PHILIPPE EYSSIDIEUX

Variations de structure de Hodge : inégalités d'Arakelov locales et globales

Thèses d'Orsay, 1994

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1994__0370__P0_0>

ORSAY
N° d'ordre:

UNIVERSITE DE PARIS-SUD
Centre d'Orsay

THESE
présentée
pour obtenir

Le Grade de Docteur en Sciences
Spécialité: Mathématiques

par

Philippe EYSSIDIEUX

Sujet:
Variations de Structure de Hodge:
Inégalités d'Arakelov locales et globales

Soutenue le 28 Juin 1994 devant la Commission d'examen:

C.PETERS, Président
L.CLOZEL
G.HENKIN
N.MOK
P.PANSU
N.SIBONY
C.VOISIN

A mon épouse.

Abstract

Variations of Hodge structure:
Local and global Arakelov-type inequalities

This thesis aims at studying from a differential geometric point of view variations of Hodge structure.

We begin by extending a pinching theorem of Mok's dealing with curves in Siegel Modular Varities to the non-compact case.

We link this phenomenon with the classical Arakelov Inequalities, and prove variants of Mok's pinching theorems for curves endowed with a variation of Hodge structure.

We study higher-dimensionnal analogues of these phenomena.

To do this, we remark that, under mild degeneracies, the base of a variation of Hodge structure is Kähler-hyperbolic in the sense of Gromov. We then prove vanishing theorems for the L^2-cohomology of the constant sheaf on the universal covering of the base that underlies a variation of Hodge structure. We also improve a little bit these results, by weakening slightly the Kähler-hyperbolicity assumption.

Using this, we prove through an index formula the positivity of certain top-degree cohomolgy classes on the base built with Chern classes of the Hodge bundles and of the base. This positivity is what we call "Arakelov-type Inequalities".

We provide equality cases for our inequalities corresponding to locally homogenous variations of Hodge structure on hermitian locally symmetric spaces of the non-compact type. We conjecture that there are not any other exemples.

A first attempt to prove this in a particular situation is made, whose failure learns us that our inequalities cannot be proven by a mere Chern-Weil form computation and, in some sense, are of global nature.

Keywords: Kähler manifolds, Hodge theory, Chern classes, Index theorem

Remerciements

Mes remerciements iront tout d'abord à mon directeur de thèse, le Professeur Ngaiming Mok pour l'interet qu'il a porté aux travaux que je présente ici. C'est en effet dans ses travaux qu'on trouvera l'origine de cette thèse. Toujours disponible pour de longues discussions, il a su me guider de ses conseils avisés et me faire profiter de son sens mathématique si aigü et pertinent qui m'a bien souvent laissé pantois. L'aspect psychologique étant aussi très important, je dois le remercier de ses encouragements dans les moments où , du fait de ma paresse ou des difficultés mathématiques , mes travaux piétinaient.

Je remercie également Carlos Simpson et Chris Peters pour avoir accepté la tâche ingrate d'être rapporteurs. Ils m'ont fait de nombreuses et pertinentes suggestions pour améliorer la rédaction de cette thèse. Cependant, à des titres divers, ce sont surtout les idées de leurs travaux mathématiques qui exercent une influence sur ces travaux.

Mes remerciements s'adressent aussi à Laurent Clozel, Gennadi Henkin, Pierre Pansu, Nessim Sibony et Claire Voisin qui m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury.

Je remercie les personnes qui animent les institutions académiques qui m'ont accueilli durant la préparartion de cette thèse, notamment au Département de Mathématiques et d'Informatique de l'ENS, au Département de Mathématiques de Columbia University (New York) et au Laboratoire d'Analyse Harmonique de l'Université Paris XI.

La place me manque pour remercier les mathématiciens et les enseignants qui m'ont fait découvrir et aimer les Mathématiques. Pourtant, je tiens à remercier plus particulièrement Alain Pommelet, Professeur de Spéciales, et Patrick Gérard, Professeur à l'Université Paris XI.

Enfin, je remercie Dieu d'avoir inventé les nombres entiers.

Introduction

Ce travail a pour but de contribuer à l'étude des sous variétés algébriques des variétés localement symétriques kähleriennes de type non-compact. Nous pensons que de telles variétés sont interessantes pour plusieurs raisons:

1. En elles-mêmes.

2. En rapport avec l'épineux problème de l'uniformisation en plusieurs variables complexes. Elles fournissent en effet des exemples où on peut assez bien comprendre le revêtement universel de variétés de type général et de courbure semi-négative au sens de Griffiths.

3. En rapport avec la géometrie algébrique, puisqu'on peut souvent les interpréter comme des espaces de modules.

Le point de départ de cette étude est l'article de mon directeur de thèse, le professeur Ngaiming Mok *Aspects of Kähler Geometry on Arithmetic Varieties* [15] et notamment les chapitres consacrés aux variétés modulaires de Siegel.

L'idée-force de ce travail consiste en l'utilisation systématique de techniques issues de la théorie des Variations de structure de Hodge polarisées, en les interprétant dans le cadre de la géometrie kählerienne. En fait, la plupart des résultats que nous allons formuler se situent dans ce cadre.

L'idée de considérer les domaines symétriques bornés comme espaces de Modules de Variations de structure de Hodge polarisée d'un certain type est semble-t'il due à Pierre Deligne, par extension des travaux de Kuga et de Shimura.

Dans le cadre géométrique qui est le notre, l'illustration la plus flagrante de la naturalité de cette idée est l'article de Steven Zucker [26]. On pourra y lire l'équivalence de catégories entre les Variations de structure de Hodge polarisée sur le domaine symétrique borné Ω munies d'une action compatible du groupe des automorphismes de Ω et les représentations réelles de ce groupe d'automorphismes.

Les techniques de géometrie différentielle dans la théorie des Variations de structure de Hodge polarisées ont une longue histoire. L'introduction du concept dans les articles de Griffiths [8] se passe dans ce cadre. Parmi les autres travaux qui utilisent ces techniques, ceux qui guidèrent le plus notre réflexion sont ceux de W.Schmid [22], de S.Zucker [25] [26] et de C.Peters [18][19].

Le thème majeur de ce domaine est l'étude des phénomènes de monodromie autour des fibres singulières. Ce sont des mathématiques difficiles qui consomment beaucoup de constructions catégorielles.

Notre étude se situe dans un mode mineur et cherche à explorer la géometrie kählerienne de ces situations. Nous éviterons souvent les problèmes provenant des fibres singulières et il y a ici un travail non-trivial à faire pour exploiter nos techniques dans le cadre général de la géometrie algébrique quand des fibres singulières se présentent.

Tirons de cette étude un bilan provisoire.

L'idée qui nous parait la plus la plus significative dans ce travail, pour autant qu'il nous soit permis d'en juger, nous semble être que la notion de Kähler-hyperbolicité de Gromov [10] est pertinente dans le cadre des Variations de structure de Hodge polarisée . Celà nous permet de donner des résultats d'Analyse intéressants comme des théorèmes d'annulation L^2 en plusieurs dimensions. Nous pensons que cette technique affine considérablement les techniques usuelles basées sur l' hyperbolicité au sens de Kobayashi. De plus, nous n'avons pas encore exploité certaines idées de l'article de Gromov, qui pourraient bien avoir de jolies conséquences en géometrie algébrique.

De ces théorèmes d'annulation, nous tirons toute une série d'inégalités de la forme:

$$\chi_m(M).[M] \geq 0$$

où $\chi_m(M)$ est une classe caractéristique de degré maximal sur la variété M, munie d'une Variation de structure de Hodge polarisée pas trop dégenerée, $\chi_m(M)$ étant dans l'algèbre engendrée par les classes caractéristiques de M et par les classes caractéristiques des fibrés de Hodge. Certaines de ces inégalités sont optimales et les cas d'égalité que nous pouvons fournir sont des Variations de structure de Hodge polarisée localement symétriques sur des espaces hermitiens localement symétriques. Conjecturellement, ce sont les seuls cas d'égalité possible. De plus, il n'est pas en général possible de les déduire d'un calcul local, mais leur dérivation nécessite un argument global.

Nous allons maintenant décrire chapitre par chapitre les principaux résultats de ce travail, expliquer la démarche suivie et justifier certains de nos parti-pris.

Chapitre 1

Le but de ce chapitre est de prouver le résultat suivant qui est un théorème de pincement concernant des courbes algébriques non compactes, dont la particularité est qu' aucune borne sur le volume de la courbe ne peut être déduite de l'énoncé et qu'au contraire on peut fournir des exemples où le volume tend vers l'infini:

Théorème 1:

Si $S \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ est une courbe algébrique dont la courbure gaussienne vérifie:

$$(P) \qquad -\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq G^S \leq -\frac{1}{n}$$

S est totalement géodésique et provient localement d'un plongement diagonal $\mathcal{H} \overset{diag}{\to} \mathcal{H}^n \overset{geod}{\to} \mathcal{H}_n$.

Mok avait prouvé ce résultat dans [15] dans le cas où S est compacte.

Ce fut le premier objectif qu'il m'assigna pour commencer ce travail.

La méthode suivie est fort proche de celle de [15]. Nous isolons l'espace des solutions L^2 sur S d'une certaine équation elliptique de degré 1 $L\eta = 0$ vérifiée par les sections de la famille de variétés abeliennes déduite si Γ est assez petit de l'immersion dans $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$.

Nous introduisons une formule de Bochner qui nous permet de voir que l'espace des solutions L^2 est nul dans les conditions de l'énoncé. C'est une variation de la méthode de Mok qui se base sur une utilisation astucieuse de la formule de Gauss-Bonnet.

Ensuite, nous calculons la dimension de cet espace de solutions par une formule d'indice et constatons qu' elle est nulle si et seulement si S est une courbe algébrique totalement géodésique du type indiqué.

A priori, la forme que devait prendre ce calcul n'était pas bien claire.

La démarche que nous avions décidé de suivre était de prouver que la fibre spéciale du modéle de Néron à l'infini était de type multiplicatif et d'essayer de trouver la forme asymptotique des métriques sur les fibrés mis en jeu, les conjectures étant faciles à faire puisque le cas modèle est explicite, puis de prouver les résultats d'analyse nécessaire en s'inspirant de la théorie des Séries d'Eisenstein.

L'étude asymptotique peut être menée à bien avec l'article de Mumford [17] et des compactifications toroïdales. Ce n'est pas très facile ni très élégant. On pourrait certainement nener à bien le calcul dans cet esprit, et nous n' étions pas bien loin d'y parvenir quand nous avons réalisé que toute l'analyse nécessaire, et bien plus, était dans l'article de Zucker *Hodge theory with degenerating coefficients* [26].

Après lecture de cet article, le calcul à mener est un simple exercice.

La manière dont nous avons choisi d'écrire ce résultat n'est pas la plus adaptée dans l'absolu, c'est un mélange de la vision très géométrique de [15] et du formalisme très algébrisé de [25], mais elle a pour avantage d'expliquer comment les VSHP s'introduisent dans ce contexte et de décrire dans les termes de la géometrie différentielle classique les concepts mis en jeu. Par ailleurs un résultat entèrement analogue est prouvé au chapitre 3 avec une preuve plus agréable car utilisant le théorème des orbites SL_2 de Schmid [22] au lieu des compactifications toroïdales, ce qui est vraiment plus judicieux.

En particulier, l'équation elliptique construite de façon géométrique dans [14] était une équation de la forme $D''\eta = 0$ où D'' est l'opérateur défini dans [25] qui est une différentielle d'un complexe qui calcule une certaine composante de la décomposition Hodge du H^1 du faisceau de monodromie associé à la famille de variétés abéliennnes sur S.

Le bilan que nous tirons de cette étude était que nous devions envisager les problèmes sur les sous variétés de variétés hermitiennes localement symetriques de type non compact dans le langage des Variations de structure de Hodge.

Chapitre 2

Il nous fallait donc comprendre la géometrie kählerienne des Variations de structure de Hodge et ce chapitre est la trace de l'effort réalisé pour celà.

Il est en partie classique et ressemblerait beaucoup à un plagiat de [26] si nous n'introduisions pas de deuxième forme fondamentale pour une application de périodes $\tilde{X} \rightarrow \mathcal{D}$, dont nous prouvons que l'annulation sur tout $x \in \tilde{X}$ est caractéristique des exemples de VSHP localement homogènes.

Celà permet de formuler une extension des formules de [26] que nous nommons la formule de Bochner-Hodge dans le cas où la base de la VSHP n'est pas localement symetrique.

Cela constitue une généralisation du calcul du chapitre 1.

Théorème 5 :

$$\Delta_{D''} = \Delta_{d''} + \Delta_{\nabla'} + [d'', \nabla'^*] + [\delta'', \nabla']$$

$[d'', \nabla'^{*}]$ *et* $[\delta'', \nabla']$ *sont deux tenseurs adjoints l'un de l'autre.* $\Delta_{d''}$ *est le laplacien associé à un complexe de Dolbeault et* $\Delta_{\nabla'}$ *est un opérateur d'ordre 0 semi positif relié à la connexion de Gauss-Manin. De plus* $\exists K_{\mathcal{D}} > 0$ *tel que: l'estimation ponctuelle suivante soit réalisée:*

$$\max(\|[d'', \nabla'^{*}]\|, \|[\delta'', \nabla']\|) \leq K_{\mathcal{D}}\|\sigma_{TX|T_{h}(\mathcal{D})}\|$$

Elle avait été originellement développée pour certaines géneralisations du théorème du chapitre 1.

Elle nous a surtout permis de voir qu'une approche en laquelle N.Mok et nous-mêmes avions confiance de la généralisation du chapitre 1 aux courbes suffisamment pincées des variétés hermitiennes localement symetriques de type non compact était vouée à l'échec.

Toutefois, on peut lui lui trouver une application géometrique qui sera expliquée au chapitre 3 et elle permet de savoir comment se comportent les formes harmoniques à valeurs dans une VSHP en présence d'une petite deuxième forme fondamentale. On lui verra jouer un rôle crucial dans la partie conjecturale du chapitre 5.

Chapitre 3

Nous rappelons dans ce chapitre une description de toutes les VSHP localement homogènes sur le disque et appliquons le formalisme du chapitre 2 pour prouver le résultat:

Théorème 9:

$\exists \epsilon_n > 0$ *tel que, si S une surface de Riemann compacte portant une VSHP* **V** *de poids 2 et de vecteur de Hodge* (n, n, n) *et si sa courbure gaussienne vérifie:*

$$m - \epsilon_n \leq G^S \leq m$$

Alors $(S, \mathbf{V})$ *est isomorphe à* $(S, S(2)^n)$ *et l'application de périodes* $\tilde{S}_u \to \mathcal{D}(n, n, n)$ *est une orbite* SL_2.

Nous présentons une preuve de ce résultat dans le cas non-compact qui peut être vue comme une heureuse alternative à la rédaction du chapitre 1.

Ensuite nous présentons la preuve d'un théorème plus fort dans le cas compact qui implique une inégalité semblable à l'inégalité classique d'Arakelov et à ses cas d'égalité. Une remarque de Peters dans [19] tend d'ailleurs à indiquer que ce résultat est plus ou moins folklorique.

Théorème 11:

Pour des courbes algébriques compactes munies d'un VSHP de poids 2 et de vecteur de Hodge (n, n, n)*, les seuls cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov:*

$$2n(2g - 2) \geq 2c_1(H^{2,0})$$

sont les VSHP localement homogènes $(S, S(2)^n)$.

L'énoncé qui permet de faire le lien est le suivant: S est un cas d'égalité si et seulement si la connexion de Gauss-Manin est bijective en tout point de S. C'est une version sans deuxième forme fondamentale de notre théorème de pincement.

La même interprétation est disponible pour le résultat du chapitre 1 et éclaire singulièrement le statut en géometrie algébrique de ce type de théorème de pincement apparemment purement kähleriens. Nous avons en fait l'impression que cette interprétation démystifie notablement ces théorèmes de pincement en les reliant à des résultats classiques.

Nous finissons par remarquer que l'on ne peut pas faire la même chose avec l'inégalité d'Arakelov en poids supérieur, mais dressons un état des lieux et faisons quelques remarques.

Chapitre 4

Ici commence la partie plus substantielle de cette thèse. Il s'agit d'expliquer comment les idées merveilleusement simples et petinentes l'article de M.Gromov *Kähler hyperbolicity and L^2-Hodge theory* fonctionnent dans le cadre des VSHP.

D'abord, nous remarquons que le théorème d'annulation de Gromov, fonctionne pour les formes harmoniques à valeurs dans une VSHP dès que la base est kähler-hyperbolique au sens de Gromov.

Mais le besoin d'avoir des résultats invariants par tranformations birationnelles et le fait qu'on ne peut faire l'économie de diviseurs exceptionnels sur la base lisse d'une VSHP générale[1] nous amène à donner une définition qui est adaptée à ce contexte:

Définition :

Soit X une variété kählerienne de revêtement universel $\tilde{X}_u \to X$. Soit $\omega \in C^\infty(X, \Omega^{1,1})$. On dit que (X, ω) est semi-hyperbolique si et seulement si:

- *$\omega \geq 0$ et $\omega > 0$ sur un ouvert dense.*

-

$$\exists \alpha \in C^\infty(\tilde{X}, \Omega^{1,0}_{\tilde{X}}), \exists K > 0, \ tq: \ d\alpha = \omega \ et \ \forall v \in T_{\tilde{X}}, \ |\alpha(v)| \leq -K\omega(\sqrt{-1}v \wedge \bar{v})$$

Les théorèmes d'annulation L^2 de Gromov se généralisent dans ce cadre comme suit:

Théorème 14:

Si (X, ω) est une variété semi-hyperbolique, il n'y a pas de p-forme holomorphe L^2 sur $\tilde{X}$ pour $p \neq dim_{\mathbb{C}}(X)$.

Théorème 15 :

Si V est une VSHP sur (X, ω) semi-hyperbolique de dimension ≥ 2. Alors, pour toute métrique kählerienne sur X, $\tilde{X}$ ne possède aucune 1-forme harmonique L^2 à valeurs dans V.

Une conséquence agréable est la chose suivante:

Théorème 17 :

Soit $f : A \to M$ une famille de variétés abéliennes sans facteur constant sur la base M connexe et algébrique. On suppose que l'image de M sous l'application des périodes est de dimension ≥ 2 et compacte (il n'y a pas de fibres singulières) dans l'espace de modules des variétés abeliennes $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$

Soit (M_n) une tour de revêtements galoisiens finis $M_n \to M$ et connexes dont la limite projective est le revêtement universel de M ou du moins domine $M \times_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n} \mathcal{H}_n$. On

1. Il est facile de construire des exemples avec des courbes rationnelles d'auto-intersection -2, en résolvant la singularité unique d'une surface contenue dans un espace localement symétrique compact de revêtement universel non compact, avec un seul point conique

a, $\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n))$ désignant le groupe abélien de type fini des sections holomorphes (Groupe de Mordell-Weil):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{rg_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n))}{[\pi_1(M_n):\pi_1(M)]} = 0$$

Chapitre 5 :

Nous mettons ensuite en évidence le fait que la restriction de la métrique de Hodge sur les vecteurs horizontaux induit une structure semi-hyperbolique sur la base d'une VSHP à classifiante equidimensionnelle[2].

Nous voyons notre preuve comme une généralisation du calcul du potentiel de la métrique de Bergmann d'un domaine symétrique borné.

Une utilisation de technique d'indice L^2 d'Atiyah [2] fournit avec nos théorèmes d'annulation des inégalités très similaires aux classiques inégalités d'Arakelov pour des variétés de toute dimension:

Théorème 20:

Soit $n \geq 2$ et M une variété kählerienne lisse de dimension n. Soit V une VSHP de poids w et de vecteur de Hodge $\mathrm{h} = (h^{w0}, \dots, h^{0w})$ dont l'application classifiante ne contracte aucune courbe ou bien est seulement equidimensionnelle si $n = 2$. On dispose de l'inégalité suivante:

$A^n_w(\mathrm{h})_{p+w,n-p}$:

$$(-1)^{n-p}\left(\sum_{i=0}^{w}(-1)^i ch(H^{w-i,i} \otimes \Omega_M^{p+i})\right).Todd(T_M).[M] \geq 0$$

Il est à noter que certains cas d'égalité existent et correspondent à des VSHP localement homogènes sur des espaces localement symétriques. Nous developpons ensuite une série de conjectures disant que ces cas d'inégalité sont les seuls et faisant le lien avec des conjectures portant sur la généralisation des théorèmes de pincement des chapitres 1 et 3 que nous appelons la conjecture des lacunes.

Pour expliquer l'énoncé de cette conjecture, disons que si sa deuxième forme fondamentale est très petite, une application de périodes ressemble beaucoup à un unique modèle qui est une application de périodes associée à une VSHP localement homogène.

Conjecture :

Soit $\mathcal{D}$ un domaine de Griffiths et $(X, \mathbf{V}')$ une variété algèbrique $\exists\epsilon = \epsilon_{\mathcal{D}} > 0$ tel que si $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\|_{L^\infty} \leq \epsilon$ et $(\tilde{X}, \mathbf{V})$ est modelé sur un domaine symétrique borné Ω muni d'une VSHP Homogène $\mathbf{V}'$, on ait en fait $(\tilde{X}, \mathbf{V}) \simeq (\Omega, \mathbf{V}')$.

Nous devons avouer que nous hésitons sur ce qu'il faut penser de nos inégalités, surtout en rapport avec la conjecture des lacunes.

En particulier, nous ignorons si elles sont plus qu'une simple curiosité d'ordre zoologique ou bien quelque chose de plus interessant.

Chapitre 6 :

2. C'est la condition de non-dégenerescence la plus générale envisageable.

On peut légitimement se demander si des calculs de courbures ponctuels ne pourraient pas établir ces inégalités d'Arakelov. Nous développons dans ce chapitre le formalisme de ces calculs de courbure dans le cas des surfaces.

Si l'on écrit la formule de Gauss, on voit que la forme de Chern-Weil associée à $c_2(S)$ se coupe en un terme dépendant de la deuxième forme fondamentale et un terme n'en dépendant pas.

Nous établissons par le calcul que ces deux termes sont positifs en tout point d'une surface base d'une VSHP à applications de périodes immersive.

Il est bien clair que c'est aussi le cas pour $c_1^2(S)$.

On en déduira le théorème:

Théorème 25 :

Soit $\mathbf{h} = (h^{pq})_{p+q=n,p\geq 0}$ *un vecteur de nombres entiers tous non nuls vérifiant* $h^{pq} = h^{qp}$.

Soit a et b deux réels positifs non tous nuls. $\exists K > 0$ tel que si S est une surface algébrique base d'une VSHP de vecteur de Hodge $\mathbf{h}$ *de classifante immersive et χ_2 une (2,2)-classe de cohomologie dans l'algèbre engendrée par les classes caractéristiques des fibrés de Hodge de la VSHP, on ait l'inégalité suivante:*

$$ac_1^2(S) + bc_2(S).[S] > K\chi_2.[S]$$

Ce théorème est différent de nos inégalités précédentes. En effet, on l'établit par un calcul purement local, tandis que nos inégalités d'Arakelov sont un phénomène global.

Nous refusons de nous prononcer sur d'éventuels cas d'égalité ou d'éventuelles géneralisations globales dans l'état actuel de nos connaissances. Si l'on veut une interprétation en termes de théorèmes d'indice de ce type d'inégalités avec des constantes irrationnelles, il faudra utiliser des indices L^2 de Von Neumann.

Chapitre 7 :

Nous examinons dans ce chapitre les cas d'égalité de l'inégalité $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$ en cherchant à appliquer la démarche de la fin du chapitre 5. Cette inégalité présente deux types cas d'égalité localement homogène, l'un a pour base un bidisque l'autre une 2-boule complexe. L'inégalité s'écrit:

$$2c_2(S) - 4ch_2(H^{2,0}) \geq 0$$

Rappelons que, si nous pouvions prouver par un calcul de courbure cette inégalité, nous aurions par là-même une preuve de la conjecture des lacunes dans ce cas.

Un élément favorable est que si l'on écrit l'équation de Gauss et qu'on considère le terme issu de la deuxième forme fondamentale comme un terme perturbateur sa contribution à la forme de Chern-Weil $c_2(S)$ est positive, comme nous l'avons déjà constaté.

Une preuve locale de cette inégalité consisterait à voir que le terme issu de la courbure du domaine de Griffiths est positif.

On pouvait être assez confiant a priori à ce sujet. Par exemple, en ce qui concerne l'inégalité $A_2^2(4,8,4)_{3,1}$ si on suppose que l'application de périodes se factorise à travers $B^2 \times B^2$, on peut prouver que ce terme local est positif. Celà fournit une preuve de la conjecture des lacunes dans ce cas. Mais, nous ne la présentons pas ici puisqu'un argument très standard permet d'y arriver [6].

Toujours est-il que nous pouvons exhiber un contre exemple et en déduisons que cette inégalité d'Arakelov ne peut pas être déduite d'un calcul local, mais qu'elle est de nature globale.

Il est facile de voir que si on avait par un calcul local de courbure une preuve locale de l'inégalité d'Arakelov pour des applications horizontales suffisamment semblables à une application de périodes associées à une VSHP localement homogéne, on aurait du même coup une preuve de la conjecture des lacunes dans le cas de ce modèle.

S'il est facile de voir par le contre exemple présenté que cette démarche échoue dans le cas du bidisque, le cas de la 2-boule nécessite des calculs très longs et trés pénibles que nous sommes en train de finir mais que par sécurité nous n'inclurerons pas dans cette thèse. Il est possible qu'ils conduisent à une preuve de la conjecture des lacunes. Si tel était le cas, nous les publierions autre part.

Table des matières

1 Phénomène de pincement diagonal **17**

1.1 Domaines de Siegel 17

1.2 Structures de Hodge et propriétés modulaires 18

1.3 Un théorème d'annulation pour $H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}})^{1,1}$ 19

1.4 Contrôles sur la dégenerescence à l'infini 22

1.5 Preuve du théorème de pincement 24

2 Variations de structure de Hodge polarisées **29**

2.1 Variations de structure de Hodge polarisée 29

2.2 Connexion de Gauss-Manin 30

2.3 Espace Classifiant 31

2.4 Le fibré tangeant horizontal 33

2.5 Forme kählerienne canonique d'une VSHP 34

2.6 Seconde forme fondamentale d'une VSHP 35

2.7 Une formule de Bochner 37

3 Inégalités d'Arakelov pour des courbes **45**

3.1 Inégalités d'Arakelov classiques 45

3.2 Description des VSHP localement homogènes sur H 46

3.3 Courbures des domaines de Griffiths 48

3.4 Phénomène de pincement en poids 2 48

3.5 Inégalités d'Arakelov en poids ≥ 3 55

4 Semi hyperbolicité kählerienne **57**

4.1 Motivations 57

4.2 Théorème d'annulation L^2 pour certains fibrés plats 58

4.3 Notion de semi-hyperbolicité 62

4.4 p-formes holomorphes L^2 63

4.5 Formes harmoniques à valeurs dans une VHSP 64

4.6 Signification des théorèmes d'annulation L^2 65

5 Inégalités d'Arakelov en dimension supérieure **69**

5.1 Applications de périodes 69

5.2 Inégalités d'Arakelov 72

5.3 Lien avec la conjecture des lacunes. 82

6 Formes de Chern-Weil 85
6.1 Plans abéliens dans $T_h(D)$ 85
6.2 Fonctions de Chern-Weil 86
6.3 Un fait général 92

7 Non-localité de $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$ 95
7.1 Plans abéliens dans $T_h(D)$ 95
7.2 Un contre exemple 97

Chapitre 1

Phénomène de pincement diagonal

1.1 Domaines de Siegel

1.1.1 Conventions

$\mathcal{H}_n = \{Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : {}^tZ = Z$ et $ImZ > 0\}$ est un domaine symétrique borné de groupe d'automorphismes $G = Sp(2n, \mathbb{R})$. Le stabilisateur de l'origine $o = \sqrt{-1}I_n$ est $U(n)$. Sur $\mathcal{H}_n$, nous avons une unique structure kählerienne ω, G-invariante et symétrique, normalisée par la condition:

$$\forall \alpha \in T^{1,0}\mathcal{H}_n, \|\alpha\| = 1, \quad -1 \leq R^{\mathcal{H}_n}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq -\frac{1}{n}$$

Si Γ est un sous groupe d'indice fini de $Sp(2n, \mathbb{Z})$ agissant proprement et librement sur $\mathcal{H}_n$, la variété kählerienne $(\Gamma\backslash\mathcal{H}_n, \omega)$ est complète de volume fini et possède une compactification projective minimale et singulière $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}_{Sat}$ ([3]).

1.1.2 Courbes algébriques

Une courbe algébrique tracée sur $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$, $S \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ est dans ce travail une immersion d'image fermée d'une surface de Riemann telle que son adhérence dans $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}_{Sat}$ soit une courbe algébrique C. Quelle que soit la compactification $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}$ de $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$, il existe un morphisme ϕ de la normalisation $\bar{S}$ de C, tel que $S = \phi^{-1}(\Gamma\backslash\mathcal{H}_n)$ et compatible à notre immersion. Par [15] (S,ω) est complète et de volume fini. Nous désirons montrer le théorème:

Théorème 1 *Si $S \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ est une courbe algébrique dont la courbure gaussienne vérifie:*

$$(P) \qquad -\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq G^S \leq -\frac{1}{n}$$

S est totalement géodésique et provient localement d'un plongement diagonal $\mathcal{H} \overset{diag}{\to} \mathcal{H}^n \overset{geod}{\to} \mathcal{H}_n$.

Mok avait prouvé ce résultat dans [15] dans le cas où S est compacte. Nous supposons donc que $\mathrm{Card}(\bar{S} - S) > 0$

1.2 Structures de Hodge et propriétés modulaires

1.2.1 Introduction des outils

Si Γ est un sous groupe de congruence assez petit, la variété $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ est base d'une famille modulaire de variétées abéliennes $\pi : A_\Gamma \to \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$. Le faisceau localement constant $L = R^1\pi_*\mathbf{Z}$ porte une variation de structure de Hodge polarisée de poids 1 et de nombres de Hodge $h^{1,0} = h^{0,1} = n$ (cf. infra). Cette variation de structure de Hodge est en fait localement homogène ([26]) et se produit sur tout quotient lisse $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$. Elle est entière dans le cas où γ est commensurable à $Sp(2n, \mathbf{Z})$, ce qui est notre cas, et réelle sinon.

1.2.2 Résumé de la théorie de Deligne-Zucker

Définition 1.2.1 *Soit L un faisceau localement constant en $\mathbf{Z}$-modules libres de rang n sur la variété connexe kählerienne X. Une variation de structure de Hodge polarisée sur L de poids 1 et de nombres de Hodge $h^{1,0} = h^{0,1} = n$, c'est la donnée de:*

1. *Une forme antisymétrique plate et entière sur L, $< .,. >$.*

2. *Un sous faisceau analytique cohérent de rang n, $\mathcal{F}^1 \subset L \otimes \mathcal{O}_X$ tel que:*

   - *Au niveau des germes en un point x de X, $\mathcal{F}^1_x \oplus \overline{\mathcal{F}^1_x} = L \otimes \mathbf{C}$*
   - $< \mathcal{F}^1_x, \mathcal{F}^1_x >= 0$
   - $\forall f \in \mathcal{F}^1_x - 0,\ \sqrt{-1} < f, \bar{f} >> 0$

Nous appelons $H^{1,0}$ le fibré $\mathcal{C}^\infty$ associé à $\mathcal{F}^1$ et posons $H^{0,1} := \overline{H^{1,0}}$. Compte tenu de la décomposition des formes suivant leur bitype l'operateur de De Rham d_L sur les formes différentielles complexes à valeurs dans $L_\mathbf{C} = L \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{C}$ se décompose comme suit [25]:

$$d_L = d' + d'' + \nabla' + \nabla''$$

- $d' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p,q} \otimes \Omega^{r+1,s}$
- $d'' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s+1}$
- $\nabla' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{r+1,s}$
- $\nabla'' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p+1,q-1} \otimes \Omega^{r,s+1}$

Modulo l'isomorphisme $\mathcal{F}^1 \simeq H^{1,0}$ et $L \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{F}^1 \simeq H^{0,1}$, l'opérateur d'' est le classique $\overline{\partial}$ de Dolbeault. Quant aux opérateurs ∇' et ∇'' ce sont des tenseurs (ou opérateurs d'ordre 0). Si nous posons:

$$\mathcal{E}^{P,Q} := \bigoplus_{\substack{p+r=P \\ q+s=Q}} H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s}$$

Et $D'' = d'' + \nabla'$, il vient $D''\mathcal{E}^{P,Q} \subset \mathcal{E}^{P,Q+1}$.

Notre complexe de De Rham est donc naturellement bifiltré par la procédure standard et si nous prenons sur celui ci la métrique induite par une métrique kählerienne sur X et par la metrique sur le fibré associé à L obtenue en décrétant $H^{1,0}$ et $H^{0,1}$ orthogonaux et en prenant comme métrique sur chaque terme celle donnée par le troisième point de la définition, nous avons pour les laplaciens correspondants $2\Delta_{D''} = \Delta_{d_L}$. Ceci est dû à Deligne et est décrit dans [25].

Dans le cas compact, on a une décomposition de Hodge sur $H^\bullet(X, L_{\mathbb{C}})$. Si (S,ω) est une courbe affine de compactifiée lisse $\bar{S} = S \cup (P_i)$, si j désigne l'immersion ouverte $S \hookrightarrow \bar{S}$ et si ω vérifie sur un disque de carte (Δ, ζ) centré en P_i l'estimation:

$$\exists c, C > 0 : \quad c\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 |log|\zeta||^2} \leq \omega \leq C\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 |log|\zeta||^2}$$

Zucker montre dans [25] une décomposition de Hodge pour n=0,1,2:

$$H^n(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{P+Q=n+1} H^n(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{P,Q}$$

Avec l'interprétation analytique suivante:

$$H^n(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{P,Q} \doteq \{\phi \in L^2(S, \mathcal{E}^{P,Q}) : \quad \Delta_{D''}\phi = 0\}$$

1.3 Un théorème d'annulation pour $H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{1,1}$

1.3.1 Interprétation géométrique

$H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{1,1}$ étant invariant par conjugaison, $H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{1,1} = H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{R}})^{1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Nous interprétons cet espace dans l'esprit de [15]. Si on a la famille modulaire $\pi : A_\Gamma \to \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$, le fibré vertical V est canoniquement identifié à $H^{0,1}$. Ce fibré est localement homogène et la métrique hermitienne correspondante est la métrique de Hodge.

Par ailleurs, TA_Γ se scinde de façon C^∞ en $TA_\Gamma = V \oplus H$, $H \simeq \pi^* T_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}$, H_p étant l'espace tangeant à l'unique section locale de $A = V/L$ en $\pi(p)$ provenant d'une section de $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbf{R}$. Pour σ une section holomorphe locale de A_Γ, posons $\eta_\sigma = P_{TA_\Gamma \to V}(d\sigma)$, la projection P étant paralle à H. Alors $\eta \in C^\infty(V \otimes \Omega^1)$. Si σ est une section rationnelle $\eta \in L^2$.

