

# THÈSES D'ORSAY

MAJDI AZAIEZ

**Calcul de la pression dans le problème de stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation**

*Thèses d'Orsay*, 1991

[http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11\\_1991\\_\\_0281\\_\\_P0\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1991__0281__P0_0)

L'accès aux archives de la série « Thèses d'Orsay » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.



NUMDAM

*Thèse numérisée par la bibliothèque mathématique Jacques Hadamard - 2016  
et diffusée dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

# UNIVERSITÉ de PARIS-SUD

Centre d'ORSAY

## THÈSE

présentée  
pour obtenir

le titre de Docteur en Science

Spécialité : Mathématiques

par

Majdi AZAIEZ

Sujet :

**Calcul de la pression dans le problème de Stokes  
pour des fluides visqueux incompressibles  
par une méthode spectrale de collocation**

soutenue le 5 avril 1990 devant la Commission d'examen

|     |              |            |
|-----|--------------|------------|
| M.  | R. TEMAM     | Président  |
| Mme | C. BERNARDI  | Rapporteur |
| M.  | G. LABROSSE  |            |
|     | Y. MADAY     |            |
|     | M. MENEGUZZI |            |
|     | F. MIGNOT    |            |
|     | R. PEYRET    | Rapporteur |



## **ABSTRACT**

The aim of this work is to present a new spectral method without spurious modes for the Stokes system in any space dimension. This method use only the pressure and the velocity values at the nodes of a Gauss-Lobatto grid as variables.



# Table des matières

|          |                                                                               |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Mise en oeuvre d'un solveur pour le problème de Helmholtz</b>              | <b>11</b> |
| 1.1      | Introduction . . . . .                                                        | 11        |
| 1.2      | Analyse du problème de Helmholtz . . . . .                                    | 11        |
| 1.2.1    | Problème continu et formulation variationnelle . . . . .                      | 12        |
| 1.3      | Approximation par méthode spectrale de Galerkin . . . . .                     | 12        |
| 1.4      | Approximation spectrale de collocation . . . . .                              | 13        |
| 1.5      | Résolution numérique du problème de Helmholtz . . . . .                       | 15        |
| 1.5.1    | Cas mono-dimensionnel . . . . .                                               | 15        |
| 1.5.2    | Cas bidimensionnel . . . . .                                                  | 17        |
| 1.6      | Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde . . . . .                      | 18        |
| 1.7      | Conclusion . . . . .                                                          | 19        |
| <b>2</b> | <b>Résolution numérique <math>(P_N, P_N)</math> du problème de Stokes</b>     | <b>24</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                        | 24        |
| 2.2      | Problème continu . . . . .                                                    | 24        |
| 2.3      | Problème discret . . . . .                                                    | 25        |
| 2.4      | Algorithme de résolution . . . . .                                            | 27        |
| 2.4.1    | Conditions de compatibilité . . . . .                                         | 27        |
| 2.4.2    | Propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}^\alpha$ . . . . .                      | 29        |
| 2.5      | Résultats numériques . . . . .                                                | 30        |
| 2.5.1    | Convergence et approximation . . . . .                                        | 30        |
| 2.5.2    | Mesure du nombre de conditionnement de $\mathcal{A}^\alpha$ . . . . .         | 31        |
| 2.6      | Conclusion . . . . .                                                          | 31        |
| <b>3</b> | <b>Approximation <math>(P_N, P_N)</math> du problème de Stokes en 2.5-D</b>   | <b>35</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                                        | 35        |
| 3.2      | Problème continu . . . . .                                                    | 35        |
| 3.2.1    | Décomposition du système . . . . .                                            | 36        |
| 3.2.2    | Problème discret . . . . .                                                    | 38        |
| 3.2.3    | Quel opérateur $\mathcal{A}_m^\alpha$ sur la pression . . . . .               | 39        |
| 3.3      | Influence des premiers modes de Fourier sur le processus itératif . . . . .   | 39        |
| 3.4      | Propriétés des $\mathcal{A}_m^\alpha$ pour différentes valeurs de m . . . . . | 40        |
| 3.5      | Conclusion . . . . .                                                          | 41        |

|          |                                                                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>4</b> | <b>Introduction à la méthode (<math>P_N, P_{N-2}</math>)</b>                                                                        | <b>43</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                                                              | 43        |
| 4.2      | Problème continu . . . . .                                                                                                          | 44        |
| 4.2.1    | Décomposition du système . . . . .                                                                                                  | 44        |
| 4.2.2    | Formulation variationnelle du problème . . . . .                                                                                    | 45        |
| 4.3      | Problème discret . . . . .                                                                                                          | 46        |
| 4.3.1    | Formulation variationnelle du problème approché . . . . .                                                                           | 46        |
| 4.3.2    | Analyse du problème variationnel . . . . .                                                                                          | 48        |
| 4.4      | Système algébrique . . . . .                                                                                                        | 49        |
| 4.5      | Opérateurs discrétisés . . . . .                                                                                                    | 49        |
| 4.5.1    | Fonctions tests . . . . .                                                                                                           | 49        |
| 4.5.2    | Quel opérateur de divergence sur la vitesse? . . . . .                                                                              | 52        |
| 4.5.3    | Quel opérateur de gradient sur la pression ? . . . . .                                                                              | 53        |
| 4.5.4    | Quel opérateur $\mathcal{A}_m^\alpha$ sur la pression ? . . . . .                                                                   | 54        |
| 4.6      | Résultat de convergence et d'approximation . . . . .                                                                                | 55        |
| 4.7      | Conclusion . . . . .                                                                                                                | 55        |
| <b>5</b> | <b>Applications au problème de Stokes</b>                                                                                           | <b>61</b> |
| 5.1      | Approximation du problème de Stokes en 2-D . . . . .                                                                                | 61        |
| 5.1.1    | Problème continu . . . . .                                                                                                          | 61        |
| 5.1.2    | Problème discret . . . . .                                                                                                          | 62        |
| 5.1.3    | Technique de résolution . . . . .                                                                                                   | 63        |
| 5.1.4    | Résultats numériques . . . . .                                                                                                      | 66        |
| 5.1.5    | conclusion . . . . .                                                                                                                | 67        |
| 5.2      | Application au problème de Stokes 2.5-D . . . . .                                                                                   | 67        |
| 5.2.1    | Problème discret . . . . .                                                                                                          | 68        |
| 5.2.2    | Système algébrique et résultats numériques . . . . .                                                                                | 69        |
| 5.2.3    | Conclusion : . . . . .                                                                                                              | 70        |
| <b>6</b> | <b>Résolution numérique des équations de Stokes pour des écoulements axisymétriques confinés en géométrie cylindrique annulaire</b> | <b>77</b> |
| 6.1      | Introduction . . . . .                                                                                                              | 77        |
| 6.2      | Formulation abstraite . . . . .                                                                                                     | 78        |
| 6.2.1    | Le problème continu . . . . .                                                                                                       | 79        |
| 6.2.2    | Le problème discret . . . . .                                                                                                       | 80        |
| 6.2.3    | Estimation de l'erreur . . . . .                                                                                                    | 81        |
| 6.3      | Analyse du problème continu . . . . .                                                                                               | 82        |
| 6.4      | Approximation ( $P_N, P_N$ ) . . . . .                                                                                              | 84        |
| 6.4.1    | Résultats numériques de convergence et d'approximation . . . . .                                                                    | 92        |
| 6.5      | Approximation ( $P_N, P_{N-2}$ ) . . . . .                                                                                          | 93        |
| 6.5.1    | Système algébrique : . . . . .                                                                                                      | 94        |
| 6.5.2    | Résultats numériques : . . . . .                                                                                                    | 94        |
| 6.5.3    | Conclusion . . . . .                                                                                                                | 94        |
| <b>7</b> | <b>Conclusion</b>                                                                                                                   | <b>97</b> |

|                     |            |
|---------------------|------------|
| <b>8 Annexes</b>    | <b>98</b>  |
| <b>9 Références</b> | <b>106</b> |

## REMERCIEMENTS

J'adresse mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour avoir accepté de juger mon travail.

Merci à :

- Gérard Labrosse, à qui je dois le sujet de cette thèse ainsi que ma formation et mes premiers pas dans "le monde du Spectral",
- Christine Bernardi et Yvon Maday qui à travers le groupe de travail sur les méthodes spectrales, m'ont fait découvrir les joies de la théorie des méthodes spectrales et les secrets de la condition "inf-sup",
- Hervé Vandeven et Giuseppe Coppoletta avec lesquels j'ai eu le plaisir de réaliser les chapitres 5 et 6.
- à tous les membres du Laboratoire FAST, pour m'avoir supporté durant ces années.

Merci, aussi à ma famille et à Regula, ils savent pourquoi...

بإلى أبي ابنزاهيم

# Notations

Pour la suite on introduit les notations et les définitions suivantes:

## Domaines :

$\Lambda$  : désigne l'intervalle ouvert  $] -1 , +1 [$ .

$\Omega$  : Désigne l'ouvert défini par  $\Lambda^d$ , ( $d$  entier  $\geq 1$  ).

$\partial\Omega$  : désigne la frontière du domaine.

$\bar{\Omega}$  : Désigne  $\Omega \cup \partial\Omega$ .

## Espaces fonctionnels :

$C^m(\bar{\Omega})$  : désigne l'ensemble des fonctions  $m$  fois continuellement différentiables.

$\mathcal{D}(\Omega)$  : désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'ouvert  $\Omega$

$L^2(\Omega) = \{f, \text{mesurable}, \int_{\Omega} |f^2(x)| dx < \infty\}$ .

$L_0^2(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} f(x)dx = 0\}$ .

$H^m(\Omega)$  : désigne le sous espace de  $L^2(\Omega)$  des fonctions telles que toutes leurs dérivées, au sens des distributions, d'ordre  $\leq m$ , soient dans  $L^2(\Omega)$ . On rappelle que  $H^m(\Omega)$  muni de la norme

$$\|f\|_{m,\Omega} = \left( \sum_{k=0}^m |f|_{k,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$|f|_{k,\Omega}^2 = \sum_{k_1+\dots+k_d=k} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}} \right)^2 dx$$

est un espace de Hilbert [Ad].

$H^s(\Omega)$  : pour tout réel  $s = m + \sigma$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \sigma < 1$ , on définit  $H^s(\Omega)$  comme

espace interpolé de  $H^m(\Omega)$  et  $H^{m+1}(\Omega)$  d'indice  $1 - \sigma$ , i.e

$$H^\sigma(\Omega) = [H^m(\Omega), H^{m+1}(\Omega)]_{1-\sigma}.$$

$H_0^m(\Omega)$  : désigne la fermeture de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^m(\Omega)$  pour la norme  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ .

On rappelle que dans  $H_0^m(\Omega)$ , les normes  $\|\cdot\|_{m,\Omega}$  et  $|\cdot|_{m,\Omega}$  sont équivalentes.

$H^{-m}(\Omega)$  : désigne le dual de  $H_0^m(\Omega)$ .

### Espaces polynômiaux :

$P_N(\Omega)$  : désigne l'espace des polynômes définis sur  $\Omega$  et de degré  $\leq N$ .

$P_N^0(\Omega)$  : désigne l'espace des polynômes définis sur  $\Omega$  et de degré  $\leq N$  et nuls sur le bord.

### Polynômes de Jacobi :

Pour tout réel  $\alpha > -1$  on introduit les polynômes  $(J_N^\alpha)_{N \geq 0}$  orthogonaux pour la mesure  $\omega^\alpha(x) = (1 - x^2)^\alpha dx$ .  $J_N^\alpha$  est le polynôme de Jacobi de degré  $N$  et d'indice  $\alpha$  vérifiant:

$$J_N^\alpha(+1) = \frac{\Gamma(N + \alpha + 1)}{N! \Gamma(\alpha + 1)}$$

où  $\Gamma$  représente la fonction Gamma.

Le cas  $\alpha = 0$  correspond aux polynômes de Legendre qu'on notera  $L_N$  et celui de  $\alpha = -\frac{1}{2}$  correspond à une constante près aux polynômes de Chebychev qu'on notera  $T_N$  (annexe 1).

### Points de collocation et formule de quadrature

Soit  $N$  un entier  $\geq 3$ , on désigne par  $(\xi_j^\alpha)$ ,  $0 \leq j \leq N$ , (resp  $(\tau_j^\alpha)$ ,  $0 \leq j \leq N$ ) les zéros du polynôme  $(1 - \xi^2)J_N^\alpha$ , (resp  $J_N^\alpha$ ).

- Les points  $(\xi_j^\alpha)$  sont appelés points de Gauss-Lobatto et les  $(\tau_j^\alpha)$  points de Gauss.
- On rappelle qu'il existe une suite de réels  $\rho_j^\alpha$ ,  $0 \leq j \leq N$  tels que la formule de quadrature de Gauss-Lobatto

$$\int_{-1}^1 \Phi(x)(1 - x^2)^\alpha dx \approx \sum_{j=0}^N \Phi(\xi_j^\alpha) \rho_j^\alpha,$$

soit exacte pour tout polynôme de  $P_{2N-1}(\Lambda)$ .

- Pour tout  $N$ , on définit la grille  $\Xi_N^\alpha$  par

$$\Xi_N^\alpha = \{ \bar{x}^\alpha = (\xi_j^\alpha, \xi_k^\alpha), 0 \leq j \leq N, 0 \leq k \leq N \}.$$

On rappelle aussi qu'il existe  $\rho_{\bar{x}}^\alpha = \rho_j^\alpha \rho_k^\alpha$ ,  $\bar{x} \in \Xi_N^\alpha$  tels que la formule de quadrature de Gauss-Lobatto

$$\int_{\Omega} \Phi(x, y)(1 - x^2)^\alpha (1 - y^2)^\alpha dx dy \approx \sum_{i,j=0}^N \Phi(\xi_i^\alpha, \xi_j^\alpha) \rho_i^\alpha \rho_j^\alpha,$$

soit exacte pour tout polynôme de  $P_{2N-1}(\Lambda) \otimes P_{2N-1}(\Lambda)$ .

### **Produit scalaire continu et approché**

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ : désigne le produit scalaire définie par

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x).v(x)dx$$

$|u|_{0,\Omega}$  : désigne la norme associée au produit scalaire  $(u, v)$  et définie par

$$|u|_{0,\Omega}^2 = \int_{\Omega} u(x)^2 dx,$$

qu'on notera aussi  $|u|_{\Omega}$

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\alpha}$  : désigne le produit scalaire défini par

$$(u, v)_{\alpha} = \int_{\Omega} u(x).v(x)\omega^{\alpha}(x)dx$$

On note que  $(u, v)_0 = (u, v)$ .

$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\alpha, N}$  : désigne la forme bilinéaire défini par

$$(u, v)_{\alpha, N} = \sum_{i,j=0}^N u(\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\alpha})v(\xi_i^{\alpha}, \xi_j^{\alpha})\rho_i^{\alpha}\rho_j^{\alpha},$$

On rappelle que la forme qui à  $\Phi$  associe  $(\Phi, \Phi)_{\alpha, N}^{\frac{1}{2}} = \|\Phi\|_{\alpha, N}$  est une norme sur  $P_N(\Omega)$  équivalente à la norme  $\|\Phi\|_{\alpha} = (\Phi, \Phi)_{\alpha}^{\frac{1}{2}}$  uniformément par rapport à  $N$ ,  $[(C.Q)], \alpha = 0, -\frac{1}{2}$  et [BM3] pour  $\alpha$  quelconque ).

### **Opérateur d'interpolation : [CQ]**

On définit l'opérateur  $I_N^{\alpha}$  d'interpolation sur  $\Xi_N^{\alpha}$  par : Pour tout  $f$  dans  $C^0(\Omega)$ ,  $I_N^{\alpha}f$  est l'unique polynôme de  $P_N(\Omega)$  vérifiant

$$\forall \bar{x} \in \Xi_N^{\alpha}, I_N^{\alpha}f(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

### **Opérateur d'interpolation : [CQ]**

On définit l'opérateur  $\Pi_N^{\alpha}$  de projection qui à toute fonction  $f$  de  $H_0^1(\Omega)$  associe l'unique polynôme de  $P_N(\Omega)$  vérifiant

$$\forall \Phi \in P_N(\Omega), (\Pi_N^{\alpha}f, \Phi)_{\alpha} = (f, \Phi)_{\alpha}.$$

Enfin si  $X$  désigne un espace de Banach on note alors  $X'$  son dual et  $\|\cdot\|_X$  sa norme.

Pour simplifier la rédaction de la thèse on décide de ne pas écrire  $\alpha$  quand il vaut zéro.

# Introduction

## Introduction générale

L'approximation des équations de **Stokes** pour des fluides visqueux incompressibles présente quelques difficultés théoriques et numériques liées, en particulier pour le calcul de la pression, à la compatibilité entre les espaces d'approximation de la pression et de la vitesse.

Plusieurs approches numériques ont été proposées pour résoudre le système algébrique issu de la discrétisation:

- Une première approche consiste à résoudre le système de **Stokes** sous forme couplée et d'une manière directe (Y.C.B). La mise en oeuvre de cette méthode directe nécessite un espace mémoire assez important, en particulier pour les méthodes spectrales;

- Une seconde approche consiste à remplacer l'équation de continuité discrétisée par une équation de Poisson sur la pression (C), (T), (G.P), (K,M), (O.I.D), etc... Cette approche nécessite de définir des conditions aux limites artificielles pour la pression;

- La troisième approche adoptée dans cette thèse est une généralisation de l'algorithme d'**Uzawa** (A.H.U), (C), (T), (G), (G.R), (C.CH), (M.P.R). On découple le système en un problème itératif sur la pression et un problème de **Helmholtz** sur la vitesse. Cette approche est utilisée par plusieurs auteurs (A.L.V), (Le), (M.M.P.R), (F.R), etc...

Le but de cette thèse est d'analyser les problèmes liés au calcul de la pression et à la rapidité de convergence du système itératif (Ax).

Pour l'approximation des équations de **Stokes**, on utilise une méthode **Spectrale de collocation** (G.O),(C.H.Q.Z).

## Introduction aux résultats de la thèse

Dans le **chapitre I**, nous donnons quelques rappels concernant notre outil de travail, à savoir un solveur du problème de **Helmholtz** pour différents types de conditions aux limites et posé dans un domaine régulier, borné de  $R^d$ ,  $d = 1,2,3$ . On vérifie que ce solveur est précis et possède les propriétés spectrales classiques de convergence et

d'approximation .

Le **chapitre II** contient une première discrétisation ( $P_N, P_N$ ) du problème de **Stokes** en 2-D non périodique, qui consiste à approcher la vitesse et la pression par des polynômes de même degré  $N$  dans chaque direction. L'analyse théorique de cette approximation a déjà été faite dans (B.M.M1), on se contente donc de rappeler les principaux résultats de convergence et d'approximation. On présente l'algorithme utilisé pour résoudre le système algébrique issu de la discrétisation, et on montre ensuite que l'opérateur discrétisé sur la pression possède un nombre de conditionnement en  $O(N^2)$  et a 8 valeurs propres nulles dont les vecteurs propres sont des modes parasites (B.M.M1) pour la pression. La présence de ces derniers nous empêche de calculer correctement la pression mais le champ de vitesse obtenu est exact et solénoïdal. La conclusion de ce chapitre est que le choix fait pour les espaces d'approximation nous permet d'approcher le problème de **Stokes** à la précision spectrale. On note aussi qu'on peut calculer correctement la pression par une technique de filtrage décrite dans [Me]

Dans le **chapitre III** on s'intéresse au cas tridimensionnel avec une direction périodique et deux non périodiques, (problème dit 2.5 –  $D$ ). Chaque mode de Fourier fournit un nouveau problème de **Stokes** 2 –  $D$ , traité en suivant la même démarche que dans le chapitre précédent. On montre que pour les premiers modes de Fourier, la convergence du système itératif est extrêmement lente conduisant à une approximation de fait insuffisante. Ce résultat nous amène, après une étude numérique de l'opérateur discret sur la pression, à envisager un autre choix pour les espaces d'approximation.

Dans le **chapitre IV**, on présente une autre méthode ( $P_N, P_{N-2}$ ) **pseudo spectrale de collocation** qui consiste d'abord à choisir pour la pression, comme dans (M.P.R), un espace d'approximation polynômiale de degré réduit de deux unités par rapport à celui de la vitesse et, ensuite, de discrétiser une formulation variationnelle du problème de **Stokes** en utilisant une seule grille.

Cette méthode est analysée pour le cas des conditions aux limites périodiques dans une direction et non périodiques dans l'autre (problème dit 1.5 –  $D$ ). On montre que cette méthode :

- élimine les modes parasites et calcule donc correctement la pression;
- améliore le nombre de conditionnement de l'opérateur discrétisé sur la pression qui devient asymptotiquement indépendant des fréquences de coupures dans les deux directions;
- présente une convergence uniforme par rapport aux modes de Fourier.

On généralise dans le **chapitre V** la méthode présentée dans le **chapitre IV** aux cas des conditions aux limites suivantes

- problème non périodique sur un domaine bidimensionnel carré (problème 2 –  $D$ );
- problème périodique dans une direction et non périodique dans les deux autres sur un domaine tridimensionnel cubique (problème 2.5 –  $D$ ).

Dans chacun de ces cas, on montre ici que l'on peut:

- éliminer les modes parasites et donc calculer correctement la pression;
- améliorer le nombre de conditionnement de l'opérateur discretisé sur la pression;
- résoudre le problème de convergence et d'approximation pour les premiers modes de Fourier.

Enfin, dans le chapitre VI, on applique chacune de ces méthodes au cas des équations de Stokes pour des écoulements axisymétriques confinés en géométrie cylindrique annulaire; on présente dans le cas  $(P_N, P_N)$  une étude théorique du problème approché et on donne des résultats d'approximation et de convergence.

# Chapitre 1

## Mise en oeuvre d'un solveur pour le problème de Helmholtz

### 1.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous allons présenter la mise en oeuvre d'un solveur pour le problème de **Helmholtz** [H.L.A.D] . Pour l'approximation on utilise la méthode spectrale de **collocation** [G.O]. L'inconnue du problème étant  $U$ , on cherche à connaître la valeur de  $U$  en certains points de collocation [C.H.Q.Z]. L'ensemble de ces valeurs est appelé **espace physique**. Avant de présenter l'algorithme de résolution et les résultats numériques, nous allons rappeler quelques résultats d'analyse, déjà démontrés par plusieurs auteurs [C.Q], [B.M.3], [Sj].

### 1.2 Analyse du problème de Helmholtz

On s'intéresse aux équations de **Helmholtz** dans un parallélépipède rectangle de  $R^d$  ( $d$  entier  $\geq 1$ ) . Par une homothétie dans chaque direction on peut toujours se ramener au domaine  $\Omega = \Lambda^d$  avec  $\Lambda = ]-1, +1[$  .

Le problème à résoudre s'écrit:

trouver  $U$  vérifiant

$$-\Delta U + \lambda U = F \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad (I-1)$$

$$U = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma; \quad (I-2)$$

où  $\lambda$  est une constante positive qu'on supposera, pour simplifier, égale à zéro.

### 1.2.1 Problème continu et formulation variationnelle

On pose  $X = H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\| \cdot \|_X = \| \cdot \|_{1,\Omega}$ , et on définit la forme bilinéaire  $\mathcal{A}$  par:

$$\forall U \in X, \forall V \in X, \quad \mathcal{A}(U, V) = (\nabla U, \nabla V); \quad (I-3)$$

alors pour toute distribution  $F$  donnée dans  $X'$ , dual de  $X$ , la formulation variationnelle de (I-1)-(I-2) s'écrit

$$\forall V \in X, \quad \mathcal{A}(U, V) = \langle F, V \rangle. \quad (I-4)$$

Propriétés de  $\mathcal{A}$  : On rappelle que la forme  $\mathcal{A}$  vérifie:

1) la propriété de continuité

$$\forall U \in X, \forall V \in X, \quad \mathcal{A}(U, V) \leq \|U\|_X \|V\|_X; \quad (I-5)$$

2) la propriété d'ellipticité

$$\forall U \in X, \quad \mathcal{A}(U, U) = \|\nabla U\|_{0,\Omega}^2; \quad (I-6)$$

et par l'inégalité de Poincaré-Friedrichs

$$\forall U \in X, \quad \mathcal{A}(U, U) \geq \beta \|U\|_X^2. \quad (I-7)$$

Conclusion:

En utilisant le théorème de Lax-Milgram on montre que le problème (I-4) et donc (I-1)-(I-2) admet une solution unique dans  $H_0^1(\Omega)$ .

## 1.3 Approximation par méthode spectrale de Galerkin

La formulation variationnelle (I-3) permet d'envisager un premier type d'approximation :

pour  $F$  donné dans  $X'$ , trouver  $U_N$  dans  $X_N \cap P_N(\Omega)$  tel que

$$\forall V_N \in X_N, \mathcal{A}(U_N, V_N) = \langle F, V_N \rangle; \quad (I-8)$$

où  $\mathcal{A}$  est la forme donnée par (I-3).

$X_N$  tant un sous-espace de  $X$ , le problème (I-7) admet une solution unique  $U_N$  dans  $X_N$ .

Afin d'estimer l'erreur  $\|U - U_N\|_X$  nous allons rappeler le lemme suivant [Ma]

Lemme (I-1) :

$$\forall U \in H^s(\Omega) \cap X, \quad \forall s \geq 0$$

$$\inf_{V \in X} \|U - V\|_X \leq CN^{1-s} \|U\|_{s,\Omega}. \quad (I-9)$$

On déduit de ce lemme et des propriétés de  $\mathcal{A}$  le théorème suivant

Théorème (I-1) :

si  $U$  solution de (I-3) appartient  $H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 1$  alors on a :

$$\|U - U_N\|_X \leq C.N^{1-s} \|U\|_{s,\Omega} \quad (I-10)$$

## 1.4 Approximation spectrale de collocation

l'approximation par méthode spectrale de collocation du problème (I-1)-(I-2) consiste à : pour  $F$  donné dans  $C^0(\Omega)$ , à trouver  $U_N$  dans  $X_N$  tel que

$$-\Delta U_N(\bar{x}) = F(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (I-11)$$

$$U_N(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Gamma. \quad (I-12)$$

Remarque (I-1) : on vérifie immédiatement que ce problème comporte autant d'équations que d'inconnues, à savoir  $(N+1)^d$ .

Pour la suite de notre analyse nous allons avoir besoin des inégalités suivantes [C.Q]

Lemme (I-2) :

$$\begin{aligned} \forall U \in P_N(\Omega), \forall V \in P_N(\Omega) \\ (U, U)_N \leq 3^d \|U\|_{0,\Omega} \|V\|_{0,\Omega}; \end{aligned} \quad (I-13)$$

et

$$\begin{aligned} \forall V \in P_N(\Omega) \\ (V, V)_N \geq \|V\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (I-14)$$

On introduit maintenant les formes  $\mathcal{A}_N$  définies par:

$$\begin{aligned} \forall U \in C^2(\bar{\Omega}), \quad \forall V \in C^0(\bar{\Omega}) \\ \mathcal{A}_N(U_N, V_N) = -(\Delta U_N, V_N)_N. \end{aligned} \quad (I-15)$$

Les formes  $\mathcal{A}_N$  ont les propriétés suivantes:

Lemme (I-3) :

1) Continuité uniforme des  $\mathcal{A}_N$  :

il existe une constante  $\alpha$  indépendante de  $N$  telle que

$$\begin{aligned} \forall U_N \in X_N, \quad \forall V_N \in X_N \\ \mathcal{A}_N(U_N, V_N) \leq \alpha \|U_N\|_X \|V_N\|_X. \end{aligned} \quad (I - 16)$$

## 2) Ellipticité uniforme des $\mathcal{A}_N$ :

il existe une constante  $\beta$  indépendante de  $N$  telle que

$$\forall U_N \in X_N, \mathcal{A}_N(U_N, U_N) \geq \beta \|U_N\|_X^2. \quad (I - 17)$$

### Démonstration :

Pour commencer nous allons montrer que

$$\forall U_N \in X_N, \forall V_N \in X_N \quad (I - 18)$$

$$\mathcal{A}_N(U_N, V_N) = (\nabla U_N, \nabla V_N)_N.$$

Pour simplifier la rédaction de la démonstration nous allons supposer que  $d = 2$ .

Soit  $U_N \in X_N$  et  $V_N \in X_N$ , alors

$$\mathcal{A}_N(U_N, V_N) = - \sum_{i=1}^N \sum_{x \in \Xi_N} \frac{\partial^2 U_N(x)}{\partial^2 X_i} V_N(X) \rho_X.$$

En utilisant l'exactitude de l'intégration numérique de la formule de Gauss-Lobatto sur  $P_{2N-1}(\Omega)$  on écrit que

$$\mathcal{A}_N(U_N, V_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{X \in \Xi_N} \frac{\partial U_N(x)}{\partial X_i} \frac{\partial V_N(x)}{\partial X_i} \rho_X.$$

Du lemme (I - 1), on déduit les résultats du lemme (I - 2).

Pour l'estimation de l'erreur  $\|U - U_N\|_X$ , nous allons avoir besoin du résultat suivant, dont la démonstration se trouve dans [C.Q] et [Ma2].

