

THÈSES D'ORSAY

PHILIPPE KERDELHUÉ

**Équation de Schrödinger magnétique périodique avec symétries
triangulaires et hexagonales : structure hiérarchique du spectre**

Thèses d'Orsay, 1991

http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1991__0293__P0_0

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016
et diffusée dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

63465

ORSAY
n° d'ordre

UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

THÈSE

Présentée

Pour obtenir

le Grade de Docteur en Sciences

Spécialité : **Mathématiques**

par

Philippe KERDELHUE

**Sujet : Equation de Schrödinger magnétique périodique avec symétries
triangulaires et hexagonales.
Structure hiérarchique du spectre.**

Soutenue le 15 Mars 1991 devant la Commission d'examen

MM. Jean Michel BONY Président
Serge ALINHAC
Alain GRIGIS
Bernard HELFFER
Johannes SJOSTRAND

ABSTRACT

We study the two dimensional Schrödinger equation, with periodic magnetic field and potential in the presence of a sixfold rotational symmetry. We treat the so called triangular and hexagonal cases, which are those when the potential reaches its minimum once or twice per periodicity cell.

Under the assumption that Planck's constant is small enough, we show that the lower part of the spectrum of these operators coincide with the spectra of pseudodifferential operators, quantized by a new Planck's constant and whose symbols can be approximated.

If this new constant is small enough, we can study the spectra of the pseudodifferential operators like we did for the Schrödinger operators, this time for all the spectrum except one or two arbitrarily small intervals.

In the best cases, this procedure can be repeated indefinitely and we obtain a nearly complete description of the hierarchical structure of the spectrum.

AMS Subjects Classification (1985). 35 A 20, 35 A 35, 34 B 20, 39 A 10, 35 S 05, 81 E 15, 35 J 10.

Remerciements

Mes premières pensées vont à mon directeur Johannès Sjöstrand, qui m'a proposé un sujet intéressant, et a consacré un temps important à m'aider à le mener à bien. Il a toujours été disponible pour me fournir conseils et explications. La confiance que lui et Bernard Helffer m'ont faite en me proposant de collaborer à un article dès les premiers mois de mon travail de thèse fut pour moi le meilleur des encouragements. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Mes remerciements vont également à Bernard Helffer. L'intérêt qu'il a pris à mes travaux dès leur début, ses explications sur les articles difficiles qu'il a écrit avec Johannès Sjöstrand, m'ont été une aide précieuse. En tant que rapporteur de cette thèse, il m'a suggéré des améliorations et donné des conseils pour la rédaction de mes futurs travaux dont j'espère tirer le plus grand profit. Enfin, il a accepté de venir de Berlin pour assister à cette soutenance.

Je remercie Alain Grigis pour plusieurs discussions très utiles tout au long de la préparation de ce travail ainsi que pour sa présence dans le jury.

Je remercie Jean-Michel Bony de m'avoir fait l'honneur de bien vouloir présider mon jury, Serge Alinhac d'avoir accepté d'en faire partie, ainsi que Ruedi Seiler qui a été rapporteur.

Je suis particulièrement reconnaissant envers Patrick Gérard qui, alors qu'il s'occupait de moi en tant que caïman à l'Ecole Normale Supérieure, a suscité mon intérêt pour les équations aux dérivées partielles et l'analyse microlocale, tant au cours des nombreuses discussions que nous avons eues que par l'excellente qualité du cours qu'il dispensait en collaboration avec Serge Alinhac.

Enfin, je remercie tous ceux qui m'ont apporté une aide technique, et tout particulièrement Théodore Papadopoulo, qui s'est chargé du tracé du dessin de l'appendice, J.B. Guillement, B. Helffer et P. Treton, qui nous ont permis de nous inspirer d'un de leurs logiciels, et M^{me} Bardot qui m'a aidé dans la frappe du texte.

0. Introduction.

Ce travail est une étude semi-classique du spectre des opérateurs de Weyl $q_h = \cos x + \cos(\frac{1}{2}x + hD) + \cos(\frac{1}{2}x - hD)$ agissant sur $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ par $q_h u(x) = \cos x u(x) + \cos(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h)u(x+h) + \cos(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}h)u(x-h)$ et

$$Q_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{ihD} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-ihD} & 0 \end{pmatrix}$$

agissant sur $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$ par:

$$Q_h(u_1, u_2)(x) = ((1 + e^{ix})u_2(x) + u_2(x+h), (1 + e^{-ix})u_1(x) + u_1(x-h)).$$

Ces opérateurs s'introduisent notamment lors de l'étude de l'équation de Schrödinger en dimension 2, en présence d'un potentiel périodique possédant une symétrie de rotation d'ordre 6 et d'un petit champ magnétique constant.

Plusieurs études de ces opérateurs ont été faites.

Claro et Wannier [Cl-Wa] ont construit un analogue du fameux papillon de Hofstadter pour l'opérateur q_h , traçant le spectre de q_h en fonction de h lorsque $h/2\pi$ est rationnel à dénominateur assez petit. On sait que le spectre de $q_{2\pi p/q}$ pour p et q entiers et premiers entre eux est formé de q bandes (intervalles de \mathbb{R}) qui peuvent se toucher mais pas se chevaucher. Le dessin obtenu par Claro et Wannier présente des trous dans lesquels ces auteurs étudient la densité d'états.

Récemment une prépublication de Bellissard, Kraft et Seiler [BKS] donne une étude semi-classique du spectre d'un opérateur légèrement différent de q_h pour $h/2\pi$ proche d'un rationnel. Ces auteurs étudient le spectre de leur opérateur près des extrémités des bandes simples de celui correspondant à $h=2\pi/q$.

Dans un article [Wi-Au] proche de mon travail, Wilkinson et Austin étudient un opérateur un peu plus général. Leur approche, qui n'est pas entièrement rigoureuse mathématiquement, consiste à considérer des "puits micro-locaux" dans l'espace cotangent $T^*\mathbb{R}$, interagissant par effet tunnel comme les puits de potentiel pour l'équation de Schrödinger. Ils indiquent comment l'analyse de ces interactions permet de ramener l'étude de certaines parties de spectre à celle d'un opérateur proche de celui dont on est parti, avec une nouvelle constante de Planck, et pensent qu'on peut obtenir la structure complète du spectre en réitérant indéfiniment cette procédure, ce qui est possible si $h/2\pi$ admet un développement en fraction continue convenable.

Dans mon travail certains résultats pressentis par ces auteurs sont démontrés rigoureusement. Ceci a été possible grâce aux techniques et aux théorèmes obtenus par Helffer et Sjöstrand dans une série d'articles sur l'équation de Harper $[\text{He}-\text{Sj}]_{4,5,6}$ et aux techniques qu'ils y ont introduites. Ces auteurs se sont intéressés à l'opérateur $\cos x + \cosh D$, d'abord dans la partie du spectre où les courbes d'énergie sont connexes $([\text{He}-\text{Sj}]_4)$, puis dans les zones de "branchement" $([\text{He}-\text{Sj}]_6)$. Dans le premier cas, suivant l'intuition de Wilkinson, ils étudient une matrice d'interaction entre les puits, dont ils peuvent majorer les coefficients par des estimations de décroissance exponentielle des fonctions propres. Ils se ramènent ainsi à un opérateur pseudo-différentiel, avec une nouvelle constante de Planck. Cette opération a reçu le nom de renormalisation. Ils arrivent également à obtenir des minoration de certains coefficients de la matrice d'interaction par des constructions BKW et montrent ainsi que l'opérateur renormalisé est proche de l'opérateur de Harper, et a conservé ses symétries. L'opérateur renormalisé peut alors être étudié de la même façon. A chaque étape de la renormalisation, les zones de branchement ont été laissées de côté et font l'objet d'une étude spéciale $([\text{He}-\text{Sj}]_6)$.

J'ai adapté cette méthode aux deux opérateurs que j'étudie, en laissant de côté les zones de branchement, soit un ou deux intervalles suivant qu'on étudie l'opérateur scalaire ou le système. Pour chacun des deux opérateurs, la renormalisation conduit à chacun des deux, suivant la zone du spectre que l'on étudie. L'innovation principale de mon travail consiste en ceci: dans l'étude des zones du spectre qui conduisent après renormalisation à l'opérateur scalaire, les constructions BKW n'existent plus au delà d'un point où la phase est singulière. On a alors besoin de déplacer le problème dans le complexe et d'étudier l'opérateur sur une droite $\mathbb{R} + di$, avec $d > 0$ petit.

On obtient ainsi:

Théorème 1 :

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Alors il existe deux constantes C_0 et c_0 telles que si $h/2\pi$ admet le développement en fraction continue $h/2\pi = 1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/(q_3 + \dots)))$ avec $q_j \in \mathbb{Z}$, $|q_j| \geq C_0$, on a:

Le plus petit intervalle fermé qui contient $\text{Sp}(q_h)$ est de la forme $[-3/2 + \mathcal{O}(1/|q_1|), 3 + \mathcal{O}(1/|q_1|)]$,

$\text{Sp}(q_h) \subset \cup_{1 \leq j \leq N_1} J_j \cup I_0 \cup \cup_{1 \leq k \leq N_2} K_k$, où I_0 , les J_j et les K_k sont des intervalles fermés de longueur non nulle, avec $\partial I_0, \partial J_j, \partial K_k \subset \text{Sp}(q_h)$, $J_j \subset J_{j+1} \subset I_0 \subset K_k \subset K_{k+1}$. Ces intervalles sont séparés d'au moins $c_0/|q_1|$, I_0 est de longueur $2\varepsilon_0 + \mathcal{O}(1/|q_1|)$, contenant -1 à une distance $\mathcal{O}(1/|q_1|)$ de son centre. Les bandes J_j et K_k sont de largeur $e^{-a(j)}/|q_1|$ et $e^{-b(k)}/|q_1|$ et avec $c_0 \leq a(j) \leq 1/c_0$ et $c_0 \leq b(k) \leq 1/c_0$.

Le plus petit intervalle fermé qui contient $\text{Sp}(Q_h)$ est de la forme $[-3 + \mathcal{O}(1/|q_1|), 3 + \mathcal{O}(1/|q_1|)]$,
 $\text{Sp}(Q_h) \subset \cup_{M_1 \leq k \leq -1} \tilde{K}_k \cup I_{-1} \cup \cup_{1 \leq j \leq M_2} \tilde{J}_j \cup I_1 \cup \cup_{1 \leq k \leq M_3} \tilde{K}_k$, où $I_{\pm 1}$, I_1
les \tilde{J}_j et les \tilde{K}_k sont des intervalles fermés de longueur non nulle, avec
 $\partial I_{\pm 1}, \partial \tilde{J}_j, \partial \tilde{K}_k \subset \text{Sp}(Q_h)$,
 $\tilde{K}_{k_1-1} < \tilde{K}_{k_1} < I_{-1} < \tilde{J}_j < \tilde{J}_{j+1} < I_1 < \tilde{K}_{k_2} < \tilde{K}_{k_2+1}$ pour $k_1 \leq -1$ et $k_2 \geq 1$. Ces
intervalles sont séparés d'au moins $c_0/|q_1|$, $I_{\pm 1}$ est de longueur
 $2\varepsilon_0 + \mathcal{O}(1/|q_1|)$, contenant ± 1 à une distance $\mathcal{O}(1/|q_1|)$ de son centre. Les
bandes \tilde{J}_j et \tilde{K}_k sont de largeur $e^{-a(j)}/|q_1|$ et $e^{-b(k)}/|q_1|$ et avec
 $c_0 \leq a(j) \leq 1/c_0$ et $c_0 \leq b(k) \leq 1/c_0$.

Il existe une fonction affine ℓ_k qui transforme K_k en $[-3/2, 3]$
(respectivement une fonction affine $\tilde{\ell}_k$ qui transforme \tilde{K}_k en $[-3/2, 3]$)
telle que $\ell_k(\text{Sp}(q_h) \cap K_k)$ (respectivement $\tilde{\ell}_k(\text{Sp}(Q_h) \cap \tilde{K}_k)$) vérifie les
mêmes conclusions que $\text{Sp}(q_h)$, avec q_1 remplacé par q_2 .

Soit f_j la fonction affine croissante qui transforme J_j en $[-3, 3]$
(respectivement \tilde{f}_j la fonction affine croissante qui transforme \tilde{J}_j en
 $[-3, 3]$). $f_j(\text{Sp}(q_h) \cap J_j)$ (respectivement $\tilde{f}_j(\text{Sp}(Q_h) \cap \tilde{J}_j)$) vérifie les mêmes
conclusions que $\text{Sp}(Q_h)$, avec q_1 remplacé par q_2 .

Et ainsi de suite, en remplaçant à chaque étape q_n par q_{n+1} . \square

Comme nous l'avons déjà vu, les opérateurs que nous étudions
proviennent de l'équation de Schrödinger et le théorème 1 a donc une
application à l'étude de cette équation.

On considère dans \mathbb{R}^2 l'opérateur de Schrödinger avec champ
magnétique:

$$P_{t, h_0} = (h_0 D_{x_1} - A_1(x))^2 + (h_0 D_{x_1} - A_2(x))^2 + V(x)$$

où V et A sont analytiques.

Le champ magnétique B est donné par:

$$B(x) dx_1 \wedge dx_2 = d(A_1(x) dx_1 + A_2(x) dx_2), \text{ soit } B(x) = \partial_{x_1} A_2(x) - \partial_{x_2} A_1(x).$$

On suppose que V et B sont invariants par la rotation κ de centre 0 et
d'angle $\pi/3$, et par translation selon un réseau $\mathbb{Z}v_1 \oplus \mathbb{Z}v_2$, avec $v_1 \neq 0$,
 $v_2 = \kappa(v_1)$.

On traite deux cas:

Le cas triangulaire est le cas où V atteint son minimum en un seul point par cellule de périodicité. Compte tenu des symétries que l'on s'impose, le minimum est atteint en 0.

Le cas hexagonal est celui où V atteint son minimum en deux points par cellule de périodicité. Ce minimum est alors atteint en $\frac{1}{3}(\nu_1 + \nu_2)$ et en $2/3(\nu_1 + \nu_2)$.

On suppose que ces minima sont non dégénérés et, sans perte de généralité, qu'ils sont nuls. On considère alors la distance d_V associée à la métrique d'Agmon $\sqrt{V(x)} dx^2$ et on suppose que les minima les plus proches pour la distance usuelle de \mathbb{R}^2 sont aussi les plus proches pour la distance d_V ,

et que ces minima sont reliés par une unique géodésique, non dégénérée au sens de [He-Sj]₃.

On a alors:

Théorème 2 :

Il existe un réel strictement positif $C_0(A, V)$ tel que, si:

$$(t, h_0) \in [-1/C_0, 1/C_0] \times]0, 1/C_0],$$

Φ désigne le flux de B à travers une cellule de périodicité, et $2\pi h_0/t\Phi$ admet le développement en fraction continue:

$$2\pi h_0/t\Phi = 1/(q_0 + 1/(q_1 + 1/(q_2 + \dots))), \text{ avec } q_j \in \mathbb{Z}, |q_j| \geq C_0,$$

$\mu(t, h_0)$ est la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique

$$(h_0 D_{x_1} + \frac{1}{2}tB(x_0)x_2)^2 + (h_0 D_{x_2} - \frac{1}{2}tB(x_0)x_1)^2 + \frac{1}{2}\langle V''(x_0)x|x \rangle, \text{ où } x_0 \text{ est un point où } V \text{ s'annule,}$$

alors:

le plus petit intervalle fermé contenant $\text{Sp}(P_{t, h_0}) \cap]-\infty, \mu(t, h_0) + C_0 h_0]$ est de la forme

$$[\tilde{\mu}(t, h_0) + \rho(h_0)[-3/2 + \mathcal{O}(1/q_1) + \mathcal{O}(e^{-1/C_0 h_0})], 3 + \mathcal{O}(1/q_1) + \mathcal{O}(e^{-1/C_0 h_0})] \text{ si on est dans le cas triangulaire,}$$

$$[\tilde{\mu}(t, h_0) + \rho(h_0)[-3 + \mathcal{O}(1/q_1) + \mathcal{O}(e^{-1/C_0 h_0})], 3 + \mathcal{O}(1/q_1) + \mathcal{O}(e^{-1/C_0 h_0})] \text{ si on est dans le cas hexagonal.}$$

Dans les deux cas, $\tilde{\mu}(t, h_0) - \mu(t, h_0) = \mathcal{O}(h_0^2)$,

$\rho(h_0)$ a un développement de la forme $\rho(h_0) = h_0^{-\nu_0} a_0(h_0) e^{-S(t)/h}$, où

$\nu_0 \in \mathbb{R}$, a_0 est un symbole analytique elliptique, $0 \leq S(t) - S \leq Ct^2$, S étant la distance d'Agmon entre puits les plus proches.

De plus, après une similitude, le spectre de P_{t, h_0} a la même structure que celle expliquée au théorème 1, pour l'opérateur scalaire si on est dans le cas triangulaire, pour le système si on est dans le cas hexagonal, avec

$h/2\pi = -1/(q_1 + 1/(q_2 + 1/(q_3 + \dots)))$, c'est-à-dire que h est le plus petit réel tel que $h \equiv -t\Phi/h_0 [2\pi\mathbb{Z}]$. \square

Nous avons suivi le plan suivant :

Les trois premières sections traitent l'équation de Schrödinger : Dans la section 1, on construit des opérateurs commutant avec l'opérateur de Schrödinger étudié, pour pouvoir conserver les symétries lors de la renormalisation.

Dans la section 2, on ramène l'étude de l'opérateur de Schrödinger triangulaire à celle d'une perturbation de l'opérateur scalaire q_h .

Dans la section 3, on ramène l'étude de l'opérateur de Schrödinger hexagonal à celle d'une perturbation du système Q_h .

Dans la section 4, on construit des opérateurs commutant avec q_h ou Q_h , ainsi qu'avec les perturbations de ces opérateurs qui se sont introduites aux sections 2 et 3.

Les sections 5 à 7 sont consacrées à l'étude de l'opérateur q_h : dans la section 5, on prépare l'étude de la matrice d'interaction par la démonstration d'inégalités à poids.

Dans la section 6, on majore les coefficients de la matrice d'interaction.

Dans la section 7, on minore les plus grands coefficients de cette matrice et la renormalisation nous ramène à des perturbations des opérateurs q_h et Q_h .

La section 8 étend les sections 5 à 7 à l'opérateur scalaire perturbé.

Enfin la section 9 est consacrée à l'étude des systèmes.

1. Construction des translations et de la rotation magnétiques.

Comme annoncé dans l'introduction, nous définissons ici des opérateurs, appelés translations magnétiques et rotation magnétique, qui commutent avec un opérateur de Schrödinger vérifiant les hypothèses du théorème 2.

On commence par traduire l'invariance de V et B par translation. Soit τ_1 la translation de vecteur ν_1 : $\tau_1 u(x) = u(x - \nu_1)$. Alors $d(A - \tau_1 A) = 0$, donc il existe une fonction φ_1 telle que $tA - \tau_1 tA = d\varphi_1$.

On définit alors la translation magnétique associée à la translation τ_1 comme l'opérateur unitaire $T_1 = e^{i\varphi_1/\hbar} \tau_1$.

On a alors :

Lemme 1.1 :

T_1 commute avec P .

Démonstration :

Posons $\tilde{D} = -i\hbar d$, où d est la différentielle extérieure. Alors :
 $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $(\tilde{D} - tA)T_1 u = d\varphi_1(x) e^{i\varphi_1/\hbar} \tau_1 u + e^{i\varphi_1/\hbar} \tau_1(\tilde{D}u) - tA e^{i\varphi_1/\hbar} \tau_1 u$
 $= e^{i\varphi_1/\hbar} \tau_1 [(-tA + \tilde{D})u] = T_1(\tilde{D} - tA)u$.

Donc pour $j=1,2$, $(\tilde{D}_j - tA_j)T_1 = T_1(\tilde{D}_j - tA_j)$.

Passant aux adjoints, on a :

$$(\tilde{D}_j - tA_j)^* T_1 = T_1 (\tilde{D}_j - tA_j)^*$$

et comme $P = (\tilde{D}_j - tA_j)^* (\tilde{D}_j - tA_j) + V$, et que V est ν_1 -périodique, $[T_1, P] = 0$. \square

On définit de même $T_2 = e^{i\varphi_2/\hbar} \tau_2$, avec $\tau_2 u(x) = u(x - \nu_2)$ et $d\varphi_2 = tA - \tau_2 tA$. Comme T_1 , T_2 commute avec P .

Nous avons besoin d'une relation de commutation entre T_1 et T_2 :

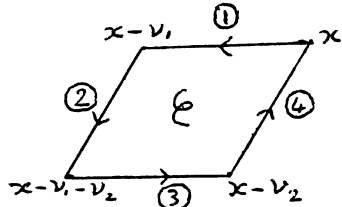
Lemme 1.2 :

$T_1 T_2 = e^{it\Phi/\hbar} T_2 T_1$ où Φ désigne le flux de B à travers une cellule de périodicité : $\Phi = \int_{\mathcal{C}} B \, dx_1 dx_2$.

Démonstration :

On a: $T_1 T_2 = e^{i\varphi_1(x)/\hbar} e^{i\varphi_2(x-\nu_1)/\hbar} \tau_1 \tau_2$
 et $T_2 T_1 = e^{i\varphi_1(x-\nu_2)/\hbar} e^{i\varphi_2(x)/\hbar} \tau_2 \tau_1$,
 donc $T_1 T_2 = \exp(i [\varphi_1(x) - \varphi_1(x-\nu_2) + \varphi_2(x-\nu_1) - \varphi_2(x)]/\hbar) T_2 T_1$.

Avec les notations de la figure ci-dessous:



on a: $\varphi_1(x) - \varphi_1(x-\nu_2) = \int_4 d\varphi_1 = \int_4 (tA - \tau_1 tA) = t \int_2 + 4 A$
 et: $\varphi_2(x-\nu_1) - \varphi_2(x) = \int_1 d\varphi_2 = \int_1 (tA - \tau_2 tA) = t \int_1 + 3 A$.
 Donc $\varphi_2(x-\nu_1) - \varphi_2(x) + \varphi_1(x) - \varphi_1(x-\nu_2) = t \int_1 + 2 + 3 + 4 A$
 $= t \int_{\mathcal{C}} dA = \int_{\mathcal{C}} B dx_1 dx_2 = t\Phi$.

Donc $T_1 T_2 = e^{it\Phi/\hbar} T_2 T_1$.

Construisons maintenant la rotation magnétique: on a $\kappa^*(dA) = dA$, donc il existe une fonction f avec $tA - \kappa^* tA = df$. On pose alors $\mathfrak{F} = e^{if/\hbar} \kappa^*$, \mathfrak{F} agit sur les espaces des fonctions et les 1-formes de carré intégrable et est unitaire sur ces deux espaces. On a:

Lemme 1.3 :

\mathfrak{F} commute avec P .

Démonstration :

$$\begin{aligned} \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \mathfrak{F}(\tilde{D} - tA)u &= e^{if(x)/\hbar} \kappa^*(\tilde{D} - tA)u \\ &= e^{if(x)/\hbar} [\tilde{D}\kappa^*u - (\kappa^*tA)(\kappa^*u)] \\ &= e^{if(x)/\hbar} (\tilde{D}\kappa^*u - A\kappa^*u + df \kappa^*u) \\ &= (\tilde{D} - tA)(e^{if(x)/\hbar} \kappa^*u) \\ &= (\tilde{D} - tA)\mathfrak{F}u. \end{aligned}$$

Passant aux adjoints on a:

$$\mathfrak{F}(\tilde{D} - tA)^* = (\tilde{D} - tA)^* \mathfrak{F}$$

et, comme $(\tilde{D} - tA)^*(\tilde{D} - tA) = \sum_{j=1,2} (\hbar D_j - tA_j)^2$, et que \mathfrak{F} commute avec V ,

\mathfrak{F} commute avec $P = \sum_{j=1,2} (\hbar D_j - tA_j)^2 + V$. \square

Lemme 1.4 :

Quitte à ajouter à f une constante, on peut supposer $\mathfrak{F}^6 = \text{Id}$.

Démonstration :

$\mathfrak{F}^6 = \text{Id}$ pour tout h équivaut à $f + \kappa^* f + \dots + \kappa^{*5} f = 0$ et on a:
 $d(f + \kappa^* f + \dots + \kappa^{*5} f) = tA - \kappa^* tA + \kappa^*(tA - \kappa^* tA) + \dots + \kappa^{*5}(tA - \kappa^* tA)$
 $= tA - \kappa^{*6} tA = 0.$

Quitte à ajouter une constante à f , on peut avoir $f + \kappa^* f + \dots + \kappa^{*5} f = 0$,
et donc $\mathfrak{F}^6 = \text{Id}$. \square

On a aussi besoin d'une troisième translation magnétique T_3 définie
comme T_1 et T_2 à partir du vecteur $\nu_3 = \kappa(\nu_2) = \kappa^2(\nu_1)$ et d'une fonction
 ψ_3 . On peut obtenir des relations de commutation commodes:

Lemme 1.5 :

Quitte à modifier ψ_1, ψ_2, ψ_3 en leur ajoutant des constantes, on peut
supposer:

(1.1) $\mathfrak{F}T_2 = T_1\mathfrak{F}$

(1.2) $\mathfrak{F}T_3 = T_2\mathfrak{F}$

(1.3) $\mathfrak{F}T_1^{-1} = T_3\mathfrak{F}.$

Démonstration :

On a les trois équivalences:

Pour tout $h > 0, \mathfrak{F}T_2 = T_1\mathfrak{F} \Leftrightarrow (1.4) f + \kappa^* \psi_2 - \psi_1 - \tau_1 f = 0$

Pour tout $h > 0, \mathfrak{F}T_3 = T_2\mathfrak{F} \Leftrightarrow (1.5) f + \kappa^* \psi_3 - \psi_2 - \tau_2 f = 0$

Pour tout $h > 0, \mathfrak{F}T_1^{-1} = T_3\mathfrak{F} \Leftrightarrow (1.6) f - \tau_3 \kappa^* \psi_1 - \psi_3 - \tau_3 f = 0.$

Les différentielles des membres de droite des égalités (1.4), (1.5) et
(1.6) sont nulles et les expressions à annuler sont donc des constantes. Si
on ajoute trois constantes a_1, a_2, a_3 aux fonctions ψ_1, ψ_2 et ψ_3 , ces trois
expressions sont modifiées respectivement de $-a_1 + a_2, -a_2 + a_3, -a_1 - a_3.$

Comme la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

est inversible, on peut trouver a_1, a_2, a_3 telles que (1.4), (1.5) et (1.6)
soient vérifiées. \square

Lemme 1.6 :

Pour ce choix de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, on a les égalités:

$$(1.7) \quad T_1 T_3 = e^{it\Phi/h} T_3 T_1 = e^{it\Phi/2h} T_2.$$

Démonstration :

On a: $T_1 T_3 = e^{i(\varphi_1 + \tau_1 \varphi_3)/h} \tau_2 = e^{i(\varphi_1 + \tau_1 \varphi_3 - \varphi_2)/h} T_2$
 et $d(\varphi_1 + \tau_1 \varphi_3 - \varphi_2) = 0$, donc $\varphi_1 + \tau_1 \varphi_3 - \varphi_2$ est une constante a et
 $T_1 T_3 = e^{ia/h} T_2$.

On conjugue cette égalité par \mathfrak{F} . Les relations de commutation du Lemme 1.5 donnent:

$$\mathfrak{F}^{-1} T_1 T_3 \mathfrak{F} = T_2 T_1^{-1} \text{ et } \mathfrak{F}^{-1} T_2 \mathfrak{F} = T_3 \text{ et donc } T_2 T_1^{-1} = e^{ia/h} T_3, \text{ soit } T_3 T_1 = e^{-ia/h} T_2.$$

Ces deux relations combinées donnent $T_1 T_3 = e^{i2a/h} T_3 T_1$, et le Lemme 1.2 avec T_3 au lieu de T_2 donne $T_1 T_3 = e^{it\Phi/h} T_3 T_1$, donc $t\Phi/h \equiv 2a/h [2\pi]$ pour tout h , d'où $a = \Phi/2$ et le lemme est démontré. \square

On remarque alors que T_1^{-1} est une translation magnétique:

$$T_1^{-1} = \tau_{-\nu_1} e^{-i\varphi_1/h} = \exp(-i\tau_{-\nu_1} \varphi_1/h) \tau_{-\nu_1}$$

et $d(-\tau_{\nu_1} \varphi_1) = -\tau_{-\nu_1} d\varphi_1 = -\tau_{-\nu_1} (tA - \tau_1 tA) = tA - \tau_{-\nu_1} tA$.

Ceci permet de considérer les trois translations magnétiques $T_4 = T_1^{-1}$, $T_5 = T_2^{-1}$ et $T_6 = T_3^{-1}$.

On introduit h' le plus petit réel en valeur absolue tel que $h' \equiv -t\Phi/h [2\pi]$. Ainsi $e^{ih'/2} = \pm e^{-it\Phi/2h}$, et, quitte à changer tous les T_n en leurs opposés dans le cas où $e^{ih'/2} = -e^{-it\Phi/2h}$, on a, en considérant l'indice n comme un élément de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} [P, \mathfrak{F}] &= [P, T_n] = 0 \\ T_{n+3} &= T_n^{-1} \\ \mathfrak{F} T_{n+1} &= T_n \mathfrak{F} \\ T_n T_{n+2} &= e^{-ih'/2} T_{n+1} \\ T_{n+2} T_n &= e^{ih'/2} T_{n+1} \\ T_{n+1} T_n &= e^{ih'} T_n T_{n+1} \\ \forall \gamma \in \mathbb{N}, T_{n+1}^\gamma &= e^{-ih'\gamma^2/2} T_{n+2}^\gamma T_n^\gamma. \end{aligned}$$

Posant alors $T^\alpha = e^{ih'\alpha_1\alpha_2/2} T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2}$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, on a :

$$(1.8) \quad (T^\alpha)^{-1} = (T^\alpha)^* = e^{-ih'\alpha_1\alpha_2/2} T_2^{-\alpha_2} T_1^{-\alpha_1} \\ = e^{ih'\alpha_1\alpha_2/2} T_1^{-\alpha_1} T_2^{-\alpha_2} \\ = T^{-\alpha}$$

et :

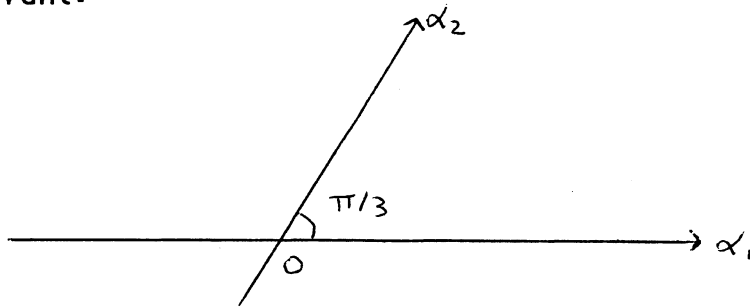
$$(1.9) \quad T^\alpha T^\beta = e^{ih'(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)/2} T_1^{\alpha_1 + \beta_1} T_2^{\alpha_2 + \beta_2} e^{ih'\alpha_2\beta_1} \\ = e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} T^{\alpha + \beta} \\ = e^{ih'\sigma(\alpha, \beta)/2} T^{\alpha + \beta},$$

avec $\sigma(\alpha, \beta) = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$.

Enfin,

$$(1.10) \quad \mathfrak{F} T^\alpha = e^{ih'\alpha_1\alpha_2/2} T_3^{\alpha_1} T_1^{\alpha_2} \mathfrak{F} \\ = \exp[ih'(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2)/2] T_1^{\alpha_1} T_2^{-\alpha_1} T_1^{\alpha_2} \mathfrak{F} \\ = \exp[ih'(-\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2)/2] T_1^{\alpha_1 + \alpha_2} T_2^{-\alpha_1} \mathfrak{F} \\ = T^{r^{-1}(\alpha)} \mathfrak{F}.$$

où $r: (\alpha_1, \alpha_2) \mapsto (-\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$ est la rotation d'angle $\pi/3$ dans le repère suivant :



Remarquons que, si on identifie \mathbb{Z}^2 avec le réseau $\mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}_2$, on a $r = \kappa$.

L'objet des deux sections suivantes est de ramener l'étude du spectre des deux opérateurs étudiés, en fond de puits, à celle d'opérateurs pseudo-différentiels.

2. Introduction des opérateurs pseudo-différentiels dans le cas triangulaire.

On veut ramener l'étude du spectre de l'opérateur de Schrödinger triangulaire en fond de puits à celle d'un opérateur pseudo-différentiel.

On commence par obtenir des fonctions approchant l'espace spectral associé à un petit intervalle situé à la limite inférieure du spectre en considérant les fonctions propres d'un opérateur proche de celui que l'on étudie, mais dont le spectre est discret, qu'on obtient en bouchant tous les puits sauf un.

Soit donc w une fonction C^∞ à support dans la boule de centre 0 et de rayon η , η étant assez petit. On prend w radiale, $w \geq 0$, $w(0) > 0$.

On pose $P_{0,0} = P + \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} w(x - \hat{\beta})$.
Pour $\beta \in \mathbb{Z}^2$, on a noté $\hat{\beta} = \beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2$.

Ainsi $\ell = \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V > 0$ et, d'après un théorème de Persson, le spectre de $P_{0,0}$ est discret dans l'intervalle $[0, \ell[$. Soit $\lambda(h)$ la plus petite valeur propre. Elle est simple et il existe une constante C telle que $0 < \lambda(h) < C h$ et $\text{Sp}(P_{0,0}) \cap]-\infty, \lambda(h) + h/C] = \{\lambda(h)\}$.

Les résultats de Carlsson [Ca] généralisés à $A \neq 0$ ramènent l'étude du spectre de P dans $I(h) =]-\infty, \lambda(h) + h/C]$ à celle d'une matrice infinie opérant sur $L^2(\mathbb{Z}^2)$.

Soit $\varphi_{0,0}$ une fonction propre normalisée de $P_{0,0}$ associée à la valeur propre $\lambda(h)$ et $r_{0,0} = (P - \lambda(h))\varphi_{0,0}$. Ces fonctions ont les propriétés de décroissance suivantes:

$$(2.1) \quad \varphi_{0,0}, r_{0,0} = \mathcal{O}_\varepsilon(\exp(-d_V(0,x)(1-\varepsilon)/h + \varepsilon/h)) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2)$$

$$(2.2) \quad \nabla_{tA}\varphi_{0,0}, \nabla_{tA}r_{0,0} = \mathcal{O}_\varepsilon(\exp(-d_V(0,x)(1-\varepsilon)/h + \varepsilon/h)) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2),$$

où

$$\nabla_{tA}f = ((hD_j - tA_j)f)_{j=1,2}.$$

Ces inégalités sont à prendre au sens suivant:

$$\|e^{(1-\varepsilon)d_V(0,x)/h} (|\varphi_{0,0}| + |r_{0,0}| + |\nabla_{tA}\varphi_{0,0}| + |\nabla_{tA}r_{0,0}|)\|_{L^2} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}.$$

De plus, $\text{supp } r_{0,0} \subset \cup_{\beta \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)} B(\hat{\beta}, \eta)$.

On utilise alors la fonction $\psi_{0,0}$ et ses translatées $\psi_\alpha = T^\alpha \psi_{0,0}$ pour construire une base orthonormée de $F(h)$, espace spectral de P associé à $I(h)$.

Soit donc $r_\alpha = T^\alpha r_{0,0} = (P - \lambda(h)) \psi_\alpha$.

Les fonctions ψ_α, r_α vérifient des propriétés de décroissance:

$\psi_\alpha, r_\alpha, \nabla_{tA} \psi_\alpha, \nabla_{tA} r_\alpha = \mathcal{O}_\varepsilon(\exp(-d_V(x, \hat{\alpha}))(1-\varepsilon)/h + \varepsilon/h)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.
 $\text{Supp } r_\alpha \subset \cup_{\beta \neq \alpha} B(\hat{\beta}, \eta)$.

Π_F étant le projecteur orthogonal sur F , Carlsson [Ca] a montré que $\{v_{j,k}\} = \{\Pi_F \psi_{j,k}\}$ est une base hilbertienne de F pour h assez petit.

Les propriétés de décroissance des fonctions ψ_α, r_α permettent de montrer que la matrice V définie par $V_{\alpha,\beta} = (v_\alpha | v_\beta)$ s'écrit $V = I + \mathcal{O}(\mathfrak{h}^l)$.

On note $A = \mathcal{O}(\mathfrak{h}^l)$ si pour tout ε il existe $h(\varepsilon)$ tel que

$|A_{\alpha,\beta}| \leq (d_{\alpha,\beta}^{(l)})^{1-\varepsilon}$ pour $h \leq h(\varepsilon)$, avec

$d_{\alpha,\beta}^{(l)} = \inf [d_V(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}_1) + d_V(\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2) + \dots + d_V(\hat{\gamma}_{\tilde{l}-1}, \hat{\beta})]$.

$\tilde{l} \geq l, \gamma_1 \dots \gamma_{\tilde{l}-1} \in \mathbb{Z}^2$

$\alpha \neq \gamma_1 \neq \dots \neq \gamma_{\tilde{l}-1} \neq \beta$.

On introduit alors la base orthonormalisée des v_α :

$$e_\alpha = \sum_\beta v_\beta (V^{-\frac{1}{2}})_{\alpha,\beta}.$$

On connaît le comportement des e_α sous l'action des T^β et de \mathfrak{F} :

Lemme 2.1 :

On a: $e_\alpha = T^\alpha e_0$ et il existe une constante c telle que

$$|c| = 1 \text{ et } \mathfrak{F} e_0 = c e_0.$$

Démonstration :

Par construction, $\psi_\alpha = T^\alpha \psi_0$. Comme $P_{0,0}$ est invariant par conjugaison par \mathfrak{F} , $\mathfrak{F} e_0$ est un vecteur propre de $P_{0,0}$ associé à $\lambda(h)$. Cette valeur propre étant simple, $\mathfrak{F} \psi_0 = c \psi_0$ pour un $c \in \mathbb{C}$, et comme \mathfrak{F} est unitaire, $|c| = 1$.