Si $\phi \in C^\infty(V \otimes \Omega^1)$, posons $\chi(\phi) = i(\phi) + \overline{i(\phi)}$, avec $i : V \otimes \Omega^1 \simeq H^{0,1} \otimes \Omega^{1,0}$, l'isomorphisme canonique et considérons le diagramme commutatif suivant définissant l'opérateur D_0:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}^{1,0} & \xrightarrow{D''} & \mathcal{E}^{1,1} & \xrightarrow{D''} & \mathcal{E}^{1,2} \\
\| & & \| & & \| \\
H^{1,0} & \rightarrow & \begin{array}{c} H^{1,0} \otimes \Omega^{0,1} \\ \oplus \\ H^{0,1} \otimes \Omega^{1,0} \end{array} & \rightarrow & H^{1,0} \otimes \Omega^{1,1} \\
 & & \uparrow \chi & & \uparrow i \\
 & & V \otimes \Omega^{1,0} & \xrightarrow{D_0} & V \otimes \Omega^{1,1}
\end{array}$$

Proposition 1.3.1 *Si U est un ouvert simplement connexe de S et $\eta \in C^\infty(U, V \otimes \Omega^1)$, alors $D_0\eta = 0$ si et seulement si il existe une section holomorphe τ de V de projection σ comme section de A telle que $\eta = \eta(\sigma)$. En termes de faisceaux $\mathcal{O}(V)/L_{\mathbb{R}} = \ker D_0$. De plus $\chi(\eta)$ est réelle et harmonique.*

Preuve:

$D_0\eta = 0$ équivaut à $D''\chi = 0$. Comme χ est réelle $d_L\chi = 0$ puis $\chi = d_L\varsigma$, ς réelle et $\varsigma = \sigma + \overline{\sigma}$, $\sigma \in H^{0,1}$. L'annulation du terme $\mathcal{E}^{0,2}$ de $d_L\varsigma$ dit que σ est holomorphe. De plus $\eta = \eta(\sigma) = P^{1,0}d_L\sigma$. D'où $\mathcal{O}(V)/L_{\mathbb{R}} = \ker D_0$.

δ' l'adjoint de D' et Λ la multiplication intérieure par la forme kählerienne vérifient comme dans le cas classique $[\Lambda, D''] = -\sqrt{-1}\delta'$. Comme Λ est nul sur les 1-formes, $\delta'\chi = 0$. De même $\delta''\chi = 0$ et χ est harmonique.

1.3.2 Equation propre

La remarque fondamentale de [15] en ce qui concerne notre théorème de pincement est que dans le cas de la VSHP modulaire sur $S = \Gamma\backslash\mathcal{H}$, $\forall\eta \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathcal{H}, V \otimes \Omega^1)$, tel que $D_0\eta = 0$, on a $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\eta + \eta = 0$. L'intégration par parties fournit dans les notations de [15], $A^\infty(\mathbb{C}(S)) = H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{R}})^{1,1} = 0$. Notre condition (P) nous place presque dans ce cas.

Soit $P \in S$, $\alpha \in T^{1,0}S$, $\|\alpha\| = 1$. L'immersion $S \hookrightarrow \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ donne naissance à une seconde forme fondamentale $\Sigma \in C^\infty(S, End(T_S; T_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}/T_S) \otimes \Omega^1_S)$ définie par:

$$\forall\theta \in C^\infty(S, T_S) \quad \nabla^S_\alpha\theta = \nabla^{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}_\alpha\theta - \Sigma_\alpha(\theta)$$

Dualement, si $p : T^*_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n} \to T^*_S$ est la restriction des formes et $e^* \in C^\infty(S, T^*_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n})$:

$$\forall\theta \in C^\infty(S, T_S) < \theta; p(\nabla^{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}_\alpha e^*) - \nabla^S_\alpha p(e^*) >=< \Sigma_\alpha(\theta); e^* >$$

Passant au revêtement universel $\tilde{S} \to \mathcal{H}_n$, l'invariance sous G des objets considérés permet de supposer que $\tilde{P}$ s'envoie sur l'origine o et par le théorème des polydisques [14] que:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial\tau_{ii}}, \qquad \sum_{i=1}^n \|\alpha^i\|^2 = n$$

Proposition 1.3.2 *Si $D_o\eta = 0$, η vérifie en P l'équation:*

$$\bar{\nabla}^*\bar{\nabla}\eta + \frac{1}{n}\eta = \frac{1}{n}S_0(\eta) + S_1(\bar{\eta})$$

S_0 est un opérateur autoadjoint de valeurs propres $(1 - |\alpha_i|^2)_{1\leq i\leq n}$. S_1 est un opérateur linéaire vérifiant $|||S_1||| \leq \|\Sigma_\alpha(\alpha)\|$.

Preuve :
Rappelons le calcul de [16]. Soit $(d\tau^{ij})$ la base duale de $(\frac{\partial}{\partial\tau_{ij}})$ sur $\mathcal{H}_n$, $(\frac{\partial}{\partial w_i})$ une base orthonormale de V_o telle que $\frac{\partial}{\partial w_i}.\frac{\partial}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial\tau_{ii}}$ sous l'isomorphisme $S^2V \simeq T_o\mathcal{H}_n$. On peut définir des tenseurs parallèles sur $\mathcal{H}_n$ par:

$$\begin{aligned} \Lambda(d\tau^{ij} \otimes \frac{\partial}{\partial w_k}) &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}dw^j + \delta_{jk}dw^i) \\ \Xi(dw^i) &= \sum_j d\tau^{ij} \otimes \frac{\partial}{\partial w_j} \end{aligned}$$

Si η est une 1,0-forme à valeurs vectorielles, posons $\eta(\alpha) = \langle \eta, \alpha \rangle$. Alors $D_0\eta = 0$ est équivalent sous l'identification isométrique $\bar{V} \simeq V^*$, à:

$$\partial_{\bar{\alpha}}\eta = -\sqrt{-1}\Xi(\eta(\alpha))$$

$$\text{Donc} \quad < \alpha, \nabla^S_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}\eta > = < \alpha, \nabla^{\mathcal{H}_n}_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}\eta > + < \Sigma_\alpha(\alpha), \partial_{\bar{\alpha}}\eta >$$

De [16], nous tirons la formule pour le premier terme:

$$\begin{aligned}
(\alpha, \nabla^{\mathcal{H}_n}_\alpha \partial_{\bar{\alpha}}\eta) &= (\alpha, \Xi\Lambda(\bar{\alpha} \otimes \eta(\alpha))) \\
&= \frac{1}{n}\Big(\sum_i \eta^i(\alpha)\frac{\partial}{\partial w_i} + \sum_i (1 - |\alpha^i|^2)\eta^i(\alpha)\frac{\partial}{\partial w_i}\Big) \\
&= \frac{1}{n}(\eta + \tilde{S}_0(\eta))
\end{aligned}$$

Pour le deuxième terme, en posant $\Sigma_\alpha(\alpha) = \sum \sigma^{ij}\frac{\partial}{\partial \tau_{ij}}$:

$$< \Sigma_\alpha(\alpha), \partial_{\bar{\alpha}}\eta > = \sum_j \Big(\sum_i \sigma^{ij}\overline{\eta^i(\alpha)}\Big)\frac{\partial}{\partial w_j} = \tilde{S}_1(\eta)$$

Le théorème de Cauchy-Schwarz permet d'estimer:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{S}_1(\eta)\|^2 &= \sum_j \Big|\sum_i \sigma^{ij}\overline{\eta^i(\alpha)}\Big|^2 \\
&\leq \sum_j \|\eta(\alpha)\|^2 \sum_i |\sigma^{ij}|^2 \\
&\leq \|\eta\|^2 \sum_{ij} |\sigma^{ij}|^2 = \|\eta\|^2 \|\Sigma_\alpha(\alpha)\|^2
\end{aligned}$$

En prenant les traces, la proposition est démontrée.

Corollaire 1.3.3 *Si la condition de pincement (P) est satisfaite,* $H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{R}})^{1,1} = 0$

Preuve :
Soit $\chi \in H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{R}})^{1,1}$. Alors $\chi = \chi(\phi)$, avec $D_0\phi = 0$. ϕ est, rappelons le, une section de carré intégrable.

Exploitons la condition de pincement (P). Elle implique via l'équation de Gauss les conditions suivantes:

$$\|\Sigma_\alpha(\alpha)\|^2 \leq \frac{1}{4n^2} \tag{1}$$

$$-\frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} \leq R^{\mathcal{H}_n}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq -\frac{1}{n} \tag{2}$$

La structure du tenseur de courbure de $\mathcal{H}_n$ donne avec (2):

$$\forall i, \quad |1 - |\alpha^i|^2| \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Qu'une telle estimation existe résulte du fait que $-\frac{1}{n}$, le maximum des courbures sectionnelles holomorphes sur $\mathcal{H}_n$ est réalisé exactement en les droites tangeantes à une courbe diagonale [14].

De la proposition 1.3.2 nous tirons la relation:

$$\int_S (\bar{\nabla}^* \bar{\nabla}\phi, \phi) + \frac{1}{n}\|\phi\|^2 = \int_S \frac{1}{n}(S_0(\phi), \phi) + (S_1(\bar{\phi}), \phi)$$

Comme dans [15], nous pouvons intégrer par parties car S est complète pour sa métrique kählerienne et il vient:

$$\int_S \|\bar{\nabla}\phi\|^2 = \int_S \frac{1}{n}(S_0(\phi), \phi) + (S_1(\bar{\phi}), \phi) - \frac{1}{n}\|\phi\|^2$$

Les conditions (1) et (2) fournissent en tout point les estimations suivantes, compte tenu de la proposition 1.3.2:

$$\begin{aligned} (S_0(\phi), \phi) &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{n}}\|\phi\|^2 \\ (S_1(\bar{\phi}), \phi) &\leq \frac{1}{2n}\|\phi\|^2 \end{aligned}$$

Ces dernières remarques nous donnent l'inégalité suivante:

$$\int_S \|\bar{\nabla}\phi\|^2 \leq \frac{1}{2n}(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - 1)\int_S \|\phi\|^2$$

De là, comme le nombre $\sqrt{n-1/n} - 1$ est négatif, on conclut que $\int \|\phi\|^2 = 0$ d'où l'on tire que $\phi = 0$, puis $\chi = 0$. On a bien prouvé que $H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbf{R}})^{1,1} = 0$

1.4 Contrôles sur la dégenerescence à l'infini

1.4.1 Comportement de la métrique

Rappelons le lemme suivant, connu sous le nom de lemme d'Ahlfors-Schwarz [14].

Lemme 1.4.1 *Soit C une surface de Riemann munie d'une métrique de courbure ≤ -1 et complète pour cette métrique. Soit C' une autre surface de Riemann munie d'une métrique de courbure ≥ -1. Toute application holomorphe $f : C \to C'$ est contractante pour ces métriques.*

Si $G^S \geq -M$, la courbe kählerienne complète (S, ω) vérifie $-\frac{1}{n} \geq G^S \geq -M$ et si $P \in \bar{S} - S$ à pour voisinage de carte (Δ, ζ) avec $\zeta(P) = 0$, le lemme d' Ahlfors-Schwarz fournit:

Proposition 1.4.2 $\exists C, c > 0, \; \exists r > 0, \; \forall |\zeta| \leq r$:

$$c\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 |log|\zeta||^2} \leq \omega \leq C\frac{\sqrt{-1}}{2}\frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 |log|\zeta||^2}$$

Preuve :

Considérons la métrique h de courbure Gaussienne $-1/n$ sur la surface de Riemann S. Le point à l'infini P est de type parabolique pour l'action du groupe fondamental sur le disque de Poincaré. En conséquence, il existe un ouvert de carte près de P (Δ^*, w) en termes de laquelle cette métrique hyperbolique est proportionnelle à $|dw|^2/|w|^2 log^2|w|$.

Le résultat provient alors de l'application du lemme d'Ahlfors-Schwarz à l'application $(S,\omega) \xrightarrow{Id} (S,h)$ et à son inverse.

1.4.2 Modéle de Néron

La variété abélienne A sur $\mathbb{C}(\bar{S})$, induite par restriction à S de la famille modulaire, à un modèle de Néron en $P \in \bar{S} - S$, dont la fibre spéciale est une variété semi-abélienne, c'est à dire une extension d'une variété abélienne B de dimension n-s par un tore $\mathbb{C}^{*s}$.

La variété quasiprojective $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ possède des compactifications toroidales $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}$ construites dans [1]. Par [17] et [5], le point P s'envoie sur sur un point P' de $\overline{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n} - \Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ ayant un voisinage $\mathcal{U}$ possédant les propriétés suivantes, avec $F \simeq \mathcal{H}_{n-s}$ une composante rationnelle au bord de $\mathcal{H}_n$ et $U(F)$ le radical unipotent de son normalisateur:

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma \cap U(F)\backslash\mathcal{H}_n & \stackrel{i}{\hookrightarrow} & \mathbb{C}^{*m} \times \mathcal{H}_{n-s} \times \mathbb{C}^l \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{U} \subset \overline{\Gamma \cap U(F)\backslash\mathcal{H}_n} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^m \times \mathcal{H}_{n-s} \times \mathbb{C}^l
\end{array}$$

Et il existe une famille réelle analytique V d'automorhismes de $\mathcal{H}_n$ agissant dans nos coordonnées par la formule:

$$v.(z;t;y) = (e^{i\xi(v,t)}.z;t;y+\eta(v,t))$$

ξ et η sont analytiques et l'action est transitive sur le facteur $\mathbb{C}^l$.

Dans notre carte (Δ,ζ), l'application $\Delta \xrightarrow{f} \mathcal{U}$ s'écrit $f(\zeta) = (z(\zeta);t(\zeta);y(\zeta))$. Posant $f' = v.f$ avec $y(0) + \eta(v(0),t) = 0$, on peut se ramener au cas où $y(0) = 0$. De plus $\exists v \in C^0(\Delta, V)$ telle que $y(\zeta) + \eta(v(\zeta), t(\zeta)) = 0$.

Proposition 1.4.3 *Si* $\exists\epsilon > 0$, $\forall\beta \in T_S^{1,0}$: $R^{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n}_{\beta\bar{\beta}\beta\bar{\beta}} \geq (-\frac{k}{n} + \epsilon)||\beta||^4$, $2 \leq k \leq n$, *la partie torique de la fibre spéciale du modèle de Néron en P est de dimension s, avec:*

$$s \geq n + 2 - k$$

En particulier, sous (P), la fibre spéciale du modèle de Néron est juste $A_P = \mathbb{C}^{*n}$ et est donc de type multiplicatif.

Preuve :

$\alpha = f_*\frac{\partial}{\partial\zeta}$, par la proposition 3 $||\alpha(\zeta)||^2 \geq \frac{c}{|\zeta|^2 log^2|\zeta|}$ et $\lim_{\zeta\to 0} ||\alpha(\zeta)|| = \infty$.

De plus, les composantes de α dans nos coordonnées sont bornées, par conséquent, celles de $v_{\zeta *}\alpha$ aussi. Ce vecteur est tangeant à $\Gamma\cap U(F)\backslash\mathcal{H}_n$ en $P(\zeta) \in \mathbb{C}^{*m} \times \mathcal{H}_{n-s} \times \{0\}$. Or, cette partie de $\mathcal{U}$ s'identifie à $\Gamma'\backslash\mathcal{H}_s \times \mathcal{H}_{n-s}$ où $\mathcal{H}_s \hookrightarrow \mathcal{H}_n$ est un plongement géodésique.

Donc $v_{\zeta}.\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ avec α_1 tangeant à $\mathcal{H}_s$ α_2 à $\mathcal{H}_{n-s}$ α_3 à $\mathbf{C}^s$, $P(\zeta)$ se projette sur $\mathcal{H}_{n-s}$ en $t(\zeta)$ et $t(0)$ est un module de la variété abélienne B.

Or la métrique ω est équivalente à la métrique de Poincaré définie par [17] dont les directions de dégénerescence sont parallèles à $\mathcal{H}_s$. En particulier $\exists M > 0$; $\|\alpha_2\|, \|\alpha_3\| \leq M$. Donc: $\lim_{\zeta \to 0} \|\alpha_1\| = \infty$ et :

$$\liminf_{\zeta \to 0} \frac{R^{\mathcal{H}_n}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}}}{\|\alpha\|^4} = \liminf_{\zeta \to 0} \frac{R^{\mathcal{H}_n}_{\alpha_1\bar{\alpha}_1\alpha_1\bar{\alpha}_1}}{\|\alpha_1\|^4}$$

Comme α_1 est tangeant à $\mathcal{H}_s$, notre normalisation donne:

$$R^{\mathcal{H}_n}_{\alpha_1\bar{\alpha}_1\alpha_1\bar{\alpha}_1} \leq -\frac{1}{n}(n-s+1)\|\alpha_1\|^4$$

De là $-\frac{1}{n}(n-s+1) \geq -\frac{k}{n} + \epsilon$ puis $s \geq n-k+2$.

1.5 Preuve du théorème de pincement

Nous supposons jusqu'au dernier paragraphe exclus que la monodromie de $L_{\mathbf{R}}$ en $P \in \bar{S} - S$ est unipotente et que $\Gamma \backslash \mathcal{H}_n$ porte une famille modulaire de variétés abéliennes. La dernière restriction est d'ailleurs inessentielle puisque le résultat cherché est invariant par un revêtement fini.

1.5.1 Calcul de $\dim_{\mathbf{R}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbf{R}})$

En utilisant la suite spectrale de Leray, on peut calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré par la formule[1]:

$$\chi(\bar{S}; j_* L_{\mathbf{R}}) = 2n\chi(\bar{S}, \mathbf{R}) - n\mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

En effet, la suite spectrale de Leray pour l'immersion j et le faisceau $L_{\mathbf{R}}$ a pour terme E_2, $E_2^{pq} = H^p(\bar{S}, R^q j_* L_{\mathbf{R}})$.

Les faisceaux de cohomologie locale $R^i j_* L_{\mathbf{R}}$, $i \geq 1$ sont supportés sur le diviseur à l'infini $\bar{S} - S$. Ce sont donc des faisceaux gratte-ciel. Ils sont donc acycliques. De plus, par définition, au point $P \in \bar{S} - S$ la fibre de ces faiceaux de cohomologie locale est la limite inductive de $H^i(U - \{P\}, L_{\mathbf{R}})$ U décrivant la famille des voisinages ouverts de P. Il y a une base de voisinages isomorphes à des disques D, et $D - P$ est homotopiquement équivalent à S^1, lacet tournant une fois autour de P. Donc:

$$(R^i j_* L_{\mathbf{R}})_P \simeq H^i(S^1, L_{\mathbf{R}})$$

$L_{\mathbf{R}}$ étant un faisceau localement constant $(R^i j_* L_{\mathbf{R}})_P = \{0\}$, $i \geq 2$ et ces faisceaux sont nuls. De plus $(R^1 j_* L_{\mathbf{R}})_P$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à celle de $(j_* L_{\mathbf{R}})_{P_i}$, la caractéristique d'Euler d'un cercle étant nulle. Dans notre cas cette dimension est n, puisque le modèle de Néron est de type multiplicatif aux point à l'infini.

Une propriété bien connue des suites spectrales nous permet de dire que:

$$\chi(\bar{S}, j_* L_{\mathbf{R}}) - \sum_{P \in \bar{S} - S} dim(R^1 j_* L_{\mathbf{R}})_P = \chi(S, L_{\mathbf{R}})$$

1. voir un calcul analogue au chapitre 3

Mais, la résolution de Čech fournit $\chi(S, L_{\mathbf{R}}) = 2n\chi(S, \mathbf{R})$.

Appliquons encore au faisceau constant $\mathbf{R}$ la suite spectrale de Leray:

$$\chi(\bar{S}, j_*\mathbf{R}) = \chi(S, \mathbf{R}) + \mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

Or $j_*\mathbf{R} = \mathbf{R}$. On a donc bien l'égalité:

$$\chi(\bar{S}; j_*L_{\mathbf{R}}) = 2n\chi(\bar{S}, \mathbf{R}) - n\mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

De plus, grâce aux estimations à l'infini sur la métrique, déduites du lemme d'Ahlfors-Schwarz, l'inégalité de Cohn-Vossen devient une égalité:

$$2g(\bar{S}) - 2 = \int_S c_1(K_S, \omega) - \mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

$$\text{Puis} \quad \chi(\bar{S}; j_*L_{\mathbf{R}}) = -2n \int_S c_1(K_S, \omega) + n\mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

Enfin, le fait que le modèle de Néron soit de type multiplicatif implique que la famille de variétés abéliennes n'a pas de facteur constant, puis par [15] $H^0(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{R}}) = 0$. Par [25], $H^0(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{R}}) \simeq H^2(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{R}})$ et nous avons prouvé la

Proposition 1.5.1 *$\dim_{\mathbf{R}} H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{R}}) = 2n \int_S c_1(K_S, \omega) - n\,Card(\bar{S} - S)$*

1.5.2 Calcul de $\dim_{\mathbf{C}} H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{C}})^{2,0}$

Par [25], cet espace est constitué de sections $\phi \in L^2(S, H^{1,0} \otimes \Omega^{1,0})$ vérifiant $\Delta_{D''}\phi = 0$. Le D"-complexe à ce niveau est isomorphe à $\bar{\partial} : V^* \otimes \Omega^1_S \to V^* \otimes \Omega^1_S \otimes \Omega^{0,1}_S$.

Donc $H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbf{C}})^{2,0} = \{\text{sections holomorphes } L^2 \text{ de } V^* \otimes \Omega^1_S \text{ sur } S\}$.

Par [17], les fibrés V^* et Vont des extensions canoniques sur $\bar{S}$, $\bar{V}^*$ et $\bar{V}$caractérisées par le fait que pour toute section s de $\bar{V}^*$ ou $\bar{V}$, non nulle en P, la norme de Hodge de s vérifie: $h(e) = O(||log|\zeta||^N)$.

Par le théorème de l'orbite SL_2 de Schmid (voir [25]), $L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S$ a une extension canonique $\overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S}$ et $\overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{S}}_P$ porte une filtration par le poids W_i qui en raison de l'hypothèse de monodromie et de la forme du modéle de Néron vérifie:

$$\begin{aligned} W_2 &= \overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{S}}_P \\ W_1 &= W_0 \\ \dim W_0 &= n \end{aligned}$$

Une section s de $\overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S}$ vérifie $s(P) \in W_0 - \{0\}$ si et seulement si $m|log|\zeta||^{-1} \leq h(s) \leq M|log|\zeta||^{-1}$ et $s(P) \in W_2 - W_0$ si $m|log|\zeta|| \leq h(s) \leq M|log|\zeta||$.

En particulier le plongement isométrique $V^* \to L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S$ se prolonge en un plongement $\bar{V}^* \to \overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S}$ et la suite exacte courte: $0 \to V^* \to L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S \to V \to 0$ à:

$$0 \to \bar{V}^* \to \overline{L_{\mathbf{C}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_S} \to \bar{V} \to 0$$

Lemme 1.5.2 $\bar{V}^*(P) \cap W_0 = \{0\}$

Preuve :
Soit $e \in \bar{V}$, $e(P) \neq 0$, alors $|h(e)| \leq C|log|\zeta||^N$. De plus l'équation de Gauss pour un sous fibré de V, qui est de coubure négative au sens de Griffiths donne:

$$-\sqrt{-1}\partial\bar{\partial} log h(e) \leq 0$$

Donc $\psi = log\ h(e)$ est sousharmonique sur Δ^*, vérifie $|\psi(\zeta)| \leq K|log|log|\zeta|||$. Elle se prolonge ainsi à ψ sousharmonique sur Δ. Elle est donc bornée supérieurement sur Δ. En particulier $\exists M > 0,\ h(e) \leq M$. Dualement si $e \in V^*$, $e(p) \neq 0, \exists m > 0,\ h(e) \geq m$ puis $\bar{V}^*(P) \cap W_0 = \{0\}$.

Par conséquent, si $e \in V^*$, $e(p) \neq 0$, $h(e) \simeq |log|\zeta||$.

Proposition 1.5.3 $H^1(\bar{S}, j_*L_{\mathbb{C}})^{2,0} \simeq H^0(\bar{S}, \Lambda)$ *où* Λ *est un fibré vectoriel holomorphe vérifiant:*

$$deg\Lambda = \int_S c_1(V^* \otimes K_S, h \otimes \omega) \quad - nCard(\bar{S} - S)$$

Preuve :
Par [17] $\Lambda' = \bar{V}^* \otimes K_{\bar{S}} \otimes \mathcal{O}_{\bar{S}}(\bar{S} - S)$ est un fibré de rang n prolongeant $V^* \otimes K_S$, de degré:

$$deg(\Lambda') = \int_S c_1(V^* \otimes K_S, h \otimes \omega)$$

De plus toute section L^2 de $V^* \otimes K_S$ se prolonge à une section méromorphe de Λ'. Mais toute section de ce fibré non nulle en P vérifie $h(e) \simeq |log|\zeta||^3$. Or:

$$\int_{\Delta^*} |log|\zeta||^3 \frac{i}{2} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 |log|\zeta||^2} = \infty$$

Donc les sections L^2 se prolongent à des sections holomorphes de Λ nulles en P.

Lemme 1.5.4 $H^1(\bar{S}, \Lambda) = 0$

Preuve :
D'après [25], proposition 6.4, pour le dernier terme et l'étude locale précédente, on à la suite exacte de faisceaux sur $\bar{S}$:

$$0 \to \Lambda \to L^2 j_* \mathcal{E}^{2,0} \overset{D''}{\to} L^2 j_* \mathcal{E}^{2,1} \to 0$$

Où $L^2 j_*$ désigne sur les faisceaux de sections des fibrés en question d'image directe L^2, c'est à dire si (W, h) est un fibré hermitien sur S et U un ouvert de $\bar{S}$:

$$L^2 j_* W(U) = \{\psi \in L^2_{loc}(U \cap S, W) :\ \exists U' \subset\subset U, \bar{S} - S \subset U',\ \int_{U' - (\bar{S} - S)} ||\psi||^2 < \infty\}$$

Par suite de l'acyclicité des images directes L^2, et de l'annulation du paragraphe précédent, il vient:

$$H^1(\bar{S}, \Lambda) = H^2(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}})^{2,1} = 0$$

Ecrivant le théorème de Riemann-Roch pour Λ, il vient:

Proposition 1.5.5

$$dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}})^{2,0} = \int_S c_1(V^*, h) + \frac{n}{2} c_1(K_S, \omega) - \frac{n}{2} Card(\bar{S} - S)$$

1.5.3 Preuve du théorème en monodromie unipotente

Par les calculs des paragraphes précédents:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{R}})^{1,1} &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}})^{1,1} \\
&= \dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}}) - 2\dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{C}})^{2,0} \\
&= \int_S -(G^S - \frac{1}{n})\frac{\omega}{2\pi}
\end{aligned}$$

En effet, pour nos métriques de Hermite-Einstein, on a $c_1(V^*) = \frac{n}{2} c_1(K_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n})$ puisque V se scinde sur un polydisque géodésique $\mathcal{H}^n$ en somme directe de n racines carrées des tangeants de chaque facteur. Voir [15] pour un calcul similaire.

En particulier, si $\exists q,\ G^S_q < -\frac{1}{n}$, $\dim_{\mathbb{R}} H^1(\bar{S}, j_* L_{\mathbb{R}})^{1,1} > 0$ ce qui contredit notre théorème d'annulation. L'equation de Gauss implique alors que S est totalement géodésique, localement symétrique et que c'est au niveau du revêtement universel une courbe diagonale.

1.5.4 Levée de la restriction sur la monodromie

Si $\bar{T} \to \bar{S}$ est un revêtement ramifié uniquement au dessus de $\bar{S} - S$, la condition (P) reste valide pour T. Si le théorème est vérifié par T, il implique que l'image de S est diagonale et donc que notre théorème est vrai pour S.

La monodromie en $P \in \bar{S} - S$ est quasi unipotente, c'est à dire que si γ est un lacet qui tourne une fois autour de P $\exists \nu_P \in \mathbb{N}$ tel que pour la représentation de monodromie ρ, les matrices $\rho(\gamma)^i, 1 \leq i \leq \nu_P - 1$ ne sont pas unipotentes et $\rho(\gamma)^{\nu_P}$ est unipotente.

Si nous fabriquons T_P avec des indices de ramification au dessus de P divisibles par ν_P, la monodromie aux points au dessus de P est unipotente. Si $\bar{S} - S = \{P_1, \ldots, P_m\}$ posons:

$$T = T_{P_1} \times_{\bar{S}} \cdots \times_{\bar{S}} T_{P_m}$$

Si $\Gamma_P \subset \Gamma$ est un sous groupe d'indice fini tel que:

$$\Gamma_P \cup \rho(\gamma)^{\mathbb{Z}} = \rho(\gamma)^{\nu_P \mathbb{Z}}$$

et $G = \rho^{-1}(\Gamma_P) \subset \pi_1(S)$ le revêtement fini non ramifié $G\backslash\tilde{S} \to S$ se laisse prolonger en $T_P \to \bar{S}$ dont l'indice de ramification au dessus de P est divisible par ν_P.

Un tel Γ_P se laisse définir par $\Gamma_P = \Phi_q^{-1}(\Phi_q(\rho(\gamma))^{\nu_P \mathbb{Z}})$ où q est un nombre premier, $\Phi_q : \Gamma \to Sp(2n, \mathbb{F}_q)$ est le morphisme de réduction modulo q , fourni par le lemme:

Lemme 1.5.6 *Si $q \not| \nu_P$, $\Phi_q(\rho(\gamma)^1), \ldots, \Phi_q(\rho(\gamma)^{\nu_P})$ sont deux à deux distincts et seul $\Phi_q(\rho(\gamma)^{\nu_P})$ est unipotent.*

Celà résulte du fait que $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta)$ est non ramifiée, ζ étant une racine primitive ν_P^{ieme} de l'unité.

Chapitre 2

Variations de structure de Hodge polarisées

2.1 Variations de structure de Hodge polarisée

2.1.1 Définitions

Définition 2.1.1 *1. Soit $V_{\mathbb{R}}$ un espace vectoriel réel de dimension finie. Une structure de Hodge réelle de poids n sur $V_{\mathbb{R}}$, c'est la donnée d'une décomposition de l'espace vectoriel complexe $V_{\mathbb{C}} := V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la forme:*

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}, \quad \text{avec} \quad H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$$

2. Une polarisation d'une telle structure de Hodge, c'est la donnée sur $V_{\mathbb{R}}$ d'une forme bilinéaire réelle non dégénerée de parité $(-1)^n$ (.;.), telle que:

(a)

$$(H^{p,q})^{\perp} = \bigoplus_{(p',q')\neq(p,q)} \overline{H^{p',q'}}$$

(b)

$$\forall v \in H^{p,q}, \quad \sqrt{-1}^{p-q}(v,\bar{v}) > 0$$

3. S'il existe un réseau entier $V_{\mathbb{Z}} \subset V_{\mathbb{R}}$ vis à vis duquel la forme de polarisation est entière, la structure de Hodge sera dite entière.

Définition 2.1.2 *Soit X une variété complexe analytique. Une variation de structure de Hodge polarisée de poids n sur X, c'est la donnée d'un faisceau localement constant en $\mathbb{R}$- espaces vectoriels $V_{\mathbb{R}}$ muni d'une forme bilinéaire plate de parité $(-1)^n$ (.;.), telle que:*

1. Chaque fibre V_x du faisceau en $x \in X$ est munie d'une structure de Hodge polarisée par (.;.).

2. *Les sous espaces $H_x^{p,q}$ se recollent en un sous fibré C^∞ du fibré sous jacent à $V_{\mathbf{C}}$, encore noté par abus de langage $V_{\mathbf{C}}$.*

3. $\mathcal{F}^P = \oplus_{p \geq P} H^{p,q}$ *est un sous fibré holomorphe de $V_{\mathbf{C}}$.*

4. *Si ∇ désigne la partie (1,0) de la connexion plate D, on a:*

$$\nabla \mathcal{F}^P \subset \mathcal{F}^{P-1} \otimes \Omega^{1,0}$$

2.1.2 Exemples

Il est bien connu que les groupes de cohomologie d'une variété kählerienne compacte (et en particulier de toute variété projective) portent des structures de Hodge. Si on se restreint à leur partie primitive, ces structures de Hodge sont polarisées.

Griffiths a démontré que si une variété complexe Y est base d'une famille analytique de variétés kähleriennes compactes les parties primitives des faisceaux de cohomologie relatifs forment des VSHP sur Y [8].

Indépendemment de toute réalisation géométrique concrète du type précedent, on trouvera dans [26] des construction de VHSP sur des domaines symétriques bornés qui sont homogènes par rapport aux groupe des automorphismes du domaine à partir de représentations réelles du dit groupe. Elles descendent à tout quotient du domaine.

2.2 Connexion de Gauss-Manin

Fixons une VSHP sur une variété complexe X. Comme $\mathcal{F}^P$ est holomorphe, on a:

$$\bar{\nabla} \mathcal{F}^P \subset \mathcal{F}^P \otimes \Omega^{0,1}$$

La conjugaison complexe étant plate:

$$\nabla \overline{\mathcal{F}^P} \subset \overline{\mathcal{F}^P} \otimes \Omega^{1,0}$$

Si $p + q = n$, il vient:

$$\begin{array}{rcl} \nabla H^{p,q} & \subset & \nabla \mathcal{F}^p \cap \nabla \overline{\mathcal{F}^q} \\ & \subset & \mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^{1,0} \oplus \overline{\mathcal{F}^q} \otimes \Omega^{1,0} \\ & \subset & H^{p,q} \otimes \Omega^{1,0} \oplus H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

Donc $\nabla = d' + \nabla'$ avec:

$$\begin{array}{rcl} d' \; H^{p,q} & \subset & H^{p,q} \otimes \Omega^{1,0} \\ \nabla' \; H^{p,q} & \subset & H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

De même, $\bar{\nabla} = d'' + \nabla''$ avec:

$$\begin{array}{lll} d'' \, H^{p,q} & \subset & H^{p,q} \otimes \Omega^{0,1} \\ \nabla'' \, H^{p,q} & \subset & H^{p+1,q-1} \otimes \Omega^{0,1} \end{array}$$

On a un isomorphisme de fibrés vectoriels C^∞, $H^{p,q} \simeq Gr^p = \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$, ce dernier fibré étant holomorphe.

Proposition 2.2.1 *Sous cet isomorphisme, on a le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} H^{p,q} & \xrightarrow{d''} & H^{p,q} \otimes \Omega^{0,1} \\ \| & & \| \\ Gr^p & \xrightarrow{\bar{\partial}} & Gr^p \otimes \Omega^{1,0} \end{array}$$

Preuve :
Si $s \in C^\infty(\mathcal{F}^p)$, $\bar{\partial} s = \bar{\nabla} s = d''s + \nabla'' s$. Mais $\nabla'' s \in C^\infty(\mathcal{F}^{p+1} \otimes \Omega^{0,1})$, donc $\bar{\partial} s = d''s \bmod \mathcal{F}^{p+1}$.

