=x\in K^1$ fixé. Montrons que pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathrm{AdG}(K^1))$ et tout élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$

$$I^G(f^t,1+tX)=|t|_F^{\dim(U)}\,I^G(f,1+X)$$

où $U=U_X$ est le radical unipotent du sous-groupe parabolique P de G associé à x.

Soient M' le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de x, P" le sous-groupe parabolique de M' associé à x et M une composante de Levi de P". Alors, pour tout élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$, $G_{1+tX}=G_x=P''_x$ et, notant $X_M\in\mathrm{Lie}(M)$ et $X_U\in\mathrm{Lie}(U)$ les éléments tels que l'on ait l'égalité $X=X_M+X_U$,

$$\begin{cases}1+X=(1+X_M)\left(1+(1+X_M)^{-1}X_U\right)\\ 1+tX=(1+tX_M)\left(1+t(1+tX_M)^{-1}X_U\right)\end{cases}.$$

Pour tout élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$, il est clair que M' est le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de $1+tX\in K^1$ et que P" est le sous-groupe parabolique de M' associé à $1+tX$. Si $t\neq 1$, les composantes irréductibles du polynôme minimal de $1+tX$ peuvent être distinctes de celles de x et le sous-groupe parabolique P(t) de G associé à $1+tX$ (dépendant de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble de ces composantes) peut à priori être distinct de P. On peut, sans perte de généralité (grâce au point (4) de la définition 3.3.1), supposer que $P(t)=P$ pour tout $t\in\mathcal{O}-\{0\}$. Soient A le centre de M et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A) de G. Soient dk_P, dm, du les mesures de Haar respectivement sur K_P, M et U normalisées par

$$\mathrm{vol}(K_P,dk_P)=\mathrm{vol}(M\cap K_P,dm)=\mathrm{vol}(U\cap K_P,du)=1.$$

Alors, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathrm{AdG}(K^1))$ et pour tout $t\in\mathcal{O}-\{0\}$,

$$\begin{aligned}I^G(f^t,1+tX)&=I^M\left((f^t)^P,1+tX_M\right)\\&=\int_{M_{1+X_M}\backslash M}(f^t)^P\left(m^{-1}(1+tX_M)m\right)dm_{1+X_M}\backslash dm\end{aligned}$$

où $(f^t)^P$ désigne le terme K_P-invariant de f^t suivant P et où la mesure de Haar sur le centralisateur de l'élément $1+X_M$ dans M est celle définie en 3.3.1. Or

$$\begin{aligned}(f^t)^P(m^{-1}(1+tX)m)&=\delta_P^{1/2}(1+tX_M)\left|\det{}_{\mathrm{Lie}(U)}(\mathrm{Ad}m^{-1})\right|_F\iint_{K_P\times U}\left(\mathrm{Ad}^*mk_P(f^t)\right)\left((1+tX_M)u\right)du\,dk_P\\&=\delta_P^{1/2}(1+tX_M)\left|\det{}_{\mathrm{Lie}(U)}(\mathrm{Ad}m^{-1})\right|_F\int_{K_P}\left(\int_U\left(\mathrm{Ad}^*mk_P(f)\right)^t\left((1+tX_M)u\right)du\right)dk_P\end{aligned}$$

et, notant dN la mesure de Haar sur Lie(U) normalisée par $\mathrm{vol}(\mathrm{Lie}(U)\cap\mathfrak{g}^0)=1$,

$$\begin{aligned}\int_U\Phi^t\left((1+tX_M)u\right)du&=\int_{\mathrm{Lie}(U)}\Phi^t\left((1+tX_M)(1+N)\right)dN\\&=\int_{\mathrm{Lie}(U)}\Phi^t\left(1+tX_M+(1+tX_M)N\right)dN\\&=|t|^{\dim(U)}\int_{\mathrm{Lie}(U)}\Phi^t\left(1+tX_M+t(1+X_M)N\right)dN\\&=|t|^{\dim(U)}\int_U\Phi\left((1+X_M)u\right)du\end{aligned}$$

pour toute fonction $\Phi\in C_{c,\infty}(\mathrm{AdG}(K^1))$ car

$$\left|\det{}_{\mathrm{Lie}(U)}(1+tX_M)\right|_F=\left|\det{}_{\mathrm{Lie}(U)}(1+X_M)\right|_F=1.$$

On obtient l'égalité

$$I^G\left(f^t, 1+tX\right)=|t|_F^{\dim(U)}\left(f, 1+X\right)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathrm{AdG}(K^1))$ et pour tout élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$ en reprenant le développement ci-dessus dans l'autre sens.

Soit une fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathrm{AdG}(K^1))$. Alors, pour chaque élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$, il existe un entier $r(f,t)$ tel que (proposition 3.4.3 et lemme 3.5.1)

$$\begin{aligned}I^G\left(f^t, 1+tX\right) &= \sum_{0\le i\le m} I^G\left(f^t, u_i\right) I^G\left(f_{1,i}, 1+tX\right)\\ &= \sum_{0\le i\le m} |t|_F^{\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2}\, I^G\left(f, u_i\right) I^G\left(f_{1,i}, 1+tX\right)\end{aligned}$$

pour tout $X\in\mathfrak{g}^{r(f,t)}$. Il est clair que cet entier $r(f,t)$ ne dépend en fait que de f et $|t|_F$.

Pour chaque élément $t\in\mathcal{O}-\{0\}$, soit $r(t)=\max\{r(f_{1,0},t),\dots,r(f_{1,m},t)\}$. Le développement en germes ci-dessus appliqué aux fonction $f_{1,i}$ aux points $1+tX$ ($t\in\varpi\mathcal{O}^\times$ et $X\in\mathfrak{g}^r$) où $r=r(\varpi)$, joint à la formule d'homogénéité montrée ci-dessus, entraînent l'égalité

$$|t|_F^{\dim(U_X)}\, I^G\left(f_{1,i}, 1+X\right)=|t|_F^{\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2}\, I^G\left(f_{1,i}, 1+tX\right)\quad(0\le i\le m)$$

pour tout $t\in\varpi\mathcal{O}^\times$ et tout $X\in\mathrm{AdG}(\mathfrak{g}^r)$. Comme $t\mathfrak{g}^r=\mathfrak{g}^{r+1}\subset\mathfrak{g}^r$ pour tout $t\in\varpi\mathcal{O}^\times$ et comme $\dim(U_{tX})=\dim(U_X)$ pour tout $t\in\mathcal{O}-\{0\}$ et tout $X\in\mathrm{AdG}(K_1)$, par itérations successives on obtient la formule d'homogénéité

$$I^G\left(f_{1,i}, 1+tX\right)=|t|_F^{\dim(U_X)-(\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2)}\, I^G\left(f_{1,i}, 1+X\right)$$

pour tout $t\in\mathcal{P}-\{0\}$ et tout $X\in\mathrm{AdG}(\mathfrak{g}^r)$. En notant γ l'entier défini par $\gamma=\sup(r(1),r(\varpi))$, cette formule est valable pour tout $t\in\mathcal{O}-\{0\}$ et tout $X\in\mathrm{AdG}(\mathfrak{g}^\gamma)$; par conséquent le voisinage $W=\mathrm{AdG}((\mathfrak{g}^\gamma)$ convient et la proposition 3.5.2 est montrée.

□

Pour tout élément $g\in G$ et toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, rappelons que $\lambda^*g(f)\in C_{c,\infty}(G)$ est la fonction définie par

$$\left(\lambda^*g(f)\right)(x)=f\left(g^{-1}x\right)\quad\left(x\in G\right).$$

La translation à gauche par des éléments de $F^\times$ (identifié au centre de G) commutant à l'action par conjugaison, il est clair que

$$I^G\left(f, x\right)=I^G\left(\lambda^*z(f), zx\right)$$

pour tout couple $(z,x)\in F^\times\times G$ et toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

D'où la variante suivante de la proposition 3.5.2.

Corollaire 3.5.3. (Homogénéité des germes) — *Soient* $z\in F^\times$ (*identifié au centre de* G),

$$A_G(z)=\coprod_{0\le i\le m}\mathcal{O}_G\left(zu_i\right)$$

une décomposition standard de $A_G(z)$ *et* $\{f_{z,0}, f_{z,1},\dots,f_{z,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ *un jeu de fonctions qui vérifie les conditions du lemme 3.4.1 pour cette décomposition. Alors il existe un voisinage* W *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *tel que*

$$I^G\left(f_{z,i}, 1+tX\right)=|t|_F^{\dim(U_X)-(\dim(\mathcal{O}_G(u_i))/2)}\, I^G\left(f_{z,i}, 1+X\right)$$

pour tout $X\in W$, *tout* $t\in \mathcal{O}-\{0\}$ *et tout* $i\in\{0,...,m\}$.

□

3.6. Indépendance linéaire des germes au voisinage des éléments semi-simples séparables.

Commençons par un lemme technique de descente des intégrales orbitales non normalisées au voisinage dans G_{reg} d'un point semi-simple séparable de G.

Lemme 3.6.1. — *Soit* T *un tore maximal de* G, s *un élément de* T *et* $f\in C_{c,\infty}(G)$. *Alors, il existe une fonction* $F\in C_{c,\infty}(G_s)$ *et un voisinage* Ω *de* s *dans* T *tels que*

$$\begin{cases} F(s)=I^G(f,s) \\ I^G(f,t)=I^{G_s}(F,t) \text{ pour tout } t\in\Omega\cap G_{reg} \end{cases}.$$

Démonstration.

Il s'agit essentiellement d'utiliser la propriété suivante ([Hari 1] lemma 19 ou [Roga] §1, lemma 1): il existe un voisinage ouvert $\mathcal{W}_T$ de s dans T tel que, pour toute partie compacte X de G, il existe une partie compacte C=C(X) de G telle que

$$(\mathrm{Ad}x^{-1}(\mathcal{W}_T)\cap X\neq\emptyset)\Rightarrow x\in G_sC.$$

Soit X=supp(f) et C=C(X) une partie compacte de G vérifiant la propriété ci-dessus. On peut supposer que C est ouverte dans G. Pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$, on définit la fonction $h_{(s)}\in C_{c,\infty}(G_s\backslash G)$ par

$$h_{(s)}(x)=\int_{G_s}h(g_sx)dg_s,$$

où dg_s est la mesure de Haar sur G_s telle que l'on ait l'égalité

$$I^G(.,s,dg_s)=I^G(.,s)$$

(en tant que distributions sur G).

Soient $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ telle que $\phi_{(s)}$ soit la fonction caractéristique de G_sC et $F\in C_{c,\infty}(G_s)$ la fonction définie par

$$F(g_s)=\int_G\phi(g)\mathrm{Ad}^*g(f)(g_s)dg.$$

Alors,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_G\phi(g)f(g^{-1}sg)dg \\ &= \iint_{(G_s\backslash G)\times G_s}\phi(g_sg)f(g^{-1}sg)(dg_s\backslash dg)dg_s \\ &= \int_{G_s\backslash G}\phi_{(s)}(g)f(g^{-1}sg)dg_s\backslash dg \\ &= I^G(f,s). \end{aligned}$$

Soit un élément $t\in(w_T\cap G_{reg})$ et soit dg_T une quelconque mesure de Haar sur $G_t=T$. Alors,

$$I^G(f,t,dg_T)=I^{G_s}(F,t,dg_T)$$

car

$$
\begin{aligned}
I^G(f,t,dg_T) &= \int_{T\backslash G} Ad^*g(f)(t)dg_T\backslash dg \\
&= \int_{G_s\backslash G}\int_{T\backslash G_s} Ad^*g_s g(f)(t)(dg_s\backslash dg)(dg_T\backslash dg_s) \\
&= \int_{G_s\backslash G}\int_{T\backslash G_s} \phi_{(s)}(g)Ad^*g_s g(f)(t)(dg_s\backslash dg)(dg_T\backslash dg_s) \\
&= \int_{G}\int_{T\backslash G_s} \phi(g)Ad^*g_s g(f)(t)dg(dg_T\backslash dg_s) \\
&= \int_{T\backslash G_s} Adg_s(F)(t)dg_T\backslash dg_s .
\end{aligned}
$$

En particulier, si l'on prend pour dg_T la mesure de Haar sur T donnant volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal de T, on obtient (normalisation 3.3.1)

$$I^G(f,t)=I^{G_s}(F,t)$$

pour tout élément $t\in w_T\cap G_{reg}$.

□

Proposition 3.6.2. (Indépendance des germes, cas séparable) — *Soit* s *un élément de* G *semi-simple* *séparable* *et* $\mathcal{U}(s)$ *une famille de représentants des* AdG_s*-orbites unipotentes de* G_s. *Pour chaque élément* $u\in\mathcal{U}(s)$, *soit* $a_{su}: G\to\mathbb{C}$ *un représentant du germe* $[a_{su}(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G. *Supposons qu'il existe une famille de nombres complexes* $\{c_u\}_{u\in\mathcal{U}(s)}$ *et un voisinage* W *de* s *dans* G *tels que*

$$\sum_{u\in\mathcal{U}(s)} c_u a_{su}(x)=0 \quad \text{pour tout } x\in W\cap G_{reg}\ ;$$

alors $c_u=0$ *pour tout* $u\in\mathcal{U}(s)$.

Démonstration.

Soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le m} O_G(su_i) \quad (u_i\in\mathcal{U}(s))$$

une décomposition standard de $A_G(s)$ et soit $\{f_{s,0},f_{s,1},\dots,f_{s,m}\}\subset C_{c,\infty}(G)$ un jeu de fonctions qui vérifie les conditions du lemme 3.4.1 pour cette décomposition. Soient $c_0,\dots,c_{m+1}$ m+1 nombres complexes et W un voisinage de s dans G tels que

$$\sum_{0\le i\le m} c_i I^G(f_{s,i},x)=0 \quad \text{pour tout } x\in W\cap G_{reg}\ .$$

Soit $f\in C_{c,\infty}(G)$ la fonction définie par

$$f=\sum_{0\le i\le m} c_i f_{s,i}\ .$$

Ainsi, $I^G(f,x)=0$ pour tout $x\in W\cap G_{reg}$ et le problème se ramène à montrer que $I^G(f,su_i)=c_i=0$ pour chaque $0\le i\le m$. On traite séparément le cas i=0 et le cas $i\in\{1,\dots,m\}$.

(1) Le cas i=0. On a un isomorphisme (non canonique)

$$G_s\cong GL_{N_1}(F_1)\times\cdots\times GL_{N_r}(F_r),\quad \sum_{1\le i\le r}[F_i:F]N_i=N,$$

pour des extensions finies séparables $F_1,\dots,F_r$ de F. Soit $T\subset G_s$ un tore maximal de G elliptique dans G_s (au sens où chaque composante T_i de T à travers cet isomorphisme est compacte modulo $F_i^{\times}$). Le lemme 3.5.1 nous permet d'affirmer l'existence d'une fonction F_0 dans $C_{c,\infty}(G_s)$ telle que

$$I^G(f,s)=F_0(s)$$

et

$$I^G(f,x)=I^{G_s}(F_0,x)$$

pour tout $x\in T\cap G_{reg}$ suffisamment proche de s. Une extension immédiate de la proposition 3.4.3 entraîne l'existence d'un développement en germes au point s dans G_s

$$I^{G_s}(F_0,y)=\sum_{0\le i\le m} I^{G_s}(F_0,su_i)b_i(y)$$

pour tout $y\in G_s$ suffisamment proche de s (où, pour chaque $i\in\{0,...,m\}$, la fonction $b_i : G_s \to \mathbb{C}$ est un représentant du germe de fonctions au point s dans G_s associé à l'élément su_i). La formule d'homogénéité des germes au voisinage des éléments centraux (corollaire 3.5.3), entraîne enfin l'existence d'un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}$ de 0 dans Lie(G_s) tel que

$$\begin{aligned} 0 &= I^{G_s}(F_0, s(1+v)) \\ &= \sum_{0\le i\le m} I^{G_s}(F_0, su_i)\, b_i(s(1+v)) \\ &= \sum_{0\le i\le m} I^{G_s}(F_0, su_i)\, |t|_F^{\dim O_{G_s}(u_i)/2}\, b_i(s(1+tv)) \end{aligned}$$

pour tout $v\in\mathcal{V}$ tel que $s(1+v)\in T\cap G_{reg}$ et pour tout $t\in\mathcal{O}$ (identifié à un sous-groupe du centre de Lie(G_s)).

On sait qu'il existe une constante c non nulle indépendante de T telle que $b_0(y)=c$ pour tout $y\in T\cap G_{reg}$ suffisamment proche de s (extension immédiate à s central du résultat montré par G. Henniart pour $s=1$ ([Henn] appendice 3)). Pour chaque $t\in\mathcal{O}$, la partie $T(t)\subset T$ définie par $T(t)=T\cap\{s(1+t\mathcal{V}), v\in\mathcal{V}\}$ est un voisinage ouvert compact de s dans T et $T(t)\cap G_{reg}$ est un ouvert dense dans T(t). On peut donc dans la dernière égalité de la formule ci-dessus faire tendre $s(1+tv)$ ($t\to 0$, $v\in\mathcal{V}$) vers s dans $T\cap G_{reg}$. Par passage à la limite, on obtient

$$0=I^{G_s}(F_0,s)=F_0(s)=I^G(f,s).$$

(2) Le cas $i\in\{1,...,m\}$. On pose $u=u_i$. Soient M' le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de su et P (resp. P") le sous-groupe parabolique de G (resp. de M') associé à su (cf. le numéro 2.2.6). Soient M une composante de Levi de P" contenant s, A le centre de M et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P,A). Soit $T\subset M_s$ un tore maximal de G elliptique dans M_s (c'est à dire compact modulo A), et soit dg_T la mesure de Haar sur T qui donne volume 1 au sous-groupe ouvert compact maximal de T. Une généralisation immédiate du lemme 3.6.1 au groupe M nous permet d'affirmer l'existence d'une fonction $F\in C_{c,\infty}(M_s)$ telle que

$$I^M(f^P,s)=F(s)$$

et

$$I^M(f^P,x)=I^{M_s}(F,x)$$

pour tout $x\in T\cap M_{reg}\subset T\cap G_{reg}$ suffisamment proche de s ($f^P\in C_{c,\infty}(M)$ désignant le terme K_P-invariant de f suivant P).

En notant que

$$0 = I^G(f, x) = I^M(f^P, x)$$

pour tout $x \in W \cap T \cap G_{reg}$, le raisonnement effectué ci-dessus pour $i=0$ entraîne

$$0 = I^{M_*}(F, s) = F(s) = I^M(f^P, s) = I^G(f, su).$$

□

3.7. Commentaire.

On va voir (numéro 4) que, modulo une approche un peu différente de celle développée dans le numéro 3, on peut prouver la proposition 3.6.2 pour les éléments de G semi-simples inséparables. On a jusqu'à présent suivi d'assez près, en la modifiant au besoin pour l'adapter à nos objets, la théorie développée en caractéristique 0. Pour aller plus loin et aborder la question vraiment intéressante – que se passe-t-il de si mystérieux au voisinage des éléments inséparables ? – on a besoin d'une construction différente, permettant de traiter indistinctement les éléments séparables et inséparables. Cette construction nous est suggérée par la décomposition de G en nappe de Dixmier. On va en effet définir, de la même manière qu'on l'a fait pour $I^G(.,.)$, une normalisation $J^G(.,.)$ des intégrales orbitales dans G induisant, pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, une application $x \mapsto J^G(f,x)$ localement constante sur chaque nappe. L'indépendance des germes au voisinage des éléments semi-simples inséparables (comme la caractérisation des intégrales orbitales sur G et le théorème de densité des intégrales orbitales régulières semi-simples séparables dans l'espace des distributions AdG-invariantes sur G) découlera alors directement de cette normalisation.

4. Une bonne normalisation des intégrales orbitales. Caractérisation, indépendance des germes et théorème de densité.

4.1. On montre une propriété de stabilité des intégrales orbitales "voisines" (en un sens que l'on précisera) d'un élément irréductible de G. Il s'agit essentiellement d'utiliser les techniques d'approche d'un tel élément développées par C.J. Bushnell & P.C. Kutzko dans [Bu-Ku].

Soit s un élément irréductible de G et soient:
— $E=F[s]\subset \mathfrak{g}$, l'extension (non nécessairement séparable) de F engendrée par s.
— ϖ_E une uniformisante de E.
— $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E et $\mathcal{P}_E=\varpi_E\mathcal{O}_E$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$.
— $\mathfrak{a}=\mathrm{End}_F(E)$ et $\mathfrak{a}^\times=\mathrm{Aut}_F(E)$ le groupe multiplicatif de $\mathfrak{a}$.
— $\mathcal{A}=\mathcal{A}^0$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire principal de $\mathfrak{a}$ normalisé par $E^\times$.
— $\mathcal{A}^i=\varpi_E{}^i\mathcal{A}$, $i\in\mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{A}^1$ de $\mathcal{A}$.
— $\mathfrak{b}=\mathrm{End}_E(F^N)$ le commutant de s dans $\mathfrak{g}$.
— $\mathcal{G}=\mathcal{G}^0$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire principal de $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ (au sens où $\mathrm{Ad}x(\mathcal{G})=\mathcal{G}$ pour tout $x\in E^\times$) tel que $\mathcal{B}=\mathcal{B}^0=\mathfrak{b}\cap\mathcal{G}$ soit un $\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire maximal de $\mathfrak{b}$.
— $\mathcal{G}^i=\varpi_E{}^i\mathcal{G}$, $i\in\mathbb{Z}$ (resp. $\mathcal{B}^i=\mathfrak{b}\cap\mathcal{G}^i$, $i\in\mathbb{Z}$), les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{G}^1$ de $\mathcal{G}$ (resp. les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{B}^1=\mathfrak{b}\cap\mathcal{G}^1$ de $\mathcal{B}$ ([Bu-Ku] prop. (1.2.4)).
— $\nu_{\mathcal{G}}: \mathfrak{g} \to \mathbb{Z}$ la hauteur sur $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathcal{G}$ définie par

$$\nu_{\mathcal{G}}(x)=\max\{i\in\mathbb{Z},\ x\in\mathcal{G}^i\}$$

et $\nu_{\mathcal{A}}: \mathfrak{a} \to \mathbb{Z}$ la hauteur sur $\mathfrak{a}$ relativement à $\mathcal{A}$ définie par

$$\nu_{\mathcal{A}}(x)=\max\{i\in\mathbb{Z},\ x\in\mathcal{A}^i\}.$$

On peut voir $\mathcal{G}$ comme le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ d'une chaîne de $\mathcal{O}_F$-réseaux $\mathcal{L}=\{L_i\ ,\ i\in\mathbb{Z}\}$ dans F^N. Soit W le F-sous-espace vectoriel de F^N engendré par une E-base $\{w_1,\ldots,w_r\}$ de F^N. L'inclusion de W dans F^N jointe à l'action de s sur F^N induisent un isomorphisme (canonique) de F-espaces vectoriels

$$E\otimes_F W\cong F^N\ , \tag{1}$$

un isomorphisme de F-algèbres

$$\mathrm{End}_F(E)\otimes_F\mathrm{End}_F(W)\cong\mathfrak{g}\,, \tag{2}$$

et un isomorphisme de $(\mathfrak{a},\mathfrak{b})$-bimodules, appelé (W,E)-*décomposition de* $\mathfrak{g}$ ([Bu-Ku] (1.2.6))

$$\mathfrak{a}\otimes_E\mathfrak{b}\cong\mathfrak{g}\,. \tag{3}$$

Si, de plus, on suppose que $\{w_1,\ldots,w_r\}$ est une $\mathcal{O}_E$-base ([Bu-Ku] déf. (1.5.6)) de la chaîne de réseaux $\mathcal{L}$ vue comme chaîne de $\mathcal{O}_E$-réseaux dans le E-espace vectoriel F^N (cette supposition a un sens car $E^\times$ normalise $\mathcal{G}$) alors ([Bu-Ku] prop. (1.2.9)) l'isomorphisme 4.1.(3) ci-dessus induit un isomorphisme de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodule

$$\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{B}\cong\mathcal{G}. \tag{4}$$

et, par restriction pour tout $i\in\mathbb{Z}$, un isomorphisme de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules ([Bu-Ku] corollary (1.2.10))

$$\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{B}^i\cong\mathcal{G}^i\,. \tag{5}$$

On note (restons fidèles aux notations de [Bu-Ku])

$$\iota_W:\mathfrak{a}\to\mathfrak{g} \tag{6}$$

l'injection de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ prolongeant l'injection $E\to\mathfrak{g}$ (le corps E étant canoniquement inclus dans l'algèbre $\mathfrak{a}$).

L'idée est de montrer que, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ fixée, l'intégrale orbitale

$$x\mapsto I^G(f,x,dg_x)$$

est, modulo une bonne normalisation des mesures de Haar dg_x, localement constante au voisinage de s dans $\iota_W(\mathfrak{a}^\times)$. Pour ce faire, on introduit les réseaux $\mathcal{N}_k$ ([Bu-Ku] def. (1.4.3)), lesquels permettent de contrôler assez finement (pour le propos qui nous intéresse) le comportement des éléments voisins de s sous l'action de G par conjugaison.

Pour chaque $k\in\mathbb{Z}$, on définit l'$\mathcal{O}_F$-ordre de $\mathfrak{g}$ (resp. l'$\mathcal{O}_F$-ordre de $\mathfrak{a}$)

$$\mathcal{N}_k(s,\mathcal{G})=\{x\in\mathcal{G},\ sx-xs\in\mathcal{G}^k\}\subset\mathcal{G}$$

$$(\text{resp. } \mathcal{N}_k(s,\mathcal{A})=\{x\in\mathcal{A},\ sx-xs\in\mathcal{A}^k\}\subset\mathcal{A}).$$

On note $k_0(s,\mathcal{G})$ (resp. $k_0(s,\mathcal{A})$) l'exposant critique ([Bu-Ku] def. (1.4.5)) défini par

$$k_0(s,\mathcal{G})=\max\{\ k\in\mathbb{Z},\ \mathcal{N}_k(s,\mathcal{G})\not\subset\mathcal{B}+\mathcal{G}^1\}$$

$$(\text{resp. } k_0(s,\mathcal{A})=\max\{\ k\in\mathbb{Z},\ \mathcal{N}_k(s,\mathcal{A})\not\subset\mathcal{O}_E+\mathcal{A}^1\}).$$

Alors ([Bu-Ku] prop. (1.4.13)) $k_0=k_0(s,\mathcal{A})=k_0(s,\mathcal{G})$ et la (W,E)-décomposition 4.1.(4) entraîne par restriction pour tout $k\in\mathbb{Z}$, un isomorphisme

$$\mathcal{N}_k(s,\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{B}\cong\mathcal{N}_k(s,\mathcal{G}). \tag{7}$$

Pour simplifier l'écriture, on note

$$\mathcal{N}(\mathcal{A})=\mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{A})$$

et

$$\mathcal{N}(\mathcal{G})=\mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G}).$$

Lemme 4.1.1. — *Soit* W *le voisinage ouvert compact de* s *dans* $\mathfrak{a}^\times$ *défini par*

$$W=s+\mathcal{A}^{1+k_0}$$

et, pour chaque élément $x\in\iota_W(W)$, *soit* dg_x *la mesure de Haar sur le centralisateur* G_x *de* x *dans* G *telle que*

$$\operatorname{vol}\left(G_x\left(1+\varpi_E\mathcal{N}(\mathcal{G})\right),dg_x\backslash dg\right)=1.$$

Alors, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, *le germe de fonctions au point* s *dans* $\iota_W(\mathfrak{a}^\times)$

$$x\mapsto\left[I^G(f,x,dg_x)\right]_{\iota_W(\mathfrak{a}^\times),s}$$

est un germe constant.

Démonstration.

Soient un entier $a\geq 1$ et un élément $g\in G$ tel que

$$\operatorname{Ad}g^{-1}(s)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0},$$

et soit $t=v_{\mathcal{G}}(g)$ la hauteur de g sur $\mathfrak{g}$. Alors la relation

$$sg-gs\in\mathcal{G}^{a+k_0+t}$$

entraîne ([Bu-Ku] corollary (1.4.10)) l'existence d'un élément

$$x\in\mathcal{B}^{a+t}\mathcal{N}(\mathcal{G})=\varpi_E^{a+t}\mathcal{N}(\mathcal{G})\subset\mathcal{G}^{a+t}.$$

tel que $sg-gs=sx=xs$. Ainsi $\gamma=(g-x)\in G_s\cap\mathcal{G}^t=G_s\cap\mathcal{B}^t$ et l'on a montré la relation

$$\left(\operatorname{Ad}g^{-1}(s)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0}\right)\Rightarrow\left(g\in G_s\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right)\right).$$

Réciproquement,

$$(1+y)s(1+y)^{-1}=s+(sy-ys)\left(\sum_{i\geq 0}(-1)^iy^i\right)\in s+\mathcal{A}^{a+k_0}$$

pour tout élément $y\in\varpi_E\mathcal{N}(\mathcal{G})$ D'où l'on déduit l'égalité

$$\left\{g\in G,\ \operatorname{Ad}g^{-1}(s)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0}\right\}=G_s\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right).$$

Pour tout entier $a\geq 1$, on considère les strates simples ([Bu-Ku] def (1.5.5)) dans $\mathfrak{g}$ et dans $\mathfrak{a}$ respectivement définies par

$$\Omega_a(s,\mathcal{G})=[\mathcal{G},-r,-(k_0+a),s]$$

et

$$\Omega_a(s,\mathcal{A})=[\mathcal{A},-r,-(k_0+a),s]$$

avec $r=\nu_{\mathcal{G}}(s)=\nu_{\mathcal{A}}(s)$. Comme l'élément s est elliptique dans $\mathfrak{a}^\times$, on a, pour tout entier $a\geq 1$, une formule pour le $\mathfrak{a}^\times$-entrelacement de la strate $\Omega_a(s,\mathcal{A})$

$$J_H\left(\Omega_a(s,\mathcal{A})\right)\underset{\text{déf}}{=}\left\{h\in\mathfrak{a}^\times,\ \mathrm{Ad}h^{-1}\left(s+\mathcal{A}^{k_0+a}\right)\cap s+\mathcal{A}^{k_0+a}\neq\varnothing\right\}$$

relativement plaisante ([Bu-Ku] theorem (1.5.8))

$$\begin{aligned}J_H\left(\Omega_a(s,\mathcal{A})\right)&=E^\times\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{A})\right)\\&=\left\{h\in\mathfrak{a}^\times,\ \mathrm{Ad}h^{-1}\left(s+\mathcal{A}^{k_0+a}\right)=s+\mathcal{A}^{k_0+a}\right\}.\end{aligned}$$

A fortiori, pour tout $X\in\mathcal{A}^{a+k_0}$, $(\mathfrak{a}^\times)_{s+X}\subset E^\times(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{A}))$, donc $(\mathfrak{a}^\times)_{s+X}$ est compact modulo $E^\times$ et s+X est un élément elliptique de $\mathfrak{a}^\times$.

On fixe un entier $a\geq 1$ et un élément $X\in\mathcal{A}^{a+k_0}$. Soient $Y=\iota_W(X)$ et $E'=F[s+Y]\subset\mathfrak{g}$ l'extension de F engendrée par s+Y. Alors les strates $[\mathcal{G},-r,-(k_0+a),s+Y]$ et $\Omega_a(s,\mathcal{G})$ sont équivalentes ([Bu-Ku] prop. (1.5.2)) et le raisonnement effectué ci-dessus en remplaçant s par s+Y, joint à la proposition (2.3.4) de [Bu-Ku], entraînent l'égalité

$$\left\{g\in G,\ \mathrm{Ad}g^{-1}\left(s+Y\right)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0}\right\}=G_{s+Y}\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right).$$

Par ailleurs, l'isomorphisme 4.1.(7) entraîne l'identification

$$E\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{A})\right)\otimes_{\mathcal{O}_E}\mathcal{B}\cong\mathfrak{b}\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right)$$

et par conséquent l'inclusion

$$G_{s+Y}\subset G_s\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right).$$

En définitive, on a montré la relation

$$\begin{aligned}\left\{g\in G,\ \mathrm{Ad}g^{-1}\left(s+Y\right)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0}\right\}&=G_s\left(1+\varpi_E^{a}\mathcal{N}(\mathcal{G})\right)\\&=\left\{g\in G,\ \mathrm{Ad}g^{-1}(s)\in s+\mathcal{G}^{a+k_0}\right\}.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{V}$ le voisinage ouvert compact de s dans G défini par

$$\mathcal{V}=s+\mathcal{G}^{1+k_0}.$$

Alors, pour tout élément $x\in\iota_W(\mathcal{W})$,

$$\begin{aligned}I^G\left(1_{\mathcal{V}},x,dg_x\right)&=\int_{G_x\backslash G}1_{\mathcal{V}}\left(g^{-1}xg\right)dg_x\backslash dg\\&=\mathrm{vol}\left(G_s\left(1+\varpi_E\mathcal{N}(\mathcal{G})\right),dg_x\backslash dg\right)\\&=1\end{aligned}$$

où $1_{\mathcal{V}}\in C_{c,\infty}(G)$ désigne la fonction caractéristique de l'ouvert compact $\mathcal{V}$ de G. Pour tout entier $a\geq 1$, soit $\mathcal{W}^a$ (resp. $\mathcal{V}^a$) le voisinage ouvert compact de s dans $\mathfrak{a}^\times$ (resp. dans G) défini par

$$\mathcal{W}^a=s+\mathcal{A}^{k_0+a}\ \left(\text{resp. } \mathcal{V}^a=s+\mathcal{G}^{k_0+a}\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}^{\mathrm{G}}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{V}^{a}}, x, dg_x\right) &= \mathrm{vol}\left(\mathrm{G}_s\left(1+\varpi_E{}^a\mathcal{N}(\mathcal{G})\right), dg_x\backslash dg\right)\\
&= \left[\mathrm{G}_s\left(1+\varpi_E\mathcal{N}(\mathcal{G})\right) : \mathrm{G}_s\left(1+\varpi_E{}^a\mathcal{N}(\mathcal{G})\right)\right]^{-1}\\
&= \mathrm{I}^{\mathrm{G}}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{V}^{a}}, s, dg_s\right)
\end{aligned}$$

pour tout entier $a \geq 1$ et tout élément $x \in \iota_W(\mathcal{W}^a)$.

Soit une fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$. On peut, sans perte de généralité, supposer que f est la fonction caractéristique d'un ouvert compact C de G. L'AdG-orbite $\mathcal{O}_G(s)$ étant fermée dans G, on construit aisément un recouvrement de $\mathcal{O}_G(s) \cap C$ de la forme

$$\mathcal{O}_G(s) \cap C = \mathcal{O}_G(s) \cap \left(\coprod_{1\leq i\leq r} \mathrm{Ad}g_i(\mathcal{V}^{a_i})\right)$$

pour des entiers $a_i \geq 1$ et des éléments $g_i \in G$. Notant $b = \max_{1\leq i\leq r}(a_i)$, on a la relation

$$\mathrm{I}^{\mathrm{G}}(f, x, dg_x) = \sum_{1\leq i\leq r} \mathrm{I}^{\mathrm{G}}\left(\mathbf{1}_{\mathcal{V}^{a_i}}, x, dg_x\right) = \mathrm{I}^{\mathrm{G}}(f, s, dg_s)$$

pour tout $x \in \iota_W(\mathcal{W}^b)$.

□

Remarque 4.1.2. — Si, de plus, s est elliptique dans G, le lemme 4.1.1 dit très exactement qu'il existe un jeu de mesures dg_x sur les centralisateurs G_x des éléments situés dans un voisinage de s dans G tel que, pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, le germe de fonction au point s dans G

$$x \mapsto \left[\mathrm{I}^{\mathrm{G}}(f, x, dg_x)\right]_{G,s}$$

est un germe constant.

Notons qu'Harish-Chandra a, grâce à son très élégant principe de submersion, montré ce résultat (et même un résultat plus profond) au voisinage de n'importe quel élément semi-simple régulier séparable ([Hari 2] theorem 3). On peut, du reste, vérifier que sa démonstration fonctionne encore au voisinage d'un élément elliptique inséparable (cf. le chapitre 4, n° 2.3).

□

Pour chaque élément $s \in G$ irréductible dans G, on note $J^G(.,s)$ l'intégrale orbitale au point s dans G normalisée comme dans l'énoncé du lemme 4.1.1, c'est-à-dire telle que

$$\mathrm{J}^{\mathrm{G}}(\,.\,, s) = \mathrm{I}^{\mathrm{G}}(\,.\,, s, dg_s)$$

en tant que distributions sur G, où dg_s est la mesure de Haar sur le centralisateur G_s de s dans G définie dans le lemme 4.1.1.

On étend naturellement cette définition à tout sous-groupe de Levi M de G. Pour chaque élément $s \in M$, irréductible dans M, on note $J^M(.,s)$ l'intégrale orbitale au point s dans M définie comme ci-dessus composante par composante (grâce à [Hari 1] corollary of lemma 16, déjà cité au n° 3.3) pour un isomorphisme de M avec un produit de groupes linéaires sur F.

On peut alors recopier la définition 3.3.1.

Définition 4.1.3. (Normalisation bis) — *Soient* x *un élément de* G, M' *le sous-groupe de Levi de* G *associé aux composantes primaires de* x *et* P *(resp.* P"*) le sous-groupe parabolique de* G *(resp. de* M'*) associé à* x. *Soient* M *une composante de Levi de* P", A *le centre de* M *et* K_P *un sous-groupe ouvert compact maximal de* G *en bonne position par rapport à la paire parabolique* (P,A). *Soit* $s=x_M$ *la composante de* x *suivant* M. *Alors on note* $J^G(.,x)$ *l'intégrale orbitale au point* x *dans* G *définie par*

$$J^G(f,x)=J^M(f^P,s)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ *(*f^P *désignant le terme* K_P*-invariant de* f *suivant* P*).*

□

La cohérence de cette définition se montre exactement de la même manière que pour la normalisation 3.3.1 et les propriétés d'invariance par conjugaison (n° 3.3.1.(3)), d'indépendance vis à vis de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 (n° 3.3.1.(4)), de descente parabolique (proposition 3.3.4), restent vraies si l'on remplace $I^G(.,.)$ par $J^G(.,.)$. Noter que si les propriétés des développements en germes au voisinage des éléments semi-simples (resp. centraux, resp. semi-simples séparables) restent inchangées si l'on remplace la normalisation $I^G(.,.)$ par la normalisation $J^G(.,.)$, les germes eux-mêmes dépendent de la normalisation choisie (cf. la remarque 3.4.4.(2)). Si $s\in G$ est un élément semi-simple dans G et si $\mathcal{F}(s)$ est une famille de représentants dans $A_G(s)$ des classes de conjugaisons de $A_G(s)$, on note $[b_x(.)]_{G,s}$ $(x\in\mathcal{F}(s))$ les germes de fonctions au point s dans G définis par le développement (proposition 3.4.3)

$$\left[J^G(f,.)\right]_{G,s}=\sum\nolimits_{x\in\mathcal{F}(s)}J^G(f,x)\left[b_x(.)\right]_{G,s}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$.

Remarque 4.1.4. — Nous avons dans un premier temps essayé, comme il est suggéré dans [De-Ka-Vi], appendice A, n° 2.d, d'utiliser la normalisation définie par M.F. Vignéras dans [Vign], n° 1.g. En fait, cette normalisation – définie seulement pour les éléments séparables – ne peut (en général) pas être étendue à tout le groupe en une normalisation induisant des intégrales orbitales localement constantes sur les nappes. En effet, pour chaque élément <u>séparable</u> $g\in G$, M.F. Vignéras définit une "mesure orbitale canonique normalisée" $d(g)|\phi_g*\omega_g|$ où $|\phi_g*\omega_g|$ est la mesure AdG-invariante sur l'orbite $O_G(g)$ induite par une mesure $|\omega_g|$ sur le centralisateur G_g de g dans G, et où d(g) est un facteur de normalisation défini comme suit: soit g=su la décomposition de Jordan de g en partie semi-simple $s\in G$ et $u\in G_s$. Soit T un tore maximal de G contenant s, Σ un système de racines de G par rapport à T, $\Sigma_1\subset\Sigma$ les racines triviales sur s et $\Sigma_2=\Sigma-\Sigma_1$. On pose alors

$$D(s)=\prod_{\alpha\in\Sigma_2}\left(1-\alpha(s)\right)$$

et

$$d(g)=\left|D(s)\right|_F^{1/2}.$$

Considérons maintenant l'élément $x\in\mathbf{GL}_p(\mathbb{F}_p((\varpi)))$ défini dans la remarque 2.2.5.2. Il est elliptique inséparable dans $\mathbf{GL}_p(\mathbb{F}_p((\varpi)))$ et peut être approché d'aussi près que l'on veut par un élément $s\in\mathbf{GL}_p(\mathbb{F}_p((\varpi)))$ elliptique séparable. Mais comme l'élément x a une seule valeur propre $\varpi^{1/p}$ de multiplicité p dans une extension algébrique $\mathbb{F}_p((\varpi^{1/p}))$ de $\mathbb{F}_p((\varpi))$, quand un tel s tend vers x, ses valeurs propres tendent toutes vers la même valeur et le facteur de normalisation d(s) tend vers 0. On ne peut donc espérer prolonger cette normalisation en une normalisation sur tout le groupe induisant des intégrales orbitales localement constantes sur les nappes.

□

4.2. On montre dans ce numéro que la normalisation 4.1.3 induit, pour chaque nappe $X_{(\alpha)}$ de G et chaque fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, une application localement constante

$$X_{(\alpha)} \to \mathbb{C},\ x \mapsto J^G(f,x).$$

On en déduit une caractérisation des intégrales orbitales sur G.

Commençons par préciser la structure des nappes de G. Soit $(\alpha)=(\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_d)$ une partition de N. La nappe $X_{(\alpha)}$ associée à (α) est l'ensemble des points sur F d'une sous-F-variété algébrique lisse $\mathbb{X}_{(\alpha)}$ de $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$. De même, notant $Y_{(\alpha)}$ l'ensemble des suites $\{f_1,\ldots,f_d\}$ de $F[T]-T.F[T]$ telles que

$$\begin{cases} f_i \text{ est unitaire de degré } \alpha_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq d \\ f_{i+1} \text{ divise } f_i,\ 1 \leq i \leq d-1 \end{cases},$$

$Y_{(\alpha)}$ est l'ensemble des points sur F d'une F-variété algébrique lisse $\mathbb{Y}_{(\alpha)}$. Soit

$$\mathbf{p}_{(\alpha)} : \mathbb{X}_{(\alpha)} \to \mathbb{Y}_{(\alpha)}$$

le morphisme algébrique tel que $\mathbf{p}_{(\alpha)}(x)=\{f_{x,1},\ldots,f_{x,d}\}$ (cf. le numéro 2.2.3) pour tout $x \in X_{(\alpha)}$ et soit

$$\mathbf{s}_{(\alpha)} : \mathbb{Y}_{(\alpha)} \to \mathbb{X}_{(\alpha)}$$

la section (algébrique) de $\mathbf{p}_{(\alpha)}$ définie comme suit: a toute suite $\{f_1,\ldots,f_d\}$ appartenant à $Y_{(\alpha)}$, on associe la matrice diagonale par blocs

$$s_{(\alpha)}(\{f_1,f_2,\ldots,f_d\}) = \mathrm{diag}(J_1(f_1),J_1(f_2),\ldots,J_1(f_d)) \in G$$

où, pour chaque polynôme unitaire $f \in (F[T]-T.F[T])$ écrit sous la forme

$$f(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \cdots - a_1T - a_0,\ a_i \in F,$$

$J_1(f) \in \mathbf{GL}_r(F)$ désigne la matrice compagnon de f (déjà définie au numéro 2.2.2 pour tout polynôme unitaire irréductible $f \in (F[T]-\{T\})$) donnée par

$$J_1(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathbf{p}_{(\alpha)}$ est surjective, submersive, et de fibres les AdG-orbites de $\mathbb{X}_{(\alpha)}$.[4]

Proposition 4.2.1. — *Pour chaque nappe $X_{(\alpha)}$ de* G *et chaque fonction* $f \in C_{c,\infty}(G)$, *l'application*

$$X_{(\alpha)} \to \mathbb{C},\ x \mapsto J^G(f,x),$$

est localement constante.

---

[4] Un tel couple $(\mathbb{X}_{(\alpha)}, \mathbf{p}_{(\alpha)})$ est appelé par I.M Gelfand & D.A. Kazhdan un "geometrical factor" ([Ge-Ka]).

Démonstration.

Soient $(\alpha)=(\alpha_1\geq\cdots\geq\alpha_d)$ une partition de N et x un élément de la nappe $X_{(\alpha)}$. Soit $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_d\}$ l'image de x par la submersion $p_{(\alpha)}: X_{(\alpha)}\to Y_{(\alpha)}$. Fixons aussi une fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$. Comme

$$J^G(f,y)=J^G(f,\mathrm{Ad}g(y))$$

pour tout couple $(y,g)\in G\times G$, et comme les fibres de l'application $p_{(\alpha)}$ sont les AdG-orbites de la nappe $X_{(\alpha)}$, il suffit de montrer que le germe de fonction au point $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_d\}$ dans $Y_{(\alpha)}$

$$\{\xi_1,\ldots,\xi_d\}\mapsto\left[J^G\left(f,s_{(\alpha)}(\{\xi_1,\ldots,\xi_d\})\right)\right]_{Y_{(\alpha)},\{\zeta_1,\ldots,\zeta_d\}}$$

est un germe constant.

Soit n un entier ≥ 1. On note $F_n[T]$ la variété ϖ-adique des polynômes unitaires de F[T] de degré n, et $pr_n: F_n[T]\to F^n$ l'homéomorphisme de variétés ϖ-adiques défini par

$$pr_n(\psi)=\left(b_{n-1}(\psi),\ldots,b_1(\psi),b_0(\psi)\right)$$

pour tout polynôme $\psi\in F_n[T]$ écrit sous la forme

$$\psi=T^n+b_{n-1}(\psi)T^{n-1}+\cdots+b_1(\psi)T+b_0(\psi).$$

Pour tout entier $k\geq 1$ et pour tout polynôme $\psi\in F_n[T]$, soit $V^k(\psi)$ l'image réciproque par l'application pr_n du voisinage ouvert compact de $pr_n(\psi)$ dans F^n formé des n-uplets $(b_{n-1},\ldots,b_0)$ tels que

$$b_c\equiv b_c(\psi)\ \left(\mathrm{mod}\,\mathcal{P}^n\right),\ 1\leq c\leq n.$$

Rappelons que si $\psi\in F_n[T]$ est irréductible sur F, alors il existe un entier $k\gg 1$ tel que tout polynôme $\Phi\in V^k(\psi)$ est irréductible sur F. D'autre part il est clair que si ψ_1 et ψ_2 sont deux polynômes distincts de $F_n[T]$, alors il existe un entier $k\gg 1$ tel que les ouverts $V^k(\psi_1)$ et $V^k(\psi_2)$ sont disjoints dans $F_n[T]$.

Soit $\mathrm{supp}(\beta_x)=\{\phi_j\}_{1\leq j\leq m}$ la famille (arbitrairement ordonnée) des composantes irréductibles du polynôme minimal de x et, pour chaque couple $(i,j)\in\{1,\ldots,d\}\times\{1,\ldots,m\}$, soit $a(i,j)\geq 0$ l'entier défini par

$$\zeta_i=\prod_{1\leq j\leq m}\phi_j^{a(i,j)}.$$

Les remarques ci-dessus assurent l'existence d'un entier $\nu\geq 1$ minimal tel que

(i) pour chaque $j\in\{1,\ldots,m\}$, tout polynôme $\psi\in V^\nu(\phi_j)$ est irréductible sur F,

(ii) considérés comme des parties de Φ_F (cf. le n° 2.2.1), les $V^\nu(\phi_j)$ $(1\leq j\leq m)$ sont deux à deux disjoints.

Alors, pour chaque entier $k\geq\nu$, la partie R_k de $Y_{(\alpha)}$ formée par les suites $\{\xi_1,\ldots,\xi_d\}$ telles que

$$\xi_i=\prod_{1\leq j\leq m}\psi_j^{a(i,j)}\quad\left(\psi_j\in V^k(\phi_j),\ 1\leq j\leq m\right)$$

pour chaque $i\in\{1,\ldots,d\}$, est un voisinage ouvert compact de $p_{(\alpha)}(x)=\{\zeta_1,\ldots,\zeta_d\}$ dans $Y_{(\alpha)}$.

Soient M' le sous-groupe de Levi associé aux composantes primaires de x et P (resp. P") le sous-groupe parabolique de G (resp. de M') associé à x. Soient M une composante de Levi de P", U" le radical unipotent de P" et x=su ($s=x_M\in M$, $u=x_{U''}\in U''$) la décomposition de x suivant P"=M'U". On fixe un isomorphisme de groupes

$$\varphi : \mathbf{M} \xrightarrow{\cong} \prod_{1\leq j\leq r} \mathbf{GL}_{N_j}(F) \quad \left(N_j \geq 1,\ \sum_{1\leq j\leq r} N_j = N\right)$$

et, pour chaque $y\in M$, on note $\varphi(y)=(y_1,\ldots,y_r)$ la décomposition de y à travers cet isomorphisme. Pour chaque $j\in\{1,\ldots,r\}$, soient

$$E_j = F[s_j] \subset \mathbf{M}_{N_j}(F) = \mathfrak{g}_j$$

l'extension de F engendrée par s_j et

$$\mathcal{A}_j \subset \mathrm{End}_F(E_j) = \mathfrak{a}_j$$

l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire principal de $\mathfrak{a}_j$ normalisé par $E_j^\times$. Reprenant, pour chaque $j\in\{1,\ldots,r\}$, les constructions du numéro 4.1, on fixe une injection $(j=1,\ldots,r)$

$$\iota_j : \mathfrak{a}_j \to \mathfrak{g}_j$$

telle que, pour toute fonction $h_j\in C_{c,\infty}(\mathbf{GL}_{N_j}(F))$, le germe de fonction au point s_j dans $\iota_j(a_j^\times)$

$$y_j \mapsto \left[J^{\mathbf{GL}_{N_j}(F)}(h_j, y_j)\right]_{\iota_j(\mathfrak{a}_j^\times), s_j}$$

est un germe constant (lemme 4.1.1).

Soient A le centre de M et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A). Soit f^P le terme K_P-invariant de f suivant P. On peut supposer que la décomposition de f^P à travers φ est de la forme ([Hari 1] corol. of lemma 16)

$$f^P = \left(\otimes_{1\leq j\leq r} f_j\right) \circ \varphi \quad \left(f_j \in C_{c,\infty}\left(\mathbf{GL}_{N_j}(F)\right)\right).$$

Pour chaque $j\in\{1,\ldots,m\}$, soit $\mathcal{W}_j$ un voisinage ouvert compact de s_j dans $\mathfrak{a}_j^\times$ contenu dans l'ouvert des éléments elliptiques de $\mathfrak{a}_j^\times$ et tel que

$$J^{\mathbf{GL}_{N_j}(F)}(f_j, y_j) = J^{\mathbf{GL}_{N_j}(F)}(f_j, s_j)$$

pour tout $y_j\in\iota_j(\mathcal{W}_j)$ (lemme 4.1). Soit $\mathcal{W}=\varphi^{-1}(\prod_{1\leq j\leq m}\mathcal{W}_j)\subset M$. Ainsi,

$$J^M(f^P, y) = J^M(f^P, s)$$

pour tout élément $y\in\mathcal{W}$. Quitte à restreindre les ouverts $\mathcal{W}_j$ de $\mathfrak{a}_j^\times$ $(j=1,\ldots,m)$, on peut supposer que pour tout élément $y\in\mathcal{W}$, le sous-groupe de Levi M'(y) de G associé aux composantes primaires de y est contenu dans M' (cela revient à supposer que pour tout couple d'entiers (j,k), $1\leq j,k\leq r$, tel que les composantes $\varphi^{-1}(s_j)$ et $\varphi^{-1}(s_k)$ de s dans le Levi M appartiennent à deux composantes connexes distinctes du sous-groupe de Levi M' de G, les polynômes minimaux des éléments de $\mathcal{W}_j$ sont deux à deux distincts de ceux des éléments de $\mathcal{W}_k$). On est ainsi ramené au cas primaire, et il est clair que pour chaque élément $y\in\mathcal{W}$, il existe un unipotent $u_y\in U''\subset U$ tel que

(i) yu_y appartient à la nappe $X_{(\alpha)}$,

(ii) M est une composante de Levi du sous-groupe parabolique de $M'(yu_y)$ associé à yu_y où $M'(yu_y)=M'(y)\subset M'(x)=M'$ est le sous-groupe de Levi de G (éventuellement différent de M') associé aux composantes primaires de yu_y.