Les opérateurs T^α et \mathfrak{F} commutant avec P , ils commutent aussi avec Π_F , donc $v_\alpha = T^\alpha v_0$ et $\mathfrak{F} v_0 = c v_0$.

L'opération d'orthonormalisation commute avec les opérateurs unitaires T^α et \mathcal{F} , et donc :

$$\begin{aligned} T^\alpha\{e_\beta\} &= T^\alpha(\text{orth}\{v_\beta\}) = \text{orth}(T^\alpha\{v_\beta\}) \\ &= \text{orth}\{e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} v_{\alpha+\beta}\}. \end{aligned}$$

On constate alors que $\text{orth}\{e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} v_{\alpha+\beta}\} = \{e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} e_{\alpha+\beta}\}$, et donc $T^\alpha e_\beta = e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} e_{\alpha+\beta}$. En particulier, $T^\alpha e_0 = e_\alpha$.

De même, $\mathcal{F}\{e_\alpha\} = \mathcal{F}\{\text{orth}\{v_\alpha\}\} = \text{orth}\{\mathcal{F}\{v_\alpha\}\}$
 et $\mathcal{F} v_\alpha = \mathcal{F} T^\alpha v_0 = T^{r^{-1}(\alpha)} \mathcal{F} v_0 = T^{r^{-1}(\alpha)} c v_0 = c v_{r^{-1}(\alpha)}$.
 donc $\mathcal{F}\{e_\alpha\} = \text{orth}\{c v_{r^{-1}(\alpha)}\} = \{c e_{r^{-1}(\alpha)}\}$.
 Ainsi $\mathcal{F}\{e_\alpha\} = c e_{r^{-1}(\alpha)}$ et le lemme est montré. \square

Le résultat de Carlsson s'énonce alors ainsi :

Théorème 2.2 :

La matrice de $P_{t_A|F}$ dans la base des e_α est donnée par :

$$P_{t_A|F} = \lambda \text{Id} + w = \lambda \text{Id} + \tilde{w} + \mathcal{O}(\mathfrak{D}(2)).$$

avec
$$\begin{aligned} w_{\alpha,\beta} &= ((P-\lambda)e_\beta | e_\alpha) \\ \tilde{w}_{\alpha,\beta} &= ((P-\lambda)\varphi_\beta | \varphi_\alpha). \end{aligned}$$

Nous allons à présent étudier comment les propriétés d'invariance de P se traduisent sur la matrice w .

On a
$$\begin{aligned} w_{\alpha,\beta} &= ((P-\lambda)e_\beta | e_\alpha) = ((P-\lambda)T^\beta e_0 | T^\alpha e_0) \\ &= (T^\beta(P-\lambda)e_0 | T^\alpha e_0) = ((P-\lambda)e_0 | T^{-\beta} T^\alpha e_0) \\ &= ((P-\lambda)e_0 | e^{ih'(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)/2} T^{\alpha-\beta} e_0) \end{aligned}$$

donc
$$w_{\alpha,\beta} = e^{ih'(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)/2} w_{\alpha-\beta,0}.$$

Posons $f(\alpha) = w_{\alpha,0}$.

L'invariance de w par rotation s' écrit :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= ((P-\lambda)e_0 | T^\alpha e_0) = (\mathcal{F}(P-\lambda)e_0 | \mathcal{F}T^\alpha e_0) \\ &= ((P-\lambda)\mathcal{F}e_0 | T^{r^{-1}(\alpha)} \mathcal{F}e_0) = w_{r^{-1}(\alpha),0} = f(r^{-1}(\alpha)). \end{aligned}$$

Donc $f \circ r = f$.

De plus w est hermitienne donc $w_{\alpha,0} = \bar{w}_{0,\alpha}$, i.e. $f(-\alpha) = \bar{f}(\alpha)$. Comme f est invariante par r , cette propriété exprime que f est réelle.

En résumé, on a montré:

Théorème 2.3 :

Il existe une fonction f sur \mathbb{R}^2 , réelle, à décroissance exponentielle, invariante par la rotation r , telle que

$$w_{\alpha, \beta} = e^{ih'(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)/2} f(\alpha - \beta).$$

On veut maintenant ramener l'étude de la matrice w à celle d'un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole possède des symétries traduisant celles de w .

Remarquons tout d'abord que w est unitairement équivalente à la matrice \hat{w} définie par: $\hat{w}_{\alpha, \beta} = e^{ih'(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)/2} w_{\alpha, \beta}$.

Cette matrice définit un opérateur sur $L^2(\mathbb{Z}^2)$:

$$\hat{w}u(\alpha) = \sum_{\beta} e^{-ih'(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)/2} f(\alpha - \beta) u(\beta).$$

C'est un opérateur de convolution en la deuxième variable, qui par transformée de Fourier est unitairement semblable à l'opérateur \tilde{w} défini sur $L^2(\mathbb{Z} \times [0, 2\pi[)$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{w}u(\alpha_1, \theta) &= \sum_{\beta} e^{-ih'(\alpha_1 + \beta_1)\beta_2/2} e^{i\beta_2\theta} f(\alpha_1 - \beta_1, \beta_2) u(\beta_1, \theta) \\ &= \sum_{\beta} f(\beta) e^{-ih'(2\alpha_1 - \beta_1)\beta_2/2} e^{i\beta_2\theta} u(\alpha_1 - \beta_1, \theta) \\ &= \sum_{\beta} e^{ih'\beta_1\beta_2/2} f(\beta) e^{-i\beta_2(h'\alpha_1 - \theta)} u(\alpha_1 - \beta_1, \theta). \end{aligned}$$

Cet opérateur a le même spectre que sa restriction à $\mathbb{Z} \times [0, h'[$ et si on identifie $\mathbb{Z} \times [0, h'[$ à \mathbb{R} par $x = h'\alpha_1 - \theta$, on trouve que w a le même spectre que l'opérateur w' agissant sur $L^2(\mathbb{R})$ par:

$$w'u(x) = \sum_{\beta} f(\beta) e^{ih'\beta_1\beta_2/2} e^{-i\beta_2x} u(x - h'\beta_1)$$

w' est le h' -quantifié de Weyl du symbole réel, 2π -périodique en x et ξ :

$$(2.3) \quad p^0(x, \xi) = \sum_{(j, k) \in \mathbb{Z}^2} f(j, k) e^{-i(kx + j\xi)}$$

c'est-à-dire:

$$w'u(x) = (2\pi h')^{-1} \iint e^{i(x-y)\xi/h'} p^0(\frac{1}{2}(x+y), \xi) u(y) dy dx.$$

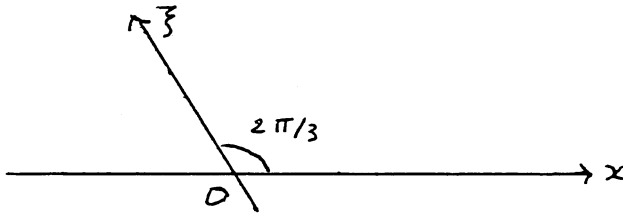
Traduisons la propriété d'invariance de f par r :

$$\begin{aligned} p^0(x, \xi) &= \sum_{(j,k)} f \circ r(j,k) e^{-i(kx+j\xi)} \\ &= \sum_{j,k} f(j,k) e^{-i(r^{-1}(j,k) | (\xi, x))} \\ &= \sum_{j,k} f(j,k) e^{-i((j+k, -j) | (\xi, x))} \\ &= \sum_{j,k} f(j,k) e^{-i(k\xi + j(\xi - x))} \end{aligned}$$

Donc:

$$(2.4) \quad p^0(x, \xi) = p^0(\xi, \xi - x) = p^0 \circ \rho^{-1}(x, \xi),$$

où ρ est la rotation de $\pi/3$ dans le repère suivant:



Les résultats de $[\text{He-Sj}]_3$ permettent de minorer l'effet tunnel entre les puits les plus proches:

$\forall \varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, si $|\hat{\alpha} - \hat{\beta}| = |\nu_1|$, $|\tilde{w}_{\alpha, \beta}| > C_\varepsilon e^{-(D+\varepsilon)/h}$,

où $D \geq d_V(0, \nu_1)$, $D = d_V(0, \nu_1) + \mathcal{O}(t^2 \sup |B|^2)$.

On obtient donc pour p^0 , en séparant dans la somme (2.3) les termes correspondant aux interactions entre puits les plus proches, c'est-à-dire les termes en $\alpha = (\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(1, -1)$ et $(-1, 1)$:

$$(2.5) \quad p^0(x, \xi) = 2 f(1, 0) [q^0(x, \xi) + r^0(x, \xi)],$$

avec: $q^0(x, \xi) = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$,

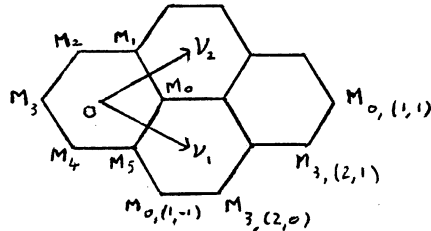
r^0 est analytique, 2π -périodique en x et ξ , invariant par ρ , réel sur le réel et $|r^0(x, \xi)| \leq C e^{-1/Ch}$ dans le domaine complexe $|\text{Im}(x, \xi)| \leq 1/Ch$ pour un $C > 0$.

q^0 et r^0 vérifient la propriété (2.4) d'invariance par rotation.

3. Introduction des opérateurs pseudo-différentiels dans le cas hexagonal.

La situation ne pose pas de problèmes nouveaux par rapport à la section précédente du point de vue de l'analyse, mais la géométrie du problème est plus compliquée.

Rappelons qu'avec les notations du dessin suivant:



les puits sont situés aux points $M_{\varepsilon, \alpha} = \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2} M_{\varepsilon}$ pour $\varepsilon \in \{0, 3\}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}^2$.

On considère comme à la section précédente une fonction w réelle, positive, de classe C^∞ , à support dans une boule de centre O et de rayon η , η étant choisi suffisamment petit. On prendra w radiale avec $w(O) > 0$.

On définit alors pour tout puits M :

$$P_M = P + \sum_{N \text{ puits}, N \neq M} w(x-N).$$

Les P_M sont conjugués les uns des autres par translation et sont donc isospectraux. Leur spectre est discret dans un intervalle $[0, \ell]$ avec $\ell > 0$. Soit $\lambda_0(h)$ leur plus petite valeur propre, qui est simple, et φ_0 une fonction propre de P_{M_0} associée à $\lambda_0(h)$.

Nous aurons besoin dans la suite d'une invariance de φ_0 par rotation. On remarque que l'opérateur $T_1 \mathfrak{F}^4$ commute avec P , et comme $\lambda_0(h)$ est une valeur propre simple, $T_1 \mathfrak{F}^4 \varphi_0 = c \varphi_0$, avec $|c| = 1$. On peut déterminer c :

Les relations (1.2) et (1.3) donnent :

$$\begin{aligned} (T_1 \mathfrak{F}^4)^3 &= T(1,0) \mathfrak{F}^{-2} T(1,0) \mathfrak{F}^{-2} T(1,0) \mathfrak{F}^{-2} \\ &= T(1,0) T r^2(1,0) T r^4(1,0) \\ &= T(1,0) T(-1,1) T(0,-1) \\ &= e^{-ih'/2}. \end{aligned}$$

Donc $c^3 = e^{-ih'/2}$ et quitte à multiplier \mathfrak{F} par un multiple de $e^{i\pi/3}$, ce

qui ne change pas les relations établies à la section 1, on peut avoir $c = e^{-ih'/6}$.

On pose alors $\psi_3 = \mathfrak{F}^3 \psi_0$. ψ_3 est une fonction propre de P_{M_3} associée à $\lambda_0(h)$ et:

$$T_1 \mathfrak{F} \psi_3 = e^{-ih'/6} \psi_0.$$

En composant à gauche par \mathfrak{F}^3 , on obtient:

$$T_1^{-1} \mathfrak{F} \psi_0 = e^{-ih'/6} \psi_3.$$

On note m_0, m_3 les coordonnées de M_0, M_3 dans la base (ν_1, ν_2) , soit $m_0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $m_3 = -m_0 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Soit alors $M = M_{\varepsilon, \alpha}$ un puits. On définit alors ψ_M fonction propre de P_M associée à $\lambda_0(h)$ par:

$$\psi_M = e^{ih' \sigma(m_\varepsilon, \alpha)/2} T^\alpha \psi_\varepsilon.$$

On a noté: $\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi y - x \eta$.

L'objet des paragraphes suivants est de décrire l'action de la rotation et des translations magnétiques sur les fonctions ψ_M .

On a d'abord:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \psi_{M_0, \alpha} &= \mathfrak{F} e^{ih' \sigma(m_0, \alpha)/2} T^\alpha \psi_0 \\ &= e^{ih' \sigma(r^{-1}(m_0), r^{-1}(\alpha))/2} T^{r^{-1}(\alpha)} \mathfrak{F} \psi_0 \\ &= e^{ih' [\sigma(r^{-1}(m_0), r^{-1}(\alpha)) - \frac{1}{3}]/2} T^{r^{-1}(\alpha)} T(1, 0) \psi_3 \\ &= e^{ih' [\sigma(r^{-1}(m_0), r^{-1}(\alpha)) + \sigma(r^{-1}(\alpha), (1, 0)) - \frac{1}{3}]/2} T^{r^{-1}(\alpha) + (1, 0)} \psi_3. \end{aligned}$$

Comme $r^{-1}(m_0) + (-1, 0) = m_3$, l'expression en exposant s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma(m_3, r^{-1}(\alpha)) - \frac{1}{3} &= \sigma(m_3, r^{-1}(\alpha) + (1, 0)) \text{ car:} \\ \sigma(m_3, (1, 0)) &= \sigma((-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (1, 0)) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \psi_{M_0, \alpha} &= e^{ih' \sigma(m_3, r^{-1}(\alpha) + (1, 0)) / 2} \tau r^{-1}(\alpha) + (1, 0) \psi_3 \\ &= \psi_{3, r^{-1}(\alpha) + (1, 0)} \\ &= \psi_{\mathcal{K}^{-1}(M_0, \alpha)}. \end{aligned}$$

(On a fait l'abus de notation $\psi_{\varepsilon, \beta} = \psi_{M_{\varepsilon, \beta}}$).

De même,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \psi_{M_3, \alpha} &= \mathfrak{F} e^{ih' \sigma(m_3, \alpha) / 2} \tau \alpha \psi_3 \\ &= e^{ih' \sigma(r^{-1}(m_3), r^{-1}(\alpha)) / 2} \tau r^{-1}(\alpha) \mathfrak{F} \psi_3 \\ &= e^{ih' [\sigma(r^{-1}(m_3), r^{-1}(\alpha)) - \frac{1}{3}] / 2} \tau r^{-1}(\alpha) \tau(-1, 0) \psi_0 \\ &= e^{ih' [\sigma(r^{-1}(m_3) + (1, 0), r^{-1}(\alpha)) - \frac{1}{3}] / 2} \tau r^{-1}(\alpha) + (-1, 0) \psi_0. \end{aligned}$$

Comme $r^{-1}(m_3) + (1, 0) = m_0$, et $\sigma(m_0, (-1, 0)) = -\frac{1}{3}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} \psi_{M_3, \alpha} &= e^{ih' \sigma(m_0, r^{-1}(\alpha) + (-1, 0)) / 2} \tau r^{-1}(\alpha) + (-1, 0) \psi_0 \\ &= \psi_{0, r^{-1}(\alpha) + (-1, 0)} \\ &= \psi_{\mathcal{K}^{-1}(M_3, \alpha)}. \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \tau \beta \psi_{M_{\varepsilon, \alpha}} &= \tau \beta e^{ih' \sigma(m_{\varepsilon}, \alpha) / 2} \tau \alpha \psi_{\varepsilon} \\ &= e^{ih' [\sigma(m_{\varepsilon}, \alpha) + \sigma(\beta, \alpha)] / 2} \tau \alpha + \beta \psi_{\varepsilon} \\ &= e^{ih' [\sigma(m_{\varepsilon}, \alpha + \beta) + \sigma(\beta, \alpha + m_{\varepsilon})] / 2} \tau \alpha + \beta \psi_{\varepsilon} \\ &= e^{ih' \sigma(\beta, \alpha + m_{\varepsilon}) / 2} \psi_{M_{\varepsilon, \alpha + \beta}} \\ &= e^{ih' \sigma(\beta, \tilde{M}_{\varepsilon, \alpha}) / 2} \psi_{\tau \beta(M_{\varepsilon, \alpha})}. \end{aligned}$$

Où $\tilde{M}_{\varepsilon, \alpha} = m_{\varepsilon} + \alpha$ désigne les coordonnées de $M_{\varepsilon, \alpha}$ dans la base (ν_1, ν_2) .

En résumé, si M est un puits, on a les relations :

$$(3.1) \quad \mathfrak{F} \psi_M = \psi_{\mathcal{K}^{-1}(M)}$$

$$(3.2) \quad \tau \alpha \psi_M = e^{ih' \sigma(\alpha, \tilde{M}) / 2} \psi_{\tau \alpha(M)}.$$

Comme à la section précédente, on considère F l'espace spectral de P associé à l'intervalle $]-\infty, \lambda_0(h) + h/C]$, la famille $\{\nu_M\}$ des projetés orthogonaux sur F des ψ_M , et $\{e_M\}$ la base hilbertienne de F obtenue par orthonormalisation de $\{\nu_M\}$.

Les e_M vérifient alors les relations:

$$(3.1)' \quad \mathcal{F} e_M = e_{\mathcal{K}^{-1}(M)}$$

$$(3.2)' \quad T^\alpha e_M = e^{ih'\sigma(\alpha, \tilde{M})/2} e_{\tau^\alpha(M)}.$$

On appelle W la matrice de $P|_F$ dans la base $\{e_M\}$, et on va maintenant chercher la traduction sur les coefficients de W de l'invariance de $P(h)$ par les translations et la rotation magnétiques.

Si M et N sont deux puits on a:

$$\begin{aligned} (3.3) \quad w_{M,N} &= (P e_N | e_M) \\ &= (\mathcal{F} P e_N | \mathcal{F} e_M) \\ &= (P e_{\mathcal{K}^{-1}(N)} | e_{\mathcal{K}^{-1}(M)}) \\ &= w_{\mathcal{K}^{-1}(M), \mathcal{K}^{-1}(N)}. \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (3.4) \quad w_{M,N} &= (P e_N | e_M) \\ &= (T^\alpha P e_N | T^\alpha e_M) \\ &= (e^{ih'\sigma(\alpha, \tilde{N})/2} P e_{\tau^\alpha(N)} | e^{ih'\sigma(\alpha, \tilde{M})/2} e_{\tau^\alpha(M)}) \\ &= e^{ih'\sigma(\alpha, \tilde{N}-\tilde{M})/2} w_{\tau^\alpha(M), \tau^\alpha(N)}. \end{aligned}$$

Cette dernière formule s'écrit aussi:

$$w_{M,N} = \exp[ih'\sigma(\tilde{\tau}^\alpha(M) - \tilde{M}, \tilde{N} - \tilde{M})/2] w_{\tau^\alpha(M), \tau^\alpha(N)}$$

$$\text{i.e.: } e^{ih'\sigma(\tilde{M}, \tilde{N})/2} w_{M,N} = \exp[ih'\sigma(\tilde{\tau}^\alpha(M), \tilde{\tau}^\alpha(N))/2] w_{\tau^\alpha(M), \tau^\alpha(N)}.$$

Ceci conduit à introduire la fonction Ψ définie sur $\Gamma \times \Gamma$, où Γ est l'ensemble des puits, par:

$$(3.5) \quad \Psi(M,N) = e^{ih'\sigma(\tilde{M}, \tilde{N})/2} w_{M,N}.$$

Cette fonction vérifie:

$$(3.6) \quad \Psi(\tau^\alpha(M), \tau^\alpha(N)) = \Psi(M,N).$$

De plus, (3.3) et la propriété de w d'être hermitienne donnent:

$$(3.7) \quad \Psi(\mathcal{K}(M), \mathcal{K}(N)) = \Psi(M,N)$$

$$(3.8) \quad \Psi(N,M) = \bar{\Psi}(M,N).$$

Grâce à (3.6), on peut trouver des fonctions $g_{j,k}$, $j,k \in \{0,3\}$ telles que $\Psi(M,N) = g_{j,k}(N-M)$ pour $M \in \Gamma_j$ et $N \in \Gamma_k$.

(3.7) donne:

$$(3.9) \quad g_{j,k}(\kappa(\nu)) = g_{j,k}(\nu) \text{ pour } \nu \in \Gamma_k - \Gamma_j, \text{ avec } j=3-j.$$

Ainsi $g_{j,k}(\nu) = g_{j,k}(-\nu)$ et comme, grâce à (3.8), $g_{j,k}(-\nu) = \overline{g_{k,j}(\nu)}$, on a: $g_{j,k}(\nu) = \overline{g_{k,j}(\nu)}$, ie:

$$(3.10) \quad \overline{g_{3,3}} = g_{0,0} \text{ et } g_{0,3} \text{ et } g_{3,0} \text{ sont réels.}$$

On définit alors la fonction g sur $\Gamma - \Gamma$ par:

$$\begin{aligned} g &= g_{3,0} \text{ sur } \Gamma_0 - \Gamma_3 \\ g &= g_{0,3} \text{ sur } \Gamma_3 - \Gamma_0 \\ g &= \overline{g_{3,3}} = g_{0,0} \text{ sur } \Gamma_3 - \Gamma_3 = \Gamma_0 - \Gamma_0. \end{aligned}$$

(3.9) donne:

$$(3.11) \quad g \circ \kappa = \overline{g}$$

Grâce à (3.10), on sait que g est réelle sur $\Gamma_0 - \Gamma_3 \cup \Gamma_3 - \Gamma_0$.

On a donc montré:

Théorème 3.1 :

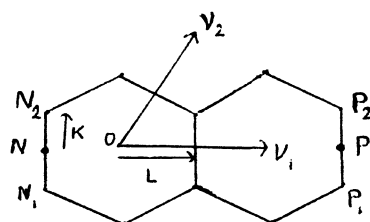
Il existe une fonction g définie sur $\Gamma - \Gamma$, réelle sur $\Gamma_0 - \Gamma_3 \cup \Gamma_3 - \Gamma_0$, telle que:

$$(3.11) \quad g \circ \kappa = \overline{g}.$$

$$(3.12) \quad w_{M,N} = e^{ih' \sigma(\tilde{N}, \tilde{M})/2} g(N-M) \text{ si } M \in \Gamma_0 \text{ ou } N \in \Gamma_0.$$

$$(3.13) \quad w_{M,N} = e^{ih' \sigma(\tilde{N}, \tilde{M})/2} \overline{g}(N-M) \text{ si } M \in \Gamma_3 \text{ ou } N \in \Gamma_3.$$

On veut maintenant ramener l'étude de l'opérateur W à celle d'un opérateur pseudo-différentiel agissant sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$. On regroupe les puits par couples (N_1, N_2) , tels que $N_2 - N_1$ soit vertical et la distance $|N_2 - N_1|$ soit minimale:



On a: $L = \frac{1}{2} \nu_1$, $K = 1/6 (2\nu_2 - \nu_1)$ et $\ell = \tilde{L} = (\frac{1}{2}, 0)$, $k = \tilde{K} = (-1/6, \frac{1}{3})$ sont leurs coordonnées dans (ν_1, ν_2) . $N_2 = N + K$, $N_1 = N - K$, et on repère le couple par l'élément α de \mathbb{Z}^2 tel que $\tilde{N} = \tilde{L} + \alpha$.

Soient P avec $\tilde{P} = \ell + \beta$, $P_1 = P - K$, $P_2 = P + K$.

On note:

$$w_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} w_{N_1, P_1} & w_{N_1, P_2} \\ w_{N_2, P_1} & w_{N_2, P_2} \end{pmatrix}.$$

On a:

$$\begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= \begin{pmatrix} e^{ih'\sigma(\tilde{P}_1, \tilde{N}_1)/2} \bar{g}(P_1 - N_1) & e^{ih'\sigma(\tilde{P}_2, \tilde{N}_1)/2} g(P_2 - N_1) \\ e^{ih'\sigma(\tilde{P}_1, \tilde{N}_2)/2} g(P_1 - N_2) & e^{ih'\sigma(\tilde{P}_2, \tilde{N}_2)/2} g(P_2 - N_2) \end{pmatrix} \\ &= e^{ih'\sigma(\tilde{P}, \tilde{N})/2} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\tilde{P} - \tilde{N}, k)/2} \bar{g}(P_1 - N_1) & e^{-ih'\sigma(\tilde{P} + \tilde{N}, k)/2} g(P_2 - N_1) \\ e^{ih'\sigma(\tilde{P} + \tilde{N}, k)/2} g(P_1 - N_2) & e^{ih'\sigma(\tilde{P} - \tilde{N}, k)/2} g(P_2 - N_2) \end{pmatrix} \\ &= e^{ih'\sigma(\beta + \ell, \alpha + \ell)/2} \\ &\quad \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\beta - \alpha, k)/2} \bar{g}(\beta - \alpha) & e^{-ih'\sigma(\beta + \alpha + 2\ell, k)/2} g(\beta - \alpha + 2k) \\ e^{ih'\sigma(\beta + \alpha + 2\ell, k)/2} g(\beta - \alpha - 2k) & e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, k)/2} g(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \\ &= e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, \ell)/2} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\alpha + \ell, k)/2} & 0 \\ 0 & e^{ih'\sigma(\alpha + \ell, k)/2} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} \bar{g}(\beta - \alpha) & g(\beta - \alpha + 2k) \\ g(\beta - \alpha - 2k) & e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} g(\beta - \alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ih'\sigma(\beta + \ell, k)/2} & 0 \\ 0 & e^{-ih'\sigma(\beta + \ell, k)/2} \end{pmatrix} \\ &= e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} A_\alpha \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} \bar{g}(\beta - \alpha) & g(\beta - \alpha + 2k) \\ g(\beta - \alpha - 2k) & e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} g(\beta - \alpha) \end{pmatrix} A_{\beta}^{-1} \end{aligned}$$

où l'on a noté:

$$A_\gamma = e^{-ih'\sigma(\gamma, \ell)/2} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\gamma + \ell, k)/2} & 0 \\ 0 & e^{ih'\sigma(\gamma + \ell, k)/2} \end{pmatrix}.$$

La matrice w est donc unitairement semblable à la matrice w' définie par:

$$w'_{\alpha, \beta} = e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} \bar{g}(\beta - \alpha) & g(\beta - \alpha + 2k) \\ g(\beta - \alpha - 2k) & e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, k)} g(\beta - \alpha) \end{pmatrix}.$$

Pour éviter une complication technique dans la suite, on travaillera avec la matrice w'' : $w''_{\alpha, \beta} = w'_{r^{-2}(\alpha), r^{-2}(\beta)}$, ce qui revient à remplacer k par $r^2(k)$ dans la formule précédente.

Considérons à présent l'application M_B qui à $\Gamma \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Z}^2, M_2(\mathbb{C}))$ associe la matrice infinie $M_B(\Gamma)$ définie par: $M_B(\Gamma)_{\alpha, \beta} = e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \Gamma(\beta - \alpha)$.

On a une formule de composition:

$$\begin{aligned} [M_B(\Gamma_1)M_B(\Gamma_2)]_{\alpha, \beta} &= \sum_{\gamma} e^{ih'[\sigma(\gamma, \alpha) + \sigma(\beta, \gamma)]/2} \Gamma_1(\gamma - \alpha) \Gamma_2(\beta - \gamma) \\ &= e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \sum_{\gamma} e^{ih'\sigma(\beta - \alpha, \gamma)/2} \Gamma_1(\gamma) \Gamma_2(\beta - \alpha - \gamma) \\ &= [M_B(\Gamma_1 \#_B \Gamma_2)]_{\alpha, \beta} \end{aligned}$$

$$\text{où: } \Gamma_1 \#_B \Gamma_2(\beta) = \sum_{\beta' + \beta'' = \beta} e^{ih'\sigma(\beta'', \beta')/2} \Gamma_1(\beta') \Gamma_2(\beta'').$$

Soit $\mathcal{U}_B = \{M_B(f) / f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Z}^2, M_2(\mathbb{C}))\}$. \mathcal{U}_B est engendré par les "translations" $\tau_{\bar{\gamma}}^{-B} A = M_B(\delta_{\gamma} A)$, où $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ et $A \in M_2(\mathbb{C})$.

Remarquons que les translations $\tau_{\bar{\gamma}}^B A = M_{-B}(\delta_{\gamma} A)$ commutent avec \mathcal{U}_B et $\delta_{\alpha} \#_B \delta_{\beta} = e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \delta_{\alpha + \beta}$.

On cherche un morphisme entre \mathcal{U}_B et l'algèbre d'opérateurs de Weyl engendrée par $\exp \mathcal{L}_1(x, D) = \text{op}_{\hbar}^W e^{i\xi}$ et $\exp \mathcal{L}_2(x, D) = \text{op}_{\hbar}^W e^{ix}$, où on a posé $\mathcal{L}(x, \xi) = (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = (\xi, x)$.

On définit donc: $R(\delta_{\alpha} A) = \text{op}_{\hbar}^W e^{i\alpha \cdot \mathcal{L}} A$.

Ainsi, comme $\tau_{\bar{\alpha}}^{-B} A_1 \tau_{\bar{\beta}}^{-B} A_2 = e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \tau_{\bar{\alpha + \beta}}^{-B} A_1 A_2$
 et $(\text{op}_{\hbar}^W e^{i\alpha \cdot \mathcal{L}} A_1)(\text{op}_{\hbar}^W e^{i\beta \cdot \mathcal{L}} A_2) = e^{ih'(\alpha \cdot \mathcal{L}, \beta \cdot \mathcal{L})/2} \text{op}_{\hbar}^W (e^{i((\alpha + \beta) \cdot \mathcal{L})} A_1 A_2)$
 $= e^{ih'\sigma(\beta, \alpha)/2} \text{op}_{\hbar}^W (e^{i((\alpha + \beta) \cdot \mathcal{L})} A_1 A_2)$,

le prolongement R à $\mathcal{L}^1(\mathbb{Z}^2, M_2(\mathbb{C}))$: $R(f) = \text{op}_{\hbar}^W (\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} e^{i\alpha \cdot \mathcal{L}} f(\alpha))$ est tel que $M_B(f) \mapsto R(f)$ soit un morphisme.

Suivant [He-S]_B, on montre alors que si f est à décroissance exponentielle, $R(f)$ comme opérateur sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ et $M_B(f)$ ont le même spectre:

Il suffit de montrer: $0 \notin \text{Sp}(R(f)) \Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(M_B(f))$.

Supposons donc que $M_B(f)$ inversible. Son inverse $[M_B(f)]^{-1}$ commute avec les translations $\tau_{\alpha}^B \text{Id}$ et vérifie l'estimation

$$|[M_B(f)]^{-1}_{\alpha, \beta}| \leq C e^{-|\alpha - \beta|/Ch'} \text{ pour un } C > 0.$$

Donc il existe $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{Z}^2, M_2(\mathbb{C}))$ à décroissance exponentielle tel que $M_B(f)M_B(g) = M_B(g)M_B(f) = \text{Id}$.

On a donc: $R(f)R(g) = R(g)R(f) = \text{Id}$ et $R(f)$ est inversible.

Supposons maintenant $R(f)$ inversible. On utilise un théorème de Beals: Soit $a \in S_{0,0}^0$ tel que $A = \text{op}^W a$ soit inversible au sens de $\mathcal{X}(L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2))$; alors il existe $b \in S_{0,0}^0$ tel que $A^{-1} = \text{op}^W b$.

Ce théorème permet d'affirmer que $R(f)^{-1}$ est le quantifié de Weyl d'un symbole b , et comme $R(f)^{-1}$ commute comme $R(f)$ avec e^{ix} et $e^{ih'D}$, b est 2π -périodique en x et ξ et donc b s'écrit $b = \sum_{\alpha} \hat{b}(\alpha) e^{i\alpha \cdot \mathcal{L}}$ où \hat{b} , transformée de Fourier de b , est à décroissance exponentielle.

Ainsi $R(f)^{-1} = R(g)$ et $R(f)R(g) = R(g)R(f) = \text{Id}$, $M_B(f)M_B(g) = M_B(g)M_B(f) = \text{Id}$ et $M_B(f)$ est inversible.

Le symbole associé à w'' est:

$$(3.14) \quad P^0(x, \xi, h') = \sum_{\alpha} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 x)} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(\alpha, r^2(k))} \bar{g}(\alpha) & g(\alpha + 2r^2(k)) \\ g(\alpha - 2r^2(k)) & e^{ih'\sigma(\alpha, r^2(k))} g(\alpha) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} P_{11}^0(x, \xi, h') & P_{12}^0(x, \xi) \\ P_{21}^0(x, \xi) & P_{22}^0(x, \xi, h') \end{pmatrix}.$$

C'est un symbole hermitien, 2π -périodique en x et ξ , dont on va maintenant étudier les symétries de rotation.

On a d'abord:

$$P^0(-x, -\xi, h') = \sum_{\alpha} e^{i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 x)} \begin{pmatrix} e^{ih'\sigma(\alpha, r^2(k))} g(\alpha) & g(\alpha - 2r^2(k)) \\ g(\alpha + 2r^2(k)) & e^{-ih'\sigma(\alpha, r^2(k))} \bar{g}(\alpha) \end{pmatrix}$$

Donc:

$$(3.15) \quad P^0(-x, -\xi, h') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^0(x, \xi, h') \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On veut aussi une invariance par rotation de $2\pi/3$, dans le même repère qu'à la section 2.

On commence par remarquer que $r^2(\alpha) = (-\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1)$ et:

$$P^0(x, \xi, h') = \sum_{\alpha} e^{i[(-\alpha_1 - \alpha_2)(-x) + \alpha_1(\xi - x)]} \begin{pmatrix} e^{-ih'\sigma(r^2(\alpha), r^4(k))} \bar{g}(r^2(\alpha)) & g(r^2(\alpha) + 2r^4(k)) \\ g(r^2(\alpha) - 2r^4(k)) & e^{ih'\sigma(r^2(\alpha), r^4(k))} g(r^2(\alpha)) \end{pmatrix}$$

Comme $r^4(2k) - r^2(2k) = (1, 0)$, le changement de variable $\beta = r^2(\alpha)$ dans la somme donne:

$$P^0(x, \xi, h') = \sum_{\beta} e^{i(\beta_1(-x) + \beta_2(\xi - x))} \begin{pmatrix} e^{-ih'[\sigma(\beta, r^2(k)) + \beta_2/2]} \bar{g}(\beta) & g(\beta + 2r^2(k) + (1, 0)) \\ g(\beta - 2r^2(k) - (1, 0)) & e^{ih'[\sigma(\beta, r^2(k)) + \beta_2/2]} g(\beta) \end{pmatrix}.$$

Posons $(y, \eta) = (\xi - x, -x) = p^{-2}(x, \xi)$. On a obtenu:

$$P^0(x, \xi, h') = \begin{pmatrix} P_{11}^0(y - h'/2, \eta, h') & e^{-i\eta} P_{12}^0(y, \eta) \\ e^{i\eta} P_{21}^0(y, \eta) & P_{22}^0(y + h'/2, \eta, h') \end{pmatrix}$$

et on veut traduire cette relation au niveau des opérateurs. On a:

$$\begin{aligned} \text{op}_{h'}^W & \begin{pmatrix} P_{11}^0(y - h'/2, \eta, h') & e^{-i\eta} P_{12}^0(y, \eta) \\ e^{i\eta} P_{21}^0(y, \eta) & P_{22}^0(y + h'/2, \eta, h') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tau_{h'/2} & 0 \\ 0 & \tau_{-h'/2} \end{pmatrix} \text{op}_{h'}^W P^0(y, \eta, h') \begin{pmatrix} \tau_{-h'/2} & 0 \\ 0 & \tau_{h'/2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En effet:

$$\begin{aligned} & [(\tau_{h'/2} \text{op}_{h'}^W P_{11}^0(x, \xi, h') \tau_{-h'/2}) u](x) \\ &= (2\pi h')^{-1} \iint e^{i(x - h'/2 - y)\xi/h'} P_{11}^0(\frac{1}{2}(x - h'/2 + y), \xi, h') u(y + \frac{1}{2}h') dy d\xi \\ &= (2\pi h')^{-1} \iint e^{i(x - z)\xi/h'} P_{11}^0(\frac{1}{2}(x + z) - h'/2, \xi, h') u(z) dz d\xi \\ &= [(\text{op}_{h'}^W P_{11}^0(x - h'/2, \xi, h')) u](x). \end{aligned}$$

De même, $\tau_{-h'/2} \text{op}_{h'}^W P_{22}^0(x, \xi, h') \tau_{h'/2} = \text{op}_{h'}^W P_{22}^0(x + h'/2, \xi, h')$.

Et:

$$\begin{aligned}
& [(\tau_{h'/2} \text{op}_{h'}^W P_2^0(x, \xi) \tau_{h'/2}) u](x) \\
&= (2\pi h')^{-1} \iint e^{i(x-h'/2-y)\xi/h'} P_2^0(\frac{1}{2}(x-h'/2+y), \xi) u(y-\frac{1}{2}h') dy d\xi \\
&= (2\pi h')^{-1} \iint e^{i(x-z-h')\xi/h'} P_2^0(\frac{1}{2}(x+z), \xi) u(z) dz d\xi \\
&= \{[\text{op}_{h'}^W (e^{-i\xi} P_2^0(x, \xi))]u\}(x).
\end{aligned}$$

$$\text{De même, } \tau_{-h'/2} (\text{op}_{h'}^W P_{21}^0(x, \xi)) \tau_{-h'/2} = \text{op}_{h'}^W (e^{i\xi} P_{21}^0(x, \xi)).$$

On a donc montré :

$$(3.16) \quad \text{Op}_{h'}^W(P^0 \circ p^2) = T (\text{Op}_{h'}^W P^0) T^{-1}, \text{ où } T = \begin{pmatrix} \tau_{h'/2} & 0 \\ 0 & \tau_{-h'/2} \end{pmatrix}.$$

L'étude complète des invariances des opérateurs déduites des symétries de leurs symboles sera faite à la section suivante.