Proposition 2.2.2 $\nabla' : H^{p,q} \to H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0}$ *est un opérateur C^∞-linéaire donc un tenseur.*

Preuve :
Soit f une fonction C^∞ et s une section de $\mathcal{F}^p$.

$$d' \, fs \; + \; \nabla' \, fs \; = \nabla \, fs \; = \partial f.s \; + f\nabla s \; = \partial f.s \; + \; fd's \; + f\nabla' s$$

Puis $\nabla' \, fs \; = \; f\nabla' s$ par considération de type.

Définition 2.2.3 ∇' *est appelé la connexion de Gauss-Manin.*

2.3 Espace Classifiant

2.3.1 Définition et propriété fondamentale

Fixons une structure de Hodge réelle (ou entière) de poids n polarisée sur un espace vectoriel réel $V_{\mathbb{R}}$. On a la décomposition:

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=n} H_o^{p,q}$$

Posons:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}^P & = & \bigoplus_{p \geq P} H_o^{p,q} \\ \mathrm{G}_{\mathbb{C}} & = & \{g \in \mathrm{Gl}(V_{\mathbb{C}}), \; (gu; gv) = (u; v)\} \\ \mathrm{B} & = & \{g \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}} \;\; g.\mathcal{F}_o^p = \mathcal{F}_o^p\} \end{array}$$

B est un sous groupe parabolique de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$, de sorte que $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}/\mathrm{B}$ est une variété projective, orbite fermée de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}$ dans l'espace des filtrations décroissantes de $V_{\mathbb{C}}$ de la forme $\{\mathcal{F}^P\}$ avec $\dim(\mathcal{F}^P) = \sum_{p \geq P} \dim(H_o^{p,q})$.

Posons $\mathbf{G}_{\mathbb{R}} = \mathbf{G}_{\mathbb{C}} \cap \mathrm{Gl}(V_{\mathbb{R}})$ et $\mathrm{K} = \mathrm{B} \cap \mathbf{G}_{\mathbb{R}}$, nous avons un morphisme $\mathcal{D} = \mathbf{G}_{\mathbb{R}}/\mathrm{K} \to \mathbf{G}_{\mathbb{C}}/\mathbf{B}$. Il est facile de voir que:

- K est un groupe compact, contenu dans le groupe unitaire de la forme hermitienne définie positive associée à la polarisation de la structure de référence.

- $\mathcal{D}$ est ouvert dans $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}/\mathbf{B}$.

- $\mathcal{D}$ paramétrise toutes les structures de Hodge polarisées de poids n et de même type sur $V_{\mathbb{R}}$.

Sur $\mathbf{G}_{\mathbb{C}}/\mathbf{B}$ nous avons à notre disposition des fibrés holomorphes $\mathcal{F}^P(V_{\mathbb{C}})$ filtrant le fibré trivial $V_{\mathbb{C}}$, par définition:

$$\mathcal{F}^P(V_{\mathbb{C}}) = \{([g]; v) \in \mathbf{G}_{\mathbb{C}}/\mathbf{B} \times V_{\mathbb{C}}, \quad v \in g.\mathcal{F}^P_o\}$$

Un des principaux résultats de [8] est:

Théorème 2 *Si la variété complexe X, connexe et simplement connexe porte une VSHP, fixons $o \in X$ et $(V_{\mathbb{R}})_o$ la structure de Hodge correspondante. Alors, $\exists ! \Phi : X \to \mathcal{D}$, holomorphe, telle que: $\Phi(o) = [(V_{\mathbb{R}})_o], (V_{\mathbb{R}})_X = \Phi^*(V_{\mathbb{R}})_{\mathcal{D}}$, $D_X = \Phi^* D_{\mathcal{D}}$ où D_X et $D_{\mathcal{D}}$ sont les connexions plates sur $V_{\mathbb{R}}$ sur les variétés X et $\mathcal{D}$.*

2.3.2 Objets homogènes sur l'espace classifiant

De façon générale, si H est un groupe de Lie, U un sous groupe fermé et (E, ρ) une représentation de U, nous construisons un fibré vectoriel $\tau(E, \rho) \to H/U$ comme suit:

$H \times E$ est muni d'une action à droite de U par:

$$(h, e).u = (hu, \rho(u^{-1})e)$$

On pose alors $\tau(E, \rho) = H \times E/U \to H/U$.

Si les structures analytiques réeles sont de plus analytiques complexes, on obtient un fibré holomorphe.

L'action de H à gauche sur $H \times E$ donnée par $h'(h, e) = (h'h, e)$ commute à celle de U et descend à une action sur $\tau(E, \rho)$ compatible à la structure fibré. On récupère ρ comme représentation d'isotropie. On dit qu'un tel fibré est homogène.

Proposition 2.3.1 *Cette construction identifie les U-représentations linéaires et tout tenseur U-invariant avec les fibrés homogénes sur H/U et le tenseur H-invariants correspondant.*

Proposition 2.3.2 *Si la représentation de U (E, ρ) s'étend à H, le fibré $\tau(E, \rho)$ est trivial.*

Par exemple le fibré tangeant de H/U est le fibré associé à la représentation adjointe de U sur $\mathfrak{h}/\mathfrak{u}$.

Les situations discutées auparavant entrent dans ce cadre de description, et nous allons nous servir de ces constructions dans ce qui suit.

2.4 Le fibré tangeant horizontal

2.4.1 Définitions

$\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de $\mathbf{G_C}$ est donnée par:

$$\gamma = \{\, X \in \mathrm{End}(V_{\mathbf{C}}), \quad \forall (u,v) \in V_{\mathbf{C}} \ \ (Xu,v) + (u,Xv) = 0\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_0, \ \ \text{avec } \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \cap \mathrm{End}(V_{\mathbf{R}})$$

$\mathfrak{g}_0$ possède une structure de Hodge de poids 0:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_P \mathfrak{g}^{P,-P}, \quad \mathfrak{g}^{P,-P} = \{X \in \mathfrak{g},\ XH^{p,q} \subset H^{p+P,q-P}\}$$

$\mathfrak{b} = \oplus_{P \geq 0}\mathfrak{g}^{P,-P}$ est l'algèbre de Lie de $\mathbf{B}$ et $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{g}^{0,0} \cap \mathfrak{g}_0$ est l'algèbre de Lie de $\mathbf{K}$. Posons:

$$\begin{array}{ccc} \beta \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}/\beta & \subset & \gamma/\beta \\ \| & & \| \\ T_h(\mathcal{D})_o & \subset & T(\mathcal{D})_o \end{array}$$

Par les considérations précédentes, la B-représentation $T_h(\mathcal{D})_0$ induit un sous fibré holomorphe du fibré tangeant de $\mathbf{G/B}$, le fibré tangeant horizontal.

Il est important de noter que la structure de Hodge sur γ est compatible à la structure d'algèbre de Lie, c'est à dire que le crochet de Lie vérifie:

$$[\mathfrak{g}^{P,-P}, \mathfrak{g}^{Q,-Q}] \subset \mathfrak{g}^{P+Q,-P-Q}$$

En particulier, en supposant qu'aucun des nombres de Hodge n'est nul, $T_h(\mathcal{D})$ n'est intégrable que si $\mathcal{D}$ est l'espace de Siegel , ou si $\mathcal{D}$ est le domaine symétrique dual d'hyperquadrique,c'est à dire si la Structure de Hodge a pour vecteur de Hodge $(h^{1,0}, h^{0,1})$ et $(1, h^{1,1}, 1)$ respectivement (auxquels cas $T_h(\mathcal{D}) = T(\mathcal{D})$).

2.4.2 La connexion de Gauss-Manin universelle

L'action des endomorphismes de $V_{\mathbf{C}}$ donne des morphismes:

$$\Lambda \begin{pmatrix} V_{\mathbf{C}} \otimes \mathrm{End}(V_{\mathbf{C}}) & \to & V_{\mathbf{C}} \\ v \otimes e & \mapsto & e(v) \end{pmatrix}$$

$$\Xi \begin{pmatrix} V_{\mathbf{C}} & \to & V_{\mathbf{C}} \otimes \mathrm{End}(V_{\mathbf{C}})^* \\ v & \mapsto & \Xi(v) \end{pmatrix}$$

En posant $< \Xi(v), e >= \Lambda(v \otimes e) = e(v)$.

Grâce aux structures de Hodge Λ se restreint à:

$$\Lambda_P^F : \ \mathcal{F}_o^P \otimes (\beta \oplus \mathfrak{g}^{-1,1}) \to \mathcal{F}_o^{P-1}$$

$$\Lambda_p^{Gr} : \ Gr_o^p \otimes T_h(\mathcal{D})_o \to Gr_o^{p-1}$$

Et on peut restreindre Ξ à des morphismes:

$$\nabla_p^{\prime u} : \ Gr_o^p \to Gr_o^{p-1} \otimes T_h(\mathcal{D})_0^*$$

Lemme 2.4.1 *Les morphismes* $\Lambda, \Xi, \Lambda_P^F, \Lambda_p^{Gr}, \nabla_p^{\prime u}$ *commutent à l'action de* $\mathbf{B}$.

Corollaire 2.4.2 *Il existe un morphisme $G_{\mathbb{C}}$ invariant entre fibrés holomorphes sur $G_{\mathbb{C}}/B$ et par conséquent holomorphe dont la restriction aux fibres à l'origine est ∇'^{u}. On l'appelera la connexion de Gauss-Manin universelle.*

Nous formulons maintenant le phénomène de transversalité de Griffiths:

Proposition 2.4.3 *Pour toute VSHP, provenant de l'application classifiante $\Phi : X \to \mathcal{D}$:*

- $d\Phi(T_X) \subset T_h(\mathcal{D})$

- *La connexion de Gauss-Manin s'inscrit dans le diagramme commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
\Phi^* Gr^p_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\Phi^*\nabla'^u"] \arrow[d, equal] & \Phi^* Gr^{p-1}_{\mathcal{D}} \otimes \Phi^* T_h(\mathcal{D})^* \arrow[r, "Id\otimes\Phi^*"] & \Phi^* Gr^{p-1}_{\mathcal{D}} \otimes \Omega^{1,0}_X \arrow[d, equal] \\
Gr^p_X \arrow[rr, "\nabla'"] & & Gr^{p-1}_X \otimes \Omega^{1,0}_X
\end{tikzcd}$$

Preuve:
Soit $c \in \mathcal{D}$, une section de $\mathcal{F}^p$ le long de l'arc $t \to \exp(tX).c$, $x \in \gamma_o$ s'écrit:

$$s(t) = (\exp(tX).c, \exp(tX)f^p_c(t)), \quad f^p_c(t) \in \mathcal{F}^p_c$$

La dérivée par rapport à la connexion plate D le long de X est:

$$\begin{aligned}
(D_X s)_c &= \frac{d}{dt}\exp(tX)f^p_c(t)|_{t=o} \\
&= X.f^p_c(0) + \tilde{f}^p_c(0), \ \tilde{f}^p_c(0) \in \mathcal{F}^p_c
\end{aligned}$$

Pour les vecteurs complexifiés, le même calcul est valide. En particulier si $x \in X$ s'envoie sur c et $v \in T^{1,0}_X$, la propriété fondamentale donne:

$$D_v s = \Phi_*(v).s(0) \mod \mathcal{F}^p$$

La propriété (4) des VSHP donne alors $\Phi_*(v) \in T_h(\mathcal{D})_c$, et le calcul de la connexion de Gauss-Manin de X suit de la même façon.

Corollaire 2.4.4 *La connexion de Gauss-Manin de X est un tenseur holomorphe.*

2.5 Forme kählerienne canonique d'une VSHP

La structure de Hodge de poids 0 sur $T(\mathcal{D})_o$ est naturellement polarisée, ce qui nous fournit une métrique hermitienne h sur $\mathcal{D}$ définie à une constante près. Griffiths a montré dans [8] que les courbures bissectionnelles holomorphes dans les directions horizontales étaient négatives.

Cette métrique n'est pas kählerienne en général (il faudrait que $\mathcal{D}$ soit un domaine symétrique borné, ce qui n'arrive que dans les cas où la structure de Hodge est de type $(h^{1,0}, h^{0,1})$ ou bien $(1, h^{1,1}, 1)$). Cependant, un phénomène de kählerianité partielle a lieu qui nous permet de montrer la:

Proposition 2.5.1 *Soit μ la (1,1)-forme associée à la métrique hermienne h. Alors, la (1,2)-forme $\bar{\partial}\mu$ restreinte à $T_h(\mathcal{D})$ est nulle.*

Preuve:
Notons ν la restriction à $\Lambda^{1,2}T_h(\mathcal{D})^*$ de la (1,2)-forme $\bar{\partial}\mu$. C'est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré $\Lambda^{1,2}T_h(\mathcal{D})^*$ qui est $\mathbf{G}_\mathbf{R}$-invariante. Elle équivaut donc à un vecteur K-invariant de la K-représentation $\Lambda^{1,2}(\mathfrak{g}^{-1,1})^*$.

L'opérateur de Weil $C_\theta = \oplus e^{\sqrt{-1}(p-q)\theta}\Pi_{p,q}$ est un élément de K qui agit sur $\mathfrak{g}^{-1,1}$ par la multiplication par $e^{2\sqrt{-1}\theta}$.

Si $\varphi \in \Lambda^{1,2}(\mathfrak{g}^{-1,1})^*$, $C_\theta\varphi = e^{-2\sqrt{-1}\theta}\varphi$. Par conséquent, comme ν est K-invariant, $\nu = 0$

Corollaire 2.5.2 *Si X porte une VSHP, et si Φ désigne l'application classifiante la (1,1)-forme $\Phi^*\mu$ est positive et fermée. Si de plus Φ est immersive, elle est définie positive et induit une métrique kählerienne sur X. Cette métrique sera appelée la métrique canonique associée à la VSHP.*

On aurait pu d'ailleurs voir que la métrique canonique est kählerienne en l'interprétant comme le c_1 d'un fibré de Hodge. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

2.6 Seconde forme fondamentale d'une VSHP

Soit $\Phi : X \to \mathcal{D}$ une application classifiante de VSHP, immersive, telle que la variété kählerienne $(X, \Phi^*\mu)$ soit complète et simplement connexe.

Définition 2.6.1 *La deuxième forme fondamentale de l'injection isométrique de fibrés vectoriels hermitiens $T_X \xrightarrow{\Phi_*} T_h(\mathcal{D})$, $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}$ sera appelée la deuxième forme fondamentale de la VSHP.*

Théorème 3 *$(X, \Phi^*\mu)$ est un espace symétrique hermitien de type non-compact, $X = \mathrm{H}/\mathrm{L}$, et Φ est la classifiante d'une VSHP H-homogène (i.e., d'après [26], provient d'une représentation réelle $\rho : \mathrm{H} \to \mathbf{G}_\mathbf{R}$) si et seulement si $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$.*

Preuve :
La partie facile consiste à prouver que dans une situation homogène $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$.

$\Phi^*T_h(\mathcal{D})$ est un fibré holomorphe hermitien H-homogène sur X associé à la représentation de L donnée par $\mathrm{L} \to \mathrm{K} \to \mathrm{Gl}(\mathfrak{g}^{-1,1})$. On a un scindage de L-représentations $\Phi^*T_h(\mathcal{D})_o = T_X \oplus N_o$ qui induit un scindage orthogonal H-invariant pour les fibrés.

Examinons les structures holomorphes. Posons $\check{X} = \mathrm{H}_\mathbf{C}/\mathrm{P}$ avec $\mathrm{Lie}(\mathrm{P}) = \mathfrak{l}_\mathbf{C} \oplus \mathfrak{p}^-$ où $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{h}$ associée à l'origine de X. Les structures holomorphes de nos fibrés sont données comme traces sur $X \subset \check{X}$ de celles obtenues en étendant les représentations ρ de $\mathfrak{l}$ à $\mathfrak{l}_\mathbf{C} \oplus \mathfrak{p}^-$ en posant $\rho(\mathfrak{p}^-) = 0$. Cette procédure respecte notre scindage qui donc est un scindage hermitien et holomorphe. De là $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$.

La deuxième partie est un peu plus délicate puisqu'il faut réaliser X comme un espace symétrique. Commençons par trouver le groupe H.

L'algèbre de Lie:
$$\mathfrak{u} = (\bigoplus_{P=0[2]} \mathfrak{g}^{P,-P}) \cap \mathfrak{g}_0$$
est compacte et l'espace $\mathcal{R} = \mathbf{G}_\mathbf{R}/\mathrm{U}$ est riemannien symétrique. Nous avons le morphisme d'espaces $\mathbf{G}_\mathbf{R}$-homogènes $\mathcal{D} \to \mathcal{R}$. Par transversalité de Griffiths $X \to \mathcal{R}$ est

immersive. De plus la métrique riemmannienne associée à $\Phi^*\mu$ est la restriction de la métrique symétrique de $\mathcal{R}$. Donc $X \xrightarrow{\psi} \mathcal{R}$ est une immersion infinitésimalement isométrique.

Soient $\nabla^{\mathcal{R}}$ et ∇^X les connexions de Levi-Civita de $\mathcal{R}$ et X respectivement, étendues aux complexifiés des espaces tangeants. Nous voulons montrer que sous l'inclusion $T_X^{\mathbb{C}} \xrightarrow{i} T_{\mathcal{R}}^{\mathbb{C}}$, $\forall(t_1,t_2) \in T_X^{\mathbb{C}}$, $\nabla_{t_1}^X t_2 = \nabla_{i(t_1)}^{\mathcal{R}} i(t_2)$. Cette inclusion se factorise comme suit:

$$T_X^{\mathbb{C}} \to T_h(\mathcal{D}) \oplus \overline{T_h(\mathcal{D})} \to T_{\mathcal{D}}^{\mathbb{C}} \to T_{\mathcal{R}}^{\mathbb{C}}$$

La connexion plate sur $V_{\mathbb{R}}$, D, induit une connexion plate sur End($V_{\mathbb{R}}$) par la formule $De = [D,e]$. $\gamma_o \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{R}})$ est donnée par:

$$S \in \mathrm{End}(V_{\mathbb{R}}) \Longleftrightarrow \forall(u,v) \in V_{\mathbb{R}}(Su;v) + (u;Sv) = 0$$

La forme (.;.) étant plate, la différentiation de cett identité donne:

$$([D,S]u;v) + (u;[D,s]v) = 0$$

Celà identifie $T_{\mathcal{D}}$ à un sous facteur de End($V_{\mathbb{R}}$). De plus la structure de Hodge sur cet espace $\simeq \gamma$ est naturellement polarisée de poids 0 par (.;.)

Si l'on munit $T_{\mathcal{D}}$ de la forme hermitienne de signature (+,-) donnée par la polarisation cette forme hermitienne est conservée par la connexion D.

En restreignant à X, la connexion D préserve la métrique hermitienne de signature (+,-) et est la connexion plate sous jacente à une VSHP sur X. La projection orthogonale de D sur T_X est nécessairement dx.En particulier:

$$\nabla_{t_1}^X t_2 = D_{t_1} t_2 - (\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})})_{t_1} t_2 - (\sigma_{T_h(\mathcal{D})|T(\mathcal{D})})_{t_1} t_2$$

Mais $(\sigma_{T_h(\mathcal{D})|T(\mathcal{D})})_{t_1} t_2 \in \gamma^{-2,2} \oplus \gamma^{2,-2}$ en raison des axiomes des VSHP.

Soit $\tilde{\nabla}^{\mathcal{R}}$ la projection de D sur $T_{\mathcal{R}}^{\mathbb{C}}$. On la voit comme un connexion sur $\mathcal{R}$ puisque la connexion sur $\mathcal{D}$ dont elle provient est invariante par $G_{\mathbb{R}}$. Il est clair que la métrique de $\mathcal{R}$, $g_{\mathcal{R}}$, vérifie:$\tilde{\nabla}^{\mathcal{R}} g_{\mathcal{R}} = 0$.

De plus, pour des vecteurs invariants à gauche, $\tilde{\nabla}_X^{\mathcal{R}} Y - \tilde{\nabla}_Y^{\mathcal{R}} X = [X,Y]_{Lie}$. Celà prouve que $\tilde{\nabla}^{\mathcal{R}}$ est sans torsion et donc que c'est la connexion $\nabla^{\mathcal{R}}$.

En particulier si $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$, la partie (-2,2) étant tuée par la projection sur $T_{\mathcal{R}}$ il vient $\nabla^X = \nabla^{\mathcal{R}}$. Celà réalise X comme une sous variété totalement géodèsique de $\mathcal{R}$ et donc un espace symétrique.

La métrique kählerienne de X, $\Phi^*\mu$, est la métrique symétrique, en particulier X est un espace hermitien symétrique connexe. Comme les courbures sectionnelles holomorphes de $\mathcal{D}$ dans les directions horizontales sont strictement négatives, X est de type non compact: c'est un domaine symétrique borné. Ecrivons le comme le quotient d'un groupe de Lie semisimple réel par un sous groupe compact maximal, $X = \mathrm{H/L}$, le plongement $X \to \mathcal{R}$ provenant d'un morphisme de groupes algébriques $\mathrm{H} \xrightarrow{\rho} G_{\mathbb{R}}$.

Soit Φ' la classifiante de la VSHP homogène associée à ρ. Par construction, $\Phi'(o) = \Phi(o)$. On veut montrer que $\Phi' = \Phi$. Soit γ un chemin à vitesse constante sur X issu de o, que l'on voit comme tracé sur $\mathcal{R}$. Par transversalité, il existe un unique chemin relevant γ sur $\mathcal{D}$ issu de $\Phi(o)$ dont le vecteur vitesse reste dans $T_h(\mathcal{D})$. Cet unique chemin coïncide donc avec $\Phi(\gamma)$ et $\Phi'(\gamma)$, d'où $\Phi = \Phi'$. Celà achève la preuve du théorème.

Isolons de cette preuve le résultat suivant:

Proposition 2.6.2 *La deuxième forme fondamentale de X dans $\mathcal{R}$, $\Sigma_{X|\mathcal{R}}$ est:*

$$\Sigma_{X|\mathcal{R}} = Re(d\pi \circ \sigma_{TX|T_\lambda(\mathcal{D})})$$

2.7 Une formule de Bochner

2.7.1 Les laplaciens de Deligne

Soit $V_{\mathbf{R}}$ le faisceau sous jacent à une VSHP sur une variété kählerienne (X, ω). Nous étendons la connexion plate D à l' opérateur de De Rham sur $V_{\mathbf{C}} \otimes \Lambda(T_X^{\mathbf{R}})^* \otimes \mathbf{C} = \oplus_{r,s} V_{\mathbf{C}} \otimes \Omega^{r,s}$.

Les opérateurs $\nabla, \bar{\nabla}, d', d'', \nabla', \nabla''$ se laissent pareillement étendre.

Sous l'isomorphisme $H^{p,q} \simeq Gr^p$, $d'' : H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \to H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s+1}$ s'identifie au $\bar{\partial}$ de Dolbeault.

Si on écrit $\nabla' = \sum e_i \otimes dz_i$ avec $e_i \in \mathrm{Hom}_{C^\infty}(\mathrm{G}_{\mathbf{R}}p, Gr^{p-1})$,

$$\forall s \in Gr^p, \forall \alpha \in \Omega(X), \quad \nabla' s \otimes \alpha = \sum e_i(s) \otimes dz_i \wedge \alpha$$

On a donc $D = d' + d'' + \nabla' + \nabla''$, avec:

- $d' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p,q} \otimes \Omega^{r+1,s}$
- $d'' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s+1}$
- $\nabla' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{r+1,s}$
- $\nabla'' H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p+1,q-1} \otimes \Omega^{r,s+1}$

Si nous posons:

$$\mathcal{E}^{P,Q} := \bigoplus_{\substack{p+r=P \\ q+s=Q}} H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s}$$

Et $D" = d'' + \nabla'$, il vient $D" \mathcal{E}^{P,Q} \subset \mathcal{E}^{P,Q+1}$.

Le complexe de De Rham possède donc un bifiltration comme dans le cas classique. On pose aussi $D' = D - D"$.

En munissant $V_{\mathbf{R}}$ de la métrique donnée par la polarisation (métrique de Hodge) et les formes différentielles des métriques induites par la forme kählerienne, Deligne a montré (cf [25]) l'identité suivante entre opérateurs elliptiques du deuxième ordre:

$$\Delta_{D"} = \Delta_{D'} = \frac{1}{2} \Delta_D$$

Nous convenons de noter pour tout opérateur A, $\Delta_A = A^* A + A A^*$.

Celà permet de voir que, dans le cas d'une base compacte, la théorie des formes harmoniques se généralise pour décrire les groupes de cohomologie $H^k(X, V_{\mathbf{C}})$ et les munir d'une structure de Hodge de poids $n + k$.

2.7.2 Existence de la formule de Bochner

Si A et B sont deux opérateurs sur les formes différentielles de X de degrés a et b, nous posons:

$$[A,B] = AB - (-1)^{ab}BA$$

Ainsi, le crochet de deux opérateurs de degré 1 vaut $[d_1,d_2] = d_1d_2 + d_2d_1$. Par exemple $[D'', D''^*] = \Delta_{D''}$. Nous voulons comparer $\Delta_{D''}$ et $\Delta_{d''} = [d'', \delta'']$[1]. Il est immédiat que:

$$\Delta_{D''} = \Delta_{d''} + \Delta_{\nabla'} + [d'', \nabla'^*] + [\delta'', \nabla']$$

Proposition 2.7.1 *On a les propriétés suivantes:*

- $[\delta'', \nabla']H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{r+1,s-1}$

- $[d'', \nabla'^*]H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s} \subset H^{p+1,q-1} \otimes \Omega^{r-1,s+1}$

- $[\delta'', \nabla'] = [d'', \nabla'^*]^*$

- $[d'', \nabla'^*]$ *et* $[\delta'', \nabla']$ *sont* C^∞*- linéaires et proviennent de tenseurs.*

Preuve :

La seule assertion non immédiate est la dernière, encore que notre formalisme la suggère fortement. Rappelons quelques faits. Le produit intérieur de deux formes sur X est donné par:

$$< \alpha \dashv \beta, \gamma > = < \beta, \bar{\alpha} \wedge \gamma >$$

Si f est une fonction et α une forme à valeurs dans le fibré holomorphe vectoriel F:

$$\delta''(f\alpha) = f\delta''\alpha - d'f \dashv \alpha$$

Soit f une fonction et $\alpha \in \mathcal{E}^{P,Q}$.

$$\begin{aligned} [\delta'', \nabla'](f\alpha) &= \nabla'\delta''(f\alpha) + \delta'' f \nabla'\alpha \\ &= f[\delta'', \nabla']\alpha - (\nabla'(d'f \dashv \alpha) + d'f \dashv \nabla'\alpha) \end{aligned}$$

Mais en raison de la structure de ∇' explicitée au paragraphe précédent, si $\alpha = \sum \alpha_i \otimes \beta_i$, $\alpha_i \in H^{p,q}$, $\beta_i \in \Omega^{r,s}$:

$$\begin{aligned} d'f \dashv \nabla'\alpha &= d'f \dashv (\sum e_i(\alpha_j) dz_i \wedge \beta_j) \\ &= \sum e_i(\alpha_j)((d'f \dashv dz_i) \wedge \beta_j - dz_i \wedge (d'f \dashv \beta_j)) \\ &= -\nabla'(d'f \dashv \alpha) + \sum e_i(\alpha_j)(d'f \dashv dz_i) \wedge \beta_j \end{aligned}$$

Les formes $d'f$ et dz_i étant de type (1,0), $d'f \dashv dz_i = 0$ et l'équation désirée $\nabla'(d'f \dashv \alpha) + d'f \dashv \nabla'\alpha = 0$ est prouvée.

---

1. $\delta'' = d''^*$

A titre de motivation, citons le résultat:

Proposition 2.7.2 *[26] Dans le cas où la VSHP est localement homogène* $[d'', \nabla'^*] = 0$. *En particulier pour toute forme harmonique de type* (P,Q), *ses composantes dans* $H^{p,q} \otimes \Omega^{r,s}$ *sont également harmoniques.*

Cette proposition n'est pas vérifiée en général, mais elle suggère que $[d'', \nabla'^*]$ ne dépend que de $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}$, ce que nous allons nous attacher à prouver.

2.7.3 Equation différentielle satisfaite par $\nabla_u'^*$

Motivation

Fixons une base holomorphe locale $(\beta_i)_{1 \leq i \leq N}$ de $T_h(\mathcal{D})^*$ sur $\mathcal{D}$. Il existe des homomorphismes $(e_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathrm{Hom}(Gr^p, Gr^{p-1})$ tels que la connexion de Gauss-Manin universelle vérifie:

$$\forall v \in Gr^p, \forall \beta \in \Lambda^{r,s} T_h(\mathcal{D})^*, \quad \nabla'_u v \otimes \beta = \sum_{i=1}^{N} e_i(v) \otimes \beta_i \wedge \beta$$

Si $\nabla_u'^*$ désigne l'adjoint de ∇'_u par rapport à la métrique de Hodge, les deux lemmes suivants sont immédiats:

Lemme 2.7.3 $\nabla_u'^* = \sum e_i^* \otimes \bar{\beta}_i \dashv$

Lemme 2.7.4 *Pour une application classifiante* $\Phi : X \to \mathcal{D}$, *on a:*

$$\begin{aligned} \nabla' &= \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \Phi^* \beta_i \wedge \\ \nabla'^* &= \sum_{i=1}^{N} e_i^* \otimes \Phi^* \bar{\beta}_i \dashv \end{aligned}$$

Par conséquent, le calcul de $[d'', \nabla'^*]$ doit inclure celui de $d'' e_i^*$.

Une construction générale

Soient X une variété complexe, V un fibré holomorphe vectoriel et $T_h \subset T_X$ un sous fibré holomorphe. Soit $\pi : T_X^* \to T_h^*$ l'opérateur (surjectif) de restriction des formes.

Définition 2.7.5 *Nous appelons* $\tilde{\partial}_h$, *l'opérateur défini par la factorisation suivante:*

$$C^\infty(X, V) \xrightarrow{\bar{\partial}} C^\infty(X, V \otimes \Lambda^{0,1} T_X^*) \xrightarrow{\pi} C^\infty(X, V \otimes \Lambda^{0,1} T_h^*)$$

Proposition 2.7.6 *S'il existe un groupe* G *agissant sur* (X, V) *par biholomorphismes et préservant* T_h, $\tilde{\partial}_h$ *est G-invariant.*

Invariance de ∇'^{*}_{u} et équation différentielle

Posons $X = \mathcal{D}$, $T_h = T_h(\mathcal{D})$ et $\underline{d''} = (-1)^r\bar{\partial} : Gr^p \otimes \Lambda^q T_h(\mathcal{D})^* \to Gr^p \otimes \Lambda^{q,1}T_h(\mathcal{D})^*$.

Proposition 2.7.7 *Si $\Phi : X \to \mathcal{D}$ est une classifante, sous l'isomorphisme:*

$$\begin{pmatrix} \Lambda^q T_h(\mathcal{D})^* \otimes \Lambda^{0,1}T_h(\mathcal{D})^* & \to & \Lambda^{q,1}T_h(\mathcal{D})^* \\ \alpha \otimes \bar{\beta} & \mapsto & \alpha \wedge \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

On a $\Phi^*\underline{d''}\alpha = d''\Phi^*\alpha$

On peut donc construire un opérateur $[\underline{d''}, \nabla'^{*}_{u}] : Gr^{p-1} \otimes T_h(\mathcal{D})^* \to Gr^p \otimes \Lambda^{0,1}T_h(\mathcal{D})^*$.

Proposition 2.7.8 *$[\underline{d''}, \nabla'^{*}_{u}]$ est l'opérateur nul.*

Preuve :

C'est un opérateur différentiel d'ordre 1 $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$-invariant.

La preuve de la proposition 8, section 8.2, se transcrit mot pour mot pour fournir que c'est un opérateur d'ordre 0, donc un tenseur $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$-invariant.

Sa restriction à l'origine correspond donc à un tenseur K-invariant ϕ:

$$\phi \in \mathrm{Hom}(Gr^{p-1} \otimes T_h(\mathcal{D})^*, Gr^p \otimes \Lambda^{0,1}T_h(\mathcal{D})^*)^{\mathrm{K}}$$

Mais, sur cet espace, l'opérateur de Weil C_θ agit par multiplication par $e^{-2\sqrt{-1}\theta}$, donc $[\underline{d''}, \nabla'^{*}_{u}] = 0$.

Explicitation en coordonnées

Soit $h^{ji} = (\beta_i, \beta_j)$ la matrice de la métrique de Hodge. Soient $v \in Gr^p$, $\beta \in \Lambda^1 T_h(\mathcal{D})^*$ des sections C^∞. Par la proposition 12,

$$[\underline{d''}, \nabla'^{u*}]v \otimes \beta = 0$$

Supposons, c'est possible, que $d''v = d''b = 0$, il vient:

$$\sum_i \underline{d''}e_i^*(\bar{\beta}_i \dashv \beta) + e_i^*\underline{d''}(\bar{\beta}_i \dashv \beta) = 0$$

$$\sum_i h^{ji}\underline{d''}e_i^* + e_i^*\underline{d''}h^{ji} = 0$$

Soit (h_{kl}) le tenseur tel que: $h_{kl}h^{lm} = \delta_{km}$,il vient:

$$\forall i, \quad \underline{d''}e_i^* + \sum_l \sum_j h_{ij}\underline{d''}h^{jl}e_l^* = 0$$

En prenant le pull-back par une application classifiante Φ et en voyant (β_i) comme une base holomorphe locale de $\Phi^*\Lambda T_h(\mathcal{D})^*$, il vient:

$$\forall i, \quad d''e_i^* + \sum_l \sum_j h_{ij}d''h^{jl}e_l^* = 0$$

Si θ est la matrice de la connexion hermitienne D_u de $\Phi^*\Lambda T_h(\mathcal{D})^*$: $D'_u\beta_i = \theta_i^j\beta_j$,

$$d''h^{jl} = d''(\beta_j, \beta_l) = (\beta_j, D'_u\beta_l) = (\beta_j, \theta_l^k\beta_k) = \sum_k \bar{\theta}_l^k h^{jk}$$

$$\sum_j h_{ij} d'' h^{jl} = \sum_{jk} h_{ij} h^{jk} \bar{\theta}_l^k = \bar{\theta}_l^i$$

Ce calcul donne ainsi, l'expression de $d''e_i^*$ suivante:

Proposition 2.7.9 $d''e_i^* = -\sum_l \bar{\theta}_l^i e_l^*$

2.7.4 Une formule de géometrie kählerienne

L'opérateur $\bowtie$

Définissons un isomorphisme entre espaces de tenseurs sur la variété complexe X:

$$i : \begin{pmatrix} \Omega^{r,0} \otimes \Omega^{0,s} & \to & \Omega^{r,s} \\ \alpha \otimes \bar{\beta} & \mapsto & \alpha \wedge \bar{\beta} \end{pmatrix}$$

Définition 2.7.10 *Soit* $\phi \in \Omega^{0,1} \otimes \Omega^{0,1}$, $\phi = \sum_i \bar{\alpha}_i \otimes \bar{\beta}_i$, *on définit l'opérateur* $\mathbb{C}$*-linéaire* $\phi \bowtie$ *par:*

$$\phi \bowtie : \begin{pmatrix} \Omega^{r,s} & \to & \Omega^{r-1,s+1} \\ i(\alpha \otimes \bar{\beta}) & \mapsto & \sum_i (\alpha_i \dashv \alpha \otimes \bar{\beta}_i \wedge \beta) \end{pmatrix}$$

Formule pour $[d'', \bar{\mu} \dashv]$

Proposition 2.7.11 *Soit* (X, ω) *une variété kählerienne. Soient:*

- $\mu \in C^\infty(X, \Omega^{1,0})$

- $D'\mu \in C^\infty(X, \Omega^{1,0} \otimes \Omega^{1,0})$ *sa dérivée covariante de type (1,0)*

- $\alpha \in C^\infty(X, \Omega^{r,s})$

Alors $d''(\bar{\mu} \dashv \alpha) = (-1)^{r-1} \overline{D'\mu} \bowtie \alpha - \bar{\mu} \dashv d''\alpha$.