Ainsi, $J^G(h, yu_y)=J^M(h^P, y)$ pour tout élément $y\in\mathcal{W}$ et toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$, h^P désignant le terme K_P-invariant de h suivant P (rappelons que le sous-groupe parabolique de G associé à yu_y dépendant de l'ordre arbitrairement fixé au numéro 2.2.1 sur l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de y, il peut être distinct de P, l'égalité restant vraie grâce au point (4) de la définition 3.3.1).

D'où l'on déduit

$$J^G(f, yu_y) = J^M(f^P, y) = J^M(f^P, s) = J^G(f, x)$$

pour tout élément $y \in \mathcal{W}$.

Il est clair que l'image par la submersion $p_{(\alpha)}$ de la partie $\{yu_y,\ y \in \mathcal{W}\} \subset X_{(\alpha)}$ contient un voisinage ouvert compact de $p_{(\alpha)}(x) = \{\zeta_1, \ldots, \zeta_d\}$ dans $Y_{(\alpha)}$ du type R_k pour un entier $k \geq \nu$ suffisamment grand. D'où la proposition 4.2.1

□

Comme les germes associés aux éléments semi-simples de G sont des germes d'intégrales orbitales sur G (cf. la proposition 3.4.2 et sa démonstration), on a en particulier le corolaire suivant.

Corollaire 4.2.2. — *Soit* $s \in G$ *un élément semi-simple dans* G *et soit* $x \in A_G(s)$. *Alors le germe de fonction* $[b_x(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G *défini par la normalisation* 4.1.3 *induit, par restriction pour chaque nappe* $X_{(\alpha)}$ *de* G, *un germe constant au point* s *dans* $X_{(\alpha)}$.

□

Proposition 4.2.3 (Caractérisation des intégrales orbitales sur les nappes) — *Soit* $X_{(\alpha)}$ *une nappe de* G *et soit* Φ *une application* $X_{(\alpha)} \to \mathbb{C}$ *telle que*

(i) Φ *est localement constante.*

(ii) Φ *est* AdG-*invariante.*

(iii) *Le support de* Φ *est compact modulo conjugaison dans* G, *i.e. il existe une partie compacte* C *de* $X_{(\alpha)}$ *telle que* $\mathrm{supp}(\Phi) \subset \mathrm{AdG}(C)$.

Alors il existe une fonction $\zeta \in C_{c,\infty}(X_{(\alpha)})$ *telle que, pour toute fonction* $f \in C_{c,\infty}(G)$ *telle que la restriction de* f *à la fermeture dans* G *de la nappe* $X_{(\alpha)}$ *soit à support dans* $X_{(\alpha)}$ *et coïncide avec* ζ *sur* $X_{(\alpha)}$, *on ait l'égalité* $\Phi(x) = J^G(f, x)$ *pour tout* $x \in X_{(\alpha)}$.

Démonstration.

Pour chaque élément $x \in X_{(\alpha)}$, soit $\mathcal{W}_x$ la partie de $X_{(\alpha)}$ définie par

$$\mathcal{W}_x = \{y \in X_{(\alpha)},\ \Phi(y) = \Phi(x)\}.$$

Les conditions (i) et (ii) assurent que $\mathcal{W}_x$ ($x \in X_{(\alpha)}$) est un voisinage ouvert, fermé et AdG-invariant de x dans $X_{(\alpha)}$. Soit $\amalg_{x \in \mathcal{F}} \mathcal{W}_x$ un recouvrement de C par une famille finie d'ouverts $\mathcal{W}_x$ deux à deux disjoints. Pour chaque $x \in \mathcal{F}$, on fixe (arbitrairement) une fonction $f_x \in C_{c,\infty}(G)$ telle que la restriction de f_x à la fermeture (pour la topologie ϖ-adique) de la nappe $X_{(\alpha)}$ dans G soit la fonction caractéristique de l'ouvert compact $\mathcal{W}_x \cap C$ de $X_{(\alpha)}$ (c'est possible car $X_{(\alpha)}$ est une sous-variété ϖ-adique localement fermée de G, cf. la proposition 2.2.3.1.(iv)). Ainsi, pour chaque $x \in \mathcal{F}$, la restriction à la nappe $X_{(\alpha)}$ de l'intégrale orbitale $J^G(f_x, .)$ est une fonction localement constante (lemme 4.2.1) et à support contenu dans $\mathcal{W}_x \cap \mathrm{AdG}(C)$. Pour chaque élément $y \in \mathcal{W}_x$ ($x \in \mathcal{F}$), soit $\mathcal{W}_{x,y}$ la partie ouverte fermée et AdG-invariante de $\mathcal{W}_x$ définie par

$$\mathcal{W}_{x,y} = \{z \in \mathcal{W}_x,\ J^G(f_x, z) = J^G(f_x, y)\}.$$

Pour chaque $x \in \mathcal{F}$, soit $\amalg_{y \in \mathcal{F}(x)} \mathcal{W}_{x,y}$ un recouvrement de $\mathcal{W}_x \cap C$ par une famille finie d'ouverts $\mathcal{W}_{x,y}$ deux à deux disjoints, et pour chaque $y \in \mathcal{F}(x)$, soit une fonction $f_{x,y} \in C_{c,\infty}(G)$ telle que la restriction de $f_{x,y}$ à la fermeture de la nappe $X_{(\alpha)}$ dans G soit la fonction caractéristique de l'ouvert compact $\mathcal{W}_{x,y}\cap C$ de $X_{(\alpha)}$. Ainsi,

$$J^G(f_x, z) = J^G\left(\sum_{y\in\mathcal{F}(x)} f_{x,y}, z\right) = \sum_{y\in\mathcal{F}(x)} J^G(f_{x,y}, z)$$

pour tout $x\in\mathcal{F}$ et tout élément $z\in X_{(\alpha)}$. Comme la restriction à la nappe $X_{(\alpha)}$ de l'intégrale orbitale $J^G(f_{x,y},.)$ est supportée par $\mathcal{W}_{x,y}\cap \mathrm{AdG}(C)$, on a l'égalité

$$J^G(f_x, z) = J^G(f_{x,y}, z)$$

pour tout $x\in\mathcal{F}$, tout $y\in\mathcal{F}(x)$ et tout élément $z\in \mathcal{W}_{x,y}$. Finalement, soit $f\in C_{c,\infty}(G)$ la fonction définie par

$$f = \sum_{x\in\mathcal{F}} \sum_{y\in\mathcal{F}(x)} \alpha(x, y) F(x) f_{x,y}$$

où, pour chaque couple $(x,y)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}(x)$, $\alpha(x,y)$ est une constante ≥ 0 définie par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \left(J^G(f_x, y)\right)^{-1} & \text{si } x \in \mathrm{supp}(\Phi) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} J^G(f, z) &= \sum_{x\in\mathcal{F}} \left(\sum_{y\in\mathcal{F}(x)} \alpha(x, y) J^G(f_{x,y}, z)\right) \Phi(x) \\ &= \Phi(z) \end{aligned}$$

pour tout élément $z\in X_{(\alpha)}$. La fonction

$$\zeta = f\,|_{X_{(\alpha)}}$$

satisfait les conditions de l'énoncé et toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$ dont la restriction à la fermeture dans G de la nappe $X_{(\alpha)}$ est à support dans $X_{(\alpha)}$ et coïncide avec ζ sur $X_{(\alpha)}$, coïncide avec f sur la fermeture de $X_{(\alpha)}$ dans G, donc satisfait l'égalité

$$J^G(h, z) = J^G(f, z) = \Phi(z)$$

pour tout élément $z\in X_{(\alpha)}$.

□

On peut désormais montrer, grâce à la proposition 4.2.3 et en rangeant les nappes de G par dimension d'orbites croissante, le théorème de caractérisation des intégrales orbitales sur G. Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, il est énoncé dans [De-Ka-Vi], n° 2.d.

Théorème 4.2.4. (Caractérisation des intégrales orbitales sur G) — *Soit* Φ: G $\rightarrow \mathbb{C}$ *une application telle que*

(i) *La restriction de* Φ *à chaque nappe* $X_{(\alpha)}$ *de* G *est localement constante.*

(ii) Φ *est* AdG-*invariante.*

(iii) *Il existe une partie compacte* ω *de* G *telle que, pour chaque nappe* $X_{(\alpha)}$ *de* G, *le support de la restriction de* Φ *à* $X_{(\alpha)}$ *est contenu dans* $X_{(\alpha)}\cap\mathrm{AdG}(\omega)$.

(iv) *Pour tout élément* $s\in G$ *semi-simple dans* G, *le germe* $[\Phi(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G *induit par la fonction* Φ *admet le développement*

$$[\Phi(.)]_{G,s} = \sum_{x\in\mathcal{F}(s)} \Phi(x)[b_x(.)]_{G,s}$$

où $\mathcal{F}(s)$ *désigne une famille arbitraire de représentants dans* $A_G(s)$ *des* AdG-*orbites de* $A_G(s)$.

Alors il existe une fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ *telle que* $\Phi(x)=J^G(f,x)$ *pour tout* $x\in G$.

Réciproquement, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, *l'intégrale orbitale* $J^G(f,.)$ *satisfait les conditions* (i), (ii), (iii), (iv) *ci-dessus.*

Démonstration.

Commençons par la réciproque. Les points (i), (ii) et (iv) sont clairs. Quant au point (iii), considérons une fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$ et une nappe $X_{(\alpha)}$ de G. L'intégrale orbitale $J^G(f,.)$ vérifiant le point (i) du théorème, le support de sa restriction à $X_{(\alpha)}$ est l'ensemble des points x de G tels que $J^G(f,x)\neq 0$, donc est contenu dans $X_{(\alpha)}\cap \mathrm{AdG}(\mathrm{supp}(f))$.

Montrons maintenant qu'une fonction $\Phi\colon G\to\mathbb{C}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de l'énoncé du théorème 4.3 est bien une intégrale orbitale sur G. On procède par induction croissante sur la dimension des AdG-orbites de G. Soit

$$G=\coprod_{0\le i\le r} X_{(\alpha(i))}$$

une décomposition standard (cf. le numéro 2.2.8). Pour chaque entier k tel que $0\le k\le r$, on note N_k la partie fermée de G définie par

$$N_k=\coprod_{0\le i\le k} X_{(\alpha(i))}.$$

Les conditions (i) et (iii) entraînent que la restriction de Φ à la nappe centrale $X_{(\alpha(0))}$ appartient à $C_{c,\infty}(X_{(\alpha(0))})$. Comme la nappe $X_{(\alpha(0))}$ est une partie fermée de G, il existe une fonction $f_0\in C_{c,\infty}(G)$ telle que

$$\Phi(x)=f_0(x)=J^G(f_0,x)$$

pour tout $x\in X_{(\alpha(0))}$.

Soit k un entier tel que $0\le k\le r-1$. Supposons qu'il existe une fonction $f_k\in C_{c,\infty}(G)$ telle

$$\Phi(x)=J^G(f_k,x)$$

pour tout $x\in N_k$ et soit $\Phi_k\colon G\to\mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\Phi_k=\Phi-J^G(f_k,.).$$

Il est clair (compte tenu de la réciproque déjà montrée) que la fonction Φ_k vérifie les conditions (i), (ii), (iii), (iv) de l'énoncé du théorème 4.3. En particulier, la restriction de cette fonction Φ_k à la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$ est une fonction localement constante, AdG-invariante et à support contenu dans $X_{(\alpha(k+1))}\cap \mathrm{AdG}(\omega')$ pour une partie compacte ω' de G. Cette dernière condition est insuffisante pour pouvoir appliquer la proposition 4.2.3; montrons donc, grâce à la condition (iv) de l'énoncé du théorème 4.3, que le support de la restriction de Φ_k à la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$ est en fait contenu dans AdG(C) pour une partie compacte C de $X_{(\alpha(k+1))}$.

Soit un élément $s\in G$ semi-simple dans G et soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le m(s)} O_G(x_{s,i})$$

une décomposition standard de $A_G(s)$ (cf. le numéro 2.2.8). Pour chaque $i\in\{0,\dots,m(s)\}$, on note $\beta(s,i)$ la partition de N telle que $x_{s,i}\in X_{(\beta(s,i))}$ et $k_{s,i}$ l'entier tel que $\alpha(k_{s,i})=\beta(s,i)$. On suppose que la décomposition de $A_G(s)$ ci-dessus est compatible avec la décomposition de G fixée plus haut (c'est-à-dire que pour tout couple d'entiers (i,j) tel que $1\le i,j\le m(s)$, $i\le j$ si et seulement et seulement si $k_{s,i} \leq k_{s,j}$). En reprenant à l'identique (grâce au point (iv) de la proposition 2.2.3.1) la démonstration du lemme 3.4.1 en remplaçant les orbites par les nappes de Dixmier et la normalisation 3.3.1 par la normalisation 4.1.3, on construit un jeu de fonctions $\{f_{s,0},\ldots,f_{s,m(s)}\} \subset C_{c,\infty}(G)$ vérifiant les conditions (légèrement plus fortes que celles du lemme 3.4.1) suivantes

$$\begin{cases} \mathrm{supp}(f_{s,i}) \cap \mathcal{N}_{k_{s,i}} \subset \mathcal{X}_{(\alpha(k_{s,i}))}, \ 0 \leq i \leq m(s) \\ J^G(f_{s,i}, x_{s,j}) = \delta_{i,j}, \ 0 \leq i, j \leq m(s) \end{cases}.$$

Alors (proposition 3.4.2)

$$[b_{x_i}(.)]_{G,s} = [J^G(f_{s,i},.)]_{G,s}$$

pour chaque $i \in \{0,\ldots,m(s)\}$ et la condition (iv) pour la fonction Φ_k assure l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{W}_s$ de s dans G, que l'on peut clairement supposer AdG-invariant, tel que

$$\Phi_k(g) = \sum\nolimits_{0 \leq i \leq m(s)} \Phi_k(x_{s,i}) J^G(f_{s,i}, g)$$

pour tout élément $g \in G$.

Pour chaque élément $s \in G$ semi-simple dans G, donnons-nous comme ci-dessus une décomposition standard de $A_G(s)$ compatible avec la décomposition de G en nappes de Dixmier fixée plus haut, un jeu de fonctions $\{f_{s,0},\ldots,f_{s,m(s)}\} \subset C_{c,\infty}(G)$ et un voisinage ouvert AdG-invariant $\mathcal{W}_s$ de $\mathcal{O}_G(s)$ dans G. Si x est un élément de ω' et si $\mathcal{O}_G(\sigma)$ est l'AdG-orbite fermée de G associée à x, alors le voisinage ouvert AdG-invariant $\mathcal{W}_\sigma$ de $\mathcal{O}_G(\sigma)$ dans G fixé ci-dessus intersecte l'orbite $\mathcal{O}_G(x)$ et par conséquent $\mathcal{O}_G(x) \subset \mathcal{W}_\sigma$. Ainsi

$$\omega' \subset \bigcup\nolimits_s \mathcal{W}_s$$

où s parcourt l'ensemble des éléments semi-simples de G, et il existe un recouvrement de ω' (donc de AdG(ω')) par une famille finie $\{\mathcal{W}_s\}_{s \in \mathcal{F}}$ d'ouverts de ce type. Pour chaque $s \in \mathcal{F}$, soit $I_s(k)$ le sous-ensemble (non vide car $k \leq r-1$) de $\{0,\ldots,m(s)\}$ défini par

$$I_s(k) = \{i \in \{0,\ldots,m(s)\},\ x_i \in G - \mathcal{N}_k\}.$$

Alors, pour chaque $s \in \mathcal{F}$,

$$\Phi_k(g) = \sum\nolimits_{i \in I_s(k)} \Phi_k(x_{s,i}) J^G(f_{s,i}, g)$$

pour tout élément $g \in \mathcal{W}_s$. Notons $S \subset \mathcal{X}_{(\alpha(k+1))}$ le support de la restriction de la fonction Φ_k à la nappe $\mathcal{X}_{(\alpha(k+1))}$. Cette restriction étant localement constante sur $\mathcal{X}_{(\alpha(k+1))}$, on a l'égalité

$$S = \{g \in \mathcal{X}_{(\alpha(k+1))},\ \Phi_k(g) \neq 0\}.$$

Comme S est contenu dans AdG(ω'), donc par construction contenu dans $\mathcal{X}_{(\alpha(k+1))} \cap (\cup_{s \in \mathcal{F}} \mathcal{W}_s)$, le développement en germes de Φ_k au points $s \in \mathcal{F}$ entraîne l'inclusion

$$S \subset \bigcup_{\substack{s \in \mathcal{F} \\ i \in I_s(k)}} \{g \in \mathcal{X}_{(\alpha(k+1))},\ J^G(f_{s,i}, g) \neq 0\}.$$

Or, pour chaque $s \in \mathcal{F}$, les conditions légèrement plus fortes que celles du lemme 3.4.1 que nous avons imposées aux fonctions $f_{s,i}$ ($i \in \{0,\ldots,m(s)\}$), nous assurent que le support de la restriction à la partie fermée $\mathcal{N}_{k+1}$ de G des fonctions $f_{s,i}$ ($i \in I_s(k)$) est ou bien vide, ou bien contenu dans la nappe $\mathcal{X}_{(\alpha(k+1))}$. Par conséquent la partie

$$C = \bigcup_{\substack{s \in \mathcal{F} \\ i \in I_s(s)}} \operatorname{supp}\left(f_{s,i}\big|_{X_{(\alpha(k+1))}} \right)$$

est compacte dans la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$ et $S \subset \mathrm{AdG}(C)$.

On peut donc appliquer la proposition 4.2.3. Il existe une fonction $\zeta_{k+1} \in C_{c,\infty}(X_{(\alpha(k+1))})$ telle que, pour toute fonction $h \in C_{c,\infty}(G)$ telle que la restriction de h à la fermeture dans G de la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$ est à support dans $X_{(\alpha(k+1))}$ et coïncide avec ζ_{k+1} sur $X_{(\alpha(k+1))}$,

$$\Phi_k(x) = J^G(h, x)$$

pour tout $x \in X_{(\alpha(k+1))}$. Comme la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$ est ouverte dans N_{k+1} (cf. le numéro 2.2.8), on peut choisir une telle fonction $h \in C_{c,\infty}(G)$ telle que que le support de la restriction de h à la partie N_{k+1} de G est contenu dans la nappe $X_{(\alpha(k+1))}$. Considérons alors la fonction $f_{k+1} \in C_{c,\infty}(G)$ définie par

$$f_{k+1} = f_k + h.$$

Elle satisfait l'égalité

$$\Phi(x) = J^G(f_{k+1}, x)$$

pour tout $x \in N_{k+1}$.

Par induction sur k, on a montré que la fonction Φ est une intégrale orbitale dans G.

□

4.3. Indépendance des germes aux voisinage des éléments semi-simples non nécessairement séparables.

On montre le résultat en deux temps: d'abord pour les éléments irréductibles grâce aux constructions du numéro 4.1, ensuite dans le cas général.

Proposition 4.3.1. — *Soit* s *un élément irréductible dans* G *et soit* $\mathcal{F}(s) \subset A_G(s)$ *une famille de représentants des* AdG-*orbites de* $A_G(s)$. *Pour chaque élément* $x \in \mathcal{F}(s)$, *soit* $b_x : G \to \mathbb{C}$ *un représentant du germe* $[b_x(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G. *Supposons qu'il existe une famille de nombres complexes* $\{c_x\}_{x \in \mathcal{F}(s)}$ *et un voisinage* W *de* s *dans* G *tel que*

$$\sum_{x \in \mathcal{F}(s)} c_x b_x(g) = 0$$

pour tout $g \in W \cap G_{reg}$. *Alors* $c_x = 0$ *pour tout* $x \in \mathcal{F}(s)$.

Démonstration.

On reprend (sans les réexpliciter) les constructions du numéro 4.1. Soient $E = F[s] \subset \mathfrak{g}$ l'extension de F engendrée par s, $\mathcal{G}$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire principal de $\mathfrak{g}$ normalisé par $E^\times$ associé à s, $r = v_{\mathcal{G}}(s)$ la hauteur de s relativement à $\mathcal{G}$ et $k_0 = k_0(s, \mathcal{G})$ l'exposant critique. Rappelons (cf. la démonstration du lemme 4.1.1) que, pour chaque entier $a \geq 1$, le G-entrelacement

$$J_G(\Omega_a(s, \mathcal{G})) \underset{\mathrm{dcf.}}{=} \left\{ g \in G,\ \mathrm{Adg}^{-1}(s + \mathcal{G}^{k_0+a}) \cap (s + \mathcal{G}^{k_0+a}) \neq 0 \right\}$$

de la strate simple dans G

$$\Omega_a(s, \mathcal{G}) = [\mathcal{G}, -r, -(k_0 + a), s]$$

est donné par la formule ([Bu-Ku] theorem (1.5.8))

$$J_G(\Omega_s(s,\mathcal{G})) = G_s(1+\mathcal{P}_E{}^s\mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})).$$

Soit d le plus petit entier ≥ 1 tel que l'on ait les deux relations d'inclusion

$$\begin{cases} K^d = 1+\mathfrak{g}^d \subset 1+\mathcal{G}^{1+(k_0-r)} \\ sK^d \subset W \end{cases}.$$

L'énoncé portant sur les germes d'intégrales orbitales au point s dans G associés aux AdG-orbites de $A_G(s)$, on peut sans perte de généralité grâce au corollaire 3.4.2 et à la propriété d'unicité des germes de la proposition 3.4.3, supposer que pour chaque élément $x\in\mathcal{F}(s)$, le représentant $b_x : G \to \mathbb{C}$ du germe $[b_x(.)]_{G,s}$ au point s dans G est l'intégrale orbitale $J^G(f_x,.)$ d'une fonction $f_x\in C_{c,\infty}(sK^d)$.

L'étape suivante consiste à faire jouer au voisinage ouvert compact de s dans G

$$\mathcal{V} = s+\mathcal{G}^{k_0+1} = s\left(1+\mathcal{G}^{1+(k_0-r)}\right)$$

le rôle tenu par $\mathcal{W}_T$ dans la démonstration du lemme 3.6.1. Pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G)$, on définit la fonction $h_{(s)}\in C_{c,\infty}(G_s\backslash G)$ par

$$h_{(s)}(x) = \int_{G_s} h(g_s x)dg_s,$$

où dg_s est la mesure de Haar sur le centralisateur G_s de s dans G telle que (cf. le lemme 4.1.1)

$$\mathrm{vol}\left(G_s(1+\mathcal{P}_E\mathcal{N}_{k_0}(s,\mathcal{G})), dg_s\backslash dg\right) = 1.$$

Soit une fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ telle que la fonction $\phi_{(s)}$ soit la fonction caractéristique de la partie $J_G(\Omega_1(s,\mathcal{G}))$ de $G_s\backslash G$ et, pour chaque fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, soit $F(f)\in C_{c,\infty}(G_s)$ la fonction définie par

$$F(f)(g_s) = \int_G \phi(g)Ad^*g(f)(g_s)dg \quad (g_s\in G_s).$$

Ainsi, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathcal{V})$, on a

$$\begin{aligned} F(f)(s) &= \int_G \phi(g)f(g^{-1}sg)dg \\ &= \iint_{(G_s\backslash G)\times G_s} \phi(g_s g)f(g^{-1}sg)(dg_s\backslash dg)dg_s \\ &= \iint_{(G_s\backslash G)\times G_s} \phi_{(s)}(g)f(g^{-1}sg)dg_s\backslash dg \\ &= J^G(f,s) \end{aligned}$$

car si $G_s g \notin \mathrm{supp}(\phi_{(s)}) = J_G(\Omega_1(s,\mathcal{G}))$ alors $g^{-1}sg \notin \mathcal{V}$. De plus, pour tout élément $x\in G_s\cap\mathcal{V}$ tel que le centralisateur G_x de x dans G est contenu dans G_s, on a

$$\begin{aligned} I^G(f,x,dg_x) &= \int_{G_s\backslash G}\int_{G_x\backslash G_s} Ad^*g_s g(f)(x)(dg_s\backslash dg)(dg_x\backslash dg_s) \\ &= \int_{G_s\backslash G}\int_{G_x\backslash G_s} \phi_{(s)}(g)Ad^*g_s g(f)(x)(dg_s\backslash dg)(dg_x\backslash dg_s) \\ &= \int_G\int_{G_x\backslash G_s} \phi(g)Ad^*g_s g(f)(x)dg(dg_x\backslash dg_s) \\ &= \int_{G_x\backslash G_s} Ad^*g_s(F(f))(x)(dg_x\backslash dg_s) \\ &= I^{G_s}(F(f),x,dg_x) \end{aligned}$$

pour toute mesure de Haar dx sur G_x.

On dispose désormais de tous les ingrédients qui nous ont permis de démontrer la proposition 3.6.2. Reprenons brièvement les arguments.

Soit $f \in C_{c,\infty}(sK^d)$ la fonction définie par

$$f = \sum_{x \in \mathcal{F}(s)} c_x f_x .$$

Par hypothèse, on a

$$J^G(f, g) = \sum_{x \in \mathcal{F}(s)} c_x J^G(f_x, g) = 0$$

pour tout $g \in W \cap G_{reg}$ et l'on est ramené à montrer que $J^G(f,x) = c_x = 0$ pour chaque $x \in \mathcal{F}(s)$. Comme on l'a fait pour la proposition 3.6.2, on traite séparément le cas $x = \{\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{O}_G(s)\}$ et le cas $x \in (\mathcal{F}(s) - \{\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{O}_G(s)\})$.

(1) Le cas $x = \{\mathcal{F}(s) \cap \mathcal{O}_G(s)\}$. Soit $\{u_i\}_{0 \leq i \leq m}$ une famille de représentants dans G_s des AdG_s-orbites unipotentes de G_s. On a alors le développement en germes de l'intégrale orbitale dans G_s (normalisée comme en 4.1.3) de la fonction $F(f) \in C_{c,\infty}(G_s)$

$$\left[J^{G_s}(F(f), .)\right]_{G_s, s} = \sum_{0 \leq i \leq m} J^{G_s}(F(f), su_i)\left[b_{su_i}(.)\right]_{G_s, s} .$$

Comme la partie $W \cap G_{reg}$ de la nappe régulière $X_{(N)}$ est dense dans $W \cap X_{(N)}$, la proposition 4.2.1 entraîne que

$$J^G(f, g) = 0$$

pour tout $g \in W \cap X_{(N)}$. Par conséquent

$$0 = J^G(f, s(1+v)) = J^{G_s}(F(f), s(1+v))$$

pour tout $v \in Lie(G_s)$ tel que

$$\begin{cases} s(1+v) \in G_s \cap \mathcal{V} \\ G_{s(1+v)} \subset G_s \\ s(1+v) \in W \cap X_{(N)} \end{cases} .$$

A ce point il faut faire un peu attention. On a un isomorphisme non canonique

$$G_s \xrightarrow{\iota} \mathbf{GL}_{N_1}(F_1) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{N_r}(F_r), \ \sum_{1 \leq i \leq r} [F_i : F] N_i = 1,$$

pour des extensions finies <u>non nécessairement séparables</u> $F_1, \ldots, F_r$ de F. On fixe un tore maximal elliptique de G_s

$$\Gamma = \iota^{-1}\left(E_1^{\times} \times \cdots \times E_r^{\times}\right)$$

où, pour chaque $i \in \{1, \ldots, r\}$, E_i/F_i est une extension <u>séparable</u> de degré N_i de F_i. Le groupe Γ est une sous-variété ϖ-adique de dimension N de G mais n'est pas un tore maximal de G si l'élément s n'est pas séparable dans G, c'est-à-dire si l'une au moins des extensions F_i/F n'est pas séparable. Pour chaque $t \in \mathcal{O}$, la partie $\Gamma(t) = \Gamma \cap \{s(1+t\mathcal{V}))$ est un voisinage ouvert compact de s dans Γ et $\Gamma(t) \cap X_{(N)}$ est un ouvert dense dans $\Gamma(t)$. Par conséquent, on peut faire tendre $s(1+tv)$ ($t \to 0$, $v \in \mathcal{V}$) vers s dans $\Gamma \cap X_{(N)}$ et, appliquant à l'identique le raisonnement utilisé dans la démonstration de la proposition 3.6.2, conclure à l'égalité

$$J^{G_s}(F(f), s) = F(f)(s) = 0 .$$

D'où l'on déduit

$$J^G(f,x)=J^G(f,s)=F(f)(s)=0.$$

(2) Le cas $x\in(\mathcal{F}(s)-\{\mathcal{F}(s)\cap O_G(s)\})$. Comme l'élément s est irréductible dans G, x est primaire dans G et le sous-groupe de Levi de x associé aux composantes primaires de x est G lui-même. Soient P le sous-groupe parabolique de G associé à x, U le radical unipotent de P, M une composante de Levi de P, A le centre de M, K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A) de G et $f^P\in C_{c,\infty}(M)$ le terme K_P-invariant de f suivant P. Soient $\sigma=x_M$ et $u=x_U$ les éléments respectivement de M et U tels que $x=\sigma u$. Comme l'élément σ appartient à l'orbite $O_G(s)$, on peut, quitte à considérer un conjugué de x dans G, supposer que $\sigma=s$. De même, quitte à changer (toujours grâce au corollaire 3.4.2 et à la propriété d'unicité des germes de la proposition 3.4.3) le jeu de fonction $\{f_g\}_{g\in\mathcal{F}(s)}$ induisant une famille de représentants $b_g(.)=J^G(f_g,.)$ $(g\in\mathcal{F}(s))$ des germes $[b_g(.)]_{G,s}$ au point s dans G, on peut supposer que le support de la fonction f^P est suffisamment concentré sur s pour permettre de construire (comme pour le cas (1) car l'élément s est irréductible dans M) une fonction $F=F(f^P)\in C_{c,\infty}(M_\sigma)$ telle que

$$J^M(f^P,s)=F(s)$$

et

$$I^M(f^P,y,dm_y)=I^{M_s}(F,y,dm_y)$$

pour tout élément $y\in M_s$ suffisamment proche de s et tel que le centralisateur M_y de y dans M soit contenu dans M_s (dm_y désignant une quelconque mesure de Haar sur M_y). On fixe ensuite une sous-variété ϖ-adique Γ de dimension N de M qui soit un tore maximal elliptique du centralisateur M_s de s dans M. Comme on peut approcher l'élément $s\in(W\cap\Gamma)$ d'aussi près que l'on veut par des éléments de $\Gamma\cap X_{(N)}$ et comme

$$0=J^G(f,y)=J^M(f^P,y)$$

pour tout $y\in(W\cap\Gamma\cap X_{(N)})$, en reprenant à l'identique le raisonnement effectué plus haut pour le cas $x=\{\mathcal{F}(s)\cap O_G(s)\}$, on obtient

$$0=J^{M_s}(F,s)=F(s)=J^M(f^P,s)=J^G(f,x).$$

Donc $J^G(f,x)=0$ pour chaque $x\in\mathcal{F}(s)$ et la proposition 4.3.1 est démontrée.

□

Lemme 4.3.2. — *Soient* s *un élément semi-simple dans* G, M' *le sous-groupe de levi de* G *associé aux composantes primaires de* s *et* $\mathcal{F}(s)\subset M'$ *une famille de représentants des* AdG-*orbites de* $A_G(s)$. *Alors pour chaque* $x\in\mathcal{F}(s)$, *le germe* $[b_x(.)]_{M',s}$ *au point* s *dans* M' *est la restriction à* M' *du germe* $[b_x(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G.

Démonstration.

Soit

$$A_G(s)=\coprod_{0\le i\le m}O_G(x_i)\quad(x_i\in\mathcal{F}(s))$$

une décomposition standard de $A_G(s)$ (cf. le numéro 2.2.8). Pour chaque entier k, $0\le k\le m$, soit

$$\mathcal{O}_{G,k} = \coprod_{0\le i\le k} \mathcal{O}_G(x_i)$$

l'union (disjointe) des k premières AdG-orbites de cette décomposition. On fixe un jeu de fonctions $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\} \subset C_{c,\infty}(G)$ tel que (lemme 3.4.1)

(1) $\mathrm{supp}(f_k) \cap \mathcal{O}_{G,k} \subset \mathcal{O}_G(x_k)$, $0 \le k \le m$.

(2) $J^G(f_k, x_i) = \delta_{i,k}$, $0 \le i, k \le m$ ($\delta_{i,k} = 0$ si $i \ne k$, $\delta_{i,i} = 1$).

Il est clair que $\mathcal{F}(s)$ est une famille de représentants des AdM'-orbites de $A_{M'}(s)$ (cf. la proposition 2.2.7.1) et que

$$A_{M'}(s) = \coprod_{0\le i\le m} \mathcal{O}_{M'}(x_i)$$

est une décomposition standard de $A_{M'}(s)$ (i.e. une décomposition standard de la fermeture dans M' de l'AdM'-orbite régulière $\mathcal{O}_{M'}(x_m)$ de M'). Soit P' un sous-groupe parabolique de G de composante de Levi M', A' le centre de M' et $K_{P'}$ un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à la paire parabolique (P',A') de G. Alors (proposition 3.3.4)

$$J^G(f^{P'}, g) = J^G(f, g)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$ et tout élément $g \in G$ tel que le centralisateur G_g de g dans G est contenu dans M' ($f^{P'}$ désignant le terme $K_{P'}$-invariant de f suivant P'). Comme M' est le sous-groupe de Levi associé aux composantes primaires de s, il existe un voisinage W de s dans M tel que, pour tout $g \in W$, le sous-groupe de Levi associé aux composantes primaires de g (donc à fortiori le groupe G_g) est contenu dans M'. Par conséquent, pour chaque $i \in \{0, \ldots, m\}$, la restriction à M' du germe

$$\left[b_{x_i}(\cdot)\right]_{G,s} = \left[J^G(f_i, .)\right]_{G,s}$$

au point s dans G, est le germe de fonctions

$$\left[J^{M'}\left((f_i)^{P'}, .\right)\right]_{M',s}$$

au point s dans M'. On est donc ramené à montrer l'égalité

$$\left[b_{x_i}(\cdot)\right]_{M',s} = \left[J^{M'}\left((f_i)^{P'}, .\right)\right]_{M',s}$$

pour chaque $i \in \{0, \ldots, m\}$.

Pour chaque entier k tel que $0 \le k \le m$, soit

$$\mathcal{O}_{M',k} = \coprod_{0\le i\le k} \mathcal{O}_{M'}(x_i)$$

l'union des k premières AdM'-orbites pour la décomposition de $A_{M'}(s)$ fixée plus haut. Soit U' le radical unipotent de P'. Alors, pour chaque $i \in \{0, \ldots, k\}$, le centralisateur de x_i dans G étant contenu dans M', l'application

$$U' \to U', \ u' \mapsto x_i^{-1} u' x_i u'^{-1}$$

est un isomorphisme de variété ϖ-adiques, et $x_i U' \subset \mathcal{O}_{U'}(x_i) \subset \mathcal{O}_G(x_i)$. Fixons $k \in \{1, \ldots, m\}$. Alors, pour chaque $i \in \{0, \ldots, k-1\}$,

$$\mathrm{supp}(f_k) \cap \mathrm{Ad}K_{P'}(x_i U') = \mathrm{supp}(f_k) \cap \mathcal{O}_G(x_i) = \varnothing,$$

par conséquent

$$(f_k)^{P'}(x_i)=0$$

et donc

$$\mathrm{supp}(f_k)^{P'} \cap \mathcal{O}_{M'}(x_i)=\varnothing.$$

En définitive, on montré que le jeu de fonctions $\{(f_0)^{P'},\ldots,(f_m)^{P'}\}$ satisfait les propriétés

(1) $\mathrm{supp}((f_k)^{P'})\cap \mathcal{O}_{M',k} \subset \mathcal{O}_{M'}(x_k)$, $0\leq k\leq m$.

(2) $J^{M'}((f_k)^{P'}, x_i)=J^G(f_k, x_i)= \delta_{i,k}$, $0\leq i,k \leq m$.

On conclut grâce à la propriété d'unicité des germes de la proposition 3.4.3 (immédiatement généralisée à un produit de groupes linéaires sur F).

□

Proposition 4.3.3. (Indépendence des germes, cas général) — *Soit* s *un élément semi-simple dans* G *et soit* $\mathcal{F}(s)$ *une famille de représentants des* AdG-*orbites de* $A_G(s)$. *Pour chaque élément* $x\in \mathcal{F}(s)$, *soit* $b_x: G\to \mathbb{C}$ *un représentant du germe* $[b_x(.)]_{G,s}$ *au point* s *dans* G. *Supposons qu'il existe une famille de nombres complexes* $\{c_x\}_{x\in\mathcal{F}(s)}$ *et un voisinage* W *de* s *dans* G *tel que*

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} c_x b_x(g)=0$$

pour tout $g\in W\cap G_{reg}$. *Alors* $c_x=0$ *pour tout* $x\in \mathcal{F}(s)$.

On a le même résultat si l'on remplace les germes $[b_x(.)]_{G,s}$ *par les germes* $[a_x(.)]_{G,s}$.

Démonstration.

Soit M' le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de s. Soit $W_{M'}$ un voisinage ouvert compact de s dans $W\cap M'$ tel que, pour tout $m\in W_{M'}$, le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de m est contenu dans M'. Alors

$$W_{M'}\cap M_{reg} = W_{M'} \cap G_{reg}$$

et

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} c_x b_x(m)=0$$

pour tout $m\in W_{M'}\cap M_{reg}$. Comme s est irréductible dans M', et comme pour chaque $x\in \mathcal{F}(s)$ la restriction de la fonction b_x à M' est un représentant du germe $[b_x(.)]_{M',s}$ au point s dans M' (lemme 4.3.2), une généralisation immédiate de la proposition 4.3.1 au groupe M' entraîne la nullité des c_x ($x\in \mathcal{F}(s)$).

Quant à l'affirmation que le résultat reste vrai si l'on remplace les germes $[b_x(.)]_{G,s}$ par les germes $[a_x(.)]_{G,s}$, elle découle immédiatement du fait que pour chaque $x\in \mathcal{F}(s)$, il existe une constante $\alpha_x>0$ telle que $[a_x(.)]_{G,s}=\alpha_x [b_x(.)]_{G,s}$. Par conséquent, si $a_x: G\to \mathbb{C}$ ($x\in \mathcal{F}(s)$) est un représentant du germe $[a_x(.)]_{G,s}$ au point s dans G, la relation

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} c_x a_x(g)=0$$

pour tout $g\in W\cap G_{reg}$, entraîne la relation

$$\sum_{x\in\mathcal{F}(s)} c_x \alpha_x b_x(g)=0$$

pour tout $g\in W\cap G_{reg}$, et donc l'égalité $c_x=0$ pour chaque $x\in \mathcal{F}(s)$.

□

4.4. Densité des intégrales orbitales semi-simples régulières séparables dans G dans l'espace des distributions AdG-invariantes sur G.

De nouveau, la démonstration se fait en deux temps. Le résultat ci-dessous est conséquence directe de la propriété d'indépendance des germes (proposition 4.3.3).

Proposition 4.4.1. — *Soit une fonction* $f \in C_{c,\infty}(G)$ *telle que* $J^G(f, g)=0$ *pour tout* $g \in G_{reg}$. *Alors* $J^G(f, g)=0$ *pour tout* $g \in G$. *(Il est clair qu'on a le même résultat si l'on remplace la normalisation* $J(.,.)$ *par la normalisation* $I(.,.)$*).*

Démonstration.

Soit s un élément semi-simple et soit $\mathcal{F}(s) \subset G$ une famille de représentants des AdG-orbites de $A_G(s)$. Pour chaque élément $x \in \mathcal{F}(s)$, fixons un représentant $b_x : G \to \mathbb{C}$ du germe $[b_x(.)]_{G,s}$ au point s dans G. Alors (proposition 3.4.3)

$$0 = J^G(f, g) = \sum_{x \in \mathcal{F}(s)} J^G(f, x) b_x(g)$$

pour tout $g \in G_{reg}$ suffisamment proche de s. D'où l'on déduit (proposition 4.3.3) que $J^G(f,x)=0$ pour tout $x \in \mathcal{F}(s)$, c'est-à-dire que $J^G(f, g)=0$ pour tout $g \in A_G(s)$.

Comme G est union des parties $A_G(s)$, s parcourant l'ensemble des éléments semi-simple de G, la proposition 4.4.1 est montrée.

□

Comme on l'a fait pour le théorème 4.3 à partir de la proposition 4.2.3, on montre le théorème de densité annoncé à partir de la proposition 4.4.1 en rangeant les nappes de G par dimensions croissantes.

Proposition 4.4.2. — *Soit une fonction* $f \in C_{c,\infty}(G)$ *telle que* $J^G(f, x)=0$ *pour tout* $x \in G_{reg}$. *Alors* $T(f)=0$ *pour toute distribution* T *AdG-invariante sur* G. *(A nouveau, il est clair qu'on a le même résultat si l'on remplace la normalisation* $J(.,.)$ *par la normalisation* $I(.,.)$*).*

Démonstration.

On veut montrer, par induction sur la dimension (en tant que variétés ϖ-adiques) des AdG-orbites de G, que la fonction f appartient à $C_0(G)$. Soit

$$G = \coprod_{0 \leq i \leq r} X_{(\alpha(i))}$$

une décomposition standard (cf. le numéro 2.2.8). Pour chaque entier k tel que $0 \leq k \leq r$, on note N_k la partie fermée de G définie par

$$N_k = \coprod_{0 \leq i \leq k} X_{(\alpha(i))}.$$

D'après la proposition 4.4.1, $J^G(f, x)=0$ pour tout $x \in G$. Par conséquent

$$f|_{X_{(\alpha(0))}} \equiv 0.$$

Soit k un entier tel que $0 \leq k < r$. Supposons que

$$f|_{N_k} \in C_0(N_k).$$

Comme N_k est une partie fermée de G, il existe des fonctions $h_1,\ldots,h_r$ ($h_i \in C_{c,\infty}(G)$) et des éléments $g_1,\ldots,g_r$ ($g_i \in G$) tels que

$$\left(f - \sum_{0 \le i \le m} h_i - Ad^* g_i(h_i) \right)\Big|_{N_k} \equiv 0.$$

Notant $\zeta \in C_{c,\infty}(G)$ la fonction définie par

$$\zeta = f - \sum_{0 \le i \le r} h_i - Ad^* g_i(h_i),$$

il est clair que

$$\zeta\big|_{X_{(\alpha(k+1))}} \in C_{c,\infty}\left(X_{(\alpha(k+1))}\right)$$

et que

$$I^G(\zeta, x) = 0$$

pour tout élément $x \in G$. Le morphisme algébrique $p_{(\alpha(k+1))}$: $\mathbb{X}_{(\alpha(k+1))} \to \mathbb{Y}_{(\alpha(k+1))}$ étant surjectif, submersif et de fibres les AdG-orbites de $\mathbb{X}_{(\alpha)}$, on peut appliquer les travaux de I.M. Gelfand & D.A. Kazhdan ([Ge-Ka], proposition 1) et conclure

$$\zeta\big|_{X_{(\alpha(k+1))}} \in C_0\left(X_{(\alpha(k+1))}\right).$$

Comme N_{k+1} est une partie fermée dans G et comme $X_{(\alpha(k+1))}$ est une partie ouverte dans N_{k+1}, il existe des fonctions $q_1,\ldots,q_m$ ($q_i \in C_{c,\infty}(G)$) et des éléments $y_1,\ldots,y_m$ ($y_i \in G$) tels que

$$\left(\zeta - \sum_{0 \le i \le r'} q_i - Ad^* y_i(q_i) \right)\Big|_{N_{k+1}} \equiv 0.$$

Donc

$$f\big|_{X_{k+1}} \in C_0\left(N_{k+1}\right)$$

et l'on a montré la proposition.

$\square$

5. Références.

[Be-Ze] I.N. BERNSTEIN & A.V. ZELEVINSKY. – *Representations of the group $GL_N(F)$ where F is a local non-archimedean field,* Uspechi Mat. Nauk. **31**, (1976), 5-70.

[Bour] N. BOURBAKI. – *Eléments de mathématiques*, Hermann, Paris.

[Bu-Ku] C.J. BUSHNELL & P.C. KUTZKO. – *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Ann. Math. Studies, n° **129**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.

[Cart] P. CARTIER. – *Representations of p-adic groups: a survey*, Proc. of Symp. in Pure Math. **33**, part 1 (1979), Amer. Math. Soc., Providence, 111-155.

[De-Ka] P. DELIGNE & D. KAZHDAN. – *On representation of local division algebras*, I.H.E.S, Tel-Aviv Univ. & Harvard Univ., manuscrit.

[De-Ka-Vi] P. DELIGNE, D.A. KAZHDAN & M.F. VIGNERAS. – *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984, 33-177.

[Ge-Ka] I.M. GELFAND & D.A. KAZHDAN. – *Representations of the group GL(n,K) where K is a local field*, Lie groups and their representations, Halstead Press, Budapest, 1974.

[Hari 1] HARISH-CHANDRA. – *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lectures Notes in Math., n° **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Hari 4] HARISH-CHANDRA. – *A submersion principle and its applications*, proc. Indian Acad. sci. (Math. Sci.) **90** (1981), 95-102.

[Henn] G. HENNIART. – *La conjecture de Langlands locale pour GL(3)* (Appendice 3), Mém. de la Soc. Math. de France (n^{elle} série) **11/12** (1984), 149-152.

[Howe] R. HOWE. – *The Fourier transform and germs of characters*, Math. Ann. **208** (1974), 305-322.

[Jaco] N. JACOBSON. – *Basic algebra 1*, W.H. Freemann and Company, San Fransisco, 1974.

[Laum] G. LAUMON. – *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties*, Part 1, Publi. Math. Univ. Paris-Sud, 1991.

[Mac D] I.G. MAC DONALD. – *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford University Press, New York, 1979.

[Sp-St] T.A. SPRINGER & R. STEINBERG. – *Conjugacy classes*, Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Math., n° **131**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Vign] M.F. VIGNERAS. – *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique*, Jour. Fac. Sc. Univ. de Tokyo IA **28** (3) sec. 14 (1982), 945-961.

[Weil] A. WEIL. – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, 1965.

Chapitre 4

La conjecture de Howe pour $\mathbf{GL}_N(F)$ où F est un corps local de caractéristique >0

Soient F un corps local non archimédien (i.e. un corps commutatif localement compact, non discret, ultramétrique et à corps résiduel fini), $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif connexe défini sur F et $G=\mathbf{G}(F)$ le groupe des F-points de $\mathbf{G}$. Si X est une partie de G, on note AdG(X) la partie AdG-invariante $\{gxg^{-1}, g\in G, x\in X\}$ de G. On dit qu'une partie fermée AdG-invariante Ω de G est *compacte modulo conjugaison dans* G si Ω est contenue dans AdG(X) pour une partie compacte X de G. Si Y est une partie fermée AdG-invariante de G, soit $J_G(Y)$ l'ensemble des distributions AdG-invariantes sur G à support dans Y. Si K est un sous-groupe ouvert compact de G, soit $\mathcal{H}(G,K)$ l'algèbre de Hecke (munie du produit de convolution défini par une mesure de Haar sur G) des fonctions à valeurs complexes, K-biinvariantes et à support compact sur G.

Il y a quelques années, R. Howe a conjecturé ([Howe]) que, pour toute partie compacte modulo conjugaison Y de G et tout sous-groupe ouvert compact K de G, l'espace $J_G(Y)|_{\mathcal{H}(G,K)}$ des restrictions à $\mathcal{H}(G,K)$ des distributions de $J_G(Y)$ était de dimension finie. Laurent Clozel a, en deux temps, démontré cette conjecture pour F de caractéristique nulle: d'abord en 1985 ([Cloz 1]) modulo une propriété conjecturale de finitude des exposants spéciaux de la série discrète (propriété qu'il a vérifiée pour $\mathbf{GL}_N(F)$ et $\mathbf{SL}_N(F)$), puis en 1989 inconditionnellement ([Cloz 2]). On se propose ici de montrer cette conjecture pour $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$ (N entier≥ 2) et F de caractéristique >0. La généralisation de la démonstration de L. Clozel se heurte essentiellement à deux difficultés: la locale intégrabilité du caractère-distribution d'une représentation admissible irréductible de $\mathbf{GL}_N(F)$ est, aujourd'hui, encore conjecturale (cf. [Rodi]); le nombre de classes de conjugaison de tores maximaux de $\mathbf{GL}_N(F)$ n'est pas toujours fini (par exemple, si F est de caractéristique 2, il y a une infinité d'extensions quadratiques séparables de F, chacune induisant une classe de conjugaison de tores maximaux elliptiques (i.e. compacts modulo le centre) de $GL_2(F)$).

L'idée est de mettre à profit le résultat de Kazhdan sur les corps locaux proches (cf. le chapitre 1). Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réductif déployé défini sur $\mathbb{Z}$, F un corps local non archimédien à corps résiduel fini, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$. Le groupe $K_F=\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbf{G}(F)$ et, pour chaque entier $n\geq 1$, on note K_F^n le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_F^n$ de K_F. Alors ([Kazh 2] theorem A)), pour tout entier $n\geq 1$, il existe un entier $m=m(n)\geq n$, tel que, pour tous corps locaux non archimédiens F et E *m-proches* (i.e. tels que les anneaux tronqués $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^m$ et

$\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E{}^m$ sont isomorphes), les algèbres de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_E{}^m)$ et $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E{}^m)$ sont isomorphes.

Désormais, et jusqu'à la fin de ce chapitre, $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$ pour un entier $N\geq 2$ fixé.

On rappelle que si E est un corps local non archimédien, les sous-groupes de congruences $K_E{}^n$, $n\in\mathbb{N}-\{0\}$, du sous-groupe ouvert compact maximal K_E de $\mathbf{G}(E)$ forment un système fondamental de voisinages ouverts compacts de l'unité dans $\mathbf{G}(E)$. Pour la conjecture de Howe, on peut donc ne considérer, sans perte de généralité, que les algèbres de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_E{}^n)$ relatives à ces sous-groupes.

On fixe un *conducteur* $n\geq 1$.

Après les notations d'usage (numéro 1), le numéro 2 est tout entier consacré aux intégrales orbitales elliptiques. Soit F un corps local non archimédien (de caractéristique quelconque). On rappelle que tout élément x de $\mathbf{G}(F)$ a un centralisateur $\mathbf{G}(F)_x$ unimodulaire (cf. [Laum] lemma (4.8.6)) et que la donnée d'une mesure de Haar dg_x sur $\mathbf{G}(F)_x$ définit une distribution Ad$\mathbf{G}(F)$-invariante sur $\mathbf{G}(F)$ (pour la convergence, cf. [Laum] lemma (4.8.11) ou chapitre 3, prop. 3.1.2))

$$I^{\mathbf{G}(F)}(f,x,dg_x)=\int_{\mathbf{G}(F)_x\backslash\mathbf{G}(F)} f(g^{-1}xg)dg_x\backslash dg$$

pour toute fonction f localement constante à support compact sur $\mathbf{G}(F)$ (dg désignant la mesure de Haar sur $\mathbf{G}(F)$ telle que vol($\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$,dg)=1).