On veut maintenant séparer dans la somme (3.14) les termes correspondant aux interactions entre puits les plus proches pour chaque P_2^0 . Dans les expressions donnant P_1^0 et P_{22}^0 , aucun de ces termes n'intervient. Dans l'expression de P_2^0 , il faut retenir les termes correspondant à $\alpha=0$, $(1,0)$ et $(0,1)$. P_{21}^0 est le conjugué de P_2^0 , et on obtient, avec $c(h)=g(r^2(2k))$:

$$(3.17) \quad P^0(x, \xi, h') = c(h)[Q^0(x, \xi) + R^0(x, \xi, h')], \text{ avec:}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, 1/C_\varepsilon e^{-(D+\varepsilon)/h} \leq |c(h)| \leq C_\varepsilon e^{-(D-\varepsilon)/h}$, où $d_V(\frac{1}{3}(v_1+v_2), 2/3(v_1+v_2)) \leq D \leq d_V(\frac{1}{3}(v_1+v_2), 2/3(v_1+v_2)) + Ct^2$ pour un C assez grand ($d_V(\frac{1}{3}(v_1+v_2), 2/3(v_1+v_2))$ est la distance d'Agmon entre les puits les plus proches),

$$Q^0(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{i\xi} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-i\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

R^0 est un symbole analytique, 2π -périodique en x et ξ , hermitien pour x et ξ réels, et il existe $C > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que:

$$|R^0(x, \xi, h')| \leq C e^{-\varepsilon_0/h}, \text{ dans la bande } |\text{Im}(x, \xi)| \leq \varepsilon_0/h.$$

Q^0 et R^0 vérifient les relations d'invariance (3.14) et (3.15).

De plus, $\det(\lambda \text{Id} - Q^0) = \lambda^2 - [3 + 2q^0(x, \xi)]$, où $q^0(x, \xi) = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$ est le symbole introduit à la section précédente.

Ce résultat et celui de la section 2 entraînent le Théorème 2, si on admet le Théorème 1 pour des opérateurs perturbés. La démonstration de ceci est l'objet des sections suivantes.

4. Construction d'opérateurs commutant avec les opérateurs étudiés.

Comme nous l'avons fait pour les opérateurs de Schrödinger dont nous sommes partis, nous allons traduire les symétries des symboles obtenus au chapitres 2 et 3 par l'existence d'opérateurs commutant avec ceux que nous étudions. Ceci nous permet de suivre les symétries des symboles à chaque nouvelle renormalisation.

On supposera dans cette section $\hbar > 0$ et on verra à la section 8 comment on adapte ce qui suit au cas où $\hbar < 0$.

A. L'opérateur scalaire.

On étudie d'abord les opérateurs de Weyl scalaires introduits à la section 2, dont les symboles p^0 , comme $q^0(x, \xi) = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$ dont ils sont proches, vérifient:

$$(4.1) \quad p^0 \circ p = p^0, \text{ avec } p(x, \xi) = (x - \xi, x)$$

$$(4.2) \quad p^0(x + 2\pi, \xi) = p^0(x, \xi); \quad p^0(x, \xi + 2\pi) = p^0(x, \xi).$$

On introduit la \hbar -transformée de Fourier unitaire \mathcal{F}_\hbar :

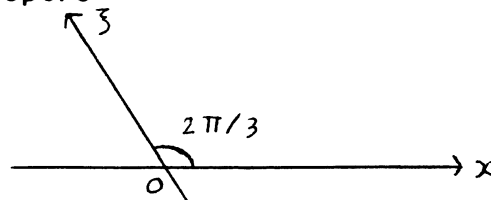
$$\mathcal{F}_\hbar u(\xi) = (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} \int e^{-ix\xi/\hbar} u(x) dx, \text{ qui vérifie:}$$

$$\mathcal{F}_\hbar \text{op}_\hbar^W a(x, \xi) \mathcal{F}_\hbar^{-1} = \text{op}_\hbar^W a(-\xi, x) \text{ pour tout symbole } a.$$

Comme $e^{ix^2/2\hbar} (\text{op}_\hbar^W a(x, \xi)) e^{-ix^2/2\hbar} = \text{op}_\hbar^W a(x, \xi - x)$, on a:

$$\text{op}_\hbar^W a(x - \xi, x) = e^{ix^2/2\hbar} \mathcal{F}_\hbar \text{op}_\hbar^W a(x, \xi) \mathcal{F}_\hbar^{-1} e^{-ix^2/2\hbar}.$$

Ainsi (4.1) exprime sur le symbole que l'opérateur $\text{op}_\hbar^W p^0$ commute avec l'opérateur $\tilde{U} = e^{ix^2/2\hbar} \mathcal{F}_\hbar$. \tilde{U} est associé à p^{-1} , rotation d'angle $-\pi/3$ dans le repère:



On veut modifier \tilde{U} pour que \tilde{U}^3 , qui est associé à la symétrie de centre 0, ait une expression simple. On a immédiatement:

$$\tilde{U}^3 = e^{ix^2/2\hbar} e^{i(hD)^2/2\hbar} e^{ix^2/2\hbar} (\mathcal{F}_\hbar)^3.$$

Calculons cette expression (les intégrales étant prises au sens des intégrales oscillantes):

$$\begin{aligned}
 & (e^{ix^2/2h} e^{i(hD)^2/2h} e^{ix^2/2h} u)(x) \\
 &= (2\pi h)^{-1} \iint e^{i(x-y)\xi/h} e^{ix^2/2h} e^{i\xi^2/2h} e^{iy^2/2h} u(y) dy d\xi \\
 &= (2\pi h)^{-1} \iint e^{i[\xi^2 + 2(x-y)\xi + (x-y)^2 + 2xy]/2h} u(y) dy d\xi \\
 &= (2\pi h)^{-1} \int e^{i\xi^2/2h} d\xi \int e^{ixy/h} u(y) dy \\
 &= e^{i\pi/4} (\mathcal{F}_h)^{-1} u(x).
 \end{aligned}$$

Ainsi, si on pose $U = e^{-i\pi/12} \tilde{U}$, U commute avec $op_h^W p^0$ et $U^3 u = \check{u}$ [$= x \mapsto u(-x)$].

On introduit aussi des translations:

$$\begin{aligned}
 \text{On pose } T_1 u &= \tau_{2\pi} u \text{ [} = x \mapsto u(x-2\pi) \text{]} \\
 &= op_h^W(e^{-i2\pi\xi/h}) u,
 \end{aligned}$$

et $T_n = U^{-n+1} T_1 U^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

T_n est associé à la translation τ_{ν_n} , où ν_n est le vecteur de longueur 2π et d'argument $(n-1)\pi/3$. D'après (4.2), T_1 , donc tous les T_n , commutent avec $op_h^W p^0$.

Calculons quelques relations:

$$\begin{aligned}
 T_{n+3} T_n &= U^{-n-2} T_1 U^{n+2} U^{-n+1} T_1 U^{n-1} \\
 &= U^{-n+1} \check{T}_1 \check{T}_1 U^n \\
 &= \text{Id}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_2 &= U^{-1} T_1 U = op_h^W(e^{-i2\pi\xi/h} \circ \rho^{-1}(x, \xi)) \\
 &= op_h^W e^{-i2\pi(\xi-x)/h}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 T_3 &= U^{-2} T_1 U^2 = op_h^W(e^{-i2\pi\xi/h} \circ \rho^{-2}(x, \xi)) \\
 &= op_h^W e^{i2\pi x/h}.
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 T_2 T_1 &= op_h^W(e^{-i2\pi(\xi-x)/h}) op_h^W(e^{-i2\pi\xi/h}) \\
 &= op_h^W(e^{ih\{-2\pi(\xi-x)/h, -2\pi\xi/h\}/2}) op_h^W(e^{i2\pi(x-2\xi)/h}) \\
 &= e^{i2\pi^2/h} op_h^W(e^{i2\pi(x-2\xi)/h})
 \end{aligned}$$

(les accolades désignent le crochet de Poisson)
et

$$T_1 T_2 = e^{-i2\pi^2/h} \text{op}_h^W(e^{i2\pi(x-2\xi)/h}),$$

donc $T_2 T_1 = e^{i4\pi^2/h} T_1 T_2$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} T_{n+1} T_n &= U^{-n+1} T_2 T_1 U^{n-1} \\ &= e^{i4\pi^2/h} U^{-n+1} T_1 T_2 U^{n-1} \\ &= e^{i4\pi^2/h} T_n T_{n+1}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} T_n T_{n+2} &= U^{-n+1} T_1 T_3 U^{n-1} \\ &= U^{-n+1} \text{op}_h^W(e^{-i2\pi\xi/h}) \text{op}_h^W(e^{i2\pi x/h}) U^{n-1} \\ &= U^{-n+1} e^{-i2\pi^2/h} T_2 U^{n-1} \\ &= e^{-i2\pi^2/h} T_{n+1}, \end{aligned}$$

et $T_{n+2} T_n = e^{i2\pi^2/h} T_{n+1}$.

On note $h' = h'(h)$ le plus petit réel en valeur absolue tel que $h' - 4\pi^2/h \in 2\pi\mathbb{Z}$. Alors $e^{i2\pi^2/h} = \pm e^{ih'/2}$, et, quitte à changer tous les T_n en leurs opposés dans le cas où on a le signe $-$, on a l'équivalent des relations de la section 1 :

$$\begin{aligned} T_{n+3} &= T_n^{-1} \\ U T_{n+1} &= T_n U \\ T_n T_{n+2} &= e^{-ih'/2} T_{n+1} \\ T_{n+2} T_n &= e^{ih'/2} T_{n+1} \\ T_{n+1} T_n &= e^{ih'} T_n T_{n+1} \\ [U, \text{op}_h^W p^0] &= [T_n, \text{op}_h^W p^0] = 0. \end{aligned}$$

B. Cas de l'opérateur matriciel .

On étudie ici les invariances des opérateurs introduits à la section 3, dont les symboles $P^0(x, \xi, h)$, proches de :

$$Q^0(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix + e^{i\xi}} \\ 1 + e^{-ix + e^{-i\xi}} & 0 \end{pmatrix}$$

possèdent les symétries que nous rappelons:

Avec $\rho(x, \xi) = (x - \xi, x)$, on a:

$$(4.14) \quad P^0 \circ \rho^3 = A P^0 A, \text{ avec } A = A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(4.15) \quad \text{op}^W_h(P^0 \circ \rho^2) = T (\text{op}^W_h P^0) T^{-1}, \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \tau_{h/2} & 0 \\ 0 & \tau_{-h/2} \end{pmatrix}$$

et que l'on a montré au paragraphe A que, pour tout symbole B, l'opérateur scalaire $U = e^{-i\pi/12} e^{ix^2/2h} \mathfrak{F}_h$ vérifie:

$$\text{op}^W_h(B \circ \rho) = U (\text{op}^W_h B) U^{-1}.$$

On a donc:

$$U^3 (\text{op}^W_h P^0) U^{-3} = A (\text{op}^W_h P^0) A$$

et:

$$U^2 (\text{op}^W_h P^0) U^{-2} = T (\text{op}^W_h P^0) T^{-1}.$$

On remarque que $U^3 T U^{-3} = \checkmark T \checkmark = T^{-1}$, donc:

$$\begin{aligned} (\text{op}^W_h P^0) &= U U^3 U^2 (\text{op}^W_h P^0) U^{-2} U^{-3} U^{-1} \\ &= U U^3 T (\text{op}^W_h P^0) T^{-1} U^{-3} U^{-1} \\ &= U T^{-1} U^3 (\text{op}^W_h P^0) U^{-3} T U^{-1} \\ &= U T^{-1} A (\text{op}^W_h P^0) A T U^{-1} \\ &= (UAT) (\text{op}^W_h P^0) (UAT)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{et } AT = T^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & \tau_{-h/2} \\ \tau_{h/2} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, on a l'espoir que l'opérateur UAT qui commute avec $(\text{op}^W_h P^0)$ ait des puissances simples. On calcule donc $(UAT)^3$:

$$\begin{aligned} (UAT)^3 &= U^3 (U^{-2}ATU^2) (U^{-1}ATU) AT \\ &= U^3 A (U^{-2}TU^2) (U^{-1}T^{-1}U) T \end{aligned}$$

$$\text{On pose } \tau = \begin{pmatrix} e^{-i\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\xi/2} \end{pmatrix} \text{ et donc } T = \text{op}^W_h \tau.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(UTA)^3 &= U^3 A \operatorname{op}_h^W(\tau \cdot \rho^{-2}) (\operatorname{op}_h^W \bar{\tau} \cdot \rho^{-1}) (\operatorname{op}_h^W \tau) \\
&= U^3 A \operatorname{op}_h^W \begin{pmatrix} e^{ix/2} & 0 \\ 0 & e^{-ix/2} \end{pmatrix} \operatorname{op}_h^W \begin{pmatrix} e^{i(\xi-x)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i(\xi-x)/2} \end{pmatrix} \operatorname{op}_h^W \begin{pmatrix} e^{-i\xi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\xi/2} \end{pmatrix} \\
&= \tilde{v} A \begin{pmatrix} e^{-ih/8} & 0 \\ 0 & e^{ih/8} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons $\tilde{A} = A \begin{pmatrix} e^{-ih/8} & 0 \\ 0 & e^{ih/8} \end{pmatrix}$ et $v = UAT$.

v commute avec $\operatorname{op}_h^W P^0$, $v^3 = \tilde{A}^{-1}$, et $v^6 = \operatorname{Id}$.

On construit maintenant des translations commutant avec $\operatorname{op}_h^W P^0$.

Posons $T_1 = \tau_{2\pi}$ et $T_n = v^{-n+1} T_1 v^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. T_1 , et donc tous les T_n , commutent avec $\operatorname{op}_h^W P^0$.

On a:
$$\begin{aligned}
T_{n+3} &= v^{-n+1} v^{-3} T_1 v^3 v^{n-1} \\
&= v^{-n+1} T_1^{-1} v^{n-1} = T_n^{-1}.
\end{aligned}$$

Calculons T_2 et T_3 :

$$T_2 = (AT)^{-1} U^{-1} T_1 U (AT)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \tau - h/2 \\ \tau h/2 & 0 \end{pmatrix} (\operatorname{op}_h^W e^{i2\pi(x-\xi)/h}) \begin{pmatrix} 0 & \tau - h/2 \\ \tau h/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{op}_h^W \begin{pmatrix} e^{i2\pi(x+h/2-\xi)/h} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi(x-h/2-\xi)/h} \end{pmatrix}$$

$$= -\operatorname{op}_h^W (e^{i2\pi(x-\xi)/h}) I.$$

$$T_3 = (AT)^{-1} U^{-1} T_2 U (AT)$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & \tau - h/2 \\ \tau h/2 & 0 \end{pmatrix} (\operatorname{op}_h^W e^{i2\pi x/h}) \begin{pmatrix} 0 & \tau - h/2 \\ \tau h/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} e^{i2\pi(x+h/2)/h} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi(x-h/2)/h} \end{pmatrix}$$

$$= e^{i2\pi x/h} I.$$

Ainsi les T_n sont des opérateurs scalaires, ce sont des translations associées aux vecteurs de norme 2π et d'argument $(n-1)\pi/3$.

On peut conclure comme au paragraphe précédent :

Soit h' le plus petit réel en valeur absolue tel que $h'/2\pi \equiv 2\pi/h [\mathbb{Z}]$. Alors, quitte à changer tous les T_n en leurs opposés, on a les relations :

$$T_{n+3} = T_n^{-1}.$$

$$V T_{n+1} = T_n V.$$

$$T_n T_{n+2} = e^{-ih'/2} T_{n+1}; \quad T_{n+2} T_n = e^{ih'/2} T_{n+1}.$$

$$T_{n+1} T_n = e^{ih'} T_n T_{n+1}.$$

$$[T_n, \text{op}_h^Y P^0] = [V, \text{op}_h^Y P^0] = 0.$$

Comme au paragraphe A, ce sont les mêmes relations que celles de la section 1.

5. Inégalités à poids pour l'opérateur scalaire non perturbé.

On s'intéresse dans cette section à l'opérateur de symbole $q^0(x, \xi) = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$ qui s'est introduit à la section 2. Les autres opérateurs scalaires que nous avons rencontrés seront traités à la section 8 comme perturbations de celui-ci.

On traite les puits micro-locaux de q^0 , qui sont les composantes connexes des ensembles $\{(x, \xi); q^0(x, \xi) = E\}$, comme les puits de potentiel de l'équation de Schrödinger aux sections 2 et 3. On commencera par définir des opérateurs auxiliaires à un puits q_α dont le spectre est discret dans l'intervalle $]-\infty, -1 - \varepsilon_0]$ ou dans $[-1 + \varepsilon_0, +\infty[$ (La partie du spectre comprise entre $-1 - \varepsilon_0$ et $-1 + \varepsilon_0$ ne sera pas étudiée dans ce travail). Près de chaque valeur propre de ces opérateurs, on fait une étude analogue à celle qu'on a faite près de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger, et on montre que le spectre de q^0 est concentré dans des intervalles de longueur $\mathcal{O}(h^\infty)$ contenant l'une de ces valeurs propres. L'objet de cette section est de montrer une inégalité à poids sur le projecteur spectral associé à chacun de ces intervalles, pour pouvoir, dans la section suivante, majorer les coefficients de la matrice d'interaction.

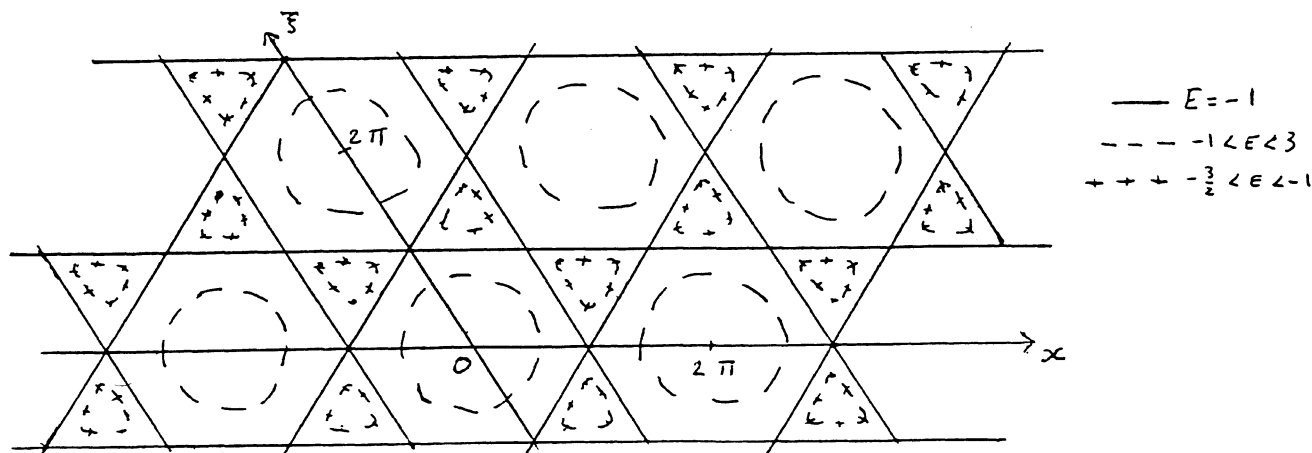
Les valeurs critiques du symbole q^0 sont:

Le maximum 3, atteint sur $2\pi\mathbb{Z}^2$,
 le minimum $-3/2$, atteint sur $(4\pi/3, 2\pi/3) + 2\pi\mathbb{Z}^2 \cup (2\pi/3, 4\pi/3) + 2\pi\mathbb{Z}^2$
 la valeur -1 obtenue aux points selle $(\pi + 2k\pi, 2k'\pi)$, $(2k\pi, \pi + 2k'\pi)$ et $(\pi + 2k\pi, \pi + 2k'\pi)$ pour $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$.

Ces points critiques sont non dégénérés.

L'ensemble $\{(x, \xi); q^0(x, \xi) = -1\}$ est la réunion des droites d'équation $x = (2k+1)\pi$, $\xi = (2k+1)\pi$ et $x - \xi = (2k+1)\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

On peut alors tracer les courbes de niveau du symbole q^0 :



On préfère se ramener à une situation plus symétrique par le changement de variables symplectique $(x, \xi) \mapsto (x, \xi + x/2)$ et on travaille avec l'opérateur

$$q(x, \xi) = \cos x + \cos(\xi + x/2) + \cos(\xi - x/2) = \cos x + 2 \cos(x/2) \cos \xi.$$

On utilise systématiquement la quantification de Weyl et on désigne par une même lettre un opérateur et son symbole. q et q^0 sont conjugués:

$$(5.1) \quad q = e^{-ix^2/4h} q^0 e^{ix^2/4h}$$

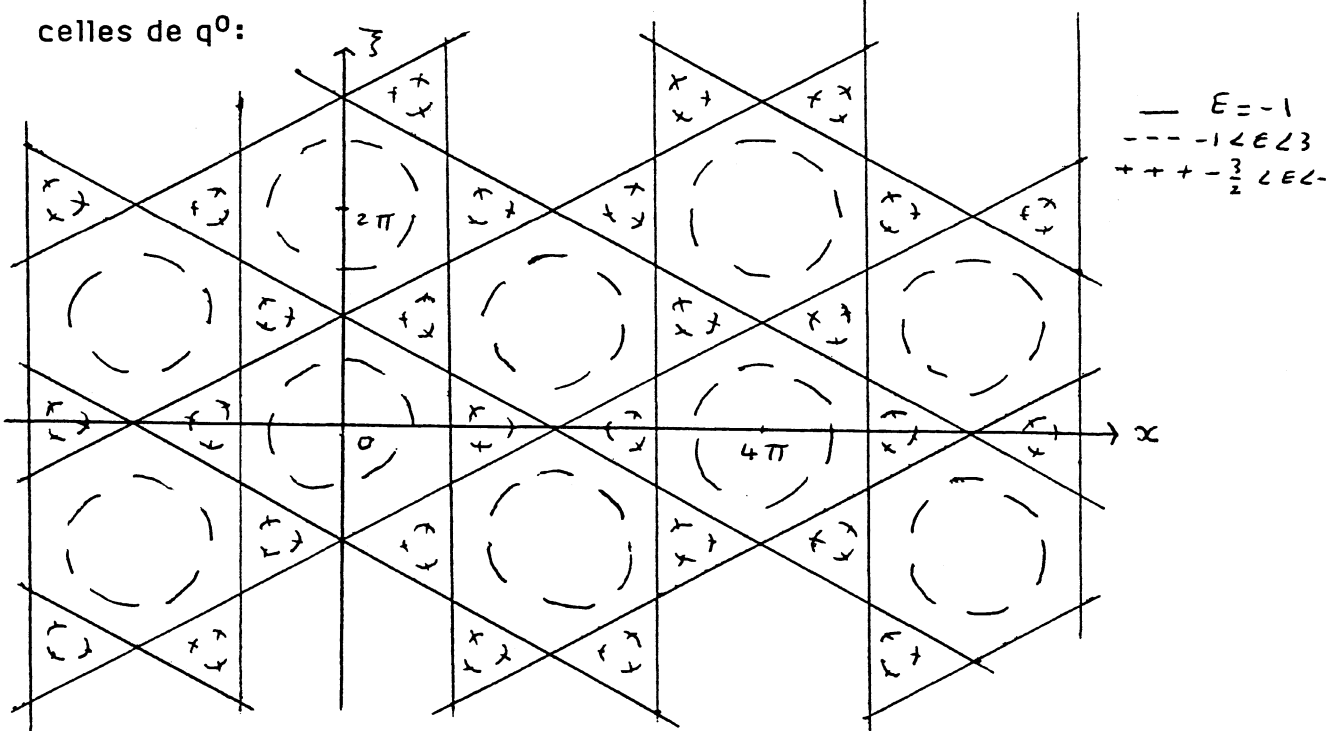
et comme q^0 commute avec $U = e^{-i\pi/12} e^{ix^2/2h} \mathfrak{F}_h$, q commute avec

$$\tilde{U} = e^{-ix^2/4h} U e^{ix^2/4h} = e^{-i\pi/12} e^{ix^2/4h} \mathfrak{F}_h e^{ix^2/4h},$$

et avec les $\tilde{T}_n = e^{-ix^2/4h} T_n e^{ix^2/4h}$. Dans la suite, on ne s'occupera plus de q^0 et on oubliera le signe \sim .

Au niveau des symboles, q commute avec la rotation d'angle $\pi/3$ $\rho: (x, \xi) \mapsto (x/2 - \xi, 3x/4 + \xi/2)$ (c'est une rotation dans un repère orthogonal, mais non normé) et les translations τ_{ν_n} , où $\nu_1 = (2\pi, -\pi)$ et $\nu_n = \rho^{n-1}(\nu_1)$ est un vecteur de longueur indépendante de n et d'argument $n\pi/3 - \pi/2$ (dans le repère où ρ est une rotation).

Traçons les courbes de niveau du symbole q , facilement déduites de celles de q^0 :



Pour la partie du spectre au-dessus de $-1 + \varepsilon_0$, nous avons la géométrie de la section 2 et on va ramener l'étude du spectre de q près des

valeurs propres des opérateurs auxiliaires à celle d'une perturbation de $\mu(h)Id + e^{-C/h} \text{op}_h^W q^0$, avec $C \approx 1$.

Pour la partie du spectre au-dessous de $-1 - \varepsilon_0$, nous avons la géométrie de la section 3 et on va ramener l'étude du spectre de q près des valeurs propres des opérateurs auxiliaires à celle d'une perturbation du système $\mu(h)Id + e^{-C/h} \text{op}_h^W q^0$.

A. Conjugaison par des exponentielles.

Pour utiliser au maximum l'ellipticité du symbole q , on conjugue q par une exponentielle. On est alors amené à calculer $\int e^{2\psi/h} P u \bar{u} dx$, où P est le h -quantifié de Weyl du symbole $\cos(x/2 + \xi) + \cos(x/2 - \xi)$, et la phase ψ est une fonction réelle de classe $C^{1,1}$, avec $\psi', \psi'' \in L^\infty$. On utilise toujours la h -quantification de Weyl, on note $u_\psi = e^{\psi/h} u$, et \equiv désigne l'égalité modulo $\mathcal{O}(h) \|u_\psi\|^2$ lorsqu'il s'agit de scalaires, et modulo $\mathcal{O}(h) \|u_\psi\|$ dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsqu'il s'agit de fonctions.

Alors, si u est une fonction C^∞ à support compact:

$$\int e^{2\psi/h} P u \bar{u} dx = \int (e^{\psi/h} P e^{-\psi/h}) u_\psi \bar{u}_\psi dx.$$

Nous allons donner deux démonstrations de l'inégalité suivante:

$$(5.2) \quad \left| \text{Re} \int e^{2\psi/h} P u \bar{u} dx \right| \leq \int |\cos(x/2 + i\psi'(x)) + \cos(x/2 - i\psi'(x))| |u_\psi|^2 dx + C(\psi)h \|u_\psi\|^2$$

la première est plus élégante, mais exige que ψ soit C^∞ à dérivées bornées; la seconde est plus calculatoire, mais n'exige que $\psi \in C^{1,1}$.

Première démonstration.

Supposons donc que ψ est C^∞ à dérivées bornées. Alors $e^{\psi/h} P e^{-\psi/h}$ est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans la classe $S_{0,0}^0 = \{a(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}^3); \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2, \exists C_{\alpha, \beta}, |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \leq C_{\alpha, \beta}\}$, et dont le symbole principal est $\cos(x/2 + i\psi'(x) + \xi) + \cos(x/2 - i\psi'(x) - \xi)$.

Ce symbole s'écrit:

$$(\cos \xi)[\cos(x/2 + i\psi'(x)) + \cos(x/2 - i\psi'(x))] + (\sin \xi)[\sin(x/2 - i\psi'(x)) - \sin(x/2 + i\psi'(x))],$$

sa partie réelle est donc:

$$\begin{aligned}
& (\cos \xi) [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] \\
&= \cos(\xi/2) [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] \cos(\xi/2) \\
&\quad - \sin(\xi/2) [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] \sin(\xi/2).
\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} P u \bar{u} \, dx &\equiv \\
\int [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] & (|\cos(hD/2)u_\varphi|^2 - |\sin(hD/2)u_\varphi|^2) \, dx.
\end{aligned}$$

Et comme:

$$\begin{aligned}
|\cos(hD/2)u_\varphi|^2 + |\sin(hD/2)u_\varphi|^2 &= \\
\frac{1}{4} |\tau_{h/2}u_\varphi + \tau_{-h/2}u_\varphi|^2 + \frac{1}{4} |\tau_{h/2}u_\varphi - \tau_{-h/2}u_\varphi|^2 &= \\
= \frac{1}{2} (|\tau_{h/2}u_\varphi|^2 + |\tau_{-h/2}u_\varphi|^2), &
\end{aligned}$$

on a:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} P u \bar{u} \, dx| &\leq C_1(\varphi) h \|u_\varphi\|^2 + \\
\int \frac{1}{2} |\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))| & (|\tau_{h/2}u_\varphi|^2 + |\tau_{-h/2}u_\varphi|^2) \, dx
\end{aligned}$$

et donc:

$$\begin{aligned}
(5.2) \quad |\operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} P u \bar{u} \, dx| &\leq \\
\int |\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))| & \|u_\varphi\|^2 \, dx + C_2(\varphi) h \|u_\varphi\|^2.
\end{aligned}$$

$C_2(\varphi)$ dépend de $\sup |\varphi^{(j)}|$ pour $j \geq 1$. \square

Nous allons maintenant montrer (5.2) pour $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R})$, avec $\varphi', \varphi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$:

Deuxième démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h} u_\varphi &= \\
= \frac{1}{2} e^{\varphi/h} [\operatorname{op}_h^\mathbb{W}(e^{i(\frac{1}{2}x + \xi)} + e^{-i(\frac{1}{2}x + \xi)} + e^{i(\frac{1}{2}x - \xi)} + e^{-i(\frac{1}{2}x - \xi)})] & (e^{-\varphi/h} u_\varphi) \\
= \frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2} e^{i\varepsilon\varepsilon'h/4} e^{\varphi(x)/h} e^{i\varepsilon x/2} e^{-\varphi(x + \varepsilon'h)/h} & u_\varphi(x + \varepsilon'h) \\
\equiv \frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2} e^{i\varepsilon\varepsilon'h/4} e^{i\varepsilon x/2} e^{-\varepsilon'\varphi'(x)/2} & u_\varphi(x + \varepsilon'h) \\
\equiv \frac{1}{2} \sum_{(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2} e^{i\varepsilon x/2} e^{-\varepsilon'\varphi'(x)} & u_\varphi(x + \varepsilon'h) \\
= \cos(x/2) [(ch \varphi' + sh \varphi')(\cos hD - i \sin hD)u_\varphi + & \\
\quad (ch \varphi' - sh \varphi')(\cos hD + i \sin hD)u_\varphi] & \\
= 2 \cos(x/2) [ch \varphi'(x) \cos(hD)u_\varphi - i sh \varphi'(x) \sin(hD)u_\varphi] &
\end{aligned}$$

et comme $2\cos(x/2) \operatorname{ch} \varphi'(x) = \cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} P u \bar{u} \, dx &\equiv \\ \int [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] \cos(hD) u_{\varphi} \bar{u}_{\varphi} \, dx &\equiv \\ \int [\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))] (|\cos(hD/2) u_{\varphi}|^2 - |\sin(hD/2) u_{\varphi}|^2) \, dx, \end{aligned}$$

et on conclut comme dans le cas où φ est C^∞ . On a donc montré (5.2) pour $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R})$, avec $\varphi', \varphi'' \in L^\infty(\mathbb{R})$. \square

B. Un théorème de Helffer et Sjöstrand.

On rappelle ici les résultats de la section 2 de [He, Sj]₄ :

Théorème 5.1 :

Soit $P \in S_{0,0}^0$, avec $P(x, \xi, h) \equiv p(x, \xi) \operatorname{mod} S^{-1}$, tel que $\{(x, \xi), \det p(x, \xi) = 0\} = \bigcup U_\alpha$ (union finie ou dénombrable) où les U_α sont compacts et disjoints entre eux.

On suppose même que :

Il existe R_0 tel que le diamètre de chaque U_α est inférieur à R_0 .

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que les $U_\alpha + B(0, \varepsilon_0)$ soient disjoints entre eux, et pour tout α , on peut trouver dans un borné de $S_{0,0}^0$ un symbole P_α tel que $P = P_\alpha$ dans $U_\alpha + B(0, \varepsilon_0)$ et que P_α est elliptique en dehors de $U_\alpha + B(0, \varepsilon)$, uniformément par rapport à α pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

On suppose qu'il existe un intervalle compact $I(h)$ qui tend vers $\{0\}$ quand h tend vers 0 et $a(h) \geq h^{N_0}$ une fonction qui tend vers 0, tels que P_α n'a pas de spectre dans $I(h) + [-2a(h), 2a(h)] \setminus I(h)$ pour $h \leq h_0$, uniformément en α .

Soit $\Omega_h = \{z; \operatorname{dist}(z, I(h)) \leq a(h)\}$.

Alors pour $z \in \partial\Omega_h$, $P - z$ est inversible et, uniformément en z , $\|(P - z)^{-1}\| \leq C a(h)^{-1}$.

De plus, si on pose

$$\tilde{d}((x, \xi), (y, \eta)) = \min\{d((x, \xi), (y, \eta)), d((x, \xi), U_\alpha) + d(U_\alpha, (y, \eta))\},$$

si χ_1 et χ_2 appartiennent à un borné de $S_{0,0}^0$, et si $\tilde{d}(\text{supp } \chi_1, \text{supp } \chi_2) \geq \varepsilon_0 > 0$, alors pour tout entier N , il existe $C_N > 0$ tel que $\|\chi_1(P-z)^{-1}\chi_2\| \leq C_N h^N \tilde{d}(\text{supp } \chi_1, \text{supp } \chi_2)^{-N}$.

On suppose de plus que $\text{Sp}(P_\alpha) \cap I(h) = \{\mu_\alpha\}$ où μ_α est une valeur propre simple, et que $d(U_\alpha, U_\beta) \sim |\alpha - \beta|$. Soit φ_α un vecteur propre normalisé associé à (P_α, μ_α) :

$$(P_\alpha - \mu_\alpha)\varphi_\alpha = 0, \quad \|\varphi_\alpha\| = 1.$$

Alors la matrice infinie $((\varphi_\alpha | \varphi_\beta))$ est de la forme $I + K$, avec $K_{\alpha, \beta} = \mathcal{O}(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$ pour tout entier N , et donc $K = \mathcal{O}(h^\infty)$ dans $\mathfrak{X}(L^2, L^2)$.

Si E est l'adhérence des combinaisons linéaires des φ_α , $\{\varphi_\alpha\}$ est une base "hilbertienne" de $\mu(h)$ au sens suivant: tout $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = \sum_\alpha u_\alpha \varphi_\alpha$, et $\|u\| \sim (\sum |u_\alpha|^2)^{1/2}$, uniformément par rapport à h .

Soit F l'espace spectral associé à $\text{Sp}(P) \cap (I(h) + [-a(h), a(h)])$ et Π_F le projecteur correspondant. On pose $v_\alpha = \Pi_F \varphi_\alpha$. Alors si χ appartient à un borné de $S_{0,0}^0$, et $d(\text{supp } \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$, on a, pour tout entier N :

$$\|\chi \varphi_\alpha\| + \|\chi v_\alpha\| = \mathcal{O}(h^N d(\text{supp } \chi, U_\alpha)^{-N})$$

et sans restriction sur $\text{supp } \chi$, si χ appartient à un borné de S^0 , pour tout N entier: $\|\chi(\varphi_\alpha - v_\alpha)\| = \mathcal{O}(h^N (1 + d(\text{supp } \chi, U_\alpha))^{-N})$.

La matrice $((v_\alpha | v_\beta))$ s'écrit $I + T$, avec pour tout N , $t_{\alpha, \beta} = \mathcal{O}(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$. Les v_α forment une base "hilbertienne" de F et $d(E, F) = \mathcal{O}(h^\infty)$ avec, selon la terminologie de [He, Sj]₁, $d(E, F) = \text{Sup}_{x \in E} (d(x, F) / \|x\|) + \text{Sup}_{y \in F} (d(y, E) / \|y\|)$.

Nous allons maintenant utiliser ces résultats et l'inégalité (5.2) pour obtenir des inégalités dans des espaces L^2 à poids pour les opérateurs qui nous intéressent.

C. Majoration des projecteurs spectraux pour la partie supérieure du spectre.

Comme pour l'équation de Schrödinger, "cas triangulaire", on a des

puits, cette fois micro-locaux, qui sont les composantes connexes de $\{(x, \xi); q(x, \xi) = E\}$, pour $E > -1$, et un groupe de déplacements échangeant les puits engendré par la rotation ρ d'angle $\pi/3$ et la translation de τ_{ν_1} de vecteur $\nu_1 = (2\pi, -\pi)$. On appelle U_0 le puits centré en 0; les puits sont les $U_\alpha = (\tau_{\nu_1})^{\alpha_1} (\tau_{\nu_2})^{\alpha_2} U_0$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}^2$. Soit χ_0 une fonction réelle, positive, de classe C^∞ , invariante par la rotation ρ , à support compact dans $U_{-1 < E \leq 3} U_0(E)$. On note χ_α sa translatée par $(\tau_{\nu_1})^{\alpha_1} (\tau_{\nu_2})^{\alpha_2}$, i.e: $\chi_\alpha(x, \xi) = \chi_0((x, \xi) - \alpha_1 \nu_1 - \alpha_2 \nu_2)$, et on veut étudier le spectre de q dans $[-1 + \varepsilon_0, +\infty[$, $\varepsilon_0 > 0$ étant donné. On choisit χ_0 de sorte que $q - \sum_\alpha \chi_\alpha \leq -1 + \varepsilon_0/2$. Ainsi le symbole $q - \sum_\alpha \chi_\alpha - E$ est elliptique pour $E \in [-1 + \varepsilon_0, +\infty[$.