### Lemme (I-4)

$$\begin{aligned} \forall U \in H^s(\Omega), \forall V \in X_N \\ (U, V) - (U, V)_N \leq C.N^s. \|U\|_{s,\Omega} \|V\|_{1,\Omega}. \end{aligned} \quad (I - 19)$$

On peut alors démontrer le résultat suivant:

### Théorème (I-2)

pour tout  $F$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$ , le problème spectral de collocation (I-10) admet une solution unique dans  $X_N$ . De plus si la solution  $U$  du problème (I-3) appartient à

$H^s(\Omega)$  et  $F$  appartient à  $H^\sigma(\Omega)$  alors il existe une constante,  $C$ , indépendante de  $N$  telle que

$$\|U - U_N\|_{1,\Omega} \leq C\{N^{1-s}\|U\|_{s,\Omega} + N^{-\sigma}\|F\|_{\sigma,\Omega}\}. \quad (I - 20)$$

Démonstration :

Pour le besoin de la démonstration on introduit l'opérateur de projection  $\mathcal{R}_N$  de  $X$  sur  $X_N$  défini par

$$\forall V_N \in X_N, \quad \mathcal{A}(\mathcal{R}_N U - U, V_N) = 0$$

On alors :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_N U - U_N, V_N) = \mathcal{A}_N(\mathcal{R}_N U_N, V_N) - \mathcal{A}(U_N, V_N) + (F, V_N) - (F, V_N)_N.$$

En appliquant le lemme (I - 1) pour  $(\nabla U_N, \nabla V_N)$  et l'ellipticité de  $\mathcal{A}$  on obtient le théorème.

## 1.5 Résolution numérique du problème de Helmholtz

Bien que la présentation théorique ait été faite en utilisant les polynômes de Legendre et en admettant que la condition aux limites est du type Dirichlet homogène, nous allons donner des résultats numériques pour des conditions aux limites variées et en utilisant aussi les polynômes de Chebychev.

### 1.5.1 Cas mono-dimensionnel

On se donne le problème suivant : étant donnés  $F$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$  et une constante positive  $\lambda$ , on cherche  $U_N$  dans  $P_N(\Omega)$ , vérifiant

$$-U_N''(\xi_i^\alpha) + \lambda U_N(\xi_i^\alpha) = F(\xi_i^\alpha); \quad (I - 21)$$

$$a_- U_N(\xi_0) + b_- U_N'(\xi_0) = g_-; \quad (I - 22)$$

$$a_+ U_N(\xi_N) + b_+ U_N'(\xi_N) = g_+; \quad (I - 23)$$

On appelle  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^2$  les matrices de dérivation première et seconde calculées dans l'espace physique [Annexe 1].

Pour la résolution du système algébrique issu de la discrétisation on introduit les notations suivantes:

$$\bar{U} = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N) \quad \text{avec} \quad u_i = U_N(\xi_i^\alpha); \quad (I - 24)$$

$$\tilde{U} = (u_1, \dots, u_{N-1}) \quad \text{avec} \quad u_i = U_N(\xi_i^\alpha); \quad (I - 25)$$

et

$$\bar{F} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}, f_N) \quad \text{avec} \quad f_i = F_N(\xi_i^\alpha); \quad (I - 26)$$

Le problème (I-21):(I-23) s'écrit alors : étant donné  $\bar{F}$  on cherche  $\bar{U}$  tel que

$$-\sum_{j=0}^N \mathcal{D}_{ij}^2 u_j + \lambda u_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad (I-27)$$

$$a_- u_0 + b_- \sum_{j=0}^N \mathcal{D}_{0j} u_j = g_-; \quad (I-28)$$

$$a_+ u_N + b_+ \sum_{j=0}^N \mathcal{D}_{Nj} u_j = g_+. \quad (I-29)$$

On s'assure facilement que le système (I-27):(I-29) a autant d'équations que d'inconnues, à savoir  $(N+1)$ .

Résolution du système (I-23):

Des égalités (I-28) et (I-29), on déduit que

$$u_0 = \sum_{i=1}^{N-1} A_i u_i + A; \quad (I-30)$$

$$u_N = \sum_{i=1}^{N-1} B_i u_i + B; \quad (I-31)$$

avec

$$A_i = [-b_-(a_+ + b_+ \mathcal{D}_{NN}) \mathcal{D}_{0i} + b_+ b_- \mathcal{D}_{0N} \mathcal{D}_{Ni}] / \text{Det};$$

$$B_i = [-b_+(a_- + b_- \mathcal{D}_{0N}) \mathcal{D}_{Ni} + b_- b_+ \mathcal{D}_{N0} \mathcal{D}_{0i}] / \text{Det};$$

$$A = [-b_- \mathcal{D}_{0N} g_+ + (a_+ + b_+ \mathcal{D}_{NN}) g_+] / \text{Det};$$

et

$$B = [+b_+ \mathcal{D}_{N0} g_- - (a_- + b_- \mathcal{D}_{00}) g_+] / \text{Det};$$

avec

$$\text{Det} = -b_- b_+ \mathcal{D}_{N0} \mathcal{D}_{0N} + (a_- + b_- \mathcal{D}_{00})(a_+ + b_+ \mathcal{D}_{NN}).$$

En remplaçant  $u_0$  et  $u_N$  par leur valeurs respectives dans (I-27), on obtient le système suivant:

$$-\sum_{j=1}^{N-1} \tilde{\mathcal{D}}_{ij}^2 u_j + \lambda u_i = \tilde{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1; \quad (I-32)$$

$\tilde{\mathcal{D}}^2$  et  $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{N-1})$  étant le résultat de la substitution de  $u_0$  et  $u_N$  par les expressions données dans (I-27), (I-28) et (I-29).

On peut écrire maintenant le système (I-27):(I-29) sous la forme:

$$-\tilde{\mathcal{D}}^2 \tilde{U} = \tilde{F}; \quad (I-33)$$

$$u_0 = \sum_{i=1}^{N-1} A_i u_i + A; \quad (I-34)$$

$$u_N = \sum_{i=1}^{N-1} B_i u_i + B. \quad (I-35)$$

Algorithme de résolution :

- On diagonalise  $\tilde{\mathcal{D}}^2$
- On écrit  $\tilde{F}$  dans la base des vecteurs propres de  $\tilde{\mathcal{D}}^2$ , on note  $\tilde{F}_p = (f_{p1}, \dots, f_{pN-1})$  le vecteur obtenu.
- On résoud pour  $1 \leq i \leq N-1$   $u_{p_i} = -\frac{f_{p_i}}{\mu_i - \lambda}$ ,  $\mu_i$  étant la  $i^{eme}$  valeur propre de  $\tilde{\mathcal{D}}^2$
- On calcule  $\tilde{U}$  à partir de  $u_{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ , par changement de base.

Résultats numériques :

-Figure (I-1) : on présente l'erreur d'approximation en fonction de la fréquence de coupure. La solution exacte est  $U(x) = \cos(\pi x)$ , les points de collocation sont les noeuds de la formule de d'integration numérique de Gauss-Lobatto Legendre pour la courbe (a) et Chebychev pour la courbe (b). Le problème (I-23) est posé avec  $a_+ = a_- = 1$  et  $b_+ = b_- = 0$ . L'erreur est mesurée en calculant

$$\log \sup_{x \in \Xi} |U(x) - U_N(x)|.$$

On constate que, la convergence est exponentielle, ce qui est en accord avec l'étude théorique car la solution est analytique. On remarque aussi que la convergence est optimale en  $N = 20$  et que pour des fréquences de coupure plus grandes les erreurs d'arrondis sont dominantes.

-Figure (I-2) : on reprend les mêmes mesures pour la même solution que dans la figure (I-1), mais avec  $a_+ = a_- = 0$  et  $b_+ = b_- = 1$ .

### 1.5.2 Cas bidimensionnel

Le problème à résoudre est: étant donné  $F$  dans  $C^0(\bar{\Omega})$ , on cherche  $U_N$  dans  $P_N(\Omega)$  vérifiant

$$-\Delta U_N(\bar{x}) + \lambda U_N(\bar{x}) = F(\bar{x}); \quad \bar{x} \in \Xi_N^\alpha \cap \Omega; \quad (I-36)$$

$$aU_N(\bar{x}) + b\frac{\partial U_N(\bar{x})}{\partial \bar{n}} = g(\bar{x}); \quad \bar{x} \in \Xi_N^\alpha \cap \partial\Omega. \quad (I-37)$$

On reprend l'idée, présentée par [H.Z] et généralisée dans [H], de diagonaliser successivement par rapport à chaque variable. Le problème (I-29) se transforme alors en (N-1) problèmes de **Helmholtz** à une seule variable. Cette même technique nous permet de résoudre le problème de **Helmholtz** dans des domaines de dimension supérieure.

#### Résultats numériques :

-Figure (I-3) : on présente l'erreur d'approximation en fonction de la fréquence de coupure. La solution exacte est  $U(x) = \cos(4\pi x) \cos(4\pi y)$ , les points de collocation sont les noeuds de la formule de d'intégration numérique de Gauss-Lobatto Legendre pour la courbe (a) et Chebychev pour la courbe (b). Le problème (I-23) est posé avec  $a_+ = a_- = 1$  et  $b_+ = b_- = 0$ . L'erreur est mesurée en calculant

$$\log \sup_{x \in \Xi} |U(x) - U_N(x)|.$$

On constate que, la convergence est exponentielle, ce qui est en accord avec l'étude théorique car la solution est analytique. On remarque aussi que la convergence est optimale en  $N = 22$  et que pour des fréquences de coupure plus grandes les erreurs d'arrondis sont dominantes.

-Figure (I-4) : on reprend les mêmes mesures pour la même solution que dans la figure (I-1), mais avec  $a_+ = a_- = 0$  et  $b_+ = b_- = 1$ .

## 1.6 Valeurs propres de l'opérateur dérivée seconde

La résolution numérique du problème de **Helmholtz** dans n'importe quelle dimension utilise essentiellement le calcul des valeurs propres de l'opérateur de dérivée seconde. Nous allons donc présenter quelques résultats numériques concernant ces valeurs propres.

#### Loi asymptotique :

Si  $\mu_{max}$  désigne la plus grande valeur propre de  $\tilde{\mathcal{D}}^2$ , alors on vérifie que pour  $N \geq 64$   $\mu_{max}/N^4$  est constante. Plus précisément on a le tableau suivant [C.H.Q.Z]

| Polynomes | $\frac{-\lambda_{max}}{N^4}$<br>Dirichlet | $\frac{-\lambda_{max}}{N^4}$<br>Neumann |
|-----------|-------------------------------------------|-----------------------------------------|
| Chebyshev | 47. E - 3                                 | 14. E - 3                               |
| Legendre  | 26. E - 3                                 | 64. E - 3                               |

Tableau ( I - I )

Comportement des valeurs propres (  $\mu_k$  ) :

La figures (I-5) (resp (I-6)) représentent les valeurs de  $\sqrt{-\mu_k}$  rangées par ordre croissant en fonction de k pour des fréquences de coupure égales 20, 30 et 50 et pour différentes conditions au limites en utilisant les points de Gauss-Lobatto Legendre (resp Chebyshev). On constate que dans tous les cas les petites valeurs propres sont du type Fourier, c'est-à-dire que si  $\mu_k$  désigne la  $k^{eme}$  valeur propre alors  $\mu_k/N$  est borné.

Dans [V1] H.Vandeven présente une étude théorique du comportement de ces valeurs propres.

## 1.7 Conclusion

Nous avons au cours de ce chapitre présenté un solveur de **Helmholtz**. Nous allons dans les chapitres suivants l'utiliser pour l'analyse numérique du calcul de la pression dans le problème de **Stokes** et pour l'approximation d'un problème de convection naturelle dans un milieu poreux [M.M.A.L].

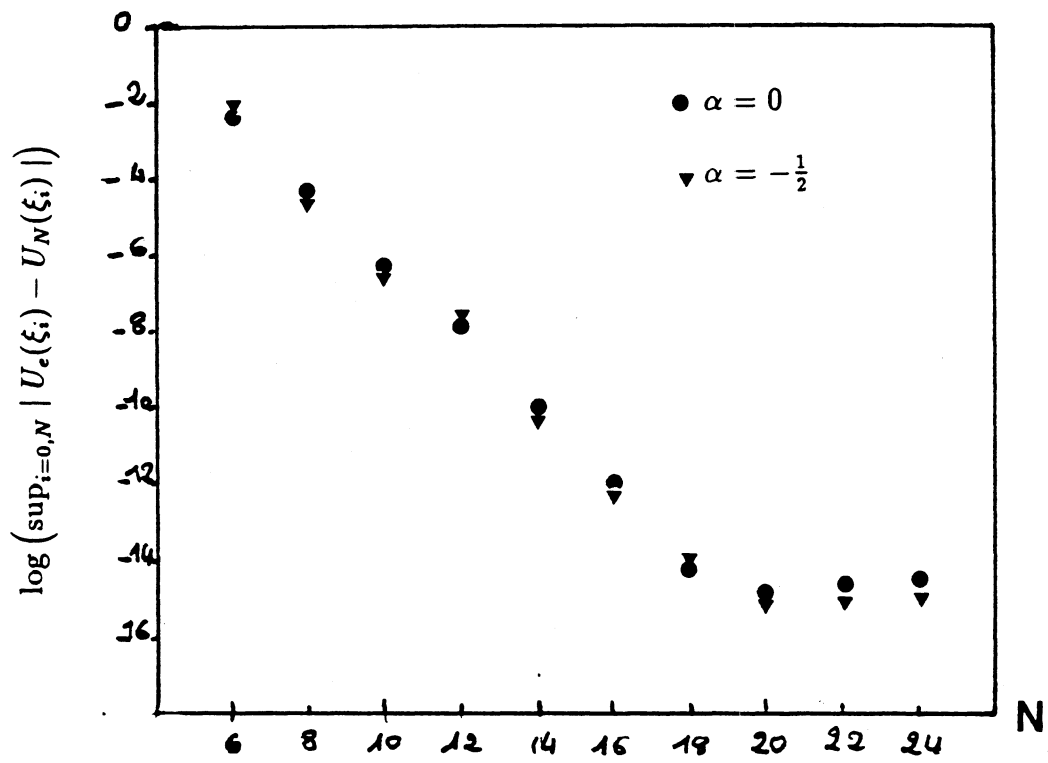


figure (I-1)

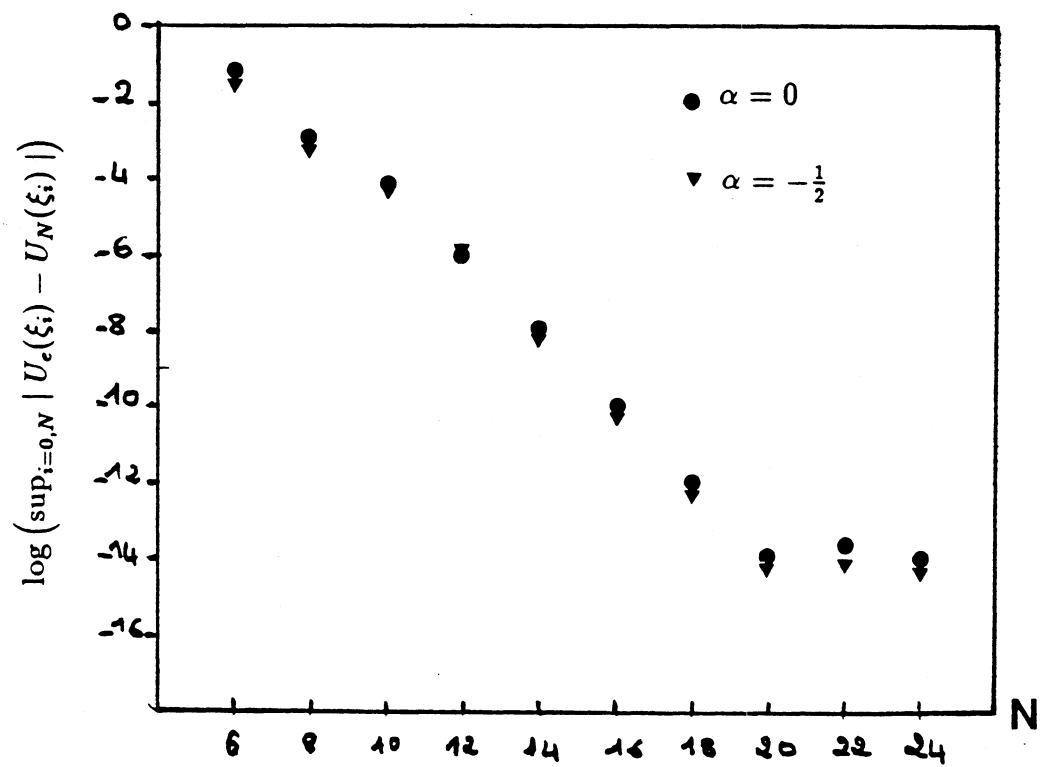


figure (I-2)

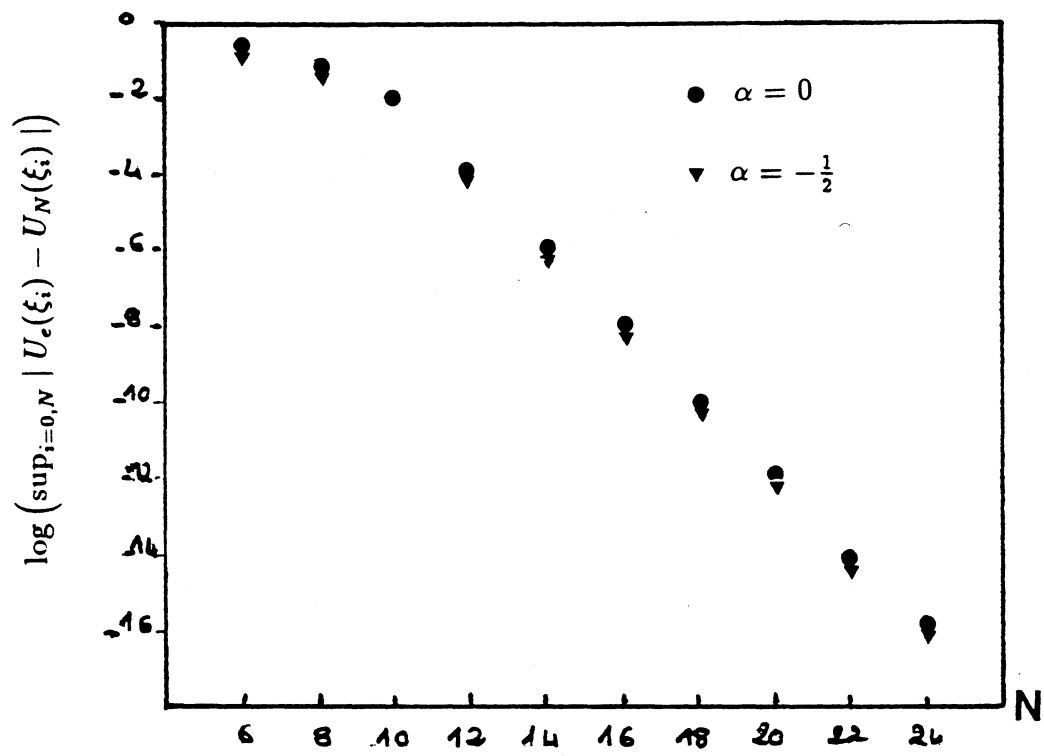


figure (I-3)

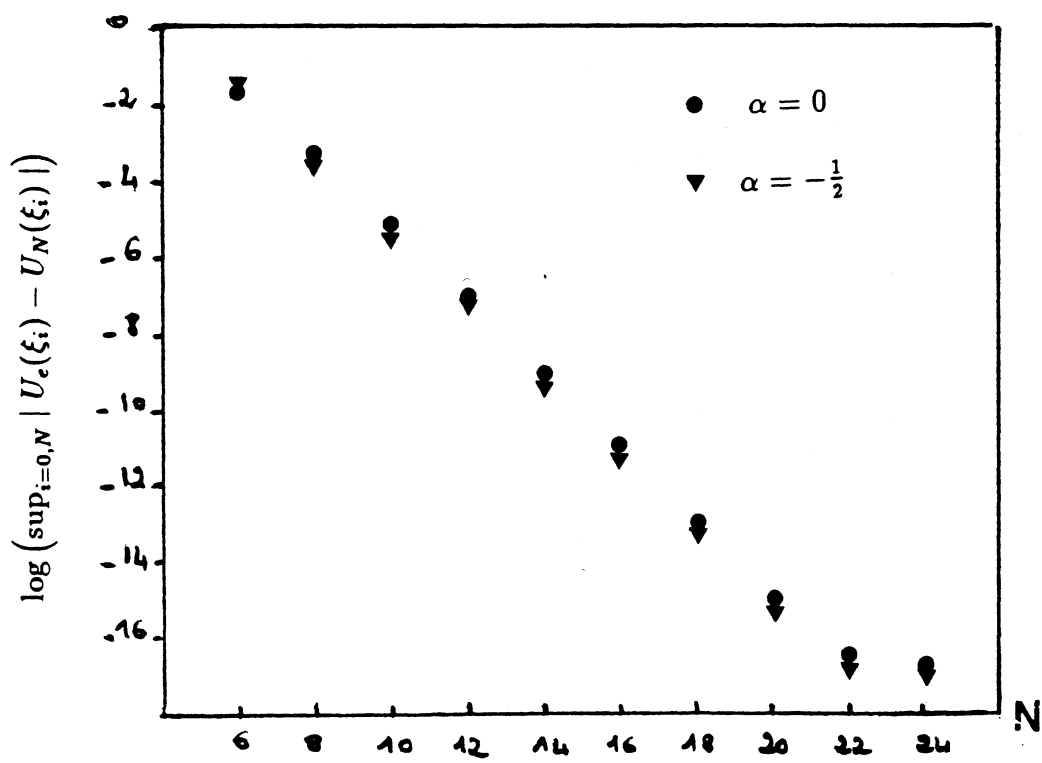
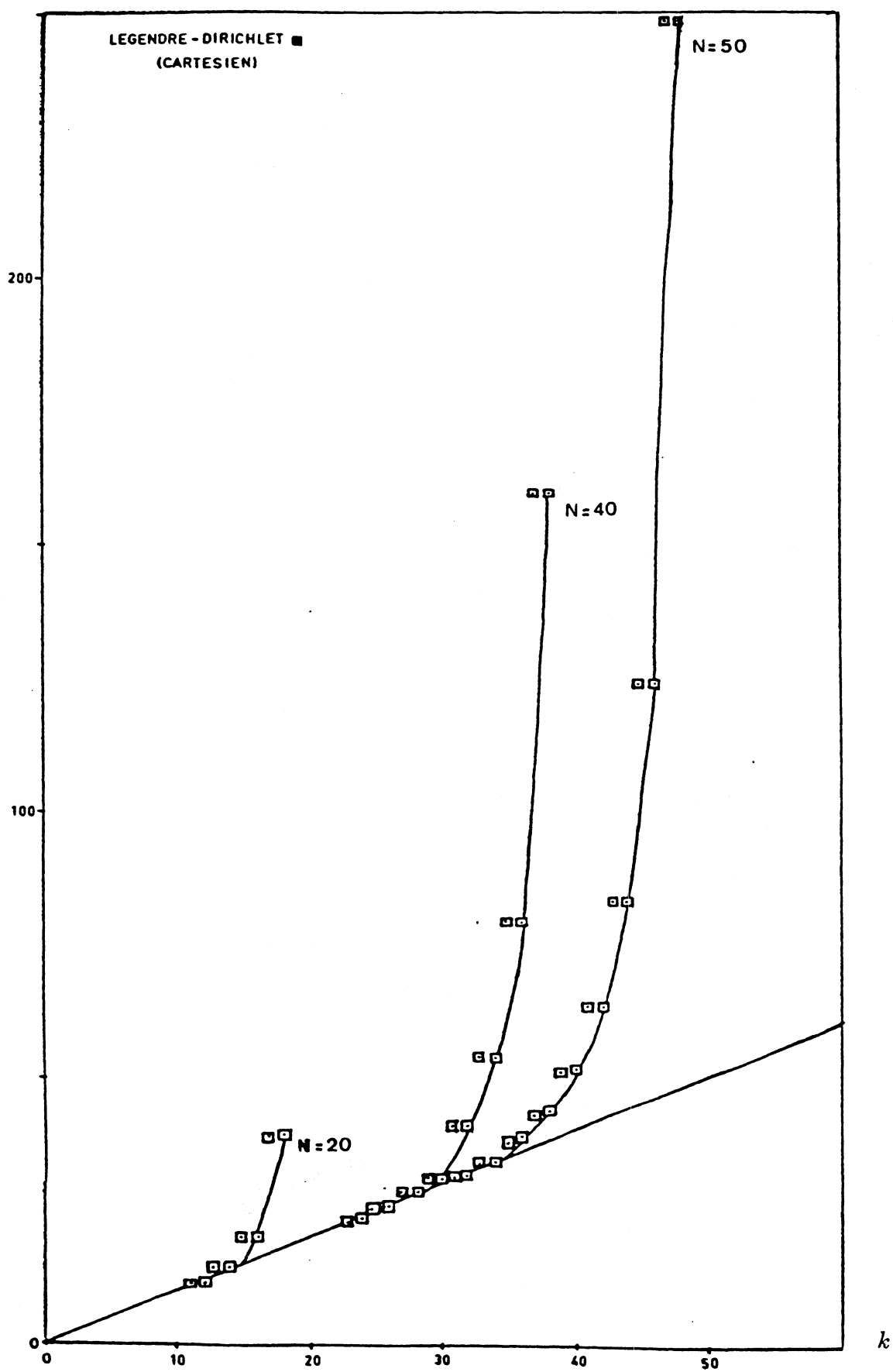


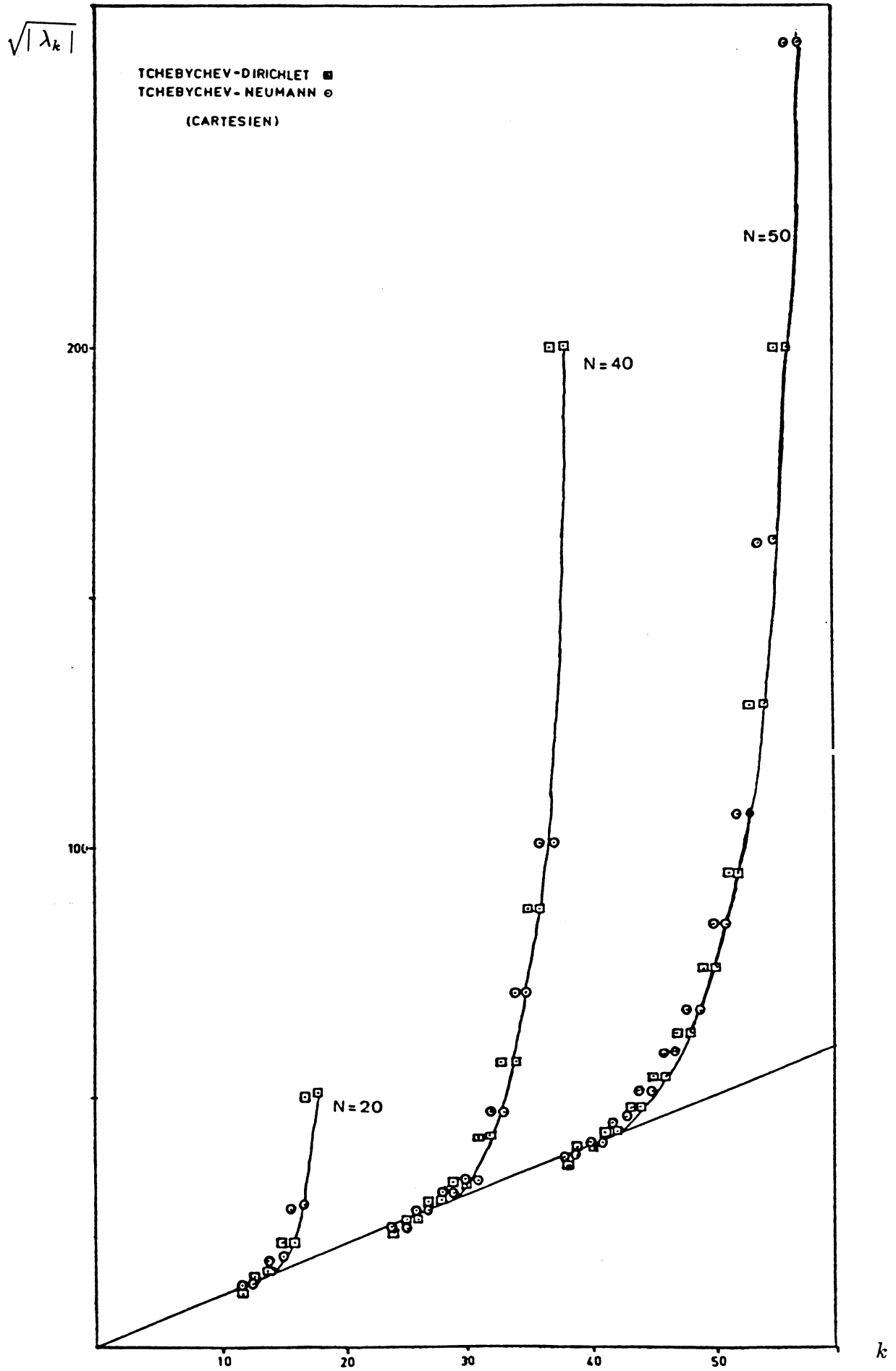
figure (I-4)

Spectre de  $\mathcal{D}^2$  pour  $N = 20, 40, 50$

$\sqrt{|\lambda_k|}$



figure(I - 5)



figure(I - 6)

## Chapitre 2

# Résolution numérique $(P_N, P_N)$ du problème de Stokes

### 2.1 Introduction

Au cours de ce chapitre, nous allons présenter des résultats numériques d'approximation du problème de Stokes stationnaire dans un domaine  $\Omega$  de  $R^2$

$$-\nu \Delta \vec{U} + \vec{\nabla} p = \vec{F} \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad (II-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad (II-2)$$

pour des conditions aux limites soit du type Dirichlet, soit du type Neumann. Dans ce problème,  $\vec{F}$  représente une densité de force et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. Les inconnues sont la vitesse  $\vec{U}$  et la pression  $p$ .

La vitesse et la pression sont approchées par des polynômes de degré égal à  $N$  dans chaque direction, dont on cherchera à calculer les valeurs aux points de collocation de la grille  $\Xi_N^\alpha$ . Par analogie aux algorithmes utilisant des grilles décalées [BM1], [BMM2], [MPR] et [Le], on appellera cette méthode algorithme à grille unique.