On montre (proposition 2.4.2) que pour tout élément y elliptique dans de $\mathbf{G}(F)$ (i.e. dont le centralisateur $\mathbf{G}(F)_y$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ est compact modulo le centre de $\mathbf{G}(F)$), il existe un voisinage $\mathcal{V}=\mathcal{V}(y,n)$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ contenu dans l'ouvert des éléments elliptiques de $\mathbf{G}(F)$ et un entier $r=r(y,n)\geq m(n)$ tels que:

(i) Modulo une bonne normalisation des mesures de Haar dg_x sur les centralisateurs dans $\mathbf{G}(F)$ des éléments de $\mathcal{V}$,

$$I^{\mathbf{G}(F)}(f,x,dg_x)=I^{\mathbf{G}(F)}(f,y,dg_y)$$

pour tout élément $x\in\mathcal{V}$ et toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

(ii) Pour tout corps local E r-proche de F et tout isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\xi:\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)\xrightarrow{\cong}\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E{}^n)$$

construit grâce aux travaux de D. Kazhdan cités plus haut, il existe une partie ouverte $\mathcal{V}'$ de $\mathbf{G}(E)$ contenue dans l'ouvert des éléments elliptiques de $\mathbf{G}(E)$ telle que (avec la normalisation du point (i))

$$I^{\mathbf{G}(F)}(f,y,dg_y)=I^{\mathbf{G}(E)}(\xi(f),x',dg_{x'})$$

pour tout élément $x'\in\mathcal{V}'$ et toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

En fait, énoncé ainsi, ce résultat est virtuellement présent dans le "principe de submersion" d'Harish-Chandra ([Hari 2] theorem 3). Mais il nous a semblé naturel, dans le droit fil du chapitre 1 dans lequel on a optimisé (pour $\mathbf{G}=\mathrm{GL}_N$) le résultat de Kazhdan en montrant que l'entier m(n)=n convenait, d'obtenir un certain contrôle sur le voisinage $\mathcal{V}(y,n)$ et l'entier r(y,n). Nous reprenons donc la démonstration d'Harish-Chandra et, grâce aux constructions techniques de C.J. Bushnell & P.C. Kutzko ([Bu-Ku]) décrivant assez finement le comportement des éléments voisins de y sous l'action de $\mathbf{G}(F)$ par conjugaison, nous donnons une formule relativement explicite pour les intégrales orbitales $I^{\mathbf{G}(F)}(f, y, dg_y)$ des fonctions f de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F^n)$, formule ne dépendant que de $\mathcal{V}(y,n)$ et sur laquelle on peut lire l'entier r(y,n).

Le numéro 3 utilise directement la démonstration de L. Clozel. Si E est un corps local non archimédien et si ϖ_E est une uniformisante de E, à toute suite $(\alpha)=(\alpha_1,...,\alpha_N)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$, on associe l'élément diagonal dans $\mathbf{G}(E)$

$$\varpi_E^{(\alpha)} = \mathrm{diag}\left(\varpi_E^{\alpha_1},\dots,\varpi_E^{\alpha_N}\right).$$

On rappelle (décomposition de Cartan) que le groupe $\mathbf{G}(E)$ est union disjointe des doubles classes $K_E\varpi_E^{(\alpha)}K_E$, (α) parcourant l'ensemble des suites ordonnées $(\alpha_1\leq...\leq\alpha_N)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$. Par conséquent, toute partie Ω_E compacte modulo conjugaison dans $\mathbf{G}(E)$ est contenue dans une partie

$$\mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)\left(\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}} K_E\varpi_E^{(\alpha)}K_E\right)$$

pour une famille finie $\mathcal{F}$ de suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1\leq...\leq\alpha_N)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$.

On fixe la "forme" du compact modulo conjugaison, c'est-à-dire qu'on fixe une famille finie $\mathcal{F}$ de suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1\leq...\leq\alpha_N)$, $\alpha_i\in\mathbb{Z}$. On fixe aussi une puissance $q=p^r$ d'un entier p premier et une extension non ramifiée E_1 de $\mathbb{Q}_p$ (le corps des nombres p-adiques) de degré r. On montre alors qu'il existe une constante $c=c(q,n,\mathcal{F})$ telle que, pour toute extension totalement ramifiée E de E_1 et pour toute partie Ω_E compacte modulo conjugaison dans $\mathbf{G}(E)$ et telle que

$$\Omega_E \subset \mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)\left(\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}} K_E\varpi_E^{(\alpha)}K_E\right),$$

la dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$J_{\mathbf{G}(E)}\left(\Omega_E\right)\Big|_{\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)}$$

est majorée par c. Pour ce faire, on suit pas à pas la démonstartion de L. Clozel, en contrôlant à chaque étape que les majorations qu'il obtient ne dépendent pas (ou peu) du degré de ramification de E sur E_1.

On achève la démonstration (numéro 4) par induction sur la dimension des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$. On fixe F un corps local de caractéristique >0 et Ω_F une partie compacte modulo conjugaison dans $\mathbf{G}(F)$. On suppose la conjecture de Howe vraie pour tous les sous-groupes de Levi propres de $\mathbf{G}(F)$ (elle est trivialement vraie pour les tores déployés maximaux). Ainsi, grâce à un argument de descente du compact modulo conjugaison Ω_F de $\mathbf{G}(F)$ et à la propriété de descente des intégrales orbitales non elliptiques ([Laum] lemma (4.8.10) ou chapitre 3, prop. 3.2.1), les formes linéaires

$$f \mapsto I^{\mathbf{G}(F)}(f, x, dg_x)$$

où x parcourt l'ensemble des éléments non elliptiques de Ω_F, engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F^n)$. Par ailleurs, le numéro 2 (relèvement des intégrales orbitales elliptiques) et le numéro 3 (en caractéristique 0, majoration de la dimension indépendante de la ramification) entraînent que les formes linéaires

$$f \mapsto I^{\mathbf{G}(F)}(f, x, dg_x)$$

où x parcourt l'ensemble des éléments elliptiques de Ω_F, engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F^n)$. On conclut grâce à la propriété de densité des intégrales orbitales dans l'espace des distributions $\mathrm{Ad}\mathbf{G}(F)$-invariantes sur $\mathbf{G}(F)$.

Mentionnons, pour clore cette introduction, que l'idée qu'une telle démonstration puisse exister a pour la première fois été émise par D. Kazhdan.

1. Notations.

1.1. Quelques objets standard.

Soient N un entier ≥ 2, $\mathbf{G}=\mathbf{GL}_N$ et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}$ que l'on identifie à l'algèbre des matrices N×N munie de l'opération adjointe.

Soient $\mathbf{A}_1$ le tore diagonal de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{P}_1$ le sous-groupe de Borel (dit *standard*) de $\mathbf{G}$ formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathbf{G}$.

Dans tout le numéro 1, E désigne un corps local non archimédien à corps résiduel de cardinal q.

Soient:

— $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E.

— $\mathcal{P}_E$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_E$.

— $|\ |_E$ la valeur absolue sur E normalisée par $|\varpi_E|_E = q^{-1}$ pour tout $\varpi_E \in (\mathcal{P}_E - \mathcal{P}_E^2)$.

— $\mathfrak{g}_E^{\,i} = M_N(\mathcal{P}_E^{\,i})$, $i \in \mathbb{Z}$ (ce sont des $\mathcal{O}_E$-réseaux de $\mathfrak{g}(E)$).

— $K_E = \mathbf{G}(\mathcal{O}_E)$.

— $K_E^{\,i} = 1+\mathfrak{g}_E^{\,i}$, $i \geq 1$, les sous-groupes de congruence modulo $\mathcal{P}_E^{\,i}$ de K_E.

— $\mathbf{G}(E)_{reg} \subset \mathbf{G}(E)$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers séparables (i.e. dont le polynôme caractéristique est produit de polynômes irréductibles unitaires séparables sur E, chacun apparaissant avec une multiplicité 1).

— $\mathbf{G}(E)_{ell} \subset \mathbf{G}(E)_{reg}$ l'ensemble des éléments elliptiques séparables de $\mathbf{G}(E)$ (i.e. dont le polynôme caractéristique est irréductible et séparable sur E).

Si M est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}(E)$, M est (non canoniquement) isomorphe à un produit

$$\mathbf{GL}_{N_1}(E) \times \cdots \times \mathbf{GL}_{N_r}(E)$$

pour des entiers $N_i \geq 1$ tels que $N_1+\cdots+N_r=N$, et l'on note M_{reg} (resp. M_{ell}) l'ensemble des éléments m de M tels que chaque composante de m à travers cet isomorphisme soit semi-simple réguliere séparable (resp. elliptique séparable).

On munit l'algèbre $\mathfrak{g}(E)$ des matrices N×N sur E de la topologie ϖ_E-adique induite par E. Ainsi, K_E est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbf{G}(E)$ ($\mathbf{G}(E)$ étant muni de la topologie induite par celle de $\mathfrak{g}(E)$).

1.2. On note $\mathrm{Ad}_{\mathbf{G}(E)}$, ou Ad s'il n'y a pas de confusion possible, l'action de $\mathbf{G}(E)$ sur $\mathfrak{g}(E)$ par conjugaison.

Si H est un sous-groupe de $\mathbf{G}(E)$, Y une partie de $\mathfrak{g}(E)$ et x un élément de $\mathfrak{g}(E)$, on note

$$\mathrm{AdH}(Y)=\{\mathrm{Adh}(y),\ h\in H,\ y\in Y\},$$
$$\mathcal{O}_H(x)=\mathrm{AdH}(x),\ \text{l' AdH-orbite de } x,$$
$$H_x=\{h\in H,\ \mathrm{Adh}(x)=x\},\ \text{le stabilisateur de } x \text{ sous AdH.}$$

Si P est un sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}(E)$, on note

$$\delta_P : P \to q^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Q}^\times$$

le caractère module usuel sur P (si dp est une mesure de Haar à gauche ou à droite sur P, δ_P est déterminé par la relation $\delta_P(p)dp' = d(\mathrm{Ad}p(p'))$ pour chaque $p' \in P$).

Soit (P,A) une paire parabolique de **G**(E), U le radical unipotent de P et M le centralisateur de A dans G. Un sous-groupe ouvert compact maximal K_P de **G**(E) est dit *en bonne position par rapport à* (P,A) s'il vérifie condition

$$P \cap K_P = (M \cap K_P)(U \cap K_P).$$

Par exemple, K_E est en bonne position par rapport à la paire $(\mathbf{P}_1(E), \mathbf{A}_1(E))$.

1.3. Si W est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_{c,\infty}(W)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes sur W, localement constantes et à support compact. Son dual algébrique $\mathcal{D}(W)$ est l'espace des distributions sur W. Si T est une distribution sur W, on note

$$\int_\Omega f(x)dT(x) \text{ ou } T(f) \text{ ou } \langle T, f\rangle$$

la valeur de T en l'élément f de $C_{c,\infty}(W)$.

Si Γ est une partie ouverte (resp. fermée) de W, on identifie $C_{c,\infty}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{D}(\Gamma)$) à l'espace des fonctions (resp. distributions) sur W à support dans Γ.

On note dg_E la mesure de Haar sur **G**(E) normalisée par

$$\mathrm{vol}(K_E, dg_E) = 1.$$

Si H est un sous-groupe ouvert compact de **G**(E), on note $C_c(\mathbf{G}(E),H)$ le sous-espace vectoriel de $C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ formé des fonctions (à valeurs complexes) H-biinvariantes à support compact sur **G**(E), et $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),H)$ (l'*algèbre de Hecke de* **G**(E) *relativement à* H) ce même espace muni d'une structure d'algèbre définie par le produit de convolution

$$f *_E h(x) = \int_{\mathbf{G}(E)} f(g_E)h(g_E^{-1}x)dg_E$$

pour tout couple $(f,h) \in C_c(\mathbf{G}(E),H) \times C_c(\mathbf{G}(E),H)$ et tout élément $x \in \mathbf{G}(E)$. L'élément unité de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),H)$ est l'idempotent (pour ce produit de convolution) $e_H = \mathrm{vol}(H, dg_E)^{-1}\mathbf{1}_H$ (où $\mathbf{1}_H$ désigne la fonction caractéristique de l'ouvert compact H).

On définit aussi *l'algèbre de Hecke de* **G**(E)

$$\mathcal{H}(\mathbf{G}(E)) = \bigcup_H \mathcal{H}(\mathbf{G}(E), H)$$

H parcourant une base de voisinages de 1 constituée de sous-groupes ouverts compacts de **G**(E) (par exemple les sous-groupes de congruence K_E^n ($n \geq 1$) de K_E).

Pour chaque corps local non archimédien à corps résiduel fini E, on fixe un caractère additif $\tau_E : E \to \mathbb{C}^\times$ de conducteur $\mathcal{P}_E$ (c'est à dire trivial sur $\mathcal{P}_E$ mais pas sur $\mathcal{O}_E$). On note

$$\langle x, g\rangle_E = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(E)/E}(xg),\ (x,g) \in \mathfrak{g}(E) \times \mathfrak{g}(E),$$

la forme bilinéaire symétrique (non dégénérée) sur $\mathfrak{g}(E)$ où Tr dénote la trace usuelle, et

$$\Psi_E = \tau_E \circ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(E)/E}$$

le caractère additif de $\mathfrak{g}(E)$ induit par τ_E.

Si V est un sous-E-espace vectoriel de $\mathfrak{g}(E)$, on note $V^{\perp(E)}$ le supplémentaire orthogonal de V dans $\mathfrak{g}(E)$ pour $\langle\ ,\ \rangle_E$ donné par

$$V^{\perp(E)} = \{x \in \mathfrak{g}(E),\ \langle x, V\rangle = 0\}.$$

Si R est un sous-$\mathcal{O}_E$-réseau de $\mathfrak{g}(E)$, on note $R^{*(E)}$ l' $\mathcal{O}_E$-réseau dual de R pour le caractère Ψ_E de $\mathfrak{g}(E)$ donné par

$$R^{*(E)} = \{x \in \mathfrak{g}(E),\ \Psi_E(xR) = 1\}.$$

2. Relèvement des intégrales orbitales elliptiques.

2.1. Quelques constructions empruntées à C.J. Bushnell & P.C. Kutzko.

On fixe, pour tout le numéro 2, un corps local non archimédien F (de caractéristique quelconque) à corps résiduel de cardinal q et un élément $y \in \mathbf{G}(F)$ *elliptique* dans $\mathbf{G}(F)$, au sens où le polynôme caractéristique de y est irréductible (mais non nécessairement séparable) sur F.

Soit ϖ_F une uniformisante de F.

Soit $L=F[y] \subset \mathfrak{g}(F)$ l'extension de F de degré N engendrée par y. Ainsi, le centralisateur $\mathbf{G}(F)_y = L^\times$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ est un sous-groupe commutatif de dimension N (en tant que variété ϖ_F-adique) de $\mathbf{G}(F)$ compact modulo le centre.

Soit $e=e(L/F)$ (resp. $f=f(L/F)$) l'indice de ramification (resp. le degré résiduel) de l'extension L/F.

Soit ϖ_L une uniformisante de L et soit un élément $\gamma \in \mathbf{G}(F)$ tel que $\mathrm{Ad}\gamma^{-1}(\mathcal{O}_L^\times) \subset K_F$.

Alors, l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire (principal) $\mathcal{G}=\mathcal{G}(L)$ de $\mathfrak{g}(F)$ défini par

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 = \bigcap_{i=0}^{e-1} \mathrm{Ad}\varpi_L{}^i\left(\gamma\, M_N(\mathcal{O}_F)\,\gamma^{-1}\right)$$

est l'unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathfrak{g}(F)$ normalisé par $L^\times$. On note $\mathcal{G}^m = \varpi_L{}^m\mathcal{G}$, $m \in \mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{G}^1 = \varpi_L\,\mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$.

Remarque 2.1.1. — On aurait pu tout aussi bien partir d'une extension L/F de degré N. Le choix d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_F$ définissant (par l'action régulière de L sur F^N identifié à L) une injection $\alpha_{\mathcal{B}}: L \to \mathfrak{g}(F)$ qui vérifie $\alpha_{\mathcal{B}}(\mathcal{O}_L) \subset M_N(\mathcal{O}_F)$. On peut montrer ([Bush] (1.8)) qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_L$ sur $\mathcal{O}_F$ telle que l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathfrak{g}(F)$ normalisé par $\alpha_{\mathcal{B}}(L^\times)$ soit

$$\left\{x = (x_{i,j}) \in M_N(\mathcal{O}_F),\ x_{i,j} \in \mathcal{P}_F \text{ si } \left\lfloor \frac{i-1}{e} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{j-1}{e} \right\rfloor \right\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des matrices N×N de la forme

$$\begin{pmatrix} M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) \\ M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) \\ M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) \\ M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) \\ M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{P}_F) & M_e(\mathcal{O}_F) \end{pmatrix}$$

(décomposition en blocs e×e).

□

On définit, de la même manière, le sous-groupe parahorique H=H(L) de **G**(F)

$$\mathrm{H}=\bigcap_{i=0}^{e-1}\mathrm{Ad}\varpi_{\mathrm{L}}{}^{i}\left(\mathbf{G}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})\right)=\mathcal{G}^{\times}$$

et, pour chaque $i\geq 1$, le sous-groupe distingué H^i de H

$$\mathrm{H}^i=1+\mathcal{G}^i.$$

Remarque 2.1.2. — L'extension L/F est non ramifiée si et seulement si H est un sous-groupe ouvert compact maximal de **G**(F) (en particulier dans l'Ad**G**(F)-orbite de K_{F}). A l'opposé, l'extension L/F est totalement ramifiée si et seulement si H(L) est un sous-groupe d'Iwahori de **G**(F).

□

Soit $\nu_{\mathcal{G}}:\mathfrak{g}(\mathrm{F})\to\mathbb{Z}$ la hauteur sur $\mathfrak{g}$(F) définie par

$$\nu_{\mathcal{G}}(x)=\max\{i\in\mathbb{Z},\ x\in\mathcal{G}^i\},$$

laquelle coïncide sur L avec la valuation ν_{L} normalisée par $\nu_{\mathrm{L}}(\varpi_{\mathrm{L}})=1$.

Pour chaque $k\in\mathbb{Z}$, on définit l'$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-ordre $\mathcal{N}_k=\mathcal{N}_k(y,\mathcal{G})\subset\mathcal{G}$ ([Bu-Ku] def. (1.4.3) et prop. (1.4.11)

$$\mathcal{N}_k=\left\{x\in\mathcal{G},\ xy-yx\in\mathcal{G}^k\right\}.$$

Soit $k_0=k_0(y,\mathcal{G})$ l'exposant critique ([Bu-Ku] def. (1.4.5)) défini par

$$k_0=\max\left\{k\in\mathbb{Z},\ \mathcal{N}_k\not\subset\mathcal{O}_{\mathrm{L}}+\mathcal{G}^1\right\}.$$

Pour alléger le texte, on note

$$k_1=k_0-\nu_{\mathcal{G}}(y)\geq 0\ \text{ et }\ \mathcal{N}=\mathcal{N}_{k_0}.$$

Remarque 2.1.3. — Avec le formalisme de C.J. Bushnell & P.C. Kutzko, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) $k_1=0$.

(ii) la strate $[\mathcal{G},\ -\nu_{\mathcal{G}}(y),\ 1-\nu_{\mathcal{G}}(y),\ y]\subset\mathfrak{g}(\mathrm{F})$ est une *strate simple* ([Bu-Ku] def. (1.5.5)).

(iii) y est *minimal sur* F au sens où ([Bu-Ku] def. (1.4.14))

$$\begin{cases}\text{g.c.d.}\left(\nu_{\mathcal{G}}(y),e\right)=1\\ \varpi_{\mathrm{F}}{}^{-\nu_{\mathcal{G}}(y)}y^e+\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\ \text{engendre l'extension}\ \left(\mathcal{O}_{\mathrm{L}}/\mathcal{P}_{\mathrm{L}}\right)/\left(\mathcal{O}_{\mathrm{F}}/\mathcal{P}_{\mathrm{F}}\right)\end{cases}$$

□

2.2. Trouver le bon réseau...

Soit P un sous-groupe parabolique de **G**(F).

L'application

$$\zeta=\zeta(\mathrm{P}):\mathbf{G}(\mathrm{F})\times\mathrm{P}\to\mathbf{G}(\mathrm{F}),\ (g,p)\mapsto \mathrm{Ad}g^{-1}(y)p$$

est partout submersive ([Hari 4] theorem 1; le résultat est énoncé pour un élément elliptique séparable, mais la démonstration utilise seulement le fait que l'algèbre de Lie du centralisateur de y dans **G**(F) ne contient pas d'élément nilpotent non nul); on explore dans ce numéro la manière dont elle envoie les ouverts de **G**(F)×P sur les ouverts de **G**(F).

Soit $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{g}$(F) l'algèbre de Lie de P. Identifiant l'espace tangent en (1,1) au groupe **G**(F)×P à $\mathfrak{g}$(F)×$\mathfrak{p}$, et l'espace tangent en y au groupe **G**(F) à $\mathfrak{g}$(F), l'application linéaire tangente à ζ au point (1,1) s'écrit

$$\pi=\pi(\mathrm{P}):\mathfrak{g}(\mathrm{F})\times\mathfrak{p}\to\mathfrak{g}(\mathrm{F}),\ (X,P)\mapsto X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)+P.$$

Pour tout m$\in\mathbb{Z}$, on a (cf. [Bush] (1.13))

$$(\mathcal{G}^{1+\mathrm{m}})^{*(\mathrm{F})}=\mathcal{G}^{-\mathrm{m}}$$

Ainsi, l'application $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(\mathrm{F})/\mathrm{F}}$ induit, pour chaque k$\in\mathbb{N}$, un accouplement non dégénéré

$$\mathcal{G}^0/\mathcal{G}^{\mathrm{k}}\times\mathcal{G}^{1-\mathrm{k}}/\mathcal{G}^1\to\mathrm{F}/\mathcal{P}_{\mathrm{F}}.$$

En particulier, si Γ est un sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-module de $\mathcal{G}^0$, alors pour chaque k$\in\mathbb{N}$, $(\Gamma+\mathcal{G}^{\mathrm{k}})^{*(\mathrm{F})}$ est un sous-$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-module de $\mathcal{G}^{1-\mathrm{k}}$ contenant $\mathcal{G}^1$.

Soit $\Lambda=\Lambda$(y) l'$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-réseau de $\mathfrak{g}$(F) défini par

$$\Lambda=\left(\mathcal{P}_{\mathrm{L}}^{1-\mathrm{k}_1}\mathcal{N}\right)^{*(\mathrm{F})}.$$

Remarque 2.2.1. —

(1) L'égalité $\mathcal{P}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{k}}\mathcal{N}=\mathcal{N}\mathcal{P}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{k}}$ pour tout k$\in\mathbb{Z}$ ([Bu-Ku] prop. (1.4.11)(ii)) nous assure que l'$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-réseau Λ est un $(\mathcal{O}_{\mathrm{L}},\mathcal{O}_{\mathrm{L}})$-bimodule.

(2) On a

$$\mathcal{G}^1\subset\mathcal{P}_{\mathrm{L}}^{1-\mathrm{k}_1}\mathcal{N}\subset\mathcal{G}^{1-\mathrm{k}_1}$$

d'où

$$\mathcal{G}^{\mathrm{k}_1}\subset\Lambda\subset\mathcal{G}^0,$$

toutes ces inclusions étant des égalités si y est minimal. C'est bien sûr pour avoir cette dernière double inclusion qu'on a introduit la puissance de $\mathcal{P}_{\mathrm{L}}$ dans la définition du réseau Λ.

□

Les lemmes 2.2.2 et 2.2.3 suivants sont des variantes du théorème des fonctions implicites, avec contrôle des ouverts de définition.

Lemme 2.2.2. — *Pour tout* m$\in\mathbb{Z}$, *l'application linéaire tangente* π *à* ζ *au point* (1,1) *induit, par restriction, un morphisme surjectif de* $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$*-modules*

$$\pi_{\mathrm{m}}:\mathcal{G}^{\mathrm{me}}\times\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{\mathrm{me}+\mathrm{k}_1}\right)\to\varpi_{\mathrm{F}}^{\mathrm{m}}\Lambda,\ (X,P)\mapsto X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)+P.$$

Démonstration.

Par approximations successives, l'$\mathcal{O}_{\mathrm{F}}$-réseau Λ étant construit pour faire tourner le lemme.

Pour chaque i$\in\mathbb{Z}$ et chaque entier k$\geq$0, comme l'élément y normalise $\mathcal{G}^{\mathrm{i}}$, l'image de la restriction à $\mathcal{G}^{\mathrm{i}}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{\mathrm{i}+\mathrm{k}})$ de l'application linéaire tangente π est contenue dans $\mathcal{G}^{\mathrm{i}}$.

On commence par déterminer l'image de l'application

$$\pi_0/\mathcal{G}^{\mathrm{e}+\mathrm{k}_1}:\mathcal{G}^0/\mathcal{G}^{\mathrm{e}+\mathrm{k}_1}\times\left(\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{\mathrm{k}_1}\right)+\mathcal{G}^{\mathrm{e}+\mathrm{k}_1}\right)/\mathcal{G}^{\mathrm{e}+\mathrm{k}_1}\to\mathcal{G}^0/\mathcal{G}^{\mathrm{e}+\mathrm{k}_1}$$

déduite de π (grâce à la remarque ci-dessus) par restriction et passage au quotient. Soit $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. Alors, d'une part

$$\begin{aligned}\left(\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{k_1}\right)+\mathcal{G}^{e+k_1}\right)^{*(F)} &=\left\{X\in\mathcal{G}^{1-(e+k_1)},\ \Psi_F\left(X\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{k_1}\right)\right)=1\right\}\\ &=\left(\mathfrak{n}\cap\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}\right)+\mathcal{G}^{1-k_1}\subset\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}/\mathcal{G}^{1}\end{aligned}$$

car

$$\mathfrak{p}^{\perp(F)}=\mathfrak{n},\ \left(\mathcal{G}^{e+k_1}\right)^{*(F)}=\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}\ \text{ et }\ \left(\mathcal{G}^{k_1}\right)^{*(F)}=\mathcal{G}^{1-k_1}\ ;$$

d'autre part

$$\begin{aligned}\left(\left(1-\mathrm{Ad}y^{-1}\right)\mathcal{G}^{0}+\mathcal{G}^{e+k_1}\right)^{*(F)} &=\left\{X\in\mathcal{G}^{1-(e+k_1)},\ X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)\in\mathcal{G}^{1}\right\}\\ &=\mathcal{P}_L^{\,1-(e+k_1)}\left\{X\in\mathcal{G}^{0},\ X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)\in\mathcal{G}^{e+k_1}\right\}\\ &=\mathcal{P}_L^{\,1-(e+k_1)}\mathcal{N}_{k_0+e}\\ &=\mathcal{P}_L^{\,1-(e+k_1)}+\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}\mathcal{N}\\ &\subset\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}/\mathcal{G}^{1},\end{aligned}$$

la dernière égalité découlant de la propriété ([Bu-Ku] (1.4.9))

$$\mathcal{N}_{k_0+r}=\mathcal{O}_L+\mathcal{P}_L^{\,r}\mathcal{N}_{k_0}\ \text{ pour tout entier } r\geq 1.$$

En définitive, on a montré la relation

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{Im}\left(\pi_0/\mathcal{G}^{e+k_1}\right)\right)^{*(F)} &=\left(\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{k_1}\right)+\mathcal{G}^{e+k_1}\right)^{*(F)}\cap\left(\left(1-\mathrm{Ad}y^{-1}\right)\mathcal{G}^{0}+\mathcal{G}^{e+k_1}\right)^{*(F)}\\ &=\left(\left(\mathfrak{n}\cap\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}\right)+\mathcal{G}^{1-k_1}\right)\cap\left(\mathcal{P}_L^{\,1-(e+k_1)}+\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}\mathcal{N}\right).\end{aligned}$$

Or, si $(a,x)\in{}_{L}^{\,1-(e+k_1)}\times\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}\mathcal{N}$ et si $a+x=b+x'$ avec $(b,x')\in\left(\mathfrak{n}\cap\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}\right)\times\mathcal{G}^{1-k_1}$, alors

$$a=b+\left(x-x'\right)\in\left(\mathfrak{n}\cap\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}\right)+\mathcal{G}^{1-k_1}$$

est nilpotent modulo $\mathcal{G}^{1-k_1}$ donc $a\in\left(\mathcal{P}_L^{\,1-(e+k_1)}\cap\mathcal{G}^{1-k_1}\right)=\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}$ et $a+x\in\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}\mathcal{N}$. D'où l'égalité

$$\left(\mathrm{Im}\left(\pi_0/\mathcal{G}^{e+k_1}\right)\right)^{*(F)}=\mathcal{P}_L^{\,1-k_1}\mathcal{N}\subset\mathcal{G}^{1-(e+k_1)}/\mathcal{G}^{1}$$

et, par dualité,

$$\mathrm{Im}\left(\pi_0/\mathcal{G}^{e+k_1}\right)=\Lambda\subset\mathcal{G}^{0}/\mathcal{G}^{e+k_1}.$$

Comme l'$\mathcal{O}_F$-module $\mathcal{G}^0$ vérifie la propriété $\mathcal{G}^{ek}=\varpi_F^{\,k}\mathcal{G}^0$ ($k\in\mathbb{Z}$), on déduit du résultat ci-dessus et grâce à la F-linéarité de l'application π que, pour tout $m\in\mathbb{Z}$, l'application

$$\pi_m/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}:\mathcal{G}^{me}/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}\times\left(\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right)+\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}\right)/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}\to\mathcal{G}^{me}/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}$$

déduite de π par restriction et passage au quotient a pour image

$$\mathrm{Im}\left(\pi_m/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}\right)=\varpi_F^{\,m}\Lambda\subset\mathcal{G}^{me}/\mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}.$$

Soit $m\in\mathbb{Z}$ et Z un élément de $\varpi_F^{\,m}\Lambda$. Alors les relations

$$\begin{cases}\mathrm{Im}\left(\pi_d/\mathcal{G}^{(d+1)e+k_1}\right)=\varpi_F^{\,d}\Lambda\subset\mathcal{G}^{de}/\mathcal{G}^{(d+1)e+k_1}\\ \mathcal{G}^{de+k_1}\subset\varpi_F^{\,d}\Lambda\end{cases}\tag{R_d}$$

pour tout entier $d \geq 0$, permettent de construire, par approximations successives grâce à la F-linéarité de l'application π et à la structure de $\mathcal{O}_F$-module des groupes $\mathcal{G}^0$ et $\mathfrak{p} \cap \mathcal{G}^0$, un développement hensélien de la forme

$$Z = \varpi_F{}^m \pi\left(\sum_{i \geq 0} \varpi_F{}^i X_i, \sum_{i \geq 0} \varpi_F{}^i P_i\right), \ (X_i, P_i) \in \mathcal{G}^0 \times (\mathfrak{p} \cap \mathcal{G}^{k_1}), \ i \geq 0.$$

Nous aurons, par la suite, à plusieurs reprises recours à cet argument (nous renverrons alors à la construction explicite que nous donnons ci-après [1]). Fixons un entier $k \geq 0$ et supposons qu'il existe un développement de la forme

$$Z = \varpi_F{}^m \pi\left(\sum_{i=0}^{k} \varpi_F{}^i X_i, \sum_{i=0}^{k} \varpi_F{}^i P_i\right) + Y_k, \ (X_i, P_i) \in \mathcal{G}^0 \times (\mathfrak{p} \cap \mathcal{G}^{k_1}), \ Y_k \in \mathcal{G}^{(k+m+1)e+k_1}.$$

Pour $k=0$, c'est exactement la surjectivité de l'application $\pi_m / \mathcal{G}^{(m+1)e+k_1}$. On passe au cran $k+1$ grâce aux relations (R_{m+k+1}) ci-dessus et il est clair que le développement construit de cette manière converge vers l'élément Z.

D'où la surjectivité de π_m.

□

Lemme 2.2.3. — *Pour tout entier* $m \geq 1 + k_1/e$,
(1) *L'application ζ induit par restriction une application surjective*

$$\zeta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \to y(1 + \varpi_F{}^m \Lambda), \ (x, p) \mapsto \mathrm{Ad}x^{-1}(y)p$$

(2) *Il existe un système de coordonnées*

$$\beta_m : H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{me} \times (\mathfrak{p} \cap \mathcal{G}^{me+k_1})$$

tel que, notant $\lambda_m : y(1+\varpi_F{}^m\Lambda) \to \varpi_F{}^m\Lambda$ *l'application* $g \mapsto \lambda_m(g) = y^{-1}g - 1$, *le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^{me} \times (P \cap H^{me+k_1}) & \xrightarrow{\zeta_m} & y(1+\varpi_F{}^m\Lambda) \\ \downarrow \beta_m & & \downarrow \lambda_m \\ \mathcal{G}^{me} \times (\mathfrak{p} \cap \mathcal{G}^{me+k_1}) & \xrightarrow{\pi_m} & \varpi_F{}^m\Lambda \end{array}$$

Démonstration.

(1) Soit m un entier $\geq 1 + k_1/e$.
Notant $x = 1 + X$ et $p = 1 + P$, l'application ζ_m s'écrit

$$\zeta_m(x, p) = y(1 + \pi_m(X, P) + \eta_m(X, P)).$$

avec

$$\eta_m(X, P) = XP - (y^{-1}Xy)(X + P + XP) + \left(\sum_{i \geq 2} y^{-1} X^i y\right)(1 + X)(1 + P).$$

La relation d'inclusion

[1] On aurait pu aussi, mais nous n'en n'avons pas eu le temps, établir au préalable un résultat plus général sur les modules filtrés.

$$\eta_m(X,P)\subset \mathcal{G}^{2me}\subset \varpi_F{}^m\mathcal{G}^{e+k_1}\subset \varpi_F{}^{m+1}\Lambda \text{ pour tout } (X,P)\in\mathcal{G}^m\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{m+k_1}),$$

jointe à la surjectivité (pour chaque entier $d\geq m$) des applications π_d du lemme 3.2.2, permettent pour chaque élément $z\in y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)$, de construire par approximations successives (cf. la fin de la démonstration du lemme 2.2.2) un développement hensélien de la forme

$$(x,p)=\left(1+\sum_{i\geq 0}\varpi_F{}^i X_i\,,1+\sum_{i\geq 0}\varpi_F{}^i P_i\right),\ (X_i,P_i)\in\mathcal{G}^{me}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}),\ i\geq 0,$$

tel que $\zeta_m(x,p)=z$.

(2) On déduit du lemme 2.2.2 que, pour chaque $m\in\mathbb{Z}$, l'application π induit par restriction et passage au quotient, un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F$-modules

$$\pi_m/\pi_{m+1}:(\mathcal{G}^{me}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}))/\varpi_F(\mathcal{G}^{me}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}))\to\varpi_F{}^m\Lambda/\varpi_F{}^{m+1}\Lambda.$$

Soit

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{G}^0\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{k_1})$$

un sous-$\mathcal{O}_F$-module de $\mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{p}$ tel que l'espace quotient $\mathcal{A}/\varpi_F\mathcal{A}$ soit un supplémentaire du noyau de l'application π_0/π_1. On fixe arbitrairement une famille (finie) Σ de représentants dans $\mathcal{A}$ des classes de l'espace quotient $\mathcal{A}/\varpi_F\mathcal{A}$. Pour chaque $m\in\mathbb{Z}$ et chaque élément $Z\in\varpi_F{}^m\Lambda$, la surjectivité (pour tout entier $d\geq m$) des applications π_d/π_{d+1} ci-dessus, permet de construire par approximations successives (comme pour la fin de la démonstration du lemme 2.2.2) un developpement hensélien (unique) de la forme

$$(X_Z,P_Z)=\left(\sum_{i\geq m}\varpi_F{}^i X_i\,,\sum_{i\geq m}\varpi_F{}^i P_i\right)\in\mathcal{G}^{me}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}),\ (X_i,P_i)\in\Sigma,$$

tel que $\pi(X_Z,P_Z)=Z$. En effet, fixons un entier $k\geq 0$, et supposons qu'on a construit un développement de la forme

$$Z=\pi\left(\sum_{i=m}^{m+k}\varpi_F{}^i X_{Z,i}\,,\sum_{i=m}^{m+k}\varpi_F{}^i P_{Z,i}\right)+\varpi_F{}^{m+k+1}Z_k,\ (X_{Z,i},P_{Z,i})\in\Sigma,\ Z_k\in\Lambda.$$

(Pour $k=0$, c'est une simple conséquence de la définition de Σ). On passe au cran $k+1$ grâce à la F-linéarité de π et à la surjectivité de l'application π_{m+k+1}/π_{m+k+2}. On pose finalement

$$\begin{aligned}(X_Z,\dot{P}_Z)&=\left(\sum_{i\geq m}\varpi_F{}^i X_{Z,i}\,,\sum_{i\geq m}\varpi_F{}^i P_{Z,i}\right)\\&=\varpi_F{}^m\left(\sum_{i\geq 0}\varpi_F{}^i X_{Z,m+i}\,,\sum_{i\geq 0}\varpi_F{}^i P_{Z,m+i}\right).\end{aligned}$$

Il est clair, compte tenu de la définition de Σ, que l'élément (X_Z,P_Z) ainsi construit est unique; on le note $\mu_m(Z)$. Si maintenant Z est un quelconque élément de $\mathfrak{g}(F)$, alors $Z\in\varpi_F{}^m\Lambda$ pour un entier m suffisamment petit et l'on définit l'élément $\mu(Z)$ de $\mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{p}$ par $\mu(Z)=\mu_m(Z)$ (la définition de $\mu(Z)$ est clairement indépendante du choix de l'entier m tel que $Z\in\varpi_F{}^m\Lambda$). Vérifions que l'application μ ainsi définie est bien F-linéaire. Supposons par l'absurde qu'il existe un couple $(Z,Z')\in\mathfrak{g}(F)\times\mathfrak{g}(F)$ et un élément $\alpha\in F$ tels que $\mu(\alpha Z+Z')\neq\alpha\mu(Z)+(Z')$. Soit $d\in\mathbb{Z}$ l'unique entier tel que

$$\begin{cases}(\mu(\alpha Z+Z')-(\alpha\mu(Z)+\mu(Z')))\in(\mathcal{G}^{de}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{de+k_1}))\\(\mu(\alpha Z+Z')-(\alpha\mu(Z)+\mu(Z')))\notin\varpi_F(\mathcal{G}^{de}\times(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{de+k_1}))\end{cases}$$

Ainsi, l'élément $\mu(\alpha Z+Z')-\alpha\mu(Z)-\mu(Z')$ appartient à $\varpi_F{}^d\mathcal{A}-\varpi_F{}^{d+1}\mathcal{A}$ et, par homothétie par $\varpi_F{}^{-d}$, on obtient

$$\varpi_F{}^{-d}\left(\mu(\alpha Z+Z')-\alpha\mu(Z)-\mu(Z')\right)\in\left(\mathcal{A}-\varpi_F\mathcal{A}\right).$$

et par conséquent

$$\pi\left(\mu(\alpha Z+Z')-\alpha\mu(Z)-\mu(Z')\right)=\varpi_F{}^{d}\,\pi_0\left(\varpi_F{}^{-d}\left(\mu(\alpha Z+Z')-\alpha\mu(Z)-\mu(Z')\right)\right)\neq 0.$$

D'où la contradiction.

En définitive, on a construit une section linéaire

$$\mu:\mathfrak{g}(\mathrm{F})\to\mathfrak{g}(\mathrm{F})\times\mathfrak{p},\ \ Z\mapsto\left(X_Z,P_Z\right)$$

de l'application linéaire tangente π à ζ au point $(1,1)$ qui vérifie la relation

$$\mu\left(\varpi_F{}^{m}\Lambda\right)=\varpi_F{}^{m}\mu(\Lambda)\subset\mathcal{G}^{me}\times\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right)$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$.

Si m est un entier $\geq 1+k_1/e$, on définit l'application β_m par

$$\beta_m(1+X,1+P)=(X,P)+\mu\left(\eta_m(X,P)\right),\ \left(X,P\right)\in\mathcal{G}^{me}\times\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right).$$

Alors, on a bien

$$\begin{aligned}\pi_m\circ\beta_m(1+X,1+P)\ &=\pi_m(X,P)+\pi\circ\mu\left(\eta_m(X,P)\right)\\ &=\pi_m(X,P)+\eta_m(X,P)\\ &=\lambda_m\left(y\left(1+\pi_m(X,P)+\eta_m(X,P)\right)\right)\\ &=\lambda_m\circ\zeta_m(X,P)\end{aligned}$$

pour tout couple $\left(X,P\right)\in\mathcal{G}^{me}\times\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right)$, la relation

$$\begin{aligned}\left(X,P\right)\in\mathrm{H}^{de}\times\left(\mathrm{P}\cap\mathrm{H}^{de+k_1}\right)\ &\Rightarrow\ \eta_m(X,P)\in\varpi_F{}^{d+1}\Lambda\\ &\Rightarrow\ \mu\left(\eta_m(X,P)\right)\in\mathcal{G}^{(d+1)e}\times\left(\mathfrak{p}\cap\mathcal{G}^{(d+1)e+k_1}\right)\end{aligned}$$

pour tout $d\geq m$ assurant la bijectivité de l'application β_m.

□

Corollaire 2.2.4. — *Pour tout entier* $m\geq 1+k_1/e$ *et tout couple* $(x',p')\in L^{\times}H\times P$,
(1) *L'application* ζ *induit par restriction une surjection*

$$\mathrm{H}^{me}x'\times\left(\mathrm{P}\cap\mathrm{H}^{me+k_1}\right)p'\to x'^{-1}y\left(1+\varpi_F{}^{m}\Lambda\right)x'p',\ \left(x,p\right)\mapsto \mathrm{Ad}x^{-1}(y)p.$$

(2) *Il existe un système de coordonnées*

$$\beta'_m:\mathrm{H}^{me}x'\times\left(\mathrm{P}\cap\mathrm{H}^{me+k_1}\right)p'\xrightarrow{\sim}\mathcal{G}^{me}\times\left(\mathrm{Ad}x'(\mathfrak{p})\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right)$$

tel que, notant λ'_m et π'_m *les applications*

$$\begin{aligned}\lambda'_m:\ \ x'^{-1}y\left(1+\varpi_F{}^{m}\Lambda\right)x'p'\ &\xrightarrow{\sim}\ \varpi_F{}^{m}\Lambda,\ g\mapsto y^{-1}x'gp'^{-1}x'^{-1}-1\\ \pi'_m:\mathcal{G}^{me}\times\left(\mathrm{Ad}x'(\mathfrak{p})\cap\mathcal{G}^{me+k_1}\right)\ &\longrightarrow\ \varpi_F{}^{m}\Lambda,\ (X,P')\mapsto X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)+P'\end{aligned}$$

on ait

$$\lambda'_m \circ \zeta|_{H^{me}x' \times (P \cap H^{me+k_1})p'} = \pi'_m \circ \beta'_m .$$

Démonstration.

Comme le groupe $L^\times H$ est précisément le normalisateur dans $\mathbf{G}(F)$ de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}^0$, c'est à dire l'ensemble des $g \in \mathbf{G}(F)$ tels que $\mathrm{Ad}g(\mathcal{G}^0) = \mathcal{G}^0$, on a l'égalité

$$x'(P \cap H^{m+k_1})p' = (\mathrm{Ad}x'(P) \cap H^{m+k_1})x'p'$$

pour tout $x' \in L^\times H$ et tout $p \in P$. Ainsi, reprenant la notation $\zeta = \zeta(P)$ introduite au début du numéro 2.2, on a la relation

$$\begin{aligned} \zeta(P)(xx', pp') &= x'^{-1}x^{-1}yxx'pp' \\ &= x'^{-1}\mathrm{Ad}x^{-1}(y)\mathrm{Ad}x'(p)x'p' \\ &= x'^{-1}\zeta(\mathrm{Ad}x'(P))(y, \mathrm{Ad}x'(p))x'p' \end{aligned}$$

pour tout couple $(x,p) \in H \times P$. Le sous-groupe parabolique P de G fixé au début du numéro 2.2 n'étant sujet à aucune condition particulière, on peut le remplacer par $\mathrm{Ad}x'(P)$, et le corollaire 2.2.4 découle alors directement du lemme 2.2.3 appliqué à $\mathrm{Ad}x'(P)$.

□

2.3. Principe de submersion d'Harish-Chandra et "calcul" des intégrales orbitales elliptiques.

Soit $dg = dg_F$ la mesure de Haar sur $\mathbf{G}(F)$ définie au numéro 1.3 et dk sa restriction au sous-groupe ouvert compact maximal K_F de $\mathbf{G}(F)$. Soit dg_y la mesure de Haar sur le centralisateur $\mathbf{G}(F)_y = L^\times$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ telle que $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_L^\times, dg_y) = 1$ et soit $dz = dz_F$ la mesure de Haar sur $F^\times$ (identifié au centre de $\mathbf{G}(F)$) telle que $\mathrm{vol}(F^\times \backslash L^\times, dz \backslash dg_y) = 1$.

Pour chaque fonction $f \in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$, on définit l'intégrale orbitale normalisée (cf. le chapitre 3, définition 3.3.1)

$$I^{G(F)}(f,y) = \int_{G(F)_y \backslash G(F)} f(g^{-1}yg)\,dg_y \backslash dg = \int_{F^\times \backslash G(F)} f(g^{-1}yg)\,dz \backslash dg .$$

Soient $P_1 = \mathbf{P}_1(F)$, $A_1 = \mathbf{A}_1(F)$ et $U_1 \subset \mathbf{G}(F)$ le radical unipotent de P_1. Soient da et du les mesures de Haar sur A et U respectivement telles que

$$\mathrm{vol}(A_1 \cap K_F, da) = \mathrm{vol}(U_1 \cap K_F, du) = 1.$$

Comme le sous-groupe K_F est en bonne position par rapport à la paire parabolique (P_1, A_1) (cf. le numéro 1.2) $dp = dadu$ est la mesure de Haar à gauche sur P_1 telle que

$$\mathrm{vol}(P_1 \cap K_F, dp) = 1.$$

On fixe un entier $n \geq 1$ et l'on s'intéresse aux intégrales orbitales

$$I^{G(F)}(f,y),\ f \in C_c(\mathbf{G}(F), K_F{}^n).$$

L'énoncé suivant est montré par Harish-Chandra pour n'importe quel élément $y \in \mathbf{G}(F)$ semi-simple régulier séparable dans $\mathbf{G}(F)$, mais reste vrai pour y elliptique inséparable.

Proposition 2.3.1. ([Hari 4] theorem 3) — *Il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de* y *dans* $\mathbf{G}(F)$ *tel que*

$$I^{G(F)}(f,x)=I^{G(F)}(f,y)$$

pour tout élément $x\in\mathcal{V}$ *et toute fonction* $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F^n)$.

□

La démonstration d'Harish-Chandra est basée sur la submersion $\zeta(P)$ introduite au numéro 2.2. On en reprend ci-dessous le schéma, en insistant sur les arguments que nous réutiliserons par la suite, sous une forme parfois légèrement modifiée.

Soit $A_1{}^+\subset A_1$ l'ensemble des éléments diagonaux de la forme

$$\mathrm{diag}(z_1,\dots,z_N),\ |z_i|_F\geq|z_{i+1}|_F,\ 1\leq i\leq N-1.$$

La décomposition de Cartan nous dit qu'il existe une bijection entre

(1) Les doubles classes $F^\times K_F\backslash\mathbf{G}(F)/K_F$ de $\mathbf{G}(F)$.

(2) l'espace quotient $F^\times\mathbf{A}_1(\mathcal{O}_F)\backslash A_1{}^+$.

Ainsi l'ensemble $\Delta(\varpi_F)\subset A_1$ des éléments diagonaux de la forme

$$\mathrm{diag}(1,\varpi_F{}^{\alpha_2},\varpi_F{}^{\alpha_3},\dots,\varpi_F{}^{\alpha_N}),\ 0\leq\alpha_2\leq\alpha_3\leq\dots\leq\alpha_N,$$

forme un système de représentants dans $A_1{}^+$ des doubles classes $F^\times K_F gK_F$ de $\mathbf{G}(F)$. Toute l'astuce de la méthode utilisée par Harish-Chandra pour "calculer" les intégrales orbitales elliptiques tient dans la simple constatation suivante: si δ est un élément de $\Delta(\varpi_F)$, alors la restriction de l'application $\mathrm{Ad}\delta^{-1}$ à P_1 laisse invariants les élément de A_1 et contracte le radical unipotent U_1. D'où l'on déduit que pour tout élément δ de $\Delta(\varpi_F)$, $\mathrm{Ad}\delta^{-1}(P_1\cap K_F{}^n)\subset K_F{}^n$.

Comme l'application

$$\zeta=\zeta(P_1):\mathbf{G}(F)\times P_1\to\mathbf{G}(F),\ (g,p)\mapsto g^{-1}ygp$$

est partout submersive ([Hari 4] theorem 1), il existe une et une seule application linéaire ([Hari 1] theorem 11)

$$C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F)\times P_1)\to C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F)),\ a\mapsto\alpha_{y,a},$$

telle que

$$\iint_{G(F)\times P_1}a(g,p)F(g^{-1}ygp)dgdp=\int_{G(F)}\alpha_{y,a}(g)F(g)dg$$

pour toute fonction $a\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F)\times P_1)$ et toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$.

Soit b la fonction caractéristique du sous-groupe ouvert compact $K_F\times(P_1\cap K_F{}^n)$ de $\mathbf{G}(F)\times P_1$ et soit $\alpha=\alpha_{y,b}$. Pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$, on note $f_0\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$ la fonction définie par

$$f_0(x)=\int_{K_F}f(\mathrm{Ad}k(x))dk\ \ (x\in\mathbf{G}(F)).$$

Alors,

Proposition 2.3.2. — *Pour toute fonction* $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F^n)$,

$$I^{G(F)}(f,y)=\sum_{\delta\in\Delta(\varpi_F)}\frac{\mathrm{vol}(F^\times K_F\delta K_F,dz\backslash dg)}{\mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)}\int_{K_F}\alpha(k)\mathrm{Ad}^*\delta(f_0)(k)dk$$

où (rappel) $\mathrm{Ad}^*\delta(f_0)(k)=f_0(\mathrm{Ad}\delta^{-1}(k))$ *pour tout* $k\in K_F$.

Démonstration ([Hari 4] theorem 3).

La relation $\mathrm{Ad}\delta^{-1}(p)\in K_F{}^n$ pour tout $\delta\in\Delta(\varpi_F)$ et tout $p\in P_1\cap K_F{}^n$ entraîne

$$\begin{aligned}\int_{K_F}\Phi(\delta^{-1}k^{-1}yk\delta)dk &= \mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)^{-1}\iint_{K_F\times(P\cap K_F{}^n)}\Phi(\delta^{-1}k^{-1}ykp\delta)dkdp\\ &= \mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)^{-1}\int_{G(F)}\alpha(g)\mathrm{Ad}^*\delta(\Phi)(g)dg\end{aligned}$$

pour toute fonction $\Phi\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Comme le groupe $K_F{}^n$ est un sous-groupe distingué de K_F, $f_0\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$ pour toute fonction $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Enfin,

$$\begin{aligned}I^{G(F)}(\Phi,y) &= \int_{F^\times\backslash G(F)}\Phi(g^{-1}yg)dz\backslash dg\\ &= \sum_{\delta\in\Delta(\varpi_F)}\mathrm{vol}(F^\times K_F\delta K_F,dz\backslash dg)\int_{K_F}\Phi_0(\delta^{-1}k^{-1}yk\delta)dk\end{aligned}$$

pour toute fonction $\Phi\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$.