On prend comme choix de P_α du paragraphe précédent:
 $q_\alpha = q - \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta$, associé au puits U_α centré en $\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2$. Ces opérateurs sont isospectraux car conjugués: $q_\alpha = T^\alpha q_0 T^{-\alpha}$.

L'étude du spectre de q_α dans $[3 - Ch, 3]$ pour $C > 0$ arbitrairement grand est entièrement analogue à celle de l'équation de Schrödinger en présence d'un puits ponctuel non dégénéré (voir [Si]₂, [He, Sj]₁). Dans l'intervalle $[-1 + \varepsilon_0, 3 - Ch]$, on peut d'autre part appliquer les résultats de Helffer et Robert [He, Ro]₂. On obtient ainsi le résultat suivant:

Proposition 5.2 :

$\varepsilon_0 > 0$ étant donné, pour h assez petit,

$$\text{Sp}(q_\alpha) \cap]3, +\infty[= \emptyset$$

et:

$$\text{Sp}(q_\alpha) \cap [-1 + \varepsilon_0/2, 3] = \{\mu_0(h), \mu_1(h), \dots, \mu_{N(h)}(h)\},$$

où les $\mu_j(h)$ sont des valeurs propres simples, $\mu_j(h) - \mu_{j+1}(h) \approx h$, $3 - \mu_0(h) \approx h$.

Ainsi, grâce aux résultats de Helffer et Sjöstrand que nous avons rappelés:

$$\text{Sp}(q) \cap [-1 + \varepsilon_0, 3] \subset \bigcup_{0 \leq j \leq N(h)} J_j,$$

où J_j est un intervalle de longueur $\mathcal{O}(h^\infty)$ centré en $\mu_j(h)$.

Comme nous l'avons fait dans la section 2 pour l'opérateur de Schrödinger "triangulaire", nous allons ramener l'étude de chaque $\text{Sp}(q) \cap J_j(h)$ à celle du spectre d'un opérateur proche de

$\mu_j(h) + e^{-C/h} \text{op}_h^W q_0$, avec une nouvelle constante de Planck h' et $C \approx 1$.
L'objet de la suite de ce paragraphe est d'obtenir des inégalités à poids sur le projecteur spectral de q associé à un J_j .

Dans la suite on fixe un $\mu(h) = \mu_j(h)$, et tout marchera uniformément par rapport à ce choix.

On est dans la situation du paragraphe précédent avec $I(h) = \{\mu(h)\}$, $a(h) = h/C_0$, C_0 étant choisi assez grand. $I(h)$ ne tend pas vers $\{0\}$, mais reste dans un compact, ce qui ne change rien.

Pour $E \in]-1, 3]$, les projections des puits $U_\alpha(E)$ sur l'axe \mathbb{R}_x sont des intervalles $I_k(\alpha)$ centrés en $2\pi k(\alpha) = 2\pi(\alpha_1 + \alpha_2)$. On peut les définir par une inégalité:

$$x \in \bigcup_\alpha I_\alpha(E) \text{ équivaut à: } \exists \xi \in \mathbb{R}, \cos x + 2 \cos(x/2) \cos \xi - E = 0,$$

ie $\exists t \in [-1, 1], \cos x + 2 |\cos x/2| t - E = 0,$

et comme $\cos x - 2 |\cos x/2| - E = 2 |\cos x/2| (|\cos x/2| - 1) - E - 1 < 0$, et que la fonction de t : $\cos x + 2 |\cos x/2| t - E$ est croissante, on a:

$$(5.3) \quad x \in \bigcup_\alpha I_\alpha \Leftrightarrow \cos x + 2 |\cos x/2| - E \geq 0.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire des inégalités à poids, en commençant par un opérateur à puits bouchés:

Lemme 5.3 :

Soit δ un réel strictement positif, $\theta_0 \in C_0^\infty(]-\pi, \pi[)$ une fonction positive, à support dans $\{x; \cos x + 2 \cos(x/2) - (\mu(h) - \delta) > 0\}$, telle que $\cos x + 2 \cos x/2 - \mu(h) - \theta_0(x) \leq -\delta/2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$, et $\theta_k(x) = \theta_0(x - 2k\pi)$.

Soit $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi', \varphi'' \in L^\infty$, $\varphi' = 0$ sur $\bigcup_k \text{supp } \theta_k$, et $\cos x + 2 |\cos x/2| ch \varphi'(x) - (\mu(h) - \delta/2) \leq 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \text{supp } \theta_k$.

Soit $\tilde{q} = q - \sum_k \theta_k$ l'opérateur "à puits bouchés". Cet opérateur vérifie l'inégalité:

$$(5.4) \quad \text{Re} \int e^{2\varphi/h} (\tilde{q} - \mu(h)) u \bar{u} dx \leq (-\delta/2 + C(\varphi)h) \|u_\varphi\|^2.$$

Démonstration :

L'hypothèse sur θ_0 donne:

$$\cos x + 2|\cos x/2| - \mu(h) - \sum_k \theta_k(x) \leq -\delta/2 \text{ pour tout } x$$

et donc $\cos x + 2|\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) - \delta/2) - \sum_k \theta_k(x) \leq 0$ sur $\bigcup_k \operatorname{supp} \theta_k$ car $\varphi' = 0$ sur cet ensemble.

D'autre part, l'hypothèse faite sur φ donne:

$$\begin{aligned} \cos x + 2|\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) - \delta/2) - \sum_k \theta_k(x) &\leq \\ \cos x + 2|\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) - \delta/2) &\leq 0 \\ \text{sur } \mathbb{R} \setminus \bigcup_k \operatorname{supp} \theta_k. \end{aligned}$$

Ainsi, sur tout \mathbb{R} , $\cos x + 2|\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) - \delta/2) - \sum_k \theta_k(x) \leq 0$ et, grâce à l'inégalité (5.2), on a:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} (\tilde{q} - \mu) u \bar{u} \, dx \\ &\leq \int [|\cos x + |\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))| - \sum_k \theta_k(x) - \mu(h)| |u_\varphi|^2 \, dx \\ &\quad + C(\varphi) h \|u_\varphi\|^2. \\ &\leq (-\delta/2 + C(\varphi) h) \|u_\varphi\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Soit Ω_h le disque de centre $\mu(h)$ et de rayon $a(h) = h/C_1$, avec C_1 assez grand. On a:

Théorème 5.4 :

Pour tous $\varepsilon > 0$ et $C_0 > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que:
si $z \in \partial\Omega_h$, $h \leq 1/C_\varepsilon$ et $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $|\varphi'| + |\varphi''| \leq C_0$,

et si $\cos x + 2|\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) - \varepsilon) \leq 0$ sur $\operatorname{supp} \varphi'$,

alors l'opérateur $(q - z)^{-1} |L_{\operatorname{Comp}}^2$ admet une extension bornée à $L_{\mathcal{D}}^2 = \{u; e^{-\varphi/h} u \in L^2(\mathbb{R})\}$ et la norme de cette extension dans $\mathcal{B}(L_{\mathcal{D}}^2, L_{\mathcal{D}}^2)$ est inférieure à $C_\varepsilon/a(h)$.

Démonstration :

On choisit un $\delta \in]0, \varepsilon[$ et comme dans le Lemme 5.3 une fonction $\theta_0 \in C_0^\infty(-\pi, \pi[)$, positive, à support dans $\{x; \cos x + 2\cos x/2 - (\mu(h) - \delta) > 0\}$, telle que $\cos x + 2\cos x/2 - \mu(h) - \theta_0(x) \leq -\delta/2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$, et on pose $\theta_k(x) = \theta_0(x - 2k\pi)$. Alors φ vérifie les hypothèses du Lemme 5.3, qui donne, pour $z \in \partial\Omega_h$ et $h \leq h(\varepsilon)$:

$$(5.5) \quad \|u\|_{L^2, \varphi} \leq C(\varepsilon) \|(\tilde{q}-z)u\|_{L^2, \varphi} \text{ pour } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

et par un argument de densité on obtient:

$$(5.6) \quad \|(\tilde{q}-z)^{-1}\|_{\mathfrak{B}(L^2, \varphi, L^2, \varphi)} \leq C(\varepsilon)$$

dans le cas où φ est constante près de l'infini. En prenant une suite de fonctions φ_j constantes près de l'infini convergeant vers φ , on obtient (5.6) pour les φ vérifiant les hypothèses du théorème.

Posons maintenant $q_k = q - \sum_{j \neq k} \theta_j = \tilde{q} + \theta_k$.

Les q_k sont des opérateurs dont les puits sont bouchés sauf dans une rangée. Les résultats de [He, Sj]₄ que nous avons rappelés s'appliquent à q_k en prenant comme opérateurs de référence les q_α pour les valeurs de α telles que $k(\alpha) = k$. Le spectre de q_k dans $[\mu(h) - 3a(h)/2, \mu(h) + 3a(h)/2]$ est donc inclus dans un intervalle $[\mu(h) - \mathcal{O}(h^\infty), \mu(h) + \mathcal{O}(h^\infty)]$ et on obtient:

$$\|(q_k - z)^{-1}\|_{\mathfrak{B}(L^2, L^2)} \leq 2/a(h) \text{ pour } z \in \partial\Omega_h \text{ et } h \text{ assez petit.}$$

Etudions ensuite $(q_k - z)^{-1}$ de plus près. Comme $(q_k - z)(\tilde{q} - z)^{-1} = I + \theta_k(\tilde{q} - z)^{-1}$, on a:

$$(5.7) \quad (q_k - z)^{-1} = (\tilde{q} - z)^{-1} - (q_k - z)^{-1} \theta_k (\tilde{q} - z)^{-1}.$$

Passant aux adjoints et remplaçant z par \bar{z} , on obtient:

$$(5.8) \quad (q_k - z)^{-1} = (\tilde{q} - z)^{-1} - (\tilde{q} - z)^{-1} \theta_k (q_k - z)^{-1}.$$

Une substitution de (5.8) dans (5.7) donne:

$$(5.9) \quad (q_k - z)^{-1} = (\tilde{q} - z)^{-1} - (\tilde{q} - z)^{-1} \theta_k (\tilde{q} - z)^{-1} \\ + (\tilde{q} - z)^{-1} \theta_k (q_k - z)^{-1} \theta_k (\tilde{q} - z)^{-1}.$$

Comme on a pris $\delta \leq \varepsilon$, φ est constante sur les supports des θ_k et on obtient:

$$(5.10) \quad \|(q_k - z)^{-1}\|_{\mathfrak{B}(L^2, \varphi, L^2, \varphi)} \leq C(\varepsilon)/a(h), \quad z \in \partial\Omega_h, \quad h \leq 1/C(\varepsilon).$$

Pour aborder $(q - z)^{-1}$ il nous faut un peu plus de marge et on prend $\delta \leq \varepsilon/2$. Soit χ_k la fonction caractéristique de $[2\pi k - \pi, 2\pi k + \pi]$ et posons: $R_z = \sum_k (q_k - z)^{-1} \chi_k$.

Posons $a_{j,k} = \|\chi_j(q_k - z)^{-1} \chi_k\|_{\mathfrak{B}(L^2_{\varphi}, L^2_{\varphi})}$. Comme on a un peu de marge dans le choix de φ , on obtient facilement à partir de (5.10):

$$(5.11) \quad \begin{aligned} a_{j,k} &\leq C(\varepsilon)/a(h) && \text{si } |j-k| \leq 1, \\ a_{j,k} &\leq e^{-\varepsilon|j-k|/Ch} C(\varepsilon)/a(h) && \text{si } |j-k| \geq 2. \end{aligned}$$

Soit $v = R_z u$, $v_j = \|\chi_j v\|_{L^2_{\varphi}}$, $u_j = \|\chi_j u\|_{L^2_{\varphi}}$.

Alors $\|v\|_{L^2_{\varphi}}^2 = \sum v_j^2$, $\|u\|_{L^2_{\varphi}}^2 = \sum u_j^2$ et on a $v_j \leq \sum_k a_{j,k} u_k$. Vu la majoration (5.11), on obtient:

$$(5.12) \quad \|R_z\|_{\mathfrak{B}(L^2_{\varphi}, L^2_{\varphi})} \leq C(\varepsilon)/a(h).$$

D'autre part, $(q-z)R_z = I + K$, avec $K = \sum \sum_{j \neq k} \theta_j(q_k - z)^{-1} \chi_k$, et de la même manière que pour (5.12), on obtient:

$\|K\|_{\mathfrak{B}(L^2_{\varphi}, L^2_{\varphi})} \leq 1/2$, si $h \leq 1/C(\varepsilon)$; ceci avec (5.11) donne le théorème puisque $(q-z)^{-1} = R_z(I+K)^{-1}$. \square

Corollaire 5.5 :

Si φ_1 et φ_2 sont définis comme précédemment avec $\varphi_1 = \varphi_2$ sur les projections des puits, alors

$$(5.13) \quad \|\Pi_F\|_{\mathfrak{B}(L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2})} \leq C(\varepsilon).$$

Démonstration :

Si $\theta = \sum_k \theta_k$, on obtient comme pour (5.9):

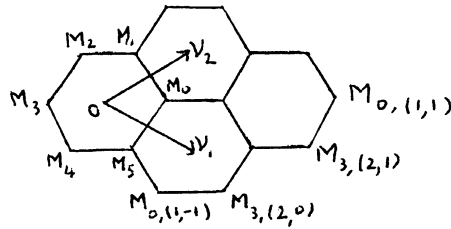
$$(q-z)^{-1} = (\tilde{q}-z)^{-1} - (\tilde{q}-z)^{-1} \theta (\tilde{q}-z)^{-1} + (\tilde{q}-z)^{-1} \theta (q-z)^{-1} \theta (\tilde{q}-z)^{-1}$$

et seul le dernier terme contribue à la représentation intégrale de Π_F car les deux premiers sont holomorphes au voisinage de Ω_h . Comme la longueur de $\partial\Omega_h$ est $\mathcal{O}(h)$ et $a(h) \approx h$, on obtient alors (5.13) à partir du Théorème 5.4. \square

D. La partie inférieure du spectre.

Ce cas est assez semblable au précédent, on a ici l'analogie de l'équation de Schrödinger à symétrie hexagonale et non plus de l'équation de Schrödinger à symétrie triangulaire.

Commençons par examiner la disposition des puits:



On pose $M_0 = (4\pi/3, 0)$, $M_j = \rho^j(M_0)$ pour $j=1, \dots, 5$. Les centres des puits sont les points $M_{\varepsilon, \alpha} = (\tau_{\nu_1})^{\alpha_1} (\tau_{\nu_2})^{\alpha_2} M_{\varepsilon}$ pour $(\varepsilon, \alpha) \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z}^2$. On note $U_{\varepsilon, \alpha}$ le puits centré en $M_{\varepsilon, \alpha}$. On a: $U_{\varepsilon, \alpha} = (\tau_{\nu_1})^{\alpha_1} (\tau_{\nu_2})^{\alpha_2} U_{\varepsilon, 0}$.

On définit maintenant des opérateurs à puits bouchés: Soit χ_0 une fonction C^∞ , positive, à support compact dans $\bigcup_{-3/2 \leq E < -1} U_{0,0}(E)$, invariante par la rotation $(\tau_{\nu_1})^{-1} \rho^2$, telle que $q(x, \xi) + \chi_0(x, \xi) \geq -1 - \varepsilon_0/2$ dans $\bigcup_{-3/2 \leq E < -1} U_{0,0}(E)$. (On étudie le spectre dans l'intervalle $]-\infty, -1 - \varepsilon_0[$).

On pose alors $\chi_3 = \chi_0 \circ \rho^3$ et $\chi_{\varepsilon, \alpha} = \chi_{\varepsilon} \circ (\tau_{\nu_1})^{-\alpha_1} \circ (\tau_{\nu_2})^{-\alpha_2}$, qui bouche le puits $U_{\varepsilon, \alpha}$.

On a $q + \sum(\varepsilon, \alpha) \chi_{\varepsilon, \alpha} \geq -1 - \varepsilon_0/2$ et on peut définir comme au paragraphe C des opérateurs à un puits:

$$q_{\varepsilon, \alpha} = q + \sum(\varepsilon', \alpha') \neq (\varepsilon, \alpha) \chi_{\varepsilon', \alpha'} \text{ associé au puits } U_{\varepsilon, \alpha}.$$

Ces opérateurs sont isospectraux car conjugués:

$$q_{3,0} = U^3 q_{0,0} U^{-3} \text{ et } q_{\varepsilon, \alpha} = T^\alpha q_{\varepsilon, 0} T^{-\alpha}.$$

Leur spectre dans $]-\infty, -1 - \varepsilon_0[$ est:

$$\text{Sp}(q_{\varepsilon, \alpha}) \cap]-\infty, -1 - \varepsilon_0[= \{\mu_0(h), \mu_1(h), \dots, \mu_N(h)(h)\},$$

où les $\mu_j(h)$ sont des valeurs propres simples, $\mu_0(h) + 3/2 \approx h$, $\mu_{j+1}(h) - \mu_j(h) \approx h$.

Ainsi, grâce aux résultats de Helffer et Sjöstrand que nous avons rappelés, on obtient:

$$\text{Sp}(q) \cap]-\infty, -1 - \varepsilon_0[\subset \bigcup_{0 \leq j \leq N(h)} J_j,$$

où J_j est un intervalle de longueur $\mathcal{O}(h^\infty)$ centré en $\mu_j(h)$.

Comme nous l'avons fait dans la section 2 pour l'opérateur de Schrödinger "hexagonal", nous allons ramener l'étude du spectre de q dans chaque intervalle $J_j(h)$ à celle du spectre d'un opérateur proche de $e^{-C/h} q_0 \mathcal{W}' Q^0$, avec une nouvelle constante de Planck h' et $C \approx 1$. L'objet de la suite de ce paragraphe est d'obtenir des inégalités à poids sur le projecteur spectral de q associé à un J_j .

Dans la suite on fixe un $\mu(h) = \mu_j(h)$, et tout marchera uniformément par rapport à ce choix.

On est dans la situation du paragraphe B avec $I(h) = \{\mu(h)\}$, $a(h) = h/C_0$, C_0 étant choisi assez grand. $I(h)$ ne tend pas vers $\{0\}$, mais reste dans un compact, ce qui ne change rien.

On veut maintenant caractériser par une inégalité les projections des puits sur l'axe \mathbb{R}_x , qui sont des intervalles I_k , $k \in \mathbb{Z}$. On note I_{2k} la projection de puits centrée en $4\pi/3 + 2\pi k$, I_{2k+1} la projection de puits centrée en $8\pi/3 + 2\pi k$, de sorte que I_{k+1} est immédiatement à droite de I_k et $I_0 = \Pi_x U_{0,0}$.

La réunion de ces projections est:

$$\{x; \exists \xi \in \mathbb{R}, \cos x + 2 \cos(x/2) \cos \xi - E = 0\} = \\ \{x; \exists t \in [-1, 1], \cos x + 2 |\cos x/2| t - E = 0\}.$$

Or $\cos x + 2 |\cos x/2| - E = 2 |\cos x/2| (|\cos x/2| + 1) - 1 - E > 0$, et la fonction de t : $\cos x + 2 |\cos x/2| t - E$ est croissante, donc la réunion des projections des puits est: $\{x; \cos x - 2 |\cos x/2| - E \leq 0\}$.

On a un lemme analogue à celui du paragraphe C:

Lemme 5.6 :

Soit δ un réel strictement positif, $\theta_0 \in C_0^\infty(-\pi, \pi[)$ une fonction positive, à support dans $\{x; \cos x - 2 \cos(x/2) - (\mu(h) + \delta) < 0\}$, telle que $\cos x - 2 \cos x/2 - \mu(h) + \theta_0(x) \geq \delta/2$ pour $-\pi \leq x \leq \pi$, et $\theta_k(x) = \theta_0(x - 2k\pi)$.

Soit $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\varphi', \varphi'' \in L^\infty$, $\varphi' = 0$ sur $\bigcup_k \text{supp } \theta_k$, et $\cos x - 2 |\cos x/2| ch \varphi'(x) - (\mu(h) + \delta/2) \geq 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \text{supp } \theta_k$.

Soit $\tilde{q} = q + \sum_k \theta_k$ l'opérateur "à puits bouchés". Cet opérateur vérifie l'inégalité:

$$(5.4) \quad \operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} (\tilde{q} - \mu(h)) u \bar{u} \, dx \geq (\delta/2 - C(\varphi)h) \|u_\varphi\|^2.$$

Démonstration :

L'hypothèse sur θ_0 donne:

$$\cos x - 2 |\cos x/2| - \mu(h) + \Sigma_k \theta_k(x) \geq \delta/2 \quad \text{pour tout } x$$

et donc

$$\cos x - 2 |\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) + \delta/2) + \Sigma_k \theta_k(x) \geq 0$$

sur $\bigcup_k \operatorname{supp} \theta_k$ car $\varphi' = 0$ sur cet ensemble.

D'autre part, l'hypothèse faite sur φ donne:

$$\begin{aligned} \cos x - 2 |\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) + \delta/2) + \Sigma_k \theta_k(x) &\geq \\ \cos x - 2 |\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) + \delta/2) &\geq 0 \end{aligned}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \bigcup_k \operatorname{supp} \theta_k$.

Ainsi, sur tout \mathbb{R} , $\cos x - 2 |\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) + \delta/2) + \Sigma_k \theta_k(x) \geq 0$ et, grâce à l'inégalité (5.2), on a:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int e^{2\varphi/h} (\tilde{q} - \mu(h)) u \bar{u} \, dx \\ &\geq \int [|\cos x - |\cos(x/2 + i\varphi'(x)) + \cos(x/2 - i\varphi'(x))| + \Sigma_k \theta_k(x) - \mu(h)| |u_\varphi|^2 \, dx \\ &\quad - C(\varphi)h \|u_\varphi\|^2. \\ &\geq (\delta/2 - C(\varphi)h) \|u_\varphi\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

Une fois ce lemme établi, le reste est entièrement analogue au paragraphe précédent. On considère Ω_h le disque de centre $\mu(h)$ et de rayon $a(h) = h/C_1$, avec C_1 assez grand. On a:

Théorème 5.7 :

Pour tous $\varepsilon > 0$ et $C_0 > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que:

si $z \in \partial\Omega_h$, $h \leq 1/C_\varepsilon$ et $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $|\varphi'| + |\varphi''| \leq C_0$ et:

$$\cos x - 2 |\cos x/2| \operatorname{ch} \varphi'(x) - (\mu(h) + \varepsilon) \geq 0 \quad \text{sur } \operatorname{supp} \varphi',$$

alors l'opérateur $(q - z)^{-1} |L_{\operatorname{Comp}}^2$ admet une extension bornée à l'espace

$L_{\varphi}^2 = \{u/e^{-\varphi/h} u \in L^2(\mathbb{R})\}$ et la norme de cette extension dans $\mathfrak{B}(L_{\varphi}^2, L_{\varphi}^2)$ est inférieure à $C_\varepsilon/a(h)$.

On a aussi le:

Corollaire 5.7 :

Si φ_1 et φ_2 sont définis comme précédemment avec $\varphi_1 = \varphi_2$ sur les projections des puits, alors:

$$\|\Pi_F\|_{\mathfrak{B}(L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2})} \leq C(\varepsilon).$$

6. Matrice d'interaction pour l'opérateur scalaire.

A. La partie supérieure du spectre.

Rappelons que l'on étudie l'opérateur $q = \cos x + \cos(hD + x/2) + \cos(hD - x/2)$ pour un $h > 0$, et que l'on a introduit des opérateurs auxiliaires à un puits $q_\alpha = q - \sum_{\beta \neq \alpha} \chi_\beta$. Ces opérateurs ont un spectre discret dans la région qui nous intéresse ici et sont reliés entre eux par: $q_\alpha = T^\alpha q_0 T^{-\alpha}$, où $T^\alpha = e^{ih' \alpha_1 \alpha_2 / 2} T^{\alpha_1} T^{\alpha_2}$, $h' = h'(h)$ est le plus petit réel tel que $h' - 4\pi^2/h \in 2\pi\mathbb{Z}$. (On prend les mêmes définitions qu'à la section 1 pour obtenir les mêmes relations de commutation et donc retomber sur les mêmes opérateurs). On choisit une valeur propre $\mu(h)$, et un $a(h) = h/C_0$ tel que $\text{Sp}(q_\alpha) \cup [\mu(h) - 2a(h), \mu(h) + 2a(h)] = \{\mu(h)\}$. On sait que $\mu(h)$ est une valeur propre simple et on introduit la fonction propre φ_0 : $(q_0 - \mu(h))\varphi_0 = 0$, $\|\varphi_0\| = 1$. On pose $\varphi_\alpha = T^\alpha \varphi_0$ pour $\alpha \in \mathbb{Z}^2$ et ainsi $(q_\alpha - \mu(h))\varphi_\alpha = 0$, $\|\varphi_\alpha\| = 1$.

D'après le théorème de Helffer et Sjöstrand rappelé au paragraphe 5.B, si F désigne l'espace spectral de q associé à l'intervalle $[\mu(h) - a(h), \mu(h) + a(h)]$, la famille $\{\pi_F \varphi_\alpha\}$ est une base "hilbertienne" de F .

Ce n'est pas dans cette base que nous allons écrire la matrice de q , nous allons utiliser des fonctions dont nous savons qu'elles ont de bonnes propriétés de décroissance.

Nous utilisons un lemme montré dans [He-Sj]₄ dans une situation analogue:

Lemme 6.1 :

Soient $(x_0, \xi_0) \in U_0$, $b > 0$. Alors on peut trouver (x_h, ξ_h) tel que $|(x_h, \xi_h) - (x_0, \xi_0)| \rightarrow 0$ et $c(h)$ avec $c(h), c(h)^{-1} = \mathcal{O}(h^{-N_0})$ tels que $g_0(x) = c(h) \exp(i(x - x_h)\xi_h - b(x - x_h)^2/2)/h$ vérifie les hypothèses:

$$(6.1) \quad (g_0 | \varphi_0) = 1$$

$$(6.2) \quad \|g_0\| = \mathcal{O}(h^{-N_0})$$

$$(6.3) \quad \|\chi g_0\| = \mathcal{O}(h^N d(\text{supp } \chi, U_\alpha)^{-N}),$$

uniformément pour χ dans un borné de $S_{0,0}^0$ si $d(\text{supp } \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$.

On veut une invariance par rotation. Un calcul explicite montre que:

$$|U g_0(x)| = |c(h)| |b^2 + \frac{1}{4}|^{-\frac{1}{2}} \exp[-2b(x - \xi_h - x_h/2)^2 / (4b^2 + 1)h]$$

$$|U^2 g_0(x)| = |c(h)| |b^2 + \frac{1}{4}|^{-\frac{1}{2}} \exp[-2b(x - \xi_h + x_h/2)^2 / (4b^2 + 1)/h].$$

On peut donc remplacer g_0 par $(\tilde{g}_0 | \mathcal{P}_0)^{-1} \tilde{g}_0$ où \tilde{g}_0 est l'une des 6 projections de g_0 sur les espaces propres de U et vérifie $|(\tilde{g}_0 | \mathcal{P}_0)| \geq 1/6$. Le nouveau g_0 est vecteur propre de U , vérifie (6.1)–(6.3) et:

$$|g_0(x)| \leq |c(h)| \exp[-2b d^2(x, I_0) / (4b^2 + 1)h] \text{ toujours avec } I_0 = \Pi_X U_0.$$

On pose alors $g_\alpha = T^\alpha g_0$ et on a:

$$(6.1)' \quad (g_\alpha | \mathcal{P}_\alpha) = 1$$

$$(6.2)' \quad \|g_\alpha\| = \mathcal{O}(h^{-N_0})$$

$$(6.3)' \quad \|\chi g_\alpha\| = \mathcal{O}(h^N d(\text{supp } \chi, U_\alpha)^{-N}),$$

uniformément pour χ dans un borné de $S_{0,0}^0$, si $d(\text{supp } \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$.

Rappelons que les $v_\alpha = \Pi_F \mathcal{P}_\alpha$ forment une base hilbertienne de F et que:

$$(6.4) \quad \|\chi (v_\alpha - \mathcal{P}_\alpha)\| = \mathcal{O}(h^N (1 + d(\text{supp } \chi, U_\alpha))^{-N})$$

pour χ dans un borné de $S_{0,0}^0$, sans restriction sur $\text{supp } \chi$,

$$(6.5) \quad \|\chi v_\alpha\| + \|\chi \mathcal{P}_\alpha\| = \mathcal{O}(h^N d(\text{supp } \chi, U_\alpha)^{-N})$$

pour χ dans un borné de $S_{0,0}^0$, si $d(\text{supp } \chi, U_\alpha) \geq \varepsilon_0 > 0$.

On a:

$$(\Pi_F g_\alpha | v_\beta) = (g_\alpha | v_\beta) = (g_\alpha | \mathcal{P}_\beta) + (g_\alpha | v_\beta - \mathcal{P}_\beta),$$

et d'après (6.1)–(6.3): $(g_\alpha | \mathcal{P}_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + \mathcal{O}(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$.

D'après (6.3), (6.4), on a $(g_\alpha | v_\beta - \mathcal{P}_\beta) = \mathcal{O}(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N})$, donc:

$$(6.6) \quad (\Pi_F g_\alpha | v_\beta) = \delta_{\alpha,\beta} + \mathcal{O}(h^N (1 + |\alpha - \beta|)^{-N}).$$

Si $\{e_\alpha\}$ est la base orthonormalisée de $\{v_\alpha\}$, alors:

$$\{v_\alpha\} = \{e_\alpha\}(I + (k_{\alpha,\beta})), \text{ avec: } k_{\alpha,\beta} = \mathcal{O}(h^N(1+|\alpha-\beta|)^{-N}),$$

et (6.6) reste valable avec v_β remplacé par e_β .

Autrement dit:

$$(6.7) \quad \Pi_F g_\alpha = e_\alpha + \sum \tilde{k}_{\alpha,\beta} e_\beta, \text{ avec } \tilde{k}_{\alpha,\beta} = \mathcal{O}(h^N(1+|\alpha-\beta|)^{-N}).$$

On en déduit que $\{\Pi_F g_\alpha\}$ est une base hilbertienne de F . C'est dans l'orthonormalisée de cette base que nous écrivons la matrice de q .

On veut maintenant utiliser le Corollaire 5.4 pour obtenir une majoration de $\Pi_F g_\alpha$.

On considère la fonction poids Φ définie par:

Φ est réelle, croissante, constante sur les projections des puits, et $\text{ch } \Phi'(x) = (\mu(h) - \cos x)/2|\cos x/2|$ hors des projections des puits.

On définit à partir de Φ une distance dégénérée sur les projections des puits, par $D(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$.

Le Corollaire 5.4 s'applique à toute fonction Φ_ε vérifiant $|\Phi'_\varepsilon| \leq \min((|\Phi'| - \varepsilon)_+, 1/\varepsilon)$, $|\Phi''_\varepsilon| \leq 1/\varepsilon$ et on obtient:

$$(6.8) \quad \forall \varepsilon > 0, \|e^{(1-\varepsilon)\gamma/h} \Pi_F g_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(\varepsilon)$$

où on a posé:

$$\gamma(x) = \inf_y G(y) + D^{(1)}(x,y),$$

$D^{(1)}(x,y) = \min_k D(x, I_k) + D(I_k, y)$, où les I_k sont les projections des puits, et $G(x) = 2bd^2(x; U_0)^2 / (4b^2 + 1)$ mesure la décroissance de g_0 .

On a la même propriété pour les transformées de $\Pi_F g_0$ par l'opérateur de rotation $U = e^{-ih/12} e^{ix^2/4h} \mathcal{F}_h e^{ix^2/4h}$:

$$\|e^{(1-\varepsilon)\gamma/h} \Pi_F g_0\| + \|e^{(1-\varepsilon)\gamma/h} U \Pi_F g_0\| + \|e^{(1-\varepsilon)\gamma/h} U^2 \Pi_F g_0\| \leq c(\varepsilon).$$

On considère la distance d'Agmon entre les puits les plus proches: $S = \Phi(2\pi) - \Phi(0)$. Alors il existe un ν avec $0 < \nu \leq S$ tel que $\gamma(2\pi k) \geq \nu k$, pour k entier positif.

Alors, si $2\pi k \leq |x| \leq 2\pi(k+1)$:

$$(6.9) \quad \chi(x) \geq \min((\nu k + D(2\pi k, |x|)), (\nu(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|))).$$

On continue de noter U_α le puits centré en $\alpha_1 + \alpha_2$ et on définit les entiers:

$$\ell_i(\alpha) = \Pi_x \rho^{i-1}(\alpha_1 + \alpha_2) / 2\pi \text{ pour } i=1,2,3 \text{ (Ainsi } \Pi_x U_\alpha = I_{\ell_1(\alpha)})$$

$$\delta(\alpha, \beta) = \sup_{i=1,2,3} |\ell_i(\alpha) - \ell_i(\beta)|.$$

δ mesure la distance entre les puits. $\delta(\alpha, \beta) = 1$ lorsque U_α et U_β réalisent la distance minimale entre deux puits.

On reprend aussi les notations de [He, Sj]₁:

$$\delta^{(k)}(\alpha, \beta) = \min_{\substack{\alpha \neq \alpha_1 \neq \dots \neq \alpha_{\ell-1} \neq \beta \\ \ell \geq k}} \delta(\alpha, \alpha_1) + \delta(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + \delta(\alpha_{\ell-1}, \beta)$$

et, si A est une matrice infinie indicée sur \mathbb{Z}^2 , $A = \tilde{\Theta}(\exp -\nu \delta^{(k)}/h)$ si :
 $|A_{\alpha, \beta}| \leq \exp((\varepsilon - (1-\varepsilon)\nu \delta^{(k)}(\alpha, \beta))$ pour $h \leq h(\varepsilon)$.

On considère maintenant $\{u_\alpha\}$ la base orthonormalisée de $\{\Pi_F g_\alpha\}$.

Si on change la normalisation de $\Pi_F g_\alpha$ pour avoir $\|\Pi_F g_\alpha\| = 1$, les relations (6.8) et (6.9) permettent d'affirmer:

$$\{u_\alpha\} = \{\Pi_F g_\alpha\} (I + \tilde{\Theta}(e^{-\nu \delta^{(1)}}/h))$$

et donc si f est définie par:

$$f(x) = \min((\nu k + D(2\pi k, |x|)), (\nu(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|))), \text{ pour } 2\pi k \leq |x| \leq 2\pi(k+1),$$

on a:

$$(6.10) \quad \forall \varepsilon > 0, \\ \|e^{(1-\varepsilon)f(x-2\pi \ell_1(\alpha))}/h u_\alpha\| + \|e^{(1-\varepsilon)f(x-2\pi \ell_2(\alpha))}/h u_\alpha\| + \\ \|e^{(1-\varepsilon)f(x-2\pi \ell_3(\alpha))}/h u_\alpha\| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}.$$

On s'intéresse maintenant à la matrice W de $q|_F$ dans la base $\{u_\alpha\}$. L'étude des invariances de cette matrice par les translations est entièrement analogue à celle faite à la section 2 pour l'équation de Schrödinger et la matrice de $q|_F$ est de la forme $\mu I + W$, où la nouvelle valeur de $\mu(h)$ diffère de $\mathcal{O}(h^\infty)$ de l'ancienne, et:

$$(6.11) \quad W_{\alpha, \beta} = e^{ih'(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)/2} W_{\alpha - \beta, 0},$$

où $h' \equiv (2\pi)^2/h [2\pi]$.

Comme (6.10) reste vraie avec u_α remplacée par $q u_\alpha$, on a :

$$W_{\alpha, \beta} = \tilde{O}(e^{-\nu \delta^{(1)}}/h).$$

A priori $\nu \leq S$ et cette estimation est insuffisante, mais nous pouvons l'améliorer pour $|\alpha - \beta|$ petit en utilisant la procédure mise en place par Helffer et Sjöstrand à la section 4 de [He, Sj]₄, qui s'applique sans modification.

On obtient :

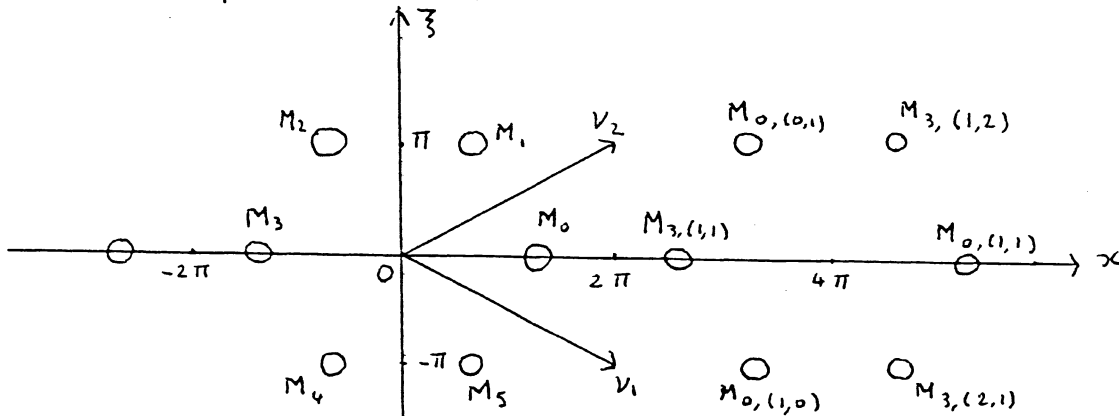
$$W_{\alpha, 0} = O(e^{-(S-\varepsilon)/h}) \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ si } \max_{i=1,2,3} |\ell_i(\alpha)| = 1$$

$$W_{\alpha, 0} = O(e^{-(S+\varepsilon_0)/h}) \text{ si } \max_{i=1,2,3} |\ell_i(\alpha)| \geq 2, \text{ pour un } \varepsilon_0 > 0,$$

Grâce à (6.11), ces estimations permettent de majorer $W_{\alpha, \beta}$ pour $\beta \neq 0$.