Avant de présenter la technique de résolution, nous allons rappeler quelques résultats théoriques d'approximations établis dans [BMM1].

### 2.2 Problème continu

Dans le carré  $\Omega$  on considère le problème (II-1) avec pour simplifier,  $\vec{U}$  nul sur le bord de  $\Omega$ .

Il est bien connu [GR, Chap 1, cor 4.1] que le problème  $(II-1) : (II-2)$  admet

la formulation variationnelle suivante: trouver  $(\vec{U}, p)$  dans  $(H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\forall \vec{V} \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad \nu \int_{\Omega} \nabla \vec{U} \nabla \vec{V} dx + \int_{\Omega} \vec{\nabla} p \vec{V} dx = \langle \vec{F}, \vec{V} \rangle; \quad (II-3)$$

et

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{U} q dx = 0; \quad (II-4)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $(H_0^1(\Omega))^2$  et son dual. De cette formulation on déduit que, pour  $\vec{F}$  dans le dual de  $(H_0^1(\Omega))^2$  le problème (II-3) : (II-4) admet une solution unique  $(\vec{U}, p)$  dans  $(H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$ .

Par la suite on note  $X = (H_0^1(\Omega))^2$  munit de la norme  $\| \cdot \|_X = \| \cdot \|_{1,\Omega}$  et  $M = L_0^2(\Omega)$  munit de la norme  $\| \cdot \|_M = \| \cdot \|_{0,\Omega}$ .

## 2.3 Problème discret

Soit  $N$  un entier  $\geq 3$ , on considère deux espaces  $X_N$  et  $M_N$  tels que  $X_N = (P_N^0(\Omega))^2 \cap X$  et  $M_N \subset P_N(\Omega) \cap M$ ;

pour  $\vec{F} = (f_1, f_2)$  donné dans  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$  le problème approché consiste à trouver un couple  $(\vec{U}_N, p_N)$  dans  $X_N \times M_N$ ,  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$ , tel que

$$-\nu \Delta U_{1N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\bar{x}) = f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (II-5)$$

$$-\nu \Delta U_{2N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (II-6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_N(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Xi_N. \quad (II-7)$$

Afin d'analyser le problème (II-3) : (II-4), nous allons en donner une formulation variationnelle qui lui est équivalente, pour ceci on définit les formes bilinéaires  $\mathcal{A}_N$  et  $b_N$  par:

$$\begin{aligned} \forall \vec{U} \in (C^2(\bar{\Omega}))^2, \quad \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 \\ \mathcal{A}_N(\vec{U}, \vec{V}) = -\nu(\Delta \vec{U}, \vec{V})_N; \end{aligned} \quad (II-8)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \quad \forall q \in C^1(\bar{\Omega}) \\ b_N(\vec{V}, q) = (\vec{V}, \vec{\nabla} q)_N. \end{aligned} \quad (II-9)$$

Notons que l'exactitude de la formule d'intégration numérique de Gauss-Lobatto sur  $P_{2N-1}(\Omega)$  permet d'écrire: pour tout  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$  et  $q_N$  dans  $P_N(\Omega)$

$$b_N(\vec{V}_N, q_N) = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_N, q_N)_N; \quad (II-10)$$

elle entraîne aussi que pour tous  $\vec{U}_N$  et  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = \nu(\nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{V}_N)_N. \quad (II - 11)$$

Suivant la théorie de [Br], une condition de compatibilité entre les espaces d'approximations  $X_N$  et  $M_N$  est qu'il existe une constante  $\beta_N$  telle que

$$\forall q_N \in M_N, \exists \vec{V}_N \# \quad / \quad b_N(\vec{V}_N, q_N) \geq \beta_N \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M; \quad (II - 12)$$

cette condition, appelée condition inf-sup, nous amène à rappeler les définitions suivantes:

**Mode parasite :** On appelle mode parasite pour la pression tout polynôme  $q_N$  de  $P_N(\Omega)$  tel que

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad b_N(\vec{V}_N, q_N) = 0. \quad (II - 13)$$

On note  $Z_N$  le sous-espace vectoriel formé par ces modes parasites et  $Z_N^\perp$  son orthogonal pour le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_N$ .

**Mode faiblement parasite :** Suivant la terminologie de H. Vandeven [V1], on appelle suite de modes faiblement parasites, toutes suite  $(q_N)_N$  de  $P_N(\Omega)$  telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\vec{V}_N \in X_N} \frac{b_N(\vec{V}_N, q_N)}{\|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M}, \quad (II - 14)$$

l'existence d'une telle suite dans  $M_N$  illustre qu'il peut exister une dépendance décroissante en  $N$  de  $\beta_N$ . [BMM1] et [BCM] ont montré que dans le cas  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , l'ensemble des modes parasites est un sous espace vectoriel engendré par :

$$\{J_0^\alpha J_0^\alpha, J_0^\alpha J_N^\alpha, J_N^\alpha J_0^\alpha, J_N^\alpha J_N^\alpha\} \cup \{(J_N^\alpha(x))', (J_N^\alpha(y))', x(J_N^\alpha(y))', y(J_N^\alpha(x))'\}.$$

La formulation variationnelle s'écrit alors: trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  tel que

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + b_N(\vec{V}_N, p_N) = (\vec{f}_N, \vec{V}_N)_N; \quad (II - 15)$$

$$\forall q_N \in M_N \quad b_N(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (II - 16)$$

On a le résultat suivant [BMM1]

Proposition (II-1) Pour tout  $M_N$  vérifiant les deux hypothèses :

1) l'opérateur de projection  $\mathcal{R}_N$  de  $M_N$  sur  $Z_N^\perp$  pour le produit scalaire discret  $(\cdot, \cdot)_N$  vérifie

$$\forall q_N \in M_N, \quad \|q_N\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathcal{R}_N q_N\|_{0,\Omega} \quad (II - 17)$$

2) il existe un réel  $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$  tel que

$$\left\{ q_N \in P_{[\lambda N]}; \int q_N(x) dx = 0 \right\} \subset M_N \quad (II - 18)$$

où  $[\lambda N]$  désigne la partie entière de  $\lambda N$ , alors les problèmes (II – 15) : (II – 16) et (II – 5) : (II – 7) sont équivalents et on a [BM3], [BMM1] et [Ma2]

**Théorème (II-1)** Pour tout  $\vec{f}$  dans  $(C^0(\Omega))^2$ , le problème spectral de collocation (II – 5) : (II – 7) admet une solution unique dans  $X_N \times M_N$ . De plus si la solution  $(\vec{U}, p)$  du problème (II – 1) : (II – 2) appartient à l'espace  $(H^l(\Omega))^2 \times (H^{l-1}(\Omega))$ ,  $l \geq 1$  et si  $\vec{f}$  appartient à  $(H^\sigma(\Omega))^2$  pour  $\sigma > 1$  alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $N$  telle que

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq CN^{1-l}\|\vec{U}\|_{l,\Omega} + N^{-\sigma}\|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}; \quad (II - 19)$$

et

$$\|p - p_N\|_M \leq CN^{2-l}\|\vec{U}\|_{l,\Omega} + N^{1-\sigma}\|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}. \quad (II - 20)$$

## 2.4 Algorithme de résolution

Pour la résolution numérique du problème de Stokes nous allons considérer des conditions aux limites plus générales et utiliser l'approximation par des polynômes de Chebychev ( $\alpha = -0.5$ ) et des polynômes de Legendre ( $\alpha = 0$ ).

Le problème de Stokes qu'on va résoudre consiste à chercher  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $(P_N(\Omega))^2$  et  $p_N$  dans  $P_N(\Omega)$  vérifiant

$$H_1 U_{1N}(\bar{x}^\alpha) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\bar{x}^\alpha) = f_1(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Omega; \quad (II - 21)$$

$$H_2 U_{2N}(\bar{x}^\alpha) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\bar{x}^\alpha) = f_2(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Omega; \quad (II - 22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_N(\bar{x}^\alpha) = D(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha; \quad (II - 23)$$

$$a_i U_{iN}(\bar{x}^\alpha) + b_i \frac{\partial p_N}{\partial n} = l_i(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \partial\Omega \quad \text{et} \quad i = 1, 2. \quad (II - 24)$$

Notons que entre  $D$  et  $\vec{l} = (l_1, l_2)$  existent des conditions de compatibilité qu'on supposera vérifiées et que les coefficients  $a_1, a_2, b_1$  et  $b_2$  sont tels que le problème (II – 21) : (II – 24) soit elliptique. Notons enfin que dans ce système  $H_1$  peut être différent de  $H_2$ .

### 2.4.1 Conditions de compatibilité

On sait que [Te] pour le problème avec des conditions de Dirichlet, on a cinq conditions de compatibilité qui sont:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{V} dx \quad (II - 25)$$

plus les quatre qui lient la divergence aux sommets de  $\Omega$  aux conditions aux limites sur le bord. La discrétisation de (II – 25) conduit à trois autres conditions aux limites. Le problème (II – 21) : (II – 24) a donc huit conditions de compatibilité [H] et [AL2].

Dans la suite de cette section on adopte les notations suivantes:

- $U_k = (U_{kN}(\xi_i, \xi_j), 0 \leq i, j \leq N \quad \text{et} \quad k = 1, 2);$
- $\tilde{U}_k = (U_{kN}(\xi_i, \xi_j), 1 \leq i, j \leq N - 1 \quad \text{et} \quad k = 1, 2);$
- $U_{kb} = (U_{kN}(\xi_i, \xi_j), i = 0, N, j = 0, N \quad \text{et} \quad k = 1, 2).$
- $P = (p_N(\xi_i, \xi_j), 0 \leq i, j \leq N);$
- $D = (D(\xi_i, \xi_j), 0 \leq i, j \leq N);$
- $P_{,x} = (\partial p_N / \partial x(\xi_i, \xi_j), 0 \leq i, j \leq N);$
- $P_{,y} = (\partial p_N / \partial y(\xi_i, \xi_j), 0 \leq i, j \leq N);$
- $\tilde{F}_k = (f_k(\xi_i, \xi_j), 1 \leq i, j \leq N - 1 \quad \text{et} \quad k = 1, 2);$

de même on note par  $D_x^\alpha$  (resp.  $D_y^\alpha$ ) l'opérateur de dérivation par rapport à  $x$  (resp. à  $y$ ), on a donc:

$$P_{,x} = D_x^\alpha P \quad \text{et} \quad P_{,y} = D_y^\alpha P.$$

Enfin on désignera par  $\mathcal{H}_\Omega$  l'opérateur défini par:

$$\mathcal{H}_\Omega \tilde{U}_k = \tilde{F}_k, \quad k = 1, 2 \tag{II – 26};$$

qui est la discrétisation de

$$H = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda Id \tag{II – 27};$$

qui tient compte des conditions aux limites.

On a donc

$$\tilde{U}_k = \mathcal{H}_\Omega^{-1} \tilde{F}_k \quad k = 1, 2. \tag{II – 28}$$

Remarque (II – 1):  $U_{kb}$  se calcule à partir de  $\tilde{U}_k$  et de la discrétisation des conditions aux limites, l'ensemble de cette procédure sera noté de façon globale selon

$$U = \mathcal{H}^{-1}(F). \tag{II – 29}$$

Avec ces notations et celles des autres sections on a:

$$U_1 = \mathcal{H}_1^{-1} \tilde{F}_1 - \mathcal{H}_{1,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,x}; \quad (II - 30)$$

$$U_2 = \mathcal{H}_2^{-1} \tilde{F}_2 - \mathcal{H}_{2,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,y}; \quad (II - 31)$$

ce qui nous permet d'écrire, en utilisant (II - 23),

$$D_x^\alpha \mathcal{H}_{1,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,x} + D_y^\alpha \mathcal{H}_{2,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,y} = D_x^\alpha \mathcal{H}_1^{-1} \tilde{F}_1 + D_y^\alpha \mathcal{H}_2^{-1} \tilde{F}_2. \quad (II - 32)$$

Le problème (II - 21) : (II - 24) s'écrit : On cherche  $p_N$  dans  $P_N(\Omega)$  vérifiant :

$$\mathcal{A}^\alpha P = F; \quad (II - 33)$$

avec

$$\mathcal{A}^\alpha P = D_x^\alpha \mathcal{H}_{1,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,x} + D_y^\alpha \mathcal{H}_{2,\Omega}^{-1} \tilde{P}_{,y}; \quad (II - 34)$$

et

$$F = D_x^\alpha \mathcal{H}_1^{-1} \tilde{F}_1 + D_y^\alpha \mathcal{H}_2^{-1} \tilde{F}_2; \quad (II - 35)$$

ensuite on cherche  $\vec{U}_N \in (P_N(\Omega))^2$  vérifiant (II - 30) : (II : 31).

## 2.4.2 Propriétés de l'opérateur $\mathcal{A}^\alpha$

L'opérateur  $\mathcal{A}^\alpha$  est d'ordre zéro, on n'a donc pas besoin des conditions aux limites sur la pression, ce qui correspond bien à la façon dont le problème continu est posé.

Le système algébrique issu de la discrétisation a autant d'équations que de conditions sur la divergence, c'est-à-dire  $(N + 1)^2$ . La représentation matricielle de  $\mathcal{A}^\alpha$  est pleine, couple toutes les directions de l'espace et a une taille égale à  $(N + 1)^{2d}$ .

Le système possède un noyau de dimension 8 et sa réduction à un système invertible est assez compliquée, il s'agit d'éliminer 8 lignes et 8 colonnes en 2-D et  $(12N + 4)$  en 3-D correspondantes aux modes parasites. Notons que dans (B.M.M1) on donne un moyen pour éliminer ces équations redondantes. En effet si on note  $S$  l'ensemble des sommets de  $\Omega$  et  $\tilde{S}$  un ensemble contenu dans  $\Xi_N \setminus S$  de 4 points vérifiants:

$$\det(\varphi_i(x_j)) \neq 0.$$

pour  $\varphi_i$  parcourant  $\Phi = \{1, L_N(x), L_N(y), L_N(x)L_N(y)\}$  et  $x_j$  parcourant  $\tilde{S}$ , alors on a :

**Proposition II-2 :** Le problème (II - 5) : (II - 7) est équivalent au problème suivant :

trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  tel que

$$-\nu \Delta \vec{U}_N(\bar{x}) + \vec{\nabla} p_N(\bar{x}) = \vec{f}(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega \quad (II - 36)$$

et

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_N(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Xi_N \setminus S \cup \tilde{S}. \quad (II - 37)$$

$M_N$  étant un sous-espace de  $P_N(\Omega)$  vérifiant :

$$P_N(\Omega) = M_N \oplus Vect \Phi \oplus Vect \{Q_x, x \in S\}.$$

Remarquons qu'un résultat analogue est démontré pour le cas 3-D.

## 2.5 Résultats numériques

Nous allons dans cette partie présenter des résultats d'approximation et de convergence et donner quelques résultats numériques concernant l'opérateur  $\mathcal{A}^\alpha$  portant sur la pression.

Pour résoudre le système algébrique (II - 27) on utilise une méthode itérative (Ax), (voir annexe 2).

### 2.5.1 Convergence et approximation

La figure (II-1) représente l'approximation de la divergence et du gradient de la pression en fonction du nombre d'itération (n), pour des solutions exactes  $\vec{U} = (U_1, U_2)$  et  $p$  polynômiales dans le cas (a) et non polynômiales dans le cas (b). L'approximation utilise les points de Gauss-Lobatto Chebychev

Pour le cas (a) la fréquence de coupure est  $N = 9$  et la solution est

$$U_1(x, y) = (y + 1)^9;$$

$$U_2(x, y) = (x + 1)^9;$$

et

$$p(x, y) = (x + 1)^9 \times (y + 1)^9.$$

Et pour le cas (b) la fréquence de coupure est  $N = 18$  et la solution est

$$U_1(x, y) = \sin(\pi y);$$

$$U_2(x, y) = \cos(\pi x);$$

et

$$p(x, y) = \cos(\pi x) \times \sin(\pi y).$$

On note que pour atteindre la précision spectrale attendue, le nombre d'itérations requis présente une croissance modérée avec le nombre  $(N + 1)^2$  de modes : 30 pour  $10^2$  pour le cas (a) et 44 pour  $19^2$  pour le cas (b).

On note que des résultats identiques sont obtenus si on utilise comme points de collocations les noeuds de Gauss-Lobatto Legendre.

### 2.5.2 Mesure du nombre de conditionnement de $\mathcal{A}^\alpha$

Le nombre d'itérations nécessaire à la convergence de la méthode itérative croît avec le nombre de conditionnement,  $\mathcal{K}^\alpha(N)$ , de  $\mathcal{A}^\alpha$  défini par:

$$\mathcal{K}^\alpha(N) = \left( \frac{\Lambda_{\max}(N)}{\Lambda_{\min}(N)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (II - 38)$$

où

$\Lambda_{\max}(N)$  et  $\Lambda_{\min}(N)$  désignent la plus grande et la plus petite valeur propre de  $\mathcal{A}^\alpha(\mathcal{A}^\alpha)^T$ .

D'autre part dans (MMPR) on montre que ce nombre de conditionnement est lié à la condition inf-sup par :

$$\mathcal{K}^\alpha(N) \times \beta_N^2 = O(1). \quad (II - 39)$$

La plus grande valeur propre étant égale à 1, la relation (II - 39) s'écrit

$$\beta_N = \sqrt{\Lambda_{\min}}. \quad (II - 40)$$

La figure (II-2) représente la dépendance de  $\Lambda_{\min}(N)$  pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , on en déduit que pour les discrétisations Legendre et Chebychev les comportements sont très peu différents et suivent une loi en  $O(N^{-2})$ , ce qui nous donne (figure (II-3)):

$$\mathcal{K}^\alpha(N) = O(N^2), \quad \alpha = 0, -\frac{1}{2}. \quad (II - 41)$$

et

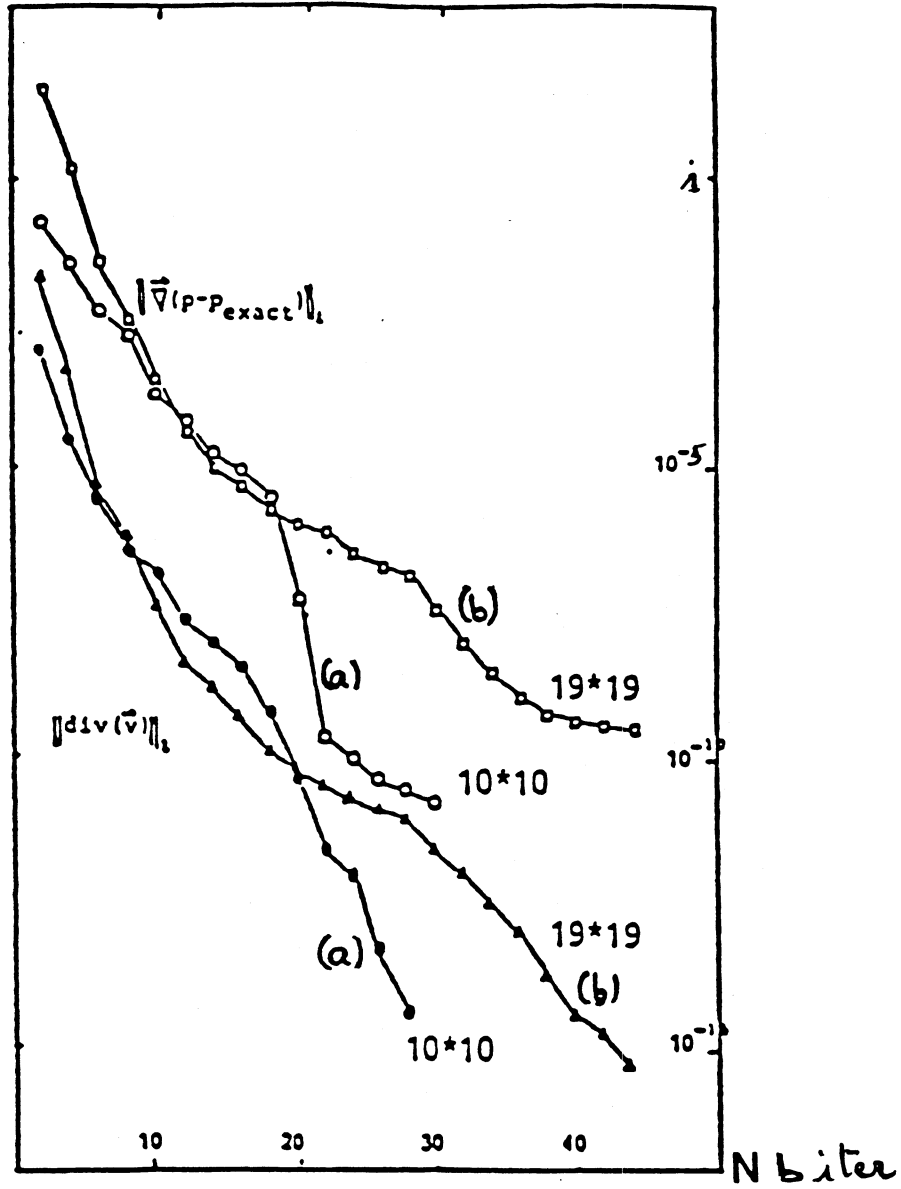
$$\beta_N = O(N^{-1}) \quad (II - 42)$$

Remarque (II - 3) Ce résultat indique la présence de modes faiblement parasites (B.M.M1) et explique la dérive du nombre d'itérations en fonction de la fréquence de coupure. L'amélioration de la loi de comportement de  $\beta_N$  est utile pour l'optimisation de la résolution du problème (II - 27).

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un algorithme de résolution des équations de Stokes (A.L.V). Le choix naturel, d'espaces polynômiaux de même degré pour approcher la vitesse et la pression conduit à un système algébrique ayant plus d'équations que d'inconnues et à un opérateur sur la pression avec un nombre de conditionnement en  $O(N^2)$ .

Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser ce même choix pour résoudre le cas où une direction périodique vient s'ajouter aux deux directions confinées de ce chapitre.



$$\begin{aligned}
 (a): \quad & U(x, y) = (y + 1)^9 \quad V(x, y) = (x + 1)^9 \\
 & p(x, y) = (x + 1)^9 (y + 1)^9 \\
 (b): \quad & U(x, y) = \sin(\pi y) \quad V(x, y) = \cos(\pi x) \\
 & p(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)
 \end{aligned}$$

figure (II - 1)

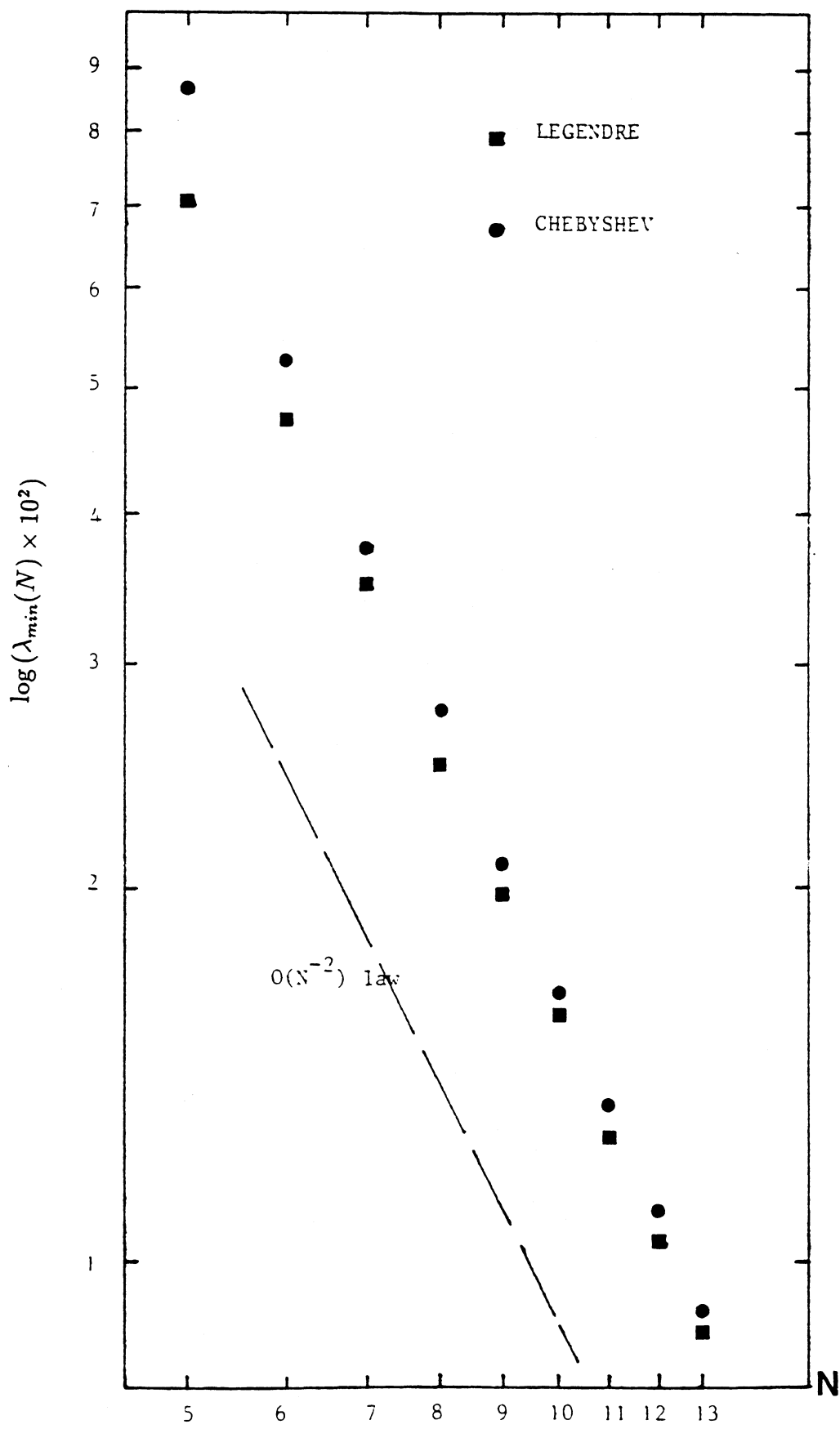


figure (II-2)

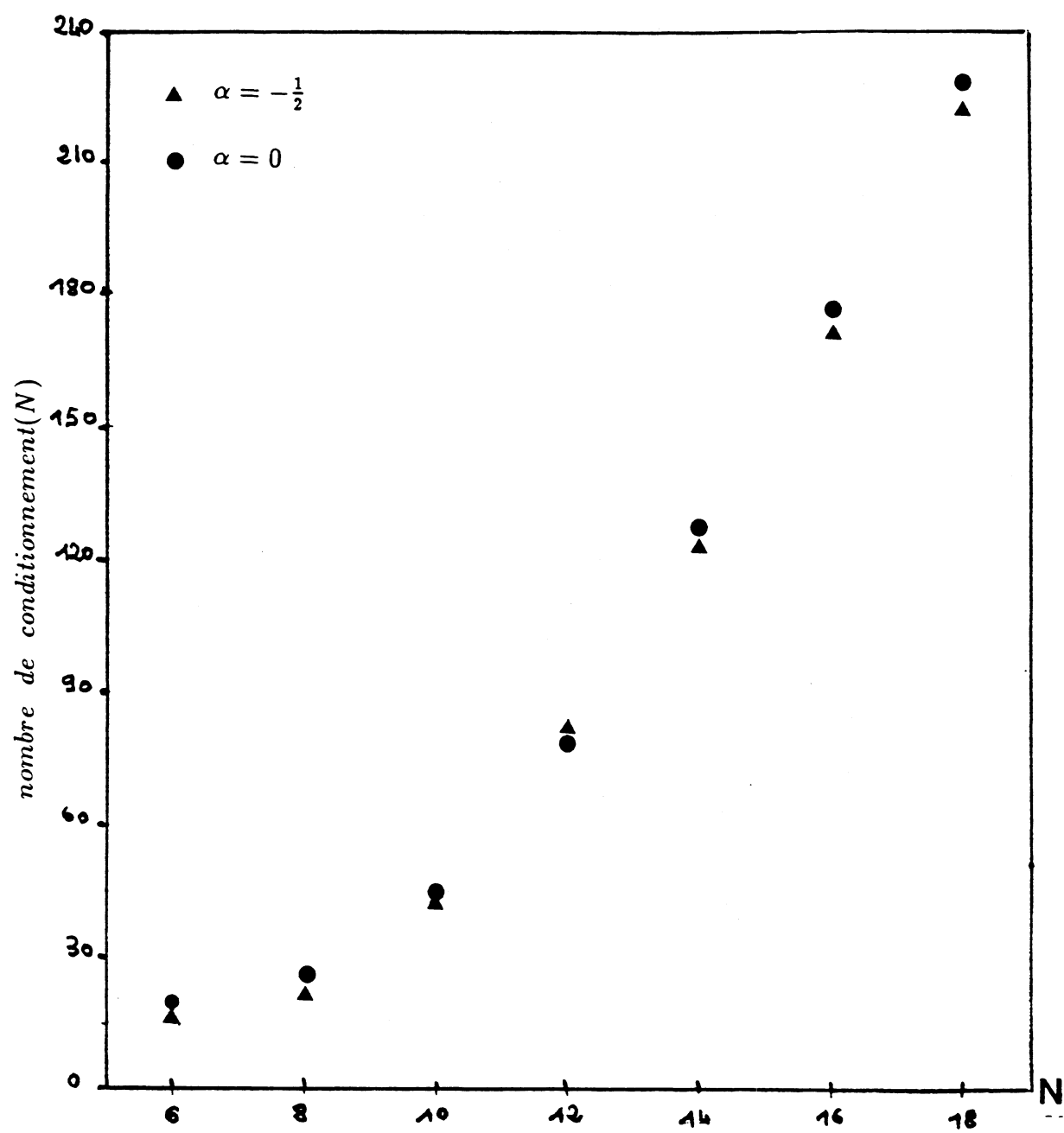


figure (II-3)

# Chapitre 3

## Approximation $(P_N, P_N)$ du problème de Stokes en 2.5-D

### 3.1 Introduction

On reprend dans ce chapitre la méthode de discrétisation présentée dans le chapitre 2 pour approcher les équations de Stokes posées dans un domaine tridimensionnel muni des conditions aux limites périodiques dans une direction et non périodiques dans les deux autres.