D'où la proposition 2.3.2.

□

Harish-Chandra ayant au préalable montré, grâce à une utilisation intensive de son principe de submersion ([Hari 4] lemma 1), que l'application

$$y\mapsto\alpha_{y,b}$$

est constante au voisinage de y dans $\mathbf{G}(F)$, la proposition 2.3.1 est montrée.

La formule d'intégration de la proposition 2.3.2, si elle permet à Harish-Chandra de conclure à l'existence d'un voisinage $\mathcal{V}$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ tel que les intégrales orbitales des fonctions de l'espace $C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$ sont constantes sur $\mathcal{V}$ (proposition 2.3.1), ne donne en revanche aucune information sur ce voisinage. Rappelons (cf. l'introduction) que l'on souhaite obtenir un certain contrôle non seulement sur $\mathcal{V}$, mais aussi sur l'entier $r\geq n$ assurant, pour tout E corps local non archimédien r-proche de F et tout isomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$\xi:\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)\xrightarrow{\cong}\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E{}^n)$$

construit par la méthode de D. Kazhdan ([Kazh] theorem A et chapitre 1, prop. 2.1.1), l'égalité entre intégrales orbitales normalisées

$$I^{G(F)}(f,y)=I^{G(E)}(\xi(f),x')$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$ et tout élément $x'\in\mathcal{V}'$ où $\mathcal{V}'$ est une partie ouverte (dépendant de $\mathcal{V}$ et ξ) contenue dans l'ouvert elliptique de $\mathbf{G}(E)$.

L'idée qui vient naturellement à l'esprit est d'expliciter l'application

$$y\mapsto\alpha_{y,b}$$

en la "cassant" en une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques d'ouverts compacts de $\mathbf{G}(F)$, et de montrer ainsi qu'elle ne dépend effectivement que d'un certain quotient $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^k$ ($k\gg 1$) de l'anneau des entiers de F.

En fait, on ne va pas travailler directement avec α puisqu'on va utiliser une décomposition du groupe $\mathbf{G}(F)$ intermédiaire entre la décomposition de Cartan et la décomposition de Bruhat-Tits, et respectant mieux les constructions du numéro 2.2.

On note $B_F \subset K_F$ le sous-groupe d'Iwahori de $\mathbf{G}(F)$ formé par les matrices triangulaires supérieures modulo $\mathcal{P}_F$. Quitte à conjuguer y dans $\mathbf{G}(F)$, on peut supposer (cf. la remarque 2.2.1) que le groupe $H=H(y)$ vérifie la double inclusion

$$B_F \subset H \subset K_F.$$

Lemme 2.3.3. — *Il existe une famille de représentants des doubles classes* $F^\times H\backslash \mathbf{G}(F)/K_F$ *de* $\mathbf{G}(F)$ *contenue dans* $S_N \Delta(\varpi_F)=\{s\delta,\ s\in S_N,\ \delta\in\Delta(\varpi_F)\}$.

Démonstration.

D'après le n° 1.3 du chapitre 1, on a une bijection entre
(1) Les doubles classes $F^\times B_F\backslash \mathbf{G}(F)/B_F$ de $\mathbf{G}(F)$.
(2) le groupe $S_N \ltimes (F^\times \mathbf{A}_1(\mathcal{O}_F)\backslash A_1)$ (produit semi-direct).

Soit $F^\times HgK_F$ une double classe. Comme $B_F\subset H\subset K_F$, il existe un couple $(s,a)\in S_N\times A_1$ tel que l'on ait $F^\times HgK_F=F^\times HsaK_F$. Soit $s'\in S_N$ tel que $a'=\mathrm{Ad}s'^{-1}(a)\in A_1^+$. Alors, l'inclusion $S_N\subset K_F$ entraîne l'égalité $F^\times HgK_F=F^\times Hss'a'K_F$. On conclut en remarquant que $F^\times A_1^+K_F=F^\times\Delta(\varpi_F)K_F$.

□

On fixe (arbitrairement) une partie $\Sigma\subset S_N\ \Delta(\varpi_F)$ telle que le groupe $\mathbf{G}(F)$ soit union disjointe des doubles classes $F^\times HgK_F$, g parcourant les éléments de Σ. Pour chaque élément s de S_N, on note $\Delta_s(\varpi_F)\subset \Delta(\varpi_F)$ la partie formée des éléments $\delta\in\Delta(\varpi_F)$ tels que $s\delta\in\Sigma$. Ainsi, on a la décomposition

$$\mathbf{G}(F)=\coprod_{g\in\Sigma} F^\times HgK_F=\coprod_{s\in S_N}\ \coprod_{\delta\in\Delta_s(\varpi_F)} F^\times Hs\delta K_F.$$

Pour chaque élément s de S_N, on note $\alpha_{(s)}\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$ l'unique fonction telle que

$$\iint_{H\times(P_1\cap K_F{}^n)} F(g^{-1}ygsps^{-1})dgdp=\int_{G(F)}\alpha_{(s)}(g)F(g)dg$$

pour toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$, construite grâce au theorem 11 de [Hari 1] appliqué à l'application partout submersive ([Hari 4] theorem 1)

$$\mathbf{G}(F)\times P_1\to\mathbf{G}(F),\ (g,p)\mapsto g^{-1}ygsps^{-1}.$$

Comme on l'a fait pour K_F, on note dh la restriction de la mesure de Haar $dg=dg_F$ au groupe H.

On a alors la variante suivante de la proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.4. — *Pour toute fonction* $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$,

$$I^{G(F)}(f,y)=\sum_{s\in S_N}\ \sum_{\delta\in\Delta_s(\varpi_F)}\frac{\mathrm{vol}(F^\times H\delta K_F,dz\backslash dg)}{\mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)\mathrm{vol}(H,dg)}\int_{G(F)}\alpha_{(s)}(g)\mathrm{Ad}^*s\delta(f_0)(g)dg.$$

Démonstration.

Elle est pratiquement identique à la démonstration de la proposition 2.3.2.

Comme $\mathrm{Ad}\delta^{-1}(p)\in K_F{}^n$ pour tout $\delta\in\Delta(\varpi_F)$ et tout $p\in P_1\cap K_F{}^n$, on a

$$\begin{aligned}\int_H \Phi(\delta^{-1}s^{-1}h^{-1}yhs\delta)dh &= \mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)^{-1}\iint_{H\times(P_1\cap K_F{}^n)}\Phi(\delta^{-1}s^{-1}h^{-1}yhs\delta(\delta^{-1}p\delta))\,dhdp\\ &= \mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)^{-1}\iint_{H\times(P_1\cap K_F{}^n)}\Phi(\delta^{-1}s^{-1}h^{-1}yh(sps^{-1})s\delta)\,dhdp\\ &= \mathrm{vol}(P_1\cap K_F{}^n,dp)^{-1}\int_{G(F)}\alpha_{(s)}(g)\mathrm{Ad}^*s\delta(\Phi)(g)\,dg\end{aligned}$$

pour tout élément $s\in\mathcal{S}_N$ et toute fonction $\Phi\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Comme le groupe $K_F{}^n$ est un sous-groupe distingué de K_F, $f_0\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$ pour toute fonction $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Enfin,

$$\begin{aligned}I^{G(F)}(\Phi,y) &= \int_{F^\times\backslash G(F)}\Phi(g^{-1}yg)dz\backslash dg\\ &= \sum_{s\in\mathcal{S}_N}\sum_{\delta\in\Delta_\bullet(\varpi_F)}\frac{\mathrm{vol}(F^\times H\delta K_F,dz\backslash dg)}{\mathrm{vol}(H,dg)}\int_H\Phi_0(\delta^{-1}s^{-1}h^{-1}yhs\delta)dh\end{aligned}$$

pour toute fonction $\Phi\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$.

D'où la proposition 2.3.4.

□

Pour chaque élément s de $\mathcal{S}_N$ on note $dp_{(s)}$ la mesure sur $P_{(s)}=\mathrm{Ads}(P_1)$, image de la mesure de Haar à gauche dp sur P_1 par l'homéomorphisme de variétés ϖ_F-adiques

$$P_1\xrightarrow{\cong}\mathrm{Ads}(P_1),\ p\mapsto\mathrm{Ads}(p).$$

Lemme 2.3.5. — *(Avec les notations du numéro 2.1) Soit* $m=m(y,n)$ *le plus petit entier* $\geq$ *au* $\sup\{1+k_1/e,n-k_1/e\}$ *et soit un élément* $s\in\mathcal{S}_N$. *Alors, pour toute fonction* $\Phi\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F)$,

$$\int_{G(F)}\alpha_{(s)}(g)\Phi(g)dg=d(y,s)\sum_{(i,j)}\int_{x_i^{-1}y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)x_ip_{(s),j}}\Phi(g)dg$$

avec

$$d(y,s)=\frac{\mathrm{vol}(H^{me},dg)\mathrm{vol}(P_{(s)}\cap H^{me+k_1},dp_{(s)})}{\mathrm{vol}(1+\varpi_F{}^m\Lambda,dg)},$$

les couples $(x_i,p_{(s),j})$ *parcourant un système de représentants dans* $H\times(P_{(s)}\cap K_F{}^n)$ *des classes de*

$$H^{me}\backslash H\times(P_{(s)}\cap H^{me+k_1})\backslash(P_{(s)}\cap K_F{}^n).$$

Démonstration.

La condition $m\geq n-k_1/e$ entraîne l'inclusion

$$H^{me+k_1}\subset K_F{}^n.$$

Par construction de l'application $\alpha_{(s)}$, on a

$$\int_{G(F)} \alpha_{(s)}(g)\Phi(g)dg = \iint_{H\times(P_1\cap K_F{}^n)} \Phi(h^{-1}yhsps^{-1})dhdp$$
$$= \iint_{H\times(P_{(s)}\cap K_F{}^n)} \Phi(h^{-1}yhp_{(s)})dhdp_{(s)}$$
$$= \sum_{(i,j)} \iint_{H^{me}x_i\times(P_{(s)}\cap H^{me+k_1})p_{(s),j}} \Phi(h^{-1}yhp_{(s)})dhdp_{(s)}$$

les couples $(x_i, p_{(s),j})$ parcourant un système de représentants dans $H\times(P_{(s)}\cap K_F{}^n)$ des classes de

$$H^{me}\backslash H\times(P_{(s)}\cap H^{me+k_1})\backslash(P_{(s)}\cap K_F{}^n).$$

On conclut en appliquant le corollaire 2.2.4 au sous-groupe parabolique $P=P_{(s)}$ de **G**(F) pour chaque couple $(x_i, p_{(s),j})$. En effet, avec la notation $\mathfrak{p}_{(s)}=\mathrm{Lie}(P_{(s)})$, il existe un système de coordonnées

$$\beta_{m,i,j}: H^{me}x_i\times(P_{(s)}\cap H^{me+k_1})p_{(s),j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}^{me}\times(\mathrm{Ad}x_i(\mathfrak{p}_{(s)})\cap\mathcal{G}^{me+k_1})$$

et un système de coordonnées

$$\lambda_{m,i,j}: x_i^{-1}y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)x_ip_{(s),j} \xrightarrow{\cong} \varpi_F{}^m\Lambda$$

tels que

$$\lambda_{m,i,j}\circ\zeta(P_{(s)})\Big|_{H^{me}x_i\times(P_{(s)}\cap H^{me+k_1})p_{(s),j}}\circ\beta_{m,i,j}{}^{-1} = \pi(P_{(s)})_{m,i}$$

où $\pi(P_{(s)})_i$ est la restriction de l'application linéaire tangente à $\zeta(P_{(s)})$ au point (1,1) définie par

$$\pi(P_{(s)})_{m,i}: \mathcal{G}^{me}\times(\mathrm{Ad}x_i(\mathfrak{p}_{(s)})\cap\mathcal{G}^{me+k_1})\to\varpi_F{}^m\Lambda,\ \ (X,P)\mapsto X-\mathrm{Ad}y^{-1}(X)+P.$$

□

Grâce à cette forme explicite donnée aux applications $\alpha_{(s)}$, on est à présent en mesure d'estimer le voisinage y dans **G**(F) sur lequel les intégrales orbitales

$$y'\mapsto I^{G(F)}(f,y')$$

des fonctions f de l'espace $C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$ sont des fonctions constantes.

Proposition 2.3.6. — *(Avec les notations du numéro 2.2) Soit* $\mathcal{V}=\mathcal{V}(y,n)$ *le voisinage de y dans* **G**(F) *défini par*

$$\mathcal{V}=y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)$$

où l'entier $m=m(y,n)$ *est défini dans l'énoncé du lemme 2.3.5. Alors*

(1) $v\in\mathcal{V}\Rightarrow v$ *est un élément elliptique de* **G**(F).

(2) $I^{G(F)}(f,v)= I^{G(F)}(f,y)$ *pour tout élément* $v\in\mathcal{V}$ *et toute fonction* $f\in C_c(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Démonstration.

(1) La strate $[\mathcal{G},-\nu_{\mathcal{G}}(y),-(1+k_0),y]$ de $\mathfrak{g}$(F) est une strate simple ([Bu-Ku] def. (1.5.5)) et on a la formule de **G**(F)-entrelacement ([Bu-Ku] theorem (1.5.8))

$$\{g\in\mathbf{G}(F),\ \mathrm{Ad}g^{-1}(y+\mathcal{G}^{1+k_0})\cap(y+\mathcal{G}^{1+k_0})\neq\varnothing\}=L^\times(1+\varpi_L\mathcal{N}).$$

A fortiori,

$$\begin{aligned} X\in \mathcal{G}^{1+k_0} &\Rightarrow \mathbf{G}(F)_{y+X}\subset L^{\times}\left(1+\varpi_L\mathcal{N}\right)\\ &\Rightarrow \mathbf{G}(F)_{y+X} \text{ est compact modulo } F^{\times}. \end{aligned}$$

Un élément $v\in\mathbf{G}(F)$ a un centralisateur $\mathbf{G}(F)_v$ dans $\mathbf{G}(F)$ compact modulo $F^{\times}$ si et seulement s'il est elliptique dans $\mathbf{G}(F)$. Ainsi, tout élément $v\in yH^{1+k_1}$ est elliptique dans $\mathbf{G}(F)$ et la relation

$$1+\varpi_F{}^{m}\Lambda\subset 1+\mathcal{G}^{me}\subset H^{e+k_1}\subset H^{1+k_1}$$

entraînant l'inclusion $\mathcal{V}\subset yH^{1+k_1}$, le point (1) de la proposition 2.3.6 est vérifié.

(2) Le voisinage yH^{1+k_1} de y dans $\mathbf{G}(F)$ étant contenu dans $y+\mathcal{G}$, $F[v]^{\times}$ normalise $\mathcal{G}$ pour tout élément $v\in yH^{1+k_1}$. Par conséquent, pour tout élément $v\in yH^{1+k_1}$, $\mathcal{G}$ est l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire associé à v.

La relation

$$v\in yH^{1+k_1} \text{ et } X\in\mathcal{G} \;\Rightarrow\; Xv-vX\in Xy-yX+\mathcal{G}^{1+k_0}$$

entraîne l'égalité $\mathcal{N}_k(v,\mathcal{G})=\mathcal{N}_k(y,\mathcal{G})$ pour tout élément $v\in yH^{1+k_1}$ et tout entier $k\leq 1+k_0$.

La relation

$$v\in yH^{1+k_1} \;\Rightarrow\; \mathcal{O}_{F[v]}\subset\mathcal{O}_L\left(1+\varpi_L\mathcal{N}_{k_0}(y,\mathcal{G})\right)\subset\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1$$

entraîne l'égalité $k_0(v,\mathcal{G})=k_0(v,\mathcal{G})=k_0$ pour tout élément $v\in yH^{1+k_1}$.

D'où l'on déduit

$$\mathcal{N}_{k_0}(v,\mathcal{G})=\mathcal{N}_{k_0}(y,\mathcal{G})=\mathcal{N}$$

pour tout élément $v\in yH^{1+k_1}$.

Si $v\in yH^{1+k_1}$, les strates $[\mathcal{G},-v_{\mathcal{G}}(y),-(1+k_0),y]$ et $[\mathcal{G},-v_{\mathcal{G}}(y),-(1+k_0),v]$ sont simples et équivalentes dans $\mathfrak{g}(F)$, ce qui entraîne l'égalité ([Bu-Ku] prop. (2.3.1)) $\varpi_{F[v]}{}^{\alpha}\mathcal{N}=\varpi_L{}^{\alpha}\mathcal{N}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}$ et toute uniformisante $\varpi_{F[v]}$ de $F[v]$. Par conséquent

$$v\in yH^{1+k_1} \;\Rightarrow\; \Lambda(v)=\Lambda(y).$$

Ainsi, les trois objets canoniquement associés à y et apparaissant dans les formules d'intégration de la proposition 2.3.4 et du lemme 2.3.5, à savoir le groupe multiplicatif H de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire principal $\mathcal{G}$ de $\mathfrak{g}(F)$, l'exposant $k_1=k_0(y,\mathcal{G})-v_{\mathcal{G}}(y)$ et l'$\mathcal{O}_F$-réseau Λ de $\mathfrak{g}(F)$, ne dépendent pas vraiment de y mais seulement de la strate $[\mathcal{G},-v_{\mathcal{G}}(y),-(1+k_0),y]$. Comme $(1+\varpi_F{}^{m}\Lambda)^2\subset 1+\varpi_F{}^{m}\Lambda$,

$$v\left(1+\varpi_F{}^{m}\Lambda\right)=y\left(1+\varpi_F{}^{m}\Lambda\right)$$

pour tout élément $v\in\mathcal{V}$ et le point (2) de la proposition 2.3.6 est montré.

□

2.4. Conclusion.

On a fixé un corps local non archimédien F, un entier $n\geq 1$ et un élément elliptique y de $\mathbf{G}(F)$. On a construit un $\mathcal{O}_F$-réseau $\Lambda(y)$ de $\mathfrak{g}(F)$ et un voisinage ouvert compact $\mathcal{V}(y,n)$ de y dans $\mathbf{G}(F)$ tels que les intégrales orbitales normalisées

$$v\mapsto I^{G(F)}(f,v)$$

des fonctions f de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^{n})$ sont constantes sur l'ouvert $\mathcal{V}(y,n)$ et s'expriment explicitement en terme du réseau $\Lambda(y)$.

Il s'agit maintenant de déterminer dans quelle mesure cette construction dépend du corps de base F avec lequel on a travaillé. On conserve les notations et les hypothèses des numéros précédents, en particulier l'élément y est toujours supposé satisfaire la double inclusion

$$B_F \subset H = H(y) \subset K_F.$$

Rappelons brièvement les constructions et conclusions du chapitre 1, n° 2.1.

Jusqu'à la fin du numéro 2.4, r désigne un entier ≥ 1.

Pour chaque suite $(\alpha)=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)\in\mathbb{Z}^N$, soit $\varpi_F^{(\alpha)}$ l'élément de $\mathbf{A}_1(F)$ défini par

$$\varpi_F^{(\alpha)} = \mathrm{diag}\left(\varpi_F^{\alpha_1},\ldots,\varpi_F^{\alpha_N}\right).$$

Soit $D(\varpi_F)$ le sous-groupe de $\mathbf{A}_1(F)$ formé par les $\varpi_F^{(\alpha)}$ ($(\alpha)\in\mathbb{Z}^N$) et $W^*(\varpi_F)=\mathcal{S}_N\ltimes D(\varpi_F)$ le groupe de Weyl généralisé de $\mathbf{G}(F)$ défini par ϖ_F (cf. le chapitre 1, n° 1.3).

Le groupe d'Iwahori supérieur B_F introduit au numéro 2.3 est le groupe multiplicatif $\mathcal{B}^\times$ de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{g}(F)$ formé par les matrices de K_F triangulaires supérieures modulo $\mathcal{P}_F$. Soit $B_F^r=1+\varpi_F^r\mathcal{B}$, le sous-groupe de congruence de niveau r de B_F. C'est un sous-groupe distingué de B_F.

Pour chaque $w\in W^*(\varpi_F)$, l'ensemble des doubles classes $B_F^r g B_F^r$ contenues dans $B_F wB_F$ est un espace homogène sous le groupe fini $(B_F/B_F^r)\times(B/B_F^r)$ pour l'action

$$\left(b_1B_F^r, b_2B_F^r\right):\ B_F^r g B_F^r \mapsto b_1\left(B_F^r g B_F^r\right)b_2^{-1} = B_F^r\left(b_1 g b_2^{-1}\right)B_F^r.$$

Soit $S_F^r(w)\subset(B_F/B_F^r)\times(B/B_F^r)$ le stabilisateur de la double classe $B_F^r wB_F^r$.

Soit E un corps local r-proche de F et soit un triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_E)$ où

$$\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F^r \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E^r$$

est un isomorphisme d'anneaux et ϖ_F (resp. ϖ_E) une uniformisante de F (resp. E) satisfaisant l'égalité $\lambda(\varpi_F+\mathcal{P}_F^r)=\varpi_E+\mathcal{P}_E^r$.

Soient

$$\beta=\beta\left(\lambda,\varpi_F,\varpi_E\right): B_F/B_F^r \xrightarrow{\cong} B_E/B_E^r.$$

l'isomorphisme de groupes induit par le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_E)$ et

$$\gamma : W^*\left(\varpi_F\right) \longrightarrow W^*\left(\varpi_E\right)$$

l'isomorphisme de groupes défini par $\gamma(s\varpi_F^{(\alpha)})=s\varpi_E^{(\alpha)}$ pour tout $s\in\mathcal{S}_N$ et tout $(\alpha)\in\mathbb{Z}^N$.

Grâce à la décomposition de Bruhat-Tits pour $\mathbf{G}(F)$ et $\mathbf{G}(E)$

$$\mathbf{G}(F)=\coprod\nolimits_{W^*(\varpi_F)} B_F wB_F \quad\text{et}\quad \mathbf{G}(E)=\coprod\nolimits_{W^*(\varpi_E)} B_E w'B_E,$$

et à la relation $\beta\times\beta(S_F(w))=S_E(\gamma(w))$ ($w\in W^*(\varpi_F)$), on a une bijection

$$B_F^r b_1 w b_2 B_F^r \mapsto \beta\left(b_1B_F^r\right)\gamma(w)\beta\left(b_2B_F^r\right)\quad\left(\left(b_1,b_2\right)\in B_F\times B_F,\ w\in W^*\left(\varpi_F\right)\right)$$

entre les doubles classes $B_F^r\backslash\mathbf{G}(F)/B_F^r$ de $\mathbf{G}(F)$ et les doubles classes $B_E^r\backslash\mathbf{G}(E)/B_E^r$ de $\mathbf{G}(E)$. D'où un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\zeta=\zeta\left(\lambda,\varpi_F,\varpi_E\right): \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F),B_F^r\right) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(E),B_E^r\right),$$

lequel induit un isomorphisme d'algèbres (chapitre 1, prop. 2.1.1).

Si Z est une partie compacte $B_F{}^r$-biinvariante de $\mathbf{G}(F)$, on note (abusivement) $\zeta(Z)$ la partie compacte et $B_E{}^r$-biinvariante de $\mathbf{G}(E)$ définie par $1_{\zeta(Z)}=\zeta(1_Z)$. On étend naturellement cette notation à toute partie Z de $\mathbf{G}(F)$ union disjointe infinie de doubles classes $B_F{}^r g B_F{}^r$, $g\in\mathbf{G}(F)$.

Soit $H'=\zeta(H)$ et soit $\mathcal{G}'$ l'$\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire de $\mathfrak{g}(E)$ tel que $\mathcal{G}'^{\times}=H'$ (cf. le chapitre 1, prop. 2.2.1).

Le lemme suivant nous permettra de transporter la formule du lemme 2.3.5 de $\mathbf{G}(F)$ à $\mathbf{G}(E)$.

Lemme 2.4.1. — *Soient* k *un entier tel que* $1\leq k\leq r$, $w\in W'(\varpi_F)$ *et* $g\in\mathbf{G}(F)$. *Soit* g' *un élément de* $\mathbf{G}(E)$ *tel que* $\zeta(K_F{}^k g w^{-1} H^{re})=K_E{}^k g'\gamma(w)^{-1}H'^{re}$. *Alors*

$$\mathrm{vol}\left(hH^{re}\cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right), dg_F\right)=\mathrm{vol}\left(\zeta\left(hH^{re}\right)\cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k g'\right), dg_E\right)$$

pour tout élément $h\in N_{\mathbf{G}(F)}(\mathcal{G})=\{h\in\mathbf{G}(F),\ \mathrm{Ad}h(\mathcal{G})=\mathcal{G}\}$.

Démonstration.

L'hypothèse $B_F\subset H\subset K_F$ et la condition $1\leq k\leq r$ assurent que $H_F{}^{re}xK_F{}^k$ est, pour tout élément $x\in\mathbf{G}(F)$, une partie $B_F{}^r$-biinvariante (et même H^{re}-biinvariante) de $\mathbf{G}(F)$. Pour tout élément b de B_F et tout élément b' de B_E tel que $\beta(B_F b)=B_E b'$, on a l'égalité (chapitre 1, prop. 2.2.1)

$$\zeta\left(H^{re} b w^{-1} H^{re}\right)=H'^{re}\, b'\gamma(w)^{-1}H'^{re}.$$

Or $\beta(K_F{}^k)=K_E{}^k$ et $\beta(H^{re})=H'^{re}$, par conséquent quand b parcourt une famille de représentants dans $K_F{}^k$ des classes du groupe quotient $K_F{}^k/H^{re}$, b' parcourt une famille de représentants dans $K_E{}^k$ des classes du groupe quotient $K_E{}^k/H'^{re}$. D'où l'égalité

$$\zeta\left(K_F{}^k w^{-1}H^{re}\right)=K_E{}^k\gamma(w)^{-1}H'^{re}. \qquad (*)$$

Soit $h\in N_{\mathbf{G}(F)}(\mathcal{G})$ et soit $h'\in\zeta(hH^{re})$. L'égalité $\zeta(H^{re})=H'^{re}$ entraînant l'égalité $\zeta(hH^{re})=h'H'^{re}$, l'élément h' appartient au normalisateur $N_{\mathbf{G}(E)}(\mathcal{G}')=N_{\mathbf{G}(E)}(H'^{re})$ de $\mathcal{G}'$ dans $\mathbf{G}(E)$. Pour tout élément $b\in B_F\subset N_{\mathbf{G}(F)}(\mathcal{G})$, la relation

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\left(bH^{re}, dg_F\right)\mathrm{vol}\left(H^{re}gw^{-1}H^{re}, dg_F\right)\mathrm{vol}\left(hH^{re}\right)\\ =\mathrm{vol}\left(H^{re}, dg_F\right)^2\mathrm{vol}\left(H^{re}bgw^{-1}hH^{re}, dg_F\right)\end{aligned}$$

entraîne l'égalité (chapitre 1, prop. 1.2.1)

$$\zeta\left(H^{re}bgw^{-1}hH^{re}\right)=b'\zeta\left(H^{re}gw^{-1}H^{re}\right)h'$$

pour tout élément $b'\in B_E$ tel que $\beta(B_F b)=B_E b'$. En reprenant à l'identique l'argument utilisé plus haut, et grâce à l'hypothèse $\zeta(K_F{}^k g w^{-1}H^{re})=K_E{}^k g'\gamma(w)^{-1}H'^{re}$, on obtient

$$\zeta\left(K_F{}^k g w^{-1}hH^{re}\right)=K_E{}^k g'\gamma(w)^{-1}h'H'^{re}. \qquad (**)$$

Pour tout élément $h\in N_{\mathbf{G}(F)}(\mathcal{G})$, on déduit des égalités (*) et (**) ci-dessus la relation

$$\begin{aligned}\left(hH^{re}\cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right)\neq\varnothing\right) &\Leftrightarrow\left(w^{-1}H^{re}\cap K_F{}^k g w^{-1}h^{-1}\neq\varnothing\right)\\ &\Leftrightarrow\left(K_F{}^k w^{-1}H^{re}\cap K_F{}^k g w^{-1}h^{-1}K_F{}^k\neq\varnothing\right)\\ &\Leftrightarrow\left(\zeta\left(K_F{}^k w^{-1}H^{re}\right)\cap\zeta\left(K_F{}^k g w^{-1}h^{-1}H^{re}\right)\neq\varnothing\right)\\ &\Leftrightarrow\left(K_E{}^k\gamma(w)^{-1}H'^{re}\cap K_E{}^k g'\gamma(w)^{-1}h'^{-1}H'^{re}\neq\varnothing\right)\\ &\Leftrightarrow\left(h'H'^{re}\cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k g'\right)\neq\varnothing\right)\end{aligned}$$

pour tout élément $h' \in \zeta(hH^{re}) = (\zeta(h^{-1}H^{re}))^{-1}$. On distingue deux cas.

Ou bien $(hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w(K_F{}^k g)) = \varnothing$, auquel cas

$$\mathrm{vol}\left(hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right), dg_F\right) = \mathrm{vol}\left(h'H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k g'\right), dg_E\right) = 0$$

car $(h'H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)(K_E{}^k g')) = \varnothing$.

Ou bien il existe un élément $h_1 \in (hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w(K_F{}^k g))$, auquel cas

$$\begin{aligned} hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right) &= \left(H^{re} h_1 \mathrm{Ad}w\left(g^{-1}\right) \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k\right)\right)\mathrm{Ad}w(g) \\ &= \left(\left(H^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k\right)\right)h_1 \mathrm{Ad}w\left(g^{-1}\right)\right)\mathrm{Ad}w(g) \\ &= \left(H^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k\right)\right)h_1 \end{aligned}$$

car $h_1\,\mathrm{Ad}w(g^{-1}) \in \mathrm{Ad}w(K_F{}^k)$ et, comme il existe aussi un élément $h'_1 \in (h'H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)(K_E{}^k g'))$,

$$\begin{cases} \mathrm{vol}\left(hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right), dg_F\right) = \mathrm{vol}\left(H^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k\right), dg_F\right) \\ \mathrm{vol}\left(h'H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k g'\right), dg_E\right) = \mathrm{vol}\left(H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k\right), dg_E\right) \end{cases}.$$

Or, les formules explicites pour l'action par conjugaison du groupe de Weyl généralisé $W'(\varpi_F)$ sur $\mathfrak{g}(F)$ (cf. le chapitre 1, n° 1.3) entraînant l'égalité

$$\mathrm{vol}\left(H^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k\right), dg_F\right) = \mathrm{vol}\left(H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k\right), dg_E\right),$$

on obtient

$$\mathrm{vol}\left(hH^{re} \cap \mathrm{Ad}w\left(K_F{}^k g\right), dg_F\right) = \mathrm{vol}\left(h'\,H'^{re} \cap \mathrm{Ad}\gamma(w)\left(K_E{}^k g'\right), dg_E\right).$$

et le lemme 2.4.1 est complètement démontré.

□

Proposition 2.4.2 — *Soient* $r = r(y,n)$ *le plus petit entier* $\geq m + k_1/e$ *(où l'entier* $m = m(y,n)$ *est défini dans le lemme 2.3.5) et soit* E *un corps local non archimédien r-proche de* F. *Soit un triplet* $(\lambda, \varpi_F, \varpi_E)$ *où* $\lambda : \mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^r \to \mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E{}^r$ *est un isomorphisme d'anneaux et* ϖ_F *(resp.* ϖ_E*) une uniformisante de* F *(resp.* E*) satisfaisant l'égalité* $\lambda(\varpi_F + \mathcal{P}_F{}^r) = \varpi_E + \mathcal{P}_E{}^r$. *Soit*

$$\zeta = \zeta(\lambda, \varpi_F, \varpi_E) : \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), B_F{}^r) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(\mathbf{G}(E), B_E{}^r)$$

l'isomorphisme d'algèbres induit par le triplet $(\lambda, \varpi_F, \varpi_E)$ *(chapitre 1, prop. 2.1.1). Alors, tout élément* $y' \in \mathcal{V}' = \zeta(\mathcal{V})$ *(où* $\mathcal{V} = \mathcal{V}(y,n)$ *est le voisinage de* y *dans* $\mathbf{G}(F)$ *défini dans la proposition 2.3.6) est elliptique dans* $\mathbf{G}(E)$ *et satisfait l'égalité entre intégrales orbitales normalisées*

$$I^{G(F)}(f, y) = I^{G(E)}(\zeta(f), y')$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), K_F{}^n)$.

Démonstration.

La condition $r \geq m + k_1/e$ entraînant la relation

$$B_F{}^r \subset H^{re} \subset H^{me+k_1} \subset 1 + \varpi_F{}^m \Lambda,$$

la partie ouverte compacte $\mathcal{V} = y(1 + \varpi_F{}^m \Lambda)$ de $\mathbf{G}(F)$ est H^{me+k_1}-biinvariante et la définition de $\mathcal{V}'$ a un sens.

(i) Relèvement de la strate $\Omega=[\mathcal{G},-\nu,-(1+k_0),y]$ où $\nu=\nu_{\mathcal{G}}(y)$ et $k_0=k_0(y)$.

Le $\mathbf{G}(F)$-entrelacement de la strate Ω ([Bu-Ku] theorem (1.5.8)),

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega) &= \{g \in \mathbf{G}(F),\ g^{-1}(y+\mathcal{G}^{k_0})g \cap (y+\mathcal{G}^{k_0}) \neq \varnothing\} \\ &= L^{\times}(1+\mathcal{P}_L \mathcal{N}_{k_0}), \end{aligned}$$

est une partie H^{1+k_1}-biinvariante et compacte modulo $F^{\times}$ (car $L^{\times}/F^{\times}$ est compact) de $\mathbf{G}(F)$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega) &= \{g \in \mathbf{G}(F),\ (gyH^{1+k_1} \cap H^{1+k_1}yg) \neq \varnothing\} \\ &= \{H^{1+k_1}gH^{1+k_1} \in H^{1+k_1}\backslash \mathbf{G}(F)/H^{1+k_1},\ (H^{1+k_1}gyH^{1+k_1} \cap H^{1+k_1}ygH^{1+k_1}) \neq \varnothing\}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \zeta(J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega)) &= \{H'^{1+k_1}g'H'^{1+k_1} \in H'^{1+k_1}\backslash \mathbf{G}(E)/H'^{1+k_1},\ (H^{1+k_1}g'\zeta(yH^{1+k_1}) \cap \zeta(yH^{1+k_1})g'H'^{1+k_1}) \neq \varnothing\} \\ &= \{g' \in \mathbf{G}(E),\ (g'\zeta(yH^{1+k_1}) \cap \zeta(yH^{1+k_1})g') \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

car la partie $\zeta(yH^{1+k_1})$ est H'^{1+k_1}-biinvariante dans $\mathbf{G}(E)$ (cf. le chapitre 1, prop. 2.2.1). Par conséquent, $\zeta(J_{\mathbf{G}(E)}(\Omega))$ est une partie de $\mathbf{G}(E)$ compacte modulo $E^{\times}$ et qui contient le centralisateur dans $\mathbf{G}(E)$ de chaque élément de $\zeta(yH^{1+k_1})$. Donc tout élément de $\zeta(yH^{1+k_1})$ est elliptique dans $\mathbf{G}(E)$.

Soit un élément $y' \in \zeta(yH^{1+k_1})$ et soit $L'=E[y'] \subset \mathfrak{g}(E)$ l'extension de degré N de E engendrée par y'. De l'égalité $\zeta(H^k)=H^k$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq re$, on déduit la relation

$$\zeta(yH^{1+k_1}) = y'H^{1+k_1},$$

laquelle implique que y' appartient au normalisateur $N_{\mathbf{G}(E)}(\mathcal{G}')=N_{\mathbf{G}(E)}(H'^{1+k_1})$ de $\mathcal{G}'$ dans $\mathbf{G}(E)$. Ainsi $L'^{\times} \subset N_{\mathbf{G}(E)}(\mathcal{G}')$ et comme y' appartient à $(\mathcal{G}'^{\nu}-\mathcal{G}'^{\nu+1}) \cap \mathbf{G}(E)=\zeta((\mathcal{G}^{\nu}-\mathcal{G}^{\nu+1}) \cap \mathbf{G}(F))$,

$$\Omega'=[\mathcal{G}',-\nu,-(1+k_0),y']$$

est une strate pure de $\mathfrak{g}(E)$ ([Bu-Ku] Def. (1.5.5)). Il reste à vérifier que la strate Ω' est simple, et plus précisément que k_0 est l'exposant critique $k_0(y',\mathcal{G}')$ de y' pour $\mathcal{G}'$.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, soit $\mathcal{N}'_k=\mathcal{N}_k(y',\mathcal{G}')$ l'$\mathcal{O}_E$-ordre héréditaire de $\mathfrak{g}(E)$ défini par

$$\mathcal{N}'_k = \{g' \in \mathcal{G}',\ y'g'-g'y' \in \mathcal{G}'^k\}$$

et $k_0'=k_0(y',\mathcal{G}')=\max\{k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{N}'_k \not\subset \mathcal{O}_{L'}+\mathcal{G}'^1\}$ (cf. le numéro 2.1). Pour chaque entier $k \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{N}_k$ est un sous-$\mathcal{O}_F$-module de $\mathcal{G}$ qui contient $\mathcal{G}^{k-\nu}$ donc en particulier est invariant par translation par les éléments de $\mathcal{G}^{k-\nu}$. Par conséquent, si $k \leq 1+k_0$ la relation $1+k_1=1+k_0-\nu \geq k-\nu$ entraîne que la partie $\mathcal{N}_k \cap \mathbf{G}(F)$ de $\mathcal{G} \cap \mathbf{G}(F)$ est H^{1+k_1}-biinvariante. De la même manière, pour tout entier $k \leq 1+k_0$ la partie $\mathcal{N}'_k \cap \mathbf{G}(E)$ de $\mathcal{G}' \cap \mathbf{G}(E)$ est H'^{1+k_1}-biinvariante . Or, y normalisant le groupe H^{1+k_1} et y' normalisant le groupe H'^{1+k_1}, on a

$$\begin{cases} \zeta(y\,H^{1+k_1}gH^{1+k_1}) = y'\,\zeta(H^{1+k_1}gH^{1+k_1}) = y'\,H'^{1+k_1}g'\,H'^{1+k_1} \\ \zeta(H^{1+k_1}gH^{1+k_1}y) = \zeta(H^{1+k_1}gH^{1+k_1})y' = H'^{1+k_1}g'\,H'^{1+k_1}y' \end{cases}$$

pour tout $g \in \mathbf{G}(F)$ et tout $g' \in \zeta(H^{1+k_1}gH^{1+k_1})$. Par conséquent

$$\zeta(\mathcal{N}_k \cap \mathbf{G}(F)) = \mathcal{N}'_k \cap \mathbf{G}(E)$$

pour tout entier $k \leq 1+k_0$ et l'on est ramené à caractériser l'exposant critique $k_0=k_0(y,\mathcal{G})$ en terme de $\mathcal{N}_k \cap \mathbf{G}(F)$ ($k \in \mathbb{Z}$). Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on peut décomposer $\mathcal{N}_k$ en une union disjointe de deux ouverts compacts de $\mathcal{G}$

$$\mathcal{N}_k=\left(\mathcal{N}_k\cap\left(\mathcal{G}-\left(\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1\right)\right)\right)\amalg\left(\mathcal{N}_k\cap\left(\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1\right)\right).$$

Ainsi, ou bien $k\le k_0$ et $\mathcal{N}_k\cap(\mathcal{G}-(\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1)\neq\varnothing$, ou bien $k\ge k_0+1$ et $\mathcal{N}_k\subset\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1$. Par densité, on obtient la caractérisation suivante

$$\begin{aligned}k\ge k_0+1 &\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{N}_k\cap\mathbf{G}(F)\right)\subset\left(\left(\mathcal{O}_L+\mathcal{G}^1\right)\cap\mathbf{G}(F)\right)\right)\\ &\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{N}_k\cap\mathbf{G}(F)\right)\subset\left(\left(\mathcal{G}^1\cap\mathbf{G}(F)\right)\amalg\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1\right)\right).\end{aligned}$$

De la même manière

$$k\ge k_0'+1\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{N}'_k\cap\mathbf{G}(E)\right)\subset\left(\mathcal{G}'^1\cap\mathbf{G}(E)\right)\amalg\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}H'^1\right).$$

Comme

$$J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega)\cap H=\mathcal{O}_L{}^{\times}\left(1+\mathcal{P}_L\mathcal{N}_{k_0}\right)\subset\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1,$$

le groupe des unités $\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}$ de L' vérifie la relation d'inclusion

$$\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}=L'\cap H'\subset\zeta\left(J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega)\cap H\right)\subset\zeta\left(\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1\right).$$

Ainsi $\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}H'^1\subset\zeta(\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1)$ et donc $\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}H'^1=\zeta(\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1)$ car l'application $Z\mapsto\zeta(Z)$ conserve le volume (i.e. $([\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1:H^1]=q-1)\Rightarrow([\zeta(\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1):\zeta(H^1)]=q-1)$. On en déduit la relation

$$\begin{aligned}k\ge k_0 &\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{N}_k\cap\mathbf{G}(F)\right)\subset\left(\mathcal{G}^1\cap\mathbf{G}(F)\right)\amalg\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1\right)\\ &\Leftrightarrow\left(\zeta\left(\mathcal{N}_k\cap\mathbf{G}(F)\right)\subset\zeta\left(\mathcal{G}^1\cap\mathbf{G}(F)\right)\amalg\zeta\left(\mathcal{O}_L{}^{\times}H^1\right)\right)\\ &\Leftrightarrow\left(\left(\mathcal{N}'_k\cap\mathbf{G}(E)\right)\subset\left(\mathcal{G}'^1\cap\mathbf{G}(E)\right)\amalg\mathcal{O}_{L'}{}^{\times}H'^1\right)\\ &\Leftrightarrow k\ge k_0'.\end{aligned}$$

D'où l'égalité $k_0=k_0'$ et donc la simplicité de la strate Ω'.

(ii) Relèvement de l'$\mathcal{O}_F$-réseau $\Lambda=\Lambda(y)$ de $\mathfrak{g}(F)$.

Le triplet $(\lambda,\varpi_F,\varpi_E)$ induit un isomorphisme de l'anneau gradué $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}_F{}^k/\mathcal{P}_F{}^{k+r}$ sur l'anneau gradué $\oplus_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{P}_E{}^k/\mathcal{P}_E{}^{k+r}$ (cf. [Deli] n° 1.1 ou chapitre 1, n° 2) défini par la donnée, pour chaque entier k, de l'isomorphisme de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^r$-modules

$$\lambda_k:\mathcal{P}_F{}^k/\mathcal{P}_F{}^{k+r}\to\mathcal{P}_E{}^k/\mathcal{P}_E{}^{k+r},\quad\left(x+\mathcal{P}_F{}^{k+r}\right)\mapsto\varpi_E{}^k\left(\lambda\left(\varpi_F{}^{-k}x+\mathcal{P}_F{}^r\right)\right),$$

pour la structure de $\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^r$-module sur le groupe additif $\mathcal{P}_E{}^k/\mathcal{P}_E{}^{k+r}$ donnée par

$$\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F{}^r\times\mathcal{P}_E{}^k/\mathcal{P}_E{}^{k+r}\to\mathcal{P}_E/\mathcal{P}_E{}^{k+r},\ \left(x+\mathcal{P}_F{}^r,x'+\mathcal{P}_E{}^{k+r}\right)\mapsto\lambda\left(x+\mathcal{P}_F{}^r\right).\left(x'+\mathcal{P}_L{}^{k+r}\right).$$

Pour chaque $k\in\mathbb{Z}$, soit

$$\iota_k:\mathcal{G}^k/\mathcal{G}^{k+re}\xrightarrow{\ \cong\ }\mathcal{G}'^k/\mathcal{G}'^{k+re}$$

l'isomorphisme d'anneaux induit par le couple $(\lambda_k,\lambda_{k+1})$ (cf. le chapitre 1, n° 2; on construit l'isomorphisme d'anneaux ι_k à partir du couple $(\lambda_k,\lambda_{k+1})$ comme on a construit l'isomorphisme de groupes $\beta:B_F/B_F{}^r\to B_L/B_L{}^r$ à partir du couple (λ_0,λ_1)). Par construction, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{G}^k/\mathcal{G}^{k+re}\times\mathcal{G}^{1-k-re}/\mathcal{G}^{1-k} & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(F)/F}} & \mathcal{P}_F{}^{1-r}/\mathcal{P}_F{}^1\\ \downarrow{\scriptstyle \iota_k\times\iota_{1-k-re}} & & \downarrow{\scriptstyle\lambda_{1-r}}\\ \mathcal{G}'^k/\mathcal{G}'^{k+re}\times\mathcal{G}'^{1-k-re}/\mathcal{G}'^{1-k} & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(E)/E}} & \mathcal{P}_E{}^{1-r}/\mathcal{P}_E{}^1\end{array}\qquad (*)_k$$

est commutatif (les flèches horizontales désignant (abusivement) les accouplements non dégénérés induits par $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(F)/F}$ et $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(E)/E}$ respectivement). Posons

$$\mathcal{N}=\mathcal{N}_{k_0}(y,\mathcal{G}) \text{ et } \mathcal{N}'=\mathcal{N}_{k_0}(y',\mathcal{G}').$$

Alors

$$\mathcal{P}_L^{1-k_1}\mathcal{N}=\{g\in\mathcal{G}^{1-k_1},\ yg-gy\in\mathcal{G}^{1+v}\}$$

est une partie de $\mathcal{G}$ invariante par translation par les éléments de $\mathcal{G}^1$. De même,

$$\mathcal{P}_{L'}^{1-k_1}\mathcal{N}'=\{g'\in\mathcal{G}'^{1-k_1},\ y'g'-g'y'\in\mathcal{G}'^{1+v}\}$$

est une partie de $\mathcal{G}'$ invariante par translation par les éléments de $\mathcal{G}'^1$. Les relations $k_1\geq 0$ (cf. le numéro 2.1) et $re-k_1\geq me>0$ (hypothèse de l'énoncé) assurant la double inclusion

$$\mathcal{G}^{1-k_1+re}\subset\mathcal{G}^1\subset\mathcal{G}^{1-k_1},$$

on a les relations

$$\begin{cases}\mathrm{Ad}\,h(g)\in g+\mathcal{G}^1 \ \text{ pour tout } g\in\mathcal{G}^{1-k_1} \text{ et tout } h\in H^{k_1}\supset H^{1+k_1}\\ \iota_v(y+\mathcal{G}^{1+k_0})=\zeta(yH^{1+k_1})=y'H^{1+k_1}=y'+\mathcal{G}'^{1+k_0}\end{cases},$$

lesquelles entraînent

$$\begin{cases}\iota_{1-k_1+v}(yg+\mathcal{G}^{1+v})=\iota_{1-k_1+v}(yH^{1+k_1}(g+\mathcal{G}^1))=y'H^{1+k_1}\iota_{1-k_1}(g+\mathcal{G}^1)=y'\iota_{1-k_1}(g+\mathcal{G}^1)\\ \iota_{1-k_1+v}(gy+\mathcal{G}^{1+v})=\iota_{1-k_1+v}((g+\mathcal{G}^1)H^{1+k_1}y)=\iota_{1-k_1}(g+\mathcal{G}^1)H'^{1+k_1}y'=\iota_{1-k_1}(g+\mathcal{G}^1)y'\end{cases}$$

pour tout élément $g\in\mathcal{G}^{1-k_1}$. On en déduit l'égalité

$$\iota_{1-k_1}(\mathcal{P}_L^{1-k_1}\mathcal{N})=\mathcal{P}_{L'}^{1-k_1}\mathcal{N}'.$$

Comme l'$\mathcal{O}_F$-réseau $\Lambda(y)$ se calcule dans la dualité

$$\mathcal{G}^{1-k_1}/\mathcal{G}^1\times\mathcal{G}^0/\mathcal{G}^{k_1}\xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}(F)/F}}F/\mathcal{P}_F$$

(cf. la remarque 2.2.1.(2)) et comme $\mathcal{G}^1\supset\mathcal{G}^{1-k_1+re}$, le diagramme $(*)_k$ pour $k=1-k_1$ entraîne la relation

$$\iota_{k_1-re}(\Lambda(y))=\left(\iota_{1-k_1}(\mathcal{P}_L^{1-k_1}\mathcal{N})\right)^{*(F)}=\left(\mathcal{P}_{L'}^{1-k_1}\mathcal{N}\right)^{*(E)}=\Lambda(y').$$

On pose $\Lambda=\Lambda(y)$ et $\Lambda'=\Lambda(y')$.

(iii) Applications des formules d'intégration de la proposition 2.3.4 et du lemme 2.3.5.

Soit un élément $y'\in\mathcal{V}'=\zeta(y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)\subset\zeta(yH^{e+k_1})\subset\zeta(yH^{1+k_1})$. Les conditions imposées à m et r assurant l'inégalité $re\geq me+k_1\geq ne$ et donc la série d'inclusions

$$\mathcal{G}^{re}\subset\mathcal{G}^{me+k_1}\subset\varpi_F{}^m\Lambda\subset\mathcal{G}^{me}\subset\mathcal{G}^0,$$

on a (cf. la construction des applications ι_k, $k\in\mathbb{Z}$, donnée plus haut) la relation

$$\iota_0(\varpi_F{}^m\Lambda)=\varpi_E{}^m\iota_{-me}(\Lambda)=\varpi_E{}^m\iota_{k_1-re}(\Lambda)=\varpi_E{}^m\Lambda',$$

laquelle implique

$$\zeta(1+\varpi_F{}^m\Lambda)=1+\varpi_E{}^m\Lambda'.$$

Soient $g\in \mathbf{G}(F)$ et f_g la fonction caractéristique d'une double classe $K_F{}^n g K_F{}^n$ de $\mathbf{G}(F)$. La mesure de Haar dg_F sur $\mathbf{G}(F)$ donnant un volume 1 au sous-groupe compact maximal K_F de $\mathbf{G}(F)$, on a (cf. le numéro 2.3 pour la définition de $(f_g)_0$)

$$\begin{aligned}(f_g)_0 &= \left(\mathrm{vol}(K_F{}^n, dg_F)\right)\sum\nolimits_\mu \mathrm{Ad}^* k_\mu(f_g) \\ &= \left([K_F : K_F{}^n]\right)^{-1}\sum\nolimits_\mu \mathbf{1}_{K_F{}^n \mathrm{Ad}\, k_\mu(g) K_F{}^n},\end{aligned}$$

les éléments k_μ parcourant une famille $\mathcal{K}$ de représentants dans K_F des classes du groupe quotient $K_F/K_F{}^n$. Soit g' un élément de $\mathbf{G}(E)$ tel que $\zeta(K_F{}^n g K_F{}^n)=K_E{}^n g' K_E{}^n$. Le groupe $K_F{}^n$ étant normalisé par K_F, on a (chapitre 1, prop. 1.2.1 et prop. 2.2.1)

$$\zeta\left(K_F{}^n \mathrm{Ad} k_\mu(g) K_F{}^n\right) = K_E{}^n \mathrm{Ad} k'_\mu(g') K_E{}^n$$

pour tout $k_\mu\in\mathcal{K}$ et tout $k'_\mu\in K_E$ tel que $\zeta(k_\mu K_F{}^n)=k'_\mu K_E{}^n$ (cette dernière condition impliquant la relation $\zeta(k_\mu{}^{-1}K_F{}^n)=k'_\mu{}^{-1}K_E{}^n$). Quand k_μ parcourt les éléments de $\mathcal{K}$, k'_μ parcourt une famille de représentants dans K_E des classes du groupe quotient $K_E/K_E{}^n$. D'où l'on déduit que

$$\zeta\left((f_g)_0\right) = (\phi_{g'})_0$$

où $\phi_{g'}$ est la fonction caractéristique de la double classe $K_E{}^n g' K_E{}^n$ de $\mathbf{G}(E)$. Par linéarité de l'application

$$\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F), K_F{}^n\right) \to \mathcal{H}\left(\mathbf{G}(F), K_F{}^n\right),\ f \mapsto f_0,$$

on obtient l'égalité

$$(\zeta(f))_0 = \zeta(f_0)$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

Soit $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ une famille (finie) d'éléments de H^{me} telle que $1+\varpi_F{}^m\Lambda=\coprod_{\alpha\in\mathcal{I}} h_\alpha H^{re}$. Soient un couple $(s,\delta)\in S_N\times\Delta_s(\varpi_F)$ et un élément $g\in\mathbf{G}(F)$. Soit $\{g_\beta\}_{\beta\in\mathcal{J}}$ une famille (finie) d'éléments de $\mathbf{G}(F)$ telle que $K_F{}^n g K_F{}^n=\coprod_\beta K_F{}^n g_\beta$ et soit $\{g'_\beta\}_{\beta\in\mathcal{J}}$ une famille d'éléments de $\mathbf{G}(E)$ telle que

$$\begin{cases}\zeta\left(K_F{}^n g K_F{}^n\right) = \coprod_{\beta\in\mathcal{J}} K_E{}^n g'_\beta \\ \zeta\left(K_F{}^n g_\beta (s\delta)^{-1} H^{re}\right) = K_E{}^n g'_\beta \left(s\gamma(\delta)\right)^{-1} H'^{re} \quad (\beta\in\mathcal{J})\end{cases}.$$

Une telle famille existe. En effet, considérons une famille $\{g'_\beta\}_{\beta\in\mathcal{J}}$ d'éléments de $\mathbf{G}(E)$ vérifiant la première des deux conditions ci-dessus. Pour chaque indice $\beta\in\mathcal{J}$, l'élément $(s\delta)^{-1}$ agit à droite sur g_β comme une matrice de permutation modulo multiplication des coefficients $(g_\beta)_{i,j}$ $(1\leq i,j\leq N)$ de g_β par une puissance entière $c(i,j)$ de l'uniformisante ϖ_F (cf. chapitre 1, n° 1.3). De l'autre côté, l'élément $(s\gamma(\delta))^{-1}$ agit à droite sur g'_β comme la même matrice de permutation modulo multiplication des coefficients $(g'_\beta)_{i,j}$ de g'_β par les mêmes puissances $c(i,j)$ de l'uniformisante ϖ_E. Ainsi, réaliser la deuxième condition pour $g_\beta=(g_\beta)_{1\leq i,j\leq N}$, c'est seulement imposer à chaque coefficient $(g'_\beta)_{i,j}$ de g_β une relation de proximité supplémentaire de la forme $\lambda(\varpi_F{}^{k(i,j)}(g_\beta)_{i,j}+\mathcal{P}_F{}^r)=\varpi_E{}^{k(i,j)}(g'_\beta)_{i,j}+\mathcal{P}_E{}^r$ pour un entier $k(i,j)$.