B. La partie inférieure du spectre.

On a les puits suivants (calculés dans la section 5) :



On veut avoir la même géométrie qu'à la section 3. On considère les centres des puits les plus proches de 0 :

$$M_0 = (4\pi/3, 0); \quad M_1 = M(3, (0, 1)) = (2\pi/3, \pi)$$

$$M_2 = M(0, (-1, 0)) = (-2\pi/3, \pi); \quad M_3 = M(-4\pi/3, 0)$$

$$M_4 = M(0, (0, -1)) = (-2\pi/3, -\pi); \quad M_5 = M(3, (1, 0)) = (2\pi/3, -\pi).$$

On note toujours $M_{\varepsilon, \alpha} = (\tau_{\nu_1})^{\alpha_1} (\tau_{\nu_2})^{\alpha_2} M_\varepsilon$ pour $\varepsilon \in (0, 3)$ et $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, $U_{\varepsilon, \alpha}$ le puits centré en $M_{\varepsilon, \alpha}$ et $q_{\varepsilon, \alpha}$ l'opérateur dont tous les puits sauf $U_{\varepsilon, \alpha}$ sont bouchés.

On se donne maintenant $(x_0, \xi_0) \in U_{0,0}$ et $b > 0$, et on construit comme au paragraphe A une fonction $g_0(x) = c(h) \exp(i(x-x_h)\xi_h - b/2(x-x_h)^2)/h$ avec $(x_h, \xi_h) \rightarrow (x_0, \xi_0)$ et $c(h), 1/c(h) = \mathcal{O}(h^{-N_0})$, et telle que, si ψ_0 est une fonction propre normalisée de $q_{0,0}$:

$$(6.12) \quad (g_0 | \psi_0) = 1$$

$$(6.13) \quad \|g_0\| = \mathcal{O}(h^{-N_1})$$

$$(6.14) \quad \|\psi g_0\| = \mathcal{O}(h^N d(\text{supp } \chi, U_{0,0})^{-N}) \text{ pour tout } N \text{ entier, uniformément en } \chi \text{ pour } \chi \text{ dans un borné de } S_{0,0}^0 \text{ et } d(\text{supp } \chi, U_{0,0}) \geq \varepsilon_0 > 0.$$

On modifie alors g_0 pour qu'elle soit valeur propre de $T_2 \mathcal{F}^2$, tout en vérifiant (6.12)–(6.14) et $|g_0(x)| \leq |c(h)| \exp[-2b d^2(x, I_0)/(4b^2+1)h]$.

On pose alors $g_3 = U^3 g_0$, et :

$$g_{\varepsilon, \alpha} = e^{ih' \sigma(m_\varepsilon, \alpha)/2} T^\alpha g_\varepsilon$$

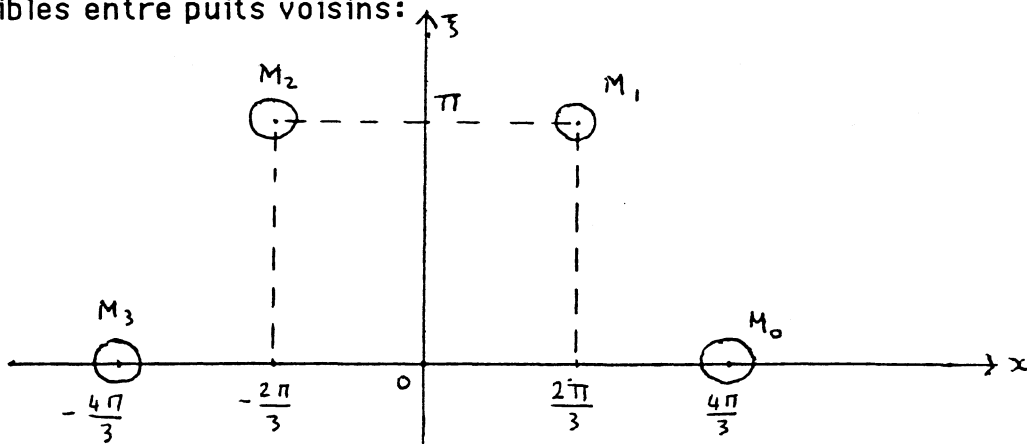
exactement comme dans la section 3, pour avoir les mêmes symétries. On rappelle que h' est le plus petit réel tel que $h'/2\pi \equiv 2\pi/h [\mathbb{Z}]$.

Alors, comme au paragraphe A, $\Pi_F g_{\varepsilon, \alpha}$ est une base hilbertienne de F , espace spectral de q associé à $[\mu(h) - Ch, \mu(h) + Ch]$.

On veut maintenant majorer les $\Pi_F g_{\varepsilon, \alpha}$ au moyen du Corollaire 5.7.

On considère donc la phase Φ définie par: Φ est réelle, croissante, constante sur les projections des puits, et:
 $Ch \Phi' = (\cos x - \mu(h))/2 |\cos x/2|$ hors des projections des puits.

On obtient une distance dégénérée sur les puits en posant $D(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$. Le problème est alors de comparer les deux distances possibles entre puits voisins:



c'est-à-dire de comparer $D(-2\pi/3, 2\pi/3)$ et $D(2\pi/3, 4\pi/3)$.

On a :

Lemme 6.2 :

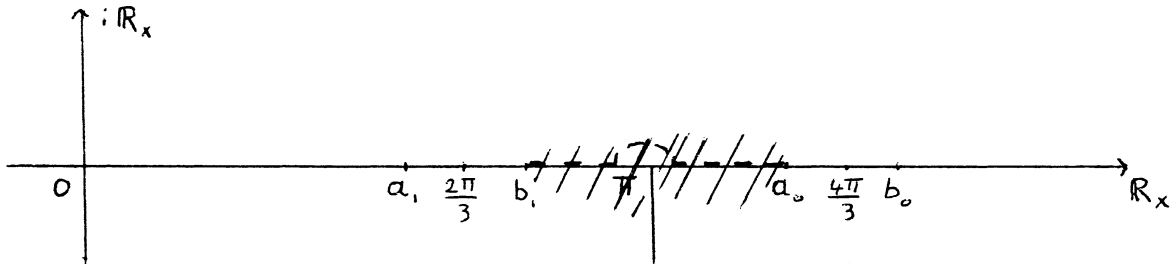
$$D(-2\pi/3, 2\pi/3) = D(2\pi/3, 4\pi/3).$$

Démonstration :

On va raisonner sur les puits U_0, U_1, U_2 centrés en M_0, M_1, M_2 , dont les projections sur \mathbb{R}_x sont les intervalles $[a_i, b_i]$, $i=0,1,2$.

On a à comparer $S_1 = \Phi(a_0) - \Phi(b_1)$ et $S_2 = \Phi(a_1) - \Phi(b_2)$.

Soit ψ définie sur $]\pi, a_0[$ par $\psi = \Phi'$. ψ est réelle, positive, et $q(x, i\psi'(x)) = \mu(h)$ sur $]\pi, a_0[$. On ne peut pas prolonger ψ holomorphiquement au voisinage de π , mais on le fait sur le domaine hachuré :



Sur ce domaine, $\cos x + \cos(x/2 + i\psi(x)) + \cos(x/2 - i\psi(x)) = \mu(h)$, donc $\operatorname{ch} \psi = -\cos(x/2) + (\mu(h) + 1)/(2 \cos x/2)$.

Sur le trajet pointillé \mathcal{C} , $\operatorname{Im} \cos x/2 < 0$ et lorsque l'on contourne le point π de la droite vers la gauche, $\operatorname{Im} \operatorname{ch} \psi(x) < 0$ et $\operatorname{Im} \psi$ passe de 0 à $-\pi$. Sur l'intervalle réel $]b_1, a_0[$, $\Phi' = \operatorname{Re} \psi$.

On peut donc écrire $S_1 = \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_1} \xi dx$, où \mathcal{C}_1 est le chemin complexe $x \in \mathcal{C}$, $\xi = i\psi(x)$, qui relie U_1 à U_0 , que l'on oriente de U_1 vers U_0 .

De même, on a : $S_2 = \operatorname{Im} \int_{\mathcal{C}_2} \xi dx$, où \mathcal{C}_2 est le chemin défini par :

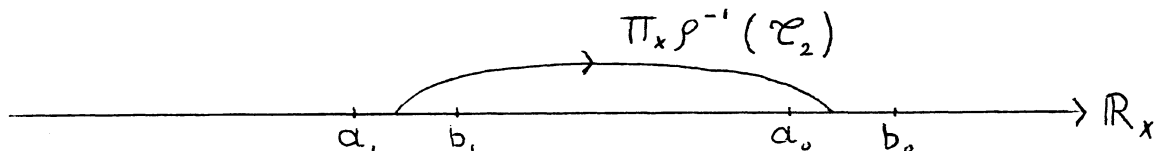
$$\begin{aligned} & x \in [-2\pi/3, 2\pi/3], \\ & \operatorname{Re} \xi = \pi, \operatorname{Im} \xi \geq 0, \\ \text{et} \quad & q(x, \xi) = \mu(h) \end{aligned}$$

qui relie U_2 à U_1 , que l'on oriente de U_2 vers U_1 .

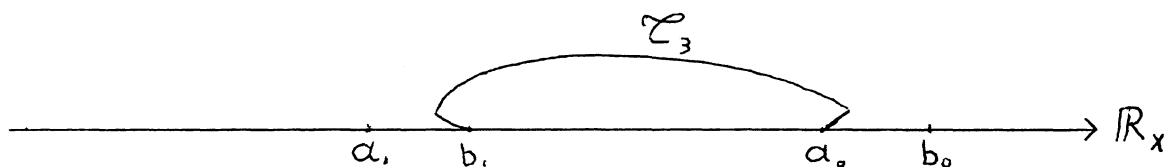
On fait un changement de variable dans l'intégrale définissant S_2 au moyen de la rotation ρ^{-1} d'angle $-\pi/3$ qui échange les puits.

Cette rotation est définie par $\rho^{-1}(x, \xi) = (x/2 + \xi, -3/4 x + \xi/2)$. Elle est symplectique donc avec $(y, \eta) = \rho(x, \xi)$, on a $d(\eta dy) = d(\xi dx)$ d'où $\eta dy = \xi dx + df$, où f est une fonction holomorphe réelle sur le réel.

Donc $S_2 = \text{Im} \int_{\rho^{-1}(\mathcal{C}_2)} \xi dx$, et on cherche à déformer $\rho^{-1}(\mathcal{C}_2)$ sur \mathcal{C}_1 . $\rho^{-1}(\mathcal{C}_2)$ est dans $X = \{(x, \xi) / q(x, \xi) = \mu(h)\}$ et en projection sur \mathbb{C}_x il a la forme:



On peut, en restant dans X , déformer légèrement le chemin $\rho^{-1}(\mathcal{C}_2)$ sur un chemin \mathcal{C}_3 pour que, en projection sur \mathbb{C}_x , \mathcal{C}_3 ait la forme:



Sur ce chemin $q(x, \xi) = \mu(h)$ et donc $\cos \xi = \cos i\varphi(x)$, d'où $\xi = \pm i\varphi(x) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Au voisinage des extrémités du chemin, $\xi = i\varphi(x)$, et pour que cette égalité ne se propage pas le long du chemin, il faudrait qu'en un de ses points $\varphi(x) = ik\pi$, mais alors:

$$\mu(h) = \cos x + \cos(x/2 + i\varphi(x)) + \cos(x/2 - i\varphi(x)) = 2 \cos^2 x/2 - 1 \pm 2 \cos x/2$$

$$\text{i.e. } (\mu(h) + 3/2)/2 = (\cos x/2 \pm \frac{1}{2})^2 = (\cos x/2 \pm 1/2)^2$$

et comme $\mu(h) > -3/2$, $\cos x/2 \in \mathbb{R}$.

Or $\text{Im} \cos(x/2) = -\sin \text{Re}(x/2) \text{sh}(\text{Im} x/2)$, et comme sur le contour \mathcal{C}_3

$\text{Re } x \in]0, 2\pi[$, cette égalité implique que x est réel. Ceci ne peut arriver qu'aux extrémités du chemin, et on propage donc l'égalité $\xi = i\varphi(x)$ le long de \mathcal{C}_3 , à partir du voisinage d'une extrémité.

Pour déformer \mathcal{C}_3 sur \mathcal{C}_1 , il suffit de déformer les projections en x et de toujours avoir $\xi = i\varphi(x)$, et on obtient l'égalité $S_2 = S_1$. \square

Dans ce qui suit, certaines démonstrations tout à fait analogues à celles du paragraphe A ne seront pas reprises.

On pose:

$$\gamma(x) = \inf_y G(y) + D^{(1)}(x, y),$$

où $D^{(1)}$ est la distance indirecte et $G(x) = 2bd^2(x; I_0)^2 / (4b^2 + 1)$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(6.15) \quad \| e^{(1-\varepsilon)\gamma(x)/h} \Pi_F g_0(x) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(\varepsilon).$$

On a un résultat analogue pour les transformés de $\Pi_F g_0$ par la rotation U :

$$(6.16) \quad \| e^{(1-\varepsilon)\gamma(2\pi-x)/h} U \Pi_F g_0(x) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(\varepsilon)$$

$$(6.17) \quad \| e^{(1-\varepsilon)\gamma(x+2\pi)/h} U^2 \Pi_F g_0(x) \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(\varepsilon).$$

Comme dans la section 5, on indice les projections de puits sur \mathbb{Z} de sorte que I_{k+1} soit immédiatement à droite de I_k et $I_0 = \Pi_X U_{0,0}$.

Alors il existe un réel ν , avec $0 < \nu \leq S = D(-2\pi/3, 2\pi/3) = D(2\pi/3, 4\pi/3)$ tel que si $x \in I_k$, $\gamma(x) \geq |k|\nu$. Par conséquent, si $I_k \leq x \leq I_{k+1}$, on a:

$$\gamma(x) \geq \min(|k|\nu + D(I_k, x), |k+1|\nu + D(I_{k+1}, x)).$$

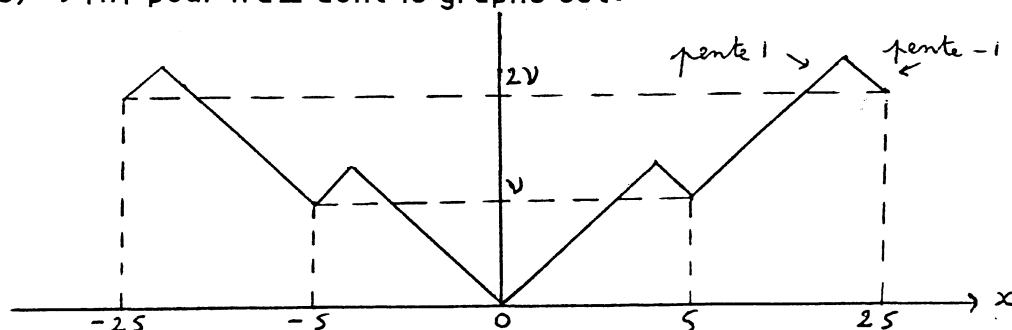
Si U est un puits, on note $\ell_i(U)$ pour $i=1,2,3$ l'entier tel que $I_{\ell_i(U)}$ soit la projection sur l'axe des x de $p^{i-1}U$, et

$\delta(U, V) = \sup_{i=1,2,3} |\ell_i(U) - \ell_i(V)|$. On définit aussi:

$$\delta^{(k)}(U, V) = \min_{\substack{U \neq U_1 \neq \dots \neq U_{\ell-1} \neq V \\ \ell \geq k}} \delta(U, U_1) + \dots + \delta(U_{\ell-1}, V).$$

Comme on a besoin d'une distance orientée à I_0 , et que Φ est définie à une constante près, on décide que $\Phi = 0$ sur I_0 . (On rappelle que Φ est constante sur les projections des puits.)

Ainsi, si on pose $f(x) = \min(\nu|k| + D(I_k, x), \nu|k+1| + D(I_{k+1}, x))$ pour $I_k \leq x \leq I_{k+1}$, on a: $f(x) = \Lambda(\Phi(x))$, où Λ est la fonction paire vérifiant $\Lambda(nS) = \nu|n|$ pour $n \in \mathbb{Z}$ dont le graphe est:



Soit $u_{\varepsilon, \alpha}$ la fonction associée au puits $U_{\varepsilon, \alpha}$. (6.15)-(6.17) donnent:

$$(6.18) \quad \| \exp[-(1-\varepsilon)\Lambda(\Phi(x) - S \ell_i(U_{\varepsilon, \alpha}))]/h \|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c_{\varepsilon} e^{\varepsilon/h}$$

et, si U et V sont deux puits,

$$|((q-\mu(h))u_U|u_V)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h} (e^{-(1-\varepsilon)\nu\delta^{(1)}(U,V)/h}).$$

On s'intéresse maintenant à la matrice de $q|_F$ dans la base $\{u_{\varepsilon,\alpha}\}(\varepsilon,\alpha) \in \{0,3\} \times \mathbb{R}^2$.

Comme précédemment, cette matrice s'écrit $\tilde{\mu}(h)I+W$, avec $|\tilde{\mu}(h)-\mu(h)| = \mathcal{O}(h^\infty)$, $W_{M,N} = (1-\delta_0(M-N))(qu_N|u_M)$ où δ_0 désigne le symbole de Kronecker, et on a la même géométrie qu'à la section 3, et donc l'équivalent de la formule (3.4):

$$(6.19) \quad W_{M,N} = e^{ih'\sigma(\alpha, \tilde{M}-\tilde{N})/2} w_{\tau^\alpha(M), \tau^\alpha(N)}$$

où \tilde{M} représente les coordonnées du centre de puits M dans la base (ν_1, ν_2) , $\tau^\alpha = \tau_1^{\alpha_1} \tau_2^{\alpha_2}$, $h' \equiv (2\pi)^2/h [2\pi]$.

On a aussi: $w_{M,N} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-\nu\delta^{(1)}/h})$.

Comme a priori $\nu \leq S$, cette estimation est insuffisante pour $\delta(M,N)$ petit et nous allons l'améliorer en utilisant la procédure de Helffer et Sjöstrand.

On fait l'hypothèse de récurrence (H) = (H1) - (H4):

$$(H1) \quad |w_{M,N}| \leq C_\varepsilon \exp - (1-\varepsilon)a(\delta(M,N))/h$$

où $a: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie:

$$(H2) \quad 0 \leq a(k+1) - a(k) \leq \nu$$

$$(H3) \quad a(1) \leq S$$

$$(H4) \quad a(k) \geq \varepsilon_0 k \text{ pour un } \varepsilon_0 > 0.$$

Il s'agit d'améliorer la fonction a .

On commence par estimer $(q-\mu)u_M = \sum_{P \neq M} w_{P,M} u_P$.

On a: $u_P = \tilde{\mathcal{O}}[\exp - \Lambda(\Phi(x) - S \ell_1(P))/h]$, où $g(x) = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-f(x)/h})$ signifie:

Pour tous K compact, $\varepsilon > 0$, il existe $C_{K,\varepsilon} > 0$ tel que

$$\|g(x) e^{(1-\varepsilon)f(x)/h}\|_{L^2(K)} \leq C_{K,\varepsilon} e^{\varepsilon/h}.$$

Les termes avec $\ell_1(P) = \ell_1(M)$ se majorent par

$$\tilde{\mathcal{O}}(\exp - [a(2) + \Lambda(\Phi(x) - S \ell_1(M))]/h).$$

Ceux avec $\ell_1(P) \neq \ell_1(M)$ fixé se majorent par

$$\tilde{\mathcal{O}}(\exp - [a(|\ell_1(M) - \ell_1(P)|) + \Lambda(\Phi(x) - S \ell_1(P))]/h).$$

Donc $(q - \mu)u_M = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-L(\Phi(x) - S \ell_1(M))}/h)$

où $L(y) = \min [a(2) + \Lambda(y), \min_{k \neq 0} a(|k|) + \Lambda(y - kS)]$.

Pour $S k \leq |y| \leq S(k+1)$, on a donc :

$$\begin{aligned} L(y) &= \min(a^*(k) + |y| - Sk, a^*(k+1) + S(k+1) - |y|), \text{ pour} \\ a^*(k) &= a(|k|) \text{ si } k \neq 0, \\ a^*(0) &= a(2). \end{aligned}$$

On cherche une estimation de $w_{M,N}$ pour $\ell_1(M) \neq \ell_1(N)$, par exemple $\ell_1(N) > \ell_1(M)$. On pose $\alpha = \ell_1(N) - \ell_1(M) > 0$.

On écrit $w_{M,N} = ((q - \mu)u_N, u_M)$

$$= ((1 - \chi)(q - \mu)u_N, u_M) + (u_N, \chi(q - \mu)u_M) + (u_N, [q, \chi]u_M) = I + II + III,$$

où $\chi = 1_{] - \infty, \lambda]}$, avec λ à choisir, $\Phi(\lambda) \in]S \ell_1(M), S \ell_1(N)[$.

Premier cas : $\alpha = 1$.

On prend $\Phi(\lambda)/S = \ell_1(M) + 1/2$, ce qui donne pour I et II :

$$\begin{aligned} I + II &= \tilde{\mathcal{O}}(\exp - \min[a(2) + \nu, a(1) + S]/h) \\ &= \mathcal{O}(\exp - (a(1) + \nu)/h) \text{ d'après (H2)}. \end{aligned}$$

Comme $[P, \chi]$ est à support dans $[\lambda - h, \lambda + h]$, $III = \tilde{\mathcal{O}}(1) e^{-S/h}$, et : $w_{M,N} = \tilde{\mathcal{O}}(\exp - \min(a(1) + \nu, S)/h)$.

Deuxième cas : α est pair, $\alpha \geq 2$.

On prend $\Phi(\lambda)/S = \ell_1(M) + (\alpha + 1)/2$ et on obtient :

$$\begin{aligned} I + II &= \tilde{\mathcal{O}}(\exp - (\nu\alpha/2 + a(\alpha/2))/h) \\ III &= \tilde{\mathcal{O}}(\exp - (\nu(\alpha - 1) + S)/h) \end{aligned}$$

et donc $w_{M,N} = \tilde{\mathcal{O}}(\exp - \min(\nu(\alpha - 1) + S, \nu\alpha/2 + a(\alpha/2))/h)$.

Troisième cas : α est impair, $\alpha \geq 3$.

On prend $\Phi(\lambda)/S = \ell_1(M) + \alpha/2$ et on obtient :

$$I+II = \tilde{O}(\exp - (\nu(\alpha+1)/2 + a((\alpha-1)/2))/h)$$

$$III = \tilde{O}(\exp - (\nu(\alpha-1) + S)/h)$$

et donc $w_{M,N} = \tilde{O}(\exp - \min(\nu(\alpha-1) + S, (\alpha+1)/2 + a((\alpha-1)/2))/h)$.

Ainsi, dans les cas 2 et 3,

$$w_{M,N} = \tilde{O}(\exp - \min(\nu(\alpha-1) + S, a([\alpha/2]) + (\alpha - [\alpha/2]))/h).$$

On peut refaire ceci avec Uu_M , U^2u_M au lieu de u_M et cela montre que les hypothèses (H1) et (H3) sont vérifiées par la fonction b définie par $b(1) = \min(S, a(1) + \nu)$

$$\text{pour } j \geq 2, b(j) = \min(\nu(j-1) + S, a([j/2]) + (j - [j/2])).$$

Montrons que $b \geq a$:

Pour $j=1$, d'après (H3), $S \geq a(1)$ et donc $b(j) \geq a(j)$.

Pour $j \geq 2$, d'après (H3) et (H2):

$$S + \nu(j-1) \geq a(1) + \sum_{1 \leq k \leq j-1} (a(k+1) - a(k)) = a(j),$$

et d'après (H2),

$$a([j/2]) + \nu(\alpha - [\alpha/2]) \geq a([j/2]) + \sum_{[j/2] \leq k \leq j-1} (a(k+1) - a(k)) = a(j).$$

Donc $b \geq a$. en particulier, b vérifie l'hypothèse (H4).

Il reste à montrer que b vérifie l'hypothèse (H2).

$$\text{Pour } j=1: \quad b(1) = \min(S, a(1) + \nu)$$

$$b(2) = \min(S + \nu, a(1) + \nu)$$

$$\text{donc } 0 \leq b(2) - b(1) \leq \nu.$$

$$\text{Pour } j \geq 3: \quad b(j+1) = \min(\nu j + S, a([(j+1)/2]) + \nu(j+1 - [(j+1)/2]))$$

$$\text{et } b(j) = \min(\nu(j-1) + S, a([j/2]) + \nu(j - [j/2])).$$

Posons $A = \{a([(j+1)/2]) + \nu(j+1 - [(j+1)/2])\} - \{a([j/2]) + \nu(j - [j/2])\}$. Il suffit de montrer $0 \leq A \leq \nu$.

On a: $A = (a([(j+1)/2]) - a([j/2])) - \nu([(j+1)/2] - [j/2]) + \nu$, et d'après (H2):

$$0 \leq a([(j+1)/2]) - a([j/2]) \leq \nu([(j+1)/2] - [j/2]),$$

donc $\nu(1 - [(j+1)/2] + [j/2]) \leq A \leq \nu$, et comme $0 \leq 1 - [(j+1)/2] + [j/2]$, on a bien $0 \leq A \leq \nu$ et b vérifie (H2).

On itère plusieurs fois cette procédure en commençant par $a^0(j) = \nu j$. Comme $a^{k+1}(1) = \min(a^k(1) + \nu, S)$, au bout d'un nombre fini d'itérations, on aura: $a^k(1) = S$. A l'étape suivante, $a^{k+1}(2) = \min(S + \nu, a^k(1) + \nu) = S + \nu$ et donc, pour $j \geq 2$, $a^{k+1}(j) \geq S + \nu$. On a donc montré:

$$(6.20) \quad w_{M,N} = \begin{cases} \tilde{O}(1) e^{-(S+\nu)/h} & \text{si } \delta(M,N) \geq 2, \\ \tilde{O}(1) e^{-S/h} & \text{si } \delta(M,N) = 1. \end{cases}$$

7. Minoration de l'effet tunnel entre puits les plus proches et renormalisation.

Il s'agit d'obtenir une minoration du terme $w_{U,V}$ où U et V sont deux puits avec $\delta(U,V)=1$. Rappelons qu'à chaque puits U on a associé une fonction u_U telle que $\{u_U\}$ soit une base orthonormée de F et que u_U soit microlocalement concentrée sur le puits U . $\{u_U\}$ est la base orthonormalisée de $\{\Pi_F g_U\}$, où g_U est une gaussienne concentrée sur U .

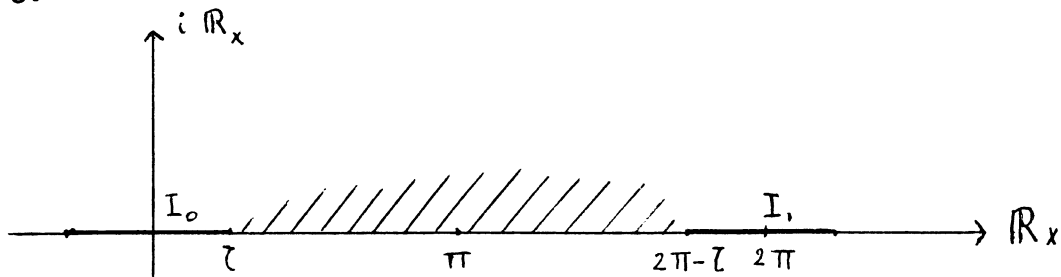
On a besoin pour ces minoration d'approximations BKW des fonctions u_U et u_V sur un domaine commun, mais dans l'étude de la partie supérieure du spectre, on a vu que les phases utilisées ne sont pas analytiques entre les projections des puits. On résout cette difficulté en regardant les fonctions u_U et u_V sur une droite complexe $\mathbb{R}+di$, avec $d \neq 0$ petit. L'étude de la partie inférieure du spectre ne comporte pas ces complications.

A. La partie supérieure du spectre.

On veut estimer le terme $W_{\alpha,\beta}$ pour $\delta(\alpha,\beta)=1$. Grâce aux symétries de la matrice W , on peut supposer que $\alpha=(0,0)$ et $\beta=(1,0)$, c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux puits centrés en 0 et $(2\pi, -\pi)$.

On veut utiliser la méthode mise au point par Helffer et Sjöstrand pour l'équation de Harper, qui consiste à écrire des développements BKW des fonctions u_0 et u_β entre les projections des puits U_0 et U_β . La fonction poids Φ que nous avons utilisée n'est pas analytique en π et on ne peut espérer avoir d'approximation BKW de u_0 qu'à gauche du point π et de u_β qu'à droite du point π .

Par contre, on peut définir une phase Ψ holomorphe sur le domaine hachuré:



$$\Psi(x) = \Phi(x) \text{ sur le segment }]l, \pi[$$

$$\Psi(x) = \Phi(x) + \pi i(x - \pi) \text{ sur le segment }]\pi, 2\pi - l[.$$

Les transformées de Fourier des fonctions u_0 et u_β étant à décroissance exponentielle, ces fonctions sont holomorphes sur un

voisinage du réel et on va chercher à en obtenir des approximations BKW sur une droite $\mathbb{R}+di$, où $d>0$ est petit.

Helffer et Sjöstrand ont montré à la section 5 de [He,Sj]₄ comment obtenir une approximation B.K.W. de u_0 près de τ , à droite de ce point. Pour pouvoir appliquer leur résultat, il faut vérifier qu'on a ici la géométrie du cas qu'ils traitent, c'est-à-dire que la courbure du puits U_0 au point $(\tau,0)$ n'est pas nulle.

Lemme 7.1 :

La courbure de $U_0(\mu)$ au point $(\tau,0)$ est non nulle.

Démonstration :

Dans un voisinage de $(\tau,0)$, U_0 est de la forme $(x(\xi),\xi)$. Dérivant deux fois la relation $\cos(x(\xi))+2\cos(x(\xi)/2)\cos\xi=\mu$, on obtient:

$$(7.1) \quad -\cos(x(\xi))x'(\xi)^2 - \sin(x(\xi))x''(\xi) - \frac{1}{2}\cos(x(\xi)/2)x'(\xi)^2\cos\xi - \sin(x(\xi)/2)x''(\xi)\cos\xi + 2\sin(x(\xi)/2)x'(\xi)\sin\xi - 2\cos((x(\xi)/2)\cos\xi = 0.$$

On a: $x(0)=\tau$, $x'(0)=0$ et (7.1) appliquée au point $\xi=0$ donne: $0 - \sin\tau x''(0) + 0 - \sin(\tau/2)x''(0) + 0 - 2\cos(\tau/2) = 0$, soit:

$$(7.2) \quad (1+2\cos(\tau/2))\sin(\tau/2)x''(0) + 2\cos(\tau/2) = 0.$$

Comme $0 < \tau < \pi$, (7.2) entraîne:

$$(7.3) \quad x''(0) < 0$$

ce qui montre le lemme. \square

On peut donc appliquer le résultat de Helffer et Sjöstrand qui s'énonce: étant donné un point y_0 réel, choisi arbitrairement près de τ , avec $y_0 > \tau$, on peut décrire u_0 dans un voisinage complexe de y_0 par

$$(7.4) \quad u_0(x) = b_0(h) a_0(x,h) e^{-\Psi(x)/h} \quad \text{avec :}$$

$$(7.5) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon, |b_0(h)| + 1/|b_0(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h},$$

$a_0(x,h)$ est un symbole analytique avec $a_0(y_0,h) = 1$.

Par la méthode BKW exposée dans [Sj]₁, on prolonge le symbole a_0 en un symbole analytique elliptique défini sur le domaine

$$y_0 - \varepsilon_0 \leq \operatorname{Re} x \leq \pi + \varepsilon_0 \\ 0 < \operatorname{Im} x \leq d_0.$$

Soit $a_0'(x, h)$ une réalisation de ce symbole sur un compact de ce domaine et définissons

$$v_0(x, h) = b_0(h) a_0'(x, h) e^{-\Psi(x)/h}.$$

On a alors, pour $0 < d \leq d_0$:

$$(7.6) \quad |(u_0 - v_0) e^{\Psi(x)/h}| \leq C e^{-\varepsilon_0/h} \text{ dans un voisinage complexe de } y_0$$

$$(7.7) \quad \|v_0 e^{\Psi(x)/h}\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C_\varepsilon(d) e^{\varepsilon/h} \text{ pour } 0 < d \leq d_0.$$

$$(7.8) \quad \|e^{\Phi(x)/h} (q^d - \mu) v_0\| \leq C_d e^{-\varepsilon_0(d)/h} \text{ dans } \\ L^2([y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]), \text{ avec } \varepsilon_0(d) > 0.$$

q^d représente l'opérateur q sur la droite $\mathbb{R} + di$, défini par:

$$(q^d u)(x) = \cos x u(x) + \cos(1/2 x + 1/4 h) u(x+h) + \cos(1/2 x - 1/4 h) u(x-h).$$

Dans ces inégalités, a'_0 est une réalisation de a_0 au voisinage du segment $[y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$.

Il nous faut maintenant majorer $(q^d - \mu)u_0$ sur la droite $\mathbb{R} + di$. On a le:

Théorème 7.2 :

Si $z \in \partial\Omega_h$, alors $(q^d - z)$ est inversible et:

$$(7.9) \quad \|(q^d - z)^{-1}\|_{L^2} \leq C e^{C|d|/h/a(h)}.$$

Démonstration :

On considère la transformation de F.B.I.:

$$Tu(x) = Ch^{-3/4} \int e^{-(x-y)^2/2h} u(y) dy.$$

On définit les classes $H_\Phi = \{u \text{ entières}; u e^{-\Phi/h} \in L^2(\mathbb{C})\}$.

Pour un choix convenable de C , T est unitaire :

de $L^2(\mathbb{R})$ dans H_{Φ_0} , avec $\Phi_0(x) = (\text{Im } x)^2/2$,
 et de $L^2(\mathbb{R} + di)$ dans H_{Φ_d} , avec $\Phi_d(x) = (\text{Im } x - d)^2/2$.

Après conjugaison par T , q^d est l'opérateur défini sur H_{Φ_d} par:
 $q^d u(x) = (2\pi h)^{-1} \iint e^{i(x-y)\theta/h} q \circ \kappa^{-1}((x+y)/2, \theta) u(y) dy d\theta$,
 où κ est la transformation canonique associée à T : $\kappa(y, \eta) = (y - i\eta, \eta)$, et
 un bon contour est $\{(y, \theta) \in \mathbb{C}^2; \theta = (2/i)\partial\Phi_d/\partial x((x+y)/2) + ic_0 \overline{(x-y)}/|x-y|\}$.

Ainsi q et q^d coïncident sur $H_{\Phi_0} \cap H_{\Phi_d}$.

On considère à présent la fonction holomorphe $\Psi(x, y) = -(x-y)^2/8$, qui
 vérifie $\Psi(x, \bar{x}) = \Phi_0(x)$. On a: $\Phi_0(x) + \Phi_0(y) - 2 \text{Re } \Psi(x, y) = |x - \bar{y}|^2/4$, et
 l'opérateur

$$B u(x) = C/h \int e^{2\Psi(x, \bar{y})/h} u(y) e^{-2\Phi(y)/h} L(dy),$$

où $L(dy)$ représente la mesure de Lebesgue sur \mathbb{C} , qui pour un choix
 convenable de C est le projecteur orthogonal de $L^2_{\Phi_0}$ sur H_{Φ_0} . Le noyau de
 $e^{-\Phi/h} B e^{\Phi/h}$ est estimé par $(C/h)e^{-|x-y|^2/4h}$.

Soit $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}^2}$ un recouvrement de $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ par des cellules de
 périodicité du symbole q , tel que chaque Ω_α est borné, son intérieur
 contient un puits, et Ω_α est à distance non nulle des autres puits.
 L'identification $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ est faite par $(y, \eta) \mapsto \pi_x \kappa(y, \eta) = y - i\eta$.

On définit les opérateurs χ_α de H_{Φ_d} dans H_{Φ_0} par $\chi_\alpha = B \circ 1_{\Omega_\alpha}$.
 On veut à présent donner un sens à l'expression:

$$(7.10) \quad (q-z)^{-1}u = \sum (q-z)^{-1}\chi_\alpha u$$

pour $u \in H_{\Phi_d}$.

La majoration du noyau de B permet d'écrire une première majoration:

$$(7.11) \quad \|\chi_\alpha u\|_{\Phi_0 - d^2(x, \Omega_\alpha)/C} \leq C \|u\|_{\Phi_0, \Omega_\alpha}$$

avec $\|u\|_{\Phi_0, \Omega_\alpha} = (\int_{\Omega_\alpha} e^{-2\Phi_0(x)/h} |u(x)|^2 L(dx))^{1/2}$.

Comme $|\partial_d \nabla_x \Phi_d(x)|$ est borné, on contrôle les normes $\|u\|_{\Phi_d, \Omega_\alpha}$ et
 $\|u\|_{\Phi_0, \Omega_\alpha}$ l'une par l'autre:

$$(7.12) \quad e^{-C|d|/h} e^{\Phi_d(x_\alpha)/h} \|u\|_{\Phi_d, \Omega_\alpha} \leq e^{\Phi_o(x_\alpha)/h} \|u\|_{\Phi_o, \Omega_\alpha} \leq e^{C|d|/h} e^{\Phi_d(x_\alpha)/h} \|u\|_{\Phi_d, \Omega_\alpha},$$

où x_α est un point quelconque de Ω_α .

Comme on n'a pas de résultat de continuité de $(q-z)^{-1}$ pour le poids $\Phi_o - d^2(x, \Omega_\alpha)/C$, on revient aux fonctions sur \mathbb{R} .

On considère donc $T^{-1}\chi_\alpha u$, qui s'écrit :

$$(T^{-1}\chi_\alpha u)(y) = C h^{-\frac{1}{4}} \int e^{(x-y)^2/2h} e^{(\Phi_o - d^2(x, \Omega_\alpha)/C)/h} e^{-(\Phi_o - d^2(x, \Omega_\alpha)/C)/h} \chi_\alpha u(x) dx$$

et on choisit le contour d'intégration $\text{Re } x = y$.