Preuve :

Elle repose sur le "principe fondamental de la géometrie kählerienne" [9]: Soit P un opérateur linéaire entre deux espaces de tenseurs défini de façon invariante pour toute variété kählerienne ne dépendant en tout point que du 1-jet de la métrique kählerienne, si $P = 0$ pour $(\mathbb{C}^n, ds^2_{eucl.})$, $P = 0$ pour toute variété kählerienne.

Effectuons donc le calcul dans le cas euclidien. Posons $\bar{\mu} = \bar{\mu}_i d\bar{z}_i$, $\alpha = \phi_{IJ} dz_I \wedge dz_J$ I et J étant deux familles d'indices $\leq n$ ordonnées de cardinaux r et s.

Si $1 \leq i \leq n$, posons $p(i, I) = l - 1$ ssi $I = i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, et $i = i_l$.

$$\begin{aligned}
\bar{\mu} \dashv \alpha &= \bar{\mu}_i \phi_{IJ} d\bar{z}_i \dashv (dz_I \wedge d\bar{z}_J) \\
&= 2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)} \bar{\mu}_i \phi_{IJ} dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_J \\
d''(\bar{\mu} \dashv \alpha) &= 2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)+r-1} \bar{\mu}_i \frac{\partial \phi_{IJ}}{\partial d\bar{z}_k} dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J \\
&\quad +2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)} \phi_{IJ} d''\bar{\mu}_i \wedge dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_J \\
\bar{\mu} \dashv d''\alpha &= \bar{\mu} \dashv ((-1)^r \frac{\partial \phi_{IJ}}{\partial d\bar{z}_k} dz_I \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J) \\
&= 2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)+r} \bar{\mu}_i \frac{\partial \phi_{IJ}}{\partial d\bar{z}_k} dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_J \\
d''(\bar{\mu} \dashv \alpha) + \bar{\mu} \dashv d''\alpha &= 2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)+r-1} \phi_{IJ} \overline{\frac{\partial \mu_i}{\partial z_k}} dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J
\end{aligned}$$

Mais, on a aussi:

$$\begin{aligned}
D'\mu &= \sum_{ik} \frac{\partial \mu_i}{\partial z_k} dz_i \otimes dz_k \\
\overline{D'\mu} \bowtie \alpha &= \overline{\frac{\partial \mu_i}{\partial z_k}} d\bar{z}_i \otimes d\bar{z}_k \bowtie \phi_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J \\
&= 2\delta_{i\in I}(-1)^{p(i,I)} \phi_{IJ} \overline{\frac{\partial \mu_i}{\partial z_k}} dz_{I-\{i\}} \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J
\end{aligned}$$

La formule est démontrée.

2.7.5 Calcul final

Nous supposons que la variété complexe simplement connexe X porte une VSHP d'application classifiante $\Phi : X \rightarrow \mathcal{D}$ immersive et nous la munissons de la métrique kählerienne canonique et notons D'_X la partie (1,0) de la connexion de Levi-Civita.

$[d'', \nabla'^*] : Gr^{p-1} \otimes \Omega^{r,s} \rightarrow Gr^p \otimes \Omega^{r-1,s+1}$ est un tenseur. Par conséquent, pour le calculer, il suffira de calculer $[d'', \nabla'^*]v \otimes \alpha$, $v \in Gr^{p-1}, \alpha \in \Omega^{r,s}$ avec $d''v = d''\alpha = 0$. Calculons:

$$\begin{aligned}
[d'', \nabla'^*]v \otimes \alpha &= d''\nabla'^* v \otimes \alpha \\
&= d''(\sum_i e_i^*(v) \otimes \Phi^*\bar{\beta}_i \dashv \alpha) \\
&= \sum_i d''e_i^*(v) \wedge \Phi^*\bar{\beta}_i \dashv \alpha + \sum_i e_i^*(v) \otimes d''(\Phi^*\bar{\beta}_i \dashv \alpha) \\
&\overset{Prop.2.7.11}{=} \sum_i d''e_i^*(v) \wedge \Phi^*\bar{\beta}_i \dashv \alpha + (-1)^{r-1} \sum_i e_i^*(v) \overline{D'_X \Phi^* \beta_i} \bowtie \alpha \\
&\overset{Prop.2.7.9}{=} -\sum_{il} e_l^*(v) \bar{\theta}_l^i \wedge (\Phi^*\bar{\beta}_i \dashv \alpha) + (-1)^{r-1} \sum_i e_i^*(v) \overline{D'_X \Phi^* \beta_i} \bowtie \alpha \\
&= -\sum_{il} e_i^*(v) \bar{\theta}_i^l \wedge (\Phi^*\bar{\beta}_l \dashv \alpha) + (-1)^{r-1} \sum_i e_i^*(v) \overline{D'_X \Phi^* \beta_i} \bowtie \alpha \\
&= (-1)^{r-1} \sum_i e_i^*(v) \otimes \overline{(D'_X \Phi^* \beta_i - \sum_l \Phi^* \beta_l \otimes \theta_i^l)} \bowtie \alpha
\end{aligned}$$

Arretons ici pour un instant le cours de notre calcul. On a la suite exacte de fibrés holomorphes:

$$0 \to \mathcal{N}^*_{T_X|T_h(\mathcal{D})} \to \Phi^* T_h(\mathcal{D})^* \xrightarrow{\Phi^*} \Omega^1_X \to 0$$

Le choix des métriques assure que cette suite exacte leur est compatible. De plus, la métrique sur X étant kählerienne les deux connexions, hermitienne et riemannienne, sont les mêmes.

Si $\tilde{\sigma} \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{Hom}(\mathcal{N}^*_{T_X|T_h(\mathcal{D})}, \Omega^1_X) \otimes \Omega^1_X)$ est la deuxième forme fondamentale associée et si de plus la base (β_i) est choisie telle que, si P est le point de calcul, $(\beta_i(P))_{1\leq i\leq N}$ est orthonormale et $(\beta_i(P))_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathcal{N}^*_{T_X|T_h(\mathcal{D})}(P)$

$$\begin{aligned} D'_X\Phi^*\bar{\beta}_i - \sum_l \Phi^*\bar{\beta}_l \otimes \theta^l_i &= D'_X\Phi^*\bar{\beta}_i - \Phi^* D'_u\beta_i \\ &= -\tilde{\sigma}(\beta_i) \text{ si } i \leq n \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Prolongeons $\tilde{\sigma}$ à $T_h(\mathcal{D})^*$ entier en la décrétant nulle sur l'orthogonal de $\mathcal{N}^*_{T_X|T_h(\mathcal{D})}$. On a le:

Lemme 2.7.12 $[d'', \nabla'^*] = (-1)^r \sum_i e_i^* \otimes \overline{\sigma(\beta_i)} \bowtie$

L'invariance de cette formule étant peu manifeste nous allons produire une formule manifestement invariante pour $[\delta'', \nabla']$.

Définition 2.7.13 *Soient* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \in \Omega^{1,0} \otimes \Omega^{1,0}$, $\alpha = i(\alpha_r \otimes \bar{\alpha}_s) \in \Omega^{r,s}$, *on pose:* $\mu \bowtie' \alpha = i(\mu_1 \wedge \alpha_r \otimes \mu_2 \dashv \alpha_s)$

Par construction $\mu \bowtie'$ et $\bar{\mu} \bowtie$ sont adjoints l'un de l'autre. D'où la traduction du lemme 3 en le:

Lemme 2.7.14 $[\delta'', \nabla'] = (-1)^r \sum_i e_i \otimes \sigma(\beta_i) \bowtie'$

On a la formule invariante:

Théorème 4

$$[\delta'', \nabla'] = (-1)^r Id_V \otimes \sigma \circ \Phi^* \nabla'_u \bowtie'$$

Puis la Formule de Bochner suivante:

Théorème 5

$$\Delta_{D''} = \Delta_{d''} + \Delta_{\nabla'} + [d'', \nabla'^*] + [\delta'', \nabla']$$

$[d'', \nabla'^*]$ *et* $[\delta'', \nabla']$ *sont deux tenseurs adjoints l'un de l'autre. De plus* $\exists K_\mathcal{D} > 0$ *tel que: l'estimation ponctuelle suivante soit réalisée:*

$$max(\|[d'', \nabla'^*]\|, \|[\delta'', \nabla']\|) \leq K_\mathcal{D} \|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\|$$

Chapitre 3

Inégalités d'Arakelov pour des courbes

3.1 Inégalités d'Arakelov classiques

Nous commençons par un théorème classique expliqué dans [19]. La preuve en poids 1 analogue à celle que nous donnons ici est écrite dans [15].

Théorème 6 *Soit S une surface de Riemann compacte de genre g portant une VSHP $\mathbf{V}$ non triviale de poids n et de vecteur de Hodge $(d, d, \dots, d)$. On a l'inégalité:*

$$nd(2g-2) \geq 2c_1(H^{n0})$$

Preuve :
Nous supposons $\mathbf{V}$ sans partie fixe[1]. Puisque le faisceau $\mathbf{V}$ est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée, qui réalise un isomorphisme de $\mathbf{V}$ avec son dual, la dualité de Poincaré fournit:

$$H^0(S, \mathbf{V}) = H^2(S, \mathbf{V}) = 0$$

La formule d'Euler-Poincaré fournit alors:

$$\dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathbf{V_C}) = (n+1)d(2g-2)$$

$H^1(S, \mathbf{V_C})^{n+1,0}$ se calcule comme le groupe des sections holomorphes de $H^{n0} \otimes \Omega^1$. Le H^1 du faisceau associé est exactement une composante de la décomposition de Hodge de $H^2(S, \mathbf{V})$ et s'annule. La formule de Riemann-Roch donne:

$$\dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathbf{V_C})^{n+1,0} = d(g-1) + c_1(H^{n0})$$

Or $\sum_{p=1}^{n} \dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathbf{V})^{p,n+1-p} = \dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathbf{V}) - 2\dim_{\mathbf{C}} H^1(S, V)^{n+1,0}$. De là:

$$\sum_{p=1}^{n} \dim_{\mathbf{C}} H^1(S, \mathbf{V_C})^{p,n+1-p} = nd(2g-2) - 2c_1(H^{n0})$$

Les dimensions en question étant des nombres positifs, le théorème annoncé est démontré.

1. Sinon, l'énoncé implique $g \geq 2$ et cette remarque permet de conclure par la même démonstration

3.2 Description des VSHP localement homogènes sur $\mathcal{H}$

Cette section est parfaitement classique. La référence la plus utile est [25]. Cependant, il ne nous semble pas inutile de présenter les exemples de base de la théorie de façon explicite .

3.2.1 Description de S(1)

$G = SL_2(\mathbf{R})$ opère par homographies sur $\mathcal{H}$ le demi-plan de Poincaré. Le stabilisateur de $\sqrt{-1}$ est:

$$K = \{k(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbf{R}\}$$

Soit (ρ, V_1) la représentation standard de $SL_2(\mathbf{R})$ de dimension 2, réelle. On peut écrire dans la base canonique standard: $V_1 = \mathbf{R}u_1 \oplus \mathbf{R}u_2$

On a aussi $(V_1)_\mathbf{C} = \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_{-1} = H^{0,1} \oplus H^{1,0}$ avec:

$$e_1 = u_1 + \sqrt{-1}u_2 \quad k(\theta)e_1 = e^{+\sqrt{-1}\theta}e_1$$

$$e_{-1} = u_1 - \sqrt{-1}u_2 \quad k(\theta)e_{-1} = e^{-\sqrt{-1}\theta}e_{-1}$$

La forme antisymétrique réelle suivante

$$S(x,y) = -det_{u_1,u_2}(x,y)$$

est non dégénerée G-invariante et polarise la structure de Hodge de V_1 déjà décrite.

Si $\tau = \rho(\gamma).\sqrt{-1}$ posons:

$$\begin{aligned} H^{1,0}_\tau &= \mathbb{C}\rho(\gamma).e_{-1} \\ H^{0,1}_\tau &= \mathbb{C}\rho(\gamma).e_1 \end{aligned}$$

Les sous espaces vectoriels $H^{1,0}_\tau, H^{0,1}_\tau$ s'organisent en deux sous fibrés vectoriels complexes du fibré plat $\mathbf{V_C}$ avec $\mathbf{V} = \mathcal{H} \times V_1$. La forme symplectique S définit une forme symplectique plate sur V, polarisant les décompositions de Hodge $V_\tau \otimes \mathbb{C} = H^{1,0} \oplus H^{0,1}$.

Le lemme suivant est clair:

Lemme 3.2.1 *$\epsilon_{-1} = \tau u_1 + u_2$ est une section holomorphe de V, jamais nulle, toujours contenue dans $H^{1,0}$. On a $\|\epsilon_{-1}\|^2 = 2Im(\tau)$.*

Ce lemme permet donc de munir $H^{1,0}$ d'un structure holomorphe compatible à son plongement dans $\mathbf{V_C}$. En particulier:

Définition 3.2.2 *On dispose sur V de la structure de VSHP et V muni de cette structure est appelé S(1).*

Posons $\epsilon_1 = \bar{\tau}u_1 + u_2$, on $\|\epsilon_1\|^2 = (2Im(\tau))^{-1}$.

Soit D la connexion plate sur V_1. Soit $\phi \in C^\infty(\mathcal{H}, \mathbb{C})$.

$$D(\phi\epsilon_{-1}) = D\begin{pmatrix} \phi(\tau)\tau \\ \phi(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau\frac{\partial\phi}{\partial\tau}d\tau \\ \frac{\partial\phi}{\partial\tau}d\tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(\tau)d\tau \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau\frac{\partial\phi}{\partial\bar\tau}d\bar\tau \\ \frac{\partial\phi}{\partial\bar\tau}d\bar\tau \end{pmatrix}$$

D'où la formule:

$$D(\phi\epsilon_{-1}) = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{\tau}}\epsilon_{-1}d\bar{\tau} + (\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + \frac{\phi}{2\sqrt{-1}\tau})\epsilon_{-1}d\tau + \phi\epsilon_1 d\tau$$

Celà donne la formule suivante pour la connexion de Gauss-Manin de S(1):

$$\nabla'(\epsilon_{-1}) = \epsilon_1 \otimes d\tau$$

En utilisant la métrique de Poincaré sur $\mathcal{H}$, on constate que cette connexion de Gauss-Manin est partout une isométrie.

Un calcul immédiat fournit la proposition:

Proposition 3.2.3 *Sur la composante $\mathcal{E}^{1,*}$ du complexe de De Rham, on a $\Delta_{\nabla'} = Id$.*

De plus, comme la théorie générale du Chapitre 2 permet de le voir les opérateurs $[d'', \nabla'^*]$ et $[\delta'', \nabla']$ sont nuls. On pourrait aussi le constater par un calcul explicite.

Celà fournit le théorème d'annulation suivant connu dans la littérature sous le nom d'isomorphisme de Shimura [25].

Théorème 7 *Sur tout quotient compact lisse S de $\mathcal{H}$ la VSHP $(S, S(1))$ obtenue par passage au quotient vérifie le théorème d'annulation:*

$$H^1(S, S(1))^{1,1} = 0$$

De plus, $(S, S(1)^n)$ est un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov classique:

$$n(2g-2) \geq 2c_1(H^{1,0})$$

3.2.2 Description de S(n)

Toutes les autres VSHP homogènes irréductibles sur $\mathcal{H}$ sont décrites à décalage près par $S(n) = S^n S(1)$. Le vecteur de Hodge de S(n) est $(1, 1, \ldots, 1)$.

On peut choisir comme base holomorphe de $H^{p,q}$ le vecteur $e_{pq} = \epsilon_{-1}^p \epsilon_1^q$. On a $\|e_{pq}\|^2 = K|Im(\tau)|^{p-q}, \quad K > 0$

Par la formule de Leibniz, la connexion de Gauss-Manin se calcule comme suit:

$$\nabla' e_{pq} = p e_{p-1,q+1} \otimes d\tau$$

Avec ces formules il est encore aisé de vérifier que:

Proposition 3.2.4 *Sur la composante $\mathcal{E}^{p,*}, 1 \leq p \leq n$ du complexe de De Rham, on a $\Delta_{\nabla'} = K'Id, \quad K' > 0$.*

Théorème 8 *Sur tout quotient compact lisse S de $\mathcal{H}$ la VSHP $(S, S(n))$ obtenue par passage au quotient vérifie le théorème d'annulation:*

$$H^1(S, S(n))^{p,1+n-p} = 0, \quad 1 \leq p \leq n$$

De plus, $(S, S(n)^d)$ est un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov classique:

$$dn(2g-2) \geq 2c_1(H^{1,0})$$

3.3 Courbures des domaines de Griffiths

Rappelons le résultat de [19]:

Proposition 3.3.1 *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de périodes. Dans la métrique de Hodge, la courbure sectionnelle holomorphe au vecteur horizontal $\alpha \in T_h(\mathcal{D})$ à l'origine, vu comme un élément de $\mathfrak{g}^{-1,1}$ est donnée par:*

$$R_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} = -\|[\alpha,\bar{\alpha}]\|^2 < 0$$

Comme il est indiqué en remarque dans [19]:

Proposition 3.3.2 *Les points critiques de la fonction de courbure R sur $S(T_h(\mathcal{D}))$ donnée par $\alpha \to R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}}$ sont exactement les vecteurs tangeants à une orbite SL_2 (ou dans notre terminologie précédente équivalents à l'image par la classifiante d'une VSHP SL_2-homogène sur $\mathcal{H}$).*

Preuve :
Soit $\beta \in T_h(\mathcal{D})$ tel que $(\beta, \alpha) = 0$. La différentielle (0,1) de la fonction de courbure évaluée contre le vecteur $\bar{\beta}$ vaut:

$$\bar{\partial}_{\bar{\beta}} R(\alpha) = 2R_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\beta}} = -2([[\alpha,\bar{\alpha}],\alpha],\beta)$$

Donc α est un point critique de R si et seulement si:

$$\exists\lambda, \quad [[\alpha,\bar{\alpha}],\alpha] = \lambda\alpha$$

Cette dernière équation signifie que $\mathbb{C}\alpha \oplus \mathbb{C}\bar{\alpha}$ constitue un système triple de Lie et donc que α est tangeant à une orbite SL_2.

D'autre part, pour les fibrés de Hodge, on a le résultat suivant [18][19]:

Proposition 3.3.3 *Si $\pi : \mathfrak{g}^{00}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation complexe de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie en o de $\mathcal{D}$, la courbure du fibré holomorphe correspondant sur les vecteurs horizontaux se calcule par la formule suivante:*

$$\forall\xi \in \mathfrak{g}^{-1,1}, \quad \sqrt{-1}c(V)_{\xi\bar{\xi}} = -\pi([\xi,\bar{\xi}])$$

De plus, le fibré $det(\mathcal{F}_{[w+1/2]})$ est d'Hermite-Einstein, avec une constante > 0.

3.4 Phénomène de pincement en poids 2

3.4.1 Cas compact

Commençons par généraliser le phénomène de pincement diagonal tel qu'il est formulé chapitre 1 de cette thèse. Nous verrons aussi qu'on peut améliorer grandement les hypothèses au moins dans le cas compact.

Posons $m_{\mathcal{D}} = \max_{\alpha \in S(T_h(\mathcal{D}))} R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} < 0$.

Théorème 9 *$\exists\epsilon_n > 0$ tel que, si S une surface de Riemann compacte portant une VSHP $\mathbf{V}$ de poids 2 et de vecteur de Hodge (n,n,n) et si sa courbure gaussienne vérifie:*

$$m_{\mathcal{D}} - \epsilon_n \le G^S \le m_{\mathcal{D}}$$

Alors $(S,\mathbf{V})$ est isomorphe à $(S, S(2)^n)$ et l'application de périodes $\tilde{S}_u \to \mathcal{D}(n,n,n)$ est une orbite SL_2.

Preuve :

La valeur $m_{\mathcal{D}}$ est atteinte aux vecteurs tangeants de certaines orbite sSL_2. Déterminons les. Considérons l'inégalité d'Arakelov:

$$2d(2g-2) \geq 2c_1(H^{2,0})$$

Pour un quotient compact S' d'une orbite SL_2, et α un vecteur tangeant de norme 1, on calcule:

$$2n(2g-2) - 2c_1(H^{2,0}) = -2n \int_{S'} (R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}}\omega/2\pi) - c_1(H^{2,0})$$

Or $c_1(H^{2,0}) = C\omega/2\pi$, où C est une constante . Donc α correspond aux orbites SL_2 où cette expression s'annule si une telle orbite existe. $(\mathcal{H}, S(2)^n)$ est une telle orbite par la théorème 8.

C'est la seule. Pour toute autre SL_2-orbite, la VSHP localement homogène associée, contient en effet un facteur de la forme $S(p) \otimes F$ où $1 \leq p < n$ et F est une structure de Hodge constante. Pour un quotient compact X d'une telle SL_2-orbite, le groupe $H^1(X, \mathbf{V})^{n-1,1}$ n'est pas nul. En particulier, pour X, l'inégalité d'Arakelov est stricte.

Notons désormais α_{ref} un vecteur tangeant à cette orbite SL_2 . Notons que $K = -nm$.

Soit $(S, \mathbf{V})$ une surface de Riemann munie d'une VSHP non triviale. Supposons que $\exists \epsilon_0 > 0$

$$m - \epsilon_0 \leq G^S \leq m$$

La condition sur la courbure Gaussienne et l'équation de Gauss fournissent pour $\alpha \in TS$ de norme 1:

$$\begin{aligned} \|\sigma_\alpha(\alpha)\|^2 &\leq \epsilon_0 \\ R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} &\geq m_{\mathcal{D}} - \epsilon_0 \end{aligned}$$

Le fait que m soit un maximum unique implique que: $\forall U$ voisinage de $\alpha_{ref}, \exists \epsilon > 0 :\ R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq m - \epsilon \Rightarrow \exists g \in \mathbf{G}_{\mathbf{R}},\ g.\alpha \in U$ Or $\Delta_{\nabla'} = KId > 0$ sur $\mathcal{E}^{1,2}$. Les valeurs propres de $\Delta_{\nabla'}$ ne dépendent que de $T_S \in \mathbf{P}(T_h(\mathcal{D}))$. En particulier si ϵ_0 est assez petit, on peut toujours supposer que sur S, $\Delta_{\nabla'} \geq K/2Id$ sur $\mathcal{E}^{1,2}$.

De là, notre formule de Bochner-Hodge implique que pour ϵ_0 assez petit:

$$H^1(S, \mathbf{V})^{p,3-p} = 0, \quad 1 \leq p \leq 2$$

En effet, réecrivons la preuve du corollaire 1.3.3. Par la formule de Bochner du théorème 5, une forme harmonique η représentant une telle classe de cohomologie vérifie:

$$\Delta_{d''}\eta = -\Delta_{\nabla'}\eta + L_\sigma(\eta)$$

Où L_σ est un opérateur linéaire dont la norme L^∞ est contrôlée par la norme L^∞ de la deuxième forme fondamentale. Le carré de cette deuxième forme fondamentale est plus petit que ϵ_0, grâce à l'équation de Gauss. En particulier, pour ϵ_0 assez petit, $\|L_\sigma\|_{L^\infty} \leq K/3$.

Prenant le produit scalaire de cette quantité avec η, et intégrant par parties, nous constatons que:

$$\int_S \|d''\eta\|^2 \leq \int_S -K/2\|\eta\|^2 + K/3\|\eta\|^2 \leq -K/6\|\eta\|^2$$

En particulier, le terme de gauche devant être positif, et le terme de droite négatif, ces deux termes s'annullent et $\eta = 0$.

Mais la formule d'indice sous-jacente à l'inégalité d'Arakelov donne:

$$\sum_{p=1}^{2} \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathbf{V})^{p,3-p} = 0 \geq \int_S 2n(-R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} + \|\sigma\|^2)\omega/2\pi + 2nm\omega/2\pi$$

Par conséquent, on a bien $\sigma = 0$ et $R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} = m_{\mathcal{D}}$. $\square$.

Cette preuve est une preuve basée uniquement sur des outils classiques de géometrie différentielle. Maintenant, une formulation un peu différente peut être donnée et fournit un théorème strictement plus fort, sans deuxième forme fondamentale.

Théorème 10 *Si S une surface de Riemann compacte portant une VSHP $\mathbf{V}$ de poids 2 et de vecteur de Hodge (n, n, n) et si sa connexion de Gauss-Manin $\nabla' : H^{2,0} \to H^{1,1} \otimes \Omega^1$ est un isomorphisme le long de S, alors $(S, \mathbf{V})$ est isomorphe à une VSHP localement homogène $(S, S(n))$ et l'application de périodes $\tilde{S}_u \to \mathcal{D}(n, n, n)$ est une orbite SL_2 .*

Preuve :

Voyons la connexion de Gauss-Manin comme un complexe de faisceaux.

On a une très-triviale suite spectrale E^{pq} aboutissant à $H^1(S, \mathbf{V})^{2,1}$ dont le terme E_2 est $H^*(S, \mathcal{H}^*(\nabla'))$ et donc dans notre cas nul. D'où le fait que S est un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov en poids 2.

La preuve du théorème précédent permet de conclure.

Avec les preuves des théorèmes précédents, il est facile de conclure que:

Théorème 11 *Pour des courbes algébriques compactes munies d'un VSHP de poids 2 et de vecteur de Hodge (n, n, n), les seuls cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov:*

$$2n(2g - 2) \geq 2c_1(H^{2,0})$$

sont les VSHP localement homogènes $(S, S(2)^n)$.

3.4.2 Cas non compact

Ce paragraphe est consacré à la preuve de la généralisation suivante du théorème 9, dans le cas non-compact. Le lecteur aura parfois l'impression de relire le chapitre 1 de cette thèse.

Théorème 12 $\exists \epsilon_n > 0$ *tel que si S est une surface de Riemann non compacte de la forme $S = \bar{S} - \{P_i\}_{1 \leq i \leq N}$, où $\bar{S}$ est compacte, portant une VSHP entière $\mathbf{V}$ de poids 2 et* *de vecteur de Hodge (n,n,n), singulière aux points P_i, et dont la courbure Gaussienne en termes de la métrique de Hodge, vérifie:*

$$m_{\mathcal{D}} - \epsilon_n \leq G^S \leq m_{\mathcal{D}}$$

la VSHP $(S,\mathbf{V})$ est localement homogène et isomorphe à $(S, S(2)^n)$

Dans ce qui suit, nous allons donner une preuve de cet énoncé. Comme dans le chapitre 1, elle repose essentiellement sur les résultats de [25]. Notons $j : S \to \bar{S}$ l'inclusion canonique. Rappelons que les groupes de cohomologie du faisceau $j_*\mathbf{V}$ se calculent grâce à la cohomologie L^2 du faisceau $\mathbf{V}$ sur S, muni des métriques de Hodge, que des décompositions de Hodge des groupes de cohomologie L^2 similaires à celles du cas compact sont disponibles.

On suppose, ce qui est une restriction inoffensive d'après le chapitre 1 de la présente thèse, que la monodromie aux points à l'infini est unipotente.

Orbites SL_2

Nous allons formuler ce dont nous avons besoin dans le theorème des orbites SL_2 de Schmid [22] sous une forme géométrique[2]:

Proposition 3.4.1 *Soit $(\Delta^*, \mathbf{V})$ une VSHP entière sur le disque épointé que l'on suppose singulière au point ôté P_∞. Considerons l'application de périodes du revêtement universel de Δ^*, $\mathcal{H}$ vers le domaine de Griffiths $\mathcal{D}'$, $\phi_{\mathbf{V}} : \mathcal{H} \to \mathcal{D}'$. Alors, il existe une orbite SL_2, S, dont l'espace tangeant à l'origine o de $\mathcal{D}'$ est $T \in \mathbf{P}(\mathfrak{g}^{-1,1})$, telle que, si la suite de points $(P_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \Delta^*$ tend vers P_∞ et si $\tilde{P}_n$ est un relèvement de P_n à $\mathcal{H}$, $\exists g_n \in \mathbf{G}_{\mathbf{R}} = Aut(\mathcal{D}')$ tels que*

- $g_n.o = \phi_{\mathbf{V}}(\tilde{P}_n)$

- $\lim_{n\to\infty} dist(\gamma_n^{-1}.(\phi_{\mathbf{V}})_* T_{\tilde{P}_n}\mathcal{H}; T) = 0$

On appelle S l'orbite SL_2 associée au point ôté P_∞.

Corollaire 3.4.2 $\exists \epsilon_0 > 0$, *tel que si $(S,\mathbf{V})$ est une VSHP entière de poids 2 sur la courbe algébrique non compacte S, de vecteur de Hodge (n,n,n), vérifiant pour α un vecteur tangeant de norme 1:*

$$-\epsilon_0 + m_{\mathcal{D}} \leq R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq m_{\mathcal{D}}$$

toute orbite SL_2 associée à un point à l'infini P_∞ de S est de la forme $(\Delta, S(2)^n)$.

2. Nous ne présentons pas la preuve de cette propriété qui nécessiterait une longue reprise du lourd formalisme de l'article de Schmid. Il faut cependant noter que nous n'utilisons pas toute la force du résultat de Schmid, qui donne des développements asymptotiques précis. Pour se convaincre, on regardera l'exemple des courbes dans la surface produit de deux surfaces de Riemann hyperboliques avec chacune une pointe parabolique. Il faut cependant noter que nous n'utilisons pas toute la force du résultat de Schmid, qui donne des développements asymptotiques précis.

Preuve :
C' est clair par la preuve du theorème 9. En effet, nous avons vu au cours de cette preuve, que notre condition de pincement, impliquait que l'espace tangeant de S en tout point était dans l'espace projectif des directions horizontales dans un voisinage de l'orbite $(\Delta, S(2)^n)$ dont l'adhérence ne contient pas d'autre orbite SL_2. Par conséquent, dans la proposition 3.4.1, l'orbite SL_2 associée à tout point à l'infini est nécéssairement $(\Delta, S(2)^n)$.

On pourrait faire un peu mieux et cararactériser les orbites SL_2 associées au point singulier d'une VSHP en général par le comportement asymptotique de la quantité $R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}}$, ce qui constituerait une généralisation et un affinement des paragraphes sur les modèles de Néron du chapitre 1 de la présente thèse[3].

N'ayant pas pu trouver d'application géométrique significative et nouvelle, nous ommettons de développer cette idée, fort simple au demeurant.

Calcul de $dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V})^{3,0}$

Nous travaillons sous les hypothèses du corollaire précédent, en supposant de plus la deuxième forme fondamentale $\sigma_{TS|T_\lambda(\mathcal{D})}$ bornée.

Ici, les arguments à employer sont isomorphes à ceux de la section correspondante du premier chapitre. Nous ne les rappellerons pas en détail, mais nous rappellerons les faits cruciaux.

Grâce à [26], $H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V})^{30}$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes, L^2 par rapport aux métriques de Hodge, de $H^{2,0} \otimes \Omega^1$ sur S.

Soit $'H^{2,0}$ le prolongement canonique de $H^{2,0}$ (voir [18]). C'est un fibré vectoriel holomorphe sur $\bar{S}$. Sa première classe de Chern se calcule par le prolongement trivial du courant $c_1(H^{2,0}, h)$ grâce à [17] (voir aussi [18]).

Le fait crucial est que, si P_∞ est un point singulier de la VSHP, une section holomorphe locale τ de $'H^{2,0}$ non nulle en P_∞ et si ζ est une carte holomorphe sur un voisinage de P_∞ vérifiant $\zeta(P_\infty) = 0$ la norme de Hodge de τ croît asyptotiquement comme $\log^2|\zeta|$. Encore une fois, comme au chapitre 1, c'est le théorème des orbites SL_2 de Schmid qui fournit cette évaluation asymptotique. Le point important est que la détermination explicite d'orbite SL_2 du corollaire 3.4.2. nous permet de préciser la forme explicite de la croissance.

Il est également vrai que la métrique kählerienne sur S se comporte asymptotiquement comme $|d\zeta|^2/|\zeta|^2 log^2|\zeta|$ par le lemme d'Ahlfors- Schwarz. C'est ici que nous utilisons que la deuxième forme fondamentale est bornée.

On voit donc, en déterminant les sections holomorphes de carré intégrable près des points à l'infini, que les sections holomorphes L^2 sur S de $H^{2,0} \otimes \Omega^1$ s'identifient aux sections holomorphes sur $\bar{S}$ de $'H^{2,0} \otimes \Omega^1_{\bar{S}}$.

Le même raisonnement qu'au chapitre 1 permet de conclure à l'annulation du H^1 de ce faisceau; de fait nous pouvons voir le H^1 de ce faisceau comme une composante

3. C'est de cette manière, tellement plus élégante, qu'il aurait d'ailleurs fallu écrire cette section du chapitre 1. Nous avons conservé par pure sentimentalité la formulation ancienne qui nous avait demandé beaucoup d'efforts, ignorants que nous étions alors de la théorie des VSHP. Il nous parait pourtant intéressant pour le futur de signaler par cette maladresse de rédaction l'analogie entre la théorie de Schmid et la théorie des compactifications toroïdales de [1] .

de la décomposition de Hodge de $H^2(\bar{S}, j_*\mathbf{V}) = 0$.