Soient un couple $(x,p)\in H\times((\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(F))\cap K_F{}^n)$ et un couple $(x',p')\in H'\times((\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(E))\cap K_E{}^n)$ tels que $\zeta(xH^{re})=x'H'^{re}$ et $\zeta(pH^{re})=p'H'^{re}$. Pour chaque indice $\beta\in\mathcal{J}$, l'hypothèse

$$\zeta\left(K_F{}^n g_\beta (s\delta)^{-1} H^{re}\right) = K_E{}^n g'_\beta \left(s\gamma(d)\right)^{-1} H'^{re}$$

entraîne l'égalité (lemme 2.4.1)

$$\mathrm{vol}\left(x^{-1} y h_{(\alpha)} x p H^{re} \cap \mathrm{Ads}\delta\left(K_F{}^n g_\beta\right), dg_F\right) = \mathrm{vol}\left(\zeta\left(x^{-1} y h_{(\alpha)} x p H^{re}\right) \cap \mathrm{Ads}\gamma(\delta)\left(K_E{}^n g'_\beta\right), dg_E\right).$$

D'où l'on déduit

$$\int_{x^{-1}y(1+\varpi_F{}^m\Lambda)xp} \mathrm{Ad}^*s\delta\left(\mathbf{1}_{K_F{}^ngK_F{}^n}\right)(g_F)dg_F$$
$$=\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{E}\\ \beta\in\mathcal{F}}} \int_{x^{-1}yh_\alpha xpH^{re}} \mathbf{1}_{\mathrm{Ad}s\delta(K_F{}^ng_\beta)}(g_F)dg_F$$
$$=\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{E}\\ \beta\in\mathcal{F}}} \mathrm{vol}\left(x^{-1}yh_\alpha xpH^{re}\cap \mathrm{Ad}s\delta\left(K_F{}^ng_\beta\right), dg_F\right)$$
$$=\sum_{\substack{\alpha\in\mathcal{E}\\ \beta\in\mathcal{F}}} \mathrm{vol}\left(\zeta\left(x^{-1}yh_\alpha xpH^{re}\right)\cap \mathrm{Ad}s\gamma(\delta)\left(K_E{}^ng'_\beta\right), dg_E\right)$$
$$=\int_{x'^{-1}y'(1+\varpi_E{}^m\Lambda)x'p'} \mathrm{Ad}^*s\gamma(\delta)\left(\zeta\left(\mathbf{1}_{K_F{}^ngK_F{}^n}\right)(g_E)\right)dg_E$$

grâce à la relation

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{E}} \zeta\left(x^{-1}yh_\alpha xpH^{re}\right) = x'^{-1}\zeta\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{E}} yh_\alpha H^{re}\right)x'p'$$
$$= x'^{-1}\zeta\left(y\left(1+\varpi_F{}^m\Lambda\right)\right)x'p'$$
$$= x'^{-1}\zeta\left(yH^{me+k_1}\right)\zeta\left(1+\varpi_F{}^m\Lambda\right)x'p'$$
$$= x'^{-1}y'\left(1+\varpi_E{}^m\Lambda'\right)x'p'.$$

Quand (x,p) parcourt une famille de représentants dans $H\times((\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(F))\cap K_F{}^n)$ des classes de $H^{me}\backslash H\times(\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(F))\cap H^{me+k_1})\backslash(\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(F))\cap K_F{}^n)$, (x',p') parcourt une famille de représentants dans $H'\times((\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(E))\cap K_E{}^n)$ des classes de $H'^{me}\backslash H'\times(\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(E))\cap H'^{me+k_1})\backslash(\mathrm{Ads}(\mathbf{P}_1(E))\cap K_E{}^n)$. Quand (s,δ) parcourt les éléments de $S_N\times\Delta_s(\varpi_F)$, $s\gamma(\delta)$ parcourt une famille de représentants dans $S_N\Delta(\varpi_E)$ des doubles classes $E^\times H'\backslash\mathbf{G}(E)/K_E$ de $\mathbf{G}(E)$. Quant aux volumes apparaissant dans les formules d'intégration de la proposition 2.3.4 et du lemme 2.3.5, pour chaque couple $(s,\delta)\in S_N\times\Delta_s(\varpi_F)$ on a

$$\frac{\mathrm{vol}\left(\mathrm{Ad}\,s(\mathbf{P}_1(F))\cap H^{me+k_1}, dg_F\right)}{\mathrm{vol}\left(\mathbf{P}_1(F)\cap K_F{}^n, dg_F\right)} = \frac{\mathrm{vol}\left(\mathrm{Ad}\,s(\mathbf{P}_1(E))\cap H'^{me+k_1}, dg_E\right)}{\mathrm{vol}\left(\mathbf{P}_1(E)\cap K_E{}^n, dg_E\right)}$$

car $\#(\mathcal{O}_F/\mathcal{P}_F)=\#(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E)$ et

$$\frac{\mathrm{vol}\left(F^\times H\delta K_F, dz_F\backslash dg_F\right)\mathrm{vol}\left(H^{me}, dg_F\right)}{\mathrm{vol}\left(H, dg_F\right)\mathrm{vol}\left(1+\varpi_F\Lambda, dg_F\right)} = \frac{\mathrm{vol}\left(E^\times H'\gamma(\delta)K_E, dz_E\backslash dg_E\right)\mathrm{vol}\left(H'^{me}, dg_E\right)}{\mathrm{vol}\left(H', dg_E\right)\mathrm{vol}\left(1+\varpi_E\Lambda', dg_E\right)}$$

car $\zeta(F^\times H\delta K_F)=E^\times H'\gamma(\delta)K_E$, $\zeta(H^{me})=H'^{me}$, $\zeta(H)=H'$ et $\zeta(1+\varpi_F{}^m\Lambda)=1+\varpi_E{}^m\Lambda'$.

Ainsi, les formules d'intégration de la proposition 2.3.4 et du lemme 2.3.5, la linéarité de l'application $f\mapsto I^{G(F)}(f,y)$ $(f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n))$ et la relation $(\zeta(f))_0=\zeta(f_0)$ $(f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n))$ montrée plus haut, entraînent l'égalité

$$I^{\mathbf{G}(F)}(f,y)=I^{\mathbf{G}(E)}(\zeta(f),y')$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$.

□

3. La conjecture de Howe en caractéristique 0. Une majoration indépendante de la ramification.

3.1. On rappelle dans ce numéro un certain nombre de constructions et de propriétés dont nous aurons besoin pour la démonstration proprement dite (les spécialistes peuvent directement passer au numéro 3.2.).

Soit E un corps local non archimédien (de caractéristique quelconque), à corps résiduel de cardinal q et soit ϖ_E une uniformisante de E

3.1.1. Systèmes de racines.

On dit qu'un sous-groupe parabolique $\mathbf{P}$ de $\mathbf{G}$ (resp. une paire parabolique $(\mathbf{P},\mathbf{A})$ de $\mathbf{G}$) est un *sous-groupe parabolique standard* (resp. une *paire parabolique standard*) si $\mathbf{P}\supset\mathbf{P}_1$ (resp. si $\mathbf{P}\supset\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}_1$).
On dit qu'un sous-groupe de Levi $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$ est un *sous-groupe de Levi standard* si $\mathbf{M}$ est composante de Levi d'un sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}$ (autrement dit si $\mathbf{M}$ est produit diagonal de groupes linéaires dans $\mathbf{G}$).

On traduit naturellement ces définitions sur le groupe $\mathbf{G}(E)$ des E-points de $\mathbf{G}$.

Soit $A_1=\mathbf{A}_1(E)$ le tore diagonal de $\mathbf{G}(E)$, $P_1=\mathbf{P}_1(E)$ le sous-groupe de Borel standard de $\mathbf{G}(E)$ et U_1 le radical unipotent de P_1.
Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble (fini) des paraboliques standards de $\mathbf{G}$.
Si $P\in\mathcal{P}(E)$, on note M_P l'unique composante de Levi standard de P, A_P le centre de M_P et U_P le radical unipotent de P.

Si M est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}(E)$ (resp. si Γ est un tore maximal de $\mathbf{G}(E)$) on note A_M (resp. A_Γ) le centre de M (resp. la composante deployée de Γ).
Soit $\Sigma_E\subset\mathbf{G}(E)$ une famille de représentants des Ad$\mathbf{G}(E)$-orbites de tores maximaux Γ de $\mathbf{G}(E)$ dont la composante déployée A_Γ vérifie la relation $A_{\mathbf{G}(E)}\subset A_\Gamma\subset A_1$.

Si M un sous-groupe de levi de $\mathbf{G}(E)$, on note $X(M)_E$ le groupe des caractères rationnels de M (i.e. le groupe des homomorphismes $M\to\mathbf{G}_m$ définis sur E) et

$$a_M=\mathrm{Hom}(X(M)_E,\mathbb{R})$$

"*l'algèbre de Lie réelle*" de M. Ainsi, a_M est un espace vectoriel réel dont la dimension est égale à la dimension de A_M. On note (en considérant par abus de langage les éléments de $X(M)_E$ comme des homomorphismes de M dans $E^\times$)

$$M^0=\bigcap_{\chi\in X(M)_E}\ker|\chi|_E$$

l'intersection des noyaux des valeurs absolues des caractères rationnels de M.

On note a_1 l'algèbre de Lie réelle de A_1 et on définit

$$a_{1,\mathbb{Z}}=\mathrm{Hom}\big(X(A_1)_E,\mathbb{Z}\big).$$

Le choix d'une $\mathbb{Z}$-base du $\mathbb{Z}$-module libre $a_{1,\mathbb{Z}}$ nous donne des identifications naturelles

$$a_{1,\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}^N\subset\mathbb{R}^N=a_1.$$

On identifie aussi le dual algébrique de a_1

$$\mathfrak{a}_1{}^* = X(A_1)_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

à $\mathbb{R}^N$ au moyen du produit scalaire euclidien $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{a}_1$.

Si $(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_N)\in\mathfrak{a}_{1,\mathbb{Z}}$, on note $\varpi_E{}^{(\alpha)}$ (cf. le numéro 2.4) l'élément de A_1 défini par

$$\varpi_E{}^{(\alpha)} = \mathrm{diag}\left(\varpi_E{}^{\alpha_1}, \varpi_E{}^{\alpha_2}, \ldots, \varpi_E{}^{\alpha_N}\right).$$

On ne considérera en fait que les sous-groupes de Levi standards de **G**. Si M est l'un d'eux, on identifie $\mathfrak{a}_M$ au sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}_1$ engendré par les $\alpha\in\mathfrak{a}_{1,\mathbb{Z}}$ tels que $\varpi_E{}^{(\alpha)}$ appartienne à A_M et on note $\mathfrak{a}^M$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}_1$ engendré par les $\alpha\in\mathfrak{a}_{1,\mathbb{Z}}$ tels que $\varpi_E{}^{(\alpha)}$ appartienne à M^0. On définit aussi $\mathfrak{a}_M{}^{G(E)}=\mathfrak{a}_M\cap\mathfrak{a}^{G(E)}$. Ainsi pour tout sous-groupe de Levi standard M de **G**(E), on a

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_{G(E)} \oplus \mathfrak{a}_M{}^{G(E)} \oplus \mathfrak{a}^M$$

(avec $\mathfrak{a}_M{}^{G(E)}=\{0\}$ si $M=\mathbf{G}(E)$).

Soit P un sous-groupe parabolique standard de **G**(E) et $M=M_P$.

On note $R(P,A_P)$ les racines de (P,A_P) définies par rapport à l'action adjointe de A_P dans l'algèbre de Lie de U_P. On les considérera aussi bien comme des caractères rationnels de A_P que comme des éléments de l'espace dual $\mathfrak{a}_M{}^*=X(M)_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}=X(A_M)_E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ de $\mathfrak{a}_M$.

Soit $\Delta_1\subset R(P_1,A_1)$ l'ensemble des racines simples pour l'action adjointe de A_1 sur $\mathrm{Lie}(U_1)$. Δ_1 est une base de $\mathfrak{a}^{G(E)\,*}$ ($\mathfrak{a}_1{}^*=\mathfrak{a}_{G(E)}{}^*\oplus\mathfrak{a}^{G(E)\,*}$) et l'on note $\Delta_1{}^\wedge\subset\mathfrak{a}^{G(E)}$ la base de $\mathfrak{a}^{G(E)}$ duale de Δ_1.

Soit $\Delta_M\subset R(P,A_P)$ l'ensemble des racines simples de (P,A_P) pour l'action adjointe de A_P dans $\mathrm{Lie}(U_P)$ et soit

$$\Delta_1{}^M = \left\{\alpha\in\Delta_1,\ \alpha(\beta)=0 \text{ pour tout } \beta\in\mathfrak{a}_M\right\}$$

l'ensemble des racines de Δ_1 qui s'annulent sur $\mathfrak{a}_M$. On peut identifier $\Delta_1{}^M$ avec l'ensemble des racines simples de $(P_1\cap M,A_1)$ pour l'action adjointe de A_1 dans $\mathrm{Lie}(M\cap U_1)$.

Δ_M est une base de $\mathfrak{a}_M{}^{G(E)\,*}$ et l'on note $\Delta_M{}^\wedge\subset\mathfrak{a}_M{}^{G(E)}$ la base de $\mathfrak{a}_M{}^{G(E)}$ duale de Δ_M. Si α est un élément de Δ_M, on note ω_α l'élément de $\Delta_M{}^\wedge$ qui lui correspond. On note χ_M (resp. $\chi_M{}^\wedge$) la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\left\{\beta\in\mathfrak{a}_1(\text{ou } \mathfrak{a}_M),\ \alpha(\beta)<0 \text{ pour tout } \alpha\in\Delta_M\right\}$$

$$\left(\text{resp. } \left\{\beta\in\mathfrak{a}_1(\text{ou } \mathfrak{a}_M),\ \langle\omega_\alpha,\beta\rangle<0 \text{ pour tout } \alpha\in\Delta_M\right\}\right)$$

Soit

$$h_M\colon M\to\mathfrak{a}_M$$

l'homomorphisme d'Harish-Chandra (de noyau M^0) défini par

$$|\chi(m)|_E = q^{\langle h_M(m),\chi\rangle} \text{ pour tout } \chi\in X(M)_E,$$

et soit $\tau_M=\chi_M\circ h_M$ (resp. $\tau_M{}^\wedge=\chi_M{}^\wedge\circ h_M$) la composée de χ_M (resp. de $\chi_M{}^\wedge$) avec h_M.

On peut décrire assez explicitement cet homomorphisme d'Harish-Chandra h_M.

L'image de $h_{G(E)}$ est un réseau $R_{G(E)}$ de $\mathfrak{a}_{G(E)}$. On l'identifie à $\mathbb{Z}$ de la manière suivante. Rappelons que les seuls caractères rationnels de **G**(E) sont les puissances du déterminant. Les éléments $\varpi_E{}^{(\alpha)}\in A_1$, $\alpha=(\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_N)\in\mathbb{Z}^N$, forment un système de représentants dans A_1

des doubles classes $K_E\backslash G(E)/K_E$ de $\mathbf{G}(E)$ (c'est la décomposition de Cartan), et l'image par $h_{G(E)}$ d'un élément de la forme $k\varpi_E^{(\alpha)}k'$, avec $k\in K_E$ et $k'\in K_E$, est $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N\in\mathbb{Z}$.

Via cette identification, on a donc $h_{G(E)}(\mathbf{G}(E))=\mathbb{Z}$ et $h_{G(E)}(A_{G(E)})=N\mathbb{Z}$. Ainsi, l'application $h_{G(E)}$: $\mathbf{G}(E)\to \mathfrak{a}_{G(E)}$ induit par restriction un isomorphisme du réseau $C_{G(E)}(\varpi_E)=\varpi_E^{\mathbb{Z}}$ de $A_{G(E)}$ (naturellement identifié à $E^\times$) sur le réseau $N\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$.

De la même manière, si

$$M=\prod\nolimits_{1\le i\le m}\mathbf{GL}_{N_i}(E),\quad \sum\nolimits_{1\le i\le m}N_i=N,$$

on identifie le réseau $h_M(M)=R_M$ de $\mathfrak{a}_M$ au produit $\mathbb{Z}^m$ de m copies de $\mathbb{Z}$ et l'on note $C_M(\varpi_E)$ le réseau de A_M formé par les éléments de la forme

$$\prod\nolimits_{1\le i\le m}x_i,\ x_i=\mathrm{diag}\left(\underbrace{\varpi_E^{k_i},\dots,\varpi_E^{k_i}}_{N_i\text{ fois}}\right),\ k_i\in\mathbb{Z}.$$

Alors l'application h_M: $M\to\mathfrak{a}_M$ induit par restriction un isomorphisme du réseau $C_M(\varpi_E)$ de A_M sur le réseau $\Pi_{1\le i\le m}N_i\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}^m$.

3.1.2. La partie compacte de $\mathbf{G}(E)$.

Rappelons la construction de Deligne-Casselman ([Cass] n° 2.).

Soient un sous-groupe de Levi standard M de $\mathbf{G}(E)$ et un élément $m\in M_{reg}$. Le centralisateur $\Gamma=M_m$ de m dans M est un tore maximal de M et l'on note U_Γ le sous-tore anisotrope maximal de Γ. Comme Γ est isogène au groupe $U_\Gamma\times A_\Gamma$, il existe une puissance m^k de m telle que $m^k=xa$ pour un couple $(x,a)\in U_\Gamma\times A_\Gamma$.

La partie

$$\mathfrak{a}_1^{M,+}=\left\{\beta\in\mathfrak{a}_1,\ \alpha(\beta)\le 0 \text{ pour tout } \alpha\in\Delta_1^M\right\}$$

de $\mathfrak{a}_1$ formant une chambre fondamentale pour l'action du groupe de Weyl $W(M,A_1)$, il existe un conjugué $\gamma a\gamma^{-1}\in A_1$ $(\gamma\in M)$ de a tel que

$$h_{A_1}\left(\gamma a\gamma^{-1}\right)\in\mathfrak{a}_1^{M,+}.$$

Notant $a'=\gamma a\gamma^{-1}$, on définit l'ensemble

$$\Delta_1^M(a')=\left\{\alpha\in\Delta_1^M,\ \alpha\left(h_{A_1}(a')\right)=0\right\}\subset\Delta_1^M.$$

L'ensemble $\Delta_1^M-\Delta_1^M(a')$ détermine un unique sous-groupe parabolique standard $P_{a'}$ de M (standard au sens où $P_{a'}\supset(P_1\cap M)$) de radical unipotent $U_{a'}$ tel que l'action de a' par conjugaison sur $P_{a'}$ contracte $U_{a'}$. On note alors $P_m=\mathrm{Ad}\gamma^{-1}(P_{a'})$ (on vérifie facilement que cette définition de P_m ne dépend ni de la puissance m^k de m ni du conjugué $\gamma a\gamma^{-1}$ de a choisis) et l'on définit la *partie compacte*(2) M_c de M par

$$\begin{aligned}M_c&=\left\{m\in M_{reg}\text{ tels que }P_m=M\right\}\\&=\left\{m\in M_{reg},\ \alpha\left(h_{A_1}(m)\right)=0\ \text{ pour toute racine } \alpha\in\Delta_1^M\right\}.\end{aligned}$$

(2) Signalons pour éviter les confusions que l'objet attaché au terme *partie compacte* n'est pas vraiment fixé dans la littérature (trois notions différentes dans [Cloz 2], [Cloz 3], [Cloz 4]); s'agissant ici de l'utiliser dans une formule de trace, on s'est limité à l'ouvert dense M_{reg} de M.

Ainsi la partie compacte M_c de M est l'ensemble des éléments $m \in M_{reg}$ tels que les valeurs propres de Adm: Lie(M) $\to$ Lie(M) sont toutes de valeurs absolues 1 (dans une extension séparablement close de E).

Pour chaque entier i tel que $0 \leq i \leq N-1$, soit $(\alpha(i)) \in \mathbb{Z}^N$ le N-uplet défini par

$$(\alpha(i)) = \Big(\underbrace{0,\ldots,0}_{N-i\,\text{fois}},\underbrace{1,\ldots,1}_{i\,\text{fois}}\Big),$$

et soit $\mathcal{F}_c \subset \mathbb{Z}^N$ l'ensemble des N-uplets $(\alpha(i))$, $i \in \{1,\ldots,N-1\}$.

On aura besoin, dans la suite du développement, du petit lemme suivant.

Lemme 3.1.2. — *La partie compacte* $\mathbf{G}(E)_c$ *de* $\mathbf{G}(E)$ *satisfait la relation d'inclusion*

$$\mathbf{G}(E)_c \subset \varpi_E^{\mathbf{Z}} \mathrm{Ad}\,\mathbf{G}(E)\Big(\bigcup\nolimits_{(\alpha)\in\mathcal{F}_c} K_E \varpi_E^{(\alpha)} K_E\Big).$$

Démonstration.

Il est clair qu'un élément g de $\mathbf{G}(E)_c$ est contenu dans un sous-groupe ouvert compact modulo $A_{\mathbf{G}(E)}$ de $\mathbf{G}(E)$. On sait que les classes de conjugaison de sous-groupes ouverts compacts modulo $A_{\mathbf{G}(E)}$ de $\mathbf{G}(E)$ maximaux pour ces propriétés sont en nombres fini. On rappelle le système de représentants de ces classes habituellement exhibé (cf. [Bush] (1.18) ou [Cara] n° 2). Pour chaque entier $s \geq 1$ divisant N, soit $H_{E,s}$ le sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{G}(E)$ défini comme l'image réciproque par la projection canonique $\mathbf{G}(\mathcal{O}_E) \to \mathbf{G}(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E)$ du sous-groupe parabolique standard $\mathbf{P}_s(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E)$ de $\mathbf{G}(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E)$ de composante de Levi standard $\mathbf{M}_s(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E) = \prod_{N/s} \mathbf{GL}_s(\mathcal{O}_E/\mathcal{P}_E)$, et soit $z_s(\varpi_E) \in \mathbf{G}(E)$ l'élément défini par

$$z_s(\varpi_E) = \begin{pmatrix} 0_s & 1_s & \cdots & \cdots & 1_s \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0_s & & & \ddots & 1_s \\ \alpha & 0_s & \cdots & \cdots & 0_s \end{pmatrix}, \quad \alpha = \varpi_E 1_s \in \mathbf{GL}_s(E).$$

(Ainsi, $H_{E,N} = K_E$ et $H_{E,1}$ est le sous-groupe d'Iwahori B_E introduit au numéro 2.3). L'élément z_s normalise le groupe H_s et, notant $Z_s(\varpi_E)$ le sous-groupe cyclique de $H_{E,s}$ engendré par $z_s(\varpi_E)$, le groupe $K_{E,s} = Z_s(\varpi_E) \ltimes H_{E,s}$ (produit semi-direct) est un sous-groupe ouvert compact modulo $A_{\mathbf{G}(E)}$ maximal de $\mathbf{G}(E)$. De plus, les $K_{E,s}$ (s entier ≥ 1 divisant N) constituent un système de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes ouverts compacts modulo $A_{\mathbf{G}(E)}$ maximaux de $\mathbf{G}(E)$.

Soit s entier ≥ 1 divisant N. Alors le réseau $\varpi_E^{\mathbf{Z}}$ de $A_{\mathbf{G}(E)}$ est un sous-groupe d'indice N/s du groupe $Z_s(\varpi_E)$ et, pour chaque entier k tel que $0 \leq k \leq N/s - 1$, on peut en multipliant $(z_s(\varpi_E))^k$ à droite par un élément du $N^{\text{ième}}$ groupe de permutation $S_N \subset K_E$ obtenir l'élément $\varpi_E^{(\alpha(ks))}$ de $\mathbf{A}_1(E)$. Par conséquent

$$\bigcup\nolimits_{s|N} K_s \subset \varpi_E^{\mathbf{Z}}\Big(\bigcup\nolimits_{s|N}\bigcup\nolimits_{0\leq k\leq N/s-1} H_{E,s}\varpi_E^{(\alpha(ks))} S_N\Big) \subset \varpi_E^{\mathbf{Z}}\Big(\bigcup\nolimits_{(\alpha)\in\mathcal{F}_c} K_E \varpi_E^{(\alpha)} K_E\Big)$$

et donc

$$\mathbf{G}(E)_c \subset \mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)\left(\bigcup_{s|N} K_s\right) \subset \varpi_E^{\,z}\mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)\left(\bigcup_{(\alpha)\in\mathcal{J}_c} K_E\varpi_E^{(\alpha)}K_E\right).$$

□

3.1.3. Propriétés de descente.

Rappelons que pour m entier ≥ 1, K_E^m désigne le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_E^m$ du sous-groupe ouvert compact maximal $K_E=\mathbf{G}(\mathcal{O}_E)$ de $\mathbf{G}(E)$. De la même manière, si M est un sous-groupe de Levi standard de $\mathbf{G}(E)$, on définit le sous-groupe ouvert compact maximal de M

$$K_E^M = M \cap K_E$$

et, pour chaque entier $m\geq 1$, le sous-groupe de congruence modulo $\mathcal{P}_E^m$ de K_E^M

$$K_E^{M,m} = M \cap K_E^m.$$

Lemme 3.1.3.1. — *Soit Ω une partie compacte modulo conjugaison dans* $\mathbf{G}(E)$ *et soit* M *un sous-groupe de Levi de* $\mathbf{G}(E)$. *Alors* $M\cap\Omega$ *est une partie compacte modulo conjugaison dans* M.

Démonstration.

On peut supposer M standard.

Il est clair que $M\cap\Omega$ est une partie fermée AdM-invariante de M. Donc il suffit de montrer que la partie $M\cap\Omega$ est contenue dans $\mathrm{AdM}(\mathcal{W}_M)$ pour une partie compacte $\mathcal{W}_M$ de M.

Soit $\{a_i\}_{1\leq i\leq r}$ une famille finie d'élément de A_1 telle que l'on ait l'inclusion

$$\Omega \subset \mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)\left(\bigcup_{1\leq i\leq r} K_E a_i K_E\right).$$

Soient P le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}(E)$ de composante de Levi M (c'est-à-dire tel que $M=M_P$), U le radical unipotent de P et U^- le radical unipotent du parabolique opposé à U.

Soit μ un élément de $M\cap\Omega$ et soit g un élément de $\mathbf{G}(E)$ tel que

$$\mathrm{Adg}(\mu) \in K_E a_i K_E$$

pour un entier $i\in\{1,\ldots,r\}$.

Comme $\mathbf{G}(E)=K_EP_1=K_EP$, on peut décomposer l'élément g en $g=kum$ avec $k\in K$, $m\in M$ et $u\in U$. Ainsi $\mathrm{Adum}(\mu)\in K_E a_i K_E$. On note

$$\pi_M : P \to M$$

la projection de P sur sa composante de Levi M (identifiée au quotient réductif maximal P/U de P). Alors, de la relation

$$\mathrm{Adum}(\mu) = \mathrm{Adm}(\mu)(\mathrm{Adm}(\mu))^{-1}u\mathrm{Adm}(\mu)u^{-1} \in K_E a_i K_E \cap P,$$

on déduit

$$\pi_M(\mathrm{Adum}(\mu)) = \mathrm{Adm}(\mu) \in \pi_M(K_E a_i K_E \cap P),$$

et donc

$$\mu \in \mathrm{AdM}(K_E a_i K_E \cap P).$$

En définitive, $M\cap\Omega\subset \mathrm{Ad}M(\mathcal{W}_M)$ pour $\mathcal{W}_M=\cup_{1\leq i\leq r}\pi_M(K_E a_i K_E\cap P)$ et le lemme 3.1.3.1 est montré.

□

On rappelle que tout élément x de **G**(E) a un centralisateur $\mathbf{G}(E)_x$ dans **G**(E) unimodulaire ([Laum] lemma (4.8.6)) et que la donnée d'une mesure de Haar dg_x sur $\mathbf{G}(E)_x$ définit une distribution Ad**G**(E)-invariante sur **G**(E) (pour la convergence, cf. [Laum] lemma (4.8.11) ou le chapitre 3, prop. 3.1.2))

$$I^{G(E)}(f,x,dg_x)=\int_{G(E)_x\backslash G(E)} f(g^{-1}xg)dg_x\backslash dg$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$, $dg=dg_E$ désignant la mesure de Haar sur **G**(E) telle que $\mathrm{vol}(\mathbf{G}(\mathcal{O}_F),dg)=1$.

On généralise naturellement cette définition à tout sous-groupe de Levi M de **G**(E), un tel sous-groupe étant isomorphe à un produit fini de groupes linéaires sur E.

Soient (P,A) une paire parabolique de **G**(E), U le radical unipotent de P, M la composante de Levi de P de centre A et K_P un sous-groupe ouvert compact maximal de G en bonne position par rapport à (P,A). Soient dk_P et du les mesures de Haar respectivement sur K_P et U normalisées par

$$\mathrm{vol}(K_P,dk_P)=\mathrm{vol}(U\cap K_P,du)=1.$$

A toute fonction $f\in C_{c,\infty}(G)$, on associe le *terme* K_P*-invariant* $f^P\in C_{c,\infty}(M)$ *de* f *suivant* P

$$f^P(m)=\delta_P^{1/2}(m)\iint_{U\times K_P}\mathrm{Ad}^*k_p(f)(mu)dk_P du \quad (m\in M).$$

L'intégrale est absolument convergente; c'est même en réalité une somme finie.

On peut alors citer une formule de descente des intégrales orbitales sur **G**(E) (ce n'est pas la plus générale, cf. le chapitre 3, n° 3.2) qui, jointe à la propriété de descente des parties de **G**(E) compactes modulo conjugaison (lemme 3.1.3.1), nous permettra (via une induction sur la dimension des sous-groupes de Levi de **G**(E)) de réduire la conjecture de Howe à une question portant sur les intégrales orbitales elliptiques.

Lemme 3.1.3.2. — *Soient* n *un entier* ≥ 1, (P,A) *une paire parabolique standard et* x *un élément de* **G**(E) *dont le centralisateur* $\mathbf{G}(E)_x$ *est contenu dans* $M=M_P$. *Alors*

(1) *Pour toute fonction* $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ et *toute mesure de Haar* dg_x *sur* $\mathbf{G}(E)_x$,

$$I^{G(E)}(f,x,dg_x)=\left|D_{M\backslash G(E)}(x)\right|_E^{-1/2} I^M(f^P,x,dg_x)$$

où f^P *désigne le terme* K_E*-invariant de* f *suivant* P *et* $D_{M\backslash G(E)}: M\to E$ *la fonction définie par*

$$D_{M\backslash G(E)}(m)=\det_{\mathrm{Lie}(M)\backslash \mathrm{Lie}(G(E))}(1-\mathrm{Ad}m^{-1})\quad (m\in M).$$

(2) *Si* $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E),K_E^{\,n})$, *alors* $f^P\in C_{c,\infty}(M,K_E^{\,M,n})$.

Démonstration.

(1) cf. le chapitre 3, prop. 3.2.2.

(2) Soit une fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E),K_E^{\,n})$. Alors, notant $U=U_P$ le radical unipotent de P, on a la relation

$$\begin{aligned}
f^P(k_1mk_2) &= \iint_{K_E\times U} Ad^*k(f)(k_1mk_2u)dkdu \\
&= \iint_{K_E\times U} f\left(Adk^{-1}(k_1)k^{-1}mk_2uk\right)dkdu \\
&= \iint_{K_E\times U} f\left(k^{-1}mk_2uk\right)dkdu \quad \left(\text{car } f\in C_{c,\infty}\left(\mathbf{G}(E),K_E{}^n\right) \text{ et } K_E \text{ normalise } K_E{}^n\right) \\
&= \iint_{K_E\times U} f\left(k^{-1}muk_2k\right)dkdu \quad \left(\text{car } d(Adk_2(u))=du\right) \\
&= \iint_{K_E\times U} f\left(k^{-1}muk\right)dkdu \quad \left(\text{car } f\in C_{c,\infty}\left(\mathbf{G}(E),K_E{}^n\right) \text{ et } K_E \text{ normalise } K_E{}^n\right) \\
&= f^P(m)
\end{aligned}$$

pour tout couple $(k_1,k_2)\in K_E{}^{M,n}\times K_E{}^{M,n}$.

□

3.2. La démonstration de L. Clozel en caractéristique 0. Un contrôle de la ramification.

3.2.1. formulation du résultat et plan de la démonstration.

On fixe les objets suivants:
— p un nombre premier.
— r un entier ≥ 1.
— E_1 une extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ (le corps des nombres p-adiques) de degré r.
— n un entier ≥ 1 (le niveau des algèbres de Hecke considérées).

Jusqu'à la fin du chapitre, E désigne une extension totalement ramifiée de E_1 et ϖ_E une uniformisante de E.

On note $j_{E,n}$ l'injection canonique

$$j_{E,n}: C_{c,\infty}\left(\mathbf{G}(E),K_E{}^n\right)\longrightarrow C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$$

et $j_{E,n}{}^*$ son application duale

$$j_{E,n}{}^*:\mathcal{D}(\mathbf{G}(E))\longrightarrow\left(C_{c,\infty}\left(\mathbf{G}(E),K_E{}^n\right)\right)^*.$$

Si Ω_E est une partie fermée $Ad\mathbf{G}(E)$-invariante de $\mathbf{G}(E)$, on note $J_{\mathbf{G}(E)}(\Omega_E)$ l'espace des distributions $Ad\mathbf{G}(E)$-invariantes sur $\mathbf{G}(E)$ à support dans Ω_E.

Si ω est une partie du réseau $R_{\mathbf{G}(E)}=h_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{G}(E))$ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{G}(E)}$, on note $\mathbf{G}(E)(\omega)\subset\mathbf{G}(E)$ la partie définie par

$$\mathbf{G}(E)(\omega)=\left\{g\in\mathbf{G}(E),\ h_{\mathbf{G}(E)}(g)\in\omega\right\}$$

et $\mathbf{G}(E)_c(\omega)\subset\mathbf{G}(E)_c$ la partie définie par

$$\mathbf{G}(E)_c(\omega)=\mathbf{G}(E)_c\cap\mathbf{G}(E)(\omega).$$

Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_N)\in\mathbb{Z}^N$, on note $X_{E,\mathcal{F}}$ la partie ouverte $Ad\mathbf{G}(E)$-invariante de $\mathbf{G}(E)$ définie par

$$X_{E,\mathcal{F}}=Ad\mathbf{G}(E)\left(\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}}K_E\varpi_E{}^{(\alpha)}K_E\right).$$

Soit $p_E:\mathbf{G}(E)\to E^N$ l'application donnée par les coefficients du polynôme caractéristique. Précisément, si g est un élément de $\mathbf{G}(E)$ et si $T^N+a_{N-1}(g)T^{N-1}+\cdots+a_1(g)T+a_0(g)$ est le polynôme caractéristique de g, alors $p_E(g)=\amalg_{1\leq i\leq N}a_{N-i}(g)$.

Si (k,e) est un couple d'entiers tel que k<e, soit $V_{E,(k,e)}$ la partie ouverte compacte de E^N définie par

$$V_{E,(k,e)} = \left(\prod_{i=1}^{N-1} \mathcal{P}_E^{\,ki}\right) \times \left(\mathcal{P}_E^{\,kN-eN}\right)$$

et soit $\Omega_{E,(k,e)}$ la partie ouverte fermée et Ad**G**(E)-invariante de **G**(E) définie par

$$\Omega_{E,(k,e)} = p_E^{-1}\left(V_{E,(k,e)}\right) = \left\{g \in \mathbf{G}(E),\ p_E(g) \in V_{E,(k,e)}\right\}.$$

On peut alors, en ces termes, énoncer le résultat.

Proposition 3.2.1.1 — *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille finie de suites ordonnées de* $\mathbb{Z}^N$. *Il existe une constante* $c=c(q,n,\mathcal{F})>0$ *telle que, pour toute extension totalement ramifiée* E *de* E_1 *et pour toute partie* Ω_E *de* **G**(E) *compacte modulo conjugaison dans* **G**(E) *et contenue dans* $X_{E,\mathcal{F}}$, *la dimension du* $\mathbb{C}$-*espace vectoriel* $j_{E,n}{}^*(\Omega_E)$ *est majorée par* c.

□

Pour des raisons techniques qui apparaîtront par la suite (cf. le numéro 3.2.4), on montrera en fait une version un peu différente de la proposition 3.2.1.1. Si $\mathcal{F}$ est une famille finie de suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$, notons $k(\mathcal{F})$ et $e(\mathcal{F})$ les entiers définis par

$$\begin{cases} k(\mathcal{F}) = \max_{(\alpha)\in\mathcal{F}}\left(n \in \mathbb{Z},\ n \le \alpha_i\ (i=1,\dots,N)\right) \\ e(\mathcal{F}) = \min_{(\alpha)\in\mathcal{F}}\left(n \in \mathbb{Z},\ \alpha_i < n\ (i=1,\dots,N)\right) \end{cases}.$$

Alors, pour toute extension totalement ramifiée E de E_1, la partie

$$p_E\left(X_{E,\mathcal{F}}\right) = p_E\left(\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}} K_E \varpi_E{}^{(\alpha)} K_E\right)$$

est contenue dans l'ouvert compact $V_{E,(k(\mathcal{F}),e(\mathcal{F}))}$ de E^N et par conséquent

$$X_{E,\mathcal{F}} \subset \Omega_{E,(k(\mathcal{F}),e(\mathcal{F}))}.$$

La proposition suivante implique donc la proposition 3.2.1.1.

Proposition 3.2.1.2. — *Soit* (k,e) *un couple d'entiers tel que* k<e. *Il existe une constante* $c'=c'(q,n,(k,e))>0$ *telle que pour toute extension totalement ramifiée* E *de* E_1, *la dimension du* $\mathbb{C}$-*espace vectoriel* $j_{E,n}{}^*(\Omega_{E,(k,e)})$ *est majorée par* c'.

□

La démonstration de cette proposition nous occupera jusqu'à la fin du numéro 3.2.

Comme on l'a dit dans l'introduction, l'idée est de reprendre en détail le cheminement de la démonstration de L. Clozel, en montrant, à chaque étape, que l'indice de ramification de l'extension E/E_1 n'influe pas sur la dimension de l'espace $j_{E,n}{}^*(J_{G(E)}(\Omega_{E,(k,e)})$. Cette démonstration s'appuyant sur la théorie des représentations, il pourra s'avérer utile de s'entendre sur le vocabulaire utilisé.

Toutes les représentations considérées sont lisses.

Si M un sous-groupe de Levi standard de **G**(E), on note

— $\Psi(M)$ le groupe des *caractères* (3) *non ramifiés* de M (i.e les caractères de M qui se factorisent par M/M^0).

— $\mathcal{E}(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles (mais non nécessairement unitaires) de M.

— $\mathcal{E}_t(M)\subset\mathcal{E}(M)$ les classes de représentations *tempérées* (une représentation π de M est dite tempérée s'il existe un caractère ω de M tel que les coefficients de la représentation tordue $\omega\otimes\pi$ soient dans l'espace de Schwartz (cf. [Hari 2] n° 14 pour la définition).

— $\mathcal{E}_2(M)\subset\mathcal{E}_t(M)$ les classes de représentations *essentiellement de carré intégrable* (une représentation π de M est dite essentiellement de carré intégrable s'il existe un caractère ω de M tel que les coefficients de la représentation tordue $\omega\otimes\pi$ soient de carré intégrable modulo A_M).

— $\mathcal{E}_{cusp}(M)\subset\mathcal{E}_2(M)$ les classes de représentations *supercuspidales* (c'est à dire dont les coefficients ont un support compact modulo A_M).

On rappelle que le caractère-distribution $\mathrm{Tr}(\pi)$ d'une représentation admissible de longueur finie π de M est localement intégrable sur M ([Hari 3]), au sens où il existe une fonction localement intégrable Θ_π sur M, telle que

$$\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle = \int_M f(m)\Theta_\pi(m)dm$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(M)$ (où dm est la mesure de Haar sur M telle $\mathrm{vol}(K_E^M, dm)=1$). De plus, Θ_π est localement constante sur l'ouvert dense M_{reg} des éléments semi-simples réguliers.

On dit qu'une représentation (admissible de longueur finie) tempérée π de M est *elliptique* si la fonction Θ_π n'est pas identiquement nulle sur l'ouvert M_{ell} des éléments elliptiques de M, et l'on note $\mathcal{E}_{ell}(M)\subset\mathcal{E}_t(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles tempérées elliptiques de M.

Si K est un sous-groupe ouvert compact de M et si (π,M,V) une représentation de M, on note V^K le sous-espace vectoriel de V formé par les vecteurs fixes sous l'action des éléments de K et $(\pi^K,\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K),V^K))$ le $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K)$-module V^K associé à (π,M,V). Pour chaque entier $m\geq 1$, soit $\mathcal{E}^m(M)\subset\mathcal{E}(M)$ l'ensemble des classes de représentations ayant un vecteur non nul fixé par $K_E^{M,m}$, et pour chacun des groupes de classes de représentations $\mathcal{E}_\cdot(M)$ défini ci-dessus, soit $\mathcal{E}_\cdot^m(M)=\mathcal{E}_\cdot(M)\cap\mathcal{E}^m(M)$.

L'idée centrale de la démonstration de L. Clozel consiste à couper l'expression

$$\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle = \int_{\mathbf{G}(E)} f(g_E)\Theta_\pi(g_E)dg_E.$$

où π est une représentation irréductible de $\mathbf{G}(E)$ et $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$. Sa première version séparait la trace en termes elliptiques et termes non elliptiques ([Cloz 1]), et amenait, le conducteur n de l'algèbre de Hecke à laquelle appartiennent les fonctions f étant fixé, à considérer *toutes* les représentations (irréductibles) elliptiques; d'où la nécessité, comme on l'a dit dans l'introduction, d'une hypothèse conjecturale de finitude des exposants spéciaux de la série discrète. La deuxième version ([Cloze 2]) en revanche, isole les termes "compacts" (i.e. les éléments de $\mathbf{G}(E)_c$) des termes non compacts, et contrôle ainsi, grâce à une formule remarquable ([Cloze 2] prop. 1) exprimant la trace complète $\langle\mathrm{Tr}(\pi),f\rangle$ en termes des traces compactes des modules de Jacquet des sous-groupes de Levi standards de $\mathbf{G}(E)$, les représentations (irréductibles) elliptiques π dont la *trace compacte* (i.e. la restriction à $\mathbf{G}(E)_c$ de la distribution $\Theta_\pi(g_E)dg_E$) n'est pas identiquement nulle sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$. Enfin, une version duale de la formule susdite ([Cloz 3] corol. à la prop.2.1), exprimant cette fois la trace compacte en

(3) Pour nous, un caractère est un homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^\times$.

termes des traces complètes des modules de Jacquet de ces mêmes sous-groupes de Levi, simplifie encore un peu les arguments.

Une fois établi que la contribution des représentations irréductibles elliptiques de **G**(E) engendre un sous-espace vectoriel de dimension finie du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$, on montre par induction sur la dimension des sous-groupes de Levi de **G**(E) et grâce aux propriétés de descente des parties compactes modulo conjugaison (lemme 3.1.3.1) et des intégrales orbitales non elliptiques (lemme 3.1.3.2) de **G**(E), que la contribution de toutes les représentations irréductibles tempérées engendre un sous-espace de dimension finie du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$. On conclut grâce au théorème de densité des traces des représentations tempérées dans l'espace des distributions Ad**G**(E)-invariantes sur **G**(E) ([Kazh 1] theorem 0).

3.2.2. Compter les représentations elliptiques.

Lemme 3.2.2.1. — *Il existe une constante* $c_1=c_1(q,n)$ *telle que, pour toute extension totalement ramifiée* E *de* E_1, *l'ensemble* $\varepsilon_{ell}^n(\mathbf{G}(E))$ *est, modulo torsion par les caractères non ramifiés de* **G**(E), *un ensemble fini dont le cardinal est majoré par* c_1.

Démonstration.

L'homomorphisme d'Harish-Chandra $h_{\mathbf{G}(E)}: \mathbf{G}(E) \to a_{\mathbf{G}(E)}$ induisant (cf. le numéro 3.1.1) un isomorphisme du réseau $C_{\mathbf{G}(E)}(\varpi_E)=\varpi_E^{\mathbb{Z}}$ de $A_{\mathbf{G}(E)}$ sur le réseau $h_{\mathbf{G}(E)}(A_{\mathbf{G}(E)})$ (lequel est d'indice N dans $R_{\mathbf{G}(E)}=h_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{G}(E))$), on a une application surjective

$$\mathrm{Hom}\left(R_{\mathbf{G}(E)},\mathbb{C}^\times\right)\to \mathrm{Hom}\left(\varpi_E{}^{\mathbb{Z}},\mathbb{C}^\times\right).$$

Par conséquent, si τ_1 et τ_2 sont deux représentations irréductibles de **G**(E), il existe un caractère non ramifié η de **G**(E) tel que τ_1 et $\eta\otimes\tau_2$ aient même caractère central sur $\varpi_E{}^{\mathbb{Z}}$.

Si $\tau\in{}'\tau'$ pour une classe de représentations $'\tau'\in\varepsilon^n(\mathbf{G}(E))$, son caractère central $\chi_\tau: E^\times \to \mathbb{C}^\times$ se factorise par $E^\times/(1+\mathcal{P}_E{}^n)$. Comme le sous-groupe $\varpi_E{}^{\mathbb{Z}}(1+\mathcal{P}_E{}^n)$ est d'indice fini $(q-1)q^{n-1}$ dans $E^\times$, la remarque précédente entraîne que le caractère central d'une représentation irréductible de **G**(E) ayant un vecteur fixe par $K_E{}^n$ appartient, modulo torsion par les caractères non ramifiés de **G**(E), à un ensemble fini dont le cardinal ne dépend que de n et q.

Il résulte des travaux de H. Jacquet sur le groupe linéaire que l'ensemble $\varepsilon_{ell}(\mathbf{G}(E))$ coïncide avec la série discrète $\varepsilon_2(\mathbf{G}(E))$. En effet, toute représentation irréductible tempérée de **G**(E) se réalise comme l'induite parabolique unitaire d'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de M pour un sous-groupe de Levi standard M de **G**(E) ([Zele] theorem 9.7), proposition qui généralise le même résultat montré par H. Jacquet dans le cadre unitaire ([Jacq] §3)). Or, si M est un sous-groupe de Levi standard propre de **G**(E), P=MU un sous-groupe parabolique de composante de Levi M et σ une représentation irréductible de M, pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(M)$, on a

$$\left\langle\Theta_\pi,f\right\rangle=\left\langle\Theta_\sigma,f^P\right\rangle,\quad \pi=\mathrm{ind}_{MU}^{G(E)}\left(\delta_P{}^{1/2}\sigma\right),$$

où $f^P\in C_{c,\infty}(M)$ désigne le terme K_E-invariant suivant P. Par conséquent le caractère-distribution Θ_π de la représentation π est à support hors de l'ouvert elliptique $\mathbf{G}(E)_{ell}$.

On rappelle brièvement la classification de $\varepsilon_2(\mathbf{G}(E))$ telle quelle a été faite par Zelevinski ([Zele]). Soit N=ab une décomposition de N et soit M=M(a) le sous-groupe de Levi standard *homogène* de **G**(E)

$$M=\mathrm{diag}\left(GL_b(E),\ldots,GL_b(E)\right)\ \left(\text{a blocs diagonaux}\right).$$

Soit

$$\nu\colon GL_b(E) \to \mathbb{Q}^\times,\ g \mapsto |\det g|_E\,,$$

le caractère de $GL_b(E)$ donné par la valeur absolue normalisée du déterminant et soit $\sigma\in$'σ' pour une classe de représentations 'σ'$\in\mathcal{E}_{cusp}(GL_b(E))$. Soit P=MU le sous-groupe parabolique standard de **G**(E) de composante de Levi M et soit

$$\iota = \mathrm{ind}_{MU}^{G(E)}\left(\sigma\otimes\nu\sigma\otimes\nu^2\sigma\otimes\cdots\otimes\nu^{a-1}\sigma\otimes\mathbf{1}_U\right),$$

"ind" désignant ici l'induite parabolique unitaire (cf. [Be-Ze] n° 1.8). Alors ι possède un unique quotient irréductible π dont la classe 'π' appartient $\mathcal{E}_2(\mathbf{G}(E))$. De plus, tout représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de **G**(E) est obtenue de cette manière.