La résolution de ce problème est équivalente à celle d'une suite de systèmes d'équations 2-D non périodiques définies pour chaque mode de Fourier. Chacun d'eux est résolu par la méthode itérative introduite dans le chapitre 2..

Le principal résultat de ce chapitre est que le choix naturel  $(P_N, P_N)$  comme espace d'approximation pour la vitesse et la pression présente **un problème d'approximation et de convergence pour les premiers modes de Fourier**.

Dans ce chapitre nous nous bornerons à faire un constat de carence de la méthode proposée pour résoudre le cas de ces premiers modes de Fourier, et à défaut d'en comprendre les raisons profondes, le chapitre suivant proposera une méthode qui permet de contourner cette difficulté.

### 3.2 Problème continu

Dans ce chapitre on désigne par  $\Omega$  le domaine  $\Lambda^2 \times \Theta$  avec  $\Lambda = ]-1, 1[$  et  $\Theta = ]0, 2\pi[$  et on considère le problème de Stokes défini par:

trouver la vitesse  $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$  et la pression  $p$  vérifiant

$$-\nu \Delta \vec{U} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad (III - 1)$$

$$\text{Div} \vec{U} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad (III - 2)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\forall z \in \Theta, \forall y \in \Lambda, \vec{U}(+1, y, z) = \vec{U}(-1, y, z) = 0; \quad (III - 3)$$

$$\forall z \in \Theta, \forall x \in \Lambda, \vec{U}(x, +1, z) = \vec{U}(x, -1, z) = 0; \quad (III - 4)$$

$$\forall (x, y) \in \Lambda^2, \vec{U}(x, y, 0) = \vec{U}(x, y, 2\pi). \quad (III - 5)$$

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  représente la densité de force et  $\nu$  la viscosité cinématique.

L'analyse théorique est identique à celle du même problème muni des conditions aux limites périodiques dans deux directions et non périodiques dans la troisième (B.M.M2), on se contentera ici d'énoncer un résultat d'existence, unicité et régularité de la solution de notre problème sans démonstration :

Le problème (III - 1) : (III - 4) est bien posé, plus précisément on a le résultat suivant

Théorème(III-1) : Pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) \in [H_{\#}^{-1}(\Omega)]^3$ , le problème (III - 1) : (III - 5) admet une solution unique  $(\vec{U}, p)$  dans  $(H_{0,\#}^1(\Omega))^3 \times L_0^2(\Omega)$ , vérifiant

$$\|\vec{U}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{f}\|_{-1,\Omega}. \quad (III - 6)$$

### 3.2.1 Décomposition du système

En remplaçant dans (III-1):(III-4),  $\vec{U}$ ,  $\vec{f}$  et  $p$  par

$$U_k(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_k^m(x, y) \exp(\bar{i}mz), \quad \text{pour } k = 1, 2, 3; \quad (III - 7)$$

$$f_k(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k^m(x, y) \exp(\bar{i}mz), \quad \text{pour } k = 1, 2, 3; \quad (III - 8)$$

$$p(x, y, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{p}^m(x, y) \exp(\bar{i}mz), \quad \text{pour } k = 1, 2, 3; \quad (III - 9)$$

on obtient une suite de problèmes définie par: Pour tout  $m \leq M$ , trouver  $\hat{U}^m$  et  $\hat{p}^m$  complexes vérifiant

$$-\nu \left( \frac{\partial^2 \hat{U}_1^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}_1^m}{\partial y^2} - m^2 \hat{U}_1^m \right) + \frac{\partial \hat{p}^m}{\partial x} = \hat{f}_1^m, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III - 10)$$

$$-\nu \left( \frac{\partial^2 \hat{U}_2^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}_2^m}{\partial y^2} - m^2 \hat{U}_2^m \right) + \frac{\partial \hat{p}^m}{\partial y} = \hat{f}_2^m, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III - 11)$$

$$-\nu(\frac{\partial^2 \hat{U}_3^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{U}_3^m}{\partial y^2} - m^2 \hat{U}_3^m) + \bar{i}m \hat{p}^m = \hat{f}_3^m, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III-12)$$

et

$$\frac{\partial \hat{U}_1^m}{\partial x} + \frac{\partial \hat{U}_2^m}{\partial y} - \bar{i}m \hat{U}_3^m = 0 \quad \text{dans } \Lambda^2. \quad (III-13)$$

avec

$$i) \int_{\Lambda^2} \hat{p}^0 dx = 0$$

ii) pour tout  $k = 1, 2, 3$  et pour tout  $(x, y) \in \Lambda^2$

$$\forall m \leq M, \hat{U}_k^m(x, +1) = \hat{U}_k^m(x, -1) = \hat{U}_k^m(1, y) = \hat{U}_k^m(-1, y) \quad (III-14)$$

on peut montrer que :

Proposition (III-1) : Pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $(H_{\#}^{-1}(\Omega))^3$ ,  $(\vec{U}, p)$  appartenant à  $(H_{0,\#}^1(\Omega))^3 \times L_0^2(\Omega)$  est solution de (III-1) : (III-4) si et seulement si, leurs modes de Fourier sont solutions des problèmes (III-10) : (III-13) dans  $(H_{0,\#}^1(\Lambda^2))^3 \times L^2(\Lambda^2)$  si  $m \neq 0$  et dans  $(H_{0,\#}^1(\Lambda^2))^3 \times L_0^2(\Lambda^2)$  sinon.

En séparant les parties réelle et imaginaire de  $(\hat{U}_k^m, \hat{f}_k^m)$ , pour  $k=1, 2, 3$  et de  $\hat{p}^m$ , on est amené à résoudre une suite de problèmes du type:

trouver  $\vec{U}$  et  $p$  réels dans  $(H_0^1(\Lambda^2))^3 \times L^2(\Lambda^2)$ , (resp  $(H_0^1(\Lambda^2))^3 \times L_0^2(\Lambda^2)$  si  $m = 0$ ), vérifiant :

$$-\nu(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - m^2 U_1) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_1, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III-15)$$

$$-\nu(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - m^2 U_2) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_2, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III-16)$$

$$-\nu(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} - m^2 U_3) + mp = f_3, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (III-17)$$

et

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} - m U_3 = 0 \quad \text{dans } \Lambda^2. \quad (III-18)$$

Remarque (III-1) : Le cas  $m = 0$  correspond au cas du système étudié dans le chapitre 2, nous allons donc supposer pour la suite que  $m$  est non nul et nous intéresser à la discrétisation du problème (III-15) : (III-18).

### 3.2.2 Problème discret

Pour la discrétisation de (III-11) : (III-12) on introduit les opérateurs suivants:

$$gradp = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, m.p \right) \quad (III - 19)$$

et

$$DIV\vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} - m.U_3 \quad (III - 20)$$

et les espaces d'approximation définis par

$$X_N = (P_N^0(\Lambda^2))^3 \text{ et } M_N = P_N(\Lambda^2).$$

En reprenant les notations des chapitres précédents le problème discret s'écrit:

soit  $m$ , un entier non nul  $\leq M$ , pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $(C^0(\bar{\Lambda}^2))^3$ , trouver  $(\vec{U}_N, P_N)$  appartenant à  $X_N \times M_N$  et vérifiant:

$$H_1 U_{1N}(\bar{x}^\alpha) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\bar{x}^\alpha) = f_1(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Lambda^2; \quad (III - 21)$$

$$H_2 U_{2N}(\bar{x}^\alpha) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\bar{x}^\alpha) = f_2(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Lambda^2; \quad (III - 22)$$

$$H_3 U_{3N}(\bar{x}^\alpha) + m p_N(\bar{x}^\alpha) = f_3(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Lambda^2; \quad (III - 23)$$

et

$$DIV\vec{U}_N(\bar{x}^\alpha) = 0, \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha. \quad (III - 24)$$

Ce système s'écrit aussi :

$$(\mathbf{H}\vec{U}_N + gradp_N)(\bar{x}^\alpha) = \vec{f}(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Lambda^2; \quad (III - 25)$$

et

$$DIV\vec{U}_N(\bar{x}^\alpha) = 0, \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha; \quad (III - 26)$$

où

$$\mathbf{H}\vec{U} = (H_1 U_1, H_2 U_2, H_3 U_3). \quad (III - 27)$$

De même on désignera par  $\mathbf{H}_\Omega^{-1}$  et  $\mathbf{H}^{-1}$  les opérateurs définis par:

$$\mathbf{H}_\Omega^{-1}\vec{U} = (\mathcal{H}_{1,\Omega}^{-1}U_1, \mathcal{H}_{2,\Omega}^{-1}U_2, \mathcal{H}_{3,\Omega}^{-1}U_3), \quad (III - 28)$$

et

$$\mathbf{H}^{-1}\vec{U} = (\mathcal{H}_1^{-1}U_1, \mathcal{H}_2^{-1}U_2, \mathcal{H}_3^{-1}U_3). \quad (III - 29)$$

### 3.2.3 Quel opérateur $\mathcal{A}_m^\alpha$ sur la pression

En utilisant les notations de ce chapitre et celles des précédents le problème (III – 25) : (III – 26) s'écrit :

étant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $(C^0(\bar{\Lambda}^2))^3$ , trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  appartenant à  $X_N \times M_N$  et vérifiant :

$$(DIV \mathbf{H}_\Omega^{-1} \vec{grad} p_N)(\bar{x}^\alpha) = (DIV \mathbf{H}^{-1} \vec{f})(\bar{x}^\alpha) \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha; \quad (III - 30)$$

et

$$(\mathbf{H} \vec{U}_N)(\bar{x}^\alpha) = (\vec{grad} p_N + \vec{f})(\bar{x}^\alpha), \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha \cap \Lambda^2. \quad (III - 31)$$

L'opérateur sur la pression s'écrit donc :

$$\mathcal{A}_m^\alpha = DIV \mathbf{H}_\Omega^{-1} \vec{grad}. \quad (III - 32)$$

Remarque (III-2) : Pour tout entier  $m$ ,  $\mathcal{A}_m^\alpha$  s'écrit :

$$\mathcal{A}_m^\alpha = \mathcal{A}_0^\alpha - m^2 \mathbf{H}_\Omega^{-1}; \quad (III - 34)$$

on note que  $\mathcal{A}_0^\alpha$  dépend aussi de  $m$ , à travers le coefficient de Helmholtz dans  $\mathbf{H}_\Omega^{-1}$ .

## 3.3 Influence des premiers modes de Fourier sur le processus itératif

On considère le problème de Stokes ayant pour solution exacte

$$\vec{U} = \vec{0} \text{ et } p(x, y) = x^N + y^N$$

et on cherche à résoudre, pour différentes valeurs de  $m$ , le problème :  
trouver  $p_N \in P_N(\Omega)$  vérifiant :

$$(DIV \mathbf{H}_\Omega^{-1} \vec{grad} p_N)(\bar{x}^\alpha) = (DIV \mathbf{H}^{-1} \vec{f})(\bar{x}^\alpha) \quad \bar{x}^\alpha \in \Xi_N^\alpha;$$

$\vec{f}$  étant obtenu en remplaçant dans (III-15)  $\vec{U}$  et  $p$  par leur valeur respective.

Le tableau (III-1) : présente les résultats numériques obtenus avec  $N = 9$ , en Legendre, pour  $m = 1, \dots, 10$ .

On observe que : pour  $m \geq 4$  la méthode converge aussi bien que pour le cas  $m = 0$ , par contre, pour  $m \leq 3$ , le système itératif progresse extrêmement lentement et la précision attendue ne peut être atteinte avec un nombre limité d'itérations, pour  $m \leq 2$ , en particulier, il y a saturation sur un niveau d'erreur assez élevé.

On note que ce problème de convergence et d'approximation n'est pas propre

à l'exemple traité, et qu'on le retrouve dans le cas où la solution exacte est non polynômiale, ou simple combinaison linéaire de polynômes de Jacobi (avec  $\alpha = 0, -\frac{1}{2}$ ).

On note aussi qu'aucun des problèmes suivants:

$$\begin{aligned} &\text{trouver } p_N \in P_N(\Omega) / \\ &\mathcal{A}_0^\alpha p_N = F, \end{aligned} \quad (III - 35)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} &\text{trouver } p_N \in P_N(\Omega) / \\ &-m^2 \mathbf{H}_\Omega^{-1} p_N = F, \end{aligned} \quad (III - 36)$$

n'a de difficulté à converger, pour les petites valeurs de  $m$  non nulle contrairement à  $\mathcal{A}_m^\alpha$  qui est leur somme !.

### 3.4 Propriétés des $\mathcal{A}_m^\alpha$ pour différentes valeurs de $m$

On présente dans le tableau (III-3) le spectre de  $\mathcal{A}_m^\alpha$  en Legendre et pour des conditions aux limites Dirichlet. On constate que les valeurs propres sont réelles positives. De plus pour  $m = 0$ , on retrouve les huit valeurs propres nulles, dont les vecteurs propres sont les modes parasites qui génèrent  $Z_1$  et  $Z_2$  définis par:

$$Z_1 = Vect \{L_0, L_N(x), L_N(y), L_N(x)L_N(y)\}; \quad (III - 37)$$

et

$$Z_2 = Vect \{Q_x, \bar{x} \text{sommet de } \Omega\}. \quad (III - 38)$$

On trouve aussi que pour  $m \geq 1$  on a 4 valeurs propres nulles associées au sous espace-vectoriel propre engendré par les éléments de  $Z_2$ , et les 4 valeurs propres associées au sous espace vectoriel propre  $Z_1$  sont maintenant non nulles mais petites comparées à l'amplitude de la plus grande valeur propre qui reste de l'ordre de l'unité, et leur amplitude tend vers zéro quand  $N$  devient grand. La présence des petites valeurs propres augmente le nombre de conditionnement. Enfin on notera que pour  $m = 1$  le spectre s'étend assez uniformément sans points d'accumulation entre la plus petite valeur propre non nulle et la plus grande, alors que pour  $m$  assez grand (ex  $m = 10$ ), on observe que le spectre possède des points d'accumulation, (4 pour  $m = 10$ ), ce qui est bien adapté aux méthodes itératives.

Remarque (III-4) : Cette description du spectre de  $\mathcal{A}_m^\alpha$  pour une fréquence de coupure non périodique  $N=4$  se généralise à  $N$  quelconque, et dans tous les cas pour  $m=1$  on a le plus grand nombre de conditionnement et un spectre très large, qui tend à avoir des points d'accumulation autour de certaines valeurs propres dès

que  $m$  grandit.

Enfin, et pour mettre en évidence le rôle néfaste des 4 plus petites valeurs propres (non nulles), nous avons résolu le même problème avec  $\vec{U} = \vec{0}$  et  $p(x, y) = x^{N-1} + y^{N-1}$  et en utilisant une fréquence de coupure égale à  $N$ , auquel cas tout se passe dans le sous espace orthogonal à  $Z_1$  et  $Z_2$ . Le tableau (III-2) fournit le résultat pour  $N = 9$  et indique maintenant une convergence uniforme avec  $m$ .

### 3.5 Conclusion

La méthode proposée, qui consiste à choisir des espaces polynômiaux de même degré pour approcher la vitesse et la pression, pose un problème de convergence et d'approximation pour les premiers modes de Fourier. Il apparaît essentiel de modifier cette méthode pour améliorer, en particulier, le comportement du processus itératif appliqué aux petits modes de Fourier.

| m                    | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| $\ p - p_N\ _\infty$ | 1.E-05 | 3.E-05 | 2.E-09 | 2.E-16 | 3.E-16 | 2.E-17 | 2E-16 | 9E-16 | 3E-16 | 5E-16 |
| NB ITER              | 100    | 100    | 100    | 31     | 32     | 33     | 32    | 31    | 30    | 27    |

Tableau ( III-I )

| m                    | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\ p - p_N\ _\infty$ | 1.E-16 | 1.E-16 | 2.E-09 | 3.E-16 | 1.E-16 | 5.E-17 | 1.E-16 | 2.E-16 | 5.E-16 | 1.E-16 |
| NB ITER              | 32     | 32     | 31     | 30     | 30     | 31     | 30     | 28     | 27     | 26     |

Tableau ( III-II )

Tableau (III-3)

|    | K = 0.00                | K = 1.00               | K = 10.00              |
|----|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 1  | 0.8750000000000002      | 0.8508204429905084     | 0.9765123031425504     |
| 2  | 0.6443375672974065      | 0.6177464159904995     | 0.9326917097223907     |
| 3  | 0.6443375672974064      | 0.6177464159904995     | 0.9326917097223907     |
| 4  | 0.6250000000000000      | 0.5681818181818182     | 0.8925855655111287     |
| 5  | 0.3750000000000000      | 0.3849596979871607     | 5.681818181818182E-02  |
| 6  | 0.3556624327025936      | 0.3213061249673644     | 5.5414103783856602E-02 |
| 7  | 0.3556624327025936      | 0.3213061249673644     | 5.3677737038122921E-02 |
| 8  | 0.1250000000000000      | 0.1113007691307038     | 5.3677737038122921E-02 |
| 9  | 3.7823824983475329E-18  | 3.7273216617893829E-02 | 1.1748377444267238E-02 |
| 10 | 4.4614807086138219E-18  | 3.7273216617893829E+02 | 1.1748377444267238E-02 |
| 11 | -1.1767594346925143E-18 | 1.8449392921930261E-02 | 1.1363636363636367E-02 |
| 12 | -1.1767594346925143E-18 | 1.8449392921930261E-02 | 1.1070560971084833E-02 |
| 13 | 0.0000000000000000E+00  | 0.0000000000000000E+00 | 0.0000000000000000E+00 |
| 14 | 0.0000000000000000E+00  | 0.0000000000000000E+00 | 0.0000000000000000E+00 |
| 15 | 0.0000000000000000E+00  | 0.0000000000000000E+00 | 0.0000000000000000E+00 |
| 16 | 0.0000000000000000E+00  | 0.0000000000000000E+00 | 0.0000000000000000E+00 |

# Chapitre 4

## Introduction à la méthode ( $P_N, P_{N-2}$ )

### 4.1 Introduction

Jusqu'à présent nous avons choisi, pour résoudre les équations de Stokes d'approcher la vitesse et la pression par des polynômes de même degré. Ce choix nous a permis d'utiliser une seule grille pour écrire le système algébrique issu de la discrétisation, mais nous a donné des modes parasites et des modes faiblement parasites pour la pression. La présence des premiers nous a empêché de calculer correctement la pression, et celle des deuxièmes ralentit, voire inhibe le processus itératif.

Plusieurs solutions ont été présentées pour éliminer les premiers et réduire l'importance des seconds. Le point commun à ces méthodes est de ne pas choisir des polynômes de même degré pour approcher la vitesse et la pression, et d'utiliser des grilles différentes pour écrire le problème discretisé par méthode spectrale de collocation [B.M], [B.M.M2], [Le], [M.M.P.R], [M.P.R] etc... Dans toutes ces méthodes, la vitesse et la pression ne sont pas calculées sur les mêmes grilles, on a donc besoin d'opérateurs d'interpolation pour passer d'une grille à une autre.

Le but de ce chapitre est de présenter une technique de discrétisation utilisant les mêmes espaces d'approximation que [M.P.R] mais sans grilles décalées. Pour présenter cette méthode nous avons choisi de traiter un problème modèle: le problème des Stokes en  $(1.5 - D)$  avec des conditions aux limites périodiques-non périodiques. On présente d'abord le problème continu à discrétiser. Ensuite, on écrit le système algébrique issu de la discrétisation ainsi que les opérateurs de gradient et de divergence. On donne, à la fin, des résultats de convergence et d'approximation.

Dans ce chapitre,  $\Omega$  désigne le domaine défini par  $\Omega = \Lambda \times \Theta$  avec  $\Lambda = ]-1, +1[$  et  $\Theta = ]0, 2\pi[$ , et  $N$ , (resp  $M$ ) la fréquence de coupure dans la direction confinée,

(resp périodique).

## 4.2 Problème continu

On considère le problème de Stokes dans  $\Omega$ , défini par: trouver la vitesse  $\vec{U} = (U_1, U_2)$  et la pression  $p$  vérifiant

$$-\nu \Delta \vec{U} + \vec{\nabla} p = \vec{f} \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad (VI-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad (VI-2)$$

avec les conditions aux limites suivantes:

$$\forall y \in \Theta, \vec{U}(+1, y) = \vec{U}(-1, y) = 0; \quad (VI-3)$$

$$\forall x \in \Lambda, \vec{U}(x, 0) = \vec{U}(x, 2\pi). \quad (VI-4)$$

$\vec{f} = (f_1, f_2)$  représente la densité de force et  $\nu$  la viscosité cinématique.

Dans [B.M.M2], on démontre que le problème (IV-1) : (IV-4) est bien posé pour tout  $\vec{f}$  dans  $[H_{\#}^{-1}(\Omega)]^2$  dual de  $[H_0^1(\Omega)]^2$ , plus précisément on a

Théorème(IV-1) : Pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2) \in [H_{\#}^{-1}(\Omega)]^2$ , le problème (IV-1)-(IV-4) admet une solution unique  $(\vec{U}, p)$  dans  $(H_{0,\#}^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$ , vérifiant

$$\|\vec{U}\|_{1,\Omega} + \|p\|_{0,\Omega} \leq \|\vec{f}\|_{-1,\Omega}. \quad (VI-5)$$

Plus généralement, si  $\vec{f}$  appartient à  $(H_{\#}^s(\Lambda))^2$ , la solution du problème (IV-1) : (IV-4) vérifie

$$\|\vec{U}\|_{s+2,\Omega} + \|p\|_{s+1,\Omega} \leq \|\vec{f}\|_{s,\Omega}. \quad (VI-6)$$

### 4.2.1 Décomposition du système

En remplaçant dans (IV-1)-(IV-4)  $\vec{U}$ ,  $\vec{f}$  et  $p$  par

$$U_k(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{U}_k^m(x) \exp(\bar{i}my), \quad \text{pour} \quad k = 1, 2; \quad (VI-7)$$

$$f_k(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k^m(x) \exp(\bar{i}my), \quad \text{pour} \quad k = 1, 2; \quad (VI-8)$$

$$p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{p}^m(x) \exp(\bar{i}my); \quad (VI-9)$$

on obtient une suite de problèmes définis par: Pour tout  $m \leq M$ , trouver  $\hat{U}^m$  et  $\hat{p}^m$  complexes vérifiant:

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 \hat{U}_1^m}{\partial x^2} - m^2 \hat{U}_1^m\right) + \frac{\partial \hat{p}^m}{\partial x} = \hat{f}_1^m, \quad \text{dans } \Lambda; \quad (VI - 10)$$

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 \hat{U}_2^m}{\partial x^2} - m^2 \hat{U}_2^m\right) + i m \hat{p}^m = \hat{f}_2^m, \quad \text{dans } \Lambda; \quad (VI - 11)$$

et

$$\frac{\partial \hat{U}_1^m}{\partial x} + i m \hat{U}_2^m = 0 \quad \text{dans } \Lambda. \quad (VI - 12)$$

avec

$$i) \int_{\Lambda} \hat{p}^0 dx = 0,$$

$$ii) \text{ pour tout } k = 1, 2 \text{ et } \forall x \in \Lambda \forall m \leq M, \quad \hat{U}_k^m(+1) = \hat{U}_k^m(-1) = 0.$$

On peut alors montrer que:

**Proposition IV-1 :** Pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $(H_{\#}^{-1}(\Omega))^2$ ,  $(\vec{U}, p)$  appartenant à  $(H_{0,\#}^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$  est solution de (IV - 1) - (IV - 4) si et seulement si, les modes de Fourier sont solutions des problèmes (IV - 10) : (IV - 12) dans  $(H_0^1(\Lambda))^2 \times L^2(\Lambda)$  si  $m \neq 0$  et dans  $(H_0^1(\Lambda))^2 \times L_0^2(\Lambda)$  sinon.

Enfin en séparant les parties réelle et imaginaire de  $(\hat{U}_k^m, \hat{f}_k^m)$ , pour  $k=1,2$  et de  $\hat{p}^m$ , on est amené à résoudre un problème de base défini par: trouver  $\vec{U}$  et  $p$  dans  $(H_0^1(\Lambda))^2 \times L^2(\Lambda)$ , (resp  $(H_0^1(\Lambda))^2 \times L_0^2(\Lambda)$  si  $m = 0$ ), vérifiant

$$-\nu(U_1'' - m^2 U_1) + p' = f_1, \quad \text{dans } \Lambda; \quad (VI - 13)$$

$$-\nu(U_2'' - m^2 U_2) + m p = f_2, \quad \text{dans } \Lambda; \quad (VI - 14)$$

et

$$U_1' - m \cdot U_2 = 0 \quad \text{dans } \Lambda. \quad (VI - 15)$$

**Remarque IV-1 :** Le cas  $m = 0$  ne présentant aucune difficulté, nous allons supposer par la suite que  $m$  est non nul et nous intéresser à la discrétisation du problème (IV - 13) : (IV - 15).

## 4.2.2 Formulation variationnelle du problème

Dans le but de proposer une méthode de discrétisation à ce problème, nous allons donner la formulation variationnelle qui lui est équivalente. Pour cela on introduit les deux formes bilinéaires suivantes définies par:

$$\forall(\vec{U}, \vec{V}) \in (H_0^1(\Lambda))^2$$

$$\mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) = -\nu \sum_{i=1}^2 \{ (U_i'', V_i) - m^2 (U_i, V_i) \} \quad (VI - 16)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \vec{V} &\in (H_0^1(\Lambda))^2, \forall q \in L^2(\Lambda); \\ \mathcal{B}(\vec{V}, q) &= -(V_1' - mV_2, q); \end{aligned} \quad (VI - 17)$$

alors, le problème de (IV - 13) : (IV : 15) est équivalent à: trouver  $\vec{U}$  dans  $(H_0^1(\Lambda))^2$  et  $p$  dans  $L^2(\Omega)$  et vérifiant

$$\forall \vec{V} \in (H_0^1(\Lambda))^2, \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) + \mathcal{B}(\vec{V}, p) = \langle \vec{f}, \vec{V} \rangle; \quad (VI - 18)$$

$$\forall q \in L^2(\Lambda), \quad \mathcal{B}(\vec{U}, q) = 0. \quad (VI - 19)$$

Nous allons par la suite discrétiser ces deux dernières égalités.

### 4.3 Problème discret

Soient  $N \geq 3$  et  $m \leq M$  deux entiers, on considère les espaces polynômiaux suivants:

$$X_N = (P_N^0(\Lambda))^2 \text{ et } M_N = P_{(N-2)}(\Lambda). \quad (IV - 20)$$

Pour  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  donné dans  $(C^0(\bar{\Lambda}))^2$ , le problème approché consiste à trouver  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $X_N$  et  $p_N$ , dans  $M_N$  (M.P.R) tel que

$$\forall \vec{V}_N = (V_{1N}, V_{2N}) \in X_N;$$

$$-\nu(U_{1N}'' - m^2 U_{1N}, V_{1N})_N + (p_N', V_{1N})_N = (f_1, V_{1N})_N; \quad (IV - 21)$$

$$-\nu(U_{2N}'' - m^2 U_{2N}, V_{2N})_N + (mp_N', V_{2N})_N = (f_2, V_{2N})_N; \quad (IV - 22)$$

et

$$\begin{aligned} \forall q_N &\in M_N; \\ (U_{1N}' - mU_{2N}, q_N)_N &= 0. \end{aligned} \quad (IV - 23)$$

#### 4.3.1 Formulation variationnelle du problème approché

Afin d'analyser le problème (IV - 21) - (IV - 23) on définit les formes bilinéaires  $\mathcal{A}_N$  et  $\mathcal{B}_N$  suivantes :

$$\forall \vec{U} \in (C^2(\bar{\Lambda}))^2, \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Lambda}))^2;$$

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}, \vec{V}) = \sum_{i=1}^2 \nu (U_{iN}'' - m^2 U_{iN}, V_{iN})_N \quad (IV - 24)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Lambda}))^2, \forall q \in C^1(\bar{\Lambda}); \\ \mathcal{B}_N(\vec{V}, q) = (V_{1N}, q')_N + m(V_{2N}, q)_N. \end{aligned} \quad (IV - 25)$$

On note que le choix de  $X_N$  et de  $M_N$  et l'exactitude de la formule de Gauss-Lobatto sur  $P_{2N-1}(\Lambda)$  permettent d'écrire: pour tout  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$  et  $q_N$  dans  $M_N$  on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_N(\vec{V}_N, q_N) &= (V_{1N}, q')_N + m(V_{2N}, q)_N; \\ &= \sum_{j=0}^N V_{1N}(\xi_j) q'_N(\xi_j) \rho_j + m \sum_{j=0}^N V_{2N}(\xi_j) q_N(\xi_j) \rho_j \\ &= \int_{\Lambda} (V_{1N} \cdot q'_N + m V_{2N} \cdot q_N) dx \\ &= - \int_{\Lambda} (V'_{1N} \cdot q_N - m V_{2N} \cdot q_N) dx \\ &= \mathcal{B}(\vec{V}_N, q_N) \\ &= -(V'_{1N} - m V_{2N}, q_N)_N \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$  et  $q_N$  dans  $M_N$ :

$$(\vec{V}_N, \vec{grad} q_N)_N = -(\text{Div} \vec{V}_N, q_N)_N; \quad (IV - 26)$$

et

$$\mathcal{B}_N(\vec{V}_N, q_N) = \mathcal{B}(\vec{V}_N, q_N); \quad (IV - 27)$$

avec  $\text{Div} \vec{V}_N = V'_{1N} - m V_{2N}$  et  $\vec{grad} q_N = (q'_N, m q_N)$ .