L'application de la formule de Riemann-Roch et de la formule de Cohn-Vossen:

$$2g(\bar{S}) - 2 = \int_S c_1(\Omega^1_S, \omega_{Hodge}) - \mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

fournit dès lors la proposition suivante:

Proposition 3.4.3 *Si $(S, \mathbf{V})$ est une VSHP entière de poids 2 sur la courbe algébrique non compacte S, de vecteur de Hodge (n, n, n), vérifiant pour α un vecteur tangeant de norme 1:*

$$-\epsilon_0 + m_n \leq R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq m_n$$

et dont la deuxième forme fondamentale est bornée:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V})^{30} = \int_S c_1(H^{2,0}, h) + \frac{n}{2}\int_S c_1(\Omega^1, \omega_{Hodge}) - \frac{n}{2} Card(\bar{S} - S)$$

Calcul de $dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V})$

Proposition 3.4.4 *Si $(S, \mathbf{V})$ est une VSHP entière de poids 2 sur la courbe algébrique non compacte S, de vecteur de Hodge (n, n, n), vérifiant pour α un vecteur tangeant de norme 1:*

$$-\epsilon_0 + m_{\mathcal{D}} \leq R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} \leq m_{\mathcal{D}}$$

et dont la deuxième forme fondamentale est bornée:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V}) = 3n \int_S c_1(\Omega^1, \omega_{Hodge}) - n Card(\bar{S} - S)$$

Preuve :
L'argument est basé sur la suite spectrale de Leray:

$$E_2^{pq} = H^p(\bar{S}, R^q j_*\mathbf{V}) \Rightarrow H^{p+q}(S, \mathbf{V})$$

Les faisceaux de cohomologie locale $R^i j_*\mathbf{V}$, $i \geq 1$ sont supportés sur le diviseur à l'infini $P_1 \cup \ldots \cup P_N$. Ils sont donc acycliques. De plus, par définition, au point P_l la fibre de ces faiceaux de cohomologie locale est la limite inductive de $H^i(U - \{P_l\}, \mathbf{V})$ U décrivant la famille des voisinages ouverts de P_i. Il y a une base de voisinages isomorphes à des disques D, et $D - P_l$ est homotopiquement équivalent à S^1, lacet tournant une fois autour de P_l. Donc:

$$(R^i j_*\mathbf{V})_{P_l} \simeq H^1(S^1, \mathbf{V})$$

V étant un faisceau localement constant $(R^i j_*\mathbf{V})_{P_l} = \{0\}$, $i \geq 2$ et ces faisceaux sont nuls. De plus $(R^1 j_*\mathbf{V})_{P_l}$ est un espace vectoriel de dimension finie égale à celle de $(j_*\mathbf{V})_{P_l}$, la caractéristique d'Euler d'un cercle étant nulle. La détermination des orbites SL_2 que nous avons effectuée garantit que cette dimension est n. De là:

$$\chi(\bar{S}, j_*\mathbf{V}) = \chi(S, \mathbf{V}) + n\mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

Mais, la résolution de Čech fournit $\chi(S, \mathbf{V}) = 3n\chi(S, \mathbb{R})$.

Appliquons encore au faisceau constant $\mathbf{R}$ la suite spectrale de Leray:

$$\chi(\bar{S}, j_*\mathbf{R}) = \chi(S, \mathbf{R}) + \mathrm{Card}(\bar{S} - S)$$

Il est trivial que $j_*\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\bar{S}}$. L'application de la formule de Cohn-Vossen fournit l'expression:

$$\chi(S, \mathbf{R}) = -\int_S c_1(\Omega^1, \omega)$$

Le type des orbites SL_2 mises en jeu ici interdit la présence d'un facteur fixe dans $\mathbf{V}$ et garantit par conséquent l'annulation de $H^0(\bar{S}, j_*\mathbf{V})$ et par dualité (voir [25]) de $H^2(\bar{S}, j_*\mathbf{V})$. La proposition est démontrée.

Fin de la preuve

Tous ces calculs permettent d'affirmer que, exactement comme dans le cas compact:

$$(*) \qquad \sum_{p=1}^{2} \dim_{\mathbf{C}} H^1(S, j_*\mathbf{V})^{p,3-p} = \int_S 2n(-R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} + \|\sigma\|^2)\omega/2\pi + 2nm_{\mathcal{D}}\omega/2\pi$$

Pour conclure nous faisons appel à notre formule de Bochner-Hodge et en tirons comme d'habitude le lemme suivant:

Lemme 3.4.5 $\exists \epsilon_n > 0$ *tel que si S est une surface de Riemann non compacte de la forme $S = \bar{S} - \{P_i\}_{1\leq i\leq N}$, portant une VSHP entière $\mathbf{V}$ de poids 2 et de vecteur de Hodge (n, n, n), singulière aux points P_i, et dont la courbure Gaussienne en termes de la métrique de Hodge, vérifie:*

$$m_{\mathcal{D}} - \epsilon_n \leq G^S \leq m_{\mathcal{D}}$$

le groupe de cohomologie $H^1(\bar{S}, j_*\mathbf{V})^{2,1}$ est nul.

Preuve :
Par la formule de Bochner du théorème 5, une forme harmonique η représentant une telle classe de cohomologie vérifie:

$$\Delta_{d''}\eta = -\Delta_{\nabla'}\eta + L_\sigma(\eta)$$

Où L_σ est un opérateur linéaire dont la norme L^∞ est contrôlée par la norme L^∞ de la deuxième forme fondamentale. Le carré de cette deuxième forme fondamentale est plus petit que ϵ_0, grâce à l'équation de Gauss. En particulier, pour ϵ_0 assez petit, $\|L_\sigma\|_{L^\infty} \leq K/3$.

Prenant le produit scalaire de cette quantité avec η, et intégrant par parties, nous constatons que:

$$\int_S \|d''\eta\|^2 \leq \int_S -K/2\|\eta\|^2 + K/3\|\eta\|^2 \leq -K/6\|\eta\|^2$$

Notons que cette intégration par parties est licite par le lemme 4.2.2. que nous allons prouver plus tard. En particulier, le terme de gauche devant être positif, et le terme de droite négatif, ces deux termes s'annullent et $\eta = 0$.

Or la formule (*) implique que la dimension de ce groupe de cohomologie est nulle si et seulement si $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$ (donc si le revêtement universel de S est une orbite SL_2) et $G^S = m_{\mathcal{D}}$ (Ce qui signifie que cette orbite SL_2 est bien $(\Delta, S(2)^n)$. Celà achève la preuve du théorème 12, au moins dans le cas de la monodromie unipotente.

Pour le cas de la monodromie non-unipotente, l'arithméticité de la monodromie permet d'appliquer le lemme 1.5.6 et de lever cette restriction.

Remarque 3.4.6 *Y a-t'il un équivalent de notre théorème 10 dans ce contexte? Celà ne nous paraît pas clair.*

3.5 Inégalités d'Arakelov en poids ≥ 3

3.5.1 Non-localité

Dans le cas où la VSHP est de poids supérieur à 3, nous ne pouvons pas encore affirmer la validité de l'analogue de notre théorème de pincement. Nous allons voir pourquoi.

Lemme 3.5.1 *Sur un domaine de Griffiths de poids $n \geq 3$ dont le vecteur de Hodge n'a aucune composante nulle, les points critiques de la fonction $Tr_{H^{n0}}(\bar{\xi}\xi)$ sur $S(T_h(\mathcal{D}))$ sont les vecteurs horizontaux tel que $\xi_{n0} = 0$ où ξ_{n0} désigne l'application linéaire ξ_{n0} : $H^{n0} \to H^{n-1,1}$ déduite de ξ, et les vecteurs tels que $\xi_{pq} = 0$ pour $1 \leq p \leq n-1$.*

Le premier cas se présente si et seulement si ξ est tangeant à une application de périodes associée à une VSHP de la forme $Dec_{+2}\mathbf{V}(n-2) \oplus F(n)$ où $\mathbf{V}(n-2)$ est une VSHP de poids n-2 et vérifie $h^{pq} = 0$, $p < 0$. Le dexième cas se présente si et seulement si la VSHP est de la forme $\mathbf{V}(1) \otimes F(n-1) \oplus F(n)$, les $F(i)$ désignant des structures de Hodge fixes de poids i.

Preuve :
La gradient de cette fonction en ξ est précisèment $\xi_{n,0}$. Hors des cas d'égalité il facile de construire des vecteurs horizontaux orthogonaux à ξ de produit scalaire non nul avec ξ_{n0} puisque la norme de Hodge de ξ vaut:

$$||\xi||^2 = \sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} ||\xi_{n-i,i}||^2$$

Proposition 3.5.2 *Pour les surfaces de Riemann compactes de genre g portant une VSHP* $\mathbf{V}$ *non triviale de poids $n \geq 3$ et de vecteur de Hodge $(d, d, \ldots, d)$, l'inégalité d'Arakelov:*

$$nd(2g-2) \geq 2c_1(H^{n0})$$

ne peut pas être prouvée par un calcul local de courbure. C'est donc un phénomène global.

Remarque 3.5.3 *Nous voyons donc que pour prouver l'analogue de notre théorème de pincement en poids ≥ 3, il faut trouver un analogue de type global à nos calculs locaux de courbure ou bien amender sérieusement notre approche en déduisant l'annulation de la deuxième forme fondamentale par un argument d'analyse de type global. Nous éspérons revenir sur ce point dans un travail ultérieur.*

3.5.2 Caractérisation topologique de certaines VSHP

Cependant, on peut quand même tirer des idées de ce chapitre un théorème très simple qui caractérise topologiquement certaines VSHP localement homogènes.

Proposition 3.5.4 *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de Griffiths de poids w, $\exists K_{\mathcal{D}} > 0$, tel que: les surfaces de Riemann compactes de genre g portant une VSHP* **V** *non triviale dont la classifiante est à valeurs dans $\mathcal{D}$, vérifient l'inégalité*

$$2g - 2 \geq K_{\mathcal{D}} c_1(\mathcal{F}_{[w+1/2]}).[S]$$

et les cas d'égalité sont des VSHP localement homogènes.

Preuve :
Elle est un conséquence immédiate du fait que le fibré $\mathcal{F}_{[w+1/2]}$ est d' Hermite-Einstein et du fait que les points critiques de la fonctionnelle de courbure sont les orbites SL_2 (Proposition 3.3.2).

Remarque 3.5.5 *Dans le cas où la classifiante se factorise à travers un domaine symétrique borné (sous variétés de dimension 1 d'un espace hermitien localement symétrique de type non compact), le théorème en question caractérise les cycles holomorphes géodésiques qui, au niveau du revêtement universel apparaissent comme des diagonales de polydisques totalement géodésiques maximaux [14]. La proposition n'est donc pas quelque chose de trés profond.*

Nous n'avons pas réussi à trouver une interprétation du type "Théorème d'annulation d'un groupe de cohomologie d'une VSHP" à ce résultat, qui pourrait permetre de prouver un théorème de pincement. Dans le cas des sous- variétés d'un domaine symétrique borné, la VSHP associée à la représentation adjointe ne peut pas fournir un exemple adéquat. Disons toutefois que pour prouver un tel théorème de pincement, il y a d'autres fibrés et d'autres opérateurs que ceux tirés de la théorie des VSHP.

Chapitre 4

Semi hyperbolicité kählerienne

4.1 Motivations

Nous rappelons la définition suivante dûe à Gromov [10]:

Définition 4.1.1 *La variété kählerienne (X,ω) est Kähler-hyperbolique au sens de Gromov si et seulement si, elle est compacte et, $\tilde{X}$ désignant son revêtement universel:*

$$\exists\alpha \in C^\infty(\tilde{X},\Omega^{1,0}_{\tilde{X}}),\ \exists K>0, \quad \textit{tels que}:\ d\alpha=\omega \ \textit{et}\ \forall v\in T_{\tilde{X}},\ \ |\alpha(v)|\leq ||v||_\omega$$

Un des points importants de l'article de Gromov [10] est que le complexe de De Rham L^2 sur $\tilde{X}$ donne lieu à des groupes de cohomologie L^2 qui sont réduits et, de plus, nuls en tout degré autre que $dim_{\mathbb{C}}(X)$. Cela fournit l'inégalité $(-1)^{dim_{\mathbb{C}}(X)}c_{dim_{\mathbb{C}}(X)}(X)\geq 0$.

De plus, à cause de la décomposition de Hodge, on dispose aussi de:

$$(-1)^{dim_{\mathbb{C}}(X)+r}(ch(\Omega^r_X).Todd(T_X))[X]\geq 0$$

En particulier, dans le cas d'une surface algébrique Kähler-hyperbolique S:

- $c_2(S)\geq 0$
- $c_1^2(S)+c_2(S)\geq 0$
- $5c_2(S)-c_1^2(S)\geq 0$

Notre point de départ est la remarque que des théorèmes d'annulation L^2 ont lieu dans ce contexte pour certains faisceaux localement constants. C'est l'objet de la section 4.2 .

Celà étant, la définition de Gromov n'est pas bien adaptée au contexte de la géometrie birationnelle. Supposons par exemple la surface algébrique et kählerienne (X,ω) Kähler-hyperbolique. Soit $P\in X$ et $\pi: Y\to X$ la transformation monoïdale de centre P. Y contenant une courbe rationnelle, il ne peut pas exister de structure Kähler-hyperbolique sur Y. Pourtant:

Proposition 4.1.2 $c_2(Y)\geq 0,\ \ c_1^2(Y)+c_2(Y)\geq 0,\ \ 5c_2(Y)-c_1^2(Y)\geq 0$

Preuve :
En effet, $c_2(Y) = c_2(X)+1$, $c_1^2(Y)+c_2(Y) = c_1^2(X)+c_2(X)$. De plus le théorème d'annulation L^2 pour les 1-formes holomorphes persiste pour Y par invariance birationelle de l'irrégularité.

Nous allons donc adapter la définition de Gromov à ce type d'exemple et voir ce qui subsiste de ses résultats.

4.2 Théorème d'annulation L^2 pour certains fibrés plats

4.2.1 Quelques faits classiques relatifs à la cohomologie L^2

Nous allons expliciter le lemme classique qui forme la base de l'analyse sur les variétés riemanniennes complètes. Il s'agit de justifier l'utilisation extensive de la formule de Stokes sur des variétés non compactes sans bord.

Si η est une forme différentielle sur la variété riemannienne (X, g), nous définissons sa norme L^1 par la formule:

$$||\eta||_{L^1} = \int_X ||\eta(x)||_{g_x} \, dVol(g)(x)$$

Et nous disons qu'elle est L^1 si sa norme L^1 est finie.

Lemme 4.2.1 *Si X est une variété riemannienne compléte connexe orientée de dimension n et η est une (n-1)- forme différentielle sur X de classe C^∞ et L^1. Si sa forme cobord $d\eta$ est également L^1, on a:*

$$\int_X d\eta = 0$$

Preuve :

Nous reproduisons la preuve de [10].

Soit $R > 0$, nous définissons une fonction affine par morceaux f_R sur $\mathbb{R}^+$ par les relations:

$$\begin{aligned} f_R &\equiv 0 \ sur \ [2R, +\infty[\\ f_R &\equiv 1 \ sur \ [0, R] \\ f_R(x) &= 2 - x/R \ x \in [R, 2R] \end{aligned}$$

Soit $p \in X$, on peut approcher la fonction sur X définie par $g_R(q) = f_R(d_g(q,p))$ par une fonction sur X, lisse à support compact, ρ_R à valeurs dans $[0,1]$ identiquement égale à 1 sur la boule riemannienne de centre p et de rayon R et vérifiant $||\nabla\rho_R||_{L^\infty} \leq 2/R$.

La formule de Stokes donne alors:

$$\int_X d(\rho_R\eta) = \int_X \rho_R d\eta + \int_X d\rho_R \wedge \eta = 0$$

Le premier terme tend vers $\int_X d\eta$ quand R tend vers l'infini car $d\eta$ est L^1. Quand au second terme, il vérifie:

$$|\int_X d\rho_R \wedge \eta| \leq \frac{2}{R}||\eta||_{L^1}$$

D'où la conclusion désirée.

L' opérateur Δ de Laplace-Beltrami associé à (X,g) est formellement autoadjoint. Nous définissons comme d'habitude l'adjoint formel de la différentielle de De Rham par δ.

Dans ce contexte, on peut formuler le lemme suivant:

Lemme 4.2.2 *Soit α une forme différentielle de degré p et de classe C^∞, L^2 sur X, une variété riemannienne complète. Si la fonction sur X $F(x) = (\Delta\alpha, \alpha)_x$ est L^1 les deux formes $d\alpha$ et $\delta\alpha$ sont L^2 et l'on a:*

$$\int_X (\Delta\alpha,\alpha)_x = \|d\alpha\|^2_{L^2} + \|\delta\alpha\|_{L^2}$$

Preuve :
Par le théorème de Stokes:

$$(1) \quad \int_X \rho_R^2(\Delta\alpha,\alpha) = \int_X \rho_R^2(\|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2) + \int_X (d\alpha, \rho_R d\rho_R \wedge \alpha) + (\delta\alpha, \rho_R d\rho_R \dashv \alpha)$$

En posant $\psi(R) = \int_X \rho_R^2(\|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit:

$$\psi(R) \leq |\int_X \rho_R^2(\Delta\alpha, a)| + 4/R^2\|\alpha\|_{L^2}\psi(R)^{1/2}$$

Comme $(\Delta\alpha,\alpha)$ est L^1,

$$\exists M > 0,\ \forall R, \quad |\int_X \rho_R^2(\Delta\alpha, a)| \leq M$$

Comme ψ est une fonction croissante de R, ψ a une limite finie ou infinie en $+\infty$. Cette dernière hypothèse est exclue puisque la relation précédente fournit:

$$\sqrt{\psi(R)} \leq M/\sqrt{\psi(R)} + 4/R^2\|\alpha\|_{L^2}$$

En particulier $d\alpha$ et $\delta\alpha$ sont L^2.

Pour la même raison, le passage à la limite dans (1) est licite et fournit:

$$\int_X (\Delta\alpha,\alpha) = \int_X (\|d\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2)$$

Nous appelons forme harmonique toute forme différentielle α telle que $\Delta\alpha = 0$.

Corollaire 4.2.3 *Toute forme harmonique L^2 sur X une variété riemannienne complète est fermée.*

Preuve :
Le lemme précédent permet en effet d'écrire, la forme harmonique α étant C^∞ par la théorie elliptique standard:

$$(\Delta\alpha,\alpha) = \|d\alpha\|^2_{L^2} + \|\delta\alpha\|^2_{L^2}$$

En particulier, α est fermée et cofermée.

Un autre corollaire de ce lemme est que l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété riemannienne compléte est essentiellement auto-adjoint. Comme nous n'utilisons pas ce fait explicitement, nous négligerons de le déduire (voir [20]).

Rappelons que le symbole d'un opérateur différentiel de degré n entre deux fibrés vectoriels E et F est une section sur $T_X^* - \{0\}$ de $Hom(E,F)$ qui lorsqu'on la restreint aux fibres est polynomiale homogène de degré n. En particulier, on peut toujours le voir comme une section sur X de $Hom(E,F) \otimes T_X^{\otimes n}$ et c'est le point de vue que j'adopte ici.

Dans ce contexte, nous pouvons observer que le lemme précédent se généralise comme suit:

Lemme 4.2.4 *Soit X une variété riemannienne complète.*

Soit (E, h_E) et (F, h_F) deux fibrés vectoriels C^∞ hermitiens. Soit $\partial : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ un opérateur différentiel de degré 1 dont le symbole $S \in C^\infty(X, Hom(E,F) \otimes T_X)$ est uniformément borné sur X (par rapport à la métrique hermitienne sur ce fibré induite par les métriques hermitiennes h_E, h_F et la métrique riemmannienne de X).

Notons par ∂^* son adjoint formel par rapport aux métriques susdites.

Soit $\alpha \in C^\infty \cap L^2(X, E)$, une section de E.

Si la fonction sur X $F(x) = (\partial^* \partial \alpha, \alpha)_x$ est L^1 la section de F $\partial\alpha$ est L^2 et l'on a:

$$\int_X (\partial^* \partial \alpha, \alpha) = \|\partial \alpha\|_{L^2}^2$$

Preuve :
Observons que par définition du symbole, on a:

$$\partial(f\alpha) = f\partial\alpha + \sqrt{-1} S(df)\alpha$$

Nous reproduisons l'usage de la formule de Stokes au lemme précédent dans notre nouveau contexte:

$$\int_X \rho_R^2 (\partial^* \partial \alpha, \alpha) = \int_X \rho_R^2 \|\partial\alpha\|^2 + \sqrt{-1} \int_X (d\alpha, \rho_R S(d\rho_R)\alpha)$$

De cette formule, le caractère L^∞ du symbole permet de tirer les mêmes conclusions qu'au lemme précédent.

Corollaire 4.2.5 *Si $\partial : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ est un opérateur différentiel elliptique de degré 1 à symbole L^∞ entre deux fibrés vectoriels hermitiens et si α est une section L^2 vérifiant $\partial^* \partial \alpha = 0$, elle est C^∞ et vérifie $\partial \alpha = 0$.*

4.2.2 Le théorème d'annulation

Soit (X, ω) une variété kähler-hyperbolique et (E, D, h) un fibré plat sur X muni d'une métrique hermitienne.

Proposition 4.2.6 *Soient Δ_D, l'opérateur de Laplace sur les formes à valeurs dans E et L l'opérateur de multiplcation par la forme de Kähler. Si le commutateur $[\Delta_D; L]$ est nul:*

- *Les groupes de cohomologie L^2 à valeurs dans E du complexe de De Rham sur $\tilde{X}$ sont réduits.*

– *Ces groupes de cohomologie L^2 sont nuls en degré $\neq dim_{\mathbb{C}}(X)$.*

Preuve :

La condition de commutation permettrait ici d'appliquer verbatim les raisonnements de [10]. Pour être plus complet, nous allons donner une idée de la preuve.

Montrons d'abord que toute forme harmonique L^2 à valeurs dans E de degré strictement inférieur à $dim_{\mathbb{C}}X$ est nulle. Soit ϕ une telle forme harmonique de degré p. Nous savons qu'elle est fermée et cofermée.

La forme $L\phi$ est, grâce à la relation de commutation, harmonique et de carré intégrable. Elle est donc fermée et cofermée. Le fait qu'elle soit cofermée indique qu'elle est orthogonale à l'image I par la différentielle de de Rham des formes C^∞ à support compact de degré $p+1$.

Soit a une primitive L^∞ de la forme Kähler-hyperbolique. La formule de Leibniz donne alors:

$$L\phi = d(a \wedge \phi)$$

Comme a est bornée, $\alpha \wedge \phi$ est de carré intégrable. En particulier, si ρ_R désigne la fonction de cut-off du paragraphe précédent, la norme L^2 de la forme $d\rho_R \wedge a \wedge \phi$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. $L\phi$ est donc la limite au sens L^2 de $d\rho_R \alpha \wedge \phi$ quand R tend vers l'infini. $L\phi$ est donc adhérente et orthogonale à I. En particulier, elle est nulle.

C'est un lemme algébrique bien connu, dû à Lefschetz, voir [24], que ϕ est alors nulle.

Pour les degrés strictement supérieurs à $dim_{\mathbb{C}}X$, on utilise l'opérateur * de Hodge pour conclure.

On en fait beaucoup mieux. Soit $p < dim_{\mathbb{C}}X$ et $k = dim_{\mathbb{C}}(X) - p$. Soit $\phi \in C_o^\infty(X, E \otimes \Omega^p)$. Nous avons la formule suivante:

$$L^k\phi = d(a \wedge L^{k-1}\phi) - a \wedge L^{k-1}d\phi$$

D'où nous tirons:

$$(L^k\phi, L^k\phi) = (a \wedge L^{k-1}\phi, d^* L^k\phi) - (a \wedge L^{k-1}d\phi, \psi)$$

Le lemme de Schwarz permet d'affirmer que:

$$||L^k\phi||_{L^2}^2 \leq ||a||_{L^\infty}(||\phi||_{L^2}||d^* L^k\phi||_{L^2} + ||L^k\phi||_{L^2}||d\phi||_{L^2})$$

Or, voir [24], en chaque point P de X, l'opérateur $L^k : \Lambda^p T_P^* X \rightarrow \Lambda^{p+2k} T_P^* X$ est un isomorphisme sur les espaces des formes différentielles en ce point. De plus, ω est un tenseur parallèle. Donc il existe des constantes strictement positives c,C telles que:

$$\forall P \in X, \forall \phi \in \Lambda^p T_P^* X, \quad c||\phi|| \leq ||L^k\phi|| \leq C||\phi||$$

Jointe avec la condition de commutation, cette inégalité fournit aussi:

$$\forall \phi \in C_o^\infty(X, E \otimes \Omega^p), \quad c||\Delta\phi|| \leq ||\Delta L^k\phi|| \leq C||\Delta\phi||$$

De la nous tirons l' inégalité suivante:

$$\exists M > 0, \forall \phi \in C_o^\infty(X, E \otimes \Omega^p), \ ||\phi||^2 \leq M||\phi||(\Delta\phi, \phi)$$

Celà assure que le spectre du laplacien sur les formes de degré p ne contient pas 0 et donc que la cohomologie L^2 est réduite en ce degré.

Une variante de cet argument assure que 0 est un point isolé du spectre du laplacien en degré $dim_{\mathbb{C}}(X)$ et donc que la cohomologie L^2 est réduite en ce degré.

Théorème 13 *Supposons E sous jacent à une VSHP et h égale à la métrique de Hodge (cf. chap.2), ou plus géneralement (E,D,h) un fibré harmonique au sens de Simpson (voir [12] ou [23]). Alors:*

- *Les groupes de cohomologie L^2 à valeurs dans E du complexe de De Rham sur $\tilde{X}$ sont réduits.*

- *Ces groupes de cohomologie L^2 sont nuls en degré $\neq dim_{\mathbb{C}}(X)$.*

On trouvera dans [25] et [12] des preuves de la relation de commutation.

4.3 Notion de semi-hyperbolicité

4.3.1 Définition

Définition 4.3.1 *Soit X une variété kählerienne compacte de revêtement universel $\tilde{X}_u \to X$. Soit $\omega \in C^\infty(X, \Omega^{1,1})$. On dit que (X, ω) est semi-hyperbolique si et seulement si:*

- $\omega \geq 0$ *et* $\omega > 0$ *sur un ouvert dense.*

-
$$\exists \alpha \in C^\infty(\tilde{X}, \Omega^{1,0}_{\tilde{X}_u}), \exists K > 0, \ tq: \ d\alpha = \omega \ et \ \forall v \in T_{\tilde{X}_u}, \ |\alpha(v)| \leq -K\omega(\sqrt{-1}v \wedge \bar{v})$$

Remarque 4.3.2 *Une variété Kähler-hyperbolique est semi-hyperbolique.*

4.3.2 Stabilité de la notion

Proposition 4.3.3 *Soit (X, ω) une variété semi-hyperbolique. Si $Y \xrightarrow{f} X$ est un morphisme à fibre générique finie, où Y est kählerienne, $(Y, f^*\omega)$ est semi-hyperbolique.*

4.3.3 Taille du groupe fondamental

La méthode suivie dans ce chapitre est d'appliquer la formule de Stokes. Nous l'illustrons d'abord en explicitant dans notre cadre des résultats implicites dans [10].

Soit (X, ω) une variété semi-hyperbolique de dimension n, connexe. Notons le revêtement universel par $\pi : \tilde{X} \to X$.

Lemme 4.3.4 *Si v est une 2n-forme C^∞ sur X, elle est $\tilde{d}$-bornée, c'est à dire:*

$$\exists \beta \in C^\infty \cap L^\infty(\tilde{X}, \Lambda^{2n-1}_{\tilde{X}}), \quad tel\ que \quad d\beta = \pi^* v$$

Preuve :
Sur X on a $v = \omega^n + d\phi$, $\phi \in C^\infty(X, \Lambda_X^{2n-1})$. De plus ω^n est $\tilde{d}$-bornée.

Corollaire 4.3.5 *$\tilde{X}$ est ouverte à l'infini pour toute métrique riemanienne sur X [11], c'est à dire qu'elle est complète et nvérifie l'inégalité isoperimétrique suivante: $\exists C > 0$ tel que pour A un ouvert relativement compact à bord C^∞ dans $\tilde{X}$, on ait: $Vol(\partial A) \geq Vol(A)$*

Preuve :
Soit v une forme volume sur X et β une primitive bornée sur $\tilde{X}$, la formule de Stokes donne:

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A v = \int_\partial \beta \leq \sup_{\partial A} ||\beta|| \mathrm{Vol}(A)$$

Corollaire 4.3.6 *Soit $P \in \tilde{X}$ et $B_P(r)$ la boule riemannienne de $\tilde{X}$ de rayon $r.\exists K, K' > 0$, $Vol(B_P(r)) \geq Ke^{K'r}$.*

Corollaire 4.3.7 *$\pi_1(X)$ est de croissance exponentielle.*

Preuve :
Voir [11].

4.4 p-formes holomorphes L^2

Théorème 14 *Si (X, ω) est une variété semi-hyperbolique, il n'y a pas de p-forme holomorphe L^2 sur $\tilde{X}$ pour $p \neq dim_{\mathbb{C}}(X)$.*

Preuve :
Soit μ une forme kählerienne sur X. Par les identités formelles de Hodge, $\Delta_{\bar\partial} = \Delta_\partial$. Une intégration par parties montre alors que toute forme holomorphe L^2 sur $\tilde{X}$ est fermée. Soit α une primitive bornée de ω sur $\tilde{X}$. Soit ϕ une (p,0)-forme C^∞ et L^2 sur $\tilde{X}$ ainsi que $d\phi$. On a:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\tilde{X}} d(\phi \wedge \bar\phi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-p-1}) \\ &= \int_{\tilde{X}} \phi \wedge \bar\phi \wedge \omega^{n-p} + \int_{\tilde{X}} d\phi \wedge \bar\phi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-p-1} + \int_{\tilde{X}} \phi \wedge d\bar\phi \wedge \alpha \wedge \omega^{n-p-1} \end{aligned}$$

Pour une forme holomorphe cela donne:

$$\int_{\tilde{X}} \phi \wedge \bar\phi \wedge \omega^{n-p} = 0$$

Or $\sqrt{-1}^p(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \phi \wedge \bar\phi \wedge \omega^{n-p} \geq 0$ et > 0 sur $\{\omega > 0\} \cap \{\phi \neq 0\}$. D'où $\phi \equiv 0$.

Remarque 4.4.1 *L'estimation prouvée pour $\phi \in L^2$, tq $d\phi \in L^2$ se lit:*

$$\int_{\tilde{X}} \sqrt{-1}^p(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \phi \wedge \bar\phi \wedge \omega^{n-p} \leq K ||d\phi||_{L^2} ||\phi||_{L^2}$$

Remarque 4.4.2 *On ne peut pas obtenir un tel théorème d'annulation en bidegré (p,p), $p \geq 1$, pour des variétés semi-hyperboliques de dimension $\geq 2p+1$. Il suffit en effet d'éclater en un point un quotient arithmétique compact d'un domaine symétrique borné de dimension convenable pour fournir un contre exemple.*

Preuve :
Appelons X notre candidat à être un contre-exemple. En anticipant sur la suite de la présente thèse, remarquons que tout quotient compact d'un domaine symétrique borné est Kähler-hyperbolique. Par arithméticité, ces deux variétés possèdent une tour infinie de revêtements galoisiens $X_n \to X$ vérifiant la propriété que l'intersection des images dans $\pi_1(X)$ des $\pi_1(X_n)$ est l'élément neutre. Avec la suite spectrale de Leray, on voit que $h^{1,1}(X_n) = [\pi_1(X_n) : \pi_1(X)]$. Le lemme de Kazhdan fournit alors des formes harmoniques L^2 sur le revêtement universel.

4.5 Formes harmoniques à valeurs dans une VHSP

Théorème 15 *Si V est une VSHP sur (X,ω) semi-hyperbolique de dimension ≥ 2. Alors, pour toute métrique kählerienne sur X, $\tilde{X}$ ne possède aucune 1-forme harmonique L^2 à valeurs dans V.*

Preuve :
Par les identités de Deligne-Zucker ([25]), une 1-forme harmonique η', L^2, se décompose en composantes harmoniques L^2:

$$\eta \in C^\infty(H^{p,q} \otimes \Omega^{0,1} \oplus H^{p-1,q+1} \otimes \Omega^{1,0})$$

Soit Q la forme plate de polarisation de V. Considérons la (n,n)-forme suivante:

$$\lambda(\eta) = \sqrt{-1}^{p-q+1}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} Q(\eta \otimes \bar{\eta}) \wedge \omega^{n-1}$$

Fait : Si $\omega_x > 0$, $\eta_x \neq 0$, alors $\lambda(\eta)_x > 0$.
En effet si $(\frac{\partial}{\partial z_i})$ désigne une base unitaire de $T_x\tilde{X}$, η s'écrit:

$$\eta = \sum_i v^i_{pq} \otimes dz_i + \sum_j v^j_{p-1,q+1} \otimes d\bar{z}_j$$

$$\begin{aligned}
\lambda(\eta)_x &= \sqrt{-1}^{p-q+1}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sum_{ij}(-Q(v^i_{pq}, \bar{v}^j_{pq}) + Q(v^j_{p-1,q+1}, \bar{v}^i_{p-1,q+1}))dz_j \wedge d\bar{z}_i \wedge \omega^n \\
\lambda(\eta)_x &= \sqrt{-1}^{p-q+1}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} \sum_i(Q(v^i_{pq}, \bar{v}^i_{pq}) - Q(v^i_{p-1,q+1}, \bar{v}^j_{p-1,q+1}))\frac{2\omega^n}{n}
\end{aligned}$$

Grâce à l'alternance des signes dans notre formule, il vient bien que $\lambda(\eta)_x > 0$. Or:

$$\lambda(\eta) = d(Q(\eta \otimes \bar{\eta}) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-2}) - Q(d\eta \wedge \bar{\eta}) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-2} + Q(eta \wedge d\bar{\eta}) \wedge \alpha \wedge \omega^{n-2}$$

De là vient l'estimation:

$$\int_{\tilde{X}} \lambda(\eta) \leq K||\eta||_{L^2}||d\eta||_{L^2}$$

Or, $\delta = d + d^* : \oplus_{i\equiv 1[2]} V \otimes \Omega^i \to \oplus_{i\equiv 0[2]} V \otimes \Omega^i$ vérifie les hypothèses du lemme 4.2.3. et le laplacien sur les formes de dgré impair à valeurs dans V est $Delta = \partial^*\partial$. En particulier, toute forme harmonique L^2 à valeurs dans V est fermée.

De cette remarque et de l'estimation précédente, on tire que $\eta = 0$.

Par dualité, il est également vrai que toute $(2\dim_{\mathbb{C}} X - 1)$- forme harmonique L^2 sur $\tilde{X}$ est nulle.

Avec la même méthode, il est facile de prouver le théorème suivant, que nous n'utiliserons pas dans la suite de notre thèse.

Théorème 16 *Dans les hypothèses du théorème précédent, si le poids de V est w et le vecteur de Hodge est* $\mathbf{h} = (h^{w0}, ..., h^{0w})$, *il n'existe pas de p-forme harmonique sur* $\tilde{X}$ *à valeurs dans V de bidegré (p+w,0) pour* $p \neq dim_{\mathbb{C}}(X)$.

Preuve :

Les démonstrations des deux précédents théorèmes d'annulation s'adaptent sans difficulté. En ce bidegré, les formes harmoniques L^2 à valeurs dans V, sont en fait les sections holomorphes L^2 de $H^{w0} \otimes \Omega^p$. Soit ϕ une telle forme harmonique.

Soit Q la forme de polarisation de la VSHP et ω la forme semi-kählerienne de la structure semi-hyperbolique.

Nous avons encore:

$$\lambda(\phi) = \sqrt{-1}^{1+n+p}(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}} Q(\phi \otimes \bar{\phi}) \otimes \omega^{n-p} \geq 0$$

Et, par la même astuce d'intégration par parties, que dans le théorème 15:

$$\int_{\tilde{X}} \lambda(\phi) \leq C\|\phi\|\|d\phi\|$$

En particulier, la forme ϕ étant fermée, on a $\lambda(\phi) = 0$ puis $\phi = 0$.