On fixe un sous-groupe de Levi standard homogène $M=M(a)\cong GL_b(E)^a$ pour une décomposition N=ab de N. Soit P=MU le sous-groupe parabolique standard de **G**(E) de Levi M. Soit $\sigma\in$'σ' pour une classe de représentations 'σ'$\in\mathcal{E}_{cusp}(GL_b(E))$ et soit π l'unique quotient irréductible de l'induite parabolique unitaire

$$\mathrm{ind}_{MU}^{G(E)}\left(\sigma\otimes\nu\sigma\otimes\nu^2\sigma\otimes\cdots\otimes\nu^{a-1}\sigma\otimes\mathbf{1}_U\right).$$

Le centre A_M de M s'identifiant naturellement à $(E^\times)^a$, le caractère central de la représentation $\tau=\sigma\otimes\nu\sigma\otimes\nu^2\sigma\otimes\cdots\otimes\nu^{a-1}\sigma$ de M est donné par

$$\chi_\tau=\chi_\sigma\otimes\left(|\ |_E\right)^b\chi_\sigma\otimes\left(|\ |_E\right)^{2b}\otimes\cdots\otimes\left(|\ |_E\right)^{(a-1)b}\chi_\sigma:\left(E^\times\right)^a\to\mathbb{C}^\times,$$

où $\chi_\sigma : E^\times \to \mathbb{C}^\times$ désigne le caractère central de la représentation σ. D'où l'expression du caractère central χ_π de la représentation π

$$\chi_\pi=\chi_\tau|_{A_{G(E)}}=\left(|\ |_E\right)^{ba(a-1)/2}\left(\chi_\sigma\right)^a:E^\times\to\mathbb{C}^\times.$$

On déduit de cette expression que si $\chi : A_{G(E)}(=E^\times)\to\mathbb{C}^\times$ est un caractère fixé, et si σ est une représentation supercuspidale de $GL_b(E)$ telle que la représentation essentiellement de carré intégrable π construite ci-dessus ait un caractère central χ_π égal à χ, alors le caractère central χ_σ de σ appartient à un ensemble fini dont le cardinal est majoré par une constante ne dépendant que de a (ce qui n'est rien d'autre que la preuve de la finitude du nombre d'exposants spéciaux de la série discrète pour GL_N).

Supposons de plus que la représentation π construite ci-dessus contienne un vecteur non nul fixé par le sous-groupe de congruence $K_E{}^n$. Le foncteur de Jacquet unitaire $\delta_P{}^{-1/2}\pi_U$ de π étant conjugué par un élément du groupe de Weyl $W(\mathbf{G}(E),\mathbf{A}_1(E))$ ($\cong \mathcal{S}_N\subset K_E$) à la représentation $\tau=\sigma\otimes\nu\sigma\otimes\nu^2\sigma\otimes\cdots\otimes\nu^{a-1}\sigma$ ([Be-Ze]), cette dernière contient un vecteur non nul fixé par le sous-groupe $M\cap K_E{}^n=K_E{}^{M,n}$ de M. Donc σ contient un vecteur non nul fixé par le sous-groupe de congruence $K=1+\varpi_E{}^nM_b(\mathcal{O}_E)$ de $GL_b(E)$.

On conclut grâce au travail de C.J. Bushnell & P.C. Kutzko ([Bu-Ku]): si ω: $E^\times\to\mathbb{C}^\times$ est un caractère de $GL_b(E)$ fixé, les classes de représentations supercuspidales σ de $GL_b(E)$ de caractère central ω telles que $\sigma^K\neq 0$ sont paramétrées par les types simples maximaux (J,λ) dans $GL_b(E)$ tels que le caractère central χ_λ de λ coïncide avec ω sur $\mathcal{O}_E{}^\times$ et la restriction de λ à $J\cap K$ contienne la représentation unité. Ces types simples sont en nombre fini majoré par un entier ne dépendant que de n et q.

D'où le lemme 3.2.2.1.

□

Remarque 3.2.2.2. — Il peut paraître un peu exagéré d'introduire les (classes de) représentations elliptiques comme un sous-ensemble des (classes de) représentations tempérées pour constater, dés le début, qu'elles coïncident avec la série discrète. D'une part le terme "elliptique" fait directement référence à la propriété qui nous intéresse, d'autre part (pensons à la généralisation) on espère ainsi mettre en évidence le fait que pour un groupe réductif (connexe) quelconque, toute représentation elliptique n'est pas dans la série discrète (en revanche, conséquence de la conjecture de Howe via les relations d'ortogonalité pour les caractères de la série discrète unitaire (cf. [Cloz 4] theorem 3), toute représentation de la série discrète est elliptique).

□

3.2.3. La trace compacte des représentations elliptiques.

Comme le caractère Θ_π d'une représentation admissible de longueur finie π de $\mathbf{G}(E)$ est localement intégrable sur $\mathbf{G}(E)$, on peut définir la trace compacte

$$\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c} = \int_{\mathbf{G}(E)_c} f(g_E)\Theta_\pi(g_E)dg_E$$

pour toute représentation irréductible π de $\mathbf{G}(E)$ et toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$.

Lemme 3.2.3.1. — *Pour toute extension totalement ramifiée* E *de* E_1, *les classes de représentations elliptiques* π *de* $\mathbf{G}(E)$ *telles que la distribution*

$$f\mapsto\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c}$$

n'est pas identiquement nulle sur $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$ *forment, modulo torsion par les caractères non ramifiés de* $\mathbf{G}(E)$, *un ensemble fini dont le cardinal est majoré par la constante* c_1 *du lemme 3.2.2.1.*

Démonstration.

On rappelle la formule pour la trace compacte de L. Clozel revisitée par J.L. Waldspurger ([Cloz 3] corol. à la prop. 2.1). Pour toute représentation admissible de longueur finie π de $\mathbf{G}(E)$, on a

$$\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c} = \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}(E)\\ M=M_P,U=U_P}} (-1)^{\dim(A_M)-1}\langle \mathrm{Tr}(\delta_P^{-1/2}\pi_U), \chi_M{}^\wedge f^P\rangle$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ (f^P désignant, pour chaque sous-groupe parabolique standard $P\in\mathcal{P}(E)$, le terme K_E-invariant de f suivant P).

Soit $\pi\in{}'\pi'$ pour une classe de représentations $'\pi'\in\mathcal{E}_{ell}(\mathbf{G}(E))$ telle que la distribution

$$f\mapsto\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c}$$

n'est pas identiqement nulle sur $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$. La formule ci-dessus entraîne qu'il existe au moins une fonction Φ appartenant à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$ et un sous-groupe parabolique standard P=MU de $\mathbf{G}(E)$ tels que l'expression $\langle\mathrm{Tr}(\delta_P^{-1/2}\pi_U),\chi_M{}^\wedge\Phi^P\rangle$ est non nulle.

Comme la fonction $\chi_M{}^\wedge$ est K-biinvariante pour tout sous-groupe ouvert compact K de M, la fonction $\chi_M{}^\wedge\Phi^P$ appartient à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(M,K_E^{M,n})$ (lemme 3.1.3.2.(2)). On en déduit que

$$\left(\delta_P^{-1/2}\pi_U\right)^{K_E^{M,m}}\neq 0.$$

Par conséquent le foncteur de Jacquet non normalisé π_U contient un vecteur fixé par le sous-groupe $K_E^{M,m}$ de M.

Comme le sous-groupe ouvert compact maximal K_E de **G**(E) est en bonne position par rapport à la paire parabolique (P,A_M), son sous-groupe de congruence K_E^n admet une décomposition triangulaire

$$K_E^n = (U^- \cap K_E^n)(M \cap K_E^n)(U \cap K_E^n)$$

(U^- est le radical unipotent du parabolique opposé à P), laquelle entraîne la surjection (cf. [Deli] prop. 3.5.2)

$$\sigma^{K_E^n} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow (\sigma_U)^{M\cap K_E^n}$$

pour toute représentation σ de **G**(E).

Donc la représentation π admet un vecteur non nul fixé par K_E^n et l'on est ramené au lemme 3.2.2.1.

□

Si ω est une partie finie du réseau $R_{\mathbf{G}(E)}=h_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{G}(E))$ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{G}(E)}$ et si π est une représentation admissible de longueur finie de **G**(E), on définit la distribution sur **G**(E)

$$f \mapsto \langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)} = \int_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)} f(g_E)\Theta_\pi(g_E)dg_E$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$.

Lemme 3.2.3.2. — *Soit* ω *une partie finie de* $\mathbb{Z}$ *identifiée (pour chaque extension totalement ramifiée* E *de* E_1*) à une partie du réseau* $R_{\mathbf{G}(E)}=h_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{G}(E))$ *de* $\mathfrak{a}_{\mathbf{G}(E)}$. *Il existe une constante* $c_2=c_2(q,n,\omega)$ *telle que pour toute extension totalement ramifiée* E *de* E_1, *les fonctionnelles linéaires*

$$f \mapsto \langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)},\ '\pi' \in \mathcal{E}_{ell}(\mathbf{G}(E)),\ f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n),$$

engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie majorée par c_2 *du dual algébrique de* $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$.

Démonstration.

Il suffit de raisonner avec une partie ω réduite à un élément.
Soit E une extension totalement ramifiée de E_1. Alors

$$\langle \mathrm{Tr}(\pi), f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)} = \langle \mathrm{Tr}(\pi), \mathbf{1}_{\mathbf{G}(E)(\omega)}.f\rangle_{\mathbf{G}(E)_c}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ et toute représentation irréductible π de **G**(E) ($\mathbf{1}_Y$ désignant, pour toute partie Y de **G**(E), la fonction caractéristique de Y).

Comme la fonction caractéristique de $\mathbf{G}(E)(\omega)=h_{\mathbf{G}(E)}^{-1}(\omega)$ est K-biinvariante pour n'importe quel sous-groupe ouvert compact K de **G**(E),

$$\mathbf{1}_{\mathbf{G}(E)(\omega)}.f \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E^n)$.

Enfin, si ψ est un caractère non ramifié de **G**(E), par définition il se factorise par le groupe quotient $\mathbf{G}(E)/\mathbf{G}(E)^0$. Ainsi, si $w\in\mathbf{G}(E)(\omega)$,

$$\left\langle \mathrm{Tr}(\pi\otimes\psi),f\right\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)}=\psi(w)\left\langle \mathrm{Tr}(\pi),f\right\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)}$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ et tout caractère non ramifié ψ de $\mathbf{G}(E)$.

On conclut grâce au lemme 3.2.3.1.

□

3.2.4. Démonstration de la proposition 3.2.1.2.

On procède par induction sur la dimension des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$. La lettre E désigne toujours une extension totalement ramifiée de E_1.

Soit

$$\mathbf{M}=\prod_{j=1}^{r}\mathbf{GL}_{N_j},\ \sum\nolimits_{1\le j\le r}N_j=N,$$

un sous-groupe de Levi standard propre de $\mathbf{G}$. Pour chaque indice $j\in\{1,...,r\}$, on note

$$p_{j,E}:\mathbf{GL}_{N_j}(E)\longrightarrow E^{N_j}$$

l'application donnée par les coefficients du polynôme caractéristique (cf. le numéro 3.2.1) et, pour toute famille $\phi=\{(k_j,e_j)\}_{1\le j\le r}$ de couples d'entiers (k_j,e_j) tels que $k_j<e_j$ pour chaque indice $j\in\{1,...,r\}$, on définit les parties

$$V_{\mathbf{M}(E),\phi}=\prod_{j=1}^{r}\left(\left(\prod_{m=1}^{N_j-1}\mathcal{P}_E^{k_jm}\right)\times\left(\mathcal{P}_E^{k_jN_j}-\mathcal{P}_E^{e_jN_j}\right)\right)\subset\prod_{j=1}^{r}E^{N_j}$$

et

$$\Omega_{\mathbf{M}(E),\phi}=\left\{\prod_{j=1}^{r}x_j\ \in\mathbf{M}(E),\ \prod_{j=1}^{r}p_{j,E}(x_j)\ \in V_{\mathbf{M}(E),\phi}\right\}\subset\mathbf{M}(E).$$

Il est clair que $\Omega_{\mathbf{M}(E),\phi}$ est une partie ouverte fermée et Ad$\mathbf{M}$(E)-invariante de $\mathbf{M}$(E).

On suppose la proposition 3.2.1.2 vraie pour tous les sous-groupes de Levi standard propres de $\mathbf{G}$, au sens où si $\mathbf{M}$ est un sous-groupe de Levi standard propre de $\mathbf{G}$, alors pour toute famille ϕ de couples d'entiers (k_j,e_j) (les entiers j indiciant les composantes connexes du levi $\mathbf{M}$), il existe une constante $c_{\mathbf{M}}=c_{\mathbf{M}}(q,n,\phi)>0$ telle que pour toute extension totalement ramifiée E de E_1, les restrictions à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathbf{M}(E),K_E^{\mathbf{M}(E),n})$ des distributions Ad$\mathbf{M}$(E)-invariantes sur $\mathbf{M}$(E) à support dans $\Omega_{\mathbf{M}(E),\phi}$ forment un sous-espace vectoriel de dimension finie majorée par $c_{\mathbf{M}}$ du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{M}(E),K_E^{\mathbf{M}(E),n})$. Comme cet énoncé est trivialement vrai pour le tore diagonal $\mathbf{M}=\mathbf{A}_1$ (si $\mathcal{F}$ est une famille finie de suites non ordonnées $(\alpha)\in\mathbb{Z}^N$, il existe une constante $c>0$ telle que pour toute extension totalement ramifiée E de E_1, la partie $\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}}\varpi_E^{(\alpha)}\mathbf{A}_1(\mathcal{O}_E)$ est union disjointe d'un nombre fini majoré par c de classes du groupe quotient $\mathbf{A}_1(E)/(\mathbf{A}_1(E)\cap K_E^n)$), le procédé d'induction démarre effectivement.

Fixons un couple d'entiers (k,e) tel que $k<e$ et, pour chaque sous-groupe de Levi standard propre $\mathbf{M}$ de $\mathbf{G}$, notons $\Omega_{E,(k,e)}{}^{\mathbf{M}}$ la partie ouverte, fermée et Ad$\mathbf{M}$(E)-invariante de $\mathbf{M}$(E) définie par

$$\Omega_{E,(k,e)}{}^{\mathbf{M}}=\mathbf{M}(E)\cap\Omega_{E,(k,e)}.$$

Commençons par vérifier que pour chaque sous-groupe de Levi standard propre **M** de **G**, la partie $\Omega_{E,(k,e)}{}^{M}$ de **M**(E) est contenue dans une partie du type de celles définies dans le procédé d'induction, autrement dit qu'il existe une famille de couples $\phi=\phi(\mathbf{M},(k,e))$ telle que l'on ait l'inclusion $\Omega_{E,(k,e)}{}^{M}\subset\Omega_{M(E),\phi}$ pour toute extension totalement ramifiée E de E_1. On fixe une clôture algébrique **E** de E_1 et pour chaque E, on note v_E la valuation (réelle) sur **E** prolongeant la valuation dicrète normalisée sur E.

Soit un élément $x\in\Omega_{E,(k,e)}$. Alors, l'expression des coefficients $a_i(x)$ $(0\leq i\leq N-1)$ du polynôme caractéristique de x en termes des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres γ_i $(1\leq i\leq N)$ de x dans **E** (chaque valeur propre est comptée un nombre de fois égal à sa multiplicité dans $p_E(x)$) entraîne la relation $k\leq v_E(\gamma_i)\leq eN-k(N-1)$, $1\leq i\leq N$. En effet, supposons qu'il existe une valeur propre γ_i telle que $v_E(\gamma_i)<k$ et notons alors $m\in\{1,\ldots,N\}$ le nombre de valeurs propres qui vérifient cette propriété. Ainsi, ou bien $m=N$ ce qui contredit la condition $v_E(a_0(x))\geq kN$; ou bien $m\in\{1,\ldots,N-1\}$ et, si l'on ordonne les valeurs propres γ_i en sorte que $v_E(\gamma_i)<k$ pour tout $i\in\{1,\ldots,m\}$, les relations $v_E(\gamma_1\ldots\gamma_m)<km$ et $v_E(a_{N-m}(x))\geq km$ entraînent l'existence d'un "mot" de longueur m

$$\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_m},\ i_c\neq i_d \text{ si } c\neq d,\ \{i_1,\ldots,i_m\}\neq\{1,\ldots,m\},$$

tel que

$$v_E(\gamma_{i_1}\cdots\gamma_{i_m})=v_E(\gamma_1\cdots\gamma_m),$$

donc l'existence d'une valeur propre γ_i, $i\in\{m+1,\ldots,N\}$, telle que $v_E(\gamma_i)<k$, contradiction. Quant à la majoration $v_E(\gamma_i)\leq eN-k(N-1)$, supposons par l'absurde qu'il existe une valeur propre γ_j telle que $v_E(\gamma_j)>eN-k(N-1)$. Alors, comme la condition $v_E(a_0(x))<eN$ entraîne l'inégalité $\Sigma_{i\neq j}v_E(\gamma_i)<k(N-1)$, la relation $k\leq v_E(\gamma_i)$, $1\leq i\leq N$, déjà montrée est contredite.

En retour, il est clair que l'expression des coefficients du polynôme caractéristique $p_{i,E}(x_i)$ d'une composante x_i d'un élément $x=(\Pi_j x_j)\in\Omega_{E,(k,e)}{}^{M}$ (les entiers j indiciant les composantes connexes du Levi **M**) en termes des fonctions symétriques élémentaires des valeurs propres de x_i dans **E**, entraîne l'existence de la famille de couples $\phi=\phi(\mathbf{M},(k,e))$.

Modulo l'identification du réseau $R_{G(E)}=h_{G(E)}(\mathbf{G}(E))$ de $a_{G(E)}$ avec $\mathbb{Z}$ (cf. le numéro 3.1.1) et notant $\omega_{E,(k,e)}$ la partie $h_{G(E)}(\Omega_{E,(k,e)})$, on a $\omega_{E,(k,e)}=\{kN,kN+1,\ldots,eN-1\}$. On en déduit, grâce au lemme 3.1.2, que la partie $\mathbf{G}(E)_c(\omega_{E,(k,e)})$ de **G**(E) est contenue dans l'union des parties $\mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)(\varpi_E{}^{m}K_E\varpi_E{}^{(\alpha(i))}K_E)$, $m\in\mathbb{Z}$ et $i\in\{0,\ldots,N-1\}$ telles que soit satisfaite la double inégalité $kN\leq mN+i<eN$. Comme cette union est contenue dans $\mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)(\varpi_E{}^{k}\mathbf{M}_N(\mathcal{O}_E))$ et comme le déterminant des éléments de cette union est contenu dans $\mathcal{P}_E{}^{kN}-\mathcal{P}_E{}^{eN}$, on a la relation d'inclusion $\mathbf{G}(E)_c(\omega_{E,(k,e)})\subset\Omega_{E,(k,e)}$. Comme par définition on a aussi $\Omega_{E,(k,e)}\subset\mathbf{G}(E)(\omega_{E,(k,e)})$, en définitive

$$\mathbf{G}(E)_c\left(\omega_{E,(k,e)}\right)\subset\Omega_{E,(k,e)}\subset\mathbf{G}(E)\left(\omega_{E,(k,e)}\right)$$

pour toute extension totalement ramifiée E/E_1.

Les préparatifs nécessaires à la bonne marche des opérations étant terminés, on peut commencer la démonstration proprement dite.

Soit $x\in\Omega_{E,(k,e)}$ un élément régulier semi-simple non elliptique de **G**(E) et soit y un élément de l'orbite $O_{G(E)}(x)\subset\Omega_{E,(k,e)}$ tel que le centralisateur $\Gamma=\mathbf{G}(E)_y$ de y dans **G**(E) soit un tore maximal de **G**(E) contenu dans un sous-groupe de Levi standard propre $M=\mathbf{M}(E)$ de **G**(E). On fixe des mesures de Haar dg_x et dg_y sur les centralisateurs $\mathbf{G}(E)_x$ et $\mathbf{G}(E)_y$ dans **G**(E) des éléments x et y respectivement telles que soit satisfaite l'égalité $I^{G(E)}(\,.\,,x,dg_x)=I^{G(E)}(\,.\,,y,dg_y)$

(en tant que distributions sur $\mathbf{G}(E)$). Soit P le sous-groupe parabolique standard de $\mathbf{G}(E)$ tel que $M=M_P$. Alors (lemme 3.1.3.2.(1))

$$I^{\mathbf{G}(E)}(f,x,dg_x)=\left|D_{\Gamma\backslash M}(y)\right|_E^{-1/2} I^M\left(f^P,y,dg_y\right)$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ (f^P désignant le terme K_E-invariant de f suivant K_E).

Grâce au lemme 3.1.3.2.(2) et à l'hypothèse d'induction sur la dimension des sous-groupes de Levi de $\mathbf{G}$ ci-dessus, on conclut donc à l'existence d'une constante $d=d(q,n,(k,e))>0$ telle que, pour toute extension totalement ramifiée E de E_1, les formes linéaires

$$f\mapsto I^{\mathbf{G}(E)}(f,x,dg_x),\ f\in\mathcal{H}\left(\mathbf{G}(E),K_E{}^n\right),\ x\in\left(\Omega\cap\left(\mathbf{G}(E)_{reg}-\mathbf{G}(E)_{ell}\right)\right),$$

engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie $<d$ du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(E),K_E{}^n)$ (le choix des mesures de Haar dg_x sur les centralisateurs $\mathbf{G}(E)_x$ des éléments x considérés étant absolument indifférent).

Fixons une extension totalement ramifiée E de E_1 et notons $\Omega=\Omega_{E,(k,e)}$.

Soit W_1 un sous-espace vectoriel de codimension finie $<d$ de $C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E),K_E{}^n)$ tel que

$$I^{\mathbf{G}(E)}(f,x,dg_x)=0$$

pour toute fonction $f\in W_1$ et tout élément $x\in(\Omega\cap(\mathbf{G}(E)_{reg}-\mathbf{G}(E)_{ell}))$.

Soit $\omega=\{kN,kN+1,\ldots,eN-1\}$ et soit W_2 un sous-espace vectoriel de W_1 de codimension inférieure ou égale à la constante $c_2=c_2(q,n,\omega)$ du lemme 2.3.3.2 tel que

$$\left\langle \mathrm{Tr}(\pi),f\right\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)}=0$$

pour toute fonction $f\in W_2$ et toute représentation 'π'$\in\mathcal{E}_{ell}(\mathbf{G}(E))$.

Montrons alors que toute distribution $D\in J_{\mathbf{G}(E)}(\Omega)$ s'annule sur W_2.

Soit une fonction $f\in W_2$ et soit $\zeta=\mathbf{1}_\Omega f$, $\mathbf{1}_\Omega$ désignant la fonction caractéristique de Ω. Comme la partie Ω est ouverte et fermée dans $\mathbf{G}(E)$, la fonction ζ appartient à $C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$.

Montrons que $I^{\mathbf{G}(E)}(\zeta,x,dg_x)=0$ pour tout élément $x\in(\mathbf{G}(E)_{reg}-\mathbf{G}(E)_{ell})$. Si $x\notin\Omega$, cela résulte du fait que l'Ad$\mathbf{G}(E)$-orbite de x (fermée dans $\mathbf{G}(E)$ pour la topologie ϖ_E-adique) ne rencontre pas le support de ζ, et si $x\in\Omega$, alors $I^{\mathbf{G}(E)}(\zeta,x,dg_x)=I^{\mathbf{G}(E)}(f,x,dg_x)=0$ car $f\in W_1$.

Si Γ est un tore maximal de $\mathbf{G}(E)$, on note $W(\mathbf{G}(E),\Gamma)$ le sous-groupe de Weyl de $\mathbf{G}(E)$ relativement à Γ et $D_{\Gamma\backslash\mathbf{G}(E)}$ la fonction sur Γ définie par $D_{\Gamma\backslash\mathbf{G}(E)}(x)=\det_{\mathrm{Lie}(\Gamma)\backslash\mathrm{Lie}(\mathbf{G}(E))}(1-\mathrm{Ad}x^{-1})$). Fixons une mesure de Haar $d\gamma_\Gamma$ sur chaque tore maximal $\Gamma\in\Sigma_E$ de $\mathbf{G}(E)$. Alors la formule d'intégration de Weyl

$$\int_{\mathbf{G}(E)}\xi(g_E)\Theta_\pi(g_E)dg_E=\sum_{\Gamma\in\Sigma_E}\left|W(\mathbf{G}(E),\Gamma)\right|^{-1}\int_{\Gamma\cap\mathbf{G}(E)_{reg}}\left|D_{\Gamma\backslash\mathbf{G}(E)}(\gamma_\Gamma)\right|_E I^{\mathbf{G}(E)}(\xi,\gamma_\Gamma,d\gamma_\Gamma)\Theta_\pi(\gamma_\Gamma)d\gamma_\Gamma$$

pour toute fonction $\xi\in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E))$ et toute représentation irréductible π de $\mathbf{G}(E)$, entraîne que $\langle\mathrm{Tr}(\pi),\zeta\rangle=0$ pour toute représentation π irréductible tempérée non elliptique de $\mathbf{G}(E)$ (le support du caractère Θ_π se trouvant alors hors de l'ouvert elliptique $\mathbf{G}(E)_{ell}$ de $\mathbf{G}(E)$).

Comme $\mathbf{G}(E)_{ell}\subset\mathbf{G}(E)_c$, l'inclusion $\mathbf{G}(E)_c(\omega)\subset\Omega$ entraîne que si $x\in\Omega\cap\mathbf{G}_{reg}$ n'est pas dans la partie compacte $\mathbf{G}(E)_c$, alors x ne peut pas être elliptique et $I^{\mathbf{G}(E)}(f,x,dg_x)=0$. Par conséquent (à nouveau grâce à la formule d'intégration de Weyl rappelée ci-dessus), pour toute représentation irréductible elliptique π de $\mathbf{G}(E)$,

$$\left\langle\mathrm{Tr}(\pi),\zeta\right\rangle=\left\langle\mathrm{Tr}(\pi),\mathbf{1}_\Omega f\right\rangle=\left\langle\mathrm{Tr}(\pi),f\right\rangle_{\mathbf{G}(E)_c(\omega)}=0$$

car $f \in W_2$.

Ainsi, $\langle \mathrm{Tr}(\pi), 1_\Omega f\rangle = 0$ pour toute représentation $'\pi' \in \mathcal{E}_{\mathrm{temp}}(\mathbf{G}(E))$, ce qui entraîne ([Kazh 3] theorem 0) que $D(1_\Omega f)=0$ pour toute distribution $D \in J_{\mathbf{G}(E)}(\mathbf{G}(E))$.

On a donc montré que toute distribution $\mathrm{Ad}\mathbf{G}(E)$-invariante dans $\mathbf{G}(E)$ à support contenu dans Ω s'annule sur le sous-espace vectoriel W_2 de $C_{c,\infty}(\mathbf{G}(E), K_E{}^n)$.

En définitive, la constante $c' = d + c_2$ répond à l'énoncé de la proposition 3.2.1.2.

□

4. La conjecture de Howe en caractéritique p>0.

Soit F un corps local de caractéristique $p>0$ à corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de cardinal $q=p^r$. On fixe une uniformisante ϖ_F de F et l'on identifie F à $\mathbb{F}_q((\varpi_F))$, le corps des séries formelles en l'indéterminée ϖ_F sur $\mathbb{F}_q$.

Proposition 4. (Conjecture de Howe) — *Soit Ω_F une partie compacte modulo conjugaison dans* $\mathbf{G}(F)$ *et soit* K *un sous-groupe ouvert compact de* $\mathbf{G}(F)$. *Alors l'espace des restrictions à $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K)$ des distributions de $J_{\mathbf{G}(F)}(\Omega_F)$ est de dimension finie.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de suites ordonnées $(\alpha)=(\alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ telle que

$$\Omega_F \subset \mathrm{Ad}\mathbf{G}(F)\left(\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{F}} K_F \varpi_F{}^{(\alpha)} K_F\right)$$

et n un entier ≥ 1 tel que $K_F{}^n \subset K$.

Par induction sur la dimension, on peut supposer la conjecture de Howe vraie pour tous les sous-groupes de Levi standard propres de $\mathbf{G}(F)$ (elle est trivialement vraie pour le tore diagonal $\mathbf{A}_1(F)$ donc l'induction démarre). On rappelle (cf. [Laum] lemma (4.8.11) ou le chapitre 3, prop. 3.2.1) que si x est un élément de $\mathbf{G}(F)$ non elliptique, alors il existe un sous-groupe parabolique propre $\mathbf{P}$ (de radical unipotent U) de $\mathbf{G}(F)$ et une composante de Levi M (de centre A) de P, tels que, si $x=yu$ ($y\in M$, $u \in U$) est la décomposition de x suivant $P=MU$ et si K_P est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathbf{G}(F)$ en bonne position par rapport à la paire (P,A), il existe des mesures de Haar dg_x et dm_y sur les centralisateurs $\mathbf{G}(F)_x$ et M_y respectivement, tels que

$$I^{G(F)}(f, x, dg_x) = I^M(f^P, y, dm_y)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$ (f^P désignant le terme K_P-invariant de f suivant P). Quitte à conjuguer x dans $\mathbf{G}(F)$, on peut bien sûr supposer que M est standard et prendre $K_P = K_F$. Ainsi (cf. le numéro 3.2.4), grâce aux lemmes 3.1.3.1 et 3.1.3.2.(2) et à l'hypothèse d'induction, on peut affirmer l'existence d'un sous-espace W_1 de codimension finie de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F), K_F{}^n)$ tel que $I^{G(F)}(f, x, dg_x) = 0$ pour tout élément $x \in \Omega_F$ non elliptique dans $\mathbf{G}(F)$ et toute fonction $f \in W_1$.

Soit $c = c(q, n, \mathcal{F})$ la constante de la proposition 3.2.1.1 Supposons par l'absurde que les intégrales orbitales elliptiques (normalisées)

$$f \mapsto I^{G(F)}(f, y),\ y \in \Omega_F \text{ elliptique dans } \mathbf{G}(F),$$

engendrent un sous-espace vectoriel de dimension infinie du dual de $\mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$. Alors il existe c+1 éléments $y_1,\dots,y_{c+1}$ de Ω_F elliptiques dans $\mathbf{G}(F)$ tels que les formes linéaires

$$f \mapsto I^{\mathbf{G}(F)}(f, y_i),\ 1 \le i \le c+1,\ f \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), K_F{}^n),$$

sont linéairement indépendantes. On peut supposer que les éléments y_i, $1 \le i \le c+1$, sont tous dans l'union de doubles classes $\coprod_{(\alpha)\in\mathcal{J}} K_F \varpi_F{}^{(\alpha)} K_F$. La proposition 2.4 nous assure alors que si E est une extension suffisamment ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ à corps résiduel de cardinal q, il existe un isomorphisme d'algèbre de Hecke

$$\zeta : \mathcal{H}(\mathbf{G}(F), K_F{}^n) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}(\mathbf{G}(E), K_E{}^n)$$

et, pour chaque entier i tel que $1 \le i \le c+1$, un élément $y_{E,i} \in \coprod_{(\alpha)\in\mathcal{J}} K_E \varpi_E{}^{(\alpha)} K_E$ tels que l'on ait l'égalité entre intégrales orbitales normalisées

$$I^{\mathbf{G}(F)}(f, y_i) = I^{\mathbf{G}(E)}(\xi(f), y_{E,i}),\ 1 \le i \le c+1,$$

pour tout fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbf{G}(F),K_F{}^n)$; ce qui contredit la proposition 3.2.1.

Soit donc W_2 un sous-espace de codimension finie de W_1 tel que tel que $I^{G(F)}(f, x, dg_x) = 0$ pour tout élément $x \in \Omega_F$ et toute fonction $f \in W_2$.

L'intersection de Ω_F avec chaque nappe de Dixmier $X_{(\alpha)}$ de $\mathbf{G}(F)$ (cf. le chapitre 3, n° 2.2.3) est une union (disjointe) d'Ad$\mathbf{G}(F)$-orbites de même dimension (en tant que variétés ϖ_F-adiques). Ainsi, pour toute fonction $f \in W_2$, on montre par approximations successives en rangeant les nappes par dimension croissante (cf. le chapitre 3, prop. 4.4.2), qu'il existe des fonctions $h_i \in C_{c,\infty}(\Omega_F)$, $1 \le i \le k$, et des éléments $g_i \in \mathbf{G}(F)$, $1 \le i \le k$, tels que

$$f|_{\Omega_F} = \sum_{1\le i\le k} h_i - Ad^*g_i(h_i).$$

Comme la partie Ω_F est fermée dans $\mathbf{G}(F)$, il existe pour chaque entier i, $1 \le i \le k$, une fonction $\varphi_i \in C_{c,\infty}(\mathbf{G}(F))$ telle que la restriction de φ_i avec Ω_F coïncide avec h_i. Ainsi

$$\left.\left(f - \sum_{1\le i\le k} \left(\varphi_i - Ad^*g_i(\varphi_i)\right)\right)\right|_{\Omega_F} \equiv 0$$

et par conséquent $T(f) = 0$ pour toute distribution $T \in J_{G(F)}(\Omega_F)$.

D'où le résultat.

□

5. Références.

[Be-Ze] I.N. BERNSTEIN & A.V. ZELEVINSKY. – *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4ème série) **10** (1977), 441-472.

[Bu-Ku] C.J. BUSHNELL & P.C. KUTZKO. – *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Annals of Math. Studies **129**, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1993.

[Bush] C.J. BUSHNELL – *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of* GL_N, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 184-210.

[Cara] H. CARAYOL. – *Représentations cuspidales deu groupe linéaire*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4ème série) **17** (1984), 191-225.

[Cass] W. CASSELMAN. – *Characters and Jacquet Modules*, Math. Ann. **230** (1977), 101-105.

[Cloz 1] L. CLOZEL. – *Sur une conjecture de Howe —I*, Compositio Math. **56** (1985), 87-110.

[Cloz 2] L. CLOZEL. – *Orbital integrals on p-adics groups. A proof of the Howe conjecture*, Ann. of Math. **129** (1989), 237-251.

[Cloz 3] L. CLOZEL. – *The fundamental lemma for stable base change*, Duke Math. Journal **61** (1990), 225-302.

[Cloz 4] L. CLOZEL. – *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group*, in Harmonic Analysis on Reductive p-adic groups, proc. of the Bowdoin conf. 1989, coll. Progress in Math., n° **101** (W. Barker, P. Sally, ed.), Birkhäuser, Boston, 1991.

[Deli] P. DELIGNE. – *Le "centre" de Bernstein* in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984, 1-32.

[Hari 1] HARISH-CHANDRA. – *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lectures Notes in Math., n° **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Hari 2] HARISH-CHANDRA. – *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Proc. of Symp. in Pure Math. **26** (1973), Amer. Math. Soc., Providence, 167-192.

[Hari 3] HARISH-CHANDRA. – *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Queen's papers in Pure and Applied Math. **48** (1978), 377-380.

[Hari 4] HARISH-CHANDRA. – *A submersion principle and its applications*, proc. Indian Acad. sci. (Math. Sci.) **90** (1981), 95-102.

[Howe] R. HOWE. – *Two conjectures about reductive p-adic groups*, Proc. of Symp. in Pure Math. **26** (1973), Amer. Math. Soc., Providence, 377-380.

[Jacq] H. JACQUET. – *Generic representations* in Non Commutative Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math., n° **587**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[Kazh 1] D. KAZHDAN. – *Cuspidal geometry of p-adic groups*, J. d'Analyse Math. **47** (1986), 1-36.

[Kazh 2] D. KAZHDAN. – *Representations of groups over close local fields*, Jour. d'Analyse Math. **47** (1986), 175-179.

[Laum] G. LAUMON. – *Cohomology with compact supports of Drinfeld modular varieties* (Part 1), Publi. Math. Univ. Paris-Sud, 1991.

[Rodi] F. RODIER. – *Intégrabilité locale des caractères du groupe GL(n,k) où k est un corps local de caractéristique positive*, Duke Math. Jour. **85** (1985), 771-792.

[Vign] M.F. VIGNERAS. – *Caractérisation des intégrales orbitales sur un groupe réductif p-adique*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **28** (3), sec. 14 (1982), 945-961.

[Zele] I.A. ZELEVINSKY. – *Induced representations of reductive p-adic groups II. On irreducible representations of GL(n)*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4ème série) **13** (1980), 165-210.

Chapitre 5

Intégrabilité locale des caractères de $\mathbf{GL}_N$(F) où F est un corps local non archimédien de caractéristique quelconque

On étudie dans ce chapitre le comportement local du caractère-distribution Θ_π d'une représentation lisse irréductible π du groupe G=$\mathbf{GL}_N$(F), où N est un entier ≥ 2 et F un corps local non archimédien (i.e. un corps commutatif localement compact, non discret, ultramétrique et à corps résiduel fini). On montre que Θ_π est localement intégrable sur tout le groupe (au sens où pour toute mesure de Haar dg sur G, il existe une fonction localement intégrable K_π : G$\rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\Theta_\pi = K_\pi$.dg), ceci quelle que soit la caractéristique de F.

Ce résultat a été démontré par Harish-Chandra pour F de caractéristique nulle et G=**G**(F) groupe des points sur F de n'importe quel groupe réductif connexe **G** ([Hari 2]), puis étendu par L. Clozel à **G** non-connexe ([Cloz 1]). Quant à la caractéristique positive, les difficultés sont nombreuses: absence de l'application exponentielle permettant de transférer la question sur l'algèbre de Lie de G; existence d'éléments semi-simples inséparables (i.e. dont au moins une des composantes irréductibles du polynôme minimal est inséparable sur F) au voisinage desquels le procédé de "descente" d'Harish-Chandra ramenant l'étude de Θ_π à celle d'une distribution invariante au voisinage de l'élément neutre d'un groupe plus petit, ne fonctionne plus; résultats de R. Howe sur les germes de caractères ([Howe]) valables en toute caractéristique mais seulement pour **G**=$\mathbf{GL}_N$; etc.

Pour F de caractéristique >0 et G=$\mathbf{GL}_N$(F), F. Rodier a résolu le problème au voisinage des éléments dont les valeurs propres sont toutes séparables sur F, essentiellement en remplaçant l'application exponentielle par l'application Lie(G) $\rightarrow$ G, X $\mapsto$ 1+X ([Rodi]). La question de l'intégrabilité locale de Θ_π sur tout le groupe G se ramène dès lors à l'étude de Θ_π au voisinage des éléments semi-simples inséparables.

On reprend ici point par point l'organisation de l'article de F. Rodier, elle-même héritée de Harish-Chandra. On montre comment, grâce à la corestriction modérée de C.J. Bushnell & P.C. Kutzko, on peut construire, pour n'importe quel élément semi-simple (non nécessairement séparable) y de G, une submersion ramenant l'étude du caractère-distribution Θ_π au voisinage de y dans G à celle d'une distribution AdG_y-invariante θ_π sur l'algèbre de Lie du centralisateur G_y de y dans G (numéros 1 et 2). Cette construction nous transportant directement sur Lie(G_y), elle permet de faire l'économie du passage de G_y à Lie(G_y) (objet, dans le cas séparable, de quelques démonstrations délicates de F. Rodier) Pour étudier la distribution θ_π on utilise directement les énoncés de F. Rodier concernant les représentations des sous-groupes compacts de G, lesquels font pendant à la théorie de Kirillov (valable seulement en caractéristique 0) utilisée par Harish-Chandra en caractéristique 0 (numéros 3 et 4). On conclut grâce aux résultats de R. Howe sur les germes de caractères, valables, comme on l'a dit plus haut, en toute caractéristique pour $\mathbf{GL}_N$ (numéro 5).

1. Notations et présentation des acteurs.

1.1. Soient

— F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque à corps résiduel fini de cardinal q.

— $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F.

— $\mathcal{P}_F$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$.

— ϖ_F une uniformisante de F.

— $|\ |_F$ la valeur absolue sur F normalisée par $|\varpi_F|_F=q^{-1}$.

— N un entier ≥ 2 et $G=\mathbf{GL}_N(F)$.

— $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G identifiée à l'algèbre de matrices $\mathbf{M}_N(F)$ munie de l'opération adjointe $\mathrm{ad}g(v)=[g,v]=gv-vg$ $((g,v)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g})$. On note encore $|\ |_F$ la norme sur $\mathfrak{g}$ donnée par la plus grande valeur absolue des coefficients.

— $S=\{g\in\mathfrak{g},\ |g|_F=1\}\subset\mathfrak{g}$ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine.

— $\mathcal{N}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$.

On note Ad l'action de G sur $\mathfrak{g}$ par conjugaison.

Si H est une partie de G, W et V deux parties de $\mathfrak{g}$, et v un élément de $\mathfrak{g}$, on note

$$\mathrm{Ad}H(V)=\{\mathrm{Ad}h(v)\ ,h\in H,\ v\in V\},$$
$$\mathrm{ad}W(V)=[W,V]=\{[w,v],\ w\in W,\ v\in V\},$$
$$H_v=\{h\in H,\ \mathrm{Ad}h(v)=v\}.$$

1.2. Soit y un élément *semi-simple* de G, c'est-à-dire dont le polynôme minimal est produit de polynômes iréductibles (mais non nécessairement séparables) sur F deux à deux distincts.

Commençons par isoler les *composantes primaires* de y: pour chaque polynôme (unitaire) irréductible $Q(T)\in F[T]$ divisant le polynôme minimal de y, on définit le F-sous-espace vectoriel de F^N

$$V_{Q(T)}=\ker\{Q(y):F^N\to F^N\}.$$

Alors ([Bour] Alg. VII, §5, n° 1, prop. 3)

$$F^N=\bigoplus_{Q(T)\in\Phi(y)} V_{Q(T)},$$

$\Phi(y)$ désignant l'ensemble des composantes irréductibles du polynôme minimal de y. Ainsi, on peut associer canoniquement à y un sous-groupe de levi de G

$$M=\{g\in G,\ g(V_{Q(T)})\subset V_{Q(T)}\ \forall\, Q(T)\in\Phi(y)\}=\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathrm{Aut}_F(V_{Q(T)}).$$

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, soit $N_{Q(T)}$ la dimension du F-espace vectoriel $V_{Q(T)}$ et $y_{Q(T)}\in\mathrm{Aut}_F(V_{Q(T)})$ la composante de $y\in M$ sur $\mathrm{Aut}_F(V_{Q(T)})$. Alors

$$N_{Q(T)} = \deg(Q(T))\alpha_{Q(T)}$$

où $\alpha_{Q(T)}$ est la multiplicité de Q(T) en tant que composante irréductible du polynôme caractéristique de y. Et, notant

$$E_{Q(T)} = F[y_{Q(T)}] \cong F[T]/(Q(T))$$

l'extension de F (contenue dans la F-algèbre $\mathrm{End}_F(V_{Q(T)})$) engendrée par $y_{Q(T)}$, le centralisateur de y dans G

$$G_y = \prod_{Q(T)\in\Phi(T)} \mathrm{Aut}_{E_{Q(T)}}(V_{Q(T)}) \subset \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \mathrm{Aut}_F(V_{Q(T)}) = M$$

est (non canoniquement) isomorphe à

$$\prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \mathbf{GL}_{\alpha(Q(T))}(E_{Q(T)}).$$

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, soient

— $e_{Q(T)}=e(E_{Q(T)}/F)$ l'indice de ramification de l'extension $E_{Q(T)}/F$.
— $f_{Q(T)}=f(E_{Q(T)}/F)$ le degré résiduel de l'extension $E_{Q(T)}/F$.
— $\mathcal{O}_{Q(T)}$ l'anneau des entiers de $E_{Q(T)}$.
— $\mathcal{P}_{Q(T)}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Q(T)}$.
— $\varpi_{Q(T)}$ une uniformisante de $E_{Q(T)}$.
— $\mathfrak{m}_{Q(T)}=\mathrm{End}_F(V_{Q(T)})$ identifiée à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $M_{Q(T)}=\mathrm{Aut}_F(V_{Q(T)})$ le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$.
— $\mathfrak{b}_{Q(T)}\subset\mathfrak{m}_{Q(T)}$ la $E_{Q(T)}$-algèbre des $E_{Q(T)}$-endomorphismes de $V_{Q(T)}$ et $B_{Q(T)}\subset M_{Q(T)}$ le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$.
— $\mathcal{M}_{Q(T)}$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ normalisé par $E_{Q(T)}^\times$ tel que $\mathcal{B}_{Q(T)}=\mathfrak{b}_{Q(T)}\cap\mathcal{M}_{Q(T)}$ soit un $\mathcal{O}_{Q(T)}$-ordre héréditaire maximal (i.e. isomorphe à $\mathbf{M}_{\alpha(Q(T))}(\mathcal{O}_{Q(T)})$) de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$.
— $\mathcal{M}_{Q(T)}{}^i$ (resp. $\mathcal{B}_{Q(T)}{}^i=\mathfrak{b}_{Q(T)}\cap\mathcal{M}_{Q(T)}{}^i$), $i\in\mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{M}_{Q(T)}{}^1$ (resp. $\mathcal{B}_{Q(T)}{}^1=\mathfrak{b}_{Q(T)}\cap\mathcal{M}_{Q(T)}{}^1$) de $\mathcal{M}_{Q(T)}$ (resp. $\mathcal{B}_{Q(T)}$).

Soit $\mathfrak{b}=\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathfrak{b}_{Q(T)}\subset\mathfrak{m}=\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathfrak{m}_{Q(T)}$ le commutant de y dans $\mathfrak{g}$ et $B=G_y$ le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{b}$.

Soient

— $\mathcal{G}=\mathbf{M}_N(\mathcal{O}_F)$ l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire maximal *standard* de $\mathfrak{g}$.
— $\mathcal{G}^i=\{g\in\mathfrak{g}, |g|_F\le q^{-i}\}$, $i\in\mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{G}^1$ de $\mathcal{G}$.
— $G^i=1+\mathcal{G}^i$, $i\ge 1$, les sous-groupes de congruence modulo $\mathcal{P}_F{}^i$ du groupe multiplicatif $\mathbf{GL}_N(\mathcal{O}_F)$ de l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{G}$.

Quitte à conjuguer y par un élément de G, on supposera que le sous-groupe de Levi M de G canoniquement associé aux composantes primaires de y est *standard*, i.e. produit diagonal dans G de groupes linéaires sur F. Quitte à conjuguer une seconde fois y par un élément de M, on supposera (cf. [Bush] (1.8)) que

$$\mathfrak{m}\cap\mathcal{G}^1 \subset \prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{M}_{Q(T)} \subset \mathfrak{m}\cap\mathcal{G}.$$

Pour chaque $m\in\mathbb{Z}$, on définit l'$\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathfrak{m}$

$$\mathcal{M}^m = \varpi_F{}^m\left(\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{M}_{Q(T)}\right) = \prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{M}_{Q(T)}{}^{e_{Q(T)}m}$$

et le $(\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{O}_{Q(T)})$-réseau de $\mathfrak{b}$
$$\mathcal{B}^{m} = \mathfrak{b}\cap\mathcal{M}^{m} = \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \mathcal{B}_{Q(T)}{}^{e_{Q(T)}m}.$$
On note $\mathcal{M}=\mathcal{M}^0$ et $\mathcal{B}=\mathcal{B}^0=\mathfrak{b}\cap\mathcal{M}$.

Pour chaque suite $(\alpha)=(\alpha_{Q(T)})_{Q(T)\in\Phi(y)}$ de $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$, on définit le $(\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{O}_{Q(T)})$-réseau de $\mathfrak{b}$
$$\mathcal{B}^{(\alpha)} = \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \mathcal{B}_{Q(T)}{}^{\alpha_{Q(T)}}.$$

1.3. Personnage central: la *corestriction modérée* ([Bu-Ku] (1.3)).

On fixe (arbitrairement) un caractère additif[(1)] τ_F de F de *conducteur* $\mathcal{P}_F$ (i.e. trivial sur $\mathcal{P}_F$ mais non sur $\mathcal{O}_F$) et, pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, un caractère additif $\tau_{Q(T)}$ de $E_{Q(T)}$ de conducteur $\mathcal{P}_{Q(T)}$.

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, il existe une unique *corestriction modérée sur* $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ *relativement à* $E_{Q(T)}/F$ (i.e un homomorphisme de $(\mathfrak{b}_{Q(T)},\mathfrak{b}_{Q(T)})$-bimodules $f: \mathfrak{m}_{Q(T)} \to \mathfrak{b}_{Q(T)}$ tel que $f(\mathcal{Q})=\mathfrak{b}_{Q(T)}\cap\mathcal{Q}$ pour tout $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{Q}$ de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ normalisé par $E_{Q(T)}$) $s_{Q(T)}: \mathfrak{m}_{Q(T)} \to \mathfrak{b}_{Q(T)}$ telle que
$$\tau_F\circ \mathrm{Tr}_{\mathfrak{m}_{Q(T)}/F}(mb) = \tau_{Q(T)}\circ\mathrm{Tr}_{\mathfrak{b}_{Q(T)}/E_{Q(T)}}\big(s_{Q(T)}(m)b\big)$$
pour tout couple $(m,b)\in\mathfrak{m}_{Q(T)}\times\mathfrak{b}_{Q(T)}$ ([Bu-Ku] prop. (1.3.2) et prop. (1.3.4)).

Soit $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$ la sous-F-algèbre parabolique *standard* de $\mathfrak{g}$ (i.e. contenant la sous-F-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ des matrices triangulaires supérieures) de composante de Levi $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}^-=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{m}$ la sous-algèbre parabolique opposée à $\mathfrak{p}$, et $\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{m}$ la projection sur $\mathfrak{m}$ relativement à la décomposition de $\mathfrak{g}$ en
$$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}.$$

Soit l'homomorphisme de $(\mathfrak{b},\mathfrak{b})$-bimodules (défini composante par composante)
$$\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}s_{Q(T)}: \mathfrak{m}=\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathfrak{m}_{Q(T)} \to \mathfrak{b}=\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathfrak{b}_{Q(T)},$$
et soit
$$s=(\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}s_{Q(T)})\circ \mathrm{pr}_{\mathfrak{m}}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{b}.$$
Soit $\Psi_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g}\to\mathbb{C}^\times$ l'application définie par
$$\Psi_{\mathfrak{g}}(g)=\tau_F\circ\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}/F}(g),\ g\in\mathfrak{g},$$
et soit $\Psi_{\mathfrak{b}}: \mathfrak{b}\to\mathbb{C}^\times$ l'application définie par
$$\Psi_{\mathfrak{b}}(b)=\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\tau_{Q(T)}\circ\mathrm{Tr}_{\mathfrak{b}_{Q(T)}/E_{Q(T)}}\big(b_{Q(T)}\big),\ b=\Big(\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}b_{Q(T)}\Big)\in\mathfrak{b}.$$
Par construction, on a la relation
$$\Psi_{\mathfrak{g}}(gb)=\tau_F\circ\mathrm{Tr}_{\mathfrak{m}/F}(\mathrm{pr}_{\mathfrak{m}}(g)b)=\Psi_{\mathfrak{b}}(s(g)b)$$
pour tout couple $(g,b)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{b}$.

Si Λ est un $\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathfrak{g}$, on note Λ^* l'$\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathfrak{g}$ dual de Λ pour $\Psi_{\mathfrak{g}}$ défini par

---

(1) C'est-à-dire un homomorphisme continu de (F,+) dans $\mathbb{C}^\times$.

$$\Lambda^* = \{g \in \mathfrak{g},\ \Psi_{\mathfrak{g}}(gv) = 1,\ v \in \Lambda\}.$$

De même, si Γ est un $(\Pi_{Q(T)\in\Phi(v)}\mathcal{O}_{Q(T)})$-réseau de $\mathfrak{b}$, on note Γ^* le $(\Pi_{Q(T)\in\Phi(v)}\mathcal{O}_{Q(T)})$-réseau de $\mathfrak{b}$ dual de Γ pour $\Psi_{\mathfrak{b}}$ défini par

$$\Gamma^* = \{b \in \mathfrak{b},\ \Psi_{\mathfrak{b}}(bt) = 1,\ t \in \Gamma\}.$$

1.4. Si Σ est un espace topologique totalement discontinu, on note $C_{c,\infty}(\Sigma)$) (ou simplement $C_c(\Sigma)$ si la topologie sur Σ est la topologie discrète) l'espace des fonctions $\Sigma \to \mathbb{C}$ localement constantes à support compact. L'espace des distributions sur Σ est le dual algébrique $\mathcal{D}(\Sigma)$ de Σ. Si T est une distribution sur Σ, on note

$$\int_{\Sigma} f(x)dT(x) \text{ ou } \langle T, f\rangle$$

la valeur de T sur l'élément f de $C_{c,\infty}(\Sigma)$.