De même on peut montrer que pour tout  $(\vec{U}_N, \vec{V}_N)$  dans  $X_N^2$

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = \nu \sum_{i=1}^2 (U'_i, V'_i)_N + m^2 (U_i, V_i)_N. \quad (IV - 28)$$

Le problème (IV - 21) : (IV - 23) s'écrit :

Etant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $(C^0(\bar{\Lambda}))^2$  on cherche  $(\vec{U}_N, p_N)$  appartenant à  $X_N \times M_N$  et vérifiant:

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + \mathcal{B}(\vec{U}_N, p_N) = (\vec{f}, \vec{V}_N)_N; \quad (IV - 29)$$

$$\forall q_N \in M_N, \quad \mathcal{B}(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (IV - 30)$$

### 4.3.2 Analyse du problème variationnel

Propriétés des formes bilinéaires  $\mathcal{A}_N$  et  $\mathcal{B}$  :

On peut montrer, comme dans [M.P.R], que:

i) Continuité uniforme des  $\mathcal{A}_N$

Il existe une constante positive,  $C$ , indépendante de  $N$ , telle que

$$\begin{aligned} \forall \vec{U}_N \in X_N, \forall \vec{V}_N \in X_N; \\ \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \leq C \|\vec{U}_N\|_X \|\vec{V}_N\|_X \end{aligned} \quad (IV - 31)$$

ii) Ellipticité uniforme des  $\mathcal{A}_N$

Il existe une constante positive,  $C$ , indépendante de  $N$ , telle que

$$\begin{aligned} \forall \vec{U}_N \in X_N; \\ \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{U}_N) \geq C \|\vec{U}_N\|_X^2 \end{aligned} \quad (IV - 32)$$

iii) Compatibilité des espaces  $X_N$  et  $M_N$

Il existe une constante positive,  $\beta$ , indépendante de  $N$  telle que

$$\begin{aligned} \forall q_N \in M_N, \exists \vec{V}_N \neq 0 \in X_N; \\ \mathcal{B}(\vec{V}_N, q_N) \geq \beta \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M. \end{aligned} \quad (IV - 33)$$

Ces propriétés nous permettent, en utilisant [Br], de donner un résultat optimal de convergence et d'approximation.

**Théorème IV-2 :** Pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  donné dans  $(C^0(\bar{\Lambda}))^2$ , le problème spectral de collocation (IV - 21) : (IV - 23) admet une solution unique dans  $X_N \times M_N$ . De plus, si la solution  $(\vec{U}, p)$  du problème (IV - 13) appartient à l'espace,  $(H^s(\Lambda))^2 \cap (H_0^1(\Lambda))^2 \times H^{s-1}(\Lambda)$ ,  $s \geq 0$ , et si  $\vec{f}$  appartient à l'espace  $(H^\sigma(\Lambda))^2$ , pour  $\sigma$  entier  $> 1$ , alors il existe une constante  $C$ , indépendante de  $N$ , telle que

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq C \{N^{1-s} \|\vec{U}\|_{s,\Omega} + N^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}\}; \quad (IV - 34)$$

et

$$\|p - p_N\|_M \leq C \{N^{1-s} (\|\vec{U}\|_{s,\Omega} + \|p\|_M) + N^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}\}. \quad (IV - 35)$$

Nous allons présenter maintenant la méthode de discrétisation qui nous permettra d'écrire l'ensemble des équations de Stokes sur la seule grille  $\Xi_N$ .

## 4.4 Système algébrique

Dans cette partie, nous allons construire le système algébrique à résoudre, donner ses propriétés et présenter des résultats numériques de convergence et d'approximation. On continue dans cette partie à utiliser la grille formée des points de Gauss-lobatto associés aux polynômes de Legendre ( $\alpha = 0$ ), tout en signalant qu'on peut généraliser cette méthode au cas des polynômes de Chebychev. Dans le deux cas on a besoin d'introduire les polynômes caractéristiques de ces noeuds et d'en donner quelques propriétés.

## 4.5 Opérateurs discrétisés

### 4.5.1 Fonctions tests

Définitions des  $h_i^\alpha$

Pour tout  $i = 0, 1, \dots, N$ , on désigne par  $h_i^\alpha$ , le polynôme de degré  $N$ , caractéristique du  $i^{eme}$  point de Gauss-Lobatto associé au polynôme de Jacobi  $J_N^\alpha$ .  $h_i^\alpha$  est défini par

$$\forall j = 0, 1, \dots, N \quad h_i^\alpha(\xi_i^\alpha) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (IV - 36)$$

Définitions des  $\tilde{h}_i^\alpha$

Pour tout  $i = 1, \dots, N-1$ , on désigne par  $\tilde{h}_i^\alpha$ , le polynôme de degré  $N-2$ , caractéristique du  $i^{eme}$  point de Gauss-Lobatto associé au polynôme de Jacobi  $J_N^\alpha$ .  $\tilde{h}_i^\alpha$  est défini par

$$\forall j = 1, \dots, N-1 \quad \tilde{h}_i^\alpha(\xi_i^\alpha) = \delta_{ij} \quad (IV - 37)$$

Cas  $\alpha = -\frac{1}{2}$  :

On rappelle que pour tout  $x \in \bar{\Lambda}$

$$T_N(x) = \cos(N\theta) \quad \text{avec} \quad \theta = \arccos x; \quad (IV - 38)$$

et que pour  $k = 0, 1, \dots, N$

$$\xi_k = \cos(\theta_k), \quad \text{avec} \quad \theta_k = \frac{(N-k)\pi}{N}. \quad (IV - 39)$$

Remarque (IV-2) : Les espaces  $X_N$  et  $M_N$  seront munis des bases  $(h_i^\alpha)_{i=0,\dots,N}$  respectivement  $(\tilde{h}_i^\alpha)_{i=1,\dots,N-1}$ . On a donc besoin, en particulier, de connaître la valeur de  $\tilde{h}_i^\alpha(\pm 1)$  pour tout  $i = 1, \dots, N-1$  et pour  $\alpha = 0, -\frac{1}{2}$ .

Calcul de  $\tilde{h}_i^\alpha(\pm 1)$

De (IV - 37) on écrit que :

$$\forall x \in \Lambda, \quad \tilde{h}_i^\alpha(x) = C_{iN} \frac{T'_N(x)}{x - \xi_i^\alpha}; \quad (IV - 40)$$

et  $\forall i=1, \dots, N-1$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{h}_i^\alpha(\xi_i^\alpha) = \lim_{x \rightarrow \xi_i^\alpha} C_{iN} \frac{T'_N(x)}{x - \xi_i^\alpha}; \\ &= C_{iN} \lim_{x \rightarrow \xi_i^\alpha} \frac{T'_N(x) - T'_N(\xi_i^\alpha)}{x - \xi_i^\alpha}; \\ &= C_{iN} T''_N(\xi_i^\alpha). \end{aligned}$$

On a donc : Pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$C_{iN} = \frac{1}{T''_N(\xi_i^\alpha)}, \quad (IV - 41)$$

et

$$\forall x \in \Lambda, \quad \tilde{h}_i^\alpha(x) = \frac{T'_N(x)}{T''_N(\xi_i^\alpha)(x - \xi_i^\alpha)} \quad (IV - 42)$$

Calcul de  $T'_N(\pm 1)$  et  $T''_N(\xi_i^\alpha)$

Pour tout  $x \in \Lambda$ ,  $T'_N(x) = -N \sin(N\theta) \frac{d\theta}{dx} = \frac{N \sin(N\theta)}{\sin(\theta)}$ ;

en particulier on a:

$$T'_N(+1) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{N^2 \theta \sin(N\theta)}{N \theta \sin(\theta)} = N^2;$$

et

$$T'_N(-1) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{N^2 \sin(N\theta)}{N \theta} = (-1)^{(N+1)} N^2.$$

ce qui donne :

$$\forall x \in \Lambda, \quad T''_N(x) = \frac{N}{\sin^2(\theta)} \left\{ -N \cos(N\theta) + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sin(N\theta) \right\}$$

et en particulier, pour tout  $i = 1, \dots, N$

$$T''_N(\xi_i) = (-1)^{(N-i)} \frac{N^2}{1 - (\xi_i^\alpha)^2}. \quad (IV - 43)$$

Enfin on obtient :

Pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$\tilde{h}_i^\alpha(-1) = (-1)^i (1 - \xi_i^\alpha); \quad (IV - 44)$$

$$\tilde{h}_i^\alpha(+1) = (-1)^{N-i}(1 + \xi_i^\alpha). \quad (IV - 45)$$

Cas  $\alpha = 0$  :

On peut montrer , comme dans le cas  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , que pour  $i = 1, \dots, N-1$

$$\tilde{h}_i(x) = \frac{L'_N(x)}{(x - \xi_i)L''_N(\xi_i)}; \quad (IV - 46)$$

or on a

$$L'_N(\pm 1) = (\pm 1)^{N+1} \frac{N(N+1)}{2}.$$

Il nous suffit maintenant d'écrire  $L''_N(\xi_i)$  pour  $i=1, \dots, N-1$ , or on sait que (annexe 1):

$$\forall x \in \Lambda, \quad ((1 - x^2)L'_N(x))' + N(N+1)L_N(x) = 0;$$

ce qui nous permet d'écrire en particulier pour tout  $i=1, \dots, N-1$

$$L''_N(\xi_i) = N(N+1) \frac{L_N(\xi_i)}{(\xi_i)^2 - 1},$$

on obtient:

Pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$\tilde{h}_i(-1) = \frac{(-1)^N(\xi_i - 1)}{2L_N(\xi_i)}; \quad (IV - 47)$$

$$\tilde{h}_i(+1) = -\frac{(\xi_i + 1)}{2L_N(\xi_i)}. \quad (IV - 48)$$

Nous allons maintenant pouvoir écrire le système algébrique.

Première étape

En prenant dans (IV - 29) comme fonctions tests la suite  $\vec{V}_N = (h_i, 0)$  pour  $i = 1, \dots, N-1$ , on obtient:

$$-\nu(U''_{1N}(\xi_i) - m^2 U_{1N}(\xi_i)) + p'_N(\xi_i) = f_1(\xi_i); \quad (IV - 49)$$

Deuxième étape

En prenant dans (IV-29) comme fonctions tests la suite  $\vec{V}_N = (0, h_i)$  pour  $i = 1, \dots, N-1$ , on obtient:

$$-\nu(U''_{2N}(\xi_i) - m^2 U_{2N}(\xi_i)) + m p_N(\xi_i) = f_2(\xi_i) \quad (IV - 50)$$

Troisième étape

C'est en choisissant les bonnes fonctions tests pour (IV - 30) qu'on arrive à résoudre le problème dans  $X_N \times M_N$  en utilisant une seule grille. En effet, en prenant comme fonctions tests la suite  $\tilde{h}_i$  pour  $i = 1, \dots, N-1$  on obtient:

$$(U'_{1N} - mU_{2N}, \tilde{h}_i) = (U'_{1N} - mU_{2N}, \tilde{h}_i)_N = 0 \quad (IV - 51)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{j=0}^N (U'_{1N}(\xi_j) - mU_{2N}(\xi_j)) \tilde{h}_i(\xi_j) \rho_j = 0.$$

En utilisant les propriétés de  $\tilde{h}_i$  on obtient

Pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$U'_{1N}(\xi_i) - mU_{2N}(\xi_i) = d_i \quad (IV - 52)$$

avec

$$d_i = - \left\{ (U'_{1N}(\xi_0) - mU_{2N}(\xi_0)) \frac{\rho_0}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_0) + (U'_{1N}(\xi_N) - mU_{2N}(\xi_N)) \frac{\rho_N}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_N) \right\}.$$

On peut maintenant écrire le système algébrique à résoudre:

Soit  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  appartenant à  $(C^0(\bar{\Lambda}))^2$ , on cherche  $(\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N}), p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  vérifiant

$$-\nu(U''_{1N}(\xi_i) - m^2 U_{1N}(\xi_i)) + p'_N(\xi_i) = f_1(\xi_i), \quad i = 1, \dots, N-1; \quad (IV - 53)$$

$$-\nu(U''_{2N}(\xi_i) - m^2 U_{2N}(\xi_i)) + m p_N(\xi_i) = f_2(\xi_i), \quad i = 1, \dots, N-1; \quad (IV - 54)$$

et

$$U'_{1N}(\xi_i) - mU_{2N}(\xi_i) = d_i, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (IV - 55)$$

Remarque (IV-3) : Les problèmes (IV - 53) : (IV - 55) et (IV - 29) : (IV - 30) sont équivalents.

Pour résoudre les équations (IV - 52) : (IV - 54), nous allons donner une représentation matricielle pour l'opérateur issu de la discrétisation de la divergence.

#### 4.5.2 Quel opérateur de divergence sur la vitesse?

On rappelle que pour tout  $i = 1, \dots, N-1$  on a

$$U'_{1N}(\xi_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij} U_{1N}(\xi_j) \quad (IV - 56)$$

où  $(D_{ij})_{i,j=0\dots N}$  désigne la matrice de dérivation première dans l'espace physique. L'équation (IV – 55) s'écrit alors: pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$\sum_{j=0}^N D_{ij} U_{1N}(\xi_j) - m U_{2N}(\xi_i) = - \sum_{j=0}^N D_{0j} U_{1N}(\xi_j) \tilde{h}_i(\xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_i} - \sum_{j=0}^N D_{Nj} U_{1N}(\xi_j) \tilde{h}_i(\xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_i} + m U_{2N}(\xi_0) \tilde{h}_i(\xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_i} + m U_{2N}(\xi_N) \tilde{h}_i(\xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_i}; \quad (IV - 57)$$

qui s'écrit aussi : pour tout  $i = 1, \dots, N-1$

$$\sum_{j=0}^N \left\{ D_{ij} + D_{0j} \tilde{h}_i(\xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_i} + D_{Nj} \tilde{h}_i(\xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_i} \right\} U_{1N}(\xi_j) - m U_{2N}(\xi_i) = m \left\{ U_{2N}(\xi_0) \tilde{h}_i(\xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_i} + U_{2N}(\xi_N) \tilde{h}_i(\xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_i} \right\}. \quad (IV - 58)$$

En particulier, si on tient compte des conditions aux limites de notre problème, c'est-à-dire  $\vec{U}_N(\pm 1) = 0$ , les égalités définies par (IV – 58) se simplifient et s'écrivent:

$$\sum_{j=1}^{N-1} D_{ij} U_{1N}(\xi_j) - m U_{2N}(\xi_i) = 0 \quad (IV - 59)$$

avec pour tout  $i$  et  $j = 1, \dots, N-1$

$$D_{ij} = D_{ij} + D_{0j} \tilde{h}_i(\xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_i} + D_{Nj} \tilde{h}_i(\xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_i} \quad (IV - 60)$$

et sachant que

$$\frac{\rho_N}{\rho_i} = \frac{\rho_0}{\rho_i} = (L_N(\xi_i))^2 \quad (IV - 61)$$

l'égalité (IV – 60) s'écrit :

$$D_{ij} = D_{ij} + D_{0j} \left( \frac{(-1)^N}{2} (\xi_i - 1) L_N(\xi_i) \right) - D_{Nj} \frac{(1 + \xi_i) L_N(\xi_i)}{2} \quad (IV - 62)$$

Remarque (IV-4) : On peut écrire une égalité analogue à (IV – 61) dans le cas  $\alpha = -\frac{1}{2}$ .

Nous allons nous intéresser maintenant à l'opérateur de gradient sur la pression.

### 4.5.3 Quel opérateur de gradient sur la pression ?

Le problème qu'on se pose ici est: étant donnée une pression  $p_N$  dans  $P_{N-2}(\bar{\Lambda})$ , comment calculer  $\vec{\nabla} p_N = (p'_N, mp)$ , plus exactement quel opérateur de dérivation peut on utiliser ?.

On propose ici deux solutions:

Première solution :

On utilise la procédure de dérivation décrite dans l'annexe 1 pour une fréquence de coupure égale à  $N - 2$ , en utilisant les points de Gauss-Lobatto internes. Le résultat obtenu est une matrice de dérivation qui a les mêmes propriétés spectrales que celle obtenue à partir des  $N-1$  points de Gauss.

Deuxième solution : Extrapolation de la pression :

$M_N$  étant muni de la base  $(\tilde{h}_i)_{i=1,\dots,N-1}$ , tout élément  $p_N$  de  $M_N$  s'écrit

$$\forall x \in \bar{\Lambda}, \quad p_N(x) = \sum_{j=1}^{N-1} p_N(\xi_j) \tilde{h}_j(x); \quad (IV - 63)$$

en particulier

$$p_N(\pm 1) = \sum_{j=1}^{N-1} p_N(\xi_j) \tilde{h}_j(\pm 1). \quad (IV - 64)$$

Connaissant la valeur de la pression aux points  $(\xi_i)$ ,  $i=0, \dots, N$  on peut calculer sa dérivée en utilisant l'opérateur de dérivation obtenu à partir des  $N + 1$  points de Gauss-Lobatto.

Le tableau (IV - 1) donne l'erreur obtenue en dérivant  $(1 + x)^{19}$  par la première méthode, par la deuxième et enfin en utilisant l'opérateur de dérivation obtenu à partir des  $N - 1$  points de Gauss. Dans ce même tableau, on donne aussi la dérivée 5<sup>ème</sup> de  $(1 + x)^4$ .

On constate que l'on peut utiliser chacune de ses trois méthodes. Pour nos résultats numériques nous avons utilisé la première.

#### 4.5.4 Quel opérateur $\mathcal{A}_m^\alpha$ sur la pression ?

Pour résoudre le système algébrique défini par (IV - 52) : (IV : 54) on construit, comme dans les chapitres II et III, un opérateur sur la pression noté  $\mathcal{A}_m^\alpha$ .

Propriétés de  $\mathcal{A}_m^\alpha$

i) le noyau de l'opérateur  $\mathcal{A}_m^\alpha$ , pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -\frac{1}{2}$  est réduit au vecteur nul ce qui correspond à l'absence des modes parasites.

ii) La figure (IV-1) représente le comportement de la plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{A}_m^\alpha (\mathcal{A}_m^\alpha)^T$  pour  $M_N = P_{N-2}(\Omega)$  et  $M_N = P_N(\Omega)$ . La plus grande valeur propre étant uniformément bornée, ce comportement est celui de la condition inf-sup  $\beta_N$  et bien sûr renseigne sur celui du nombre de conditionnement  $\mathcal{K}_m^\alpha$  de

$\mathcal{A}_m^\alpha$ . La courbe (a) montre que  $\beta_N$  et  $\mathcal{K}_m^\alpha$  sont asymptotiquement indépendants de  $N$ , plus précisément, pour  $N \geq 4$  la plus petite valeur propre est  $\lambda_{\min} = 0.224$ . De la courbe (b), on constate qu'on a une nette amélioration du comportement de  $\beta_N$  et de  $\mathcal{K}_m^\alpha$ .

## 4.6 Résultat de convergence et d'approximation

On résoud le problème de Stokes dont la solution exacte est:

$$\vec{U} = \left( \frac{1 + \cos(\pi x)}{\pi}, \sin(\pi x) \right);$$

et

$$p(x) = \cos(\pi x).$$

Le problème (IV-21) : (IV-23) est posé avec  $m = 1$ . On vérifie que  $\vec{U} \in (H_0^1(\Lambda))^2$  et que  $\text{Div} \vec{U} = (U_1' - mU_2) = 0$ .

La figure (IV-2) représente l'erreur d'approximation de la vitesse en fonction de la fréquence de coupure  $N$ . Pour tout  $N \geq 4$ , l'erreur d'approximation représentée est atteinte au bout de 3 itérations. On constate que la vitesse est approchée dans tout le domaine, frontière comprise.

Figure (IV-3) La courbe (a) représente l'erreur d'approximation de la pression en fonction de la fréquence de coupure  $N$ , l'écart à la pression exacte est évalué dans tout le domaine, frontière comprise.

la courbe (b) représente le

$$\log \left\{ \sup_{0 \leq i \leq N} | \text{Div} \vec{U}_N(\xi_i) | \right\}$$

en fonction de  $N$ . On constate que  $\text{Div} \vec{U}_N$  tend vers zéro sur tout le domaine, frontière comprise, et que cette convergence est spectrale.

Remarque (IV-5) : Tous les résultats présentés correspondent au cas  $\alpha = 0$  mais on vérifie qu'ils sont identiques pour  $\alpha = -\frac{1}{2}$ .

## 4.7 Conclusion

La nouvelle méthode d'approximation spectrale de collocation pour le problème de Stokes présenté au cours de ce chapitre, nous a permis de construire une bonne approximation de la solution et en particulier d'éliminer les modes parasites et aussi les modes faiblement parasites, l'absence de ces derniers se traduit par le fait que le nombre de conditionnement de l'opérateur sur la pression soit indépendant de

N et du mode de Fourier considéré .

Cette méthode a les mêmes propriétés que celle présenté dans [M.P.R] et dans [M.M.P.R] et est moins coûteuse du fait qu'elle utilise une grille unique.

Au cours du chapitre suivant nous allons généraliser cette méthode aux deux problèmes de Stokes correspondants aux conditions aux limites du type:

- Dirichlet homogène dans un domaine bidimensionnel carré,
- périodiques dans une direction et non périodiques dans les deux autres dans un domaine tridimensionnel cubique.

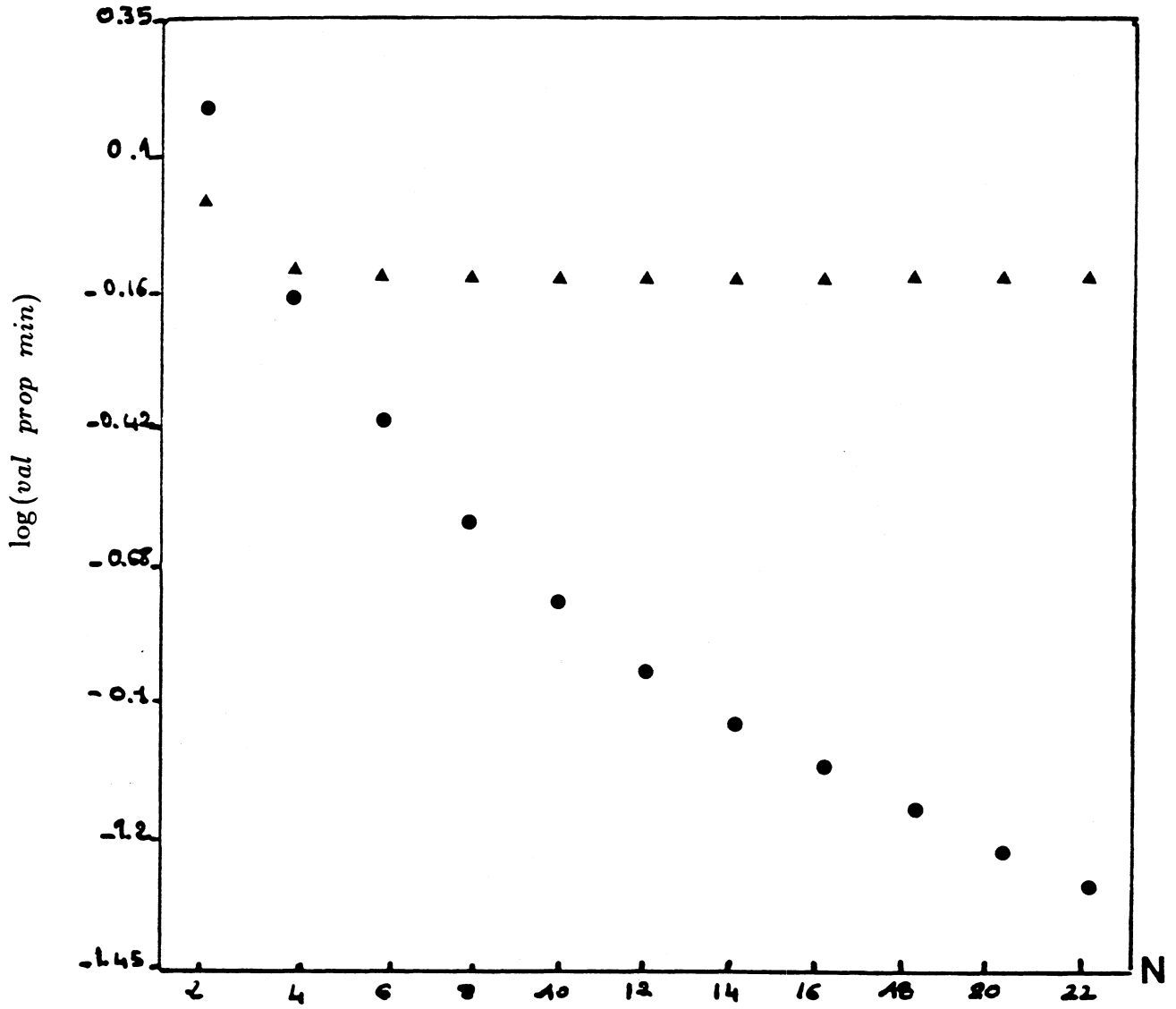
| <div>Méthode</div> <div>Erreur</div>             | 1ère méthode | 2ème méthode | 3ème méthode |
|--------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|
| Erreur sur la dérivation 1 ère de $(1 + x)^{19}$ | 5.0 E -13    | 1.2 E -13    | 6.0 E -13    |
| Erreur sur la dérivation 5 ème de $(1 + x)^4$    | 2.0 E - 12   | 3.0 E -12    | 7.2 E -12    |

Tableau (IV-I)

Extrapolation Euclidienne sur les N - 1 points de Gauss Lobatto internes

$$\alpha = 0$$

$$m = 1$$



$$\bullet \quad X_N = (P_N^0(\Lambda))^2 \quad M_N = P_N(\Lambda)$$

$$\blacktriangle \quad X_N = (P_N^0(\Lambda))^2 \quad M_N = P_{N-2}(\Lambda)$$

figure (IV-1)

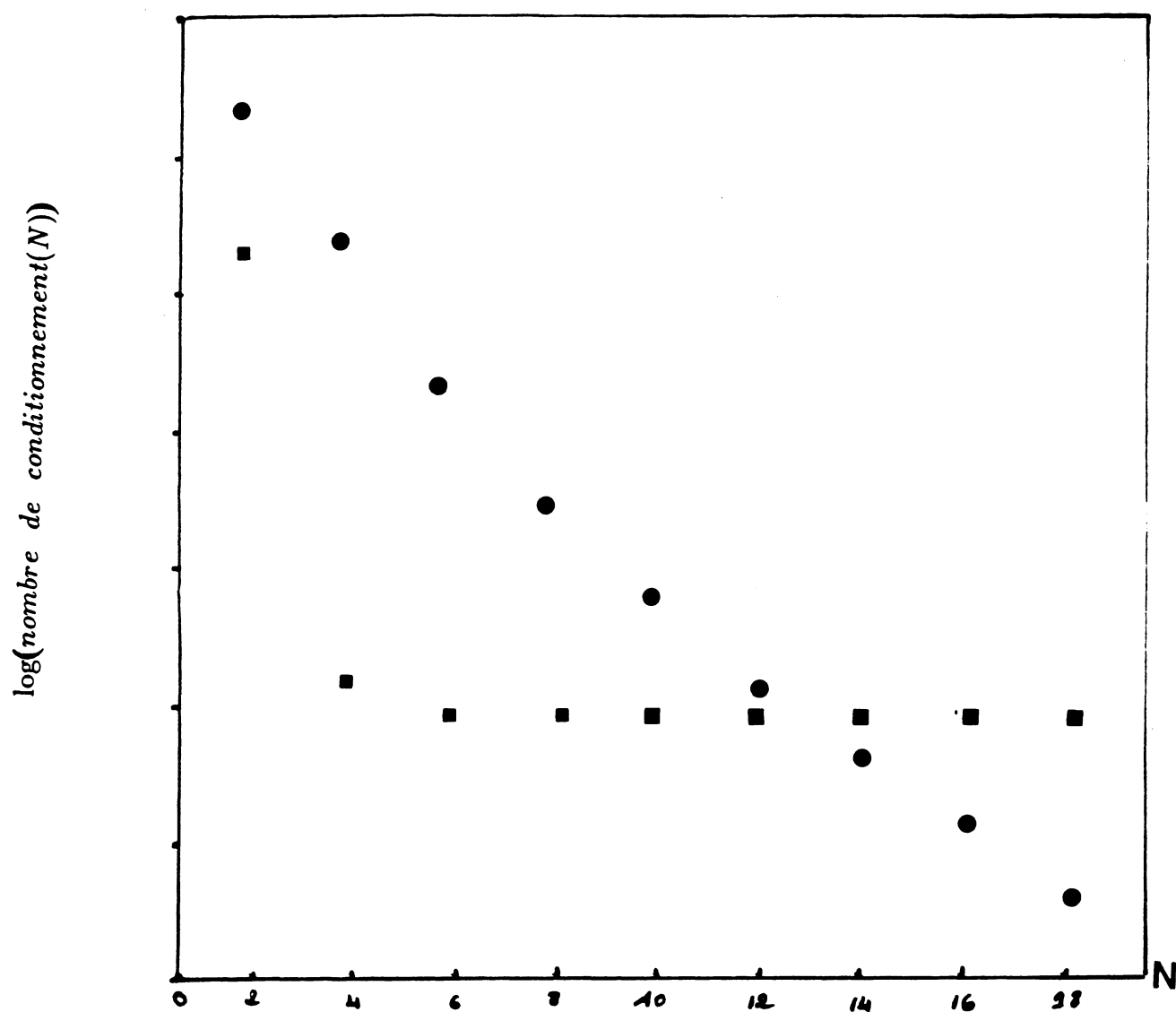


figure (IV-2)

$$\blacksquare X_N = \left(P_N^0(\Lambda)\right)^2 \quad M_N = P_{N-2}(\Lambda) \quad \bullet X_N = \left(P_N^0(\Lambda)\right)^2 \quad M_N = P_N(\Lambda)$$

figure (IV-3)