4.6 Signification des théorèmes d'annulation L^2

Le sens d'un théorème d'annulation L^2 réside dans le fameux lemme de Kazhdan:

Proposition 4.6.1 *Soit X une variété riemannienne compacte connexe. Soit* $(\Gamma_i)_i$ *une suite décroissante de sous groupes distingués d'indice fini de* $\pi_1(X)$, $\Gamma = \bigcap_i \Gamma_i$ *et* $\tilde{X}_u \to X$ *le revêtement universel de X. Posons* $\tilde{X} = \Gamma\backslash\tilde{X}_u$, $X_i = \Gamma_i\backslash\tilde{X}_u$.

Soient E, F *deux fibrés vectoriels sur X et* $P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ *un opérateur différentiel elliptique. Sa version sur* X_i *est notée* P_i.

Si l'equation $P(u) = 0$ *n'a aucune solution non nulle dans* $L^2(\tilde{X}, E)$, *alors:*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\dim\ker(P_i)}{[\Gamma_i : \Gamma]} = 0$$

Preuve :(résumée)

Supposons au contraire que: $\limsup_{i\to\infty} \frac{\dim\ker(P_i)}{[\Gamma_i:\Gamma]} > 0$. Alors:

$$\exists C > 0,\ \forall n,\ \exists u_n \in \ker(P_n),\ \exists x_n \in X_n,\ \|u_n\|_{L^2} = 1 \ \&\ |u_n(x_n)| \geq C$$

Prenons un relèvement de u_n, $\tilde{u}_n$ à $\tilde{X}$ et $\tilde{x}_n$ un relèvement de x_n que l'on peut supposer dans un domaine fondamental compact. Soit (Ω_n) une suite d'ouverts relativement compacts, d'exhaustion sur $\tilde{X}$ avec $\Gamma_i\Omega_i \cap \Omega_i = \emptyset$. Il est clair que:

$$\forall m \geq n, \quad \|\tilde{u}_m\|_{L^2(\Omega_n)} \leq 1$$

Les estimations elliptiques standard impliquent que $\tilde{u}_n$ a une sous suite convergente en topologie $C^\infty(\tilde{X})$ vers $\tilde{u}$. Certainement, $P(\tilde{u}) = 0$ et $\|\tilde{u}\|_{L^2(\tilde{X})} \leq 1$.

Quitte à extraire, on suppose de plus $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$. La convergence C^∞ implique alors $|\tilde{u}(\tilde{x})| \geq C$ et $\tilde{u}$ est une solution L^2 non triviale de $P(u) = 0$. Contradiction.

En guise d'illustration, apportons une réponse partielle à une question de [15]. Nous verrons par là-même la pertinence du concept de semi-hyperbolicité pour l'étude des sous variétés des quotients de domaines symétriques bornés.

Théorème 17 *Soit $f : A \to M$ une famille de variétés abéliennes sans facteur constant sur la base M connexe et algébrique. On suppose que l'image de M sous l'application des périodes est de dimension ≥ 2 et compacte (il n'y a pas de fibres singulières) dans l'espace de modules des variétés abeliennes $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$*

Soit (M_n) une tour de revêtements galoisiens finis $M_n \to M$ et connexes dont la limite projective est le revêtement universel de M ou du moins domine $M \times_{\Gamma\backslash\mathcal{H}_n} \mathcal{H}_n$. On a, $\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n))$ désignant le groupe abélien de type fini des sections holomorphes (Groupe de Mordell-Weil):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{rg_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n))}{[\pi_1(M_n) : \pi_1(M)]} = 0$$

Preuve :

Supposons d'abord l'application des périodes équidimensionnelle. $\mathcal{H}_n$ étant un domaine symétrique borné, une remarque de [10] implique que M est semi-hyperbolique.

On a toujours (voir [15] [21]):

$$\frac{\mathrm{rg}_{\mathbb{Z}}\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n))}{[\pi_1(M_n) : \pi_1(M)]} \leq \frac{\dim_{\mathbb{C}} H^1(M_n, R^1 f_*\mathbb{C})^{1,1}}{[\pi_1(M_n) : \pi_1(M)]}$$

Si l'expression de gauche avait une limite supérieure non nulle, le lemme de Kazhdan fournirait sur $\tilde{M}$ une 1-forme harmonique à valeurs dans $R^1 f_*\mathbb{C}$. Contradiction.

Si l'application des périodes n'est pas equidimensionnelle, on se ramène au cas précédent par la remarque que le morphisme d'evaluation au point $m \in M_n$:

$$\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n)) \longrightarrow \mathcal{A}_m$$

est injectif pour presque tout m. En particulier il existe une surface S contenue dans M, telle que:

- L'application des périodes restreinte à S est equidimensionnelle.

- $\pi_1(S) \xrightarrow{i_*} \pi_1(M)$ surjectif.

– Les morphismes de restriction $\mathcal{A}(\mathbb{C}(M_n)) \to \mathcal{A}(\mathbb{C}(i_*^{-1}(\Gamma_i)\backslash\tilde{N}_u))$ sont injectifs.

Remarque 4.6.2 *La classe des situations couvertes par le théorème précédent n'est pas vide. En effet la codimension de la partie à l'infini dans la compactification algébrique de Satake de* $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ *[3] est n. Dès que* $n \geq 3$*, une intersection compléte générique de diviseurs amples fournit un exemple.*

Mais l'absence de fibres singuliéres est une hypothèse peu générique. Par exemple les surfaces elliptiques de Kodaira en présentent toujours.

Cependant, le formalisme de notre approche pourrait fonctionner. En effet, Mok a prouvé qu'a tout élement du groupe de Mordell-Weil correspond une 1-forme harmonique L^2 sur la partie sans fibre singulière de la base, par le même procédé que pour une base compacte [15].

Le point difficile d'une preuve selon notre approche serait de prouver une estimation de concentration pour les formes harmoniques du type suivant:

Conjecture 4.6.3 *Considérons* $M_n \xrightarrow{\pi_n} M$ *une suite croissante de revêtements galoisiens.* $\exists U$ *un ouvert de* M *tel que* $M - U$ *compact,* $\exists 1 > C > 0$ *tels que:*

$$\forall \eta \in H^1_{L^2}(M_n, R^1 f_* \mathbb{C})^{1,1}, \quad \int_{\pi_n^{-1}(U)} \|\eta\|^2 \leq C \int_{M_n} \|\eta\|^2$$

Je ne sais le prouver que dans le cas inutile ici d'une base de dimension 1. Cette conjecture me semble liée aux conjectures de Zucker maintenant démontrées. J'espère pouvoir revenir sur cette question dans un travail futur.

Chapitre 5

Inégalités d'Arakelov en dimension supérieure

5.1 Applications de périodes

Commençons par poser une définition.

Définition 5.1.1 *Soit $f : X \to Y$ une application holomorphe entre deux variétés complexes, X étant connexe. On dit que f est équidimensionnelle si et seulement si, il existe un point x de X où la différentielle de f est injective.*

En particulier, une application holomorphe propre est équidimensionnelle si et seulement si elle est génériquement finie sur son image, c'est à dire si et seulement si l'ensemble des points y de $f(X)$ où la fibre $f^{-1}(y)$ est un ensemble fini forment un ouvert dense dans $f(X)$.

Le fait suivant, que nous avons déjà rencontré, est essentiellement une remarque de Gromov [10]:

Proposition 5.1.2 *Soit X une variété kählerienne compacte munie d'une application equidimensionnelle vers un quotient de domaine symétrique borné, ou X portant une VSHP de poids 1 et de vecteur de Hodge $(h^{1,0}, h^{0,1})$ de classifiante equidimensionnelle, X est semi-hyperbolique. De plus, si l'application est immersive, la structure est en fait Kähler-hyperbolique.*

Ce fait se généralise comme suit:

Proposition 5.1.3 *Soit M une varieté kählerienne compacte portant une VSHP $V_{\mathbb{R}}$ de poids 2 et de vecteur de Hodge $(h^{2,0}, h^{1,1}, h^{0,2})$. Si l'application $F : \tilde{M}_u \to \mathcal{D}$ est équidimensionnelle, la métrique hermitienne dégénérée $F^* h_{\mathcal{D}}$ induit sur M une structure semi-hyperbolique. De plus, si F est immersive, la structure est en fait Kähler-hyperbolique.*

Preuve :
Soit o une origine de $\mathcal{D}$ fixée. Soit $\mathcal{B} = (s_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base unitaire de $H_o^{2,0}$. Sur $\mathcal{D}$, il existe une famille de sections plates $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq n}$, réelles, telle que $\sigma_i(o) = s_i + \bar{s}_i$. Par abus de notation, nous notons par le même symbole ces objets rappelés à $\tilde{M}_u$. Si $\psi \in V_{\mathbb{C}}$, ψ^{20} désigne la composante de ψ dans $H^{2,0}$.

Par platitude de la forme de polarisation Q:

$$\forall(i,j)\,\forall p \in \tilde{M}_u,\quad Q(\sigma_i,\sigma_j)_p = 2Q(s_i,s_j)$$

$$\forall(\alpha_i) \in \mathbf{C}^r, \forall p \in \tilde{X}_u \quad \|\sum_i \alpha_i\sigma_i^{20}\|_p^2 - \|\sum_i \alpha_i\sigma_i^{11}\|_p^2 = 2\|\sum_i \alpha_i s_i\|^2 \tag{5.1}$$

Posons $\phi(\mathcal{B}) = \sigma_1^{2,0} \wedge \ldots \wedge \sigma_n^{2,0}$. On a toujours par le point précédent $\phi(\mathcal{B}) \neq 0$. Si $\mathcal{B}'$ est une autre base unitaire de $H_o^{2,0}$, certainement $\phi(\mathcal{B}) = \phi(\mathcal{B}')$.

Des équations de platitude pour σ_i, on tire $d'\sigma_i = 0$ puis $d'\phi(\mathcal{B}) = 0$.

En particulier, on calcule de la forme de Chern de $H^{2,0}$ par:

$$c_1(H^{2,0}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|\phi(\mathcal{B})\|^2$$

On a déjà rencontré le fait (inessentiel ici) que la forme de Chern $c_1(H^{2,0})$ était (un multiple de) la (1,1) forme fermée ω induite par $h_{\mathcal{D}}$. Celà nous dit que si $\alpha_{\mathcal{B}} = 2\sqrt{-1}\bar{\partial}\log\|\phi(\mathcal{B})\|^2$, on a $d\alpha_{\mathcal{B}} = \omega$. Mais:

$$\alpha_{\mathcal{B}} = 2\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{(\nabla''\sigma_k^{11} \wedge \sigma_1^{20} \wedge \ldots \widehat{\sigma_k^{20}} \wedge \ldots \wedge \sigma_n^{20}, \sigma_1^{20} \wedge \ldots \wedge \sigma_n^{20})}{\|\phi(\mathcal{B})\|^2}$$

Soit $p \in \tilde{M}_u$. Les équations 5.1 impliquent que la matrice $H_{\mathcal{B}}(p) = ((\sigma_i^{20}, \sigma_j^{20}))_{ij}$ est hermitienne définie positive et même que $H_{\mathcal{B}}(p) \geq I_n$. On peut donc trouver $(x_i) \in \mathbb{R}_+^n$ et $U \in \mathrm{U}(n)$ tels que:

$$H_{\mathcal{B}}(p) = {}^t\bar{U}\mathrm{Diag}(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})U$$

La base $\mathcal{B}' = U\mathcal{B}$ verifie $\alpha_{\mathcal{B}} = \alpha_{\mathcal{B}'}$ et:

$$\forall v \in T_p\tilde{M}_u,\quad \alpha_{\mathcal{B}'}(v)_p = 2\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\nabla''\sigma_k^{11}(\mathcal{B}'), \sigma_k^{20}(\mathcal{B}'))}{(\sigma_k^{20}(\mathcal{B}'), \sigma_k^{20}(\mathcal{B}'))}$$

En particulier, $\|\alpha_p(v)\| \leq K\|v\|_\omega$ avec K indépendant de p. □

Remarque 5.1.4 *Avec ce que l'on a en main, il est facile de prouver avec les estimées L^2 d'Hörmander que $\tilde{M}_u$ est une variété de Stein quand l'application classifiante est immersive. Une question naturelle vient à l'esprit: Est-il vrai qu'elle soit convexe pour les fonctions holomorphes bornées comme les sous variétés de domaines symétriques bornés?*

Pour des vecteurs de Hodge de longueur supérieure, notre critère vaut encore.

Proposition 5.1.5 *Soit X une varieté kählerienne compacte portant une VSHP $V_{\mathbb{R}}$ de poids impair $w = 2m+1$. On suppose que l'application classifiante F est non dégénerée au sens suivant:*

$$\exists \tilde{x} \in \tilde{X}_u,\quad F_* : T_{\tilde{x}}\tilde{X} \to Hom(H^{m+1,m}, H^{m,m+1}) \text{ est injective.}$$

Alors la forme de Chern $c_1(\mathcal{F}_{m+1})$ induit sur X une structure semi-hyperbolique. La structure est Kähler- hyperbolique si la condition de non-dégenerescence vaut $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$.

Preuve :
Dans le même ordre d'idées fixons une origine o de $\mathcal{D}$ et une base unitaire de $(\mathcal{F}_{m+1})_o$, $(s_i)_{1\leq i\leq n}$. On peut prolonger par transport parallèle la base de $(V_{\mathbb{R}})_o$, $\sigma_i = s_i + \bar{s}_i$ à $\mathcal{D}$ tout entier. Si σ_i^m en désigne la projection sur $\mathcal{F}_{m+1}$, on a encore:

$$c_1(\mathcal{F}_{m+1}) = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|\sigma_1^m \wedge \ldots \wedge s_n^m\|^2$$

Maintenant, on lira dans [18] la formule:

$$\exists C > 0, \forall\xi \in T_h(\mathcal{D}),\ c_1(\mathcal{F}_{m+1})_{\xi\bar{\xi}} = C\|\xi\|^2_{\mathrm{Hom}(H^{m+1,m},H^{m,m+1})}$$

Comme précedemment, on vérifie que cette forme est $\tilde{d}$-bornée.

La différence avec la preuve précedente est que le potentiel construit n'est pas exhaustif car , par exemple, les valeurs propres de la matrice de Gram ne sont pas $\geq K > 0$.

Théorème 18 *Soit M une varieté kählerienne compacte portant une VSHP rélle $V_{\mathbb{R}}$. Si l'application $F : \tilde{M}_u \to \mathcal{D}$ est équidimensionnelle, il existe sur M une structure semi-hyperbolique. De plus, si F est immersive, la structure est en fait Kähler-hyperbolique.*

Preuve :
On se ramène à la proposition précedente en tensorisant par une structure de Hodge fixe de poids bien choisi.

Définition 5.1.6 *Une VSHP réelle sur une variété algèbrique M est dite non-dégénérée si et seulement si l'application classifiante est equidimensionnelle sur l'image réciproque dans $\tilde{M}_u$ de toute sous-variété algèbrique de M. Celà équivaut au fait que la restriction de la VHSP à toute courbe contenue dans M n'est pas triviale. Celà équivaut aussi si l'application classifiante est propre au fait que cette application de périodes est finie.*

Proposition 5.1.7 *Si une variété algébrique M porte une VSHP réelle non-dégenérée, elle porte une structure Kähler-hyperbolique.*

Preuve :

Par construction la forme semi-kählerienne ω de la structure semi-hyperbolique est la première classe de Chern d'un fibré linéaire holomorphe L, image réciproque par l'application classifiante d'un fibré linéaire L_u sur le domaine de Griffiths.

Si ce fibré était ample, il posséderait une métrique hermitienne dont la première forme de Chern ω' serait strictement positive. Or, il existerait une fonction C^∞ sur M telle que $\omega' = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$. Si a est une primitive L^∞ de ω sur le revêtement universel $\tilde{M}$ de M, on a sur $\tilde{M}$, $\omega' = d(a + \bar{\partial}\phi)$ et la forme $a + \bar{\partial}\phi$ est bornée car $\bar{\partial}\phi$ est le pull-back de la forme homonyme sur M.

Reste à montrer que L est ample. Nous employons le critère de Nakai-Moishezon. Soit $\phi : X \to M$ un morphisme equidimensionnel de la variété X, de dimension d, vers M. On a certainement $\phi^*L^d.X = \int_X(\phi^*\omega)^d \geq 0$.

La non-dégénerescence de l'application classifiante f de M permet d'affirmer que l'application classifante $f \circ \phi$ de X est équidimensionnelle. En particulier, il existe un point où $d(f \circ \phi)$ est injective. En ce point de X la forme de Chern de $\phi^* L = \phi^* f^* L_u$, calculée à l'aide des métriques de Hodge, est définie positive. Elle est semi positive partout. En particulier $\phi^* L^r.X > 0$. Donc L est ample.

5.2 Inégalités d'Arakelov

5.2.1 Les Inégalités

Nous exploitons les théorèmes d'annulation L^2 du Chapitre 4, avec comme nouvel ingrédient le théorème d'indice L^2 d'Atiyah-Von Neumann [2]. Nous nous servons d'ailleurs uniquement de son aspect formel et on pourrait éviter d'y faire allusion, en ne travaillant qu'avec des représentations de monodromie arithmétiques en utilisant le lemme de Kazhdan.

Nous allons obtenir des inégalités en terme des classes caractéristiques de la base de la VSHP et des classes caractéristiques des fibrés de Hodge que nous avons appelées Inégalités d'Arakelov en raison de leur similarité avec les inégalités d'Arakelov sur les courbes.

Si (V, h) est un fibré vectoriel hermitien nous écrivons $ch_2(V, h)$ pour la 4-forme correspondant à la partie de degré 4 du caractère de Chern.

Théorème 19 *Soit S une surface algébrique lisse et V une VSHP de poids w sur S d'application classifiante equidimensionnelle.*

1. *Si $w = 1$, et si le vecteur de Hodge est $(h^{1,0}, h^{0,1})$, $h^{1,0} \geq 2$, on dispose des inégalités suivantes:*

   - $A_1^2(h^{1,0}, h^{0,1})_{3,0}$:

   $$[-\frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{1,0}) + \frac{h^{1,0}}{12}(c_1^2(S) + c_2(S))].[S] \geq 0$$

   - $A_1^2(h^{1,0}, h^{0,1})_{2,1}$:

   $$[\frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{1,0}) + \frac{h^{1,0}}{12}(-c_1^2(S) + 11c_2(S))].[S] \geq 0$$

2. *Si $w = 2$, et si le vecteur de Hodge est $(h^{2,0}, h^{1,1}, h^{0,2})$, on dispose des inégalités suivantes:*

   - $A_2^2(h^{2,0}, h^{1,1}, h^{0,2})_{4,0}$:

   $$[\frac{h^{2,0}}{12}(c_1^2(S) + c_2(S)) - \frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{2,0}) + ch_2(H^{2,0})].[S] \geq 0$$

- $A_2^2(h^{2,0},h^{1,1},h^{0,2})_{3,1}$:

$$[h^{2,0}c_2(S)+\frac{h^{1,1}-2h^{2,0}}{12}(c_1^2(S)+c_2(S))-4ch_2(H^{2,0})].[S]\geq 0$$

- $A_2^2(h^{2,0},h^{1,1},h^{0,2})_{2,2}$:

$$[\frac{h^{2,0}-h^{1,1}}{6}(c_1^2(S)+c_2(S))+h^{1,1}c_2(S)+c_1(S)c_1(H^{2,0})+6ch_2(H^{2,0})].[S]\geq 0$$

3. *Si w est quelconque et si le vecteur de Hodge est $\mathbf{h}=(h^{w0},\ldots,h^{0w})$, on dispose des inégalités pour $P\in\mathbf{N}$:*
   $A_w^2(\mathbf{h})_{P,w-P+2}$:

$$[(ch(H^{P,w-P})-ch(H^{P-1,w-P+1}\otimes\Omega^1)+ch(H^{P-2,w-P+2}\otimes\Omega^2)).Todd(T_S)].[S]\geq 0$$

Preuve;
Considérons l'opérateur elliptique sur S, δ_P, $P\in\mathbf{N}$:

$$\delta_P:\bigoplus_{P+Q\equiv 0[2]}C^\infty(S,\mathcal{E}^{PQ})\overset{D"+D"^*}{\longrightarrow}\bigoplus_{P+Q\equiv 1[2]}C^\infty(S,\mathcal{E}^{PQ})$$

Nous considérons aussi sa version sur $\tilde{S}_u$, notée $\tilde{\delta}_P$. On a:

$$\begin{aligned}\ker(\tilde{\delta}_P) &= \bigoplus_{P+Q=0[2]}\ker\Delta_{D"}|_{L^2(\tilde{S},\mathcal{E}^{P,Q})}\\ \operatorname{coker}(\tilde{\delta}_P) &= \bigoplus_{P+Q=[2]}\ker\Delta_{D"}|_{L^2(\tilde{S},\mathcal{E}^{P,Q})}\end{aligned}$$

Le théorème d'indice d'Atiyah mesure les $\pi_1(S)$-modules hilbertiens $\ker\Delta_{D"}$ par un nombre réel fini, leur dimension de Von Neumann notée $\dim_{\pi_1(S)}$, et compare des indices de Von Neumann à des indices d'opérateurs elliptiques sur la base compacte S. On a ici:

$$\dim_{\pi_1(S)}(\ker(\tilde{\delta}_P))-\dim_{\pi_1(S)}(\operatorname{coker}(\tilde{\delta}_P))=\dim_{\mathbf{C}}(\ker(\delta_P))-\dim_{\mathbf{C}}(\operatorname{Coker}(\delta_P))$$

Notre théorème d'annulation (Théorème 15) implique que:

$$\ker\Delta_{D"}|_{L^2(\tilde{S},\mathcal{E}^{P,Q})},\quad si\quad P+Q\neq w+2$$

De là:

$$(-1)^w\dim_{\mathbf{C}}(\ker(\delta_P))-\dim_{\mathbf{C}}(\operatorname{Coker}(\delta_P))\geq 0$$

Ce dernier indice est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe elliptique sur S, $(C^\infty(S,\mathcal{E}^{P\bullet}),D")$. La différentielle $D"$ vaut $D"=d"+\nabla'$. Or, $(C^\infty(S,\mathcal{E}^{P\bullet}),d")$ est une somme de complexes de Dolbeault convenablement décalés et ∇' est un opérateur d'ordre 0 (cf Chap. 2 de la présente thèse). Par conséquent la stabilité de l'indice d'un opérateur elliptique sur une variété pour des perturbations d'ordre inférieur implique :

$$\chi((\mathcal{E}^{P,\bullet}, D'')) = \chi((\mathcal{E}^{P,\bullet}, d''))$$

Cette dernière caractéristique d'Euler Poincaré se calcule par la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch, ce qui fournit l'inégalité:

$A^2_w(\mathrm{h})_{P,w+2-P}$:

$$[(ch(H^{P,w-P}) - ch(H^{P-1,w-P+1} \otimes \Omega^1_S) + ch(H^{P-2,w-P+2} \otimes \Omega^2_S))Todd(T_S)].[S] \geq 0$$

Application numérique

$$\begin{aligned}
Todd(T_S) &= 1 + \frac{1}{2}c_1(S) + \frac{1}{12}(c_1^2(S) + c_2(S)) \\
ch(\Omega^1_S) &= 2 - c_1(S) + \frac{1}{2}(c_1^2(S) - 2c_2(S)) \\
ch(\Omega^2_S) &= 1 - c_1(S) + \frac{1}{2}c_1^2(S)
\end{aligned}$$

Inégalité $A_1^2(h^{1,0}, h^{0,1})_{3,0}$

On a $ch_2(H^{1,0}) = 0$.

$$\begin{aligned}
ch(H^{1,0} \otimes \Omega^2) &= (h^{1,0} + c_1(H^{1,0}))(1 - c_1(S) + \frac{1}{2}c_1^2(S)) \\
&= h^{1,0} + c_1(H^{1,0}) - h^{1,0}c_1(S) - c_1(S)c_1(H^{1,0}) \\
&\quad + \frac{h^{1,0}}{2}c_1^2(S) \\
ch(H^{1,0} \otimes \Omega^2).Todd(T_S).[S] &= [-\frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{1,0}) + \frac{h^{1,0}}{12}(c_1^2(S) + c_2(S))].[S]
\end{aligned}$$

Inégalité $A_1^2(h^{1,0}, h^{0,1})_{2,1}$

$$\begin{aligned}
ch(H^{1,0} \otimes \Omega^1) &= (h^{1,0} + c_1(H^{1,0}))(2 - c_1(S) \\
&\quad + \frac{1}{2}(c_1^2(S) - 2c_2(S))) \\
&= 2h^{1,0} + 2c_1(H^{1,0}) - h^{1,0}c_1(S) \\
&\quad + \frac{h^{1,0}}{2}(c_1^2(S) - 2c_2(S)) - c_1(S)c_1(H^{1,0}) \\
ch(H^{0,1} \otimes \Omega^2) &= (h^{1,0} - c_1(H^{1,0}))(1 - c_1(S) + \frac{1}{2}c_1^2(S)) \\
&= h^{1,0} - (c_1(H^{1,0}) + h^{1,0}c_1(S)) \\
&\quad + c_1(S)c_1(H^{1,0}) + \frac{h^{1,0}}{2}c_1^2(S) \\
ch(H^{0,1} \otimes \Omega^2) - ch(H^{1,0} \otimes \Omega^1) &= -h^{1,0} - 3c_1(H^{1,0}) + 2c_1(S)c_1(H^{1,0}) \\
&\quad + h^{1,0}c_2(S)
\end{aligned}$$

Puis:

$$(ch(H^{0,1}\otimes\Omega^2)-ch(H^{1,0}\otimes\Omega^1))Todd(T_S) = [\frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{1,0})+\frac{h^{1,0}}{12}(-c_1^2(S)+11c_2(S))].[S]$$

Inégalité $A_2^2(h^{2,0},h^{1,1},h^{0,2})_{4,0}$

Posons $ch(H^{2,0}) = h^{2,0} + c_1(H^{2,0}) + ch_2(H^{2,0})$.
Par dualité $ch(H^{0,2}) = h^{2,0} - c_1(H^{2,0}) + ch_2(H^{2,0})$.
De plus $ch(H^{2,0}) + ch(H^{1,1}) + ch(H^{0,2}) + h^{2,0} = h^{1,1} + h^{0,2}$.
Donc $ch(H^{1,1}) = h^{1,1} - 2ch_2(H^{2,0})$.

$$\begin{aligned}
ch(H^{2,0}\otimes\Omega^2) &= (h^{2,0}+c_1(H^{2,0})+ch_2(H^{2,0}))(1-c_1(S)+\frac{1}{2}c_1^2(S))\\
&= h^{1,0}+c_1(H^{2,0})-h^{2,0}c_1(S)+ch_2(H^{2,0})\\
&\quad -c_1(S)c_1(H^{2,0})+\frac{h^{2,0}}{2}c_1^2(S)
\end{aligned}$$

$$ch(H^{2,0}\otimes\Omega^2).Todd(T_S).[S] = ch_2(H^{2,0}) - \frac{1}{2}c_1(S)c_1(H^{2,0}) + \frac{h^{2,0}}{12}(c_1^2(S)+c_2(S))$$

Inégalité $A_2^2(h^{2,0},h^{1,1},h^{0,2})_{3,1}$

$$\begin{aligned}
ch(H^{1,1}\otimes\Omega^2) &= (h^{1,1}-2ch_2(H^{2,0}))(1-c_1(S)+\frac{1}{2}c_1^2(S))\\
&= h^{1,1}-h^{1,1}c_1(S)+\frac{h^{1,1}}{2}c_1^2(S)-2ch_2(H^{2,0})\\
ch(H^{2,0}\otimes\Omega^1) &= 2h^{2,0}+2c_1(H^{2,0})-h^{2,0}c_1(S)+\\
&\quad \frac{h^{2,0}}{2}(c_1^2(S)-2c_2(S))-c_1(S)c_1(H^{2,0})\\
&\quad +2ch_2(H^{2,0})\\
ch(H^{1,1}\otimes\Omega^2)-ch(H^{2,0}\otimes\Omega^1) &= h^{1,1}-2h^{2,0}\\
&\quad +(h^{2,0}-h^{1,1})c_1(S)-2c_1(H^{2,0})\\
&\quad -4ch_2(H^{2,0})+c_1(S)c_1(H^{2,0})\\
&\quad -\frac{h^{2,0}}{2}(c_1^2(S)-2c_2(S))+\frac{h^{1,1}}{2}c_1^2(S)\\
(ch(H^{1,1}\otimes\Omega^2)-ch(H^{2,0}\otimes\Omega^1))Todd(T_S).[S] &= [h^{2,0}c_2(S)+\frac{h^{1,1}-2h^{2,0}}{12}(c_1^2(S)+c_2(S))\\
&\quad -4ch_2(H^{2,0})].[S]
\end{aligned}$$

Inégalité $A_2^2(h^{2,0},h^{1,1},h^{0,2})_{2,2}$

$$\begin{aligned}
ch(H^{1,1}\otimes\Omega^1) &= (h^{1,1}-2ch_2(H^{2,0}))(2-c_1(S)\\
&\quad +\frac{1}{2}(c_1^2(S)-2c_2(S)))\\
&= 2h^{1,1}-h^{1,1}c_1(S)-4ch_2(H^{2,0})\\
&\quad +\frac{h^{1,1}}{2}(c_1^2(S)-2c_2(S))\\
ch(H^{0,2}\otimes\Omega^2) &= (h^{2,0}-c_1(H^{2,0})+ch_2(H^{2,0}))(1-c_1(S)\\
&\quad +\frac{1}{2}c_1^2(S))\\
&= h^{2,0}-c_1(H^{2,0})-h^{2,0}c_1(S)+ch_2(H^{2,0})\\
&\quad +c_1(S)c_1(H^{2,0})+\frac{h^{2,0}}{2}c_1^2(S)\\
ch(H^{2,0})-ch(H^{1,1}\otimes\Omega^1) &\\
+ch(H^{0,2}\otimes\Omega^2) &= 2(h^{2,0}-h^{1,1})+(h^{1,1}-h^{2,0})c_1(S)\\
&\quad +6ch_2(H^{2,0})+c_1(S)c_1(H^{2,0})+\\
&\quad \frac{h^{2,0}-h^{1,1}}{2}c_1^2(S)+h^{1,1}c_2(S)\\
(ch(H^{2,0})-ch(H^{1,1}\otimes\Omega^1) &\\
+ch(H^{0,2}\otimes\Omega^2))ToddT_S.[S] &= [\frac{h^{2,0}-h^{1,1}}{6}(c_1^2(S)+c_2(S))+h^{1,1}c_2(S)\\
&\quad +c_1(S)c_1(H^{2,0})+6ch_2(H^{2,0})].[S]
\end{aligned}$$

Théorème 20 *Soit $n\geq 3$ et M une variété kählerienne lisse de dimension n. Soit V une VSHP* non dégenérée *de poids w et de vecteur de Hodge* $\mathrm{h}=(h^{w0},\ldots,h^{0w})$. *On dispose de l'inégalité suivante:*

$A_w^n(\mathbf{h})_{p+w,n-p}$:

$$(-1)^{n-p}(\sum_{i=0}^{w}(-1)^i ch(H^{w-i,i}\otimes\Omega_M^{p+i})).Todd(T_M).[M]\geq 0$$

Preuve :
Nous avons vu à la proposition 5.1.7 que M est Kähler-hyperbolique au sens de Gromov. Le théorème 13 permet de voir qu'il n'y a pas de forme harmonique L^2 non nulle sur le revêtement universel $\tilde{M}$ à valeurs dans V en degrés différents de $dim_{\mathbb{C}}(X)$.

L'argument qui prouve le théorème précédent peut alors être recopié verbatim. Explicitons l'argument:

Considérons l'opérateur elliptique sur S, δ_P, $P\in$ N:

$$\delta_P:\bigoplus_{P+Q\equiv 0[2]}C^\infty(M,\mathcal{E}^{PQ})\overset{D''+D''^*}{\longrightarrow}\bigoplus_{P+Q\equiv 1[2]}C^\infty(M,\mathcal{E}^{PQ})$$

Nous considérons aussi sa version sur $\tilde{M}_u$, notée $\tilde{\delta}_P$. On a:

$$\begin{aligned}\ker(\tilde{\delta}_P) &= \bigoplus_{P+Q=0[2]} \ker \Delta_{D''}|_{L^2(\tilde{M},\mathcal{E}^{P,Q})} \\ \mathrm{coker}(\tilde{\delta}_P) &= \bigoplus_{P+Q=[2]} \ker \Delta_{D''}|_{L^2(\tilde{M},\mathcal{E}^{P,Q})}\end{aligned}$$

Le théorème d'indice d'Atiyah-Von Neumann fournit ici:

$$\dim_{\pi_1(S)}(\ker(\tilde{\delta}_P)) - \dim_{\pi_1(S)}(\mathrm{coker}(\tilde{\delta}_P)) = \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\delta_P)) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Coker}(\delta_P))$$

Comme nous l'avons expliqué au début de cette preuve, il n'y a pas de forme harmonique non nulle L^2 sur le revêtement universel $\tilde{M}$ à valeurs dans V en degrés différents de $dim_{\mathbb{C}}(X)$. Le noyau et le conoyau de δ_P sur les formes L^2 sur $\tilde{M}$ se calcule précisèment par les formes harmoniques L^2. Donc, suivant la parité de la dimension et du poids, l'un des deux espaces de formes harmoniques L^2 $\ker(\tilde{\delta}_P)$ et $\mathrm{coker}(\tilde{\delta}_P)$ est nul et l'indice de Von Neumann que nous calculons a un signe qui ne dépend que de la parité de la dimension et du poids. Il en va bien sûr de même pour l'indice (ordinaire) de $\delta_P$sur M. Explicitement, nous avons l'inégalité:

$$(-1)^{w+n} \dim_{\mathbb{C}}(\ker(\delta_P)) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Coker}(\delta_P)) \geq 0$$

Ce dernier indice est la caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe elliptique sur M, $(\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{E}^{P\bullet}), D")$. La différentielle $D"$ vaut $D" = d" + \nabla'$. Or, $(\mathcal{C}^\infty(M,\mathcal{E}^{P\bullet}), d")$ est une somme de complexes de Dolbeault convenablement décalés et ∇' est un opérateur d'ordre 0 (cf Chap. 2 de la présente thèse). Par conséquent la stabilité de l'indice d'un opérateur elliptique sur une variété pour des perturbations d'ordre inférieur implique :

$$\chi((\mathcal{E}^{P,\bullet}, D")) = \chi((\mathcal{E}^{P,\bullet}, d"))$$

Cette dernière caractéristique d'Euler Poincaré se calcule par la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch, ce qui fournit l'inégalité:
$A^n_w(\mathrm{h})_{p+w,n-p}$:

$$(-1)^{n-p}\left(\sum_{i=0}^{w}(-1)^i ch(H^{w-i,i} \otimes \Omega_M^{p+i})\right).Todd(T_M).[M] \geq 0$$

Remarque 5.2.1 *On ne peut pas obtenir un théorème d'annulation L^2 sur des variétés semi-hyperboliques de dimension $d \geq 3$ pour des formes de degré 2. Il suffit en effet d'éclater en un point un produit de n courbes de genre 2 muni de la VSHP* $\mathbf{V} = \sum_{1\leq i\leq d} S(p)_i$ *pour fournir un contre exemple. Voilà pourquoi nous demandons que la VSHP considérée soit non dégénérée et non l'hypothèse plus faible que la classifiante soit équidimensionnelle.*

Preuve :
Appelons X notre candidat à être un contre-exemple. Le produit Y de n courbes est certainement *Khler − hyperbolique*. Ces deux variétés possèdent une tour infinie de revêtements galoisiens $X_n \to X$ vérifiant la propriété que l'intersection des images dans $\pi_1(X)$ des $\pi_1(X_n)$ est l'élément neutre. Avec la suite spectrale de Leray, on voit que

$h^2(X_n, \mathbf{V})d(p+1)[\pi_1(X_n) : \pi_1(X)] + h^2(Y_n, \mathbf{V})$, car X_n est l'éclatée de Y_n en $[\pi_1(X_n) : \pi_1(X)]$ points. Le lemme de Kazhdan fournit alors des 2-formes harmoniques L^2 sur le revêtement universel.