Si Γ est une partie ouverte (resp. fermée) de Σ, on identifie $C_{c,\infty}(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{D}(\Gamma)$) à l'espace des fonctions (resp. distributions) sur Σ à support dans Γ.

Si Λ est une partie ouverte compacte de Σ, on note $\mathbf{1}_\Lambda \in C_{c,\infty}(\Sigma)$ la fonction caractéristique de Λ.

Si τ est une action d'un groupe H sur un espace topologique Σ totalement discontinu, on note τ^* et τ les actions sur $C_{c,\infty}(\Sigma)$ et $\mathcal{D}(\Sigma)$ respectivement définies par

$$(\tau^*h(f))(x) = f(\tau h^{-1}(x)) \quad (h \in H,\ f \in C_{c,\infty}(\Sigma),\ x \in \Sigma),$$

$$\langle \tau h(T), f\rangle = \langle T, \tau^* h^{-1}(f)\rangle \quad (h \in H,\ T \in \mathcal{D}(\Sigma),\ f \in C_{c,\infty}(\Sigma)).$$

Si H est un sous-groupe de G et Σ une partie AdH-invariante de $\mathfrak{g}$, on note $J_H(\Sigma)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\Sigma)$ des distributions T AdH-invariantes sur Σ, c'est-à-dire telles que $\mathrm{Adh}(T)=T$ pour tout $h \in H$.

Si Σ est un espace topologique totalement discontinu et $d\mu$ une mesure sur Σ, toute fonction complexe λ sur Σ localement intégrable par rapport à $d\mu$ définit une distribution sur Σ

$$f \mapsto \int_{\Sigma} f(\mu)\lambda(\mu)d\mu \quad (f \in C_{c,\infty}(\Sigma)).$$

Une distribution de cette forme est dite *localement intégrable par rapport à* $d\mu$. Si de plus Σ possède une structure de groupe topologique localement compact, alors Σ est muni d'une *mesure de Haar* (i.e. une mesure de Radon invariante à gauche et non identiquement nulle) unique à un facteur constant près, et l'on dira seulement "*localement intégrable*" pour "*localement intégrable par rapport à une mesure de Haar sur* Σ" (l'intégrabilité locale ne dépendant bien évidemment pas de la mesure de Haar choisie).

Soient dX et dH les mesures de Haar sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}$ normalisées par

$$\mathrm{vol}(\mathcal{G}, dX) = \mathrm{vol}(\mathcal{B}, dH) = 1.$$

L'application $\Psi_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^\times$ (resp. $\Psi_{\mathfrak{b}}: \mathfrak{b} \to \mathbb{C}^\times$) construite au numéro 1.3 définit une transformée de Fourier sur $C_{c,\infty}(\mathfrak{g})$ donnée par

$$h^\wedge(g) = \int_{\mathfrak{g}} h(X)\overline{\Psi_{\mathfrak{g}}(gX)}dX \quad (g \in \mathfrak{g})$$

pour toute fonction $h \in C_{c,\infty}(\mathfrak{g})$, laquelle induit une transformée de Fourier sur $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$

$$\langle D^\wedge, h\rangle = \langle D, h^\wedge\rangle \quad (h \in C_{c,\infty}(\mathfrak{g}))$$

pour toute distribution $D \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$. De même, l'application $\Psi_{\mathfrak{b}} : \mathfrak{b} \to \mathbb{C}^\times$ définit une transformée de Fourier

$$f^\wedge(b) = \int_{\mathfrak{b}} f(H)\overline{\Psi_{\mathfrak{g}}(bH)}dH \quad (b \in \mathfrak{b})$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(\mathfrak{b})$, laquelle induit une transformée de Fourier sur $\mathcal{D}(\mathfrak{b})$ donnée par

$$\langle T^\wedge, f\rangle = \langle T, f^\wedge\rangle \quad (f \in C_{c,\infty}(\mathfrak{b}))$$

pour toute distribution $T \in \mathcal{D}(\mathfrak{b})$.(2)

1.5. Formule de Plancherel pour les sous-groupes ouverts compacts de G.

Soit dg la mesure de Haar sur G normalisée par

$$\mathrm{vol}(\mathbf{GL}_N(\mathcal{O}_F), dg) = 1.$$

Si K est un sous-groupe ouvert compact de G, on note $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de K.

Pour toute classe de représentations $\rho \in \mathcal{E}(K)$, on note χ_ρ le caractère de ρ, $\deg(\rho)$ le degré de ρ et $\xi_\rho = \mathrm{vol}(K, dg)^{-1}\deg(\rho)\chi_\rho$ l'idempotent associé à ρ (dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G)$ d'espace vectoriel sous-jaçent $C_{c,\infty}(G)$, munie du produit de convolution défini par

$$f * \lambda(v) = \int_G f(g)\lambda(g^{-1}v)dg$$

pour tout couple $(f, \lambda) \in C_{c,\infty}(G) \times C_{c,\infty}(G)$ et tout élément $v \in G$).

Avec ces notations, la formule de Plancherel pour K s'écrit

$$\varepsilon(1) = \sum_{\rho \in \mathcal{E}(K)} \xi_\rho dg$$

où $\varepsilon(g)$, $g \in G$, désigne la distribution sur G *masse unité en* g, définie par

$$\langle \varepsilon(g), f\rangle = f(g)$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$.

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}(G)$ et toute fonction $f \in C_{c,\infty}(G)$, on note $T*f$ la fonction sur G définie par

$$T * f(v) = \int_G f(g^{-1}v)dT(g) \quad (v \in V).$$

Ainsi, conséquence directe de la formule de Plancherel pour K, on a l'égalité

$$T = \sum_{\rho \in \mathcal{E}(K)} (T * \xi_\rho)dg$$

pour toute distribution $T \in \mathcal{D}(G)$ ([Hari 2] lemma 33).

(2) Comme pour la dualité des réseaux (cf. le numéro 1.3) désignée par le même symbole * pour les réseaux de $\mathfrak{g}$ et pour les réseaux de $\mathfrak{b}$, on désigne par le même symbole ^ la dualité des fonctions et des distributions dans $\mathfrak{g}$ et dans $\mathfrak{b}$. Le contexte dans lequel on utilisera ces objets sera toujours sufisamment clair pour que la lecture ne soit pas gênée par cette imprécision.

2. Descente des caractères.

2.1. On construit dans ce numéro un élément x de $\mathcal{M}\cap M$ appartenant à la pré-image de 1 (l'élément unité de $\mathfrak{b}$) par l'application s, grâce auquel on produira une submersion (numéro 2.2) permettant de ramener l'étude du caractère-distribution d'une représentation lisse irréductible de G à celle d'une distribution sur $x\mathfrak{b}$ (numéro 2.3), et vérifiant des propriétés telles que dans le cas *séparable modéré* (c'est-à-dire le cas où pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, l'extension $E_{Q(T)}/F$ est séparable et modérément ramifiée), x appartienne au centre de $\mathfrak{b}$ (cf. la remarque 2.1.1). Bien que cette dernière précision ne soit pas réellement indispensable à la construction (les conditions $x\in\mathcal{M}\cap M$ et $s(x)=1$ suffisant à la démonstration), on espère ainsi mettre en évidence les mécanismes distinguant le cas séparable du cas inséparable d'une part, le cas séparable modéré du cas séparable non modéré (ou *sauvage*) d'autre part.

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, on peut voir l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{M}_{Q(T)}$ de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ comme le stabilisateur dans $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ d'une chaîne de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans $V_{Q(T)}$

$$\mathcal{L}_{Q(T)}=\{\mathcal{L}_{Q(T),i},\, i\in\mathbb{Z}\}$$

(cf. [Bu-Ku] (1.1)). Soit $\mathcal{B}_{Q(T)}$ une $\mathcal{O}_{Q(T)}$-base ([Bu-Ku] def. (1.5.6)) de la chaîne $\mathcal{L}_{Q(T)}$ considérée comme une chaine de $\mathcal{O}_{Q(T)}$-réseaux dans $V_{Q(T)}$ (ceci à un sens car le groupe $E_{Q(T)}^{\times}$ normalise l'$\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire $\mathcal{M}_{Q(T)}$). Soit $W_{Q(T)}$ le sous-F-espace vectoriel de $V_{Q(T)}$ engendré par $\mathcal{B}_{Q(T)}$.

Le choix (arbitraire) de $\mathcal{B}_{Q(T)}$ induit une injection de F-algèbres

$$\iota_{\mathcal{B}_{Q(T)}}:\mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right)\longrightarrow\mathfrak{m}_{Q(T)} \tag{1}$$

qui prolonge l'inclusion $E_{Q(T)}\subset\mathfrak{m}_{Q(T)}$, le corps $E_{Q(T)}$ étant canoniquement inclus dans $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$.

Comme $\mathcal{B}_{Q(T)}$ est une $E_{Q(T)}$-base de $V_{Q(T)}$, l'inclusion de $W_{Q(T)}$ dans $V_{Q(T)}$ et l'action de $y_{Q(T)}$ sur $V_{Q(T)}$ induisent un isomorphisme de $E_{Q(T)}$-espaces vectoriels à gauches

$$E_{Q(T)}\otimes_F W_{Q(T)}\xrightarrow{\ \cong\ }V_{Q(T)}, \tag{2}$$

un isomorphisme de $E_{Q(T)}$-algèbres

$$E_{Q(T)}\otimes_F\mathrm{End}_F\left(W_{Q(T)}\right)\xrightarrow{\ \cong\ }\mathfrak{b}_{Q(T)}, \tag{3}$$

et une $(W_{Q(T)},E_{Q(T)})$-décomposition de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ (isomorphisme de $(\mathrm{End}_F(E_{Q(T)}),\mathfrak{b}_{Q(T)})$-bimodules)

$$\nu_{\mathcal{B}_{Q(T)}}:\ \mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right)\otimes_{E_{Q(T)}}\mathfrak{b}_{Q(T)}\xrightarrow{\ \cong\ }\mathfrak{m}_{Q(T)} \tag{4}$$

([Bu-Ku] (1.2.3)). Explicitement, l'isomorphisme 2.1.(4) est donné par l'injection 2.1.(1), l'inclusion canonique de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$ dans $\mathfrak{m}_{Q(T)}$, et la multiplication dans $\mathfrak{m}_{Q(T)}$.

Soit $\mathcal{A}_{Q(T)}$ l'unique $\mathcal{O}_F$-ordre héréditaire de $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$ normalisé par $E_{Q(T)}^{\times}$. Comme $\mathcal{B}_{Q(T)}$ est une $\mathcal{O}_{Q(T)}$-base de la chaîne de $\mathcal{O}_{Q(T)}$-réseaux $\mathcal{L}_{Q(T)}$ dans $V_{Q(T)}$, l'isomorphisme 2.1.(4) induit, par restriction, un isomorphisme de $(\mathcal{A}_{Q(T)},\mathcal{B}_{Q(T)})$-bimodules

$$\mathcal{A}_{Q(T)}\otimes_{\mathcal{O}_{Q(T)}}\mathcal{B}_{Q(T)}\xrightarrow{\ \cong\ }\mathcal{M}_{Q(T)} \tag{5}$$

([Bu-Ku] prop. (1.2.8)).

Soit

$$s_{0,Q(T)} : \mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right) \to E_{Q(T)}$$

l'unique corestriction modérée sur $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$ relativement à $E_{Q(T)}/F$ telle que, en termes de la $(W_{Q(T)}, E_{Q(T)})$-décomposition de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ 2.1.(4), on ait

$$s_{Q(T)} = s_{0,Q(T)} \otimes 1_{\mathfrak{b}}$$

([Bu-Ku] prop. (1.3.9)).

La pré-image de 1 (l'élément unité de $E_{Q(T)}$) par la corestriction $s_{0,Q(T)}$ est d'intersection non vide avec $\mathcal{A}_{Q(T)} \cap \mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$. En effet, notant $\mathcal{A}_{Q(T)}{}^i$, $i \in \mathbb{Z}$, les puissances du radical de Jacobson $\mathcal{A}_{Q(T)}{}^1$ de $\mathcal{A}_{Q(T)}$, on a la relation ([Bu-Ku], prop. (1.3.4)(ii))

$$s_{0,Q(T)}\left(\mathcal{A}_{Q(T)}{}^i\right) = \mathcal{P}_{Q(T)}{}^i \tag{6}$$

pour chaque $i \in \mathbb{Z}$. Comme $1 + \mathcal{P}_{Q(T)}$ est ouvert dans $\mathcal{O}_{Q(T)}$, $(s_{0,Q(T)}{}^{-1}(1 + \mathcal{P}_{Q(T)})) \cap \mathcal{A}_{Q(T)}$ est ouvert dans $\mathcal{A}_{Q(T)}$ donc d'intersection non vide avec $\mathcal{A}_{Q(T)} \cap \mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$. Soit $a \in \mathcal{A}_{Q(T)} \cap \mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$ tel que $s_{0,Q(T)}(a) = 1 + \alpha$ pour un élément $\alpha \in \mathcal{P}_{Q(T)}$. Ainsi, $(1+\alpha) \in \mathcal{O}_{Q(T)}{}^\times$ et

$$s_{0,Q(T)}\left((1+\alpha)^{-1} a\right) = (1+\alpha)^{-1} s_{0,Q(T)}(a) = 1.$$

Comme $\mathcal{O}_{Q(T)}{}^\times \mathcal{A}_{Q(T)} = \mathcal{A}_{Q(T)}$, l'élément $(1+\alpha)^{-1}a$ appartient à $\mathcal{A}_{Q(T)} \cap \mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$ et l'assertion est démontrée.

Soit $x_{0,Q(T)}$ un élément de $\mathcal{A}_{Q(T)} \cap \mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$ appartenant à la pré-image de 1 par la corestriction $s_{0,Q(T)}$ et tel que le commutant $L_{Q(T)}$ de $x_{0,Q(T)}$ dans $E_{Q(T)}$ soit une sous-extension de $E_{Q(T)}/F$ de degré maximal. Soit $x_{Q(T)}$ l'élément de $\mathcal{M}_{Q(T)} \cap M_{Q(T)}$ défini par

$$x_{Q(T)} = \iota_{\mathcal{B}_{Q(T)}}\left(x_{0,Q(T)}\right) = \nu_{\mathcal{B}_{Q(T)}}\left(x_{0,Q(T)} \otimes 1_{\mathfrak{b}}\right).$$

L'élément $x_{Q(T)}$ appartient, par construction, à la pré-image de 1 (l'élément unité de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$) par la corestriction $s_{Q(T)}$.

Remarque 2.1.1.

(1) — Si l'extension $E_{Q(T)}/F$ est séparable, la projection orthogonale

$$\mathrm{pr}_{Q(T)} : \mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right) \longrightarrow E_{Q(T)}$$

relativement à l'accouplement non dégénéré sur $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$

$$(z,t) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right)/F}(zt),$$

est un $(E_{Q(T)}, E_{Q(T)})$-homomorphisme non nul (cette propriété est caractéristique des extensions séparables de F).

Le caractère de $E_{Q(T)}$ défini par

$$\tau_F \circ \mathrm{Tr}_{\mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right)/F}(v) = \tau_F \circ \mathrm{Tr}_{E_{Q(T)}/F}(v)$$

pour tout $v \in E_{Q(T)}$ a pour conducteur $\mathcal{P}_F \mathcal{D}_{Q(T)}{}^{-1}$, $\mathcal{D}_{Q(T)}$ désignant la *différente* de l'extension $E_{Q(T)}/F$. Par conséquent, l'application $\mathrm{pr}_{Q(T)}$ est une corestriction modérée sur $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$ relativement à $E_{Q(T)}/F$ (et donc coïncide avec $u_{Q(T)}.s_{0,Q(T)}$ pour un élément $u_{Q(T)}$ appartenant à $\mathcal{O}_{Q(T)}{}^\times$) si et seulement si on a l'égalité $\mathcal{P}_F \mathcal{D}_{Q(T)}{}^{-1} = \mathcal{P}_{Q(T)}$, c'est-à-dire si et seulement si l'extension $E_{Q(T)}/F$ est modérément ramifiée (cf. [Bu-Ku] remark (1.3.8)(ii)). Si tel est le cas, l'élément $x_{0,Q(T)}=u_{Q(T)}\in \mathcal{O}_{Q(T)}^{\times}$ est l'unique élément de $\mathrm{Aut}_F(E_{Q(T)})$ vérifiant les hypothèses de la construction.

Si tel n'est pas le cas (i.e. si l'extension $E_{Q(T)}/F$ est séparable mais non modérément ramifiée), l'*exposant de Swan de l'extension* $E_{Q(T)}/F$

$$\mathrm{Sw}_{Q(T)} = d_{Q(T)} - \left(e_{Q(T)} - 1\right),$$

où $d_{Q(T)}$ est l'exposant de la différente défini par

$$\mathcal{D}_{Q(T)} = \mathcal{P}_{Q(T)}^{\ d_{Q(T)}},$$

est strictement positif ([Serr] prop. 13). Par conséquent, l'application

$$a \mapsto \left(\varpi_{Q(T)}\right)^{\mathrm{Sw}_{Q(T)}} . \mathrm{pr}_{Q(T)}(a)$$

est une corestriction modérée sur $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$ relativement à $E_{Q(T)}/F$. Elle coïncide donc avec $u_{Q(T)}.s_{0,Q(T)}$ pour un élément $u_{Q(T)}\in \mathcal{O}_{Q(T)}^{\times}$, et

$$u_{Q(T)}\left(\varpi_{Q(T)}\right)^{-\mathrm{Sw}_{Q(T)}}$$

est l'unique élément de $E_{Q(T)}^{\times}$ appartenant à la pré-image de 1 par la corestriction $s_{0,Q(T)}$. Il n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

(2) — Si l'extension $E_{Q(T)}/F$ est inséparable, alors la restriction à $E_{Q(T)}$ de l'accouplement non dégénéré sur $\mathrm{End}_F(E_{Q(T)})$

$$(z,t) \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathrm{End}_F\left(E_{Q(T)}\right)/F}(zt),$$

est identiquement nulle. Par conséquent $E_{Q(T)}$ est dans le noyau de $s_{0,Q(T)}$ et donc d'intersection vide avec la pré-image de 1 par s.

□

Soit $x\in\mathcal{M}\cap M$ l'élément défini par

$$x = \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} x_{Q(T)} \in \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \mathcal{M}_{Q(T)} = \mathcal{M}.$$

Remarque 2.1.2. — Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, le commutant de $x_{Q(T)}$ dans $\mathfrak{G}_{Q(T)}$ coïncide avec le sous-F-espace vectoriel de $\mathfrak{G}_{Q(T)}$ image par l'isomorphisme 2.1.(3) de $L_{Q(T)}\otimes_F\mathrm{End}_F(W_{Q(T)})$ ([Bu-Ku] prop. (1.4.2)), où (rappel) $L_{Q(T)}$ désigne le commutant de $x_{0,Q(T)}$ dans $E_{Q(T)}$. Par conséquent, le commutant de $x_{Q(T)}$ dans le groupe B, isomorphe au groupe des éléments inversibles de $L_{Q(T)}\otimes_F\mathrm{End}_F(W_{Q(T)})$, est isomorphe à

$$\mathrm{GL}_{\alpha(Q(T))}\left(L_{Q(T)}\right).$$

Sans appronfondir d'avantage les propriétés de l'élément x, signalons toutefois que, mis à part les deux cas (non exclusifs l'un de l'autre) suivants

(i) y séparable modéré, auquel cas x appartient au centre de $\mathfrak{G}$ (cf. la remarque 2.1.1),
(ii) y régulier (i.e. $\alpha(Q(T))=1$ pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y),

l'AdB-orbite de x, homéomorphe au produit $\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}(\mathrm{GL}_{\alpha(Q(T))}(E_{Q(T)})/\mathrm{GL}_{\alpha(Q(T))}(L_{Q(T)}))$, n'est pas bornée. Cette propriété nous a en particulier interdit d'utiliser l'approche à laquelle nous avions initialement pensé: reprenant la méthode exposée par Harisch-Chandra dans [Hari 0], on peut facilement ramener l'étude d'une distribution AdG-invariante sur G au voisinage de y dans G à celle d'une distribution AdB-invariante sur AdB(x$\mathfrak{b}$) au voisinage de 0 dans AdB(x$\mathfrak{b}$). Mais le fait que l'AdB-orbite de x ne soit en général pas bornée empêche de tirer brutalement la construction sur $\mathfrak{b}$ en "tuant" x avec la corestriction s; on tombe en effet sur une intégrale dont on ne sait, à priori, dire si elle converge. Après des essais infructueux dans cette direction, on a finalement opté pour une autre approche: la submersion qui permet de descendre sur AdB(x$\mathfrak{b}$) permet tout aussi bien de descendre sur x$\mathfrak{b}$, cette fois sans la propriété d'invariance. Mais la construction se transportant naturellement de x$\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{b}$, on retrouve cette propriété d'invariance sur $\mathfrak{b}$ (cf. le numéro 2.3).

□

2.2. On construit dans ce numéro "la" submersion, qui fait pendant à celle construite par Harish-Chandra dans le cadre séparable ([Hari 2] §17 ou [Rodi] prop. 1).

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, l'application

$$a_{Q(T)}:\mathfrak{m}_{Q(T)}\to\mathfrak{m}_{Q(T)},\ m\mapsto\left[y_{Q(T)},m\right],$$

induit une suite exacte scindée de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$-modules gauches

$$0\longrightarrow\mathfrak{m}_{Q(T)}/\mathfrak{b}_{Q(T)}\xrightarrow{a_{Q(T)}}\mathfrak{m}_{Q(T)}\xrightarrow{s_{Q(T)}}\mathfrak{b}_{Q(T)}\longrightarrow 0$$

et une décomposition de $\mathfrak{m}_{Q(T)}$ en

$$\mathfrak{m}_{Q(T)}=y_{Q(T)}x_{Q(T)}\mathfrak{b}_{Q(T)}\oplus\mathrm{Im}\left(a_{Q(T)}\right).$$

Soit U la partie de $\mathfrak{m}$ définie par

$$U=x\mathfrak{b}=\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}x_{Q(T)}\mathfrak{b}_{Q(T)}$$

et soit $V_{\mathfrak{m}}$ un sous-F-espace de $\mathfrak{m}$ supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{m}$ (le choix du supplémentaire $V_{\mathfrak{m}}$ n'a pas d'importance pour le résultat qui nous intéresse).

Avec les notations du numéro 1.3, soit V le supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}$ défini par

$$V=\mathfrak{n}^-\oplus V_{\mathfrak{m}}\oplus\mathfrak{n}\subset\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}=\mathfrak{g}.$$

Pour chaque élément w∈AdB(U), soit Φ_w: $U\times V\to\mathfrak{g}$ l'application définie par

$$\Phi_w(u,v)=yu+\left[y(1+w),v\right]$$

pour tout couple (u,v)∈$U\times V$.

Lemme 2.2.1. — *L'application Φ_0 est bijective.*

Démonstration.

Le commutant $\mathfrak{b}$ de y dans $\mathfrak{g}$ étant contenu dans $\mathfrak{m}$, l'application

$$\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{n}\to\mathfrak{n}^-\oplus\mathfrak{n},\ X\mapsto[y,X],$$

est un isomorphisme de F-espaces vectoriels. Il suffit donc de montrer que la restriction de l'application Φ_0 à $U\times V_{\mathfrak{m}}$ induit une bijection de $U\times V_{\mathfrak{m}}$ sur $\mathfrak{m}$. Or

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &= \prod_{Q(T)\in\Phi(y)} \left(y_{Q(T)}x_{Q(T)}\mathfrak{b}_{Q(T)} \oplus \left[y_{Q(T)}, \mathfrak{m}_{Q(T)}\right]\right)\\ &= yU \oplus [y, \mathfrak{m}]\\ &= yU \oplus [y, V_{\mathfrak{m}}].\end{aligned}$$

D'où le lemme 2.1.1.

□

Soit U' le voisinage ouvert de 0 dans U défini par

$$U' = \left\{\begin{array}{ll} u \in U \text{ tel que} & \text{(i) } \det_{\mathfrak{m}/F}(1+u) \neq 0 \text{ (i. e. } 1+u \in M)\\ & \text{(ii) } \det_{\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})/F}(\Phi_u \circ \Phi_0^{-1}) \neq 0 \text{ (i. e. } \Phi_u \text{ est bijective)}\end{array}\right\}.$$

La proposition suivante, simple application de travaux assez anciens d'Harish-Chandra sur les algèbres de Lie semi-simples réelles ([Hari 0] lemma 12), est la clé permettant d'étendre au cas y semi-simple non nécessairement séparable les techniques développées par Harish-Chandra puis F. Rodier dans le cadre séparable.

Proposition 2.2.2. — *L'application* $\delta : G\times U' \to G$ *définie par*

$$\delta(g,u) = gy(1+u)g^{-1} \quad ((g,u) \in G\times U')$$

est partout submersive.

Démonstration.

Il s'agit de vérifier que la différentielle $d\delta_{(g,u)}$ de l'application δ en (g,u) est surjective pour tout point (g,u) de $G\times U'$. La relation $\delta(hg,u)=h\delta(g,u)h^{-1}$ pour tout u appartenant à U' et tout couple (g,h) appartenant à $G\times G$ nous permet de n'effectuer la vérification qu'aux points (1,u), u appartenant à U'.

Soit donc u un élément de U'. Identifiant l'espace tangent à $G\times U'$ au point (1,u) à $\mathfrak{g}\times U$ et l'espace tangent à G au point y(1+u) à $\mathfrak{g}$, la différentielle $d\delta_{(1,u)}$ de δ au point (1,u) s'écrit

$$d\delta_{(1,u)} : \mathfrak{g}\times U \to \mathfrak{g},\ (X, xH) \mapsto yxH + [y(1+u), -X].$$

On conclut grâce à la bijectivité de l'application Φ_u.

□

L'égalité Adg(y(1+Adb(u)))=Adgb(y(1+u)) pour tout couple $(g,u)\in G\times U$ et tout élément $b\in B$ entraîne le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.3. — *Pour tout élément* $b\in B$, *l'application*

$$\delta_b : G\times \mathrm{Adb}(U') \to G,\ (g,w) \mapsto gy(1+w)g^{-1}.$$

est partout submersive.

□

2.3. Le principe de submersion de Harish-Chandra ([Hari 1] theorem 11).

Soit π une représentation lisse irréductible de G et Θ_π le caractère-distribution de π.

Soit du la mesure de Haar sur le groupe additif U, image de la mesure dH sur $\mathfrak{h}$ (définie au numéro 1.4) par l'homéomorphisme de variétés ϖ_F-adiques

$$\mathfrak{h} \to U\,,\ H \mapsto xH\,,$$

d'application réciproque

$$U \to \mathfrak{h}\,,\ u \mapsto s(u).$$

Comme l'application δ: G×U' → G est partout submersive (proposition 2.2.2), il existe une et une seule application linéaire surjective ([Hari 1] theorem 11; [Hari 0] theorem 1 pour la démonstration)

$$C_{c,\infty}(G \times U') \to C_{c,\infty}(\delta(G \times U'))\,,\ h \mapsto h^{\delta}\,,$$

telle que

$$\iint_{G\times U'} h(g,u)F(gy(1+u)g^{-1})dgdu = \int_G h^{\delta}(g)F(g)dg$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$ et toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\delta(G\times U'))$. L'image h^{δ} d'une fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$ étant construite en intégrant h sur les fibres de la submersion δ, son support vérifie la relation d'inclusion $\mathrm{supp}(h^{\delta})\subset\delta(\mathrm{supp}(h))$.

Le lemme suivant n'est que la traduction, en termes de la submersion δ, du lemme 21 de [Hari 1] énoncé et démontré par Harish-Chandra pour une autre submersion.

Lemme 2.3.1. — *Il existe une unique distribution* ϑ_π *sur* U' *telle que*

$$\langle \vartheta_\pi , h_\delta \rangle = \langle \Theta_\pi , h^{\delta} \rangle$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$, *où* $h_\delta\in C_{c,\infty}(U')$ *est définie par*

$$h_\delta(u) = \int_G h(g,u)dg \quad (u \in U').$$

Démonstration ([Hari 1] lemma 21).

Soit D_π la distribution sur G×U' définie par

$$\langle D_\pi, h\rangle = \langle \Theta_\pi, h^{\delta}\rangle \quad (h \in C_{c,\infty}(G \times U')).$$

Pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$ et tout élément $a\in G$ soit $\lambda^*a(h)\in C_{c,\infty}(G\times U')$ la fonction définie par

$$\lambda^*a(h)(g,u) = h(a^{-1}g,u) \quad ((g,u) \in G \times U').$$

Fixons une fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$ et un élément $a\in G$. Alors

$$\begin{aligned}\int_G (\lambda^*a(h))^{\delta}(g)F(g)dg &= \iint_{G\times U'} h(a^{-1}g,u)F(gy(1+u)g^{-1})dgdu \\ &= \iint_{G\times U'} h(g,u)F(\mathrm{Ad}\,ag(y(1+u)))dgdu \\ &= \int_{G\times U'} h(g,u)\mathrm{Ad}^*a^{-1}(F)(gy(1+u)g^{-1})dgdu \\ &= \int_G h^{\delta}(g)\mathrm{Ad}^*a^{-1}(F)(g)dg \\ &= \int_G \mathrm{Ad}^*a(h^{\delta})(g)F(g)dg\end{aligned}$$

pour toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\delta(G\times U'))$. Par unicité de l'application $f\mapsto f^\delta$, on obtient l'égalité

$$(\lambda^*a(h))^\delta = Ad^*a(h^\delta).$$

Comme la distribution Θ_π est AdG-invariante sur G, le calcul ci-dessus entraîne la relation

$$\langle D_\pi, \lambda^*a(h)\rangle = \langle D_\pi, h\rangle$$

pour toute fonction $h\in C_{c,\infty}(G\times U')$ et tout élément $a\in G$. Cela signifie que la distribution D_π est invariante par multiplication à gauche par les éléments de G. Pour chaque fonction $\beta\in C_{c,\infty}(U')$, on définit une distribution $\tau_\pi(\beta)$ sur G par

$$\langle \tau_\pi(\beta), \phi\rangle = \langle D_\pi, \phi\otimes\beta\rangle$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$. Alors, notant toujours λ l'action de G sur G par multiplication à gauche,

$$\begin{aligned}\langle \tau_\pi(\beta), \lambda^*a(\phi)\rangle &= \langle D_\pi, \lambda^*a(\phi)\otimes\beta\rangle\\ &= \langle D_\pi, \lambda^*a(\phi\otimes\beta)\rangle\\ &= \langle D_\pi, \phi\otimes\beta\rangle\\ &= \langle \tau_\pi(\beta), \phi\rangle\end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ et tout élément $a\in G$. Par conséquent $\tau_\pi(\beta)=\vartheta_\pi(\beta)du$ pour une constante complexe $\vartheta_\pi(\beta)$ ([Hari 1] lemma 17). Soit une fonction $\phi_0\in C_{c,\infty}(G)$ telle que

$$\int_G \phi_0(g)dg = 1.$$

Alors $\vartheta_\pi(\beta)=\langle\tau_\pi(\beta),\phi_0\rangle=\langle D_\pi,\phi_0\otimes\beta\rangle$ pour toute fonction $\beta\in C_{c,\infty}(U')$. Ainsi, l'application

$$\beta\mapsto\vartheta_\pi(\beta)\quad(\beta\in C_{c,\infty}(U'))$$

est une distribution sur U'. Comme $C_{c,\infty}(G\times U')=C_{c,\infty}(G)\otimes C_{c,\infty}(U')$ ([Hari 1] lemma 4), la relation

$$\left(\int_G \phi(g)dg\right)\langle\vartheta_\pi,\beta\rangle = \langle D_\pi,\phi\otimes\beta\rangle = \left\langle\Theta_\pi,(\phi\otimes\beta)^\delta\right\rangle$$

pour tout couple $(\phi,\beta)\in C_{c,\infty}(G)\times C_{c,\infty}(U')$ et la linéarité de l'application $h\mapsto h^\delta$ entraînent

$$\langle\vartheta_\pi, h_\delta\rangle = \langle\Theta_\pi, h^\delta\rangle\quad(h\in C_{c,\infty}(G\times U')).$$

Comme $\beta=(\phi_0\otimes\beta)^\delta$ pour toute fonction $\beta\in C_{c,\infty}(U')$, l'application

$$C_{c,\infty}(G\times U')\to C_{c,\infty}(U'),\ h\mapsto h_\delta,$$

est surjective. Ainsi, ϑ_π est uniquement déterminée par D_π et donc (conséquence cette fois de la surjectivité de l'application $h\mapsto h^\delta$) par Θ_π.

□

Mis à part le cas où pour chaque composante Q(T) du polynôme minimal de y, l'extension $E_{Q(T)}/F$ est séparable et modérément ramifiée, auquel cas l'élément x appartient au centre de $\mathfrak{b}$ (cf. la remarque 2.1.1) et $\vartheta_\pi\in J_B(\mathfrak{b})$, la distribution ϑ_π construite ci-dessus est peu agréable à étudier comme telle. L'idée est de montrer que la distribution sur $s(U')\subset\mathfrak{b}$ définie par

$$f\mapsto\left\langle\vartheta_\pi, (f\circ s)|_{U'}\right\rangle$$

pour toute fonction $f \in C_{c,\infty}(s(U'))$, coïncide sur un voisinage ouvert compact $s(U'') \subset s(U')$ de 0 dans $\mathfrak{b}$ avec la restriction à $s(U'')$ d'une distribution AdB-invariante sur $AdB(s(U''))$. Pour ce faire, on exploite de manière un peu plus précise le principe de submersion d'Harish-Chandra, essentiellement l'unicité de l'application $h \mapsto h^{\delta}$.

Pour chaque élément $b \in B$, soit $U_b' = Adb(U')$. On reprend avec les couples d'objets (δ_b, U_b') les constructions déjà effectuées avec le couple (δ, U'). Comme l'application δ_b: $G \times U_b' \to G$ est partout submersive (corollaire 2.2.3), il existe une et une seule application linéaire surjective ([Hari 1] theorem 11)

$$C_{c,\infty}(G \times U_b') \to C_{c,\infty}(\delta_b(G \times U_b')),\ h \mapsto h^{\delta_b},$$

telle que

$$\iint_{G \times U'} h(g, bub^{-1}) F(gy(1 + bub^{-1})g^{-1}) dg du = \int_G h^{\delta_b}(g) F(g) dg$$

pour toute fonction $h \in C_{c,\infty}(G \times U_b')$ et toute fonction $F \in C_{c,\infty}(\delta_b(G \times U_b')) = C_{c,\infty}(\delta(G \times U'))$. De même, la démonstration du lemme 21 de [Hari 1] appliquée à la submersion δ_b entraîne (cf. le lemme 2.3.1) l'existence et l'unicité d'une distribution $\vartheta_\pi(b)$ sur U_b' telle que

$$\langle \vartheta_\pi(b), h_{\delta_b} \rangle = \langle \Theta_\pi, h^{\delta_b} \rangle$$

pour toute fonction $h \in C_{c,\infty}(G \times U_b')$, où $h_{\delta_b} \in C_{c,\infty}(U_b')$ est définie par

$$h_{\delta_b}(w) = \int_G h(g, w) dg \quad (w \in U_b').$$

Soit c_0 le plus petit entier c tel que $x\mathcal{B}^c \subset U'$. Soit U'' le voisinage ouvert compact de 0 dans U' défini par $U'' = x\mathcal{B}^{c_0}$ et, pour chaque élément $b \in B$, soit $U_b'' = Adb(U'') \subset U_b'$.

Soit E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel somme directe des $C_{c,\infty}(U_b'')$ ($b \in B$) (i.e. le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des sommes formelles $\oplus_{b \in B} f_b$, $f_b \in C_{c,\infty}(U_b'')$, $f_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$) et soit F le sous-espace vectoriel de E des éléments $\oplus_{b \in B} f_b$ telles que $(\Sigma_{b \in B(w)} f_b)(w) = 0$ pour tout $w \in AdB(U'')$, où $B(w) = \{b \in B,\ w \in U_b''\} \subset B$ pour chaque $w \in AdB(U'')$.

Lemme 2.3.2.

(1) — *Pour toute fonction* $f \in C_{c,\infty}(U')$ *et tout élément* $b \in B$,

$$\langle \vartheta_\pi(b), Ad^*b(f) \rangle = \langle \vartheta_\pi, f \rangle.$$

(2) — *Pour tout élément* $b \in B$ *et toute fonction* $f \in C_{c,\infty}(U' \cap U_b)$,

$$\langle \vartheta_\pi(b), f \rangle = \langle \vartheta_\pi, f \rangle.$$

(3) — *Pour tout élément* $\oplus_{b \in B} f_b$ *de* F,

$$\sum_{b \in B} \langle \vartheta_\pi(b), f_b \rangle = 0.$$

Démonstration.

(1) Soient une fonction $f \in C_{c,\infty}(U')$ et un élément $b \in B$. Notant λ l'action de G sur G définie par $\lambda g(g') = g'g^{-1}$ pour tout couple $(g,g') \in G \times G$, on a

$$\iint_{G\times U'}\phi(g)\mathrm{Ad}^*b(f)(\mathrm{Ad}b(u))F\big(gy(1+\mathrm{Ad}b(u))g^{-1}\big)dgdu$$
$$=\iint_{G\times U'}\phi(gb^{-1})f(u)F\big(gy(1+u)g^{-1}\big)dgdu$$
$$=\int_G\big(\lambda^*b^{-1}(\phi)\otimes f\big)^{\delta}(g)F(g)dg$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ et toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\delta(G\times U'))$. De l'unicité de l'application δ_b, on déduit l'égalité

$$\big(\phi\otimes \mathrm{Ad}^*b(f)\big)^{\delta_b}=\big(\lambda^*b^{-1}(\phi)\otimes f\big)^{\delta}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\big\langle \vartheta_\pi(b),\mathrm{Ad}^*b(f)\big\rangle &=\Big\langle \vartheta_\pi(b),\big(\phi\otimes \mathrm{Ad}^*b(f)\big)_{\delta_b}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \Theta_\pi,\big(\phi\otimes \mathrm{Ad}^*b(f)\big)^{\delta_b}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \Theta_\pi,\big(\lambda^*b^{-1}(\phi)\otimes f\big)^{\delta}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \vartheta_\pi,\big(\lambda^*b^{-1}(\phi)\otimes f\big)_{\delta}\Big\rangle=\big\langle \vartheta_\pi,f\big\rangle\end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ telle que

$$\int_G\phi(g)dg=1.$$

(2) Soit b un élément de B et f une fonction appartenant à $C_{c,\infty}(U'\cap U_b)$. Rappelons que la mesure du sur U est l'image de la mesure dH sur $\mathfrak{h}$ par l'homéomorphisme de variétés ϖ_F-adiques $\mathfrak{h}\to U$, $H\mapsto xH$. Ainsi, comme la mesure dH sur $\mathfrak{h}$ est AdB-invariante et comme on a l'égalité $bub^{-1}=xs(bub^{-1})=xbs(u)b^{-1}$ pour tout élément $u\in U'$ tel que $\mathrm{Ad}b(u)\in(U'\cap U_b)$, la mesure du sur U induit une mesure Adb-invariante sur $U'\cap \mathrm{Ad}b^{-1}(U')$. Par conséquent,

$$\iint_{G\times U'}\phi(g)f\big(bub^{-1}\big)F\big(gy(1+bub^{-1})g^{-1}\big)dgdu$$
$$=\iint_{G\times U'}\phi(g)f(u)F\big(gy(1+u)g^{-1}\big)dgdu$$
$$=\int_G\big(\phi\otimes f\big)^{\delta}(g)F(g)dg$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ et toute fonction $F\in C_{c,\infty}(\delta(G\times U'))$. De l'unicité de l'application δ_b on déduit l'égalité

$$\big(\phi\otimes f\big)^{\delta_b}=\big(\phi\otimes f\big)^{\delta}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\big\langle \vartheta_\pi(b),f\big\rangle &=\Big\langle \vartheta_\pi(b),\big(\phi\otimes f\big)_{\delta_b}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \Theta_\pi,\big(\phi\otimes f\big)^{\delta_b}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \Theta_\pi,\big(\phi\otimes f\big)^{\delta}\Big\rangle\\ &=\Big\langle \vartheta_\pi,\big(\phi\otimes f\big)_{\delta}\Big\rangle=\big\langle \vartheta_\pi,f\big\rangle\end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(G)$ telle que

$$\int_G \phi(g)dg = 1.$$

(3) Pour chaque élément $\oplus_{b\in B} f_b$ de E, soit $\lambda(\oplus_{b\in B} f_b)\subset B$ l'ensemble (fini) des éléments $b\in B$ tels que $f_b\neq 0$. On raisonne par induction sur le cardinal de $\lambda(\oplus_{b\in B} f_b)$.

Si $\oplus_{b\in B} f_b = 0_E$ il est clair que $\Sigma_{b\in B} \langle \vartheta_\pi(b), f_b\rangle = 0$. Par ailleurs, si $\oplus_{b\in B} f_b \in F$ et $\oplus_{b\in B} f_b \neq 0_E$ alors le cardinal de $\lambda(\oplus_{b\in B} f_b)$ est ≥ 2.

Soit $\oplus_{b\in B} f_b \in F$ tel que $\lambda(\oplus_{b\in B} f_b) = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ pour un entier $n\geq 1$. Pour chaque entier i tel que $1\leq i\leq n$, la partie

$$W_i = U_{b_{n+1}}'' \cap U_{b_i}''$$

est ouverte compacte dans U_{b_i}''. On peut donc décomposer l'élément $\oplus_{b\in B} f_b$ en

$$\oplus_{b\in B} f_b = (\oplus_{b\in B} \phi_b) + (\oplus_{b\in B} \psi_b)$$

avec

$$\begin{cases} \phi_{b_{n+1}} = f_{b_{n+1}} \ (\text{resp. } \psi_{b_{n+1}} = 0) \\ \phi_{b_i} = f_{b_i}\big|_{W_i} \text{ prolongée par 0 sur } U_{b_i}'' - W_i \ (\text{resp. } \psi_{b_i} = f_{b_i} - \phi_{b_i}) \text{ si } 1\leq i\leq n. \\ \phi_b = \psi_b = 0 \text{ si } b \notin \lambda(\oplus_{b\in B} f_b) \end{cases}$$

Par construction, $\oplus_{b\in B} \phi_b$ et $\oplus_{b\in B} \psi_b$ appartiennent à F, $\lambda(\oplus_{b\in B} \psi_b)\leq n$ et

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{b\in B} \langle \vartheta_\pi(b), \phi_b \rangle &= \sum_{1\leq i\leq n+1} \langle \vartheta_\pi(b_i), \phi_{b_i} \rangle \\ &= \Big\langle \vartheta_\pi(b_{n+1}), \sum_{1\leq i\leq n+1} \phi_{b_i} \Big\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

grâce aux points (1) et (2) du lemme 2.3.2.

D'où le résultat.

□

Soit T_π la forme linéaire sur E définie par

$$T_\pi(\oplus_{b\in B} f_b) = \sum\nolimits_{b\in B} \langle \vartheta_\pi(b), f_b \rangle = \langle \vartheta_\pi, \sum\nolimits_{b\in B} Ad^* b^{-1}(f_b) \rangle$$

pour tout élément $\oplus_{b\in B} f_b$ appartenant à E. On note encore T_π la forme linéaire induite sur l'espace quotient E/F (lemme 2.3.2.(3)).

Si ϕ appartient à $C_{c,\infty}(AdB(s(U'')) \subset C_{c,\infty}(\mathfrak{b})$, le support de ϕ est contenu dans l'union d'un nombre fini d'ouverts de $\mathfrak{b}$ du type $s(U_b'') = Adb(s(U''))$ ($b\in B$), par conséquent ϕ admet une décomposition de la forme $\phi = \Sigma_{b\in B} \phi_b$ ($\phi_b \in C_{c,\infty}(s(U_b'')) \subset C_{c,\infty}(\mathfrak{b})$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout élément $b\in B$) à laquelle on peut associer l'élément

$$\oplus_{b\in B} (\phi_b \circ s)\big|_{U_b''}$$

de E, élément dont la classe modulo F ne dépend que de ϕ (au sens où cette classe modulo F est indépendante de la décomposition $\Sigma_{b\in B} \phi_b$ de ϕ choisie).

Soit D_π la distribution sur $AdB(s(U''))$ définie par

$$\langle D_\pi, \phi \rangle = T_\pi\Big(\oplus_{b\in B} (\phi_b \circ s)\big|_{U_b''} \Big)$$

pour toute fonction $\phi \in C_{c,\infty}(AdB(s(U''))$ et toute décomposition $\phi = \Sigma_{b\in B}\, \phi_b$ ($\phi_b \in C_{c,\infty}(s(U_b''))$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$).

On aimerait, pour la suite des événements, pouvoir travailler avec une distribution sur $\mathfrak{b}$. Il suffit pour cela de considérer la restriction de la distribution D_π à une partie ouverte fermée et AdB-invariante de $\mathfrak{b}$ contenue dans AdB(s(U'')). C'est l'objet de la construction ci-dessous.

Pour tout élément $g \in \mathfrak{g}$, on note $P_g(T) = \Sigma_{0\leq m\leq N}\, a_m(g)T^m$ ($a_m(g) \in F$, $a_N(g) = 1$) le polynôme caractéristique de g. Soit $\mathcal{U}_\mathfrak{b}$ la partie de $\mathfrak{b}$ définie par

$$\mathcal{U}_\mathfrak{b} = \left\{ b \in \mathfrak{b},\ |a_m(b)|_F \leq 1 \text{ pour chaque } 0 \leq m \leq N-1 \right\}.$$

Alors ([Rodi] lemme 3), $\mathcal{U}_\mathfrak{b}$ est une partie ouverte fermée et AdB-invariante de $\mathfrak{b}$, $\mathcal{O}_F\mathcal{U}_\mathfrak{b} = \mathcal{U}_\mathfrak{b}$, et il existe une partie compacte $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathcal{U}_\mathfrak{b} \subset AdB(\mathcal{K})$. Soit $\mathcal{P}_F^{\,k}$ ($k \in \mathbb{Z}$) la plus petite puissance de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ telle que $\mathcal{P}_F^{\,k}\mathcal{U}_\mathfrak{b} \subset AdB(s(U'')) = AdB(\mathcal{B}^{c_0})$ (cette définition a un sens car pour $m \in \mathbb{Z}$ suffisamment grand, $\mathcal{P}_F^{\,m}\mathcal{K} \subset \mathcal{B}^{c_0}$ et donc $\mathcal{P}_F^{\,m}\mathcal{U}_\mathfrak{b} \subset AdB(\mathcal{K}) \subset AdB(\mathcal{B}^{c_0})$). Ainsi, $\Omega = \mathcal{P}_F^{\,k}\mathcal{U}_\mathfrak{b}$ est un voisinage ouvert fermé AdB-invariant (et compact modulo conjugaison dans B) de 0 dans $\mathfrak{b}$ contenu dans AdB(s(U'')) (remarquons, même si nous n'utiliserons pas cette précision, que la partie Ω ainsi définie ne dépend que du triplet $(y,x,V_\mathfrak{m})$ où $V_\mathfrak{m}$ est le supplémentaire de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{m}$ arbitrairement fixé au numéro 2.2).

Soit θ_π la distribution sur $\mathfrak{b}$ définie par

$$\begin{cases} \theta_\pi\big|_{\mathfrak{b}-\Omega} \equiv 0 \\ \left\langle \theta_\pi, \phi \right\rangle = \left\langle D_\pi, \phi \right\rangle \text{ si } \phi \in C_{c,\infty}(\Omega) \end{cases}.$$

Proposition 2.3.3.

(1) — *La distribution* θ_π *est* AdB-*invariante sur* $\mathfrak{b}$.

(2) — *Pour tout sous-groupe ouvert compact* K *et toute fonction* $\phi \in C_{c,\infty}(\Omega \cap s(U''))$

$$\left\langle \theta_\pi, \phi \right\rangle = \sum_{\rho \in \mathcal{E}(K)} \int_{U'} \phi \circ s(u)\, \Theta_\pi * \xi_\rho\big(y(1+u)\big) du$$

Démonstration.

(1) Soit $\phi \in C_{c,\infty}(\mathfrak{b})$ et $\phi|_\Omega = \Sigma_{b\in B}\, \phi_b$ ($\phi_b \in C_{c,\infty}(s(U_b'')))$, $\phi_b \equiv 0$ pour presque tout $b \in B$), une décomposition de la restriction de ϕ à Ω. Alors, pour tout élément γ de B, on a la décomposition $Ad^*\gamma(\phi)|_\Omega = \Sigma_{b\in B}\, Ad^*\gamma(\phi_b)$ avec $Ad^*\gamma(\phi_b) \in C_{c,\infty}(s(U_{\gamma b}''))$ pour chaque élément b de B, et donc l'égalité

$$\begin{aligned} \left\langle Ad\gamma^{-1}(\theta_\pi), \phi \right\rangle &= \left\langle \theta_\pi, Ad^*\gamma(\phi) \right\rangle \\ &= \sum\nolimits_{b\in B} \left\langle \vartheta_\pi(\gamma b), Ad^*\gamma(\phi_b) \circ s \right\rangle \\ &= \sum\nolimits_{b\in B} \left\langle \vartheta_\pi(\gamma b), Ad^*\gamma(\phi_b \circ s) \right\rangle \\ &= \sum\nolimits_{b\in B} \left\langle \vartheta_\pi(b), \phi_b \circ s \right\rangle \\ &= \left\langle \theta_\pi, f \right\rangle \end{aligned}$$

par définition de θ_π et grâce au point (1) du lemme 2.3.2.

D'où le point (1) de la proposition 2.3.3.

(2) Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et soit $\psi_K \in C_{c,\infty}(G)$ la fonction définie par

$$\psi_K = \mathrm{vol}(K, dg)^{-1}\mathbf{1}_K .$$

La formule de Plancherel pour K (cf. le numéro 1.5)

$$\langle \Theta_\pi, F\rangle = \sum_{\rho\in\mathcal{E}(K)} \int_G F(g)\,\Theta_\pi * \xi_\rho(g)\,dg$$

pour toute fonction $F\in C_{c,\infty}(G)$, entraîne la relation

$$\begin{aligned}\langle \theta_\pi, \phi\rangle &= \left\langle \vartheta_\pi, (\phi\circ s)\big|_{U''}\right\rangle \\ &= \left\langle \vartheta_\pi, \left(\psi_K \otimes (\phi\circ s)\big|_{U'}\right)_\delta\right\rangle \\ &= \left\langle \Theta_\pi, \left(\psi_K \otimes (\phi\circ s)\big|_{U'}\right)^\delta\right\rangle \\ &= \sum_{\rho\in\mathcal{E}(K)} \int_G \left(\psi_K \otimes (\phi\circ s)\big|_{U'}\right)^\delta \Theta_\pi * \xi_\rho(g)dg\end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(\Omega\cap s(U''))$.

Par définition de l'application $C_{c,\infty}(G\times U')\to C_{c,\infty}(\delta(G\times U'))$, $h\mapsto h^\delta$, et car $\Theta_\pi*\xi_\rho$ $(\rho\in\mathcal{E}(K))$ est une fonction localement constante et AdK-invariante sur G, on a

$$\begin{aligned}&\int_G \left(\psi_K \otimes (\phi\circ s)\big|_{U'}\right)^\delta (g)\Theta_\pi * \xi_\rho(g)dg \\ &\quad = \iint_{G\times U'} \psi_K(g)(\phi\circ s)(u)\Theta_\pi * \xi_\rho\left(gy(1+u)g^{-1}\right)dgdu \\ &\quad = \iint_{K\times U'} \mathrm{vol}(K, dg)^{-1}\phi\circ s(u)\Theta_\pi * \xi_\pi\left(gy(1+u)g^{-1}\right)dgdu \\ &\quad = \int_{U'} \phi\circ s(u)\Theta_\pi * \xi_\pi\left(y(1+u)\right)du\end{aligned}$$

pour toute classe de représentations $\rho\in\mathcal{E}(K)$ et toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(s(U'))$.