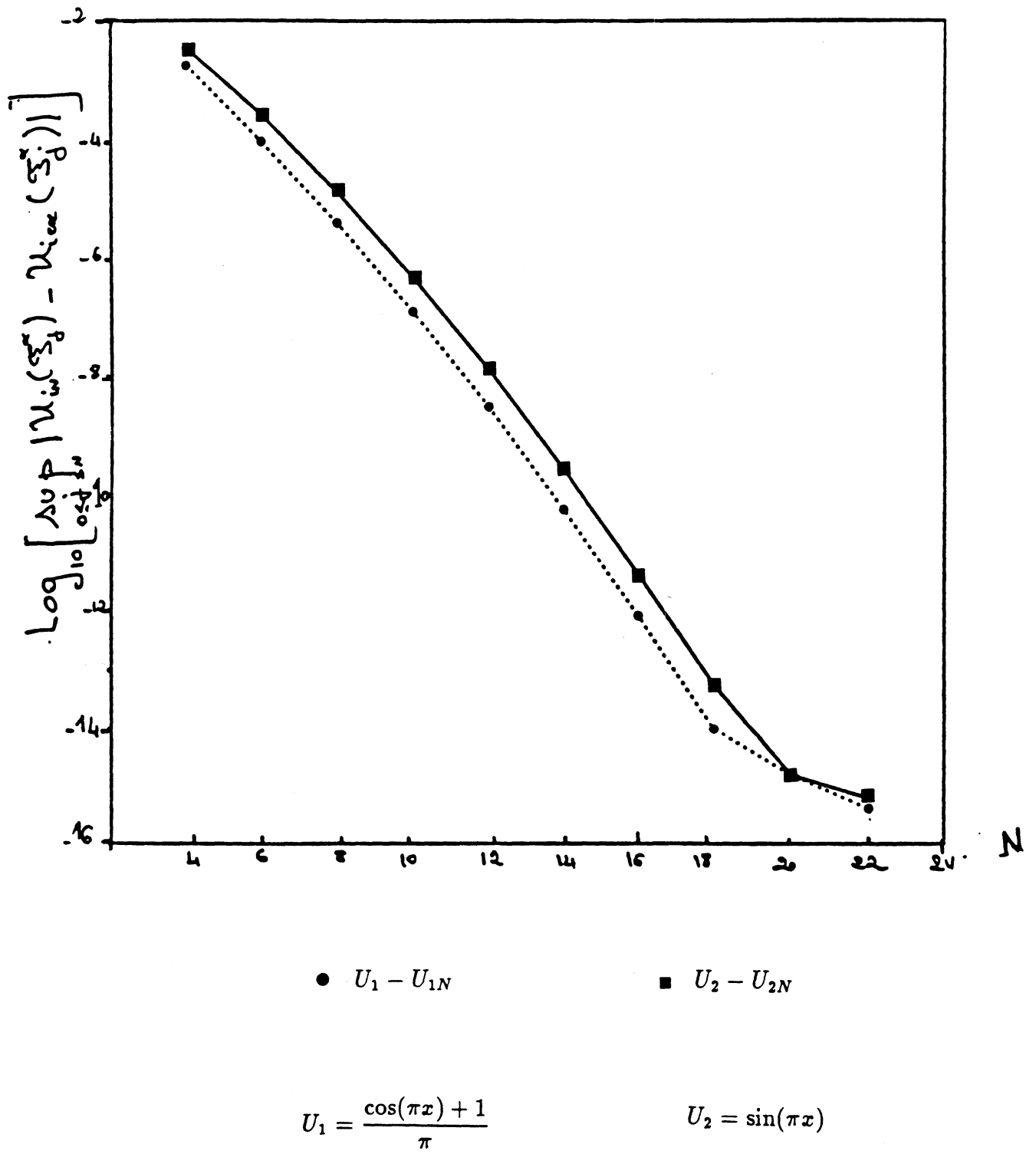
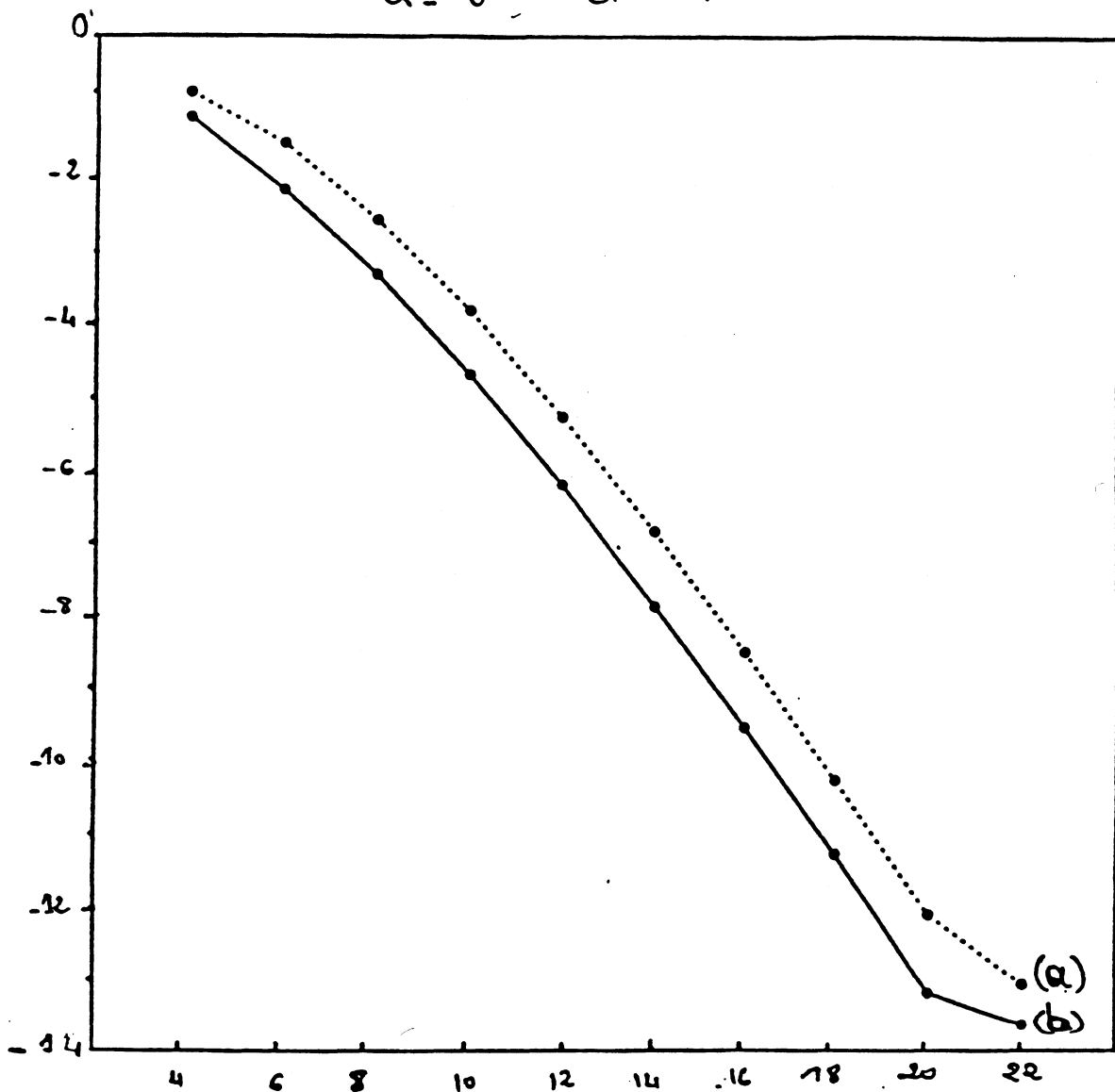


figure (IV-4)

$\alpha = 0$  et  $m = 1$ .



$$(a) : \text{Log}_{10} \left[ \sup_{0 \leq i \leq N} | \vec{v} p_e(\xi_i) - \vec{v} p_N(\xi_i) | \right]$$

$$(b) : \text{Log}_{10} \left[ \sup_{0 \leq i \leq N} | \text{div } \vec{u}_N(\xi_i) | \right]$$

$$\text{avec } \text{div } \vec{u}_N = u'_{1N} - m u_{2N}$$

$$\text{et } \vec{v} p_N = (p'_N, m p_N)$$

# Chapitre 5

## Applications au problème de Stokes

Dans ce chapitre, nous allons généraliser la méthode présentée dans le chapitre précédent aux deux situations suivantes:

- le problème de Stokes muni des conditions aux limites Dirichlet homogène et posé dans un domaine bidimensionnel carré, qu'on appellera problème 2 –  $D$ ;
- le problème de Stokes muni des conditions aux limites périodiques dans une direction et non périodiques dans les deux autres et posé dans un domaine tridimensionnel cubique, qu'on appellera problème 2.5 –  $D$

### 5.1 Approximation du problème de Stokes en 2-D

Dans cette section on désignera par  $X$  l'espace  $(H_0^1(\Omega))^2$  et par  $M$  l'espace  $L_0^2(\Omega)$  avec,  $\Omega = (]-1, +1[)^2$

#### 5.1.1 Problème continu

Etant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $X'$ , on cherche  $(\vec{U}, p)$  dans  $X \times M$  vérifiant:

$$\forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) + \mathcal{B}(\vec{V}, p) = \langle \vec{f}, \vec{V} \rangle, \quad (V-1)$$

$$\forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{U}, q) = 0, \quad (V-2)$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont les formes bilinéaires définies par:

$$\forall \vec{U} \in X, \forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) = -\nu(\Delta \vec{U}, \vec{V}), \quad (V-3)$$

et

$$\forall \vec{V} \in X, \forall q \in M, \quad B(\vec{U}, q) = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}, q) \quad (V-4)$$

### 5.1.2 Problème discret

Soit  $N$  un entier  $\geq 3$ , on considère les deux espaces polynômiaux suivants

$$X_N = [P_N^0(\Omega)]^2 \quad \text{et} \quad M_N = P_{N-2}(\Omega) \cap L_2^0(\Omega). \quad (V-6)$$

Pour  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$ , le problème à approcher consiste à trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  tel que : pour tout  $\vec{V}_N = (V_{1N}, V_{2N})$  dans  $X_N$  et pour tout  $q_N$  dans  $M_N$  on ait :

$$-\nu(\Delta U_{1N}, V_{1N})_N + \left(\frac{\partial p_N}{\partial x}, V_{1N}\right)_N = (f_1, V_{1N})_N, \quad (V-7)$$

$$-\nu(\Delta U_{2N}, V_{2N})_N + \left(\frac{\partial p_N}{\partial y}, V_{2N}\right)_N = (f_2, V_{2N})_N, \quad (V-8)$$

$$\left(\frac{\partial U_{1N}}{\partial x} + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}, q_N\right)_N = 0. \quad (V-9)$$

Afin d'analyser ce problème, on définit les formes bilinéaires  $\mathcal{A}_N$  et  $b_N$  par :

$$\begin{aligned} \forall \vec{U} \in (C^2(\bar{\Omega}))^2, \quad \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2 \\ \mathcal{A}_N(\vec{U}, \vec{V}) = -\nu(\Delta \vec{U}, \vec{V})_N; \end{aligned} \quad (V-10)$$

et

$$\begin{aligned} \forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \quad \forall q \in C^1(\bar{\Omega}) \\ b_N(\vec{V}, q) = (\vec{V}, \vec{\nabla} q)_N. \end{aligned} \quad (V-11)$$

Notons que l'exactitude de la formule d'intégration numérique de Gauss-Lobatto sur  $P_{2N-1}(\Omega)$  permet d'écrire: pour tout  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$  et  $q_N$  dans  $P_N(\Omega)$

$$b_N(\vec{V}_N, q_N) = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_N, q_N)_N = B(\vec{U}, q), \quad (V-12)$$

elle entraîne aussi que pour tout  $\vec{U}_N$  et  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$ , on a :

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = \nu(\nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{V}_N)_N. \quad (V-13)$$

On peut maintenant écrire la formulation variationnelle: trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  tel que

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + B(\vec{V}_N, p_N) = (\vec{f}_N, \vec{V}_N)_N; \quad (V-14)$$

$$\forall q_N \in M_N, \quad B(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (V-15)$$

On rappelle que les formes  $\mathcal{A}_N$  sont continues sur  $X_N \times X_N$  uniformément par rapport à  $N$  et uniformément elliptiques sur  $X_N$ .

On note aussi que l'espace  $M_N$  étant inclus dans  $M$ , la forme  $\mathcal{B}$  reste continue sur  $M_N$ , il suffit donc, pour donner un résultat d'existence et d'unicité [Br] de la solution du problème (V-14) : (V-15) de vérifier l'hypothèse de l'existence d'une constante inf-sup pour la forme  $\mathcal{B}$  sur  $X_N \times M_N$

### Condition inf-sup :

On montre dans l'annexe 3, qu'il existe une constante  $C$ , indépendante de  $N$ , telle que

$$\forall q_N \in M_N, \exists \vec{V}_N \neq 0 \quad / \quad \mathcal{B}(\vec{V}_N, q_N) \geq CN^{-\frac{1}{2}} \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M. \quad (V-16)$$

Ce qui nous permet d'énoncer le résultat suivant:

**Théorème (V-1)** Pour tout  $\vec{f}$  dans  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$ , le problème spectral de collocation (V-14) : (V-15) admet une solution unique dans  $X_N \times M_N$ . De plus si la solution  $(\vec{U}, p)$  du problème continu (V-10) : (V-11) appartient à l'espace  $(H^s(\Omega))^2 \cap X \times (H^{s-1}(\Omega))$ ,  $s \geq 0$ , et si  $\vec{f}$  appartient à  $(H^\sigma(\Omega))^2$  pour  $\sigma > 1$  alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $N$  telle que

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq C \{N^{1-s} \|\vec{U}\|_{s,\Omega} + N^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}\}; \quad (V-17)$$

et

$$\|p - p_N\|_M \leq CN^{\frac{1}{2}} \{N^{1-s} \|\vec{U}\|_{s,\Omega} + N^\sigma \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega}\}. \quad (V-18)$$

### 5.1.3 Technique de résolution

Dans cette section nous allons construire le système algébrique à résoudre et présenter quelques résultats numériques.

Comme dans le chapitre quatre, pour construire le système algébrique nous allons passer par trois étapes:

#### Première étape

En prenant dans (V-14) comme fonctions tests la suite  $\vec{V}_N = (h_i, h_j, 0)$  pour  $i, j = 1, \dots, N-1$ , où  $h_i$  est défini par (IV-36), on obtient :

$$-\nu \Delta U_{1N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\bar{x}) = f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (V-19)$$

#### Deuxième étape

En prenant dans (V - 14) comme fonctions tests la suite  $\vec{V}_N = (0, h_i h_j)$  pour  $i, j = 1, \dots, N-1$ , on obtient:

$$-\nu \Delta U_{2N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega. \quad (V - 20)$$

### Troisième étape

En prenant dans (V - 15) comme fonctions tests la suite  $\tilde{h}_i(x) \tilde{h}_j(y)$  pour  $1 \leq i, j \leq N - 1$ , où  $\tilde{h}_i(x)$  est défini par (IV - 37), on obtient pour tout  $1 \leq i, j \leq N - 1$ ,

$$B(\vec{U}_N, \tilde{h}_i \tilde{h}_j) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_N, \tilde{h}_i \tilde{h}_j)_N \quad (V - 21)$$

qui s'écrit aussi

$$B(\vec{U}_N, \tilde{h}_i \tilde{h}_j) = b_1 + b_2 \quad (V - 22)$$

avec

$$b_1 = \left( \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}, \tilde{h}_i \tilde{h}_j \right)_N \quad (V - 23)$$

et

$$b_2(U_{2N}, \tilde{h}_i \tilde{h}_j) = \left( \frac{\partial U_{1N}}{\partial y}, \tilde{h}_i \tilde{h}_j \right)_N \quad (V - 24)$$

En développant chacun de ces produits scalaires discrets et en utilisant le fait que  $\vec{U}_N$  est dans X on obtient :

$$b_1 = \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j + \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_0, \xi_j) \rho_0 \rho_j \tilde{h}_i(\xi_0) + \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_N, \xi_j) \rho_N \rho_j \tilde{h}_i(\xi_N). \quad (V - 25)$$

et

$$b_2 = \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_0) \rho_i \rho_0 \tilde{h}_j(\xi_0) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_N) \rho_i \rho_N \tilde{h}_j(\xi_N). \quad (V - 26)$$

A partir de (V - 22) : (V - 25) on a : pour tout  $1 \leq i, j \leq N - 1$

$$\frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \rho_j + \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_0, \xi_j) \rho_0 \rho_j \tilde{h}_i(\xi_0) + \quad (V - 27)$$

$$\frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_N, \xi_j) \rho_N \rho_j \tilde{h}_i(\xi_N) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_0) \rho_i \rho_0 \tilde{h}_j(\xi_0) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_N) \rho_i \rho_N \tilde{h}_j(\xi_N) = 0.$$

On peut maintenant écrire le système algébrique à résoudre :

Soit  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  appartenant à  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$ , on cherche  $(\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N}), p_N)$  dans  $X_N \times M_N$  vérifiant

$$-\nu \Delta U_{1N}(\xi_i, \xi_j) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\xi_i, \xi_j) = f_1(\xi_i, \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq N - 1, \quad (V - 28)$$

$$-\nu \Delta U_{2N}(\xi_i, \xi_j) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\xi_i, \xi_j) = f_2(\xi_i, \xi_j), \quad 1 \leq i, j \leq N - 1, \quad (V - 29)$$

$$\frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_i, \xi_j) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_j) = d_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq N-1. \quad (V-30)$$

avec pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$d_{i,j} = - \left[ \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_0, \xi_j) \frac{\rho_0}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_0) + \frac{\partial U_{1N}}{\partial x}(\xi_N, \xi_j) \frac{\rho_N}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_N) \right] \\ - \left[ \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_0) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial y}(\xi_i, \xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_N) \right].$$

Remarque (V-1) : Les problèmes (V-28) : (V-30) et (V-14), (V-15) sont équivalents.

Pour la résolution numérique des équations (V-28) : (V-30) nous allons donner la représentation matricielle des opérateurs de divergence et de gradient.

### Quel opérateur de divergence sur la vitesse ?

On note  $\mathcal{D}_x$ , (resp  $\mathcal{D}_y$ ) la matrice de dérivation première par rapport à  $x$ , (resp par rapport à  $y$ ), (Annexe 1), on a alors :

Pour tout  $i, j = 0, \dots, N$  on a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=0}^N (\mathcal{D}_x)_{ik} U(\xi_k, \xi_j), \quad (V-31)$$

et

$$\frac{\partial U}{\partial y}(\xi_i, \xi_j) = \sum_{k=0}^N (\mathcal{D}_y)_{ki} U(\xi_j, \xi_k). \quad (V-32)$$

Les égalités (V-30) s'écrivent alors : Pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$\sum_{k=1}^{N-1} (\mathcal{DV}_x)_{ik} U_{1N}(\xi_k, \xi_j) + \sum_{k=1}^{N-1} (\mathcal{DV}_y)_{ki} U_{2N}(\xi_j, \xi_k) = 0 \quad (V-33)$$

avec pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$(\mathcal{DV}_x)_{ij} = (\mathcal{D}_x)_{ij} + (\mathcal{D}_x)_{0j} \frac{\rho_0}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_0) + (\mathcal{D}_x)_{Nj} \frac{\rho_N}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_N), \quad (V-34)$$

et

$$(\mathcal{DV}_y)_{ij} = (\mathcal{D}_y)_{ij} + (\mathcal{D}_y)_{i0} \frac{\rho_0}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_0) + (\mathcal{D}_y)_{iN} \frac{\rho_N}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_N). \quad (V-35)$$

Ces trois dernières égalités donnent la représentation matricielle de (V-30).

### Quel opérateur de gradient sur la pression ?

L'étude faite dans le chapitre IV concernant la dérivation d'un polynôme de degré

N-2 en utilisant les N-1 points internes de Gauss-Lobatto se généralise facilement au cas présent. On notera pour ceci que

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad p_N(x, y) = \sum_{i,j=1}^{N-1} p_N(\xi_i, \xi_j) \tilde{h}_i(x) \tilde{h}_j(y) \quad (V - 36)$$

et qu'en particulier pour tout  $k = 1, \dots, N-1$

$$p_N(\pm 1, \xi_k) = \sum_{i,j=1}^{N-1} p_N(\xi_i, \xi_j) \tilde{h}_i(\pm 1) \tilde{h}_j(\xi_k), \quad (V - 37)$$

(i.e)

$$p_N(\pm 1, \xi_k) = \sum_{i=1}^{N-1} p_N(\xi_i, \xi_k) \tilde{h}_i(\pm 1), \quad (V - 38)$$

et

$$p_N(\xi_k, \pm 1) = \sum_{j=1}^{N-1} p_N(\xi_k, \xi_j) \tilde{h}_j(\pm 1). \quad (V - 39)$$

Enfin on a

$$p_N(\pm 1, \pm 1) = \sum_{i,j=1}^{N-1} p_N(\xi_i, \xi_j) \tilde{h}_i(\pm 1) \tilde{h}_j(\pm 1). \quad (V - 40)$$

On note que le cas  $\alpha = -\frac{1}{2}$  se traite de manière identique.

### 5.1.4 Résultats numériques

En première partie nous allons donner quelques propriétés concernant l'opérateur obtenu pour la pression noté  $\mathcal{A}^\alpha$ , ensuite on donne des résultats d'approximation et de convergence.

#### Propriétés de $\mathcal{A}^\alpha$

i) Le noyau de  $\mathcal{A}^\alpha$  est réduit au sous espace vectoriel de dimension 1 engendré par le polynôme constant.

ii) La plus grande valeur propre de  $\mathcal{A}^\alpha$  est bornée et sa plus petite dépend de N (fig V-1), on mesure que pour N assez grand

$$\lambda_{min} = O(N^{-\frac{1}{4}}),$$

ce qui donne une valeur numérique de la constante  $\beta_N$  meilleure que celle donnée dans le théorème (V - 1).

De ces propriétés on conclut que la nouvelle discrétisation des équations de Stokes nous a permis de :

- éliminer les modes parasites non constants
- réduire le nombre de conditionnement de  $\mathcal{A}$ , (on passe de  $\mathcal{K} = O(N^2)$  à  $\mathcal{K} = O(N^{\frac{1}{4}})$ )

#### **Résultats d'approximation et de convergence**

On considère le problème de Stokes ayant pour solution exacte  $(\vec{U}, p)$  avec

$$U_1(x, y) = U_2(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

et

$$p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$$

La figure (V-2) représente l'erreur d'approximation de la pression et de la divergence calculée sur tout le domaine, frontière comprise. On note que la convergence est spectrale et que la pression est approchée et la contrainte de continuité est satisfaite dans tout le domaine, frontière comprise.

#### **Nombre d'itérations :**

On présente dans cette partie une étude numérique sur le nombre d'itérations requis pour atteindre la précision spectrale. On sait que pour  $N$  assez grand et si  $\mathcal{NB}$  désigne ce nombre, alors

$$\mathcal{NB}(N) = \sqrt{\mathcal{K}} = O(N^{\frac{1}{8}}). \quad (V - 41)$$

On s'intéresse dans cette section au comportement de ce nombre pour les premières valeurs de  $N$ . Pour ceci on considère le problème de Stokes ayant pour solution exacte  $\vec{U} = 0$  et  $P(x, y) = (1+x)^{N-2} + (1+y)^{N-2}$ , que l'on résout pour différentes valeurs de  $N$  et on considère le nombre d'itérations utilisées pour converger. L'ensemble de ces résultats est représenté par la figure (V-3), on constate que ce nombre est une fonction linéaire de la fréquence de coupure.

#### **5.1.5 conclusion**

Le nouvel algorithme présenté dans cette partie et qui est l'extension de celui détaillé dans le chapitre IV, nous a permis de résoudre à la précision spectrale les équations de Stokes. Nous allons dans la partie suivante montrer qu'avec cette méthode on peut résoudre le problème de Stokes posé dans un domaine tridimensionnel et muni des conditions aux limites périodiques dans une direction et non périodiques dans les deux autres.

## **5.2 Application au problème de Stokes 2.5-D**

On se propose dans cette partie de généraliser la méthode présentée dans la première partie et dans le chapitre IV au problème suivant :

Soit  $m$  un entier non nul et soit  $\vec{f}$  un élément de  $((H^{-1}(\Omega))^3)$  on cherche  $(\vec{U}, p)$  dans  $(H_0^1(\Lambda^2))^3 \times L^2(\Lambda^2)$  vérifiant :

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - m^2 U_1\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = f_1, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (V-42)$$

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - m^2 U_2\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = f_2, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (V-43)$$

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} - m^2 U_3\right) + mp = f_3, \quad \text{dans } \Lambda^2; \quad (V-44)$$

et

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} - m U_3 = 0 \quad \text{dans } \Lambda^2. \quad (V-45)$$

avec  $\Omega = \Lambda^2 \times \Theta$ ,  $\Lambda = ]-1, +1[$  et  $\Theta = ]0, 2\pi[$ .

On rappelle que ce problème est issu de la décomposition de  $(III-1) : (III-3)$  suivant chaque mode de Fourier.

### 5.2.1 Problème discret

Soit  $N$  un entier  $\geq 3$ , on considère les deux espaces de polynômes  $X_N$  et  $M_N$  définis par  $X_N = (P_N^0(\Lambda^2))^3$  et  $M_N = P_N(\Lambda^2)$ .

Soit  $m$ , un entier non nul  $\leq M$ , pour tout  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $(C^0(\bar{\Lambda}^2))^3$ , on cherche  $(\vec{U}_N, p_N)$  appartenant à  $X_N \times M_N$  et vérifiant:

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + \mathcal{B}(\vec{V}_N, p_N) = (\vec{f}_N, \vec{V}_N)_N; \quad (V-46)$$

$$\forall q_N \in M_N, \quad \mathcal{B}(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (V-47)$$

où  $\mathcal{A}_N$  et  $\mathcal{B}$  sont les formes bilinéaires définies par:  $\forall \vec{U}_N \in X_N, \forall \vec{V}_N \in X_N$ ,

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = -\nu(\Delta \vec{U}_N - m^2 \vec{U}_N, \vec{V}_N)_N, \quad (V-48)$$

et  $\forall \vec{V}_N \in X_N, \forall q_N \in M_N$ ,

$$\mathcal{B}(\vec{U}_N, q_N) = - \int_{\Lambda^2} \text{DIV} \vec{V}_N q_N dx = \int_{\Lambda^2} \vec{V}_N \cdot \vec{\text{grad}} q_N dx. \quad (V-49)$$

où

$$\vec{\text{grad}} p = \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, m \cdot p \right) \quad (V-50)$$

et

$$\text{DIV} \vec{U} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + -m \cdot U_3 \quad (V-51)$$

On peut montrer que le problème  $(V-46) : (V-47)$  est bien posé et admet une solution unique dans  $X_N \times M_N$ .

## 5.2.2 Système algébrique et résultats numériques

En reprenant les 3 étapes décrites dans la première partie pour écrire le système algébrique, on montre que le problème  $(V - 46) : (V : 47)$  est équivalent à: étant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$  dans  $(C^0(\bar{\Lambda}^2))^3$ , trouver  $(\vec{U}_N, p_N)$  appartenant à  $X_N \times M_N$  et vérifiant:

$$-\nu(\Delta U_{1N} - m^2 U_{1N})(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial x}(\bar{x}) = f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Lambda^2; \quad (V - 52)$$

$$-\nu(\Delta U_{2N} - m^2 U_{2N})(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial y}(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Lambda^2; \quad (V - 53)$$

$$-\nu(\Delta U_{3N} - m^2 U_{3N})(\bar{x}) + m p_N(\bar{x}) = f_3(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Lambda^2; \quad (V - 54)$$

et

$$DIV \vec{U}_N(\bar{x}) = d_{ij}, \quad \bar{x} \in \Xi_N. \quad (V - 55)$$

où les  $d_{ij}$  sont donnés par  $(V - 30)$ .

Remarque (V-II) : On peut généraliser cette discrétisation dans le cas où  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . A partir de  $(V - 46) : (V - 47)$  on constuit, comme dans le chapitre III, un opérateur sur la pression qu'on notera aussi  $\mathcal{A}_m^\alpha$ , dont on donnera quelques propriétés. Propriétés de  $\mathcal{A}_m^\alpha$  i) Pour tout  $m \geq 1$ , le noyau de  $\mathcal{A}_m^\alpha$  est réduit au vecteur nul, ce qui correspond à l'absence de modes parasites. On pourra donc calculer la pression correctement.

ii) On fixe  $m=1$  ce qui correspond pour la première méthode au cas de plus mauvaise convergence, et on étudie le comportement du nombre de conditionnement en fonction de  $N$ , la figure (V-4) montre que pour  $N$  assez grand

$$\mathcal{K}_1 = O(N^{\frac{1}{10}})$$

ce qui améliore celui que l'on trouvait par la première méthode [A.L1], c'est-à-dire :

$$\mathcal{K}_1 = O(N^2).$$

Ce résultat nous donne aussi une approximation numérique du comportement de la constante  $\beta_N$ , qui en utilisant (II-33) vaut

$$\beta_N = O(N^{-\frac{1}{20}}),$$

un résultat qui reste à démontrer théoriquement.