Remarque 5.2.2 *En dimension impaire, si on éclate notre produit de courbes en un nombre suffisant de points, on obtiendra des contre-exemples à la généralisation au cas équidimensionnel de nos inégalités d'Arakelov.*

5.2.2 Quelques cas d'égalité

Le fait qu'il y ait des cas d'égalité est en fait la principale différence avec [10].

Les cas d'égalité que nous présentons ici correspondent à des VSHP localement homogènes sur des quotients compacts de domaines symétriques bornés.

Nous ne prétendrons pas avoir recensé ici tous les cas possibles avec des VSHP localement homogènes. Cette recension doit se réduire à un problème formulé en termes de systèmes de racines dans la théorie des algèbres de Lie semi-simples.

Formulons d'abord un critère simple pour engendrer des cas d'égalité.

Proposition 5.2.3 *Soit $n \geq 2$ et M une variété kählerienne lisse de dimension n. Soit V une VSHP de poids w et de vecteur de Hodge $\mathrm{h} = (h^{w0}, \dots, h^{0w})$ d'application classifiante immersive ou equidimensionnelle si $n = 2$.*

Si le complexe de faisceaux sur M $\mathcal{K}^\cdot$:

$$\mathcal{K}^\cdot : \ H^{w,0} \otimes \Omega^p \xrightarrow{\nabla'} H^{w-1,0} \otimes \Omega^{p-1} \xrightarrow{\nabla'} \dots \xrightarrow{\nabla'} H^{0,w} \otimes \Omega^{p-w}$$

est acyclique, M est un cas d'égalité de l'inégalité $A^n_w(\mathrm{h})_{p+w,n-p}$.

Preuve :
En effet, le caractère de Chern de ce complexe est la somme alternée qui apparait dans notre inégalité et vaut le caractère de Chern de la somme alternée des faisceaux de cohomologie de $\mathcal{K}^\cdot$ qui est bien sûr nulle si le complexe est acyclique.

Remarque 5.2.4 *La suite spectrale d'hypercohmologie de $\mathcal{K}^\cdot$ converge toujours vers la cohomolgie de $\mathcal{E}^{p+w,*}$ [21] [9]. Dans les conditions de la proposition, le terme E_1 est déjà nul. D'où la nullité de l'indice calculé. Le même argument donne d'ailleurs que les groupes de cohomologie de $\mathcal{E}^{p+w,*}$ sur M sont nuls.*

Rappelons que si Ω est un domaine symétrique borné, son groupe d'automorphismes G a une représentation réelle, sa représentation adjointe $G \to Aut(\mathfrak{g})$ qui donne lieu à un VSHP réelle de poids 2, homogène, que l'on notera $(\Omega, \mathbf{V}_{ad})$.

Sur Δ, les seules VSHP homogènes irréductibles sont, à un décalage de numérotation des vecteurs de Hodge près, les S(n), $n \in$ N, comme nous l'avons déjà vu. Il est par consèquent clair que les seules VSHP homogènes irréductibles sur Δ^n sont, à un décalage de numérotation des vecteurs de Hodge près, les $(\Delta_1 \times \dots \times \Delta_n, S(p_1)_1 \otimes \dots \otimes S(p_n)_n)$ où $p_i \in$ N et $S(n)_p$ désigne l'image réciproque par la p-ième projection de $S(n)$.

Théorème 21 *Les inégalités $A^n_w(\mathrm{h})_{PQ}$ citées ci dessous sont optimales .*

Base $\mathcal{H}_n$, Poids 1 :
Si $n \equiv 1,2[4]$ et $\frac{n(n+1)}{2} = 2q+1$, la VSHP homogène $(\mathcal{H}_n, \mathbf{V}_n \otimes \mathbf{R}^p)$ descend à tout quotient compact de $\mathcal{H}_n$ et donne lieu à un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov $A_1^{\frac{n(n+1)}{2}}(pn,pn)_{q+1,q+1}$.

Base B^2 ouΔ^2, Poids 2 :
La VSHP $(B^2, \mathbf{V}_{ad} \otimes \mathbf{R}^d)$ descend à tout quotient compact de B^2 et la VSHP $(\Delta_1 \times \Delta_2, S(1)_1 \otimes S(1)_2 \otimes \mathbf{R}^p)$ descendent à tout quotient compact de B^2 et Δ^2 et donnent lieu à des cas d'égalité des inégalités d'Arakelov $A_2^2(2d,4d,2d)_{3,1}$ et $A_2^2(p,2p,p)_{3,1}$ respectivement, ces deux inégalités étant les mêmes pour $p = 2d$.

Base B^n, Poids 2 :
La VSHP $(B^n, \mathbf{V}_{ad} \otimes \mathbf{R}^d)$ descend à tout quotient compact de B^n et donne lieu à des cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov $A_2^n(nd, n^2d, nd)_{n+1,1}$.

Base Δ^2 :
La VSHP $(\Delta_1 \times \Delta_2, S(2)^p \oplus S(2)^q)$, $p > 1, q > 1, p+q = d$ descend à tout quotient compact de Δ^2 et donne lieu à des cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov $A_2^2(d,d,d)_{2,2}$. Si $w \geq 2$, les VSHP $(\Delta_1 \times \Delta_2, S(w)^p \oplus S(w)^q)$, $p > 1, q > 1, p+q = d$ descendent à tout quotient compact de Δ^2, ont pour vecteur de Hodge $\mathbf{h} = (d,\ldots,d)$ de longueur d+1 et donnent lieu à des cas d'égalité des inégalitś d'Arakelov $A_w^2(\mathbf{h})_{P,Q}$ pour $2 \leq Q \leq w-1, P+Q = w+2$.
Si $p+q \geq 2$, les VSHP $(\Delta_1 \times \Delta_2, S(p)_1 \otimes S(q)_2 \otimes \mathbf{R}^d)$, descendent à tout quotient compact de Δ^2, ont pour vecteur de Hodge $\mathbf{h}$ et donnent lieu à des cas d'égalité des inégalitś d'Arakelov $A_{p+q}^2(\mathbf{h})_{P,Q}$ pour $(P,Q) \geq 0, P+Q = p+q+2, (P,Q) \neq (p+q+2,0),(p+1,q+1),(q+1,p+1),(0,p+q+2)$.

Base Δ^n, $n \geq 3$:
La VHSP $(\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n, \sum_{\sigma \in S_n} S(p_1)_{\sigma(1)}^{d_{\sigma,1}} \otimes \ldots \otimes S(p_n)_{\sigma(n)}^{d_{\sigma,n}})$ si $\forall i \ \sum_\sigma d_{\sigma,\sigma^{-1}(i)} > 0$ donne lieu à des cas d'égalité des inégalités d'Arakelov $A_w^n(\mathbf{h})_{P,Q}$ pour les couples (P,Q) tels que:

$$\not\exists(\epsilon_j) \in \{1,0\}, \quad P = \sum_j \epsilon_j(p_j+1)$$

Si deux VSHP homogènes sur Δ^n, $\mathbf{V}, \mathbf{V}'$ donnent lieu à des cas d'égalité de $A_w^n(\mathbf{h})_{PQ}$ et $A_w^n(\mathbf{h}')_{PQ}$, leur somme directe est un cas d'égalité de $A_w^n(\mathbf{h}+\mathbf{h}')_{PQ}$.

Preuve :
Cas de B^n:
Si Ω désigne un domaine symétrique borné et o est une origine fixée de Ω, on peut écrire la décomposition de Cartan induite par o sur l'algèbre de Lie de G $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$. La complexifiée de $\mathfrak{g}$ se décompose comme suit: $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{p}^- \oplus \mathfrak{l}_{\mathbf{C}} \oplus \mathfrak{p}^+$. La VSHP $\mathbf{V}_{ad}$ peut alors se décrire comme suit:

- Le fibré holomorphe $H^{2,0}$ est induit par la représentation du groupe d'isotropie de o sur $\mathfrak{p}^-$. De sorte que $H^{2,0} \simeq T^*(\Omega)$.

- Le fibré holomorphe $H^{1,1}$ est induit par la représentation du groupe d'isotropie de o sur $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

- Le fibré holomorphe $H^{0,2}$ est induit par la représentation du groupe d'isotropie de o sur $\mathfrak{p}^+$. De sorte que $H^{0,2} \simeq T(\Omega)$.

- La connexion de Gauss-Manin est induite par le morphisme équivariant suivant:

$$\nabla'_o \left(\begin{array}{ccc} \mathfrak{p}^- & \rightarrow & \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \otimes (\mathfrak{p}^+)^* \simeq Hom(\mathfrak{p}^+, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}) \\ p^- & \mapsto & (p^+ \mapsto [p^+; p^-]) \end{array} \right)$$

Dans le cas qui nous occupe, on peut trouver un plongement $\mathfrak{su}(n,1)_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$ de sorte que l'on a la description explicite suivante:

$$\mathfrak{p}^- = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 & \dots & \zeta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (\zeta_i \in \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{p}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (\eta_i \in \mathbb{C})$$

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -tr(L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & L & \end{pmatrix} (L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

Soit $\eta \in (H^{2,0} \otimes \Omega^{n-1})_o = \mathfrak{p}^- \otimes \Lambda^{n-1}(\mathfrak{p}^+)^*$. Alors, si $(d\zeta_i)$ désigne la base de $(p^+)^*$ duale de celle décrite ci dessus:

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta_1 & \dots & \eta_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} (\eta_i \in \Lambda^{n-1}(\mathfrak{p}^+)^*)$$

$$\nabla'\eta = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & (d\zeta_j \wedge \eta_i)_{1 \le i,j \le n} & \end{pmatrix}$$

Donc $\nabla'\eta = 0$ implique :$\forall i, j \;\; d\zeta_j \wedge \eta_i = 0$, puis $\eta = 0$. Les dimensions étant égales la connexion de Gauss-Manin établit un isomorphisme entre $H^{2,0} \otimes \Omega^{n-1}$ et $H^{1,1} \otimes \Omega^n$.□

Cas de $\mathcal{H}_n$:

Nous nous contenterons de le prouver pour n=2. La base standard de $T\mathcal{H}_2$ peut s'écrire comme $(\frac{\partial}{\partial \tau_{11}}, \frac{\partial}{\partial \tau_{22}}, \frac{\partial}{\partial \tau_{12}})$ et la base standard de $H^{1,0}$ comme (e_1, e_2, e_3). Si nous désignons par S_{ij} l'application linéaire de $H^{1,0}$ dans $H^{0,1}$ donné par $S_{ij} e_k = \frac{1}{2}(\delta_{jk}\bar{e}_i + \delta_{ik}\bar{e}_j)$, la connexion de Gauss-Manin est calculée par la formule:

$$\nabla'(e) = \sqrt{-1}(S_{11} e \otimes d\tau_{11} + S_{12} e \otimes d\tau_{12} + S_{22} e \otimes d\tau_{22})$$

Nous allons prouver que $\nabla' : H^{1,0} \otimes \Omega^1 \to H^{0,1} \otimes \Omega^2$ est un isomorphisme.
Soit $\eta \in H^{1,0} \otimes \Omega^1$. On peut écrire:

$$\eta = (e_{11} \otimes d\tau_{11} + e_{12} \otimes d\tau_{12} + e_{22} \otimes d\tau_{22})$$

De sorte que:

$$\nabla'\eta = (S_{11}e_{22} - S_{22}e_{11})d\tau_{11} \wedge d\tau_{22} + (S_{11}e_{12} - S_{12}e_{11})d\tau_{11} \wedge d\tau_{12} + (S_{22}e_{12} - S_{12}e_{22})d\tau_{22} \wedge d\tau_{12}$$

Si $\nabla'\eta = 0$, on a:

$$\begin{aligned} S_{11}e_{22} - S_{22}e_{11} &= 0 \\ S_{11}e_{12} - S_{12}e_{11} &= 0 \\ S_{22}e_{12} - S_{12}e_{22} &= 0 \end{aligned}$$

D'où $e_{22}^1 = e_{11}^2 = e_{12}^2 - e_{22}^1 = e_{22}^2 = e_{12}^1 - e_{11}^2 = e_{11}^2 = 0$, puis $\eta = 0$. La connexion de Gauss Manin est injective, les espaces ayant même dimension, c'est un isomorphisme. □

Cas de Δ^n:

Nous allons utiliser dans ce cas une autre méthode. On peut vérifier que les cas de poids 2 sur Δ^2 sont traitables par la méthode précédente, mais nous pouvons ici utiliser la formule de Künneth, ce qui est plus rapide.

Soit une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ munie de son revêtement universel $\Delta \to S$. Sur S vue comme un quotient compact de Δ, on dispose de la VSHP localement homogène $(S, S(n))$. Nous avons déjà rencontré le fait que l'on peut écrire la décomposition de Hodge:

$$H^1(S, S(n)) = H^{n+1,0} \oplus H^{0,n+1}$$

$$\forall n \geq 1 : \; H^0(S, S(n)) = H^2(S, S(n)) = 0$$

La formule de Künneth fournit la décomposition de Hodge:

$$\begin{aligned} H^p(S^p, S(n)_1) &= (H^{n+1,0} \oplus H^{0,n+1}) \otimes \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} H^{p-1-i,i} \\ &= \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} H^{p+n-i,i} \oplus \bigoplus_{0 \leq i \leq p-1} H^{i,p+n-i} \end{aligned}$$

Si $n \geq p$ et $n+1 > P > p-1$, $H^p(S, S(n)_1)^{P,n+p-P} = 0$ et le théorème d'annulation L^2 correspondant se produit sur Δ^n, par le lemme de Kazhdan.

La même méthode fournit le théorème d'annulation souhaité pour $H^n(S^n, S(p_1)_1 \otimes \ldots \otimes S(p_n)_n)^{P,Q}$ pour $P \in$ N tel que $\not\exists(\epsilon_j) \in \{+1, 0\}$, $\sum_j \epsilon_j(p_j + 1) = P$.

Par exemple tout quotient compact de $(\Delta^n, S(1)_1 \otimes \ldots \otimes S(1)_n)$ donne un cas d'égalité de $A_n^n(\mathrm{h})_{PQ}$ dès que $P \not\equiv 0[2]$. □

5.3 Lien avec la conjecture des lacunes.

5.3.1 Enoncé de la conjecture

Soit X une sous variété lisse d'un quotient compact de domaine symétrique borné $\Gamma\backslash\Omega$ ou plus généralement $(X, \mathbf{V})$ une VSHP de classifiante $\phi_{\mathbf{V}}$ vers le domaine de Griffiths $\mathcal{D}$ immersive.

Il est facile de voir que (cf [6]):

Proposition 5.3.1 *$\forall \alpha > 0$, assez petit, $\exists \epsilon = \epsilon_{\mathcal{D},\alpha} > 0$, tel que si $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\|_{L^\infty} \leq \epsilon$, il existe un unique domaine symétrique borné Ω' de même dimension que X et une unique VSHP homogène $\mathbf{V}'$ sur Ω' de classifiante immersive tels que:*

- *$\mathbf{V}'$ est de même type que $\mathbf{V}$.*

- *$\forall s \in \tilde{X}_u$, $\exists o \in \Omega'$, $\exists g \in Aut(\mathcal{D})$ tels que $\phi_{\mathbf{V}}(s) = \phi_{\mathbf{V}'}(o)$ et les boules riemanniennes de la métrique de Hodge de rayon 1 de $\tilde{X}$ en s et de Ω' en o aient des images sous l'application de Gauss de l'application de périodes à une distance inférieure à α l'une de l'autre.*

On dit alors que $(\tilde{X}, \mathcal{D}, \phi_{\mathbf{V}})$ est modelé sur $(\Omega', \mathcal{D}, \phi_{\mathbf{V}'})$.

Preuve :
Rappelons pour donner un sens à notre énoncé que l'application de Gauss est à valeurs dans le fibré localement trivial en Grassmanniennes sur $\mathcal{D}$ de fibre la Grassmanienne de $T_h(\mathcal{D})$ et associe à tout point de $\tilde{X}$ son espace tangeant en ce point.
Notons que dans le chapitre 2 de la présente thèse est prouvé le fait que si $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$, $\tilde{X}_u$ est un domaine symétrique borné et $\mathcal{V}$ est localement homogène.
Ces détails expliqués, le théorème est une application standard du thérème de compacité de Bishop. Pour des détails, voir [6].□.

La conjecture des lacunes s'énonce alors comme suit:

Conjecture 5.3.2 *Soit $\mathcal{D}$ un domaine de Griffiths et $(X, \mathbf{V}')$ une variété algèbrique $\exists \epsilon = \epsilon_{\mathcal{D}} > 0$ tel que si $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\|_{L^\infty} \leq \epsilon$ et $(\tilde{X}, \mathbf{V})$ est modelé sur un domaine symétrique borné Ω muni d'une VSHP homogène $\mathbf{V}'$, on ait en fait $(\tilde{X}, \mathbf{V}) \simeq (\Omega, \mathbf{V}')$.*

A vrai dire, nous doutons de la véracité de cette conjecture en général, il semble qu'il faille discuter en fonction du modèle. Les cas où cette conjecture est résolue sont ceux de certaines courbes (voir les chapitres 1 et 2 de la présente thèse) et ceux où l'application de périodes factorise à travers une puissance Ω^n d'un domaine symétrique borné et le modèle est le plongement diagonal de Ω dans Ω^n(voir [6]).

Une conjecture qui nous semble plus vraisemblable est la forme faible suivante:

Conjecture 5.3.3 *Si le modèle donne lieu à une égalité dans une inégalité d'Arakelov, la conjecture des lacunes est valide pour ce modèle.*

Cette conjecture si elle est vraie conduirait à des caractérisations par des invariants topologiques de certaines sous variétés totalement géodésiques de quotients de domaines symétriques bornés. Sur ce point, voir [6].

5.3.2 Conjecture des lacunes et théorèmes d'annulation

Proposition 5.3.4 *Si le modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *donne lieu à une égalité dans une inégalité d'Arakelov et si son complexe associé est acyclique,* $\exists \epsilon_{\mathcal{D}} > 0$ *tel que toute variété compacte kählerienne munie d'une VSHP de même type que* $\mathbf{V}$*, vérifiant* $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\| \leq \epsilon$ *et de modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *est un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov en question.*
De plus sur toute variété complexe munie d'une VSHP de même type que $\mathbf{V}$ *, vérifiant* $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\| \leq \epsilon$*, de modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *et complète pour la métrique kählerienne induite, les théorèmes d'annulation* L^2 *correspondants sont valables.*

Preuve :
Pour le premier énoncé il suffit de remarquer que le complexe de faisceaux associé reste acyclique sur X. Pour le deuxième énoncé, on fait appel à notre formule de Bochner-Hodge en le bidegré correspondant à l'inégalité d'Arakelov en question. En vertu de la remarque précédente on voit que sur X le terme $\Delta_{\nabla'}$ est minoré comme endomorhisme hermitien par $C.Id$ avec $C > 0$. Le terme $\Delta_{\bar{\theta}}$ est positif et les deux termes perturbatifs sont controlés par la norme de $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}$. Donc il ne peut pas exister de formes harmoniques en ce bidegré.□

Une démarche possible pour attaquer la conjecture des lacunes faibles est la suivante:

L'intégrande de tout inégalité d'Arakelov, écrite à l'aide des formes de Chern-Weil calculées à partir des métriques de Hodge, s'écrit $Q = Q_1 + Q_2$ où $Q_1(p)$ ne dépend que de l'image de $T_{\tilde{p}}\tilde{X}$, $p \in X$ sous l'application de périodes et $Q_2(p)$ dépend aussi de $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}$ en étant nulle quand $\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})} = 0$.
Si nous pouvions prouver $Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$, par un calcul local, nous aurions une solution de la conjecture faible des lacunes dans ce cas. Notons que c'est cette approche qui est utilisée dans les chapitres 1 et 3 et fonctionne dans le cas où l'application de périodes factorise à travers le carré cartésien $(B^2)^2$ de la boule B^2 et le modèle est le plongement diagonal de B^2 dans $(B^2)^2$ [6].
Cependant l'intégralité des indices et les considérations précédentes permettent de montrer le résultat très faible suivant:

Théorème 22 *Si le modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *donne lieu à une égalité dans une inégalité d'Arakelov et si son complexe associé est acyclique,* $\exists \epsilon_{\mathcal{D}}(V) > 0$ *une fonction décroiisante du nombre réel* V *tel que toute variété compacte kählerienne* X *munie d'une VSHP de même type que* $\mathbf{V}$*, de classifiante immersive, la forme de Kähler provenant de la métrique de Hodge et vérifiant* $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\| \leq \epsilon(volX)$, $(\tilde{X}, \mathbf{V})$ *de modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *est un cas d'égalité de l'inégalité d'Arakelov en question.*
De plus sur toute variété complexe munie d'une VSHP de même type que $\mathbf{V}$ *, vérifiant* $\|\sigma_{TX|T_h(\mathcal{D})}\| \leq \epsilon$*, de modèle* $(\Omega, \mathbf{V})$ *et complète pour la métrique kählerienne induite, les théorèmes d'annulation* L^2 *correspondants sont valables.*

Ce résultat est, essentiellement, un cas particulier de [13].

Nous verrons dans le chapitre suivant suivant le fait que cette approche ne fonctionne pas sous cette forme naïve dans le cas de $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$. En revanche, nous verrons que cette inégalité est non-locale, c'est à dire qu'elle ne peut pas être établie par un calcul de courbure local, mais nécessite un argument de type global. Il nous semble possible qu'une preuve alternative de cette inégalité conduise à une solution de la conjecture des lacunes faible. Nous espérons revenir sur ce sujet dans un travail ultérieur.

Chapitre 6

Formes de Chern-Weil

6.1 Plans abéliens dans $T_h(\mathcal{D})$

Rappelons la proposition suivante due à Carlson et Toledo [4].

Lemme 6.1.1 *Soit $g : U \to \mathcal{D}$ une application de périodes associée à une VSHP sur le polydisque U. Soit $u \in U$, alors $\mathfrak{a} = g_* T_u U \subset T_h(\mathcal{D})_{g(u)}$ est un sous espace abélien de $\mathfrak{g}^{-1,1}$ sous l'isomorphisme $T_h(\mathcal{D})_{g(u)} \simeq T_h(\mathcal{D})$.*

Par abus de langage, nous considérerons toujours dans ce qui suit un sous espace de l'espace des vecteurs horizontaux en un point d'un domaine de Griffiths comme un sous espace de $\mathfrak{g}^{-1,1}$. Nous sous-entendrons toujours que nous prenons un isomorphisme (non-unique!) de l'espace des vecteurs horizontaux en un point de $\mathcal{D}$ avec l'espace des vecteurs horizontaux en l'origine. Deux tels isomorphismes diffèrent par un élement du groupe d'isotropie en l'origine. Celà ne posera pas de problème car les formes de Chern-Weil que nous calculerons hériteront des tenseurs de courbures utilisés la covariance par rapport au groupe d'isotropie.

Considérons l'application bilinéaire antisymétrique suivante:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{g}^{-1,1} \times \mathfrak{g}^{-1,1} & \to & \mathfrak{g}^{-2,2} \\ (v,w) & \mapsto & [v,w] \end{pmatrix}$$

Elle induit une application linéaire $\Lambda^2 \mathfrak{g}^{-1,1} \xrightarrow{L} \mathfrak{g}^{-2,2}$ par la formule $L(v \wedge w) = [v,w]$.

Introduisons le plongement de Plücker de la Grassmanienne des 2-plans complexes de $\mathfrak{g}^{-1,1}$ et notons le $Gr(2, \mathfrak{g}^{-1,1}) \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathfrak{g}^{-1,1})$. Reformulons le lemme de Carlson-Toledo:

Lemme 6.1.2 *Un 2-plan $\mathfrak{a}$ est abélien si et seulement si $\phi(\mathfrak{a}) \in \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathfrak{g}^{-1,1}) \cap [\ker L] = \mathcal{E}_{ab}$.*

Corollaire 6.1.3 *Si $h^{1,1} = 1$, $\mathcal{E}_{ab} = \emptyset$. Si $h^{1,1} \geq 2$, $\mathcal{E}_{ab}$ est une variété algébrique connexe de dimension ≥ 1, en l'occurence une hyperquadrique.*

Nous allons maintenant paramétriser $\mathcal{E}_{ab}$ près du 2-plan abélien $\mathfrak{a}$. Soit (A,B) une base unitaire de $\mathfrak{a}$. La paramétrisation classique de $Gr(2, T_h(\mathcal{D}))$ est la suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp & \xrightarrow{P} & (\Lambda^2 T_h(\mathcal{D})) \cap \phi(Gr(2, T_h(\mathcal{D}))) \\ v \oplus w & \mapsto & [(A+v) \wedge (B+w)] \end{array}$$

Elle réalise un isomorphisme de $\mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp$ sur un ouvert de Zariski U de $Gr(2, T_h(\mathcal{D}))$ contenant $\mathfrak{a}$.

Lemme 6.1.4 $P^{-1}(\mathcal{E}_{ab} \cap U) = \{v \oplus w \in \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp : \ [v, B] + [A, w] + [v, w] = 0\}$

Preuve :
C'est la simple traduction du fait que $\mathbb{C}(A + v) + \mathbb{C}(B + w)$ est un 2-plan abélien.

6.2 Fonctions de Chern-Weil

6.2.1 Généralités

Proposition 6.2.1 *Soit* $(U, \mathbf{V})$*une surface algébrique portant une VSHP de classifiante immersive. Soit* χ *une 2,2-classe de cohomologie appartenant à l'algèbre engendrée par les classes caractéristiques de S et les classes caractéristiques des fibrés vectoriels holomorphes* $H^{p,q}$ *asociés à* $\mathbf{V}$*. La forme de Chern-Weil de* χ*, calculée à l'aide des métriques de Hodge, au point p est alors:*

$$\chi_p = (\Phi(T_pS) + L(T_pS, \Sigma) + Q(\Sigma))\frac{\omega^2}{2!}$$

où Φ *est une fonction sur* $\mathcal{E}_{ab}$ *nommée la fonction de Chern-Weil de* χ*,* $L(T_pS, \Sigma)$ *et* $Q(\Sigma)$ *sont respectivement linéaires et quiadratiques en le tenseur* Σ*, ce dernier s'exprimant quadratiquement en fonction de la deuxième forme fondamentale* σ *de S en p.*

Preuve :
Si χ appartient à l'algèbre engendrée par les classes caractéristiques des $H^{p,q}$, cette proposition est une manière compliquée de dire que les formes de Chern-Weil se conservent par image réciproque.
Sinon, le tenseur de courbure de S en p s'écrit grâce à l'équation de Gauss comme:

$$R^S_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - (\sigma_\alpha(\gamma), \sigma_\beta(\delta))$$

$(R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}})$ peut être vu comme un tenseur dans $\Lambda^1 S^* \otimes Herm(T_S)$ et vérifie les symétries kähleriennes usuelles. Ses formes de Chern-Weil[1] ne dépendent que de $[T_PS] \in \mathcal{E}_{ab}$.
$\Sigma = R^S - R^{T_h(\mathcal{D})}$ s'expriment quadratiquement en fonction de la deuxième forme fondamentale σ de S en p. En calculant la trace et le déterminant de R^S, les formules demandées apparaissent pour c_1, c_2. D'où la proposition.□

Proposition 6.2.2 *Toute fonction de Chern-Weil sur* $\mathcal{E}_{ab}$ *est invariante par le groupe compact d'isotropie de* $p \in \mathcal{D}$ *agissant sur* $\mathcal{E}_{ab}$

Preuve :
Celà provient de l'invariance des formes de Chern-Weil et de la forme volume par le groupe des automorphismes de $\mathcal{D}$. Cette invariance est d'ailleurs un ingrédient majeur de toute notre approche.

1. qui, soyons en conscients, ne représentent pas a priori des classes de cohomologie, car, par exemple, elles n'ont aucune raison d'être fermées. Il faut les voir comme des artifices de calcul.

6.2.2 La fonction de Chern-Weil pour $c_2(S)$

Nous allons calculer explicitement la fonction de Chern-Weil et le terme perturbatif en Σ de la forme de Chern-Weil pour $c_2(S)$, en utilisant les métriques de Hodge. On a:

$$c_2(S) = F(TS) + L(TS, \Sigma) + Q(\Sigma)$$

Courbure des domaines de Griffiths

Rappelons le résultat suivant (cf [19])

Proposition 6.2.3 *Si $\pi : \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{00} \to \mathfrak{gl}(V)$ est une représentation complexe de l'algèbre de Lie du groupe d'isotropie en o de $\mathcal{D}$, la courbure du fibré holomorphe correspondant sur les vecteurs horizontaux se calcule par la formule suivante:*

$$\forall \xi \in \mathfrak{g}^{-1,1}, \quad \sqrt{-1}c(V)_{\xi\bar{\xi}} = -\pi([\xi, \bar{\xi}])$$

Corollaire 6.2.4 *Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre vecteurs horizontaux commutant deux à deux, le tenseur de courbure $R^{T_h(\mathcal{D})}$ évalué en ces vecteurs vaut:*

$$R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\beta},\gamma,\bar{\delta}} = -([\bar{\beta}, \gamma], [\bar{\alpha}, \delta])$$

Il vérifie les symétries kählériennes universelles. De plus, les inégalités suivantes sont vérifiées:

$$\begin{array}{rcl}
R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\alpha},\alpha,\bar{\alpha}} & < & 0 \\
R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}} & \leq & 0 \\
(R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}})^2 & \leq & R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\alpha},\alpha,\bar{\alpha}} R^{T_h(\mathcal{D})}_{\beta,\bar{\beta},\beta,\bar{\beta}} \\
|R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\beta},\alpha,\bar{\beta}}|^2 & \leq & (R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\alpha},\beta,\bar{\beta}})^2
\end{array}$$

Preuve :
D'après [19]:

$$\forall (v, w) \in \mathfrak{g}^{p,-p} \times \mathfrak{g}^{q,-q}, \ (v, w) = (-1)^q Tr(v\bar{w}^T)$$

où $\bar{w}^T$ désigne le transconjugué de w par rapport à la structure réelle et à la forme de polarisation. On a toujours $\bar{w}^T = -\bar{w}$. Donc:

$$\begin{array}{rrcl}
 & R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\beta},\gamma,\bar{\delta}} & = & ([[\alpha, \bar{\beta}], \gamma], \delta) \\
 & & = & -Tr[[\alpha, \bar{\beta}], \gamma]\bar{d}^T \\
(6.1) & & = & Tr\ ad\alpha.ad\bar{\beta}(\gamma)\bar{d}^T \\
(6.2) & & = & Tr[\bar{\beta}, \gamma][\bar{\delta}^T, \alpha] \\
 & & = & -([\bar{\beta}, \gamma], [\bar{\alpha}, \delta])
\end{array}$$

L'equation (6.6) provient de l'identité de Jacobi. L'equation (6.7) provient de l'identité $Tr\ [a, b]c = Tr\ b[c, a]$ pour trois endomorphismes a,b,c d'un même espace vectoriel de dimension finie.

On peut obtenir les symétries kähleriennes universelles par un usage répété de cette dernière identité.

Toutes les inégalités annoncées proviennent de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et des symétries kähleriennes universelles.

Remarque 6.2.5 *Ces inégalités proviennent de la semi-négativité au sens dual de Nakano [14] du tenseur $R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}$ sur l'espace abélien $\mathfrak{a}$ engendré par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.*

Preuve :
Si nous construisons la forme hermitienne H sur $\mathfrak{a} \otimes \bar{\mathfrak{a}}$ par la formule:

$$H(\alpha \otimes \bar{\delta}; \beta \otimes \bar{\gamma}) = R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}_{\alpha,\bar{\beta},\gamma,\bar{\delta}} = -([\bar{\beta}, \gamma], [\bar{\alpha}, \delta])$$

On a pour $(v_i), (w_i) \in \mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned} H(\sum_i v_i \otimes w_i, \sum_i v_i \otimes w_i) &= \sum_{ij} R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}_{v_i \bar{v}_j w_j \bar{w}_j} \\ &= -\sum_{ij}([v_i, \bar{w}_i], [v_j, \bar{w}_j]) \\ &= -\|\sum_i [v_i, w_i]\|^2 \end{aligned}$$

Donc le tenseur indiqué est bien semi négatif au sens dual de Nakano. Nos inégalités se ramènent à l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour H.[2]

Contribution de $\sigma_{TX|T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}$

Théorème 23 $L(TS, \Sigma) \geq 0, \quad Q(\Sigma) \geq 0$

Preuve :
La formule de Gauss s'écrit:

$$R^S_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} = R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} - (\sigma_\alpha(\gamma), \sigma_\beta(\delta)) \qquad \sigma_\alpha(\gamma) \in N_{TS/T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}$$

Si $(e_1, \ldots, e_q)$ désigne une base unitaire de $N_{TS/T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}$ au poit p, l'écriture $\sigma_\alpha(\gamma) = \sum_k \sigma^k_\alpha(\gamma) e_k$ fournit:

$$R^S_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}} = R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}} - \sum_{k=1}^{q} \sigma^k_\alpha(\gamma)\overline{\sigma^k_\beta(\delta)}$$

Où encore $R^S = R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})} + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_q$. On voit chacune des quantités écrites comme des 1,1-formes sur T_pS à valeurs dans les endomorphismes hermitiens de cet espace. Notons par $c_2(R^S)$, $c_2(R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})})$, $c_2(\Sigma)$ les formes que la théorie de Chern-Weil associe à

2. Je n'ai pas dit ici que le tenseur de courbure de S était semi-négatif au sens dual de Nakano. Le terme provenant de la deuxième forme fondamentale n'a pas la même structure que $R^{T_\mathbf{k}(\mathcal{D})}$ et donne lieu à un tenseur semi-négatif au sens de Nakano, mais pas au sens dual.

ces tenseurs. Il vient, en remplaçant par abus de notation un tenseur par son expression dans une base de T_pS:

$$c_2(R^S) = c_2(R^{T_\lambda(\mathcal{D})}) + c_2(\Sigma) + \frac{1}{4\pi^2} Tr\ Com(\Sigma) R^{T_\lambda(\mathcal{D})}$$

Où $Com(\Sigma)$ désigne la comatrice de Σ. Par définition:

$$c_2(\Sigma) = \frac{1}{2} Q(\Sigma)\omega^2, \quad \frac{1}{4\pi^2} Tr\ Com(\Sigma) R^{T_\lambda(\mathcal{D})} = \frac{1}{2} L(T_pS, \Sigma)\omega^2$$

Par linéarité: $L(T_pS, \Sigma) = \sum_k L(T_PS, \Sigma_k)$.