D'où le point (2) de la proposition 2.3.2.

□

Soit c_1 le plus petit entier ≥ 1 tel que l'on ait l'inclusion $\mathcal{B}^{c_1}\subset\Omega\cap s(U'')=\Omega\cap\mathcal{B}^{c_0}$.

Pour tout $a\in\mathbb{Z}$, soit $(\mathcal{B}^a)^\wedge$ le groupe des caractères complexes lisses de $\mathcal{B}^a$.

Si a est un entier $\geq c_1$, alors pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(\mathcal{B}^a)$, donc en particulier pour tout caractère $\phi\in(\mathcal{B}^a)^\wedge$, le support de la restriction à U'' de la fonction $\phi\circ s$ est contenu dans l'ouvert $x\mathcal{B}^a$ de U''.

D'où la proposition suivante, conséquence de la formule d'intégration 2.3.3.(2).

Proposition 2.3.4. — *Soit* a *un entier* $\geq c_1$ *et soit* $\chi\in(\mathcal{B}^a)^\wedge$ *tel que*

$$\langle \theta_\pi, \bar\chi\rangle \neq 0.$$

où $\bar\chi\in(\mathcal{B}^a)^\wedge$ *désigne le caractère complexe-conjugué de* χ. *Alors, il existe une classe de représentations* $\rho\in\mathcal{E}(G^a)$ *telle que* [3]

[3] Dans le point (ii) ci-dessous, par abus de notation, on désigne par le même symbole la classe d'une représentation et n'importe quel représentant de cette classe.

(i) $\Theta_\pi * \xi_\rho\big|_{yG^a} \neq 0$

(ii) $\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\rho(1+xH)dH \neq 0$

Démonstration.

La formule d'intégration (2) de la proposition 2.3.3 pour $\bar{\chi} \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ s'écrit

$$\begin{aligned}\langle \theta_\pi, \bar{\chi}\rangle &= \sum_{\rho\in\mathcal{E}(G^a)} \int_{x\mathcal{B}^a} \bar{\chi}\circ s(u)\, \Theta_\pi * \xi_\rho\big(y(1+u)\big)du \\ &= \sum_{\rho\in\mathcal{E}(G^a)} \int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\Theta_\pi * \xi_\rho\big(y(1+xH)\big)dH.\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une classe de représentations $\rho\in\mathcal{E}(G^a)$ telle que

$$\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\Theta_\pi * \xi_\rho\big(y(1+xH)\big)dH \neq 0.$$

Les inclusions $x\mathcal{B}^a \subset \mathcal{M}^a \subset \mathfrak{m}\cap \mathcal{G}^a$ entraînent le point (i) de la proposition 2.3.3.

Quant au point (ii), il découle de la formule

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\Theta_\pi * \xi_\rho\big(y(1+xH)\big)dH \\ &= \iint_{G\times\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\, \xi_\rho\big(g^{-1}y(1+xH)\big)d\Theta_\pi(g)dH \\ &= \frac{\deg(\rho)}{\mathrm{vol}(G^a, dg)} \mathrm{Tr}\Big(\int_{yG^a} \rho(g^{-1}y)\Big\{\int_{\mathcal{B}^a} \bar{\chi}(H)\,\rho(1+xH)dH\Big\}d\Theta_\pi(g)\Big)\end{aligned}$$

où $\mathrm{Tr}(L(\rho))$ désigne la trace de l'opérateur $L(\rho)$.

□

3. Etude locale des caractères sur G ([Rodi] n° III).

Si F est de caractéristique nulle, la théorie de Kirillov (cf. [Howe 1]) permet de décrire les caractères des représentations irréductibles des petits sous-groupes ouverts compacts de **G**(F) pour n'importe quel groupe algébrique réductif **G** défini sur F. Pour $\mathbf{G}=GL_N$, F. Rodier a établi un énoncé moins précis mais indépendant de la caractéristique, essentiellement en remplaçant l'application exponentielle par l'application $\mathfrak{g}\to G$, $X\mapsto 1+X$ ([Rodi] Lemme 1), et permettant d'étudier localement le caractère-distribution Θ_π d'une représentation lisse irréductible π de G. Ce sont ces résultats que nous rappelons dans ce numéro.

3.1. Pour tout entier $a\geq 1$, on note E^a l'homéomorphisme de variétés ϖ_F-adiques

$$E^a : \mathcal{G}^a \to G^a,\ X\mapsto 1+X.$$

Si a est un entier ≥ 1 et n un entier $\geq 2a$, alors G^{n-a}/G^n est central dans G^a/G^n et l'application E^{n-a} induit un isomorphisme de groupes E^{n-a}/E^n: $\mathcal{G}^{n-a}/\mathcal{G}^n \to G^{n-a}/G^n$. Par ailleurs, l'application

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}^\times,\ (g,v)\mapsto \Psi_g(gv)=\tau_F\circ \mathrm{Tr}_{g/F}(gv)$$

induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur l'ensemble $\mathfrak{g}^\wedge$ des caractères complexes lisses de $\mathfrak{g}$ qui lui-même induit un isomorphisme de $\mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n}$ sur $(\mathcal{G}^{n-a}/\mathcal{G}^n)^\wedge$ ([Bush] (1.13)).

Soit a un entier ≥ 1, et $\rho \in \mathcal{E}(G^a)$ une classe de représentations lisses irréductibles de G *de niveau* n, i.e. telle que ρ est triviale sur G^n et non triviale sur G^{n-1}. Si $n \geq 2a$, la classe de représentations ρ induit par restriction un caractère ω_ρ de G^{n-a} de la forme

$$\omega_\rho(1+X) = \Psi_g(YX) \quad (X \in \mathcal{G}^{n-a}),$$

pour un élément Y de norme $|Y|_F = q^{n-1}$ determiné de manière unique modulo $\mathcal{G}^{1+a-n}$. On note Y_ρ la classe $Y + \mathcal{G}^{1+a-n} \in \mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n} \cong (\mathcal{G}^{n-a}/\mathcal{G}^n)^\wedge$.

On peut en ces termes énoncer le lemme 1 de [Rodi].

Lemme 3.1. — *Soient* a *et* n *deux entiers tels que* $a \geq 1$ *et* $n \geq 2a$, *et* $\rho \in \mathcal{E}(G^a)$ *une classe de représentations de niveau* n. *Soit* $\lambda_\rho = \xi_\rho \circ E^a \in C_{c,\infty}(\mathcal{G}^a)$ *identifiée à une fonction localement constante sur* $\mathfrak{g}$ *à support dans* $\mathcal{G}^a$. *Alors* Y_ρ *est l'unique classe du quotient* $\mathcal{G}^{1-n}/\mathcal{G}^{1+a-n}$ *satisfaisant la relation d'inclusion*

$$\operatorname{supp}(\lambda_\rho{}^\wedge) \subset Y_\rho.$$

3.2. Conséquences du lemme 3.1 quant à l'étude du caractère-distribution Θ_π d'une représentation lisse irréductible π de G au voisinage de y dans G.

Recopions les propositions 4 et 6 de [Rodi].

Proposition 3.2.1. — *Soient* a *et* n *deux entiers tels que* $a \geq 1$, $n \geq 2a$ *et la représentation* π *possède un vecteur non nul invariant sous l'action de* G^a. *Soit* $\rho \in \mathcal{E}(G^a)$ *une classe de représentations de niveau* n *telle que* $\Theta_\pi * \xi_\rho \neq 0$. *Alors, il existe un élément* $Y \in \mathcal{N}$ *(de norme* $|Y|_F = q^{n-1}$*) tel que* $Y_\rho = Y + \mathcal{G}^{1+a-n}$.

Proposition 3.2.2. — *Il existe un entier* $d = d(y) \leq 0$ *tel que, si* a, n, π *et* ρ *vérifient toutes les hypothèses de la proposition 3.2.1 et si de plus la fonction* $\Theta_\pi * \xi_\rho$ *est non identiquement nulle sur le voisinage* yG^a *de* y *dans* G, *alors* $Y_\rho \subset \mathfrak{h} + \mathcal{G}^{d+1+a-n}$.

4. Etude locale des caractères sur $\mathfrak{h}$.

On montre dans ce numéro comment les propriétés locales du caractère-distribution Θ_π d'une représentation lisse irréductible π de G rappelées au numéro 3, se traduisent sur la distribution θ_π construite au numéro 2.

4.1. on note d_F la distance sur $\mathfrak{g}$ associée à la norme $|\ |_F$. L'énoncé suivant fait directement écho au lemme 2 de [Rodi].

Lemme 4.1. — *Pour tout voisinage ouvert compact* W *de* $S \cap \mathcal{N} \cap \mathfrak{h}$ *dans* $S \cap \mathfrak{h}$, *il existe un entier* $\nu = \nu(W) \geq 1$ *tel que si* $X \in S \cap \mathcal{N}$ *et si* $d_F(X, \mathfrak{h}) \leq q^{-\nu}$, *alors* $s(Xx) \in W$.

Démonstration.

La partie W étant ouverte compacte dans $S \cap \mathfrak{h}$, elle est ouverte compacte dans $\mathfrak{h}$ et il existe un entier r tel que $W + \mathcal{B}^r = W$.

Soit $h\colon (S \cap \mathcal{N})x \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $h(g) = d_F(gx^{-1}, \mathfrak{h})$ pour tout $g \in (S \cap \mathcal{N})x$. Alors $h^{-1}(0) = (S \cap \mathcal{N} \cap \mathfrak{h})x$ et la partie $\mathcal{W}$ de $(S \cap \mathcal{N})x$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= s^{-1}(W)\cap\big((S\cap\mathcal{N})x\big)\\ &=\big(\mathfrak{n}^{-1}\oplus Wx\oplus[y,\mathfrak{m}]\oplus\mathfrak{n}\big)\cap\big((S\cap\mathcal{N})x\big),\end{aligned}$$

est un voisinage compact ouvert de $h^{-1}(0)$ dans $(S\cap\mathcal{N})x$. La partie $(S\cap\mathcal{N})x-\mathcal{W}$ est compacte dans $(S\cap\mathcal{N})x$ et son image par l'application h ne contient pas 0, par conséquent il existe un entier $\nu\geq r+1$ tel que $h((S\cap\mathcal{N})x-\mathcal{W})\subset[2q^{-\nu},+\infty[$.

Ainsi, les conditions $X\in S\cap\mathcal{N}$ et $d_F(X,\mathfrak{b})\leq q^{-\nu}$ entraînent $Xx\in\mathcal{W}$ et $s(Xx)\in W$.

□

4.2. Soit V un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N}\cap(\mathfrak{b}-\{0\})$ dans $\mathfrak{b}-\{0\}$ tel que $F^\times V=V$ (un tel voisinage existe car $\mathcal{N}$ induit une sous-variété ϖ_F-adique compacte $F^\times\backslash(\mathcal{N}\cap(\mathfrak{b}-\{0\}))$ de l'espace projectif $F^\times\backslash(\mathfrak{b}-\{0\})$) et soit π une représentation lisse irréductible de G. Soit aussi un entier $a(V,\pi)$ qui vérifie les propriétés suivantes:

(i) $a(V,\pi)\geq c_1$ (où c_1 est l'entier ≥ 1 de la proposition 2.3.4) i.e. $\mathcal{B}^{a(V,\pi)}\subset\mathcal{B}^{c_1}\subset\Omega\cap s(U'')$.

(ii) $a(V,\pi)\geq\nu-d$ (où d est un entier ≤ 0 comme dans la proposition 3.2.2 et $\nu=\nu(S\cap V)$ est un entier ≥ 1 comme dans le lemme 4.1).

(iii) $(S\cap V)+\mathcal{B}^{a(V,\pi)-1}=S\cap V$.

(iv) π possède un vecteur non nul fixe sous l'action de $G^{a(V,\pi)}$.

Il est clair que tout entier a suffisamment grand vérifie ces propriétés.

Proposition 4.2. — *Pour tout entier* $a\geq a(V,\pi)$, *si* χ *est un caractère complexe lisse de* $\mathcal{B}^a$ *tel que*

$$\langle\theta_\pi,\overline{\chi}\rangle\neq 0,$$

alors $\operatorname{supp}(\chi^\wedge)\subset V\cup(\mathcal{B}^{2a-1})^*$.

Démonstration.

On distingue deux cas de figure.

(1) Le caractère $\chi\in(\mathcal{B}^a)^\wedge$ est non trivial sur $\mathcal{B}^{2a-1}$. L'hypothèse

$$\langle\theta_\pi,\overline{\chi}\rangle\neq 0$$

entraîne l'existence d'une classe de représentations $\rho\in\mathcal{E}(G^a)$ telle que (proposition 2.3.4)

$$\Theta_\pi*\xi_\rho\big|_{yG^a}\neq 0\quad\text{et}\quad\int_{\mathcal{B}^a}\overline{\chi}(H)\rho(1+xH)dH\neq 0.$$

Montrons que les conditions ci-dessus entraînent que le niveau n de ρ est $\geq 2a$. Supposons par l'absurde que $n<2a$; comme l'élément x appartient à $\mathcal{G}$, pour chaque élément $H\in\mathcal{B}^a$, ρ est constante sur la partie $1+x(H+\mathcal{B}^n)\subset(1+xH)G^n$ de G. D'où l'on déduit l'inégalité

$$\int_{\mathcal{B}^n}\overline{\chi}(H)dH\neq 0,$$

laquelle entraîne que χ est trivial sur $\mathcal{B}^n\supset\mathcal{B}^{2a-1}$, contradiction.

Soit $Y\in\mathcal{N}$ de norme $|Y|_F=q^{n-1}$ tel que $Y_\rho=Y+\mathcal{G}^{1+a-n}$ (proposition 3.2.1).

Comme $\rho(1+x(H'+H))=\rho(1+xH')\rho(1+xH)$ pour tout $(H',H)\in\mathcal{B}^a\times\mathcal{B}^{n-a}$, la condition

$$\int_{\mathcal{B}^a}\overline{\chi}(H)\rho(1+xH)dH\neq 0$$

entraîne l'inégalité

$$\int_{\mathcal{B}^{n-a}} \overline{\chi}(H)\rho(1+xH)dH \neq 0,$$

cette dernière assertion étant équivalente à

$$\int_{\mathcal{B}^{n-a}} \overline{\chi}(H)\Psi_{\mathfrak{g}}(YxH)dH \neq 0.$$

D'où l'on déduit (grâce à la théorie des représentations des groupes finis) que

$$\begin{aligned}\chi(H) &= \Psi_{\mathfrak{g}}(YxH)\\ &= \Psi_{\mathfrak{b}}(s(Yx)H)\end{aligned}$$

pour tout élément $H\in\mathcal{B}^{n-a}$.

L'application

$$\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}\to\mathbb{C}^{\times},\ (H,H')\mapsto\Psi_{\mathfrak{b}}(HH'),$$

induit un isomorphisme de $\mathfrak{b}$ sur l'ensemble $\mathfrak{b}^{\wedge}$ des caractères complexes lisses de $\mathfrak{b}$, lui-même induisant un isomorphisme de $(\mathcal{B}^n)^*/(\mathcal{B}^{n-a})^*$ sur $(\mathcal{B}^{n-a}/\mathcal{B}^n)^{\wedge}$. Ainsi,

$$(\chi.\mathbf{1}_{\mathcal{B}^{n-a}})^{\wedge} = \mathrm{vol}(\mathcal{B}^{n-a}, dH)\mathbf{1}_{s(Yx)+(\mathcal{B}^{n-a})^*}$$

et

$$\mathrm{supp}(\chi^{\wedge}) \subset s(Yx) + (\mathcal{B}^{n-a})^*$$

car

$$\begin{aligned}\chi^{\wedge}(H') &= \int_{\mathcal{B}^a}\chi(H)\overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H)}dH\\ &= \sum_{\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})}\chi(H'')\overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H'')}\int_{\mathcal{B}^{n-a}}\chi(H)\overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H)}dH\\ &= \sum_{\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})}\chi(H'')\overline{\Psi_{\mathfrak{b}}(H'H'')}(\chi.\mathbf{1}_{\mathcal{B}^{n-a}})^{\wedge}(H')\end{aligned}$$

pour tout élément $H'\in\mathfrak{b}$, $\mathcal{F}(\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a})$ désignant une famille arbitraire de représentants H" des classes de $\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{n-a}$ dans $\mathcal{B}^a$.

La condition $a\geq v-d$ entraîne que $s((\varpi_F)^{n-1}Yx)$ appartient à $S\cap V$. En effet, $Y\in\mathcal{N}$ est de norme $|Y|_F=q^{n-1}$, par conséquent $(\varpi_F)^{n-1}Y\in(S\cap\mathcal{N})$ et, d'après le lemme 4.1, il suffit de vérifier que $(\varpi_F)^{n-1}Y$ satisfait l'inégalité $d_F((\varpi_F)^{n-1}Y,\mathfrak{b})\leq q^{-v}$. Or $d_F(Y,\mathfrak{b})\leq q^{-(d+1+a-n)}$ d'après la proposition 3.2.2, et cette dernière inégalité entraîne la relation $d_F((\varpi_F)^{n-1}Y,\mathfrak{b})\leq q^{-(d+a)}\leq q^{-v}$.

Enfin, grâce à l'hypothèse $S\cap V+\mathcal{B}^{a-1}=S\cap V$ et par $F^{\times}$-homothétie, on en déduit l'inclusion $s(Yx)+(\varpi_F)^{1-n}\mathcal{B}^{a-1}=s(Yx)+\mathcal{B}^{a-n}\subset V$. Or (cf. [Bush] (1.13))

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}^{n-a})^* &= \prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{B}_{Q(T)}{}^{1-e_{Q(T)}(n-a)}\\ &= \varpi_F{}^{a-n}\left(\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}\mathcal{B}_{Q(T)}{}^{1}\right)\subset\mathcal{B}^{a-n},\end{aligned}$$

par conséquent $\mathrm{supp}(\chi)\subset V$.

(2) Le caractère $\chi\in(\mathcal{B}^a)^{\wedge}$ est trivial sur $\mathcal{B}^{2a-1}$. Alors χ se factorise en un caractère complexe du groupe fini $\mathcal{B}^a/\mathcal{B}^{2a-1}$ et $\mathrm{supp}(\chi^{\wedge})\subset(\mathcal{B}^{2a-1})^*$.

□

5. Intégrabilité locale des caractères.

On montre dans ce numéro comment les résultats de R. Howe, joints aux résultats montrés dans les numéros précédents, permettent de conclure à l'intégrabilité du caractère-distribution Θ_π d'une représentation lisse irréductible π de G au voisinage de y, et par suite au voisinage de n'importe quel élément de G.

5.1. Rappel de la théorie de R. Howe ([Howe]).

Si Σ est une partie de $\mathfrak{b}$ et Λ un $\mathcal{O}_F$-réseau de $\mathfrak{b}$, soit $J_B(\Sigma,\Lambda)$ le sous-espace de $J_B(\mathfrak{b})$ des distributions AdB-invariantes T sur $\mathfrak{b}$ telles que

$$\left(T*\mathbf{1}_\Lambda(H)=\langle T,\mathbf{1}_{H+\Lambda}\rangle\neq 0\right)\Rightarrow\left(H\in\Sigma\right),$$

et soit

$$j_\Lambda:\mathcal{D}(\mathfrak{b})\longrightarrow\left(C_c(\mathfrak{b}/\Lambda)\right)^*$$

l'application surjective duale de l'injection

$$C_c(\mathfrak{b}/\Lambda)\longrightarrow C_{c,\infty}(\mathfrak{b}).$$

Soit $J^0(\mathfrak{b})$ le sous-espace de $J_B(\mathfrak{b})$ des distributions AdB-invariantes T sur $\mathfrak{b}$ à support compact modulo conjugaison dans B (i.e. telles qu'il existe une partie compacte W de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathrm{supp}(T)\subset\mathrm{AdB}(W)$).

Soit $Z_B=\Pi_{Q(T)\in\Phi(y)}(E_{Q(T)}{}^\times)$ le centre de B.

Proposition 5.1. — *Il existe un voisinage ouvert fermé* V *de* $\mathcal{N}\cap(\mathfrak{b}-\{0\})$ *dans* $\mathfrak{b}-\{0\}$ *tel que*

(i) $Z_BV=V$.

(ii) *pour toute partie ouverte compacte* X *de* $\mathfrak{b}$ *et tout* $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$*-uplet* $(\alpha)=(\alpha_{Q(T)})_{Q(T)\in\Phi(y)}$

$$j_{\mathcal{B}^{(\alpha)}}\left(J_B\left(V\cup X,\mathcal{B}^{(\alpha)}\right)\right)\subset j_{\mathcal{B}^{(\alpha)}}\left(J^0(\mathfrak{b})\right).$$

Démonstration.

On note τ l'action de B sur $\mathfrak{b}$ définie par $\tau b(H)=bH$ ($b\in B$, $H\in\mathfrak{b}$). Si $b\in Z_B$, l'image par τb d'une distribution appartenant à $J_B(\mathfrak{b})$ (resp. à $J^0(\mathfrak{b})$) appartient encore à $J_B(\mathfrak{b})$ (resp. à $J^0(\mathfrak{b})$). De plus, pour tout élément $b\in B$, on a la relation

$$\left(\tau b(T)*\mathbf{1}_{b\mathcal{B}^{(\alpha)}}\right)(bH)=\left(T*\mathbf{1}_{\mathcal{B}^{(\alpha)}}\right)(H)\quad\left(T\in\mathcal{D}(\mathfrak{b}),\ H\in\mathfrak{b}\right),$$

pour tout $(\alpha)\in\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$. Ainsi, si $(\alpha)\in\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$ et si b est un élément de Z_B tel que $b\mathcal{B}^{(\alpha)}=\mathcal{B}$, alors pour toute partie V de $\mathfrak{b}$ telle que $Z_BV=V$ et toute partie X de $\mathfrak{b}$, l'homothétie τb sur $\mathfrak{b}$ induit un isomorphisme de $J_B(V\cup X,\mathcal{B}^{(\alpha)})$ sur $J_B(V\cup bX,\mathcal{B})$.

Il suffit donc de montrer la proposition pour $(\alpha)=(0,...,0)$.

Pour chaque composante irréductible Q(T) du polynôme minimal de y, $\mathcal{B}_{Q(T)}$ est un $\mathcal{O}_{Q(T)}$-ordre héréditaire maximal de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$. Par conséquent (d'après la condition (**) de [Howe]), si Y est un élément nilpotent non nul de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$, il existe un entier r et un entier $m\leq 0$ tels que, si X appartient à $E_{Q(T)}{}^\times(Y+\mathcal{B}_{Q(T)}{}^r)\cap(\mathcal{B}_{Q(T)}{}^n-\mathcal{B}_{Q(T)}{}^{n+1})$ pour un entier $n<m$, il existe une partition de $X+\mathcal{B}_{Q(T)}$ en

$$X+\mathcal{B}_{Q(T)} = \coprod_{1\le i\le i(X)} X_i$$

et, pour chaque $1\le i\le i(X)$, des éléments $b_{i,j}\in B_{Q(T)}=\mathfrak{b}_{Q(T)}^{\times}$, $1\le j\le j(X,i)$, tels que

(1) $\mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)\subset\mathcal{B}_{Q(T)}^{n+1}$ pour tout i et tout j,
(2) Les $\mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)$ sont disjoints pour des couples (i,j) distincts,
(3) $(\coprod_j \mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i))+\mathcal{B}_{Q(T)}=\coprod_j \mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)$.

Soit $\mathcal{N}_{Q(T)}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{b}_{Q(T)}$. La partie $\mathcal{N}_{Q(T)}-\{0\}$ est fermée dans $\mathfrak{b}_{Q(T)}-\{0\}$ et stable par $E_{Q(T)}^{\times}$-homothéties. Donc $\mathcal{N}_{Q(T)}\cap(\mathcal{B}_{Q(T)}-\mathcal{B}_{Q(T)}^{1})$ est une partie compacte de $\mathfrak{b}_{Q(T)}-\{0\}$ et $\mathcal{N}_{Q(T)}-\{0\}=E_{Q(T)}^{\times}(\mathcal{N}_{Q(T)}\cap(\mathcal{B}_{Q(T)}-\mathcal{B}_{Q(T)}^{1}))$. Par conséquent il existe un voisinage ouvert fermé $V_{Q(T)}$ de $\mathcal{N}_{Q(T)}-\{0\}$ dans $\mathfrak{b}_{Q(T)}-\{0\}$, union finie d'ouverts fermés de $\mathfrak{b}_{Q(T)}-\{0\}$ de la forme $E_{Q(T)}^{\times}(Y+\mathcal{B}_{Q(T)}^{r})$, $Y\in\mathcal{N}_{Q(T)}\cap(\mathcal{B}_{Q(T)}-\mathcal{B}_{Q(T)}^{1})$, et un entier $m_{Q(T)}\le 0$ tels que si $X\in V_{Q(T)}\cap(\mathcal{B}_{Q(T)}^{n}-\mathcal{B}_{Q(T)}^{n+1})$ pour un entier $n<m_{Q(T)}$, alors il existe une partition de $X+\mathcal{B}_{Q(T)}$ en

$$X+\mathcal{B}_{Q(T)} = \coprod_{1\le i\le i(X)} X_i$$

et, pour chaque $1\le i\le i(X)$, des éléments $b_{i,j}\in B_{Q(T)}$, $1\le j\le j(X,i)$, vérifiant les conditions (1), (2), (3) ci-dessus.

Soit $V=\prod_{Q(T)\in\Phi(y)}V_{Q(T)}$ (c'est un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N}\cap(\mathfrak{b}-\{0\})$ dans $\mathfrak{b}-\{0\}$ tel que $Z_B V=V$) et $(\beta)=(\beta_{Q(T)})_{Q(T)\in\Phi(y)}$ le $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$-uplet défini par $\beta_{Q(T)}=m_{Q(T)}$ $(Q(T)\in\Phi(y))$.

Soit X une partie ouverte compacte de $\mathfrak{b}$ et (γ) un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$-uplet tel que $X\subset\mathcal{B}^{(\gamma)}$ et $\mathcal{B}^{(\beta)}\subset\mathcal{B}^{(\gamma)}$. Pour toute fonction $f\in C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B})$, on note $\sigma(f)$ la fonctionelle linéaire sur $J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B})$ définie par

$$\big(\sigma(f)\big)(T)=\langle T,f\rangle$$

pour toute distribution $T\in J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B})$. Montrons par induction, grâce aux propriétés de V et à l'inclusion $\mathcal{B}^{(\beta)}\subset\mathcal{B}^{(\gamma)}$, que les fonctionnelles linéaires $\sigma(\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}})$, $X\in\mathcal{B}^{(\gamma)}$, engendrent le sous-espace $\sigma(C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B}))$ du dual de $J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B})$. Si X n'appartient pas à $V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)}$ alors $\sigma(\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}})=0$ car

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}})(T) &=\langle T,\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}}\rangle\\ &=T*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(X)\\ &=0\end{aligned}$$

pour toute distribution $T\in J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B})$. Si X appartient à $V\cap(\mathcal{B}^{(\alpha)}-\mathcal{B}^{(\gamma)})$ pour un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$-uplet (α) alors il existe une partition de $X+\mathcal{B}$ en

$$X+\mathcal{B}= \coprod_{1\le i\le i(X)} X_i,$$

un $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$-uplet (μ) tel que $\mathcal{B}^{(\alpha)}\supsetneq\mathcal{B}^{(\mu)}\supset\mathcal{B}^{(\gamma)}$ et des éléments $b_{i,j}\in B$, $1\le j\le j(X,i)$,tels que

(1) $\mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)\subset\mathcal{B}^{(\mu)}$ pour tout i et tout j,
(2) Les $\mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)$ sont disjoints pour des couples (i,j) distincts,
(3) $(\coprod_j \mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i))+\mathcal{B}=\coprod_j \mathrm{Ad}b_{i,j}(X_i)$.

De ces conditions, on déduit la relation

$$\begin{aligned}\sigma\left(\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}}\right) &= \sum_{1\le i\le i(X)} \sigma\left(\mathbf{1}_{X_i}\right)\\ &= \sum_{1\le i\le i(X)} j(X,i)^{-1}\, \sigma\left(\mathbf{1}_{\coprod_{1\le j\le j(X,i)} \mathrm{Adb}_{i,j}(X_i)}\right)\\ &\subset \sigma\left(C_{c,\infty}\left(\mathcal{B}^{(\mu)}/\mathcal{B}\right)\right).\end{aligned}$$

Or $\mathcal{B}^{(\gamma)}/\mathcal{B}$ est un ensemble fini, donc $j_{\mathcal{B}}(J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B}))$ est un $\mathbb{C}$-espace de dimension finie.

Soit $\mathcal{F}$ une famille finie de fonctions appartenant à $C_c(\mathfrak{b}/\mathcal{B})$ et séparant les éléments du sous-espace $j_{\mathcal{B}}(J_B(V\cup X,\mathcal{B}))$ de $j_{\mathcal{B}}(J_B(V\cup\mathcal{B}^{(\gamma)},\mathcal{B}))$. Rappelons que la partie $\mathcal{U}=\mathcal{U}_{\mathfrak{b}}$ de $\mathfrak{b}$ définie au numéro 2.3 vérifie les propriétés

(i) $\mathcal{U}$ est ouverte, fermée, et AdB-invariante dans $\mathfrak{b}$,
(ii) $\mathcal{O}_F\,\mathcal{U}=\mathcal{U}$,
(iii) Il existe une partie compacte $\mathcal{K}$ de $\mathfrak{b}$ telle que $\mathcal{U}\subset \mathrm{AdB}(\mathcal{K})$.

La réunion des supports des éléments de $\mathcal{F}$ est une partie compacte de $\mathfrak{b}$, par conséquent il existe un entier k tel que $\mathrm{supp}(f)\subset\varpi_F{}^k\mathcal{U}$ pour toute fonction $f\in\mathcal{F}$. De plus, pour chaque distribution $T\in J_B(\mathfrak{b})$, la distribution $\eta_k(T)$ sur $\mathfrak{b}$ définie par

$$\eta_k(T)=\mathbf{1}_{\varpi_F{}^k\mathcal{U}}.T$$

est clairement AdB-invariante et à support contenu dans $\mathrm{AdB}(\varpi_F{}^k\mathcal{K})$. Montrons, en suivant la fin de la démonstration de la proposition 10 de [Rodi], que si l'entier k est suffisamment petit, alors $(V\cup\varpi_F{}^k\mathcal{U})+\mathcal{B}=V\cup\varpi_F{}^k\mathcal{U}$ et

$$\eta_k(T)*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}=T*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$$

pour toute distribution $T\in J_B(V\cup X,\mathcal{B})$.

Il existe un entier r tel que $\mathrm{AdB}(\mathcal{K})\subset V\cup\mathcal{B}^r$ ([Howe] lemma 1). On peut décomposer la partie $\mathcal{U}\cap V$ de $\mathfrak{b}$ en

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\cup V &=\left(\left(\mathcal{U}\cup V\right)\cap\mathcal{B}^r\right)\cup\left(\left(\mathcal{U}\cup V\right)\cap\left(\mathfrak{b}-\mathcal{B}^r\right)\right)\\ &=\left(\left(\mathcal{U}\cup V\right)\cap\mathcal{B}^r\right)\cup\left(V\cap\left(\mathfrak{b}-\mathcal{B}^r\right)\right)\end{aligned}$$

car $\mathcal{U}\subset\mathrm{AdB}(\mathcal{K})\subset V\cup\mathcal{B}^r$. Comme les parties $(\mathcal{U}\cup V)\cap\mathcal{B}^r$ et $V\cap\mathcal{B}^r$ sont ouvertes compactes dans $\mathfrak{b}$, il existe un entier s et un entier s' tels que

$$\begin{cases}\left(\left(\mathcal{U}\cup V\right)\cap\mathcal{B}^r\right)+\mathcal{B}^s=\left(\mathcal{U}\cup V\right)\cap\mathcal{B}^r\\ \left(V\cap\mathcal{B}^r\right)+\mathcal{B}^{s'}=V\cap\mathcal{B}^r\end{cases}.$$

Soit un élément $b\in V\cap(\mathfrak{b}-\mathcal{B}^r)$. Alors $b\in V\cap(\mathcal{B}^{r-m}-\mathcal{B}^{r-m+1})$ pour un entier $m\geq 1$. Comme la partie V est stable par multiplication par $\varpi_F{}^m$, la définition de s' assure que la partie $\varpi_F{}^m b+\mathcal{B}^{s'}$ est contenue dans $V\cap\mathcal{B}^r$. Par conséquent $b+\mathcal{B}^{s'-m}\subset V\cap\mathcal{B}^{r-m}$ et si l'on suppose de plus que l'entier s' est $\geq r+1$, alors $b+\mathcal{B}^{s'-m}\subset V\cap(\mathcal{B}^{r-m}-\mathcal{B}^{r-m+1})\subset V\cap(\mathfrak{b}-\mathcal{B}^r)$. Pour $k\leq -\max(s,s',r+1)$, on a donc l'égalité

$$\left(\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V\right)+\mathcal{B}=\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V.$$

Soit donc un entier k tel que

$$\begin{cases}\left(V\cup\varpi_F{}^k\mathcal{U}\right)+\mathcal{B}=V\cup\varpi_F{}^k \\ \operatorname{supp}(f)\subset\varpi_F{}^k\mathcal{U} \text{ pour chaque } f\in\mathcal{F}\end{cases}$$

et supposé de plus satisfaire l'inégalité $k\leq 1-s'+1$. Soient une distribution $T\in J_B(V\cup X,\mathcal{B})$ et un élément $X\in(\mathfrak{b}-(V\cup X))$. Montrons alors que $\eta_k(T)*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(X)=0$. On distingue deux cas:

1. L'élément X n'appartient pas à $\varpi_F{}^k\mathcal{U}$. Alors $(X+\mathcal{B})\cap\varpi_F{}^k\mathcal{U}$ est vide car si $X+H\in\varpi_F{}^k\mathcal{U}$ $(H\in\mathcal{B})$, l'égalité $(\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V)+\mathcal{B}=\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V$ entraîne que $X\in\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V$, contradiction.

2. L'élément X appartient à $\varpi_F{}^k\mathcal{U}$. Montrons qu'en ce cas $(X+\mathcal{B})\cap\varpi_F{}^k\mathcal{U}=X+\mathcal{B}$. Soit un élément $H\in\mathcal{B}$. Alors on a $X+H\in(\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V)$ car $(\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V)+\mathcal{B}=\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cup V$. Supposons par l'absurde que $X+H\in(V-(\varpi_F{}^k\mathcal{U}\cap V)$. Comme la partie $\mathcal{B}$ est contenue dans $\mathcal{U}$ (cf. la définition de $\mathcal{U}$ donnée au numéro 2.3), $\varpi_F{}^k\mathcal{U}\subset\mathcal{B}^k$ et par conséquent $X+H\in(V-\mathcal{B}^k)$. Ainsi, $X+H\in(\mathcal{B}^{k-m}-\mathcal{B}^{k-m+1})$ pour un entier $m\geq 1$. Par multiplication à gauche par $\varpi_F{}^{r-k+m}$ (et toujours grâce à la propriété $F^\times V=V$), on obtient la relation $\varpi_F{}^{r-k+m}(X+H)\in V\cap\mathcal{B}^r$. Or, l'hypothèse $k\leq 1-s'+r$ et l'inégalité $m\geq 1$ entraînant la relation $r-k+m\geq s'+m-1\geq s'$, l'élément $\varpi_F{}^{r-k+m}H$ appartient à $\mathcal{B}^{s'}$ et par suite (grâce à la propriété de stabilité $(V\cap\mathcal{B}^r)+\mathcal{B}^{s'}=V\cap\mathcal{B}^r$) l'élément $\varpi_F{}^{r-k+m}X$ appartient à $V\cap\mathcal{B}^r$. Par conséquent $X\in V$, contradiction. On a donc bien montré l'égalité

$$\left(X+\mathcal{B}\right)\cap\varpi_F{}^k\mathcal{U}=X+\mathcal{B}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\eta_k(T)*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}(X) &=\left\langle\eta_k(T),\mathbf{1}_{X+\mathcal{B}}\right\rangle \\ &=\left\langle T,\mathbf{1}_{(X+\mathcal{B})\cap\varpi_F{}^k\mathcal{U}}\right\rangle \\ &=0.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la relation

$$\begin{aligned}\left\langle\eta_k(T),f\right\rangle &=\left\langle T,\mathbf{1}_{\varpi_F{}^k\mathcal{U}}.f\right\rangle \\ &=\left\langle T,f\right\rangle\end{aligned}$$

pour toute fonction $f\in\mathcal{F}$ et toute distribution $T\in J_B(\mathfrak{b})$ entraîne l'égalité

$$T*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}=\eta_k(T)*\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$$

pour toute distribution $T\in J_B(V\cup X,\mathcal{B})$.

En définitive, si l'entier k est suffisamment petit, alors $j_{\mathcal{B}}(T)=j_{\mathcal{B}}(\eta_k(T))\in j_{\mathcal{B}}(J^0(\mathfrak{b}))$ pour toute distribution $T\in J_B(V\cup X,\mathcal{B})$ et la proposition 5.1 est complètement démontrée.

□

5.2. D'après la proposition 5 de [Howe], si O est une AdB-orbite dans $\mathcal{N}\cap\mathfrak{b}$, la donnée d'un élément H de O et d'une mesure de Haar db_H sur le centralisateur (unimodulaire) de H dans B définit une distribution AdB-invariante sur $\mathfrak{b}$, donnée par

$$I^B\left(f,H,db_H\right)=\int_{B_H\backslash B}f\left(b^{-1}Hb\right)db_H\backslash db$$

pour toute fonction $f\in C_{c,\infty}(\mathfrak{b})$, où db est la mesure de Haar sur B telle que $\operatorname{vol}(\mathcal{B}^\times,db)=1$. Comme la mesure AdB-invariante sur O image de la mesure $db_H\backslash db$ sur $B_H\backslash B$ par l'application $B_H\backslash B\to O$, $B_Hb\mapsto b^{-1}Hb$, est unique à un facteur constant près, on note $\nu_O\in J_B(\mathfrak{b})$ l'intégrale orbitale sur O arbitrairement normalisée par $\nu_O(\mathbf{1}_{\mathcal{B}})=1$.

Soit π une représentation lisse irréductible de G.

Proposition 5.2.1. — *Pour chaque* AdB-*orbite nilpotente O de* $\mathfrak{b}$, *il existe un unique nombre complexe* $c_O(\pi)$ *tel que, si* m *est un entier suffisamment grand,*

$$\left(\theta_\pi - \sum_{O} c_O(\pi) \nu_O{}^\wedge\right)\Big|_{\mathcal{B}^m} = 0,$$

O décrivant l'ensemble (fini) des AdB-*orbites nilpotentes de* $\mathfrak{b}$.

Démonstration.

Soit V un voisinage ouvert fermé de $\mathcal{N} \cap (\mathfrak{b} - \{0\})$ dans $\mathfrak{b} - \{0\}$ tel que $Z_B V = V$ comme dans la proposition 5.1, $a(V,\pi)$ un entier comme dans le numéro 4.2, et a un entier $\geq a(V,\pi)$.

La formule de Plancherel pour le sous-groupe ouvert compact $\mathcal{B}^a$ du groupe abélien $\mathfrak{b}$ entraîne l'expression suivante pour la restriction à $\mathcal{B}^a$ de la distribution θ_π

$$1_{\mathcal{B}^a} . \theta_\pi = \sum_{\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge} \left(\frac{\langle \theta_\pi , \bar{\chi} \rangle}{\langle \chi , \bar{\chi} \rangle} \chi \right) dH.$$

Le support de la transformée de Fourier $\chi^\wedge$ d'un caractère $\chi \in (\mathcal{B}^a)^\wedge$ ayant une contribution non triviale dans cette somme est contenu dans $V \cup (\mathcal{B}^{2a-1})^*$ (proposition 4.2), par conséquent

$$\operatorname{supp}\left((1_{\mathcal{B}^a} . \theta_\pi)^\wedge\right) \subset V \cup \left(\mathcal{B}^{2a-1}\right)^*.$$

Or

$$(1_{\mathcal{B}^a} . \theta_\pi)^\wedge = \operatorname{vol}\left((\mathcal{B}^a)^*, dH\right)^{-1} \left((\theta_\pi)^\wedge * 1_{(\mathcal{B}^a)^*}\right) dH.$$

Notant $\alpha(a) = (\alpha(a)_{Q(T)})_{Q(T) \in \Phi(y)}$ le $\mathbb{Z}^{\#(\Phi(y))}$-uplet défini par $\alpha(a) = 1 - e_{Q(T)} a$, on a $(\mathcal{B}^a)^* = \mathcal{B}^{\alpha(a)}$ ([Bush] (1.13)). Ainsi, avec les notations introduites au numéro 5.1,

$$(\theta_\pi)^\wedge \in J_B\left(V \cup \left(\mathcal{B}^{2a-1}\right)^*, \left(\mathcal{B}^a\right)^*\right).$$

Soit η une distribution appartenant à $J^0(B)$ telle que (proposition 5.1)

$$j_{(\mathcal{B}^a)^*}(\eta) = j_{(\mathcal{B}^a)^*}\left((\theta_\pi)^\wedge\right).$$

Par dualité, on a l'égalité

$$1_{\mathcal{B}^a} . (\eta)^\wedge = 1_{\mathcal{B}^a} . \theta_\pi .$$

Or, η appartenant à $J^0(B)$, il existe un entier $m \geq a$ tel que la restriction à $\mathcal{B}^m$ de la transformée de Fourier $\eta^\wedge$ de η soit une combinaison linéaire des restrictions à $\mathcal{B}^m$ des transformées de Fourier $\nu_O{}^\wedge$ des intégrales orbitales ν_O, O parcourant l'ensemble des AdB-orbites nilpotentes de $\mathfrak{b}$ ([Howe] prop. 3).

D'où la proposition.

□

Corollaire 5.2.2. — *Le caractère-distribution Θ_π de π est intégrable au voisinage de* y *dans* G.

Démonstration.

D'après la proposition 5 de [Howe] et le lemme 4.7.6 de [Silb], pour chaque orbite nilpotente O de $\mathfrak{h}$, la transformée de Fourier $\nu_O{}^\wedge$ de l'intégrale orbitale ν_O est une fonction localement intégrable sur $\mathfrak{h}$. Ainsi, si l'entier m de la proposition 5.2.1 est suffisamment grand, il existe une fonction F_π intégrable sur $\mathcal{B}^m$ telle que

$$\left\langle \theta_\pi - F_\pi.dH, \phi \right\rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi \in C_{c,\infty}(\mathcal{B}^m)$.

La distribution θ_π est définie en tirant sur $\mathfrak{h}$, grâce à la corestriction s, la distribution ϑ_π définie sur Ω, elle même construite en intégrant le caractère-distribution Θ_π sur les fibres de la submersion δ. Par conséquent, si (g,u) et (g',u') sont deux couples appartenant à $G\times(x\mathcal{B}^m)$ vérifiant l'égalité $\delta(g,u)=\delta(g',u')$, alors $F_\pi\circ s(u)=F_\pi\circ s(u')$. On peut donc prolonger la fonction F_π en une fonction K_π définie sur l'ouvert $AdG(y(1+x\mathcal{B}^m))=\delta(G\times(x\mathcal{B}^m))$ de G en posant

$$K_\pi(gy(1+u)g^{-1})=F_\pi\circ s(u)$$

pour tout couple $(g,u)\in G\times(x\mathcal{B}^m)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left\langle \theta_\pi, \phi \right\rangle &= \int_{\mathcal{B}^m} \phi(H)F_\pi(H)dH \\ &= \int_{x\mathcal{B}^m} \phi\circ s(u)F_\pi\circ s(u)du \\ &= \int_{G\times(x\mathcal{B}^m)} \psi(g)\phi\circ s(u)K_\pi\circ\delta(g,u)dgdu \\ &= \int_G \left(\psi\otimes(\phi\circ s)\big|_{x\mathcal{B}^m}\right)^\delta(g)K_\pi(g)dg \\ &= \left\langle \Theta_\pi, \left(\psi\otimes(\phi\circ s)\big|_{x\mathcal{B}^m}\right)^\delta \right\rangle\end{aligned}$$

pour toute fonction $\phi\in C_{c,\infty}(\mathcal{B}^m)$ et toute fonction $\psi\in C_{c,\infty}(G)$ telle que

$$\int_G \psi(g)dg = 1.$$

De la surjectivité de l'application

$$C_{c,\infty}(G)\otimes C_{c,\infty}(\mathcal{B}^m)\to C_{c,\infty}\big(\delta\big(G\times(x\mathcal{B}^m)\big)\big),\quad \psi\otimes\phi\mapsto\left(\psi\otimes(\phi\circ s)\big|_{x\mathcal{B}^m}\right)^\delta,$$

on déduit que $\Theta_\pi=K_\pi.dg$ sur $\delta(G\times(x\mathcal{B}^m))$. La fonction $K_\pi\circ\delta=\mathbf{1}_G\otimes(F_\pi\circ s)$ étant localement intégrable sur $G\times(x\mathcal{B}^m)$, la fonction K_π est localement intégrable sur $\delta(G\times(x\mathcal{B}^m))$ ([Hari 1] corollary of theorem 11).

□

Corollaire 5.2.3. — *Le caractère-distribution Θ_π de π est localement intégrable sur* G.

Démonstration.

Soit g un élément de G. Alors il existe un sous-groupe parabolique P de G contenant g de radical unipotent U et une composante de Levi M de P tels que, si $g=g_Mg_U$ ($g_M\in M$, $g_U\in U$) est la décomposition de g suivant MU, on ait

(i) g_M est un élément semi-simple de G, et M est le sous-groupe de Levi de G associé aux composantes primaires de g_M comme au numéro 1.2.

(ii) $O_P(g)$ est dense dans $O_M(g_M)U$ pour la topologie ϖ_F-adique.
(cf. le chapitre 3, prop. 2.2.6.1).

Ainsi, g a des conjugués (dans P) aussi voisins que l'on veut de g_M. D'où le corollaire 5.2.3.

□

On conclue ce chapitre par un bref survol des conséquences impliquées – directement ou moins directement – par ce résultat.

La formule d'intégration de Weyl reliant directement le caractère-distribution Θ_π d'une représentation admissible irréductible de G aux intégrales orbitales semi-simples régulières séparables dans G devient un outil utilisable en caractéristique >0. Noter que, contrairement à la caractéristique 0 où le nombre de classes de conjugaison de tores maximaux est toujours fini, la somme apparaissant dans la formule peut être infinie (dans $G=\mathbf{GL}_2(F)$ où $F=\mathbb{F}_2((\varpi))$ est le corps des séries formelles en l'indeterminée ϖ sur le corps fini $\mathbb{F}_2$, on a une infinité de classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques en bijection avec les classes d'isomorphisme d'extensions quadratiques séparables de F). On peut par exemple, via le théorème de densité des caractères-distributions des représentations admissibles irréductibles tempérées (unitaires) vrai en caractéristique >0 (on a vérifié, grâce aux indications données dans [De-Ka-Vi], que la démonstration de ce théorème ne dépend pas de la caractéristique), utiliser cette formule pour démontrer la conjecture de Howe en caractéristique >0 de manière directe, c'est-à-dire sans passer de la caractéristique >0 à la caractéristique nulle comme nous l'avons fait dans le chapitre 4. On peut aussi espérer étendre à la caractéristique >0 (toujours bien sûr pour le groupe linéaire) un certain nombre de résultats exposés par D. Kazhdan dans [Kazh].

Pour F corps local de caractéristique >0, l'intégrabilité locale des caractères simplifie notablement la preuve de la correspondance entre les classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de carré intégrable du groupe multiplicatif d'une algèbre à division de dimension N^2 sur F et celles de $\mathbf{GL}_N(F)$. On peut en effet, dès lors, suivre sans grandes modifications la démonstration de J. Rogawski en caractéristique nulle ([Roga]). On a en particulier – impliquées par la conjecture de Howe, la formule d'intégration de weyl et la théorie des germes de Shalika – les relations d'orthogonalité des caractères pour la série discrète unitaire (cf. [Cloz 2] [(4)]).

Enfin, signalons – même si nous n'avons pas eu le temps de nous intéresser de près à ces questions – qu'on doit pouvoir étendre à la caractéristique >0 (toujours bien sûr pour $\mathbf{GL}_N$) une partie des résultats d'analyse harmonique sur l'espace de Schwartz montrés par L. Clozel dans ([Cloz 2]).

6. Références.

[Bour] N. BOURBAKI. – *Eléments de mathématiques*, Hermann, Paris.

(4) Cette démonstration, reliée à l'analyse harmonique sur l'espace de Swartz, fut décrite par Harish-Chandra dans une lettre à M.F. Vignéras en 1982, donc modulo la conjecture de Howe qui fut montrée par L. Clozel quelques années plus tard. Entre-temps ([Kazh] (1986)), D. kazhdan donna une preuve de ces relations d'orthogonalité différente de celle d'Harish-Chandra puisque basée non plus sur l'espace de Swartz mais sur l'espace $C_{c,\infty}(G)$. "L'affaire" est du reste très clairement expliquée dans l'introduction de l'article de L. Clozel.

[Bu-Ku] C.J. BUSHNELL & P.C. KUTZKO. – *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Annals of Math. Studies, n° **129**, Princeton Univ. Press, Princeton, New jersey, 1993 .

[Bush] C.J. BUSHNELL – *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of* GL_N, J. reine angew. Math. **375/376** (1987), 184-210.

[Cloz 1] L. CLOZEL. – *Characters of non-connected, reductive p-adic groups*, Can. Jour. of Math. **34** (1987), 149-167.

[Cloz 2] L. CLOZEL. – *Invariant harmonic analysis on the Schwartz space of a reductive p-adic group* in Harmonic Analysis on Reductive p-adic groups, proc. of the Bowdoin conf. 1989, coll. Progress in Math., n° **101** (W. Barker, P. Sally, ed.), Birkhäuser, Boston, 1991, 101-121.

[De-Ka-Vi] P. DELIGNE, D.A. KAZHDAN & M.F. VIGNERAS. – *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, coll. Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984, 33-177.

[Hari 0] HARISH-CHANDRA. – *Invariant distributions on Lie Algebras*, Amer. Jour. of. Math. **86** (1964), 271-309.

[Hari 1] HARISH-CHANDRA. – *Harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Lectures Notes in Math., n° **162**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[Hari 2] HARISH-CHANDRA. – *Admissible invariant distributions on reductive p-adic groups*, Queen's papers in Pure and Applied Math. **48** (1978), 377-380.

[Howe] R. HOWE. – *The Fourier transform and germs of characters*, Math. Ann. **208**, (1974), 305-322.

[Kazh] D. KAZHDAN. – *Cuspidal geometry of p-adic groups*, Jour. d'Analyse Math. **47** (1986), 1-36.

[Rodi] F. RODIER. – *Intégrabilité locale des caractères du groupe GL(n,k) où k est un corps local de caractéristique positive*, Duke Math. Jour. **85** (1985), 771-792.

[Roga] J.D. ROGAWSKI. – *Representations of GL(n) and division algebras over a p-adic field*, Duke Math. Jour. **50** (1983), 161-196.

[Serr] J.P. SERRE. – *Corps locaux*, Hermannn, Paris, 1962.

[Silb] A.J. SILBERGER. – *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Mathematical Notes, n° **23**, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1979.