### Convergence et approximation

On considère le problème de Stokes dont la solution exacte est

$$\vec{U}(x, y) = \left( \sin(\pi x) \sin(\pi y), \frac{(1 + \cos(\pi x))}{\pi} \sin(\pi y), \sin(\pi x) \frac{(1 + \cos(\pi y))}{\pi} \right)$$

et

$$P(x, y) = \cos(\pi x) + \cos(\pi y)$$

et on résoud le système  $(V - 52) : (V - 54)$  pour différentes valeurs de  $N$  et pour  $m = 1$ . La figure (V-5) représente l'erreur d'approximation de la pression et de la divergence dans tout le domaine frontière comprise. On constate que la convergence est spectrale et que la pression et la divergence de la vitesse sont approchées au zéro de la machine près dans tout le domaine. On note que pour  $N = 20$  il nous a fallu 54 itérations pour atteindre la solution du problème.

### Influence des modes faiblement parasites sur le processus itératif :

On reprend le problème de Stokes dont la solution exacte est donnée ci dessus que l'on résoud pour différente valeur de  $m$ . Et on considère pour chaque mode de Fourier le nombre d'itérations utilisées pour atteindre la solution exacte, la fréquence de coupure non périodique est fixé à  $N = 20$ . L'ensemble des résultats est représenté dans le tableau (V-1) , on constate que pour toutes les valeurs de  $m$ , le processus itératif converge vers la solution exacte en vitesse et que le nombre d'itérations utilisées reste compris entre 55 et 45. On n'a donc plus de problème de convergence pour les premiers modes ( chapitre III).

### 5.2.3 Conclusion :

La technique de discrétisation des équations de Stokes présentée dans le chapitre IV et V nous a permis d'apporter une solution aux différents problèmes présents dans la première méthode (chapitre II et III).

On rappelle que cette technique repose sur deux idées principales:

i) Le choix des espaces d'approximation : plusieurs auteurs ont déjà utilisé ce même choix, en particulier [M.P.R] dont les résultats numériques correspondent aux notres. Ce choix nous a permis d'éliminer les modes parasites et d'améliorer le nombre de conditionnement de l'opérateur défini sur la pression.

ii) La discrétisation de la formulation variationnelle et le choix de fonctions tests nous ont permis, malgré la différence de degré entre les polynômes de  $X_N$  et ceux de  $M_N$ , de résoudre l'ensemble des équations de mouvement et la contrainte de continuité sur une même grille et donc d'éviter l'utilisation d'opérateur d'interpolation [Le].

Nous allons dans le chapitre suivant, appliquer cette méthode au cas d'écoulements axisymétriques confinés en géométrie cylindrique annulaire et comparer avec les résultats trouvés par la méthode  $(P_N, P_N)$ .

$$\alpha = 0$$

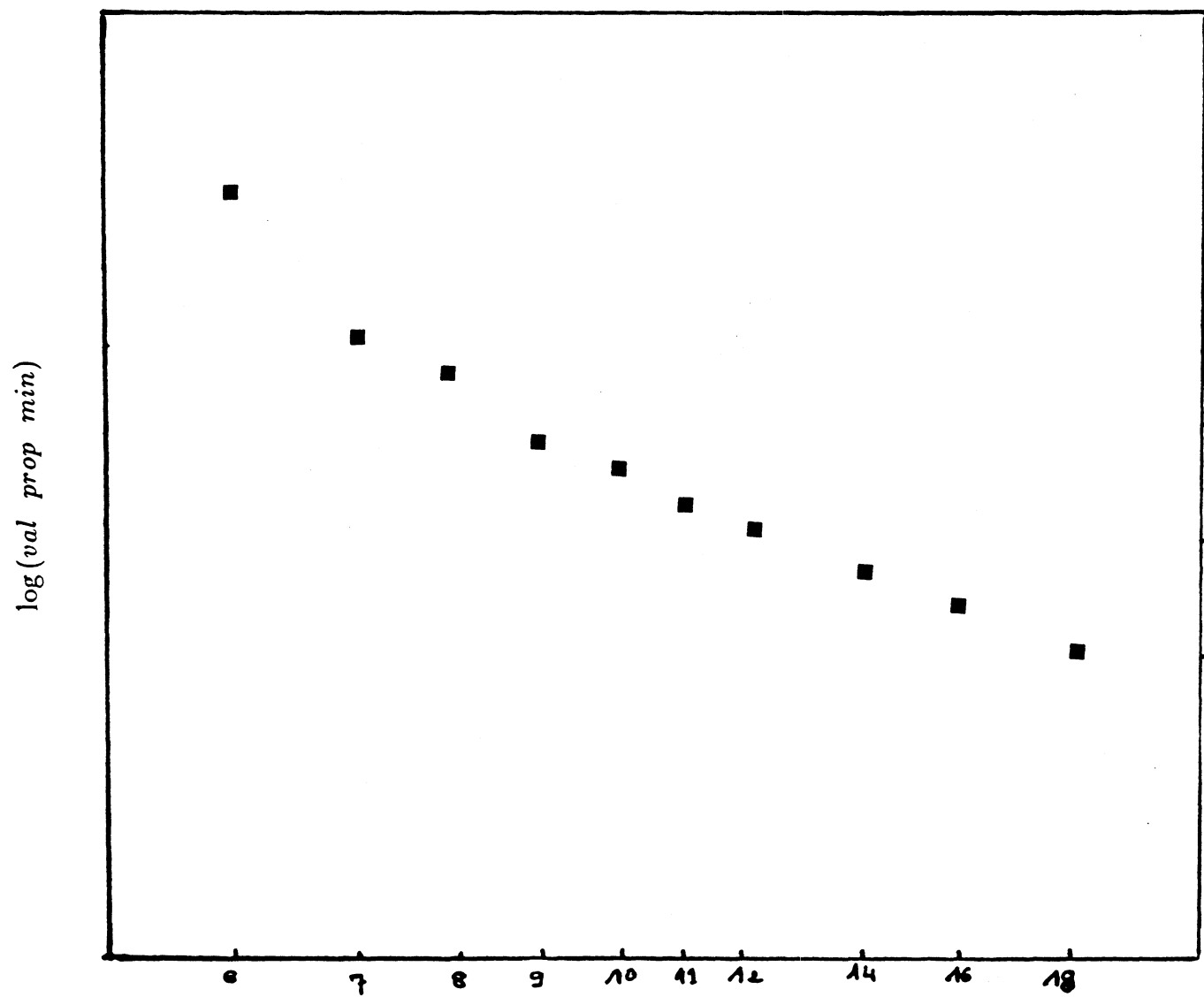
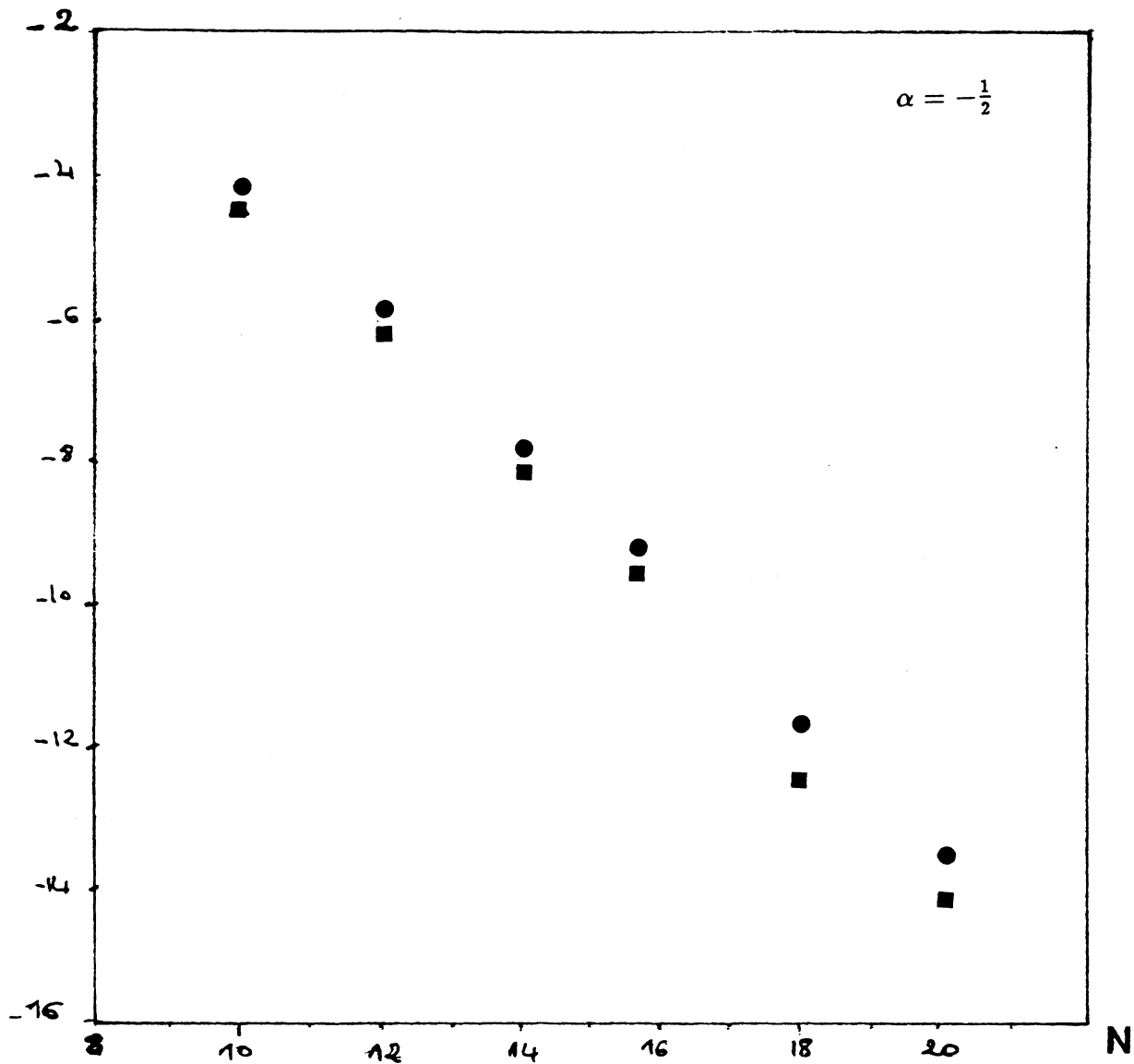


figure (V-1)

figure (V-2)



(●) :  $\log \left( \sup_{i=0,N} (\nabla p_\epsilon(\xi_i) - \nabla p_N(\xi_i)) \right)$

(■) :  $\log \left( \sup_{i=0,N} (\text{Div } U_N(\xi_i)) \right)$

$$\alpha = 0$$

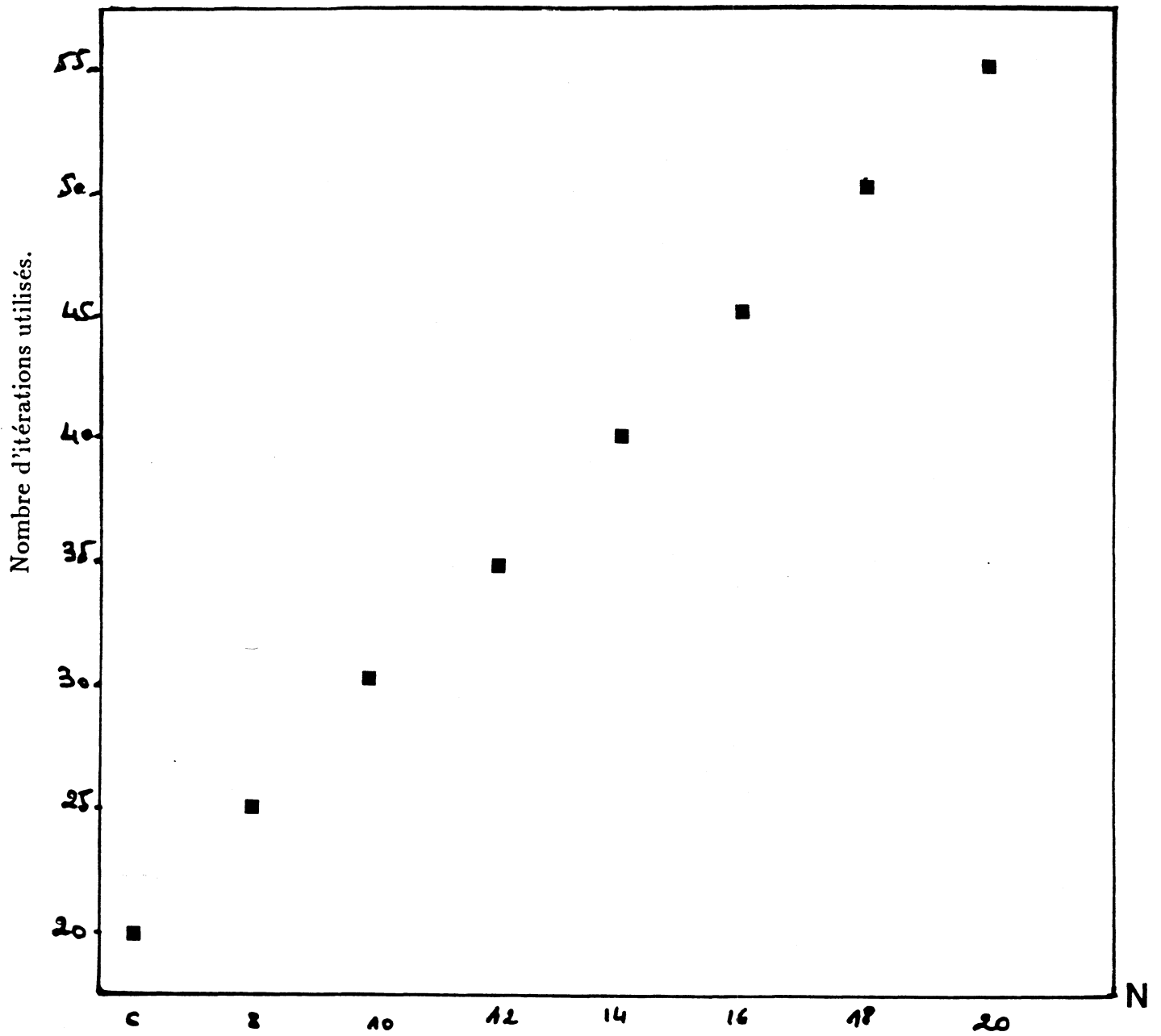


figure (V-3)

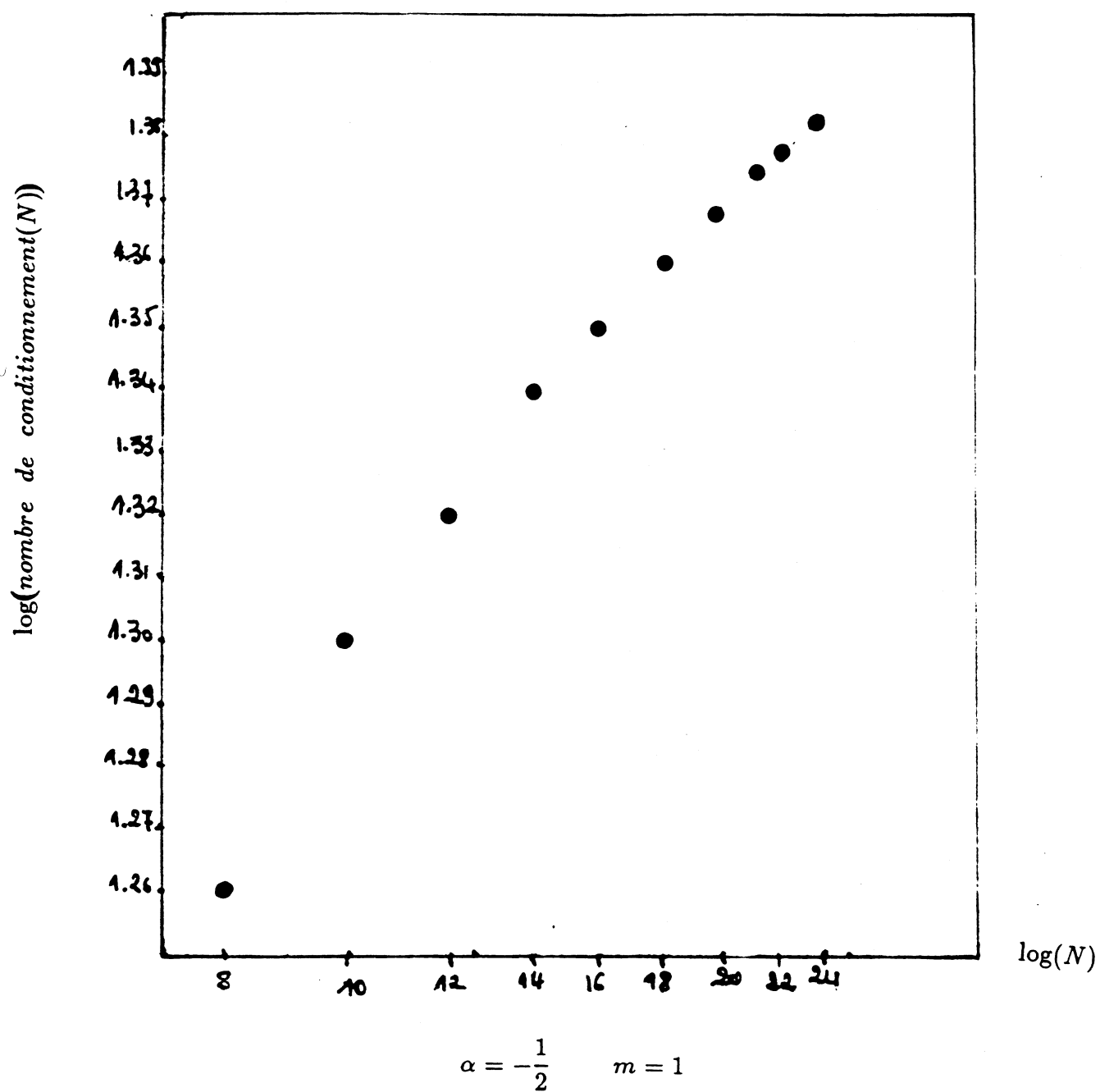
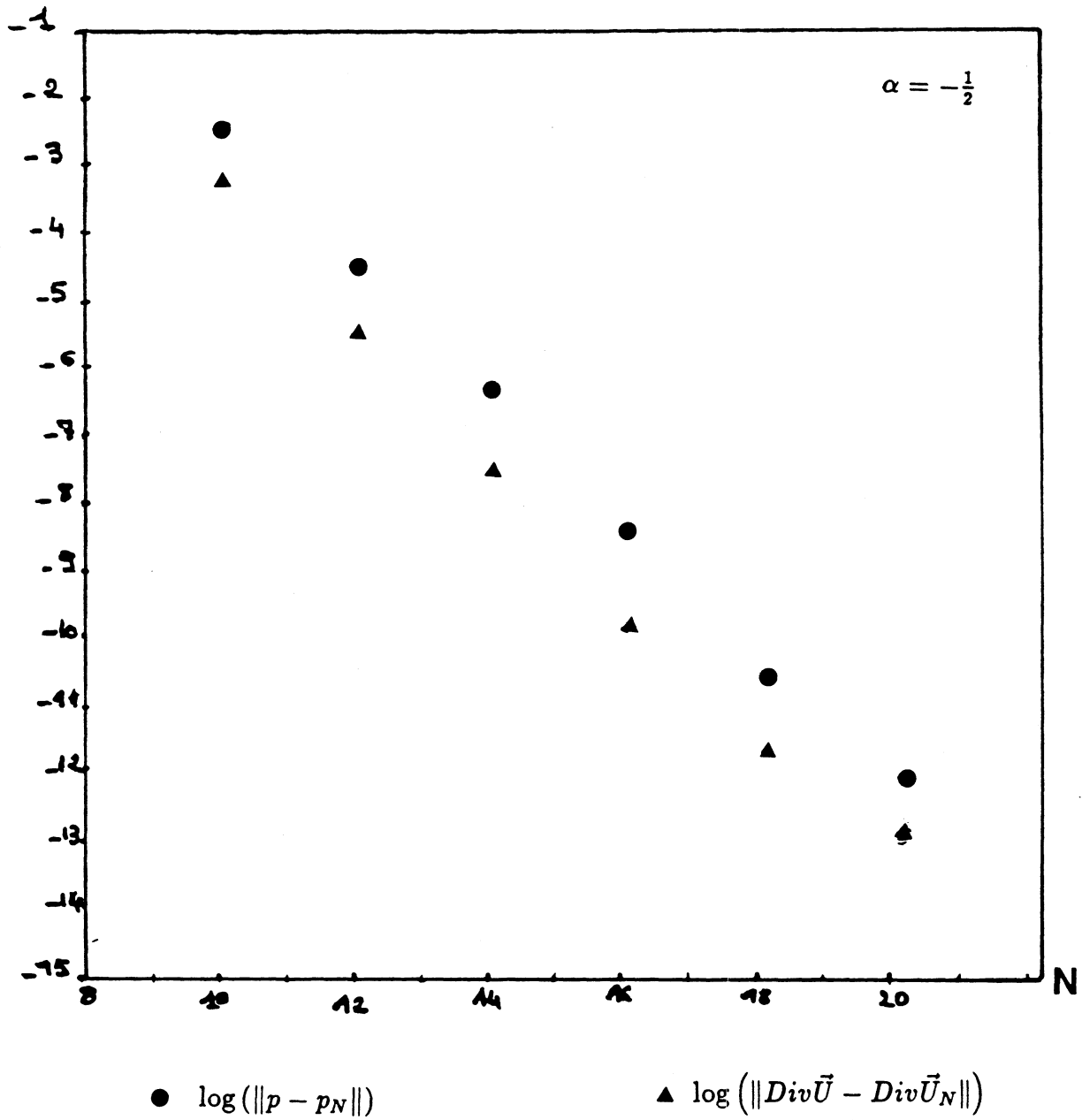


figure (V-4)

figure (V-5)



|                                              | m = 0    | m = 1    | m = 2   | m = 4   | m = 6    | m = 8   | m = 10  |
|----------------------------------------------|----------|----------|---------|---------|----------|---------|---------|
| $\sup_{\Xi}  p - p_N $                       | 1.03E-13 | 9.06E-14 | 6.2E-15 | 9.1E-14 | 3.67E-14 | 4.8E-14 | 5.2E-14 |
| $\sup_{\Xi}  \vec{U} - \vec{U}_N $           | 7.2E-15  | 1.4E-15  | 9.2E-15 | 2.5E-15 | 1.2E-15  | 9.7E-16 | 6.2E-15 |
| $\sup_{\Xi} \text{Div}(\vec{U} - \vec{U}_N)$ | 8.8E-14  | 7.8E-14  | 7.1E-14 | 9.4E-14 | 5.4E-14  | 4.8E-14 | 3.3E-14 |
| $\sup_{\Xi \cap \Omega}  p - p_N $           | 1.7E-14  | 3.2E-14  | 4.4E-14 | 2.8E-14 | 2.0E-14  | 2.7E-14 | 1.0E-14 |
| NB ITER                                      | 50       | 55       | 53      | 48      | 45       | 45      | 49      |

Tableau (V-I) (  $\alpha = -1/2$  )

# Chapitre 6

## Résolution numérique des équations de Stokes pour des écoulements axisymétriques confinés en géométrie cylindrique annulaire

### 6.1 Introduction

Dans ce chapitre on résout les équations de Stokes pour des écoulements axisymétriques confinés en géométrie cylindrique annulaire. Le problème consiste à, étant donnée une densité de force  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ , trouver la vitesse  $\tilde{U} = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2)$  et la pression  $\tilde{p}$  vérifiant

$$-\nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}_1}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial R} = \tilde{f}_1 \quad \text{dans } \Omega_R, \quad (VI-1)$$

$$-\nu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} = \tilde{f}_2 \quad \text{dans } \Omega_R, \quad (VI-2)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \tilde{U}_1) + \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } \Omega_R. \quad (VI-3)$$

où  $\nu$  est la viscosité et  $\Omega_R = ]R_1, R_2[ \times ]-1, 1[$  avec  $R_2 > R_1 > 0$ .

Ce chapitre comporte trois parties: dans la première on rappelle la théorie utilisée pour montrer l'existence et l'unicité du problème énoncé, ensuite dans la deuxième on donne une analyse théorique de l'existence et l'unicité du problème approché par la méthode  $(P_N, P_N)$ , ainsi que des résultats de convergence et d'approximation. Enfin dans la troisième partie, on approche le problème par la méthode  $(P_N, P_{N-2})$  décrite dans les chapitres IV et V et on donne des résultats numériques

d'approximation et de convergence.

Pour analyser le problème (VI-1) : (VI-3) nous allons l'écrire dans  $\Omega = ]-1, 1[^2$ , pour ceci nous introduisons le changement de variable suivant

$$r = \frac{2R - R_1 - R_2}{R_2 - R_1} \quad (VI-4)$$

et le changement de fonctions défini par

$$U_1(r, z) = \frac{2}{R_1 - R_2} \tilde{U}_1(R, z), \quad (VI-5)$$

$$U_2(r, z) = \frac{2}{R_1 - R_2} \tilde{U}_2(R, z). \quad (VI-6)$$

et

$$p(r, z) = \frac{2}{R_1 - R_2} \tilde{p}(R, z) \quad (VI-7)$$

Le système s'écrit alors : Etant donnée une densité de force  $\vec{f} = (f_1, f_2)$ , trouver la vitesse  $U = (U_1, U_2)$  et la pression  $p$  vérifiant

$$-\nu \left[ \frac{1}{r + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (r + \epsilon) \frac{\partial U_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial r} = f_1 \text{ dans } \Omega, \quad (VI-8)$$

$$-\nu \left[ \frac{1}{r + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (r + \epsilon) \frac{\partial U_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial p}{\partial z} = f_2 \text{ dans } \Omega, \quad (VI-9)$$

$$\frac{1}{r + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} ((r + \epsilon) U_1) + \frac{\partial U_2}{\partial z} = 0 \text{ dans } \Omega. \quad (VI-10)$$

avec

$$\epsilon = \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}. \quad (VI-11)$$

Remarque VI-1 : On note que  $\epsilon$  est strictement supérieur à 1 et que donc, pour tout  $r$  dans  $] -1, 1 [$ ,  $r + \epsilon$  est strictement supérieur à 0.

## 6.2 Formulation abstraite

Le cadre abstrait que nous allons décrire maintenant s'applique de façon naturelle au problème de Stokes en formulation vitesse-pression, cette théorie a été développée dans [Br],[Gr] et généralisée dans [B.C.M]. Elle permet de déterminer les espaces fonctionnels dans lesquels on peut trouver les solutions exacte et approchée et ensuite d'obtenir les résultats suivants:

- l'existence d'une solution unique pour les problèmes continu et discret,
- l'erreur d'approximation entre les solutions exacte et approchée.

### 6.2.1 Le problème continu

Rappelons rapidement les résultats abstraits que nous allons appliquer au problème (VI-8) : (VI-10).