On obtient :

$$\|T^{-1}\chi_\alpha u\|_{-d^2(x, \tilde{I}_\alpha)/C} \leq C \|u\|_{\Phi_o, \Omega_\alpha}, \text{ où } \tilde{I}_\alpha \text{ est la projection sur } \mathbb{R} \text{ de } \Omega_\alpha.$$

Donc, si ψ est une fonction constante dans un voisinage uniforme de chaque puits, nulle sur \tilde{I}_α , décroissante à droite de \tilde{I}_α , croissante à gauche, et telle que $|\psi'| \leq \delta$ où $\delta > 0$ est assez petit, on a :

$$(7.13) \quad \|T^{-1}\chi_\alpha u\|_{L^2_\psi} \leq C \|u\|_{\Phi_o, \Omega_\alpha}.$$

Le théorème 5.4 s'applique alors et on a :

$$(7.14) \quad \|(q-z)^{-1}T^{-1}(\chi_\alpha u)\|_{L^2_\psi} \leq C \|u\|_{\Phi_o, \Omega_\alpha}/a(h).$$

Comme on peut avoir les mêmes inégalités pour $U(q-z)^{-1}T^{-1}(\chi_\alpha u)$ et $U^2(q-z)^{-1}T^{-1}(\chi_\alpha u)$, on déduit en appliquant T :

$$(7.15) \quad \|(q-z)^{-1}(\chi_\alpha u)\|_{\Phi_o - d(x, \Omega_\alpha + B(0, C))/C} \leq C \|u\|_{\Phi_o, \Omega_\alpha}/a(h).$$

Soit $C' > C$. Alors pour $|d| \leq 1/C - 1/C'$, on a :

$$(7.16) \quad \|(q-z)^{-1}(\chi_\alpha u)\|_{\Phi_o - d(x, \Omega_\alpha + B(0, C))/C} \geq \frac{1}{C} e^{-C|d|/h} \|(q-z)^{-1}(\chi_\alpha u)\|_{\Phi_d - d(x, \Omega_\alpha + B(0, C))/C} e^{(\Phi_d(x_\alpha) - \Phi_o(x_\alpha))/h}.$$

De plus, (7.12) s'écrit :

$$(7.17) \quad \|u\|_{\Phi_0, \Omega_\alpha} \leq C e^{C|d|/h} e^{(\Phi_d(x_\alpha) - \Phi_0(x_\alpha))/h} \|u\|_{\Phi_d, \Omega_\alpha}.$$

Ainsi, (7.15)–(7.17) donnent:

$$(7.18) \quad \|(q-z)^{-1}(\chi_\alpha u)\|_{\Phi_d - d(x, \Omega_\alpha + B(0, C))/C'} \leq C e^{C|d|/h} \|u\|_{\Phi_d, \Omega_\alpha} / d(z, \sigma).$$

Cette relation assure la convergence de (7.10) dans H_{Φ_d} . On a donc construit un inverse à droite de $q^d - z$ de norme inférieure à $C e^{C|d|/h} / a(h)$. Le résultat est vrai pour son adjoint $q^{-d} - \bar{z}$, donc cet inverse à gauche est un inverse et le Théorème 7.2 est démontré. \square

Remarque : le Théorème 7.2 reste vrai pour $z \in \Omega_h$, $|z - \mu| \geq h^N$, $h \leq h_N$, en remplaçant $a(h)$ par $|z - \mu|$ dans son énoncé, mais nous avons besoin pour le montrer d'une version améliorée du théorème 5.4. Ceci montre que le spectre de q^d dans Ω_h est à une distance $\mathcal{O}(h^\infty)$ de celui de q .

On a aussi besoin d'un inverse de l'opérateur $q_k - z$ sur la droite $\mathbb{R} + di$. On rappelle que l'on avait à la section 6:

$$\tilde{q} = q - \sum_j \theta_j$$

$$q_k = q - \sum_{j \neq k} \theta_j = \tilde{q} + \theta_k$$

où θ_j est une fonction positive destinée à boucher le puits centré en $2\pi j$.

On prolonge les fonctions θ_j au domaine complexe par $\theta_j(x) = \theta_j(\operatorname{Re} x)$, ce qui permet de définir sur la droite $\mathbb{R} + di$ les opérateurs:

$$\tilde{q}^d = q^d - \sum_j \theta_j,$$

$$q_k^d = q^d - \sum_{j \neq k} \theta_j = \tilde{q}^d + \theta_k.$$

Soit Φ_ε une fonction de $\mathbb{R} + di$ dans \mathbb{R} vérifiant la condition

$$(7.19)(\varepsilon) \quad |\Phi_\varepsilon'| \leq (|\operatorname{Re} \Phi'| - \varepsilon)_+, \quad |\Phi_\varepsilon^{(k)}| \leq 1/\varepsilon \text{ pour } k \geq 1.$$

L'opérateur $e^{\Phi_\varepsilon(x)/h} (\tilde{q}^d - z) e^{-\Phi_\varepsilon(x)/h}$ est elliptique pour h assez petit en fonction de ε et donc, pour h assez petit:

$$\|(\tilde{q}^d - z)^{-1}\|_{L^2} \leq C$$

$$\|(\tilde{q}^d - z)^{-1}\|_{L^2_{\Phi_\varepsilon}} \leq C\varepsilon.$$

On va contrôler $q_k^d - z$ à partir de $\tilde{q}^d - z$ et $q^d - z$:

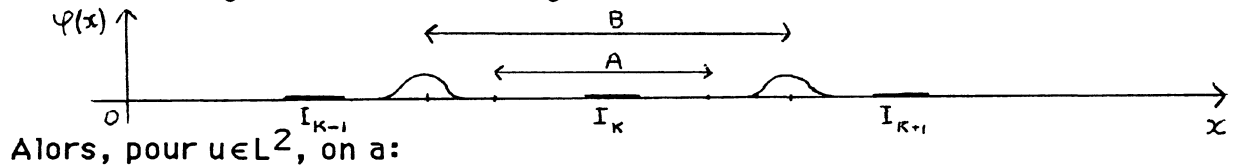
Lemme 7.3 :

Il existe une constante $C > 0$ telle que, si $z \in \partial\Omega_h$, alors $q_k^d - z$ est inversible et $\|(q_k^d - z)^{-1}\| \leq C e^{C|d|/h} / a(h)$.

Démonstration :

On note toujours I_j les projections des puits. Soit A un intervalle de \mathbb{R} tel que $I_k \subset CA$ et A ne rencontre pas $I_{k-1} \cup I_{k+1}$. Soit B vérifiant les mêmes propriétés et tel que $A \subset B$.

Soit φ positive, à support près des extrémités de B , nulle sur A , vérifiant (7.19)(ε_0) pour un certain ε_0 :



Alors, pour $u \in L^2$, on a:

$$\begin{aligned} \|(q_k^d - z)u\|_{L^2} &\geq \|1_B (q_k^d - z)u\|_{L^2, \varphi} = \|1_B (q^d - z)u\|_{L^2, \varphi} \\ &\geq \|(q^d - z)1_B u\|_{L^2, \varphi} - \|[q^d, 1_B]u\|_{L^2, \varphi} \end{aligned}$$

Or $(q^d - z)^{-1}$ est continu sur L^2_φ car:

$$\begin{aligned} (q^d - z)^{-1} &= (\tilde{q}^d - z)^{-1} - (\tilde{q}^d - z)^{-1} (\sum_j \theta_j) (\tilde{q}^d - z)^{-1} \\ &\quad + (\tilde{q}^d - z)^{-1} (\sum_j \theta_j) (q^d - z)^{-1} (\sum_j \theta_j) (\tilde{q}^d - z)^{-1} \end{aligned}$$

et φ est constante sur $\cup_j \text{supp } \theta_j$.

Donc:

$$(7.20) \quad \|(q_k^d - z)u\|_{L^2} \geq (1/C) e^{-C|d|/h} a(h) \|1_A u\|_{L^2} - e^{-1/Ch} \|u\|_{L^2}.$$

Il nous faut une inégalité analogue avec 1_A remplacé par $1_{\mathbb{R} \setminus A}$, que nous obtenons de la même manière:

Soit D un intervalle avec $I_k \subset CD \subset CA$. Maintenant $\text{supp } \varphi$ est proche de ∂D . On a:

$$\begin{aligned} \|(q_k^d - z)u\|_{L^2} &\geq \|1_{\mathbb{R} \setminus D} (q_k^d - z)u\|_{L^2, \varphi} = \|1_{\mathbb{R} \setminus D} (\tilde{q}^d - z)u\|_{L^2, \varphi} \\ &\geq \|(\tilde{q}^d - z)1_{\mathbb{R} \setminus D} u\|_{L^2, \varphi} - \|[\tilde{q}^d, 1_{\mathbb{R} \setminus D}]u\|_{L^2, \varphi} \end{aligned}$$

et donc :

$$(7.21) \quad \|(q_k^d - z)u\|_{L^2} \geq 1/C \|1_{\mathbb{R} \setminus A} u\|_{L^2} - e^{-1/Ch} \|u\|_{L^2}.$$

Pour $|d|$ assez petit, (7.20) et (7.21) entraînent

$$(7.22) \quad \|(q_k^d - z)u\| \geq 1/C e^{-C|d|/h} a(h) \|u\|.$$

Comme on a la même inégalité pour l'adjoint $(q_k^d - z)^* = (q_k^{-d} - \bar{z})$, $q_k^d - z$ est inversible et $\|(q_k^d - z)^{-1}\| \leq C e^{C|d|/h} / a(h)$ et le lemme est démontré. \square

Nous allons en déduire des inégalités à poids, d'abord pour q_k^d , puis pour q^d .

Soit donc Φ_ε vérifiant (7.19)(ε). On a :

$$(q_k^d - z)^{-1} = (\tilde{q}^d - z)^{-1} - (\tilde{q}^d - z)^{-1} \theta_k (\tilde{q}^d - z)^{-1} \\ + (\tilde{q}^d - z)^{-1} \theta_k (q_k^d - z)^{-1} \theta_k (\tilde{q}^d - z)^{-1}$$

et comme Φ_ε est constante sur le support de θ_k ,

$$(7.23) \quad \|(q_k^d - z)^{-1}\|_{\mathfrak{X}(L^2_{\Phi_\varepsilon})} \leq C_\varepsilon e^{C|d|/h} / a(h).$$

Nous allons réutiliser la construction de $(q^d - z)^{-1}$ à partir de $(q_k^d - z)^{-1}$ pour montrer le :

Théorème 7.4 :

Il existe une constante $\tilde{C} > 0$ telle que, si φ vérifie (7.19)($\varepsilon + \tilde{C}|d|$) et $z \in \partial\Omega_h$, alors :

$$(7.24) \quad \|(q^d - z)^{-1}\|_{L^2_\varphi} \leq C_\varepsilon e^{C|d|/h} / a(h) \text{ pour } h \leq h(\varepsilon).$$

Démonstration :

On reprend dans le complexe la démonstration du Théorème 5.4. On pose $R_z^d = \sum_k (q_k^d - z)^{-1} \Psi_k$ où $\Psi_k = 1_{\{x; 2k\pi - \pi \leq \text{Re } x \leq 2k\pi + \pi\}}$ et $a_{j,k} = \|\Psi_j (q_k^d - z)^{-1} \Psi_k\|_{\mathfrak{X}(L^2_\varphi)}$.

Comme on a un peu de marge sur φ , on a :

$$a_{j,k} \leq C_\varepsilon e^{C|d|/h} / a(h) \quad \text{si } |j-k| \leq 1 \\ a_{j,k} \leq C_\varepsilon e^{C|d|/h} / a(h) e^{-|j-k|(\tilde{C}|d| + \varepsilon)/Ch} \quad \text{si } |j-k| \geq 2.$$

Donc, si \tilde{C} est assez grande, $\|R_Z^d\|_{\mathfrak{X}(L^2_{\varphi})} \leq C_{\varepsilon} e^{C|d|/h/a(h)}$.

De plus, $(q^d - z)^{-1} R_Z^d = I + K^d$, avec $K^d = \sum_k \sum_{j \neq k} \theta_j (q_k^d - z)^{-1} \Psi_k$.

Grâce à la marge qu'on s'est donné sur φ ,

$$\|\theta_j (q_k^d - z)^{-1} \Psi_k\|_{\mathfrak{X}(L^2_{\varphi})} \leq C_{\varepsilon} e^{C|d|/h/a(h)} e^{-(\tilde{C}|d| + \varepsilon)|j-k|/Ch}$$

et si \tilde{C} a été choisie assez grande, et $h \leq h(\varepsilon)$, $\|K\|_{\mathfrak{X}(L^2_{\varphi})} \leq 1/2$, ce qui achève la démonstration. \square

Corollaire 7.5 :

Si φ_1 et φ_2 vérifient (7.19) $(\varepsilon + \tilde{C}|d|)$ et $\varphi_1 = \varphi_2$ sur les projections des puits, alors le projecteur Π_F^d , défini par sa représentation intégrale, vérifie:

$$(7.25) \quad \|\Pi_F^d\|_{L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2}} \leq C_{\varepsilon} e^{C|d|/h}.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \text{On écrit } (q^d - z)^{-1} &= (\tilde{q}^d - z)^{-1} - (\tilde{q}^d - z)^{-1} (\sum_k \theta_k) (\tilde{q}^d - z)^{-1} \\ &\quad + (\tilde{q}^d - z)^{-1} (\sum_k \theta_k) (q^d - z)^{-1} (\sum_k \theta_k) (\tilde{q}^d - z)^{-1} \end{aligned}$$

et seul le dernier terme contribue à la représentation intégrale de Π_F^d . On obtient alors le Corollaire à partir du Théorème.

Revenons maintenant aux fonctions u_0 et u_{β} . $\{u_{\alpha}\}$ est la base orthonormée de $\{\Pi_F g_{\alpha}\}$, avec $\|\Pi_F g_{\alpha}\| = 1$ et $|g_{\alpha}| \leq |c(h)| e^{-b'd^2(x, I_{11}(\alpha))/h}$ pour un $b' > 0$.

Sur l'axe $\mathbb{R} + di$, $|g_0(x)| \leq |g_0(\text{Re } x)| e^{C|d|/h}$ pour un $c > 0$ et d'après le Corollaire 7.6:

$$|\Pi_F^d g_0(x)| \leq C_{\varepsilon} e^{C|d|/h} e^{-(1-\varepsilon-C|d|)\varphi^d(x)/h}$$

où $\varphi^d(x) = \inf_{y \in \mathbb{R} + di} D_d^{(1)}(x, y) + b d(\text{Re } y, I_0)^2$

D_d est la distance sur $\mathbb{R} + di$ associée à la fonction $\text{Re } \Psi$, et $D_d^{(1)}$ est la distance indirecte associée.

Ainsi, quitte à réduire un peu la valeur de ν à la section 6, on a:

$$(7.26) \quad \|e^{(1-\varepsilon-C|d|)\varphi^d(x)/h} u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R} + di)} \leq C_{\varepsilon} e^{(\varepsilon + C|d|)/h}.$$

f^d est la fonction définie sur $\mathbb{R} + di$ par

$$(7.27) \quad f^d(x) = \text{Min}(\nu k + D_d(2\pi k, |x|), \nu(k+1) + D_d(2\pi(k+1), |x|)) \\ \text{pour } 2\pi k \leq |x| \leq 2\pi(k+1).$$

Comme de plus $(q^d - \mu)u_0 = \sum_{\gamma \neq 0} w_{\gamma,0} u_{\gamma}$, et que les $w_{\gamma,0}$ sont exponentiellement petits,

$$(7.28) \quad \| e^{\Psi(x)/h} (q^d - \mu)u_0 \|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}.$$

Or nous savons par (7.6) et (7.7) que u_0 vérifie la majoration:

$$(7.29) \quad |u_0(x) e^{\Psi(x)/h}| \leq C_{\varepsilon} e^{\varepsilon/h} \text{ dans un voisinage complexe de } y_0, \text{ pour } \\ \text{tout } \varepsilon > 0.$$

Nous allons pouvoir améliorer l'estimation (7.26) au voisinage de l'intervalle $[y_0, \pi + \varepsilon_0]$:

Soit $\Psi_d(x)$ la fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R} + di$ par $\Psi_d(x) = \text{Re } \Psi(x)$ sur $[y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di]$, Ψ_d est constante à droite et à gauche de cet intervalle.

Soit $\chi: \mathbb{R} + di \rightarrow [0, 1]$ une fonction troncature à support dans $[y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$, valant 1 sur $[y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + 3\varepsilon_0/4 + di]$.

On a:

$$(q^d - \mu)\chi u_0 = \chi(q^d - \mu)u_0 + [q^d, \chi]u_0$$

(7.28) permet de majorer le premier terme:

$$\| e^{\Phi(x)/h} \chi(q^d - \mu)u_0 \|_{L^2(\mathbb{R} + di)} \leq e^{-\varepsilon_0/h}.$$

$[q^d, \chi]$ est à support dans

$[y_0 - \varepsilon_0 + di, y_0 - \varepsilon_0/2 + di] \cup [\pi + 3\varepsilon_0/4 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$; grâce à (7.29) la partie dans $[y_0 - \varepsilon_0 + di, y_0 - \varepsilon_0/2 + di]$ est $\tilde{O}(1) e^{-\Psi(x)/h}$, et grâce à (7.26) la partie dans $[\pi + 3\varepsilon_0/4 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$ est $\tilde{O}(1) e^{-(\Psi(x) - C|d|)/h}$ (car f^d coïncide avec $\text{Re } \Psi$ sur $[y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$), elle est donc $\tilde{O}(1) e^{-(\Psi_d(x) + \varepsilon_0)/h}$.

Donc $\| e^{\Psi_d(x)/h} [q^d, \chi]u_0 \|_{L^2(\mathbb{R} + di)} \leq C_{\varepsilon} e^{\varepsilon/h}$ puis

$$(7.30) \quad \| e^{\Psi_d(x)/h} (q^d - \mu)(\chi u_0) \|_{L^2(\mathbb{R} + di)} \leq C_{\varepsilon} e^{\varepsilon/h}.$$

Nous savons que si φ est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}+di$ avec $|\varphi'| < |\operatorname{Re} \Psi'|$, l'opérateur $e^{\varphi(x)/h} (q^d - \mu) e^{-\varphi(x)/h}$ est elliptique. (7.30) entraîne donc:

$$\|e^{\Psi_d(x)/h} u_0\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di])} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h},$$

et comme sur le segment $[y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di]$, $\Psi_d(x) = \operatorname{Re} \Psi(x)$, on a:

$$(7.31) \quad \|u_0 e^{\Psi(x)/h}\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di])} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}.$$

Enfin, si on regroupe les majorations (7.6)–(7.8), (7.28) et (7.31), on a:

$$\|e^{\Psi(x)/h} (q^d - \mu)(u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di])} \leq C_d e^{-\varepsilon_0(d)/h}$$

pour $0 < d \leq d_0$,

$$\|e^{\Psi(x)/h} (u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di])} \leq C_\varepsilon(d) e^{\varepsilon/h}$$

pour $0 < d \leq d_0$,

et $|e^{\Psi(x)/h} (u_0 - v_0)| \leq C e^{-\varepsilon_0/h}$ dans un voisinage complexe de y_0 .

Compte tenu de l'argument d'ellipticité déjà invoqué, ceci entraîne:

$$(7.32) \quad \|e^{\Psi(x)/h} (u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0 - \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0/2 + di])} \leq C_d e^{-\varepsilon_0/h}.$$

Récapitulons les formules dont nous aurons besoin par la suite. On a montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a les majorations:

$$(7.6) \quad \|e^{\Psi(x)/h} (q^d - \mu)v_0\|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C_d e^{-\varepsilon_0(d)/h}$$

pour $0 < d \leq d_0$.

$$(7.7) \quad \|e^{\Psi(x)/h} v_0\|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C_\varepsilon(d) e^{\varepsilon/h} \text{ pour } 0 < d \leq d_0.$$

$$(7.28) \quad \|e^{\Psi(x)/h} (q^d - \mu)u_0\|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C e^{-\varepsilon_0/h}$$

pour $0 \leq d \leq d_0$.

$$(7.31) \quad \|e^{\Psi(x)/h} u_0\|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h} \text{ pour } 0 \leq d \leq d_0.$$

$$(7.32) \quad \|e^{\Psi(x)/h} (u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C_d e^{-\varepsilon_0(d)/h}$$

pour $0 < d \leq d_0$.

Maintenant que nous avons obtenu ces approximations BKW, nous pouvons passer au calcul du coefficient $w_{\beta,0}$.

On a:

$$w_{\beta,0} = \int (q-\mu)u_0(x) \bar{u}_{\beta}(x) dx.$$

Donc, avec $\chi_t = 1_{]-\infty, t]}$ pour t dans un voisinage de π :

$$\begin{aligned} w_{\beta,0} &= \int \chi_t(x) (q-\mu)u_0(x) \overline{u_{\beta}(x)} dx \\ &\quad + \int u_0(x) (1-\chi_t(x)) \overline{(q-\mu)u_{\beta}(x)} dx \\ &\quad - \int u_0(x) \overline{[q, \chi_t]u_{\beta}(x)} dx. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la somme sont majorés par $e^{-(S+\varepsilon_0)/h}$ et on peut calculer le troisième car:

$$[q, \chi] = 1_{[t, t+h]} \cos((x-h/2)/2) \tau_{h-1} - 1_{[t-h, t]} \cos((x+h/2)/2) \tau_{-h}.$$

On a donc:

$$(7.33) \quad w_{\beta,0} = \int_{[t, t+h]} \cos(x/2 - h/4) [u_0(x-h) \bar{u}_{\beta}(x) - u_0(x) \bar{u}_{\beta}(x-h)] dx + \mathcal{O}(e^{-(S+\varepsilon_0)/h}).$$

Ceci nous conduit à introduire la fonction holomorphe:

$$A(z) = \cos(z/2 - h/4) [u_0(z-h) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}) - u_0(z) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}-h)]$$

A vérifie la majoration:

$$(7.34) \quad |\tau_{-h}A - A| = \mathcal{O}(e^{-(S+\varepsilon_0)/h})$$

dans le domaine $D = \{z; \pi + \varepsilon_0/2 \leq \text{Re } z \leq \pi + \varepsilon_0 \text{ et } 0 \leq \text{Im } z \leq d_0\}$.

En effet:

$$\begin{aligned} (\tau_{-h}A - A)(z) &= \cos(z/2 + h/4) [u_0(z) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}+h) - u_0(z+h) \bar{u}_{\beta}(\bar{z})] \\ &\quad - \cos(z/2 - h/4) [u_0(z-h) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}) - u_0(z) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}-h)] \\ &= u_0(z) [\cos(z/2 + h/4) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}+h) + \cos(z/2 - h/4) \bar{u}_{\beta}(\bar{z}-h)] \\ &\quad - \bar{u}_{\beta}(\bar{z}) [\cos(z/2 + h/4) u_0(z+h) + \cos(z/2 - h/4) u_0(z-h)] \\ &= u_0(z) \overline{(q-\mu)u_{\beta}(\bar{z})} - \bar{u}_{\beta}(\bar{z}) (q-\mu)u_0(z). \end{aligned}$$

Il suffit alors de majorer $(q^d - \mu)u_0$ et u_0 par (7.28) et (7.31) et $(q^d - \mu)u_\beta$ et u_β par les inégalités analogues:

$$(7.28)' \quad \| e^{\Gamma(x)/h} (q^d - \mu)u_\beta \|_{L^2([\pi + \varepsilon_0/2 + di, y_1 + di])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

$$(7.31)' \quad \| e^{\Gamma(x)/h} u_\beta \|_{L^2([\pi + \varepsilon_0/2 + di, y_1 + di])} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}$$

où $d \in [-d_0, d_0]$, y_1 est un point choisi arbitrairement proche de $2\pi - \nu$, par exemple $y_1 = 2\pi - y_0$, et Γ est le prolongement holomorphe de la fonction $S - \Phi(x) + \pi i(x - \pi)$ à un voisinage complexe de l'intervalle $]\pi, 2\pi - \nu[$ sur lequel elle est analytique.

Sur cet intervalle, on a:

$$\bar{\Gamma}(x) = S - \Phi(x) - \pi i(x - \pi) = S - \Psi(x)$$

et donc, dans un voisinage de $]\pi, 2\pi - \nu[$:

$$\bar{\Gamma}(\bar{z}) = S - \Psi(z).$$

Les majorations (7.28), (7.28)', (7.31) et (7.31)' entraînent donc (7.34).

Il en résulte que, pour $d \in]0, d_0]$ et $t \in [\varepsilon_0/2, \varepsilon_0]$:

$$(7.35) \quad w_{\alpha, \beta} = \int_{[t+di, t+h+di]} A(z) dz + \mathcal{O}(e^{-(S+\varepsilon_0)/h}).$$

De plus, u_β admet une estimation BKW $v_\beta = b_\beta(h) a_\beta(x, h) e^{-\Gamma(x)/h}$. Plus précisément, on a:

$$(7.8)' \quad \| e^{\Gamma(x)/h} (q^d - \mu)v_\beta \|_{L^2([\pi + \varepsilon_0/2 + di, y_1 + di])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

$$(7.32)' \quad \| e^{\Gamma(x)/h} (u_\beta - v_\beta) \|_{L^2([\pi + \varepsilon_0/2 + di, y_1 + di])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

pour $d \in [-d_0, d_0]$.

Si on pose $B(z) = \cos(z/2 - h/4) [v_0(z-h)\bar{v}_\beta(\bar{z}) - v_0(z)\bar{v}_\beta(\bar{z}-h)]$, alors $|B(z) - A(z)| \leq e^{-(S+\varepsilon_0(d))/h}$ dans D et:

$$(7.36) \quad w_{\beta, 0} = \int_{[t+di, t+\varepsilon_0+di]} B(z) dz + \mathcal{O}_d(e^{-(S+\varepsilon_0(d))/h}) \text{ pour } 0 < d \leq d_0.$$

On peut calculer $B(z)$:

$$\begin{aligned}
B(z) &= b_0(h) \bar{b}_\beta(h) \cos(z/2 - h/4) [a_0(z-h) e^{-\Psi(z-h)/h} \bar{a}_\beta(\bar{z}) e^{-\bar{\Gamma}(\bar{z})/h} \\
&\quad - a_0(z) e^{-\Psi(z)/h} \bar{a}_\beta(\bar{z}-h) e^{-\bar{\Gamma}(\bar{z}-h)/h}] \\
&= b_0(h) \bar{b}_\beta(h) \cos(z/2) a_0(z) \bar{a}_\beta(\bar{z}) \\
&\quad [e^{-\Psi(z-h)/h} e^{(-S+\Psi(z))/h} - e^{-\Psi(z)/h} e^{(-S+\Psi(z-h))/h}] (1 + \mathcal{O}(h)) \\
&= 2 b_0(h) \bar{b}_\beta(h) \cos(z/2) a_0(z) \bar{a}_\beta(\bar{z}) e^{-S/h} \operatorname{sh} \Psi'(z) (1 + \mathcal{O}(h)).
\end{aligned}$$

Donc $B(z)$ s'écrit $e^{-S/h} b_0(h) \bar{b}_\beta(h) d(x, h)$ où d est la réalisation d'un symbole analytique classique elliptique.

De plus, on montre de la même façon que (7.34):

$$(7.34)' \quad |\tau_{-h} B - B| \leq C_d e^{-(S + \varepsilon_0(d))/h} \text{ sur le segment } [\pi + \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0 + di], \text{ avec } 0 < d \leq d_0.$$

Ceci entraîne que, sur ce segment, $|d(x+h, h) - d(x, h)| \leq C_d e^{-\varepsilon_0(d)/h}$ et comme d est classique, on en déduit en annulant l'un après l'autre les termes du développement de d :

$$|d(x, h) - d(\pi + \varepsilon_0 + di)| \leq e^{-\varepsilon_0/h} \text{ sur le segment } [\pi + \varepsilon_0/2 + di, \pi + \varepsilon_0 + di].$$

Comme $w_{\beta, 0} = \int_{[t+di, t+h+di]} e^{-S/h} b_0(h) \bar{b}_\beta(h) d(z, h) dz$ pour $t \in [\pi + \varepsilon_0, \pi + \varepsilon_0/2]$, et $|b_0(h) \bar{b}_\beta(h)| + 1/|b_0(h) \bar{b}_\beta(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}$, on a montré:

Théorème 7.7 :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, si U et V sont deux puits avec $\delta(U, V) = 1$, on a:

$$1/C_\varepsilon e^{-(S+\varepsilon)/h} \leq |w_{U, V}| \leq C_\varepsilon e^{-(S-\varepsilon)/h}.$$

B. La partie inférieure du spectre.

On choisit de minorer l'interaction entre les puits centrés en $M = M_0 = (4\pi/3, 0)$ et $N = M(3, (1, 1)) = (8\pi/3, 0)$.

La phase $\Psi(x) = \Phi(x) - \Phi(4\pi/3)$ est analytique entre les projections des puits U_M et U_N et on a des constructions BKW:

$$v_M(x) = b_M(h) e^{-\Psi(x)/h} a_M(x, h)$$

$$v_N(x) = b_N(h) e^{-(S-\Psi(x))/h} a_N(x, h)$$

où : a_M et a_N sont des réalisations de symboles analytiques classiques elliptiques définis sur $]y_0, 2\pi + \varepsilon_0[$ et $]2\pi - \varepsilon_0, 4\pi - y_0[$, y_0 étant un point choisi à gauche de $\Pi_x U_N$, arbitrairement proche de cette projection, ε_0 un réel strictement positif; $b_M(h)$ et $b_N(h)$ vérifie:

$$|b_M(h)| + 1/|b_M(h)| + |b_N(h)| + 1/|b_N(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}.$$

Ces constructions vérifient:

$$\|e^{\Psi(x)/h} (q - \mu)v_M\|_{L^2([-y_0, \varepsilon_0])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

$$\|e^{\Psi(x)/h} (u_M - v_M)\|_{L^2([-y_0, \varepsilon_0])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

$$\|e^{(S-\Psi(x))/h} (q - \mu)v_N\|_{L^2([- \varepsilon_0, y_0])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}$$

$$\|e^{(S-\Psi(x))/h} (u_N - v_N)\|_{L^2([- \varepsilon_0, y_0])} \leq e^{-\varepsilon_0/h}.$$

On conclut comme au paragraphe A, en restant sur le réel, et on montre:

Théorème 7.8 :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que, si U_M et U_N sont deux puits avec $\delta(M, N) = 1$, on a:

$$1/C_\varepsilon e^{-(S+\varepsilon)/h} \leq |w_{M, N}| \leq C_\varepsilon e^{-(S-\varepsilon)/h}.$$

C. Renormalisation.

A la section 6, nous avons pris soin en définissant les fonctions g_M associée à chaque puits de choisir des relations entre ces fonctions entièrement analogues à celles de la section 2 pour le cas $\mu(h) > -1$, et de la section 3 pour le cas $\mu(h) < -1$.

On peut donc dans les deux cas faire les mêmes réductions qu'aux chapitres 2 et 3. On obtient:

Théorème 7.9 :

On considère l'opérateur $q_h = \text{op}_h^W [\cos x + \cos(x/2 + \xi) + \cos(x/2 - \xi)]$. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $c(\varepsilon_0) > 0$ telle que, si $h \leq c(\varepsilon_0)$, le spectre de q_h est inclus dans $[-3/2, 3]$ et:

$\text{Sp}(q_h) \cap [-3/2, -1 - \varepsilon_0]$ est inclus dans une réunion d'intervalles

$$\bigcup_{j=1, \dots, n(h)} J_j,$$

J_{j+1} est situé à droite de J_j , à une distance équivalente à h ,

J_1 est situé à une distance équivalente à h de $-3/2$,

$$|J_j| \leq e^{-c(\varepsilon_0)/h},$$

$\text{Sp } q_h \cap J_j$ est le spectre d'un opérateur $\mu I + c_j \text{op}_h^W P^0$, avec $\mu \in J_j$, c_j est réel avec $|c_j| = e^{-c/h}$, $c \approx 1$, h' est le plus petit réel tel que

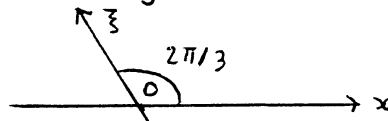
$$h'/2\pi \equiv 2\pi/h[\mathbb{Z}],$$

P^0 est un symbole à valeurs dans $M_2(\mathbb{C})$, hermitien, 2π -périodique en x et ξ , tel que:

$$P^0(-x, -\xi, h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^0(x, \xi, h) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P^0(\rho^2(x, \xi), h) = \begin{pmatrix} P^0_{11}(x-h/2, \xi, h) & e^{-i\xi} P^0_{12}(x, \xi) \\ e^{i\xi} P^0_{21}(x, \xi) & P^0_{22}(x+h/2, \xi, h) \end{pmatrix}$$

où ρ est la rotation d'angle $\pi/3$ dans le repère:



De plus, P^0 s'écrit $P^0 = Q^0 + R^0$, avec:

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{i\xi} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-i\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

R^0 se prolonge en un symbole holomorphe sur le domaine $\{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2; |\text{Im } x| + |\text{Im } \xi| \leq c(\varepsilon_0)/h\}$ et sur ce domaine $|R^0(x, \xi)| \leq e^{-c(\varepsilon_0)/h}$;

$\text{Sp}(q_h) \cap [-1 + \varepsilon_0, 3]$ est inclus dans une réunion d'intervalles

$$\bigcup_{j=1, \dots, n(h)} K_j,$$

K_{j+1} est situé à gauche de K_j , à une distance équivalente à h ,

K_1 est situé à une distance équivalente à h de 3 ,

$$|K_j| \leq e^{-c(\varepsilon_0)/h},$$

$\text{Sp } q_h \cap K_j$ est le spectre d'un opérateur $\mu I + d_j \text{op}_h^W p^0$, avec $\mu \in K_j$, d_j est réel avec $|d_j| = e^{-c/h}$, $c \approx 1$,

p^0 est un symbole réel, 2π -périodique en x et ξ , invariant par la rotation ρ .

De plus, p^0 s'écrit $p^0 = q^0 + r^0$, avec $q^0 = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$,

r^0 se prolonge en un symbole holomorphe sur le domaine $\{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2; |\operatorname{Im} x| + |\operatorname{Im} \xi| \leq c(\varepsilon_0)/h\}$ et sur ce domaine $|r^0(x, \xi)| \leq e^{-c(\varepsilon_0)/h}$.

(Dans cet énoncé, "a est équivalent à h" signifie que a/h et h/a sont majorés par une constante qui ne dépend que de ε_0).

8. Extension à l'opérateur scalaire renormalisé.

Le but de cette section est de montrer comment l'étude de l'opérateur $q^0 = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$ faite aux sections 5 à 7 s'adapte aux opérateurs perturbés $p^0 = q^0 + r^0$, où r^0 est un symbole défini sur $\{(x, \xi); |\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq 1/\delta\}$ et vérifiant $\sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial^\alpha r_0| \leq \delta$ sur ce domaine, holomorphe, réel sur le réel, 2π -périodique en x et ξ et invariant par la rotation $\rho(x, \xi) = (x - \xi, x)$.

A partir des courbes de niveau du symbole q^0 étudiées à la section 5, on peut déduire celle du symbole p^0 grâce à une étude analogue faite dans [He, Sj]₄. On a les résultats suivants:

Les valeurs critiques de p^0 sont:

1. Le maximum $p^0(0, 0)$, atteint aux points $(2k\pi, 2k'\pi)$ pour $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$,
2. Le minimum $p^0(2\pi/3, 4\pi/3)$ atteint aux points $(2\pi/3 + 2k\pi, 4\pi/3 + 2k'\pi)$ et $(4\pi/3 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k'\pi)$ pour $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$,
3. La valeur $c \approx -1$ obtenue aux points selle $(k\pi, k'\pi)$ pour $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tels que k ou k' soit impair.

La courbe de niveau de p^0 correspondant à une valeur $E \in]p^0(2\pi/3, 4\pi/3), c[$ est une réunion de cercles déformés entourant les minima de p^0 . De même, pour $E \in]c, p^0(0, 0)[$, c'est une réunion de cercles déformés entourant les maxima de p^0 . L'ensemble $\{(x, \xi); p^0(x, \xi) = c\}$ est décrit par: $\{(x, \xi); p^0(x, \xi) = c\} = f(\{(x, \xi); q^0(x, \xi) = -1\})$, où f est 2π -périodique, proche de l'identité et laisse fixes les points $(k\pi, k'\pi)$ pour $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ et k ou k' impair.

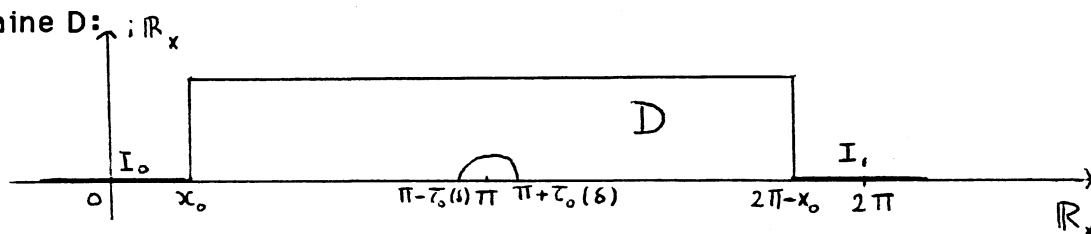
On étudie le spectre de p^0 dans $\mathbb{R} \setminus [-1 - \varepsilon_0, -1 + \varepsilon_0]$ où $\varepsilon_0 > 0$ est fixé et on cherche à écrire des résultats vrais pour $\delta \leq \delta(\varepsilon_0)$. L'étude du spectre au dessous de -1 est entièrement analogue à celle faite à la section 7 de [He, Sj]₄; nous n'étudierons donc que la partie supérieure du spectre. A partir de maintenant, on fait le changement de variables symplectique $(x, \xi) \mapsto (x, \xi - x/2)$ et on travaille avec $p = q + r$, où $p(x, \xi) = p^0(x, \xi - x/2)$, $q(x, \xi) = \cos x + 2 \cos(x/2) \cos \xi$, $r(x, \xi) = r^0(x, \xi - x/2)$.

On commence par prendre $\delta \leq \varepsilon_0/C$, avec C assez grand. Ainsi les projections des puits restent séparées par au moins $c\varepsilon_0$, avec c indépendant de δ .