Nous prétendons que $L(T_pS, \Sigma_1) \geq 0$. En effet σ^1 est une forme bilinéaire symétrique sur T_pS. Par un théorème d'algèbre linéaire du livre de Gantmacher [7], elle se diagonalise dans une base unitaire. Soit donc (α, β) une telle base. Posons $\sigma^1_\alpha(\beta) = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Le calcul de $L(T_pS, \Sigma_1)$ fournit:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} L(T_pS, \Sigma_1) &= 4(-|\lambda_\alpha|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\beta\beta\bar\beta} - |\lambda_\beta|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\alpha\alpha\bar\alpha} + \lambda_\alpha \bar\lambda_\beta R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\alpha\beta\bar\alpha} + \lambda_\beta \bar\lambda_\alpha R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\beta\alpha\bar b}) \\
&= 4(-|\lambda_\alpha|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\beta\beta\bar\beta} - |\lambda_\beta|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\alpha\alpha\bar\alpha} + 2Re(\lambda_\alpha \bar\lambda_\beta R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\alpha\beta\bar\alpha})) \\
&\geq 4(-|\lambda_\alpha|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\beta\beta\bar\beta} - |\lambda_\beta|^2 R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\alpha\alpha\bar\alpha} - 2|\lambda_\alpha \lambda_\beta| . |R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\alpha\beta\bar\alpha}|)
\end{aligned}$$

Mais $|R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\alpha\beta\bar\alpha}|^2 \leq R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\beta\bar\beta\beta\bar\beta} R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\alpha\alpha\bar\alpha}$, donc $L(T_pS, \Sigma_1) \geq 0$.
De même $L(T_pS, \Sigma_k) \leq 0$, donc $L(TS, \Sigma) \geq 0$.

Remarque 6.2.6 $\sigma \neq 0 \Rightarrow L(T_pS, \Sigma) > 0$

En effet, la preuve précédente implique que si $L(T_pS, \Sigma) = 0$, les 4 vecteurs de $\mathfrak{g}^{00}$, $[\alpha, \bar\alpha]$, $[\beta, \bar\beta], [\beta, \bar\alpha], [\alpha, \bar\beta]$ sont proportionnels et que ni λ_α ni λ_β ne sont nuls . En calculant une trace convenable, il vient que $[\alpha, \bar\beta] = 0$, donc que $R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\beta\alpha\bar\beta} = 0$. Or $R^{T_\lambda(\mathcal{D})}_{\alpha\bar\alpha\alpha\bar\alpha} \neq 0$.

La positivité de $c_2(\Sigma)$ est prouvée dans [9] pp.416-419. Nous allons pourtant expliciter ce calcul pour un usage futur.

Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ une base de T_pS. On définit une application linéaire $T_pS \to N_{T_pS/T_\lambda(\mathcal{D})}$ par $A^i(v) = \sigma_{e-i}(v)$. Dans la base de $N_{T_pS/T_\lambda(\mathcal{D})}$ déjà utilisée, on a $A^i = \sum_k A^i_k e_k$. La matrice de Σ dans $\mathcal{B}$ vérifie:

$$\Sigma_{ij} = -\sqrt{(-1)} \sum_{k=1}^{q} A^i_k \wedge A^j_k, \ 1 \leq i, j \leq 2$$

De sorte que:

$$\begin{aligned}
c_2(\Sigma) &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k,l} A^1_k \wedge \bar A^1_k \wedge A^2_l \wedge \bar A^2_l - A^1_k \wedge \bar A^2_k \wedge A^2_l \wedge \bar A^1_l \\
&= \frac{1}{4\pi^2} (\sum_l 2A^1_l \wedge \bar A^1_l \wedge A^2_l \wedge \bar A^2_l) \\
&\quad + \frac{1}{4\pi^2} \sum_{l<k} (A^1_k \wedge A^2_l - A^1_l \wedge A^2_k) \wedge \overline{(A^1_k \wedge A^2_l - A^1_l \wedge A^2_k)}
\end{aligned}$$

En normalisant la métrique sur les 2,0-formes par $||e_1 \wedge e_2|| = 1$, on a pour la 2,0-forme ϕ : $\phi \wedge \bar{\phi} = \frac{1}{4}||\phi||^2\omega^2$. Celà fournit $c_2(\Sigma) \geq 0$. On peut d'ailleurs préciser ce calcul.

$A^i \in N \otimes \Omega^1$. Or, nous pouvons plonger N dans son algèbre symétrique qui, en tant qu'algèbre de polynômes est commutative, et définir $A^1 \wedge A^2 \in S^2(N)$. La formule obtenue ci dessus s'interpréte comme suit:

$$c_2(\Sigma) = \frac{1}{8\pi^2}||A^1 \wedge A^2||^2\omega^2$$

Calcul explicite de F

Théorème 24 *Soit (ξ, η) une base unitaire de $\mathfrak{a} \in \mathcal{E}_{ab}$. Posons:*

$$\Phi = [\xi, \bar{\xi}] \circ [\eta, \bar{\eta}] - [\xi, \bar{\eta}] \circ [\eta, \bar{\xi}] \in S^2(\mathfrak{g}^{00})$$

Alors:

$$F(\mathfrak{a}) = \frac{1}{8\pi^2}(||\Phi||^2)$$

Preuve :
$(R_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})})$ désigne dans ce qui suit le tenseur $P_{\mathfrak{a}}R^{T_h(\mathcal{D})}$ restreint à $\mathfrak{a}$, en désignant par $P_{\mathfrak{a}}$ le projecteur orthogonal de $T_h(\mathcal{D})$ sur $\mathfrak{a}$. Soit $(1,2)$ une autre base unitaire de $\mathfrak{a}$.

$$(R_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})})_{\xi\bar{\xi}i\bar{j}} = -([\xi, \bar{i}], [\eta, \bar{j}])$$

En posant $A^j(v) = [v, \bar{j}]$ et en choisissant une base de $\mathfrak{g}^{00}$, il vient comme au paragraphe précédent:

$$(R_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})})_{ij} = -\sqrt{-1}\sum_k A_k^i \wedge \bar{A}_k^j$$

La matrice ${}^tR_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})}$ vérifie les hypothèses du calcul précédent. Donc:

$$c_2(R_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})}) = \frac{1}{8\pi^2}||A^1 \wedge A^2||^2\omega^2$$

Posons enfin $(1,2) = (\xi, \eta)$ et évaluons la quantité suivante:

$$(A^1 \wedge A^2, \xi \wedge \eta) = det \begin{pmatrix} [\xi, \bar{\xi}] & [\xi, \bar{\eta}] \\ [\eta, \bar{\xi}] & [\eta, \bar{\eta}] \end{pmatrix} = \Phi$$

Corollaire 6.2.7 $c_2(R_{\mathfrak{a}}^{T_h(\mathcal{D})}) > 0$. *On peut par conséquent établir par un calcul local l'inégalité $c_2(S).[S] > 0$ pour S une surface base d'une VSHP de classifante immersive.*

Preuve :
Il suffit de montrer que $\Phi \neq 0$. Si on avait $\Phi = 0$, on aurait:

$$Vect([\xi, \bar{\eta}], [\eta, \bar{\xi}]) \subset Vect([\xi, \bar{\xi}], [\eta, \bar{\eta}])$$

Dans le cas contraire $\exists a, b \in \mathbb{C}, \exists w \in Vect([\xi, \bar{\xi}], [\eta, \bar{\eta}])^{\perp}$ tels que:

$$\begin{aligned} [\xi, \bar{\eta}] &= a[\xi, \bar{\xi}] + b[\eta, \bar{\eta}] + w \\ [\eta, \bar{\xi}] &= \bar{a}[\xi, \bar{\xi}] + \bar{b}[\eta, \bar{\eta}] + \bar{w} \end{aligned}$$

Comme $Vect([\xi,\bar{\xi}],[\eta,\bar{\eta}])$ est invariant par conjugaison complexe, il en est de même pour son supplémentaire orthognal pour la métrique de Hodge. D'où $w \circ \bar{w} = 0$. Puis $w = 0$.

Si $dim(Vect([\xi,\bar{\xi}],[\eta,\bar{\eta}])) = 2$, on obtient en regardant les composantes de Φ sur $\mathbb{C}[\xi,\bar{\xi}]^2 \oplus \mathbb{C}[\eta,\bar{\eta}]^2$, $a\bar{a} = b\bar{b} = 0$, ce qui contredit $\Phi = 0$.

Le cas où $dim(Vect([\xi,\bar{\xi}],[\eta,\bar{\eta}])) = 1$ a déjà été éxaminé et on a vu qu'il implique que $[\xi,\bar{\eta}] = [\eta,\bar{\xi}] = 0$, ce qui interdit bien sûr $\Phi = 0$. □

Théorème 25 *Soit* $\mathrm{h} = (h^{pq})_{p+q=n,p\geq 0}$ *un vecteur de nombres entiers tous non nuls vérifiant* $h^{pq} = h^{qp}$.

Soit a et b deux réels positifs non tous nuls.$\exists K > 0$ tel que, si S est une surface algébrique base d'une VSHP de vecteur de Hodge $\mathbf{h}$ *de classifante immersive et χ_2 une (2,2)-classe de cohomologie dans l'algèbre engendrée par les classes caractéristiques des fibrés de Hodge de la VSHP, on a l'inégalité suivante:*

$$ac_1^2(S) + bc_2(S).[S] > K\chi_2.[S]$$

Preuve :
Nous voulons étudier G la fonction de Chern-Weil associée à c_1^2. Compte tenu de l'équation de Gauss, comme à la preuve de la proposition 6.2.1, nous écrivons au point P de S la formule suivante pour la forme de Chern-Weil calculant $c_1(S)$:

$$c_1(S)_P = \frac{1}{2\pi}(\gamma(T_P(S)) + \Sigma_P)$$

Si (α,β) est un base unitaire de $T_P(S)$ on a les formules pour $v \in T_P(S)$:

$$\begin{aligned} \gamma_{v\bar{v}} &= R_{v\bar{v}\alpha\bar{\alpha}} + R_{v\bar{v}\beta\bar{\beta}} \\ \Sigma_{v\bar{v}} &= -\|\sigma_v(\alpha)\|^2 - \|\sigma_v(\beta)\|^2 \end{aligned}$$

En particulier, les deux formes γ et Σ sont des (1,1)-formes semi-négatives. Leur somme est encore une forme semi-négative et le carré de cette somme est une (2,2)-forme semi-positive. Ce carré est justement la $(2,2)$-forme qui représente $c_1^2(S)$. En particulier $c_1^2(S) \geq 0$.

La fonction de Chern -Weil G de $c_1^2(S)$ est, par la calcul précédent, donnée par la formule:

$$\frac{1}{4\pi^2}\gamma^2 = G(T_P(S))\frac{\omega^2}{2!}$$

Or, comme on l'a déjà rencontré, $R^{T_h(\mathcal{D})}_{\alpha\bar{\alpha}\alpha\bar{\alpha}} < 0$, donc la forme γ est strictement négative. D'où $G(T_P(S)) < 0$.

Le terme perturbateur provenant de la deuxième forme fondamentale pour le calcul de $c_1^2(S)$ est:

$$P = \frac{1}{4\pi^2}(\Sigma^2 + 2\gamma \wedge \Sigma)$$

Les formes Σ et γ étant semi-négatives, la (2,2)-forme P est semi positive.

En particulier, pour (a,b) deux réels strictement positifs:

$$ac_2(S) + bc_1^2(S) = (aF + bG)\omega^2/2 + \epsilon(\sigma)$$

Où $\epsilon(\sigma)$ est un terme perturbateur nul quand la deuxième forme fondamentale s'annulle et positif sinon; $aF + bG$ est la fonction de Chern Weil de $ac_2(S) + bc_1^2(S)$ et est strictement positive sur $\mathcal{E}_{ab}$ [3].

La forme de Chern-Weil, calculée avec les métriques de Hodge, de χ_2 ne dépend que de $T_P(S)$ et non de la deuxième forme fondamentale; elle s'écrit donc:

$$(\chi_2)_P = \Psi(T_P(S))\omega^2/2$$

Où Ψ est une fonction sur $\mathcal{E}_{ab}$.

Posant $K_{\mathcal{D}}(a,b) = \max_{\mathfrak{a}\in\mathcal{E}_{ab}} \frac{\Psi}{aF+bG}$, pour $K \geq \mathrm{K}_{\mathcal{D}}(a,b)$ on a $aF + bG \geq K\Psi$.

La positivité du terme perturbateur permet alors de conclure que, en tout point, les formes de Chern-Weil des classes caractéristiques que nous considérons vérifient $ac_2(S) + bc_1^2(S) \geq K\chi_2$.

La forme intégrée de cette inégalité estjustement l'inégalité annoncée.

Remarquons que notre preuve a été entièrement locale et que, de ce fait, cette inégalité est, par nature, un phénomène purement local.

6.3 Un fait général

Pour le 2-plan abélien $\mathfrak{a}' \in \mathcal{E}_{ab}$ posons $G(\mathfrak{a}') = ||\Phi(\mathfrak{a}')||^2$. Il s'agit de la fonction de Chern-Weil associée à c_2.

En fait, on peut aussi définir une fonction sur $Gr(2, T_h(\mathcal{D}))$ par la même formule.

Celà résulte du fait trivial suivant:

Lemme 6.3.1 *Si (ξ,η) et (ξ',η') désignent deux bases d'un même 2-plan de $\mathfrak{g}^{-1,1}$ et P désigne la matrice de (ξ,η) dans (ξ',η'):*

$$[\xi,\bar{\xi}]\circ[\eta,\bar{\eta}] - [\xi,\bar{\eta}]\circ[\eta,\bar{\xi}] = |det(P)|^2[\xi',\bar{\xi}']\circ[\eta',\bar{\eta}'] - [\xi',\bar{\eta}']\circ[\eta',\bar{\xi}']$$

Preuve : C'est la formule classique de changement de base pour le discriminant d'une forme hermitienne qui est utilisée ici, la forme hermitienne étant à valeurs dans une $\mathbb{C}$-algèbre commutative avec une conjugaison complexe.

Proposition 6.3.2 *Si $\mathfrak{a}_s$ est l' image de l'espace tangeant d'un domaine symétrique borné de dimension 2 sous l'application de périodes, c'est un point critique de la fonction G.*

Preuve :
Soit (ξ,η) une base unitaire de $\mathfrak{a}_s$ Si $X \in T_{\mathfrak{a}_s}\mathcal{E}_{ab}$, on écrit $X = v \oplus w \in \mathfrak{a}_s^\perp \oplus \mathfrak{a}_s^\perp$. Comme la matrice de Gram de $(\xi + v, \eta + w)$ calculée avec la métrique de Hodge est critique près de $(v,w) = 0$, il vient:

$$\begin{aligned} G'(\mathfrak{a}_s) &= 2Re(\partial_X\Phi,\phi) \\ &= ([v,\bar{\xi}]\circ[\eta,\bar{\eta}] + [\xi,\bar{\xi}]\circ[w,\bar{\eta}] \\ &\quad -[v,\bar{\eta}]\circ[\eta,\bar{\xi}] - [\xi,\bar{\eta}]\circ[w,\bar{\xi}],\Phi) \end{aligned}$$

3. Nous savons en effet que la fonction de Chern-Weil F associée à c_2 est strictement positive sur $\mathcal{E}_{ab}$ par notre corollaire 6.2.6.

Les seules surfaces concernées sont B^2 et Δ^2. Dans ces deux cas, la forme explicite du tenseur de courbure nous dit qu'il existe une base unitaire (ξ, η) telle que:

$$\begin{aligned}
[\xi, \bar{\eta}] &\perp Vect([\xi, \bar{\xi}], [\eta, \bar{\eta}], [\eta, \bar{\xi}]) \\
[\eta, \bar{\xi}] &\perp Vect([\xi, \bar{\xi}], [\eta, \bar{\eta}], [\xi, \bar{\eta}])
\end{aligned}$$

Le calcul fournit alors:

$$\begin{aligned}
G'(\mathfrak{a}_s) \quad = \quad & -Re(R_{\eta\bar{\eta}\eta\bar{\eta}}([v, \bar{\xi}], [\xi, \bar{\xi}]) + R_{\xi\bar{\xi}\xi\bar{\xi}}([w, \bar{\eta}], [\eta, \bar{\eta}]) \\
& R_{\xi\bar{\xi}\eta\bar{\eta}}([v, \bar{\xi}], [\eta, \bar{\eta}]) + R_{\xi\bar{\xi}\eta\bar{\eta}}([v, \bar{\eta}], [\xi, \bar{\xi}]) \\
& R_{\xi\bar{\xi}\eta\bar{\eta}}([v, \bar{\xi}], [\xi, \bar{\eta}]) + R_{\xi\bar{\xi}\eta\bar{\eta}}([w, \bar{\eta}], [\eta, \bar{\xi}]))
\end{aligned}$$

Mais $([v, \bar{\xi}], [\xi, \bar{\xi}]) = (v, [[\xi, \bar{\xi}], \bar{\xi}]) = c(v, \xi) = 0$. De la même façon, les autres termes s'annulent, le point crucial étant que les endomorphismes $ad([\mathfrak{a}_s, \bar{\mathfrak{a}}_s])$ laissent stables $\mathfrak{a}_s$ et $\mathfrak{a}_s^{\perp}$.

Chapitre 7

Non-localité de $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$

7.1 Plans abéliens dans $T_h(\mathcal{D})$

7.1.1 Domaines de Griffiths de poids 2

Soit V un $\mathbf{R}$ espace vectoriel muni d'une structure de Hodge polarisée de poids 2 et de vecteur de Hodge $(h^{2,0}, h^{1,1}, h^{0,2})$.

Soit $(e_i)_{1\leq i\leq h^{2,0}}$ une base unitaire de $H^{2,0}$ et $(f_i)_{1\leq i\leq h^{1,1}}$ une base orthogonale réelle de $H_{\mathbf{R}}^{1,1}$. Nous choisissons comme base de $V_{\mathbf{C}}$ la base $(\mathcal{B}) = ((e_i)_{1\leq i\leq h^{2,0}}, (f_i)_{1\leq i\leq h^{1,1}}, (\bar{e}_i)_{1\leq i\leq h^{2,0}})$.

Considérons $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, l'algèbre de Lie complexifiée du groupe $\mathbf{G}_{\mathbf{R}}$ des automorphismes de la forme symétrique de polarisation S. L'antisymétrie par rapport à S des éléments de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ implique la description matricielle suivante des composantes de Hodge de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$:

$$\xi \in \mathfrak{g}^{-2,2} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_{h^{2,0}}(\mathbf{C}),\ A + {}^t A = 0,\quad Mat(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi \in \mathfrak{g}^{-1,1} \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_{h^{1,1},h^{2,0}}(\mathbf{C}),\quad Mat(\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & {}^t A & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi \in \mathfrak{g}^{0,0} \Leftrightarrow \exists P \in \mathcal{M}_{h^{2,0}}(\mathbf{C}), A \in \mathcal{M}_{h^{1,1}}(\mathbf{C})\ A + {}^t A = 0,\ Mat(\xi) = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t P \end{pmatrix}$$

Avec cette écriture matricielle, l'opération de conjugaison complexe $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ s'identifie à la transconjugaison sur $\mathfrak{g}^{-1,1}$.

De plus, pour la métrique de Hodge on a toujours: $||\xi||^2 = 2Tr({}^t\bar{A}A)$.

7.1.2 Plans abéliens de $\mathcal{D}(2,4,2)$

Posons désormais $h^{2,0} = 2, h^{1,1} = 4$ et $\mathcal{D} = D(2,4,2)$. On a alors $\dim(\mathfrak{g}^{-2,2}) = 1$, $\dim(\mathfrak{g}^{-1,1}) = 8$, L est surjective, donc $\mathcal{E}_{ab}$ est une hyperquadrique de dimension 11.

Explicitement:

$$Si \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & {}^tA & 0 \end{pmatrix}$$

$$Et \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 \\ 0 & {}^tB & 0 \end{pmatrix}$$

$$On\ a : [\xi, \eta] = \frac{({}^tAB)_{12} - ({}^tBA)_{12}}{2} \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Par conséquent, si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$$[\xi, \eta] = (\eta; \zeta_\xi) \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & & \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$Avec \ \zeta_A = \begin{pmatrix} -\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} \\ -\bar{a}_{22} & \bar{a}_{21} \\ -\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} \\ -\bar{a}_{42} & \bar{a}_{41} \end{pmatrix}$$

Lemme 7.1.1 *L'application* $(A \mapsto \zeta_A)$ *est antilinéaire, isométrique et vérifie* $\zeta^2 = -1$. *Si* $\mathfrak{a}$ *est un plan abélien* $\mathfrak{a} \perp \zeta(\mathfrak{a})$

Nous allons maintenant paramétriser $\mathcal{E}_{ab}$ près du 2-plan abélien $\mathfrak{a}$. Soit (A, B) une base unitaire de $\mathfrak{a}$. La paramétrisation classique de $Gr(2, T_h(\mathcal{D}))$ est la suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp & \xrightarrow{P} & (\Lambda^2 T_h(\mathcal{D})) \cap \phi(Gr(2, T_h(\mathcal{D}))) \\ v \oplus w & \mapsto & [(A + v) \wedge (B + w)] \end{array}$$

Elle réalise un isomorphisme de $\mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp$ sur un ouvert de Zariski U de $Gr(2, T_h(\mathcal{D}))$ contenant $\mathfrak{a}$.

Lemme 7.1.2 $P^{-1}(\mathcal{E}_{ab} \cap U) = \{v \oplus w \in \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp : \ [v, B] + [A, w] + [v, w] = 0\}$

Preuve :
C'est la simple traduction du fait que $\mathbb{C}(A + v) + \mathbb{C}(B + w)$ est un 2-plan abélien.

Corollaire 7.1.3 $\mathcal{E}_{ab}$ *est lisse. Sous la paramétrisation* P *on a la décomposition orthonormale suivante:*

$$P^{-1}(T_{\mathfrak{a}}(\mathcal{E}_{ab})) = V_A \oplus V_B \oplus W$$

$$V_A = (\mathfrak{a}^\perp \ominus \mathbb{C}\zeta_B) \oplus \{0\} \tag{7.1}$$

$$V_B = \{0\} \oplus (\mathfrak{a}^\perp \ominus \mathbb{C}\zeta_A) \tag{7.2}$$

$$W = \mathbb{C}(\zeta_B \oplus \zeta_A) \tag{7.3}$$

Preuve :
$P^{-1}(\mathcal{E}_{ab} \cap U) = \{v \oplus w \in \mathfrak{a}^{\perp} \oplus \mathfrak{a}^{\perp} : -(v;\zeta_B) + (w;\zeta_A) + (w;\zeta_v) = 0\}$
La partie linéaire de l'expression est non nulle, donc $P^{-1}(\mathcal{E}_{ab} \cap U)$ est lisse en 0. La décomposition annoncée est claire.

7.1.3 Fonctions de Chern-Weil pour $\mathcal{D}(2,4,2)$

Nous allons calculer explicitement la fonction de Chern-Weil et le terme perturbatif en Σ de l'intégrande χ de l'inégalité d'Arakelov $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$, en utilisant les métriques de Hodge. On a:

$$\begin{aligned} \chi &= 2c_2(S) - 4ch_2(H^{2,0}) \\ &= F(TS) + L(TS,\Sigma) + Q(\Sigma) \end{aligned}$$

Calcul explicite de F

Théorème 26 *Soit (ξ,η) une base unitaire de $\mathfrak{a} \in \mathcal{E}_{ab}$. Posons:*

$$\begin{aligned} \Phi &= [\xi,\bar\xi] \circ [\eta,\bar\eta] - [\xi,\bar\eta] \circ [\eta,\bar\xi] \in S^2(\mathfrak{g}^{00}) \\ c(\Phi) &= [\xi,\bar\xi][\eta,\bar\eta] - [\xi,\bar\eta][\eta,\bar\xi] \in \mathfrak{g}^{00} \end{aligned}$$

Alors:

$$F(\mathfrak{a}) = \frac{1}{4\pi^2}(\|\Phi\|^2 - Tr_{H^{2,0}}c(\Phi))$$

Preuve :
La formule explicite pour la fonction de Chern-Weil associée à $c_2(S)$ a déjà été obtenue au chapitre 6.

De plus $ch_2(H^{2,0}) = 1/8\pi^2\ Tr((\Theta^{H^{2,0}})^2))$. Or:

$$\Theta^{H^{2,0}} = \sqrt{-1}([\xi,\bar\xi]d\xi \wedge d\bar\xi + [\xi,\bar\eta]d\xi \wedge d\bar\eta + [\eta,\bar\xi]d\eta \wedge d\bar\xi + [\eta,\bar\eta]d\eta \wedge d\bar\eta)|_{H^{2,0}}$$

La raison de la notation $c(\Phi)$ est que l'on a bien une contraction $c : S^2\mathfrak{g}^0 \to End(H^{2,0})$ donnée par $c(X \circ Y) = 1/2(XY + YX)$.

Rappelons la proposition issue du chapitre précédent:

Proposition 7.1.4 *On peut par établir par un calcul local l'inégalité $\exists K > 0,\ c_2(S).[S] > Kch_2(H^{2,0}).[S]$ pour S une surface base d'une VSHP de classifante immersive.*

La non-localité de $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$ consiste à voir que l'on ne peut pas prendre $K = 2$ et donc que cette inégalité optimale est un phénomène global.

7.2 Un contre exemple

7.2.1 Un espace abélien remarquable

Appelons T_1 le sous espace de $T_h(\mathcal{D})$ constitué des $\xi(A)$, $A \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{C})$ de la forme:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Lemme 7.2.1 *T_1 est un 4-plan abélien. C'est une SL_2^4-orbite correspondant à la VSHP localement homogène $(\Delta^4, S(1)_1 \otimes S(1)_2 \oplus S(1)_3 \otimes S(1)_4)$. Toute SL_2-orbite dans $\mathcal{D}$ est isomorphe à une SL_2-orbite contenue dans ce 4-disque.*

Preuve :
Il est clair que $T_1 \perp \zeta(T_1)$ donc T_1 est abélien. De plus si $(A,B,C) \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{C})$, on calcule:

$$[\xi(A), \bar{\xi}(B)] = -\begin{pmatrix} {}^t\bar{B}A & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}^tA - A^t\bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & -A^t\bar{B} \end{pmatrix}$$

$$[[\xi(A), \bar{\xi}(B)], \xi(C)] = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\bar{B}^tA - A^t\bar{B})C - C^t\bar{B}A & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Or, pour $(A,B,C) \in T_1$ la matrice ${}^t\bar{B}A$ est diagonale et la matrice $\bar{B}^tA - A^t\bar{B}$ est diagonale par blocs de type (2,2). Les formules précédentes impliquent que $[[T_1, \bar{T_1}], T_1] \subset T_1$. Comme dans le cas des systèmes triples de Lie des domaines symétriques bornés, celà implique que $exp(T_1)$ est un domaine symétrique borné immergé par une application de périodes equivariante. Il est facile de voir que les 4 matrices:

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, A_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

vérifient $[[A_i, \bar{A}_j], A_k] = \delta_{ij}\delta_{jk}A_i$ ce qui implique que T_1 est bien tangeant à une SL_2^4-orbite Ω, qui est du type annoncé, les A_i étant chacun tangeants à un disque en facteur.

Il y a 5 types d'orbites SL_2 qui sont toutes équivalentes à une orbite décrites par un disque contenu dans le polydisque Ω. Explicitement:

$$OrbiteSL_2 \leftrightarrow \Delta \to \Delta^4$$

$$S(2)^2 \oplus \mathbb{R}^2(0) \leftrightarrow z \to (z,z,z,z) \tag{7.4}$$

$$S(2) \oplus \mathbb{R} \oplus S(1) \otimes F(1) \leftrightarrow z \to (z,z,z,0) \tag{7.5}$$

$$(S(1) \otimes F(1))^2 \leftrightarrow z \to (z,0,z,0) \tag{7.6}$$

$$S(2) \oplus \mathbb{R} \oplus F(2) \leftrightarrow z \to (z,z,0,0) \tag{7.7}$$

$$S(1) \otimes F(1) \oplus F(2) \leftrightarrow z \to (z,0,0,0) \tag{7.8}$$

Où $F(1), F(2)$ sont des structures de Hodge fixes de poids respectifs 1 et 2.

7.2.2 Le contre exemple

Proposition 7.2.2 *L'espace tangeant $\mathfrak{a}_{Ara}$ de la VHSP $(\Delta^2, S(1)_1 \otimes S(1)_2 \otimes \mathbf{R}^2)$ a une base orthonormée (ξ, η) avec:*

$$\xi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons qu'il correspond à l'un des deux cas d'égalité localement homogènes de l'inégalité $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$.

Nous commençons par une remarque interessante:

Proposition 7.2.3 *$\mathfrak{a}_{Ara}$ est un point citique de la fonction de Chern- Weil F associée à l'inégalité d' Arakelov $A_2^2(2,4,2)_{3,1}$.*

Preuve :
L'unique chose à prouver est que c'est un point critique de $G = Tr_{H^{2,0}}(c(\Phi))$. Si $X = (v, w) \in \mathfrak{a}^\perp \oplus \mathfrak{a}^\perp \cup T_{\mathfrak{a}_{Ara}}\mathcal{E}_{ab}$, on a la formule suivante pour la partie (1,0) de la dérivée accouplée à X:

$$\begin{aligned} \partial_X Tr\ c(\Phi) &= Tr_{H^{2,0}}([\xi,\bar{\xi}][w,\bar{\eta}] - [\xi,\bar{\eta}][w,\bar{\xi}]) \\ & \quad Tr_{H^{2,0}}([v,\bar{\xi}][\eta,\bar{\eta}] - [v,\bar{\eta}][\eta,\bar{\xi}]) \end{aligned}$$

Or, pour la base indiquée $[\xi,\bar{\eta}] = [\eta,\bar{\xi}] = 0$ et $[\xi,\bar{\xi}]|_{H^{2,0}} = [\xi,\bar{\xi}]|_{H^{2,0}} = -1/4\ Id$ et notre formule se réduit à:

$$\partial_X Tr\ c(\Phi) = Tr^t_{H^{2,0}}\bar{\eta}w +^t \bar{\xi}v = 1/2((w,\eta) + (v,\xi)) = 0$$

On pourrait calculer explicitement le Hessien de F, mais il suffit d'exhiber une seule valeur propre négative, ce que fait en l'espèce le résultat suivant:

Proposition 7.2.4 *La famille à un paramètre de 2-plans abéliens $(\mathfrak{a}_\phi)$ donnée par les deux vecteurs orthogonaux (ξ_ϕ, η_ϕ) et de norme 1 dans T_1, définis par:*

$$\xi_\phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_\phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{-1}\phi} \end{pmatrix}$$

vérifie $F(\mathfrak{a}_\phi) = \frac{\cos^2\phi - 1}{32}$ et fournit des valeurs de F strictement négatives pour des 2-plans infiniment proches de $\mathfrak{a}_{Ara}$.

Preuve :
Le calcul est assez facile, on a:

$$[\xi,\bar{\xi}] = [\eta,\bar{\eta}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$[\xi,\bar{\eta}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e^{-\sqrt{-1}\phi}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\sqrt{-1}\phi}/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'expression de $F(\mathfrak{a}_\phi)$ s'en déduit aussitôt. □

Bibliographie

[1] Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., Tai, Y.S. *Smooth compactifications of locally symmetric spaces* Lie Groups: History, Frontiers and Applications, Vol.4, Math. Sci. Press, Brookline, 1975

[2] Atiyah, M. *Elliptic operators, discrete groups and Von Neumann algebras* Soc. Math.Fr. Asterisque 32-33, 1976

[3] Baily, W.l. et Borel, Armand *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains* Annals of Mathematics 84, 1966

[4] Carlson, J.; Toledo, D. *Integral manifolds, harmonic mappings and the abelian subspace problem* Springer Verlag LN 1352, 1989

[5] Chai *Compactifications of Siegel modular varieties* in Arithmetic Geometry, edited by Cornell and Silvermann, Springer-Verlag,1986

[6] Mok, Ngaiming et Eyssidieux, Philippe *Characterization of certain totally geodesic cycles on hermitian locally symmetric spaces of the non-compact type* à paraitre

[7] Gantmacher, Felix *Matrix Theory*

[8] Griffiths, Philip *Periods of integrals on algebraic varieties, III* Publ. Math. IHES,1973

[9] Griffiths, Philip et Harris, Joseph *Principles of Algebraic geometry* John Wiley and Sons, 1978

[10] Gromov, Mikhail *Kähler hyperbolicity and L^2-Hodge theory* Prébublications de l'IHES, IHES/M/89/29, 1989

[11] Gromov, Mikhail; Lafontaine, Jacques et Pansu, Pierre *Structures métriques sur les variétes riemaniennes* Cedic Nathan, 1981

[12] Le Potier, Joseph *Fibrés de Higgs et systèmes locaux* Séminaire Bourbaki, Exposé 737, Février 1991

[13] Min-Oo et Ruh, E.A. *Vanishing theorems and almost symmetric spaces* Math. Annalen 257, 1981

[14] Mok, Ngaiming *Metric rigidity theorems on Hermitian locally symmetric manifolds* Series in Pure Mathematics, Vol.6, World Scientific, 1989

[15] Mok, Ngaiming *Aspects of Kähler Geometry on Arithmetic Varieties* Prépublications de l'Université Paris Sud, 1990

[16] Mok, Ngaiming et To, Wing-Keung *Eigensections on Kuga families of abelian varieties and finiteness of their Mordell-Weil groups* Manuscrit,1991

[17] Mumford, David *Hirzebruch's proportionnality principle in the non-compact case* Inventiones Mathematicae 42, 1977

[18] Peters, Christian *A criterium for flatness of Hodge bundles and geometric applications* Math. Annalen 268, 1984

[19] Peters, Christian *Curvature for period domains* Proc. Symp. in Pure Math., 53, 1991

[20] Roelcke, Walter *Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I* Math. Annalen 167, 1966

[21] Saito, M.H. *Finiteness of Mordell-Weil groups of Kuga fiber spaces of abelian varieties* Prébublication, Kyoto University, 1991

[22] Schmid, W. *Variations of Hodge structures: the singularities of the period mapping* Inventiones Math. 22, 1973

[23] Simpson, Carlos *Non abelian Hodge Theory* Prépublication, Princeton University

[24] Weil, André *Variétés kähleriennes* Hermann, Paris, 1971

[25] Zucker, Steven *Hodge theory with degenerating coefficients* Annals of Mathematics 107, 1979

[26] Zucker, Steven *Locally homogenous variations of Hodge structures* L'Enseignement Mathématique, 1981