Soit $E \in [-1 + \varepsilon_0, p(0,0)]$ et $U_0(E)$ la composante connexe de $p^{-1}(E)$ entourant le point $(0,0)$, $x_0 > 0$ le réel tel que $I_0 = \pi_x U_0 = [-x_0, x_0]$. On a :

Lemme 8.1 :

Il existe une fonction $\tau_0(\delta)$ tendant vers 0 avec δ telle que, dans le domaine D :



(la hauteur du rectangle ne dépend pas de δ).

Il existe une fonction holomorphe ξ_+ , telle que $\text{Im} \xi_+(x_0) = 0$, $p(x, \xi_+(x)) = E$, et $0 \leq \text{Im} \xi_+ \leq 1/2\delta$.

Démonstration :

On sait que le lemme est vrai pour $p=q$, et la situation est stable près des points tournants; loin de ces points, on veut appliquer le théorème des fonctions implicites. Soit donc ξ_+^0 la fonction vérifiant le lemme pour $p=q$.

On sait que près de π , $|\xi_+^0| \approx -\text{Log}|x - \pi|$, et si on prend $\tau_0(\delta) = e^{-1/C\delta}$ pour C assez grand, $|\xi_+^0| \leq 1/2\delta$ dans D . On a :

$$q(x, \xi_+^0(x) + \xi) - E = \cos x + 2 \cos(x/2) [\cos \xi_+^0(x) \cos \xi - \sin \xi_+^0(x) \sin \xi] - E$$

$$= (\cos x - E)(1 - \cos \xi) - 2 \cos(x/2) \sin \xi_+^0(x) \sin \xi.$$

Comme $|\cos(x/2) \sin \xi_+^0(x)| \geq c$, et que, uniformément en (x, ξ) pour $x \in D$ et $|\text{Im} \xi| \leq 1/\delta$, $|r(x, \xi)| + |\partial_\xi r(x, \xi)| \leq \delta$, on peut résoudre $p(x, \xi_+^0(x)) - E = 0$ dans D avec $|\xi_+^0(x) - \xi_+(x)| \leq C\delta$. \square

Pour x dans D , les zéros de la fonction $p(x, \xi) - E$ sont les points $\xi_+(x) + 2k\pi$ et $\xi_-(x) + 2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$, avec $\xi_-(x) = -\xi_+(2\pi - x)$. Pour $x \in D$ et $|\text{Im} \xi| \leq \min(\text{Im} \xi_+(x), \text{Im} \xi_+(2\pi - x))$, $p(x, \xi) - E$ ne s'annule pas.

Sur le réel, $\xi_-(x) = \bar{\xi}_+(x) + 2k\pi$. On prolonge la fonction $\xi(x) = \text{Im} \xi_+(x)$ sur tout \mathbb{R} : d'abord par 0 sur $]\pi - \tau_0(\delta), \pi + \tau_0(\delta)[$, puis entre les puits par périodicité, et sur les projections des puits par 0. On définit alors le poids Φ comme la primitive de $\xi(x)$ qui s'annule en 0, la distance

$$D(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|.$$

On peut refaire l'étude des sections 5 et 6 avec ces fonctions. La seule modification est qu'on ne contrôle plus le support de $[p, \chi]$ lorsque χ est une troncature, mais le résultat suivant de [He, Sj]₄ (paragraphe 7.1) suffit: Si $\chi = 1_{]-\infty, t]}$ et φ_1 et φ_2 sont des fonctions réelles uniformément lipschitziennes, avec $|\varphi'_1| + |\varphi'_2| \leq 1/C\delta$ et $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que:

$$\|[p, \chi]\|_{L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2}} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}.$$

On a donc:

$$(8.1) \quad \|e^{(1-\varepsilon)f(x)/h} u_0(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}$$

f est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ di par

$$(8.2) \quad f(x) = \text{Min}(\nu k + D(2\pi k, |x|), \nu(k+1) + D(2\pi(k+1), |x|))$$

pour $2\pi k \leq |x| \leq 2\pi(k+1)$, où ν est un réel vérifiant:

$$0 < \nu \leq S'(p) = D(0, 2\pi).$$

On en déduit, comme à la section 6, que la matrice W vérifie les majorations:

$$(8.3) \quad |w_{\alpha, \beta}| \leq e^{-\varepsilon_0 \delta(\alpha, \beta)/h} \text{ pour un } \varepsilon_0 \text{ indépendant de } \delta.$$

$$(8.4) \quad |w_{\alpha, \beta}| \leq e^{-(S' + \varepsilon_0)/h} \text{ si } \delta(\alpha, \beta) \geq 2$$

$$(8.5) \quad |w_{\alpha, \beta}| \leq C_\varepsilon e^{-(S' - \varepsilon)/h} \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \text{ pour } \delta(\alpha, \beta) = 1.$$

Il reste à minorer $w_{\alpha, \beta}$ pour $\delta(\alpha, \beta) = 1$.

La phase Ψ que nous allons utiliser pour les constructions BKW est la primitive de $\xi_+(x)/i$ qui s'annule en 0.

On sera amené à considérer deux distances entre x_0 et $2\pi - x_0$:

$$S(p) = \text{Re } \Psi(2\pi - x_0) \text{ et}$$

$$S'(p) = \Phi(2\pi - x_0).$$

On a:

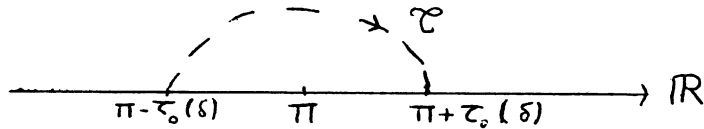
Lemme 8.2 :

Il existe une fonction $\tau_1(\delta)$ tendant vers 0 avec δ telle que:

$$(8.6) \quad 0 \leq S(p) - S'(p) \leq \tau_1(\delta).$$

Démonstration :

$S(p) - S'(p) = \text{Im} \int_{\mathcal{C}} \xi_+(z) dz$ où \mathcal{C} est le chemin:



Donc $S(p) - S'(p) = \text{Im} \int_{\mathcal{C}} \xi_+^0(z) dz + \text{Im} \int_{\mathcal{C}} [\xi_+(z) - \xi_+^0(z)] dz$

Il résulte de l'étude de ξ_+^0 de la section 6 que la première intégrale est positive et équivalente à $-\tau_0(\delta) \text{Log} \tau_0(\delta)$, et du Lemme 8.1 que la valeur absolue de la seconde est majorée par $C \delta \tau_0(\delta)$, ce qui montre le lemme. \square

Corollaire 8.3 :

On a:

$$(8.4)' \quad |w_{\alpha, \beta}| \leq e^{-(S + \varepsilon_0)/h} \quad \text{si } \delta(\alpha, \beta) \geq 2.$$

Démonstration :

Ceci résulte du Lemme 8.2 et de la majoration (8.4). \square

On définit comme à la section 7 l'opérateur p^d comme l'opérateur p agissant sur la droite $\mathbb{R} + di$, pour $d \geq \tau_0(\delta)$. On prolonge la fonction $\xi(x) = \min(\text{Im} \xi_+(x), \text{Im} \xi_+(2\pi - x))$, qui est définie sur le segment $[x_0 + di, 2\pi - x_0 + di]$ à $\mathbb{R} + di$ par périodicité au dessus des intervalles séparant les projections des puits, par 0 au dessus des projections des puits. La fonction poids Φ_d que nous utiliserons est la primitive de $\xi(x)$ qui s'annule en di . La distance associée est $D_d(x, y) = |\Phi_d(x) - \Phi_d(y)|$.

On va maintenant écrire des formes B.K.W. pour estimer le terme $w_{(0,1),0}$. Soit u_0 la fonction associée au puits U_0 . Il existe un réel $y_0 > x_0$ tel que, dans un voisinage complexe de y_0 , on ait:

(8.7) $u_0(x) = c_0(h) e^{-\Psi(x)/h} a_0(x, h)$, où $a_0(x, h)$ est un symbole analytique classique elliptique vérifiant $a(y_0, h) = 1$, $c_0(h)$ un complexe tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|c_0(h)| + 1/|c_0(h)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h}$. Par la méthode B.K.W analytique, on peut prolonger le symbole a sur $[y_0 - \varepsilon_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di]$ pour $d \geq \tau(\delta)$. On appelle $v_0(x)$ une réalisation de $c_0(h) e^{-\Psi(x)/h} a_0(x, h)$. On obtient alors, comme à la section 7, pour $\tau(\delta) < d \leq d_0$:

$$(8.8) \quad \| e^{\Phi_d(x)/h} (p^d - \mu) v_0 \|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h}$$

$$(8.9) \quad \| e^{\Phi_d(x)/h} v_0 \|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C(\varepsilon, d) e^{\varepsilon/h}$$

$$(8.10) \quad \| e^{\Phi_d(x)/h} (p^d - \mu) u_0 \|_{L^2([y_0 + di, \pi + \varepsilon_0 + di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h}$$

$$(8.11) \quad \|e^{\Phi_d(x)/h} u_0\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(\varepsilon, d) e^{\varepsilon/h}$$

$$(8.12) \quad \|e^{\Phi_d(x)/h} (u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h}.$$

Comme $|\xi(x) - \text{Im} \xi_+(x)| \leq C\delta$, $|\Phi_d(x) - \text{Im} \Psi(x)| \leq C\delta$ sur $[y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di]$ et on a :

$$(8.8)' \quad \|e^{\Psi(x)/h} (p^d - \mu) v_0\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h} e^{C\delta/h}$$

$$(8.9)' \quad \|e^{\Psi(x)/h} v_0\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(\varepsilon, d) e^{\varepsilon/h} e^{C\delta/h}$$

$$(8.10)' \quad \|e^{\Psi(x)/h} (p^d - \mu) u_0\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h} e^{C\delta/h}$$

$$(8.11)' \quad \|e^{\Psi(x)/h} u_0\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(\varepsilon, d) e^{\varepsilon/h} e^{C\delta/h}$$

$$(8.12)' \quad \|e^{\Psi(x)/h} (u_0 - v_0)\|_{L^2([y_0+di, \pi+\varepsilon_0+di])} \leq C(d) e^{-\varepsilon_0(d)/h} e^{C\delta/h}.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} w_{(0,1),0} &= \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \overline{(p - \mu) u_{(0,1)}(x)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}+di} u_0(z) \overline{(p^{-d} - \mu) u_{(0,1)}(\bar{z})} dz \text{ avec } \tau_0(\delta) < d \leq d_0, \end{aligned}$$

et on remplace la fonction troncature par $K = \int_{\mathbb{R}+di} \chi(s) \pi_s ds$, où χ est définie sur $\mathbb{R}+di$ par $\chi = 1_{\{z; \text{Re} z \leq \pi\}}$ et π_s est l'opérateur de multiplication par $C_1 h^{-\frac{1}{2}} e^{i\varphi_s(x)/h}$, $\varphi_s(x) = iC_0(x-s)^2$, C_0 est réelle positive choisie assez grande, et C_1 est choisie pour que $\int_{\mathbb{R}+di} \pi_s(x) dx = 1$.

On a alors :

$$\begin{aligned} w_{(0,1),0} &= \int_{\mathbb{R}+di} [p^d, K] u_0(z) \bar{u}_{(0,1)}(\bar{z}) dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}+di} (K(p^d - \mu) u_0(z)) \bar{u}_{(0,1)}(\bar{z}) dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}+di} u_0(z) ((1-K) \overline{(p^{-d} - \mu) u_{(0,1)}(\bar{z})}) dz \end{aligned}$$

et compte tenu des majorations (8.8)' - (8.12)' et du Lemme 8.2, les deux derniers termes sont majorés par $e^{-(S+\varepsilon_0(d)-C\delta)/h}$. On fixe d et pour δ assez petit, ces termes sont majorés par $e^{-(S+\varepsilon_0)/h}$. Le premier terme se traite exactement comme dans le travail de Helffer et Sjöstrand [He, Sj]₄ et on obtient :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que :

$$(8.13) \quad 1/C_\varepsilon e^{-(S+\varepsilon)/h} \leq |w_{(1,0),0}| \leq C_\varepsilon e^{-(S-\varepsilon)/h}.$$

On a donc montré qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que :

$$(8.3) \quad |w_{\alpha,\beta}| \leq e^{-\varepsilon_0 \delta(\alpha,\beta)/h}$$

$$(8.4)' \quad |w_{\alpha,\beta}| \leq e^{-(S+\varepsilon_0)/h} \text{ pour } \delta(\alpha,\beta) \geq 2$$

$$(8.13) \quad 1/C_\varepsilon e^{-(S+\varepsilon)/h} \leq |w_{\alpha,\beta}| \leq C_\varepsilon e^{-(S-\varepsilon)/h} \text{ pour } \delta(\alpha,\beta) = 1.$$

On peut alors étendre le Théorème 7.7 à l'opérateur perturbé :

Théorème 8.4 :

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe un réel δ_0 avec $0 < \delta_0 < \varepsilon_0/2$ tel que, si $r^0(x,\xi)$ est une fonction réelle, 2π -périodique en x et ξ , invariante par la rotation $\rho(x,\xi) = (x-\xi, \xi)$, et se prolongeant en une fonction holomorphe sur le domaine complexe $|\operatorname{Im}(x,\xi)| \leq 1/\delta_0$, avec $\sum_{|\alpha| \leq 2} |\partial^\alpha r_0| \leq \delta_0$ sur ce domaine, alors :

La fonction $p^0 = q^0 + r^0$ admet trois valeurs critiques M_\pm, c avec

$$|M_+ - 3| \leq \delta_0, \quad |M_- + 3/2| \leq \delta_0, \quad |c+1| \leq \delta_0.$$

Le Théorème 7.7 est vrai pour p^0 , en remplaçant le maximum 3 et le minimum $-3/2$ de q^0 par M_+ et M_- .

Remarque : cas où $h < 0$:

Après le changement de variables qui conduit à p , on note que $op_h^W p(x,\xi) = op_h^W p(x,-\xi)$ et le symbole $\tilde{p}(x,\xi) = p(x,-\xi)$ a les invariances dont nous avons besoin et est proche de q . Le Théorème 8.4 est donc valable pour $h < 0$.

9. Etude des systèmes.

Il ne nous reste plus qu'à adapter les sections 5 à 8 aux opérateurs matriciels qui se sont introduits lors de l'étude des problèmes à symétrie hexagonale, qui sont les quantifiés de Weyl de symboles de la forme:

$$P^0 = Q^0 + R^0, \text{ avec } Q^0(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{i\xi} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-i\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

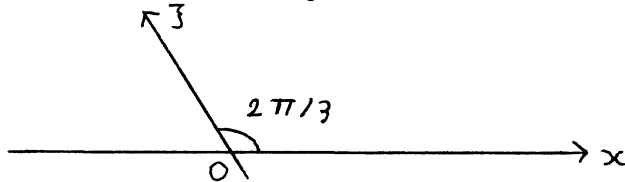
où R^0 est un symbole analytique classique (il s'agit de fonctions holomorphes en (x, ξ, h)), 2π -périodique en x et ξ , hermitien, s'étend en une application holomorphe de $\{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2 / |\operatorname{Im}(x, \xi)| \leq 1/\delta\}$ dans $M_2(\mathbb{C})$ avec $\|R^0\|_{C^2} \leq \delta$, δ étant un réel strictement positif suffisamment petit.

De plus, R^0 vérifie les conditions d'invariance par rotation:

$$(3.14) \quad R^0(-x, -\xi, h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R^0(x, \xi, h) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(3.14)' \quad R^0[\rho^2(x, \xi), h] = \begin{pmatrix} R^0_{(1,1)}(x-h/2, \xi, h) e^{-i\xi} R^0_{(1,2)}(x, \xi, h) \\ e^{i\xi} R^0_{(2,1)}(x, \xi, h) R^0_{(2,2)}(x+h/2, \xi, h) \end{pmatrix}$$

où ρ est la rotation d'angle $\pi/3$ dans le repère:



On a vu au paragraphe 4.B que ces relations sur les symboles se traduisent sur les opérateurs par:

$$\begin{aligned} [R^0, V^0] &= 0 \\ [R^0, T_h^0] &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } V^0 = e^{-i\pi/12} e^{ix^2/2h} \mathfrak{F}_h \begin{pmatrix} 0 & \tau - h/2 \\ \tau h/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(V^0)^6 = \text{Id}$$

$$\begin{aligned} \text{et } T^0_1 &= \tau_{2\pi} [= u \mapsto u(\cdot - 2\pi)] \\ T^0_n &= (V^0)^{-n+1} T^0_1 (V^0)^{n-1} \end{aligned}$$

a. Etude des surfaces d'énergie réelles.

On étudie les lieux $\Sigma^0(E) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 / \det(P_0^0(x, \xi) - E) = 0\}$, où P_0^0 est le symbole principal de P^0 .

Remarquons que pour $P^0 = Q^0$, on a:
 $\det(Q^0 - E) = E^2 - (3 + 2q_0(x, \xi))$ où $q^0(x, \xi) = \cos x + \cos \xi + \cos(x - \xi)$ est l'opérateur scalaire qu'on a étudié dans les sections précédentes. On connaît donc les courbes $\Sigma^0(E)$ dans ce cas:

Pour $E \in]-3, -1[\cup]1, 3[$, $\Sigma^0(E)$ est une réunion de cercles déformés entourant les points de $(2\pi\mathbb{Z})^2$,

pour $E \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $\Sigma^0(E)$ est une réunion de cercles déformés entourant les points de $(2\pi/3, 4\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2 \cup (4\pi/3, 2\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2$

$\Sigma^0(-3) = \Sigma^0(3) = (2\pi\mathbb{Z})^2$ et une seule valeur propre de $Q^0 \pm 3$ s'annule en ces points,

$\Sigma^0(0) = (2\pi/3, 4\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2 \cup (4\pi/3, 2\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2$ et le symbole Q^0 s'annule en ces points; pour (x, ξ) proche de $(x_0, \xi_0) \in \Sigma^0(0)$, les deux valeurs propres de Q^0 sont $\pm(f(x, \xi))^{1/2}$, avec

$$f(x, \xi) = (x - x_0)^2 + (\xi - \xi_0)^2 - (x - x_0)(\xi - \xi_0) + \mathcal{O}(|x - x_0|^3 + |\xi - \xi_0|^3)$$

pour $E \notin [-3, 3]$, $\Sigma^0(E) = \emptyset$

$\Sigma^0(-1)$ et $\Sigma^0(+1)$ sont des réunions de droites.

On peut étudier les courbes d'énergie de P_0^0 comme une perturbation du cas Q^0 .

Les relations (3.14) et (3.14)' montrent:

d'une part, que la fonction de (x, ξ) : $\det(P_0^0(x, \xi) - E)$ est invariante par la rotation ρ ,

d'autre part, qu'au voisinage d'un point $(x_0, \xi_0) \in (2\pi/3, 4\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2 \cup (4\pi/3, 2\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2$, P_0^0 s'écrit

$$P_0^0(x, \xi) = \begin{pmatrix} P_{01}^0 & P_{02}^0 \\ P_{02}^0 & P_{02}^0 \end{pmatrix}$$

avec $P_{01}^0(x_0, \xi_0) = P_{02}^0(x_0, \xi_0) = 0$,

$$|P_{jj}^0(x, \xi) - P_{jj}^0(x_0, \xi_0)| \leq C \delta (|x - x_0| + |\xi - \xi_0|)$$

$$|P_{jj}^0(x_0, \xi_0)| \leq \delta, \quad j=1, 2.$$

On en déduit qu'il existe 6 réels $M_- < c_- < m_- \leq m_+ < c_+ < M_+$ tels que:

$$|M_{\pm} - (\pm 3)| \leq \delta, \quad |c_{\pm} - (\pm 1)| \leq \delta, \quad |m_{\pm}| \leq \delta,$$

Pour $E \in]m_-, c_-[\cup]c_+, m_+[$, $\Sigma^0(E)$ est une réunion de cercles déformés entourant les points de $(2\pi\mathbb{Z})^2$,

pour $E \in]c_-, m_-[\cup]m_+, c_+[$, $\Sigma^0(E)$ est une réunion de cercles déformés entourant les points de $(2\pi/3, 4\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2 \cup (4\pi/3, 2\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2$

$\Sigma^0(m_-) = \Sigma^0(m_+) = (2\pi\mathbb{Z})^2$ et une seule valeur propre de $P_0^0 - M_\pm$ s'annule en ces points,

$\Sigma^0(m_-) = \Sigma^0(m_+) = (2\pi/3, 4\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2 \cup (4\pi/3, 2\pi/3) + (2\pi\mathbb{Z})^2$, la valeur propre est simple si $m_- < m_+$, double si $m_- = m_+$; pour (x, ξ)

proche de $(x_0, \xi_0) \in \Sigma^0(m_\pm)$, les deux valeurs propres de $P_0^0(x, \xi)$ sont $\lambda_1(x, \xi) = f_1(x, \xi) - (f_2(x, \xi))^{\frac{1}{2}}$ et $\lambda_2(x, \xi) = f_1(x, \xi) + (f_2(x, \xi))^{\frac{1}{2}}$ avec

$$\begin{aligned} f_1(x, \xi) &= \frac{1}{2}(m_+ + m_-) + \mathcal{O}(\delta[(x-x_0)^2 + (\xi-\xi_0)^2]) \quad \text{et} \\ f_2(x, \xi) &= \frac{1}{4}(m_+ - m_-)^2 + (x-x_0)^2 + (\xi-\xi_0)^2 - (x-x_0)(\xi-\xi_0) \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta(x-x_0)^2 + \delta(\xi-\xi_0)^2 + |x-x_0|^3 + |\xi-\xi_0|^3) \end{aligned}$$

en particulier, $\lambda_1(x, \xi) \leq m_- \leq m_+ \leq \lambda_2(x, \xi)$

si $m_- < m_+$, alors pour $E \in]m_-, m_+[$, $\Sigma^0(E) = \emptyset$

pour $E \notin [M_+, M_-]$, $\Sigma^0(E) = \emptyset$

$\Sigma^0(c_-)$ et $\Sigma^0(c_+)$ sont des réunions de droites déformées.

b. Définition des opérateurs de référence et étude de leur spectre.

Comme on l'avait fait pour les opérateurs scalaires, on fait maintenant le changement de variable symplectique $(x, \xi) \mapsto (x, \xi + x/2)$ et on travaille avec les opérateurs:

$$\begin{aligned} P &= e^{-ix^2/4h} P_0 e^{ix^2/4h} \\ P &= Q + R, \quad R = e^{-ix^2/4h} R_0 e^{ix^2/4h} \end{aligned}$$

Q est l'opérateur de symbole $\begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{i(\xi + x/2)} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-i(\xi + x/2)} & 0 \end{pmatrix}$

Ces opérateurs commutent avec $V = e^{-ix^2/4h} V_0 e^{ix^2/4h}$ et $T_h = e^{-ix^2/4h} T_h^0 e^{ix^2/4h}$.

Nous allons utiliser les notations et les résultats de [He-Sj]₅.

On note $\lambda_1(x, \xi)$ et $\lambda_2(x, \xi)$ les valeurs propres de $P_0(x, \xi)$, symbole principal de P, avec $M_- \leq \lambda_1(x, \xi) \leq m_- \leq m_+ \leq \lambda_2(x, \xi) \leq M_+$.

Si E est un réel, on note $\Sigma(E) = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2; \det(P_0(x, \xi) - E) = 0\}$, et si I est un intervalle, $\Sigma(I) = \bigcup_{E \in I} \Sigma(E)$.

On étudie le spectre de P en laissant de côté les intervalles $[c_- - \varepsilon_0, c_- + \varepsilon_0]$ et $[c_+ - \varepsilon_0, c_+ + \varepsilon_0]$ où $\varepsilon_0 > 0$ est donné. Comme à la section 8, on choisit δ assez petit en fonction de ε_0 pour que les projections de deux puits (composantes connexes de $\Sigma(E)$) soient toujours disjointes ou confondues pour E hors des deux intervalles exclus.

α . Cas des valeurs supérieures à c_+ .

Pour $E \in]c_+, M_+]$, $\Sigma(E) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} \Sigma_\alpha(E)$, où $\Sigma_\alpha(E)$ est la composante connexe de $\Sigma(E)$ contenant le point $\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2$, avec $\nu_1 = (2\pi, -\pi)$ et $\nu_2 = (2\pi, \pi)$.

Il est montré dans [He-Sj]₅ qu'il existe une fonction $U \in C^\infty$ de $\Sigma_0([c_+ + \varepsilon_0/3, M_+])$ dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que $U(x, \xi)$ est unitaire et

$$U^{-1}(x, \xi) P_0(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, \xi) \end{pmatrix}$$

Soit χ un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans $\Sigma_0([c_+ + \varepsilon_0/3, M_+])$ vérifiant $|\partial_x^j \partial_\xi^k \chi| \leq C_{jk}$ et dont la restriction à $\Sigma_0([c_+ + 2\varepsilon_0/3, M_+])$ est l'identité.

On définit l'opérateur de référence associé à Σ_0 :

$$P^{(0)}(x, \xi, h) = P(\chi(x, \xi), h).$$

C'est un symbole C^∞ , classique, et en posant $U^{(0)}(x, \xi) = U \circ \chi(x, \xi)$, le symbole principal $P_0^{(0)}$ est diagonalisée par la famille unitaire $U^{(0)}$:

$$U^{(0)}(x, \xi)^{-1} P_0^{(0)}(x, \xi) U^{(0)}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0)}(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(0)}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1^{(0)}(x, \xi) \leq c_- \text{ pour tout } (x, \xi),$$

$$\lambda_2^{(0)} = \lambda_2 \text{ dans } \Sigma_0([c_+ + 2\varepsilon_0/3, M_+]),$$

$$(\lambda_2^{(0)})^{-1}([c_+ + 2\varepsilon_0/3]) = \Sigma_0([c_+ + 2\varepsilon_0/3]),$$

$$d(\lambda_2^{(0)}(x, \xi), [c_+ + 2\varepsilon_0/3, M_+]) \geq 1/C \text{ pour } |x| + |\xi| \geq C.$$

Les valeurs propres de $P^{(0)}$ dans $[c_+ + 2\varepsilon_0/3, +\infty[$ sont de la forme: $\mu_1(h) > \mu_2(h) > \dots > \mu_n(h)$ avec $\mu_i(h) - \mu_{i+1}(h) \approx h$ et $|\mu_1(h) - M_+| \leq Ch$ pour un $C > 0$.

On pose alors $P(\alpha) = T^\alpha P^{(0)} T^{-\alpha}$, ce qui assure l'isospectralité des $P(\alpha)$.

Soit φ_0 un vecteur propre normalisé de $P^{(0)}$ associé à une valeur propre $\mu_i(h)$, $\varphi_\alpha = T^\alpha \varphi_0$ est vecteur propre de $P(\alpha)$.

Comme à la section 5, si F est l'espace spectral de P associé à l'intervalle $[\mu_i(h) - ch, \mu_i(h) + ch]$, avec $c > 0$ assez petit, la famille $\{\Pi_F \varphi_\alpha\}$ est une base hilbertienne de F proche de $\{\varphi_\alpha\}$.

β . Cas des valeurs comprises entre $m_+ + \varepsilon_1$ et c_+ .

On se donne $\varepsilon_1 > 0$ et on étudie à présent la région $[m_+ + \varepsilon_1, c_+ - \varepsilon_0]$, c'est-à-dire qu'on évite la zone où les deux valeurs propres sont proches.

On numérote les puits comme à la section 3:

$$M_0 = (4\pi/3, 0), M_3 = -M_0 = (-4\pi/3, 0)$$

$$M_\alpha = M_{\alpha_0} + \alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 \text{ pour } \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Pour $E \in [m_+, c_+]$ on appelle $\Sigma_\alpha(E)$ la composante connexe de $\Sigma(E)$ contenant le point M_α .

Il est montré dans [He-Sj]₅ qu'il existe une fonction $C^\infty U(x, \xi)$ de $\Sigma([m_+ + \varepsilon_1/3, c_+ - \varepsilon_0/3])$ dans $M_2(\mathbb{C}^2)$ telle que U est unitaire et:

$$U^{-1}(x, \xi) P_0(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} c(x, \xi) & b(x, \xi) \\ b(x, \xi) & c(x, \xi) \end{pmatrix}$$

On considère alors une fonction χ positive définie dans un petit voisinage de M_0 et on perturbe P_0 dans $\Sigma(0, 0, 0)(I_\varepsilon)$ en le remplaçant par:

$$U(x, \xi) \begin{pmatrix} c(x, \xi) + \chi(x, \xi) & b(x, \xi) \\ b(x, \xi) & c(x, \xi) - \chi(x, \xi) \end{pmatrix} U^{-1}(x, \xi)$$

ce qui nous ramène à un opérateur à valeurs propres simples. On procède alors comme précédemment et on obtient un symbole C^∞ classique $P^{(0)}$ et une application $C^\infty U^{(0)}$ de \mathbb{R}^2 dans $M_2(\mathbb{C})$ telle que $U^{(0)}$ est unitaire et

$$U^{(0)}(x, \xi) - 1 P^{(0)}(x, \xi) U^{(0)}(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(0)}(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(0)}(x, \xi) \end{pmatrix}$$

$\lambda_1^{(0)}(x, \xi) \leq m_-$ pour tout (x, ξ) ,

$\lambda_2^{(0)} = \lambda_2$ dans $\Sigma_0([m_+ + 2\varepsilon_1/3, c_+ - 2\varepsilon_0/3])$,

$(\lambda_2^{(0)})^{-1}([m_+ + 2\varepsilon_1/3, c_+ - 2\varepsilon_0/3]) = \Sigma_0([m_+ + 2\varepsilon_1/3, c_+ - 2\varepsilon_0/3])$,

$d(\lambda_2^{(0)}(x, \xi), [m_+ + 2\varepsilon_1/3, c_+ - 2\varepsilon_0/3]) \geq 1/C$ pour $|x| + |\xi| \geq C$.

Les valeurs propres de $P^{(0)}$ dans $[m_+ + 2\varepsilon_1/3, c_+ - 2\varepsilon_0/3]$ sont de la forme:

$$\mu_1(h) > \mu_2(h) > \dots > \mu_n(h)(h) \text{ avec } \mu_i(h) - \mu_{i+1}(h) \approx h.$$

On définit alors l'opérateur $P^{(3)} = V^3 P^{(0)} V^3$ attaché au point M_3 , puis $P^{(\alpha)} = T(\alpha_1, \alpha_2) P^{(\alpha_0)} T^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ attaché à M_α pour $\alpha \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Soit φ_0 un vecteur propre normalisé de $P^{(0)}$ associé à une valeur propre $\mu_i(h)$. On pose $\varphi_3 = V^3 \varphi_0$ puis $\varphi_\alpha = T(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_{\alpha_0}$. φ_α est vecteur propre normalisé de $P^{(\alpha)}$.

Comme à la section 5, si F est l'espace spectral de P associé à l'intervalle $[\mu_i(h) - ch, \mu_i(h) + ch]$, avec $c > 0$ assez petit, la famille $\{\Pi_F \varphi_\alpha\}$ est une base hilbertienne de F proche de $\{\varphi_\alpha\}$.

8. Cas des valeurs comprises entre $m_- - \varepsilon_1$ et $m_+ + \varepsilon_1$.

On prend un difféomorphisme χ de \mathbb{R}^2 sur $\Sigma(0, 0, 0)([m_- - \frac{1}{2}, m_+ + \frac{1}{2}])$ tel que $|\partial_x^j \partial_\xi^k \chi| \leq C_{j,k}$ et la restriction de χ à $\Sigma(0, 0, 0)([m_- - \frac{1}{4}, m_+ + \frac{1}{4}])$ est l'identité. On définit $P^{(0)}$ par $P^{(0)}(x, \xi, h) = P(\chi(x, \xi), h)$. Ainsi, si $\lambda_1^{(0)}(x, \xi)$ et $\lambda_2^{(0)}(x, \xi)$ sont les deux valeurs propres de $P^{(0)}$, avec $\lambda_1^{(0)} \leq \lambda_2^{(0)}$, on a:

$$\lambda_1^{(0)} \leq m_-, \quad (\lambda_1^{(0)})^{-1}([m_- - \frac{1}{4}, m_-]) = \Sigma(0, 0, 0)([m_- - \frac{1}{4}, m_-])$$

$$\lambda_2^{(0)} \geq m_+, \quad (\lambda_2^{(0)})^{-1}([m_+, m_+ + \frac{1}{4}]) = \Sigma(0, 0, 0)([m_+, m_+ + \frac{1}{4}])$$

$$d(\lambda_j(x, \xi), [m_- - \frac{1}{4}, m_+ + \frac{1}{4}]) \geq 1/C \text{ pour } |x| + |\xi| \geq C.$$

Il faut maintenant étudier le spectre de l'opérateur à un puits $P^{(0)}$ dans un voisinage de 0. On prend ε_1 petit, $\delta \ll \varepsilon_1$, E réel tel que $|E| \leq \varepsilon_1$, et on cherche si $P^{(0)} - E$ est inversible.

$p^{(0)} - E$ a pour symbole principal, au voisinage de $(4\pi/3, 0) = M_0$:

$$\begin{pmatrix} p_{11} - E & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} - E \end{pmatrix} \quad \text{avec } p_{21} = \bar{p}_{12} \\ |p_{jj}(M_0)| \leq \delta, \quad j=1,2.$$

De plus, $|p_{jj}(x, \xi) - p_{jj}(M_0)| \leq C \delta |(x, \xi) - M_0|^2, \quad j=1,2$

$$\begin{aligned} p_{12}(M_0) &= 0 \\ |dp_{12}(M_0) - dq_{12}(M_0)| &\leq \delta \\ \text{et } dq_{12}(M_0) &= \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} + \frac{1}{2}e^{-i\pi/3} \\ e^{-i\pi/3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est montré dans l'appendice c de [He-Sj]₆ qu'on peut trouver un opérateur \tilde{A}_E proche de l'identité tel que l'opérateur auto-adjoint $\tilde{A}_E^*(P-E)\tilde{A}_E$ ait comme symbole, au voisinage de M_0 :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_{11} - E + hF_1(E, h) & P_{12}^E(x, \xi, h) \\ P_{21}^E(x, \xi, h) & \tilde{p}_{22} - E + hF_2(E, h) \end{pmatrix}$$

Ici \tilde{p}_{jj} est constant, F_j est un symbole analytique d'ordre 0, avec $|F_j| + |\partial_E F_j| \leq C \delta$ $P_{21}^E(x, \xi, h) = \bar{P}_{12}^E(x, \xi, h)$,

$$\begin{aligned} p_{12}^E(M_0) &= 0, \text{ où } p_{12}^E \text{ est le symbole principal de } P_{12}^E \\ |p_{12}^E(x, \xi) - P_{12}^E(x, \xi)| &\leq C \delta |(x, \xi) - M_0|, \\ |\partial_E P_{12}^E(x, \xi, h)| &\leq C \delta. \end{aligned}$$

Comme le symbole principal de \tilde{A}_E est de la forme:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}(x, \xi) \\ a_{21}(x, \xi) & 1 \end{pmatrix}$$

on a: $\tilde{p}_{jj} = p_{jj}(M_0)$.

On veut travailler avec des symboles définis sur tout \mathbb{R}^2 et on pose donc $A_E = \tilde{A}_E \circ \Psi$ où Ψ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans un voisinage de M_0 , dont la restriction à un voisinage de M_0 est l'identité, et tel que: $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Psi| \leq C_{\alpha, \beta}$ pour tous α, β . De même on pose: $\Lambda_E = (\tilde{A}_E^*(P-E)\tilde{A}_E) \circ \Psi$. Ainsi A_E est proche de l'identité, les éléments diagonaux de Λ_E sont constants et $\Lambda_E = A_E^*(P-E)A_E$ au voisinage de M_0 .

Posons $\Lambda_E = \begin{pmatrix} a_1 & B \\ B^* & a_2 \end{pmatrix}$

avec $a_j = p_{jj}(M_0) - E + hF_j(E, h)$, $B = P_{12}^E$ au voisinage de M_0 .

Comme première approximation du spectre de $P^{(0)}$ au voisinage de 0, on s'intéresse à $\tilde{\sigma} = \{E \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]; 0 \in \text{Sp}(\Lambda_E)\}$.

Proposition 9.1 :

$\tilde{\sigma}$ est un ensemble fini dont deux éléments disjoints sont toujours distants d'au moins ch pour un certain $c > 0$. De plus, si $0 \in \tilde{\sigma}$, 0 est valeur propre simple de Λ_E .

Démonstration :

Commençons par remarquer qu'on connaît les spectres de BB^* et de B^*B dans l'intervalle $[0, 2\varepsilon_1^2]$:

$$\text{Sp } BB^* \cap [0, 2\varepsilon_1^2] = \{\alpha_0(E, h), \alpha_1(E, h), \dots, \alpha_{n(h)}(E, h)\}$$

$$\text{Sp } B^*B \cap [0, 2\varepsilon_1^2] = \{\alpha_1(E, h), \dots, \alpha_{n(h)}(E, h)\}$$

avec $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{j+1} - \alpha_j \approx h$. Ce sont des valeurs propres simples.

De plus, nous savons que B est injectif, mais non surjectif, et que B^* est surjectif mais non injectif.

1er cas : $a_1 a_2 \neq 0$.

Soient $u = (u_1, u_2)$ et $v = (v_1, v_2) = \Lambda u$. Alors on a :

$$(1) \quad a_1 u_1 + B u_2 = v_1$$

$$(2) \quad B^* u_1 + a_2 u_2 = v_2$$

d'où :

$$(3) \quad (a_1 a_2 - B B^*) u_1 = a_2 v_1 - B v_2$$

$$(4) \quad (a_1 a_2 - B^* B) u_2 = a_1 v_2 - B^* v_1.$$

Si Λ_E est inversible, $a_1 v_2 - B^* v_1$ peut prendre n'importe quelle valeur, donc $(a_1 a_2 - B^* B)$ est surjectif, donc inversible.

Réciproquement, si $(a_1 a_2 - B^* B)$ est inversible, alors $a_1 a_2 - B B^*$ l'est

aussi et (3) et (4) donnent:

$\|u\| \leq C_1(\|a_2 v_1 - B v_2\| + \|a_1 v_2 - B^* v_1\|) \leq C_2 \|v\| = C_2 \|\Lambda_E u\|$
 donc Λ_E est inversible.

Dans le cas où Λ_E n'est pas inversible, $\Lambda_E u = 0$ équivaut à

$$\begin{cases} (a_1 a_2 - B^* B) u_2 = 0 \\ u_1 = -a_1^{-1} B u_2 \end{cases}$$

0 est donc une valeur propre simple.

2ème cas : $a_1 = 0$.

On a alors:

$$(1)' \quad B u_2 = v_1$$

$$(2) \quad B^* u_1 + a_2 u_2 = v_2$$

et comme B n'est pas surjectif, Λ_E n'est pas inversible.

De plus, $\Lambda_E u = 0$ équivaut à $\begin{cases} u_2 = 0 \\ B^* u_1 = 0 \end{cases}$

et comme le noyau de B^* est de dimension 1, 0 est une valeur propre simple de Λ .

3ème cas : $a_2 = 0, a_1 = 0$.

Le système:

$$(1)' \quad a_1 u_1 + B u_2 = v_1$$

$$(2) \quad B^* u_1 = v_2$$

donne $B^* B u_2 = B^* v_1 - a_1 v_2$, et comme $B^* B$ est inversible, $\|u_2\| \leq C_1 \|v\|$.

Grâce à (1)', on a alors $\|u\| \leq C_2 \|v\|$ et Λ_E est inversible.

Finalement:

$$\text{Si } a_1 a_2 = 0, 0 \in \text{Sp } \Lambda_E \Leftrightarrow a_1 a_2 \in \text{Sp } B^* B$$

$$\text{Si } a_1 a_2 = 0, 0 \in \text{Sp } \Lambda_E \Leftrightarrow a_1 = 0$$

Lorsque $0 \in \text{Sp } \Lambda_E$, 0 est une valeur propre simple.

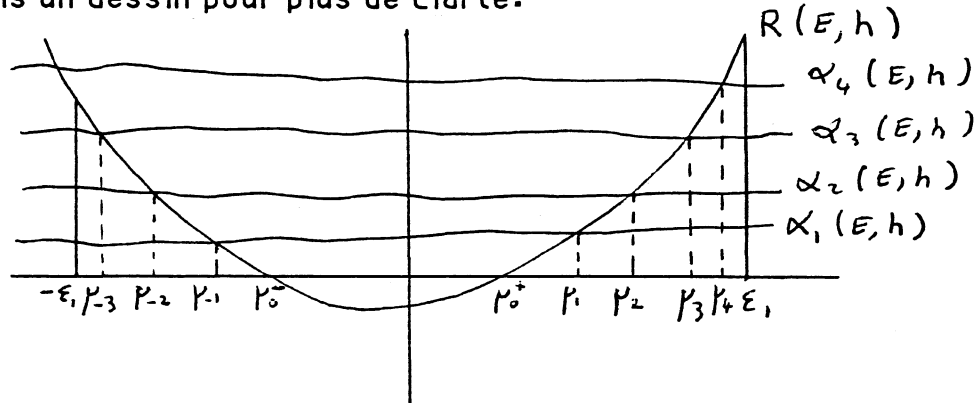
On a donc montré que $\tilde{\sigma}$ est fait de valeurs propres simples et est:

$$\tilde{\sigma} = \{\mu \in [-\varepsilon_1, \varepsilon_1]; \exists k \in \mathbb{N}^*, R(\mu, h) = \alpha_k(\mu, h)\} \cup \{\mu_0\}$$

$$\text{où } R(E, h) = [p_{11}(M_0) - E + hF_1(E, h)][p_{22}(M_0) - E + hF_2(E, h)]$$

$$\text{et } \mu_0 = p_{11}(M_0) + \mathcal{O}(\delta h) \text{ vérifie } p_{11}(M_0) - \mu_0 + hF_1(\mu_0, h) = 0.$$

Faisons un dessin pour plus de clarté:



$\tilde{\sigma}$ est formé des μ_k et μ_{-k} pour $k > 0$ auxquels on ajoute celle des deux valeurs μ_0^+ et μ_0^- qui vaut μ_0 .

Pour que cette affirmation soit rigoureuse, il faut montrer le:

Lemme 9.2 :

A droite de μ_0^+ [Resp. à gauche de μ_0^-] les courbes $\alpha_k(E, h)$ coupent $R(E, h)$ en au plus un point.

Démonstration :

On commence par majorer la dérivée logarithmique de $\alpha_k(E, h)$ pour $|E| \leq \varepsilon_1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

$\alpha_k(E, h)$ est solution de:

$$(9.1) \quad \alpha_k V(E, \alpha_k, h) = kh$$

V est un symbole dont le symbole principal V_0 vérifie:

$$(9.2) \quad \alpha V_0(E, \alpha) = (2\pi)^{-1} \text{vol}\{(x, \xi); |p_{12}^E(x, \xi)|^2 \leq \alpha\}$$

Ainsi $|\partial_E V_0(E, \alpha)| \leq C\delta$ et $|V_0(E, \alpha)| \geq 1/C$.

Dérivant (9.2) par rapport à E , on obtient:

$$(\partial_E \alpha_k)[V(E, \alpha_k, h) + \alpha_k \partial_\alpha V(E, \alpha_k, h)] + \alpha_k \partial_E V(E, \alpha_k, h) = 0$$

et comme $|\partial_E V| \leq |\partial_E V_0| + Ch \leq C(\delta + h)$, on a :

$$(9.3) \quad |\alpha_k(E, h)^{-1} \partial_E \alpha_k(E, h)| \leq C(\delta + h).$$

Minorons la dérivée logarithmique de R dans la région où $R > 0$:

$$R(E, h)^{-1} \partial_E R(E, h) = \frac{[-1 + h \partial_E F_1(E, h)]}{[p_{11}(M_0) - E + h F_1(E, h)]} + \frac{[-1 + h \partial_E F_2(E, h)]}{[p_{22}(M_0) - E + h F_2(E, h)]}$$

donc

$$|R(E, h)^{-1} \partial_E R(E, h)| = \left| \frac{[-1 + h \partial_E F_1(E, h)]}{[p_{11}(M_0) - E + h F_1(E, h)]} \right| + \left| \frac{[-1 + h \partial_E F_2(E, h)]}{[p_{22}(M_0) - E + h F_2(E, h)]} \right| \geq \varepsilon_1^{-1}.$$

Ainsi $|\alpha_k^{-1} \partial_E \alpha_k| < |R^{-1} \partial_E R|$ ce qui montre le Lemme 9.2. \square

Il reste à montrer qu'il existe $c > 0$ tel que les éléments de $\tilde{\sigma}$ sont espacés d'au moins ch .

Définissons e_k par :

$$e_k = \mu_k \text{ pour } k > 0 \text{ assez petit pour que } \mu_k \text{ existe,}$$

$$e_0 = \mu_0^+.$$

Il faut montrer qu'il existe $c > 0$ indépendant de k et h tel que $e_{k+1} - e_k \geq ch$ pour $k \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} e_{k+1} - e_k &\geq (R(e_{k+1}, h) - R(e_k, h)) / \sup_{[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]} |\partial_E R| \\ &\geq (R(e_{k+1}, h) - R(e_k, h)) / 4\varepsilon_1 \\ &= (\alpha_{k+1}(e_{k+1}, h) - \alpha_k(e_k, h)) / 4\varepsilon_1 \\ &\geq (\alpha_{k+1}(e_{k+1}, h) - \alpha_k(e_{k+1}, h)) / 4\varepsilon_1 - |\alpha_k(e_{k+1}, h) - \alpha_k(e_k, h)| / 4\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Or $\alpha_{k+1}(e_{k+1}, h) - \alpha_k(e_{k+1}, h) \geq Ch$ pour un certain C et d'après la démonstration du Lemme 9.2 :

$$|\alpha_k(e_{k+1}, h) - \alpha_k(e_k, h)| \leq C(\delta + h)\varepsilon_1 |e_{k+1} - e_k|.$$

On a donc :

$$(9.4) \quad e_{k+1} - e_k \geq ch / \varepsilon_1.$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition. \square

On peut maintenant montrer:

Proposition 9.3 :

Le spectre de $P^{(0)}$ dans $[-\varepsilon_1/2, \varepsilon_1/2]$ est formé de valeurs propres simples espacées d'au moins ch .

Démonstration :

On va montrer que le spectre de $P^{(0)}$ dans $[-\varepsilon_1/2, \varepsilon_1/2]$ est fait de valeurs propres simples situées chacune à une distance $\mathcal{O}(h^\infty)$ d'un élément de $\tilde{\sigma}$. L'argument qui suit est très inspiré de [He-Sj]₄.

Soit donc $E \in \tilde{\sigma}$ et posons $\Omega_h = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq h^N\}$, avec $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. On commence par construire un inverse approché de $\Lambda_E^*(P^{(0)} - z)A_E$ pour $z \in \partial\Omega_h$.

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, valant 1 au voisinage de M_0 , et à support assez proche de M_0 pour que $\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E = \Lambda_E$ micro-localement près de $\text{supp } \chi$.

Soit $Q_z(x, \xi)$ un symbole dépendant holomorphiquement de z pour z dans un voisinage de Ω_h et tel que:

$$(\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)Q_z = I - \chi + \mathcal{O}(h^\infty).$$

On pose:

$$R_z = Q_z + (\Lambda_E - z)^{-1}\chi$$

et on a:

$$(\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)R_z = I + (\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - \Lambda_E)(\Lambda_E - z)^{-1}\chi + \mathcal{O}(h^\infty),$$

et comme le support de $(\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - \Lambda_E)$ est disjoint de celui de χ et de $\{(x, \xi); \det(p^{(0)} - E) = 0\}$ ($p^{(0)}$ est le symbole principal de $P^{(0)}$), on a, d'après le théorème 5.1:

$$\|(\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - \Lambda_E)(\Lambda_E - z)^{-1}\chi\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^\infty).$$

Finalement $(\Lambda_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)R_z = I + K_z$ avec $K_z \in S^{-\infty}$. $R_z(I + K_z)^{-1}$ est un

inverse à droite de $(A_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)$ de norme $\mathcal{O}(h^{-N})$ et comme on pourrait construire de la même façon un inverse à gauche, c'est un inverse.

Ceci montre que $\text{Sp}(A_E^*(P^{(0)} - E)A_E) \cap [-h^2, h^2] \subset [-\mathcal{O}(h^\infty), \mathcal{O}(h^\infty)]$.
 Pour plus d'information, nous allons majorer la différence des projecteurs spectraux π et π' associés aux opérateurs $A_E^*(P^{(0)} - E)A_E$ et Λ_E et à l'intervalle $[-h^2, h^2]$.

Soit \tilde{Q}_z tel que $(\Lambda_E - z)\tilde{Q}_z = I - \chi + \mathcal{O}(h^\infty)$. Pour $z \in \partial\Omega_h$, on pose $\tilde{R}_z = \tilde{Q}_z + (\Lambda_E - z)^{-1}\chi$. Alors $(\Lambda_E - z)\tilde{R}_z = I + \mathcal{O}(h^\infty)$ et donc $\tilde{R}_z = (\Lambda_E - z)^{-1} + \mathcal{O}(h^\infty)$.

On a donc, si les intégrales sont calculées sur le contour $\partial\Omega_h$ convenablement orienté:

$$\begin{aligned} \pi - \pi' &= (2\pi i)^{-1} \int ((A_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)^{-1} - (\Lambda_E - z)^{-1}) dz \\ &= (2\pi i)^{-1} \int [(\tilde{Q}_z + (\Lambda_E - (z - E))^{-1}\chi) - (\tilde{Q}_z + (\Lambda_E - (z - E)))^{-1}\chi] dz + \mathcal{O}(h^\infty) \\ &= \mathcal{O}(h^\infty) \text{ car } \tilde{Q}_z \text{ et } \tilde{R}_z \text{ sont holomorphes sur } \Omega_h. \end{aligned}$$

Ainsi $\|\pi - \pi'\| = \mathcal{O}(h^\infty)$ et le spectre de $A_E^*(P^{(0)} - E)A_E$ dans $[-h^2, h^2]$ est formé d'une valeur propre simple qui est $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Comme A_E est proche de l'identité, le spectre de $P^{(0)} - E$ dans $[-ch^2, ch^2]$ pour $c > 0$ assez petit est aussi formé d'une valeur propre simple qui est $\mathcal{O}(h^\infty)$.

D'autre part, si $d(\mu, \tilde{\sigma}) \geq ch^2$, on peut construire un inverse à $A_\mu^*(P^{(0)} - \mu)A_\mu$ de la façon dont on a construit $(A_E^*(P^{(0)} - E)A_E - z)^{-1}$ précédemment et $P^{(0)} - \mu$ est donc inversible. Ceci achève la démonstration de la proposition. \square

On définit alors l'opérateur $P^{(3)} = V^3 P^{(0)} V^3$ attaché au point M_3 , puis $P^{(\alpha)} = T(\alpha_1, \alpha_2) P^{(\alpha_0)} T^{-1}(\alpha_1, \alpha_2)$ attaché à M_α pour $\alpha \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Soit φ_0 un vecteur propre normalisé de $P^{(0)}$ associé à une valeur $\mu_j(h)$. On pose $\varphi_3 = V^3 \varphi_0$ puis $\varphi_\alpha = T(\alpha_1, \alpha_2) \varphi_{\alpha_0}$. φ_α est vecteur propre normalisé de $P^{(\alpha)}$.

Comme à la section 5, si F est l'espace spectral de P associé à l'intervalle $[\mu_j(h) - ch, \mu_j(h) + ch]$, avec $c > 0$ assez petit, la famille $\{\Pi_F \varphi_\alpha\}$

est une base hilbertienne de F proche de $\{\varphi_\alpha\}$.

c. Décroissance exponentielle.

A partir de maintenant, on ne considère plus que la partie du spectre dans $[c_- - \varepsilon_0, c_+ + \varepsilon_0]$ pour éviter d'avoir à reprendre le passage dans le complexe, qui n'est pas différent de ce qu'on a fait pour l'opérateur scalaire.

E étant donné dans $[m_+, c_+]$, on trouve une fonction $\xi^+(x)$, réelle sur les projections des puits $\Pi_x \Sigma(\mu)$, de partie imaginaire positive et telle que $\det(P_0(x, \xi^+(x)) - \mu) = 0$.

Les zéros de la fonction $\xi \mapsto \det(P_0(x, \xi) - \mu)$ sont les $\xi_+(x) + 2k\pi$ et $\overline{\xi_+(x)} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

La phase Φ est une primitive de ξ^+ / i ; la distance qu'on considère est $D(x, y) = |\operatorname{Re}(\Phi(x) - \Phi(y))|$.

On va définir l'équivalent des opérateurs $p + \sum_k \theta_k(x)$ qu'on avait utilisé dans le cas scalaire pour obtenir des inégalités à poids.

On se place près d'un niveau d'énergie $E \in]m_+, c_+ - \varepsilon_0]$. On a vu qu'il existe une application $C^\infty U: \Sigma([m_+, c_+ - \varepsilon_0/2]) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ telle que

$$U(x, \xi) \text{ est unitaire et } U^{-1}(x, \xi) P_0(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} b(x, \xi) & c(x, \xi) \\ c(x, \xi) & b(x, \xi) \end{pmatrix}$$

On considère alors une fonction χ positive à support dans $\Sigma([m_+, E])$ et on définit P_0^\pm par:

$$P_0^\pm(x, \xi) = U(x, \xi) \begin{pmatrix} b(x, \xi) + \chi(x, \xi) & c(x, \xi) \\ c(x, \xi) & b(x, \xi) - \chi(x, \xi) \end{pmatrix} U^{-1}(x, \xi) \text{ dans } \Sigma([m_+, E])$$

$P_0^\pm(x, \xi) = P_0(x, \xi)$ ailleurs.

Ceci a pour effet d'écarter les valeurs propres.

On considère alors une application $C^\infty V: \Sigma([m_+, c_+ - \varepsilon_0/2]) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$ telle

$$\text{que } V(x, \xi) \text{ est unitaire et } V^{-1}(x, \xi) P_0^\pm(x, \xi) V(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm(x, \xi) \end{pmatrix}$$

avec $c_- < \lambda_1^+(x, \xi) \leq m_- \leq m_+ \leq \lambda_2^+(x, \xi) < c_+$

λ_1^+ et λ_2^+ coïncident avec λ_1 et λ_2 hors de $\Sigma([m_+, E])$.

Soit $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\chi_\varepsilon(t) = t$ pour $t \geq E + \varepsilon$ et $\chi_\varepsilon(t) \geq E + \varepsilon/2$ pour tout t .

Soit \tilde{P}_0 défini par:

$$\tilde{P}_0(x, \xi) = V(x, \xi) \begin{pmatrix} \lambda_1^+(x, \xi) & 0 \\ 0 & \chi_\varepsilon(\lambda_2^+(x, \xi)) \end{pmatrix} V^{-1}(x, \xi) \text{ dans } \Sigma([m_+, c_+ - \varepsilon_0/2])$$

$\tilde{P}_0 = P_0$ ailleurs.

Ainsi le symbole $\tilde{P} = \tilde{P}_0 + (P - P_0)$ coïncide avec P hors de $\Sigma([m_+, E + \varepsilon])$ et $\det(\tilde{P} - a) \neq 0$ pour $a \in [m_+, E + \varepsilon/2]$.

Pour que \tilde{P} agisse bien sur les espaces à poids exponentiels, on quantifie de la façon suivante: on considère θ une fonction C^∞ de \mathbb{R} dans $[0, 1]$, à support dans un voisinage de $\cup_k I_k$ (Les I_k sont les projections des puits) et valant 1 sur $\cup_k I_k$ et on pose $\tilde{P}u = Pu + \theta(\tilde{P}_0 - P_0)(\theta u)$.

On a aussi besoin d'opérateurs dont une rangée de puits n'est pas bouchée: On a:

$$\tilde{P} - P = \sum_{\alpha \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} N_\alpha(x, \xi) \text{ avec } \text{supp}(N_\alpha) \subset \Sigma_\alpha([m_+, E + \varepsilon]).$$

On pose $P_k = P + \sum_{\{\alpha; k(\alpha) \neq k\}} N_\alpha(x, \xi)$: on a bouché tous les puits sauf la rangée de ceux qui se projettent sur I_k . On quantifie alors de manière analogue à ce qu'on a fait pour \tilde{P} .

Ces opérateurs construits, les modifications à apporter à l'étude du cas scalaire sont indiquées dans [He-Sj]₅, et on montre que, si F est l'espace spectral de P associé à un intervalle $I(h)$ de la forme $[\mu(h) - ch, \mu(h) + ch]$, avec c assez petit, Π_F vérifie le:

Théorème 9.4 :

Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant $|\varphi_j'| \leq (|\text{Re } \Phi'| - \varepsilon)_+$ et $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $\Pi_x \Sigma(E)$, alors Π_F défini sur $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ admet une extension bornée de $L^2_{\varphi_1}$ dans $L^2_{\varphi_2}$ avec:

$$\|\Pi_F\|_{\mathcal{B}(L^2_{\varphi_1}, L^2_{\varphi_2})} \leq C(\varepsilon).$$

d. Matrice d'interaction.

Nous continuons à utiliser les résultats de [He-Sj]₅. Il est montré dans cet article, dans une situation analogue à la nôtre, qu'on peut trouver une fonction $\tilde{g}^{(0)} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ de la forme:

$$\tilde{g}^{(0)}(x, h) = c(h) \exp \{1/h [i(x - x_1(h))\xi_1(h) - \frac{1}{2}b(x - x_1(h))^2]\}$$

avec $d[(x_1(h), \xi_1(h)), \Sigma_0(\mu)] \rightarrow 0$ et $|c(h)| + |c(h)|^{-1} = \mathcal{O}(h^{-N_0})$ et telle que:

$$(9.5) \quad (\tilde{g}^{(0)} | \psi^{(0)}) = 1$$

$$(9.6) \quad \|\tilde{g}^{(0)}\| = \mathcal{O}(h^{-N_0})$$

$$(9.7) \quad \|\chi \tilde{g}^{(0)}\| = \mathcal{O}(h^N d[\text{Supp } \chi, \Sigma_0(\mu)]^{-N}) \text{ pour } N \in \mathbb{N} \text{ et } d[\text{Supp } \chi, \Sigma_0(E)] \geq \varepsilon_0.$$

Comme lors de l'étude des opérateurs scalaires, on se ramène alors à une fonction $g^{(0)}$ valeur propre de $T_1 V^4$, vérifiant (9.5)–(9.7).

On pose alors $g^{(3)} = \sqrt{3} g^{(0)}$ et $g^{(\alpha)} = T(\alpha_1, \alpha_2) g^{(\alpha_0)}$ pour $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \{0, 3\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$\{\Pi_{Fg}^{(\alpha)}\}$ est une base hermitienne de F . On appelle $\{u^{(\alpha)}\}$ sa base orthonormalisée. On a pour $u^{(\alpha)}$ des majorations et des constructions BKW comme dans le cas scalaire et donc, si M et N sont deux puits, on a les majorations:

$$(9.8) \quad |W_{M,N}| \leq e^{-\varepsilon_0 \Delta(M,N)/h}$$

$$(9.9) \quad |W_{M,N}| \leq e^{-(S+\varepsilon_0)/h} \text{ si } \Delta(M,N) \geq 2$$

$$(9.10) \quad |W_{M,N}| \leq C_\varepsilon e^{-(S-\varepsilon)/h} \text{ pour tout } \varepsilon > 0 \text{ si } \Delta(M,N) = 1.$$

e. Minoration de l'effet tunnel entre puits les plus proches.

Pour fixer les idées, on prend pour M et N les puits centrés en $(4\pi/3, 0)$ et $(8\pi/3, 0)$ (c'est-à-dire: $M=M_0$ et $N=M(3, 1, 1)$).

On peut appliquer les résultats à la section 7 de [He-Sj]₄ et on obtient:

$$(9.11) \quad W_{M,N} = -h(u_M, \Psi T_{2\pi} \Psi u_N) + \mathcal{O}(e^{-(S+\varepsilon_0)/h})$$

avec $\varepsilon_0 > 0$, Ψ est une fonction C^∞ à support compact qui vaut 1 dans un voisinage de 2π .

$T_{2\pi}$ est donné par son noyau:

$$(9.12) \quad T_{2\pi} = c_1 h^{-3/2} \int e^{i[(x-y)\theta + \frac{1}{2}ic_0((x-2\pi)^2 + (y-2\pi)^2)]/h} S(\frac{1}{2}(x+y), \theta, \frac{1}{2}(x+y) - 2\pi, h) d\theta$$

avec $c_0 > 0$ assez grande, et $c_1 = (2c_0)^{\frac{1}{2}}(2\pi)^{-3/2}$.

Le symbole $S(x, \theta, \sigma, h)$ est donné par:

$$(9.13) \quad e^{-c_0\sigma^2/h}[P_0(x, \theta + ic_0\sigma) - P_0(x, \theta - ic_0\sigma)] = -h\partial_\sigma[e^{-c_0\sigma^2/h}S(x, \theta, \sigma, h)].$$

Ainsi, si S_0 est le symbole principal de S ,

$$(9.14) \quad S_0(x, \theta, 0) = i\partial_\theta P_0(x, \theta).$$

Pour un choix convenable de la phase Φ , qui n'est définie qu'à une constante près, les approximations BKW de u_M et u_N sont:

$$(9.15) \quad \tilde{u}_M = c_M(h) e^{-\Phi(x)/h} a_M(x)$$

$$(9.16) \quad \tilde{u}_N = c_N(h) e^{-(S - \bar{\Phi}(x))/h} a_N(x).$$

La formule de la phase stationnaire donne:

$$(9.17) \quad W_{M,N} = -hc_M(h)c_N(h)[\langle a_M^0(2\pi) | i\partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) a_N^0(2\pi) \rangle + \mathcal{O}(h)]$$

Il faut donc montrer:

$$(9.18) \quad \langle a_M^0(2\pi) | \partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) a_N^0(2\pi) \rangle \neq 0.$$

Cas de la bande simple.

Ce cas est analogue à celui traité dans [He-Sj]5.

On prend un $\varepsilon_1 > 0$, avec $\delta \ll \varepsilon_1$, et on traite les valeurs de μ avec $\mu \geq \varepsilon_1$.

Pour (x, ξ) au voisinage de $(2\pi, i\bar{\Phi}'(2\pi))$ ou de $(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi))$, il existe une matrice $U(x, \xi)$ vérifiant:

$$U^{-1}(x, \xi) P_0(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, \xi) \end{pmatrix}$$

et $\lambda_2(x, i\Phi'(x)) = \mu$, $\lambda_1(x, i\Phi'(x)) \neq \mu$, $U(x, \xi)^* = U^{-1}(\bar{x}, \bar{\xi})$.

On pose alors:

$$a_M(x) = U(x, i\Phi'(x))b_M(x); \quad a_N(x) = U(x, -i\bar{\Phi}'(x))b_N(x)$$

ainsi:

$$\begin{aligned} & \langle a_M(2\pi) | \partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) a_N(2\pi) \rangle \\ &= \langle b_M(2\pi) | U(2\pi, i\Phi'(2\pi))^* \partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) U(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) b_N(2\pi) \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Soit } N(x, \xi) = U^{-1}(x, \xi) P_0(x, \xi) U(x, \xi) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x, \xi) & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, \xi) \end{pmatrix}.$$

Alors:

$$\begin{aligned} \partial_\xi N(x, \xi) &= \partial_\xi (U^{-1}(x, \xi)) (P_0(x, \xi) - \mu) U(x, \xi) + U^{-1}(x, \xi) \partial_\xi P_0(x, \xi) U(x, \xi) \\ &\quad + U^{-1}(x, \xi) (P_0(x, \xi) - \mu) \partial_\xi U(x, \xi) \end{aligned}$$

et on a:

$$\begin{aligned} & \langle b_M(2\pi) | U(2\pi, i\Phi'(2\pi))^* \partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) U(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) b_N(2\pi) \rangle \\ &= \langle b_M(2\pi) | \partial_\xi N(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) b_N(2\pi) \rangle. \end{aligned}$$

Les premières coordonnées des vecteurs b_M et b_N sont nulles, donc

$$\begin{aligned} & | \langle a_M(2\pi) | \partial_\xi P_0(2\pi, -i\bar{\Phi}'(2\pi)) a_N(2\pi) \rangle | \\ &= \|b_M(2\pi)\| \|b_N(2\pi)\| | \partial_\xi \lambda_2(2\pi, i\Phi'(2\pi)) | \end{aligned}$$

et comme, par construction de Φ , $\partial_\xi \lambda_2(2\pi, i\Phi'(2\pi)) \neq 0$, on a montré (9.18) dans ce cas.

Cas de la bande double.

On travaille cette fois dans la région $|\mu| \leq \varepsilon_1$, où ε_1 est assez petit et $\delta \ll \varepsilon_1$.

Ce cas est un peu plus compliqué que le précédent car la matrice $p_0(x, i\bar{\Phi}'(x))$ n'est plus diagonalisable. Toutefois la matrice $\partial_\xi P_0(x, i\bar{\Phi}'(x))$ est inversible et on peut faire des construction BKW. L'argument qui suit est tiré de [He-Sj]₅:

On connaît les équations de transport vérifiées par a_M et a_N :

$$\frac{1}{2}(\partial_\xi P_0(x, i\Phi'(x))(-i\partial_x a_M(x)) - i\partial_x[\partial_\xi P_0(x, i\Phi'(x))a_M(x)]) \\ + P_1(x, i\Phi'(x))a_M(x) + (P_0(x, i\Phi'(x)) - \mu)a_M(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}(\partial_\xi P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x))(-i\partial_x a_N(x)) - i\partial_x[\partial_\xi P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x))a_N(x)]) \\ + P_1(x, -i\bar{\Phi}'(x))a_N(x) + (P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) - \mu)a_N(x) = 0.$$

On en déduit:

$$(9.19) \quad \partial_x \langle a_M(x) | \partial_\xi P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x))a_N(x) \rangle = 0.$$

On peut donc calculer cette expression ailleurs qu'au point 2π . On prend $x \in [4\pi/3 + \eta, 4\pi/3 + 2\eta]$ avec $\delta \ll \varepsilon_1 < \eta^4 \ll 1$.

$$\text{Alors } P_0(x, \xi) - \mu = \begin{pmatrix} P_{11}(x, \xi) - \mu & P_{12}(x, \xi) \\ P_{21}(x, \xi) & P_{22}(x, \xi) - \mu \end{pmatrix}$$

avec $P_{12}(x, \xi) = \beta(\xi + i\alpha(x - 4\pi/3)) + \mathcal{O}((x - 4\pi/3)^2 + \xi^2)$

$$\beta = e^{-i\pi/3} + \mathcal{O}(\delta)$$

$$\alpha = (3/4)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\delta)$$

$$P_{jj}(x, \xi) = \mathcal{O}(\delta + (x - 4\pi/3)^2 + \xi^2), \quad j=1, 2$$

Φ vérifie $\det[P_0(x, i\Phi'(x)) - \mu] = 0$ et $\text{Re } \Phi' \geq 0$, donc:

pour $x \in [4\pi/3 + \eta, 4\pi/3 + 2\eta]$, $\Phi'(x) = \bar{\alpha}(x - 4\pi/3) + \mathcal{O}(\eta^2)$

$$\text{Donc } P_0(x, i\Phi'(x)) - \mu = \begin{pmatrix} 0 & 2i\text{Re } \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$\text{et } P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) - \mu = \begin{pmatrix} 2i\text{Re } \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta^2)$$

et, comme $(P_0(x, i\Phi'(x)) - \mu)a_M(x) = 0$, $a_M(x) = \begin{pmatrix} \gamma_M(x) \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta)$

avec $|\gamma_M(x)| = \|a_M(x)\|$.

$$\text{De même, } a_N(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_N(x) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta) \quad \text{avec } |\gamma_N(x)| = \|a_N(x)\|.$$

$$\text{On a aussi } \partial_{\xi} P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \langle a_M^0(x) | \partial_{\xi} P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) a_N^0(x) \rangle &= (\gamma_M(x) \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_N(x) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\eta) \\ &= \bar{\beta} \gamma_M(x) \bar{\gamma}_N(x) + \mathcal{O}(\eta). \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, } |\langle a_M^0(x) | \partial_{\xi} P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) a_N^0(x) \rangle| = |\beta| \|a_M^0(x)\| \|a_N^0(x)\| + \mathcal{O}(\eta).$$

En choisissant η assez petit et $x \in [4\pi/3 + \eta, 4\pi/3 + 2\eta]$, on obtient $\langle a_M^0(x) | \partial_{\xi} P_0(x, -i\bar{\Phi}'(x)) a_N^0(x) \rangle \neq 0$ et (9.18) est montrée.

On a ainsi montré que l'étude du spectre de P hors de deux intervalles correspondant à des zones de branchement se ramène aux opérateurs scalaires ou aux systèmes que nous avons étudiés. Ceci achève la démonstration du Théorème 1.

10. Appendice: tracé du spectre de l'opérateur scalaire en fonction du paramètre h.

Le dessin de la page suivante représente le spectre de $op_h^W q$, qu'on dessine horizontalement en fonction de l'ordonnée h , pour les valeurs de h telles que $h/2\pi$ soit compris entre 0 et 1 et soit rationnel de dénominateur inférieur à 30. On se contente de cet intervalle car le dessin complet est 4π -périodique et symétrique par rapport à la droite $h=0$.

Pour $h/2\pi = p/q$, avec p et q entiers et premiers entre eux, la théorie de Floquet permet de montrer que le spectre est formé de q bandes qui peuvent avoir des extrémités communes mais pas se superposer. Le problème du nombre exact de bandes disjointes est ouvert.

3

$3/2$

$h = 2\pi$



$-\frac{3}{2}$

3

$h = 0$

Bibliographie

- [Av-Si] J. Avron-B. Simon: Stability of gaps for periodic potential under variations of a magnetic field. *J. Phys. A: Math. Gen.* 18 (1985) p2199-2205.
- [Beals] R. Beals: Characterization of P.D.O. and applications. *Duke Math J* 44 (1977) p45-57.
- [Be] J. Bellissard: Schrödinger operators with almost periodic potentials. *Springer lecture notes in physics* 153.
- [BKS] J. Bellissard, C. Kreft, et R. Seiler: Analysis of the spectrum of a particle on a triangular lattice with two magnetic fluxes by algebraic and numerical methods. Preprint (Juin 1990).
- [Be-Si] Cantor spectrum for the almost Mathieu equation. *Journal of Functional Analysis*, vol 48, N°3, Oct 1982.
- [Ca] U. Carlsson: An infinite number of wells in the semi-classical limit. *Asymptotic Analysis* 1990 vol 3 n°3 p189-214.
- [Cl-Wa] F.H. Claro et G.H. Wannier: Magnetic subband structure of electron in hexagonal lattices. *Physical review B*, volume 19, number 12 p6068-6074.
- [CFKS] H.K. Cycon, R.G. Froese, W. Kirsch et B. Simon: Schrödinger operators with applications to quantum mechanics and global geometry, *Text and Monographs in Physics*, Springer Verlag.
- [Gu-He-Tr] J.B. Guillemin, B. Helffer et P. Treton: Walk inside Hofstadter's butterfly. *Journal de Physique France* 50 (1989) p2019-2058.
- [Ha]₁ E. Harel: Double wells. *Comm. Math. phys.* 75 (1980) p239-261.
- [Ha]₂ E. Harel: The band structure of a one dimension periodic system in the scaling limit. *Ann. of Physics* 119 (1974) p351-369.
- [He-Ro]₁ B. Helffer et D. Robert: Calcul fonctionnel par la transformée de Mellin et applications. *Journal of Functional Analysis*, vol 53, N°3, Oct 1983.
- [He-Ro]₂ B. Helffer et D. Robert: Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique. *Annales de l'IHP (section physique théorique)* vol 41, N°3, 1984, p2291-331.
- [He-Ro]₃ B. Helffer et D. Robert: Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté. *Duke Math Journal* (1982) vol 49, n°4.
- [Ho] D. Hofstadter: Energy level and wave functions for Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review B* 14 (1976) p2239-2249.
- [He-Sj]₁ B. Helffer et J. Sjöstrand: Multiple wells in the semi classical limit 1. *Comm PDE*, 9(4) (1984), p334-408.

- [He-Sj]₂ B.Helffer et J.Sjöstrand: Multiple wells in the semi classical limit 2. Annales de l'IHP (section physique théorique), 49,n⁰2 (1985) p127-212.
- [He-Sj]₃ B.Helffer et J.Sjöstrand: Effet tunnel pour l'équation de Schrödinger avec champ magnétique. Annales Sc Norm Sup di Pisa Ser IV 14 (4) (1987) p625-657.
- [He-Sj]₄ B.Helffer et J.Sjöstrand: Analyse semi classique pour l'équation de Harper. Mémoire de la SMF n⁰34 (1988).
- [He-Sj]₅ B.Helffer et J.Sjöstrand: Analyse semi classique pour l'équation de Harper 2: comportement semi-classique près d'un rationnel. Mémoire de la SMF n⁰40 (1989).
- [He-Sj]₆ B.Helffer et J.Sjöstrand: Semi classical analysis for Harper equation 3. Cantor structure of the spectrum. Mémoire de la SMF n⁰39. Tome 117, fascicule 4 (1989).
- [He-Sj]₇ B.Helffer et J.Sjöstrand: Résonances en limite semi-classique. Bulletin de la SMF (1986), tome 114, fasc.3, mémoire n⁰24-25.
- [He-Sj]₈ On diamagnetism and de Haas-van Halphen effect. Ann Inst. Henri Poincaré.(section phys. th.) Vol 52 n⁰4 (1990) p303-375.
- [Ho] D.Hofstadter: Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. Phys.Rev.B 14 (1976), p2239-2249.
- [La-Li] Landau-Lifshitz: Mécanique quantique.
- [Me-Sj] A.Melin and J.Sjöstrand: Fourier Integral Opérateurs with complex valued phase functions. Springer Lecture Notes in Mathematics n⁰459, p121-223.
- [Ou] A.Outassourt: Analyse semi classique pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel périodique. Journal of functional analysis Vol 72, N⁰1, May 1987.
- [Re-Si] M.Reed et B.Simon: Methods of modern mathematical physics. Academic Press.
- [Ro] D.Robert: Autour de l'approximation semi-classique. Progress in Mathematics, vol n⁰28, Birkhauser.
- [SI]₁ B.Simon: Almost periodic Schrödinger operators: a review. Advances in Applied Mathematics 3, (1982) p463-490.
- [SI]₂ B.Simon: Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I et II. Ann. IHP t38, 1983 p295-307. Ann. of Math n⁰120, p89-118.
- [SI]₃ B.Simon: Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. Width of the ground state band in strongly coupled solids. Ann. of Physics 158 (1984) p415-420.
- [Sj]₁ J.Sjöstrand: Singularités analytiques microlocales. Astérisque n⁰95 (1982).
- [Sj]₂ J.Sjöstrand: Analytic singularities of solutions of boundary value problem. Proceedings of the Nato Advanced Study Institute (1980). Reidel Publishing Company.

- [So] J.B.Sokoloff: Unusual band structure, wave functions and electrical conductance in crystals with incommensurate periodic potentials. Physics Reports (review section of physics letters) 126, n⁰4 (1985) p189–244.
- [VM] P. van Mouche. The coexistence problem for the discret Mathieu operator. Comm. in Math. Phys. Vol 122 n⁰1 (1989) p23–34.
- [Wi]₁ M.Wilkinson: critical properties of electron eigenstates in incommensurable systems. Proc.R.Soc.London A391 (1984), p305–350.
- [Wi]₂ M.Wilkinson: Von Neumann lattices of Wannier functions for Bloch electrons in a magnetic field. Proc.R.Soc.London A403 (1986), p135–166.
- [Wi]₃ M.Wilkinson: An exact effective Hamiltonian for a perturbed Landau level. Journal of Phys.A, 20, n⁰7, 11 mai 1987, p1761–.
- [Wi]₄ M.Wilkinson: An exact renormalisation group for Bloch electrons in a magnetic field. Journal of Physics A Gen 20 (1987) 4337–4354.
- [Wi–Au] M.Wilkinson et E.Austin: Semi–classical analysis of phase space lattices with threefold symmetry. Preprint (1989).