Soient  $X$  et  $M$  deux espaces de Hilbert réels, et soit  $X'$  l'espace dual de  $X$ . Etant données deux formes bilinéaires  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  définies respectivement sur  $X \times X$  et sur  $X \times M$ , on considère le problème variationnel suivant: Pour  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  donné dans  $X'$ , trouver  $U = (U_1, U_2)$  dans  $X$  et  $p$  dans  $M$  tels que

$$\forall \vec{U} \in X, \forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) + \mathcal{B}(\vec{V}, p) = \langle \vec{f}, \vec{V} \rangle, \quad (\text{VI} - 12)$$

et

$$\forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{U}, q) = 0. \quad (\text{VI} - 13)$$

alors, on a le théorème suivant [Gr]:

Théorème VI-1 : On suppose vérifiées les hypothèses suivantes:

1) La forme  $\mathcal{A}$  est continue sur  $X \times X$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante,  $\gamma > 0$ , telle que

$$\forall \vec{U} \in X, \forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) \leq \gamma \|\vec{U}\|_X \|\vec{V}\|_X, \quad (\text{VI} - 14)$$

2) La forme  $\mathcal{B}$  est continue sur  $X \times M$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante,  $\delta > 0$ , telle que

$$\forall \vec{V} \in X, \forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{V}, q) \leq \delta \|\vec{V}\|_X \|q\|_M, \quad (\text{VI} - 15)$$

3) Condition inf-sup pour les  $\mathcal{A}$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante,  $\mu > 0$ , telle que

$$\forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{V}, \vec{V}) \geq \mu \|\vec{V}\|_X^2, \quad (\text{VI} - 16)$$

4) La forme  $\mathcal{B}$  vérifie la condition inf-sup suivante : il existe une constante,  $\beta > 0$ , telle que

$$\forall q \in M, \exists \vec{V} \neq \vec{0} \in X \quad / \quad \mathcal{B}(\vec{V}, q) \geq \beta \|\vec{V}\|_X \|q\|_M; \quad (\text{VI} - 17)$$

alors, pour tout  $\vec{f}$  dans  $X'$  le problème (VI-8) admet une solution unique dans  $X \times M$  vérifiant

$$\|\vec{U}\|_X \leq \frac{1}{\mu} \|\vec{f}\|_{X'}, \quad (\text{VI} - 18)$$

et

$$\|p\|_M \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{\mu}\right) \|\vec{f}\|_{X'}. \quad (\text{VI} - 19)$$

Pour la suite on introduit le sous-espaces suivant

$$K = \{ \vec{V} \in X; \forall q \in M, \mathcal{B}(\vec{V}, q) = 0 \}. \quad (\text{VI} - 20)$$

## 6.2.2 Le problème discret

Soient  $X_N$  et  $M_N$  deux espaces vectoriels réels de dimension finie tels que

$$X_N \subset X \quad \text{et} \quad M_N \subset M. \quad (VI - 21)$$

Etant données trois formes bilinéaires,  $\mathcal{A}_N : X_N \times X_N \longrightarrow \mathcal{R}$ ,  $b_N^1 : X_N \times M_N \longrightarrow \mathcal{R}$  et  $b_N^2 : X_N \times M_N \longrightarrow \mathcal{R}$  on considère le problème variationnel suivant:

Pour  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  donné dans  $X$ , trouver  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $X_N$  et  $p_N$  dans  $M_N$  tels que

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + b_N^1(\vec{V}_N, p_N) = \langle \vec{f}, \vec{V}_N \rangle, \quad (VI - 22)$$

et

$$\forall q_N \in M_N, \quad b_N^2(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (VI - 23)$$

alors, on a le théorème suivant [B.C.M]:

Théorème VI-2 : On suppose vérifiées les hypothèses suivantes:

line1) Les formes  $\mathcal{A}_N$  sont continues sur  $X_N \times X_N$ , uniformément par rapport à  $N$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\tilde{\gamma} > 0$  indépendante de  $N$  telle que

$$\forall \vec{U}_N \in X_N, \forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \leq \tilde{\gamma} \|\vec{U}_N\|_X \|\vec{V}_N\|_X; \quad (VI - 24)$$

2) Les formes  $b_N^i$ ,  $i = 1, 2$  sont continues sur  $X_N \times M_N$ , uniformément par rapport à  $N$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\tilde{\delta}_i > 0$  indépendante de  $N$  telle que

$$\begin{aligned} \forall \vec{V}_N \in X_N, \forall q_N \in M_N, \\ b_N^i(\vec{V}_N, q_N) \leq \tilde{\delta}_i \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (VI - 25)$$

3) Ellipticité des  $\mathcal{A}_N$  : il existe une constante  $\mu_N > 0$  telle que:

$$\forall \vec{U}_N \in K_{2N}, \quad \sup_{\vec{V}_N \in K_{1N}} \frac{\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N)}{\|\vec{V}_N\|_X} \geq \mu_N \|\vec{U}_N\|_X, \quad (VI - 26)$$

et

$$\forall \vec{V}_N \in K_{1N} \setminus \{0\}, \quad \sup_{\vec{U}_N \in K_{2N}} \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) > 0, \quad (VI - 27)$$

où pour  $i = 1, 2$ ,  $K_{iN}$  désigne l'espace affine défini par:

$$K_{iN} = \{ \vec{V}_N \in X; \forall q_N \in M_N, \quad b_N^i(\vec{V}_N, q_N) = 0 \}. \quad (VI - 28)$$

Remarque VI-2 : Si (VI-20) est vérifié alors la condition (VI-21) est équivalente à

$$\dim K_{1N} = \dim K_2. \quad (VI - 29)$$

On suppose enfin que :

4) Condition inf-sup sur  $b_N^1$  : La forme  $b_N^1$  vérifie la condition inf-sup suivante: il existe une constante  $\beta_N > 0$  telle que

$$\forall q_N \in M_N, \exists \vec{V}_N \# \vec{0} \in X_N \quad / \quad b_N^1(\vec{V}_N, q_N) \geq \beta_N \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M; \quad (VI - 30)$$

alors, pour tout  $\vec{f}_N$  dans  $X'$  le problème (VI - 22) : (VI - 23) admet une solution unique dans  $X \times M$  vérifiant

$$\|\vec{U}_N\|_X \leq \frac{1}{\mu_N} \|\vec{f}\|_{X'} = \frac{1}{\mu_N} \sup_{\vec{V}_N \in X_N} \frac{\langle \vec{f}, \vec{V}_N \rangle}{\|\vec{V}_N\|_X}, \quad (VI - 31)$$

et

$$\|p_N\|_M \leq \frac{1}{\beta_N} (1 + \frac{\tilde{\gamma}}{\mu_N}) \|\vec{f}\|_{X'}. \quad (VI - 32)$$

### 6.2.3 Estimation de l'erreur

Le théorème suivant donne l'erreur d'approximation entre  $(\vec{U}, p)$  solution de (VI - 12) : (IV - 13) et  $(\vec{U}_N, p_N)$  solution de (VI - 22) : (IV - 23):

Théorème VI-3 : On suppose vérifiées les hypothèses des théorèmes (VI-8) et (VI-17), alors on a :

$$\begin{aligned} \|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X &\leq C(1 + \frac{1}{\mu}) (1 + \tilde{\delta}) \inf_{\vec{W}_N \in K_{2N}} \|\vec{U} - \vec{W}_N\|_X + \\ &\inf_{\vec{V}_N \in X_N} \left\{ (1 + \tilde{\delta}) \|\vec{U} - \vec{V}_N\|_X + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{V}_N, \vec{Z}_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} + \\ &\inf_{q_N \in M_N} \left\{ \|p - q_N\|_M + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{B} - b_N^1)(\vec{Z}_N, q_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} + \\ &\sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{\langle \vec{f} - \vec{f}_N, \vec{Z}_N \rangle}{\|\vec{Z}_N\|_X} \end{aligned} \quad (VI - 33)$$

et

$$\begin{aligned} \|p - p_N\|_M &\leq C(1 + \frac{1}{\beta_N})(1 + \frac{1}{\mu_N}) (1 + \tilde{\delta}) \inf_{\vec{W}_N \in K_{2N}} \|\vec{U} - \vec{W}_N\|_X + \\ &\inf_{\vec{V}_N \in X_N} \left\{ (1 + \tilde{\gamma}) \|\vec{U} - \vec{V}_N\|_X + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{V}_N, \vec{Z}_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} + \\ &\inf_{q_N \in M_N} \left\{ \|p - q_N\|_M + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{B} - b_N^1)(\vec{Z}_N, q_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} + \end{aligned}$$

$$\sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{\langle \vec{f} - \vec{f}_N, \vec{Z}_N \rangle}{\|\vec{Z}_N\|_X}. \quad (VI - 34)$$

Nous allons par la suite appliquer ces résultats pour analyser le problème (VI-8) : (VI-10) et son approximation.

### 6.3 Analyse du problème continu

Afin d'étudier le problème (VI-8) : (VI-10) nous allons donner la formulation variationnelle qui lui est équivalente. Pour cela on pose  $X = (H_0^1(\Omega))^2$  et  $M = L_0^2(\Omega)$  et on définit les formes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par :

$$\forall \vec{U} \in X, \forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) = \nu \int_{\Omega} (\nabla \vec{U} \nabla \vec{V})(r + \epsilon) dr dz, \quad (VI - 35)$$

$$\forall \vec{V} \in X, \forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{V}, q) = \int_{\Omega} \vec{V} \vec{\nabla} q (r + \epsilon) dr dz. \quad (VI - 36)$$

Alors le problème (VI-8) : (VI-10) est équivalent au problème variationnel défini par trouver  $(\vec{U}, p)$  dans  $X \times M$  vérifiant:

$$\forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) + \mathcal{B}(\vec{V}, p) = \langle \vec{f}, \vec{V}(r + \epsilon) \rangle, \quad (VI - 37)$$

$$\forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{U}, q) = 0. \quad (VI - 38)$$

Nous allons maintenant vérifier les hypothèses du théorème (VI-1) :

Proposition (VI-1) : Il existe des constantes  $\gamma, \mu, \delta$  et  $\beta > 0$  telles que les formes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  définies par (VI-35) : (VI-36) vérifient les hypothèses du théorème (VI-1)

Démonstration :

-Continuité de  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} \forall \vec{U} \in X, \forall \vec{V} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) &= \nu \int_{\Omega} (\nabla \vec{U}(r + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \nabla \vec{V}(r + \epsilon)^{\frac{1}{2}}) dr dz, \\ \Rightarrow \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) &\leq \left( \int_{\Omega} |\nabla \vec{U}|^2 (r + \epsilon) dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} |\nabla \vec{V}|^2 (r + \epsilon) dr dz \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{V}) \leq (1 + \epsilon) \|\vec{U}\|_X \|\vec{V}\|_X, \end{aligned}$$

on prendra donc pour  $\gamma$  la valeur  $1 + \epsilon$ .

-Continuité de  $\mathcal{B}$ :

l'opérateur linéaire  $Div$  étant continu de  $(H_0^1(\Omega))^2$  sur  $L_0^2(\Omega)$ , on a :

$$\forall \vec{U} \in X, \forall q \in M, \quad \mathcal{B}(\vec{U}, q) \leq \|Div((r + \epsilon)\vec{U})\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow B(\vec{V}, q) \leq C \|(r + \epsilon) \nabla \vec{V}\|_{0,\Omega} \|q\|_M, \\
&\Rightarrow B(\vec{V}, q) \leq C \left( \|(r + \epsilon) \nabla \vec{V}\|_{0,\Omega} + \|\vec{V}\|_{0,\Omega} \right) \|q\|_M. \\
&\Rightarrow B(\vec{V}, q) \leq \delta \|\vec{V}\|_X \|q\|_M.
\end{aligned}$$

-Ellipticité de  $\mathcal{A}$  :

$$\begin{aligned}
\forall \vec{U} \in X, \quad \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{U}) &= \int_{\Omega} |\nabla \vec{U}|^2 (r + \epsilon) dr dz, \\
&\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{U}, \vec{U}) \geq (\epsilon - 1) \int_{\Omega} |\nabla \vec{U}|^2 dr dz.
\end{aligned}$$

-Condition inf-sup : On rappelle d'abord, le résultat suivant [Gr]

Lemme VI-1 : Il existe une constante C, telle que pour tout élément q de M, il existe une fonction  $\vec{V}$  de X satisfaisant:

$$Div \vec{V} = q \quad \text{et} \quad \|\vec{V}\|_{1,\Omega} \leq \|q\|_M. \quad (VI - 39)$$

Soit q un élément de M, posons  $\vec{W} = \frac{1}{r+\epsilon} \vec{V}$ ,  $\vec{V}$  étant donné par le lemme ci-dessu, on a alors

$$\begin{aligned}
B(\vec{W}, q) &= \int_{\Omega} Div \left( (r + \epsilon) \vec{W} \right) q dr dz. \\
&\Rightarrow B(\vec{W}, q) = \int_{\Omega} Div \vec{V} q dr dz. \\
&\Rightarrow B(\vec{W}, q) \geq \beta \|\vec{W}\|_X \|q\|_M.
\end{aligned}$$

Les hypothèses du théorème (VI - 1) sont vérifiées, on a donc le:

Théorème VI-1 : Pour tout  $\vec{f}$  dans  $X'$ , le problème (VI - 37) : (VI - 38) admet une solution unique dans  $X \times M$  vérifiant:

$$\|\vec{U}\|_X \leq \frac{1}{\epsilon - 1} \|\vec{f}\|_{X'}, \quad (VI - 40)$$

et

$$\|P\|_M \leq \frac{1}{\beta} \left( 1 + \frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1} \right) \|\vec{f}\|_{X'}. \quad (VI - 41)$$

Conclusion : Nous allons maintenant approcher les solutions du problème (VI-8) : (VI-10), on utilisera pour cela les deux méthodes,  $(P_N, P_N)$  et  $(P_N, P_{N-2})$  décrites dans les chapitres précédents.

## 6.4 Approximation $(P_N, P_N)$

Soit  $N$  un entier  $\geq 3$ , on considère les deux espaces  $X_N = (P_N^0(\Omega))^2$  et  $M_N = P_N(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  et on cherche à résoudre le problème approché suivant:

Etant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$ , trouver  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $X_N$  et  $p_N$  dans  $M_N$  vérifiant

$$-\frac{\nu}{\xi_i + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{1N}(\bar{x}) \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{1N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial r}(\bar{x}) = f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (VI-42)$$

$$-\frac{\nu}{\xi_i + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{2N}(\bar{x}) \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial z}(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (VI-43)$$

$$\frac{1}{\xi_i + \epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\xi_i + \epsilon) U_{1N}(\bar{x}) \right) + \frac{\partial}{\partial z} U_{2N}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \Xi_N. \quad (VI-44)$$

**Remarque VI-4 :** Dans ce chapitre on utilisera les points de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Legendre tout en signalant que nos résultats numériques ne changent pas quand on utilise les points de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Chebychev.

Pour analyser ce problème et utiliser le théorème (VI-2) nous allons en donner une formulation variationnelle qui lui est équivalente. Pour cela on introduit les formes bilinéaires  $\mathcal{A}_N$ ,  $b_N^1$  et  $b_N^2$  définies par:

$$\forall \vec{U} \in (C^2(\bar{\Omega}))^2, \forall \vec{V} \in (C^2(\bar{\Omega}))^2, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}, \vec{V}) = (\nu \Delta_r \vec{U}, \vec{V}(r + \epsilon))_N \quad (VI-45)$$

avec

$$\Delta_r U_i = \frac{1}{r + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (r + \epsilon) \frac{\partial U_i}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U_i}{\partial z^2} \quad (VI-46)$$

$$\forall \vec{V} \in (C^0(\bar{\Omega}))^2, \forall q \in (C^1(\bar{\Omega})), b_N^1(\vec{V}, q) = (\vec{V}, \vec{\nabla}(r + \epsilon))_N \quad (VI-47)$$

et

$$\forall \vec{V} \in (C^1(\bar{\Omega}))^2, \forall q \in (C^0(\bar{\Omega})), b_N^2(\vec{V}, q) = (\text{Div}(\vec{V}(r + \epsilon)), q)_N. \quad (VI-48)$$

Alors le problème (VI-42) : (VI-44) est équivalent à :

Etant donné  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  dans  $(C^0(\bar{\Omega}))^2$ , trouver  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $X_N$  et  $p_N$  dans  $M_N$  vérifiant:

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + b_N^1(\vec{V}_N, p_N) = (\vec{f}, \vec{V}_N(r + \epsilon))_N, \quad (VI-49)$$

$$\forall q_N \in M_N, \quad b_N^2(\vec{U}_N, q_N) = 0 \quad (VI-50)$$

**Remarque VI-5 :** Cette formulation variationnelle correspond bien au cadre abstrait présenté dans ce chapitre. En effet, pour

$$\vec{V}_N = ((1 - z^2)(L_N(z) - L_{N-2}(z)), 0) \quad \text{et} \quad q_N = L_N,$$

on vérifie que  $b_N^1(\vec{V}_N, q_N) = 0$  et  $b_N^2(\vec{V}_N, q_N) \neq 0$  et donc que  $b_N^1$  et  $b_N^2$  ne sont pas égales .

Nous allons donc vérifier les hypothèses du théorème (VI – 2)

Proposition (VI-2) : Les formes  $\mathcal{A}_N$  sont continues sur  $X_N \times X_N$ , uniformément par rapport à  $N$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\tilde{\gamma} > 0$  indépendante de  $N$  telle que

$$\forall \vec{U}_N \in X_N, \forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \leq \tilde{\gamma} \|\vec{U}_N\|_X \|\vec{V}_N\|_X. \quad (VI - 51)$$

Avant de prouver ce résultat nous allons montrer que

Lemme (VI-2) : Pour tout  $\vec{U}_N$  et  $\vec{V}_N$  dans  $X_N$  :

$$\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = \nu \left( \nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{V}_N(r + \epsilon) \right)_N. \quad (VI - 52)$$

Démonstration :

$$\forall (\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = -\nu \sum_{l=1}^2 (\Delta_r U_{lN}, V_{lN}(r + \epsilon))_N.$$

Or pour  $l = 1, 2$  on a :

$$(\Delta_r U_{lN}, V_{lN}(r + \epsilon))_N = S_{11} + S_{21}$$

avec

$$S_{11} = \sum_{\bar{x} \in \Xi_N} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(\bar{x}) \right) V_{lN}(\bar{x}) \rho_{\bar{x}},$$

et

$$S_{21} = \sum_{\bar{x} \in \Xi_N} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (U_{lN}(\bar{x})) V_{lN}(\bar{x}) (\xi_i + \epsilon) \rho_{\bar{x}}.$$

Nous allons développer séparément  $S_{11}$  et  $S_{21}$  :

$$S_{11} = \sum_{j=0}^N \left\{ \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(\xi_i, \xi_j) \right) V_{lN}(\xi_i, \xi_j) \rho_i \right\} \rho_j,$$

ce qui s'écrit en utilisant l'exactitude de l'intégration numérique sur  $P_{2N-1}(\Omega)$  :

$$S_{11} = \sum_{ij=0}^N \left( \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(\xi_i, \xi_j) \frac{\partial}{\partial r} V_{lN}(\xi_i, \xi_j) \right) (\xi_i + \epsilon) \rho_i \rho_j,$$

de même on a :

$$S_{21} = \sum_{ij=0}^N \left( \frac{\partial}{\partial z} U_{lN}(\xi_i, \xi_j) \frac{\partial}{\partial z} V_{lN}(\xi_i, \xi_j) \right) (\xi_i + \epsilon) \rho_i \rho_j.$$

On peut donc écrire

$$\forall(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = -\nu \sum_{l=1}^2 (\mathbf{S}_{1l} + \mathbf{S}_{2l}),$$

et donc

$$\forall(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = -\nu \left( \nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{V}_N(r + \epsilon) \right)_N$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition (VI - 2)

Démonstration :

D'après le lemme (VI - 2), on écrit que :

$$\forall(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) = -\nu \sum_{l=1}^2 (\mathbf{S}_{1l} + \mathbf{S}_{2l}),$$

avec

$$\mathbf{S}_{1l} = \sum_{j=0}^N \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(r, \xi_j) \frac{\partial}{\partial r} V_{lN}(r, \xi_j)(r + \epsilon) dr \right\} \rho_j,$$

et

$$\mathbf{S}_{2l} = \sum_{i=0}^N \left\{ \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial z} U_{lN}(\xi_i, z) \frac{\partial}{\partial z} V_{lN}(\xi_i, z) dz \right\} (\xi_i + \epsilon) \rho_i.$$

Nous allons majorer séparément  $\mathbf{S}_{1l}$  et  $\mathbf{S}_{2l}$ :

$$\mathbf{S}_{1l} = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(r, \xi_j)(r + \epsilon) \rho_j^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} V_{lN}(r, \xi_j) \rho_j^{\frac{1}{2}} \right\} dr,$$

qui se majore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz par :

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_{1l}| &= \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}^2(r, \xi_j)(r + \epsilon)^2 \rho_j dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial r} V_{lN}^2(r, \xi_j) \rho_j dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + \epsilon) \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}^2(r, \xi_j) \rho_j dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 \sum_{j=0}^N \frac{\partial}{\partial r} V_{lN}^2(r, \xi_j) \rho_j dr \right)^{\frac{1}{2}} \\ C &\leq \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial r} U_{lN}(r, z) \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial z} U_{lN}(r, z) \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et donc

$$|\mathbf{S}_{1l}| \leq C \|U_{lN}\|_X \|V_{lN}\|_X,$$

de même pour  $\mathbf{S}_{2l}$  on a :

$$\mathbf{S}_{2l} = \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial z} U_{lN}(\xi_i, z)(\xi_i + \epsilon) \rho_i^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} V_{lN}(\xi_i, z) \rho_i^{\frac{1}{2}} \right\} dz,$$

qui se majore en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz par :

$$|S_{21}| = \left( \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial z} U_{iN}^2(\xi_i, z) (\xi_i + \epsilon)^2 \rho_i dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^N \frac{\partial}{\partial z} V_{iN}^2(\xi_i, z) \rho_i dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$C \leq \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial z} U_{iN}(r, z) \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial z} U_{iN}(r, z) \right)^2 dr dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc

$$|S_{21}| \leq C \|U_{iN}\|_X \|V_{iN}\|_X,$$

Conclusion:

$$\forall (\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \leq \nu \sum_{l=1}^2 |S_{1l}| + |S_{21}|,$$

alors

$$\forall (\vec{U}_N, \vec{V}_N) \in X_N \times X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) \leq C \|\vec{U}_N\|_X \|\vec{V}_N\|_X,$$

3) Condition inf-sup sur les  $\mathcal{A}_N$  :

Nous allons admettre le résultat suivant :

Proposition (VI-3) : Il existe une constante  $\mu_N > 0$  telle que:

$$\forall \vec{U}_N \in K_{2N}, \quad \sup_{\vec{V}_N \in K_{1N}} \frac{\mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N)}{\|\vec{V}_N\|_X} \geq \mu_N \|\vec{U}_N\|_X, \quad (VI - 53)$$

et

$$\forall \vec{V}_N \in XK_{1N} \setminus \{0\}, \quad \sup_{\vec{U}_N \in K_{2N}} \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) > 0, \quad (VI - 54)$$

où  $K_{1N}$  et  $K_{2N}$  sont définis par (VI - 22).

On note que les formes  $\mathcal{A}_N$  sont elliptiques sur  $X_N$  uniformément par rapport à  $N$ , plus précisément on a :

Proposition (VI-4) : Il existe une constante  $C > 0$  telle que:

$$\forall \vec{U}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{U}_N) \geq C \|\vec{U}_N\|_X^2. \quad (VI - 55)$$

Démonstration :

$$\forall \vec{U}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{U}_N) = -\nu \left( \nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{U}_N(r + \epsilon) \right)_N,$$

or, pour tout  $i = 0, \dots, N$ ,  $\xi_i + \epsilon \geq C > 0$ , alors

$$\forall \vec{U}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{U}_N) \geq C \left( \nabla \vec{U}_N, \nabla \vec{U}_N \right)_N \geq \|\vec{U}_N\|_X^2.$$

Continuité des  $b_N^i, i = 1, 2$  :

Proposition (VI-5) : les formes  $b_N^1$  et  $b_N^2$  sont continues sur  $X_N \times M_N$  uniformément par rapport à  $N$ .

Démonstration :

Continuité de  $b_N^1$

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \forall q_N \in M_N$$

$$b_N^1(\vec{V}_N, q_N) = \left( V_{1N}, \frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N + \left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N. \quad (VI - 56)$$

Première étape : majoration de  $\left( V_{1N}, \frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N$

Soit  $q_N$  un élément de  $L_0^2(\Omega) \cap P_N(\Omega)$ , alors on a

$$q_N(r, z) = \sum_{i,j=0}^N q_{ij} L_i(r) L_j(z), \quad (q_{00} = 0) \quad (VI - 57)$$

les  $L_i$  sont les polynômes de Legendre définis dans l'annexe 2.

On pose

$$\tilde{q}_N(r, z) = \sum_{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N} q_{ij} L_i(r) L_j(z), \quad (VI - 58)$$

on vérifie alors, que

$$\left( V_{1N}, \frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N = \left( V_{1N}, \frac{\partial \tilde{q}_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N = - \left( \frac{\partial(V_{1N}(r + \epsilon))}{\partial r}, \tilde{q}_N \right)_N,$$

et

$$\|\tilde{q}_N\|_{0,\Omega} \leq \|q_N\|_{0,\Omega}, \quad (VI - 59)$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\left( V_{1N}, \frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N \leq C \|V_{1N}\|_X \|q\|_M. \quad (VI - 60)$$

Deuxième étape : majoration de  $\left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N$

$$\begin{aligned} \left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N &= - \left( \frac{\partial V_{2N}}{\partial z}(r + \epsilon), q_N \right)_N, \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=0}^N \frac{\partial V_{2N}}{\partial z}(\xi_i, z) (\xi_i + \epsilon) \rho_i^{\frac{1}{2}} \cdot q_N(\xi_i, z) \rho_i^{\frac{1}{2}} \right\} dz, \end{aligned}$$

cs qui s'écrit en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\begin{aligned}
\left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N &\leq \left( \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial V_{2N}}{\partial z} \right)^2 (\xi_i + \epsilon)^2 \rho_i \right\} dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^N q^2(\xi_i, z) \rho_i dz \right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq (1 + \epsilon) \left( \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{i=0}^N \left( \frac{\partial V_{2N}}{\partial z} \right)^2 \rho_i \right\} dz \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^N q^2(\xi_i, z) \rho_i dz \right)^{\frac{1}{2}}, \\
&\leq C \left\| \frac{\partial V_{2N}}{\partial z} \right\|_{0,\Omega} \|q\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N \leq C \|V_{2N}\|_X \|q\|_M. \quad (VI - 61)$$

De (VI-45) et (VI-46) on conclut que  $b_N^1$  est continue sur  $X_N \times M_N$ , uniformément par rapport à  $N$ .

Continuité de  $b_N^2$

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \forall q_N \in M_N$$

$$b_N^2(\vec{V}_N, q_N) = \left( \text{Div}((r + \epsilon)\vec{V}_N), q_N \right) = \left( \frac{\partial}{\partial r} V_{1N}(r + \epsilon), q_N \right)_N + \left( \frac{\partial}{\partial z} V_{2N}(r + \epsilon), q_N \right)_N,$$

Première étape : majoration de  $\left( \frac{\partial}{\partial r} V_{1N}(r + \epsilon), q_N \right)_N$  :

$\frac{\partial}{\partial r} (V_{1N}(r + \epsilon))$  étant un élément de  $P_N(\Omega)$ , on peut appliquer le lemme (I-2), ce qui nous donne :

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} V_{1N}(r + \epsilon), q_N \right)_N \leq C \left\| \frac{\partial}{\partial r} (V_{1N}(r + \epsilon)) \right\|_{0,\Omega} \|q_N\|_M$$

et donc

$$\left( \frac{\partial}{\partial r} V_{1N}(r + \epsilon), q_N \right)_N \leq C \|V_{1N}\|_X \|q_N\|_M, \quad (VI - 62)$$

d'autre part on a déjà montré que

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} V_{2N}(r + \epsilon), q_N \right)_N \leq \|V_{2N}\|_X \|q_N\|_M.$$

On conclut donc que  $b_N^2$  est continue sur  $X_N \times M_N$  uniformément par rapport à  $N$ .

Dans le but de vérifier la condition inf-sup pour  $b_N^1$ , nous allons présenter les modes parasites pour la pression dû au choix de  $M_N$ .

Modes parasites pour  $b_N^1$ :

On appelle  $Z_{1N}$  le sous espace de ces modes parasites, on peut montrer comme dans [B.M.M1] que  $Z_{1N}$  est engendré par l'ensemble  $S \cup \Phi$  avec

$$S = \{Q_{\bar{x}}, \bar{x} \text{ sommet de } \Omega\}, \quad (VI - 63)$$

et

$$\Phi = \{L_0, L_N\}^{\otimes 2}. \quad (VI - 64)$$

Condition inf-sup : En choisissant  $M_N$  dans  $Z_{1N}^\perp$ , on peut montrer la

Proposition (VI-6) : Il existe une constante  $\beta_N > 0$  telle que

$$\forall q_N \in M_N, \exists \vec{V}_N \neq 0 \in X_N \quad / \quad B(\vec{V}_N, q_N) \geq \beta_N \|\vec{V}_N\|_X \|q_N\|_M. \quad (VI - 65)$$

Remarque (VI-6) : Numériquement, on trouve que pour  $N$  assez grand

$$\beta_N = 0 \left( N^{-\frac{3}{2}} \right). \quad (VI - 66)$$

Les Hypothèses du théorème (VI - 2) étant vérifiées on a :

Théorème (VI-5) : Pour tout  $\vec{f}_N$  dans  $(C^0(\Omega))^2$ , le problème (VI - 49) : (VI - 50) admet une solution unique dans  $X_N \times M_N$  vérifiant

$$\|\vec{U}_N\|_X \leq \frac{1}{\mu_N} \|\vec{f}\|_{X'}, \quad (VI - 67)$$

et

$$\|p_N\|_M \leq \frac{1}{\beta_N} \left( 1 + \frac{\tilde{\gamma}}{\mu_N} \right) \|\vec{f}\|_{X'}. \quad (VI - 68)$$

Pour donner un théorème d'approximation et de convergence et appliquer le théorème (VI - 3) nous allons démontrer le résultat suivant :

Proposition (VI-7) : Si  $\vec{U}$  appartient à  $K \cap H^s(\Omega)$ ,  $s \geq 1$ , alors il existe un élément  $\vec{U}_N$  dans  $K_{1N} \cap K_{2N}$  tel que

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq C N^{1-s} \|\vec{U}\|_{s,\Omega}. \quad (VI - 69)$$

Démonstration :

Soit  $\phi \in H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$  vérifiant

$$(r + \epsilon)U_1 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (VI - 70)$$

et

$$(r + \epsilon)U_2 = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad (VI - 71)$$

un tel  $\phi$  existe car  $\vec{U}$  appartient à  $K \cap H_0^2(\Omega)$ .

On définit, élément de  $H^{s+1}(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ , par  $\Psi = 1/(r + \epsilon)\phi$ . On introduisant  $\mathcal{R}_N$  l'opérateur de projection de  $H_0^2(\Omega)$  sur  $P_{N-2}(\Lambda) \otimes P_{N-1}(\Lambda)$ , et on pose

$$\Psi_N = \mathcal{R}_N \Psi \quad \text{et} \quad \phi_N = (r + \epsilon)^2 \Psi_N \quad (VI - 72)$$

et on se donne  $\vec{U}_N$  tel que

$$U_{1N} = -\frac{1}{(r + \epsilon)} \frac{\partial \phi_N}{\partial z} \quad \text{et} \quad U_{2N} = \frac{1}{(r + \epsilon)} \frac{\partial \phi_N}{\partial r}, \quad (VI - 73)$$

alors  $\vec{U}_N$  vérifie:

- i)  $\vec{U}_N$  appartient à  $((P_{N-1}(\Lambda) \otimes P_{N-2}(\Lambda)) \times (P_{N-2}(\Lambda) \otimes P_{N-1}(\Lambda))) \cap X$ .
- ii)  $\vec{U}_N$  appartient à  $K_{1N} \cap K_{2N}$ ,
- iii)  $\vec{U}_N$  vérifie :

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq C \|\phi - \phi_N\|_{2,\Omega} \leq \|\Psi - \Psi_N\|_{1,\Omega}. \quad (VI - 74)$$

On a donc

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq C \|\Psi - \mathcal{R}_N \Psi\|_{1,\Omega}. \quad (VI - 75)$$

On peut maintenant donner un résultat de convergence et d'approximation :

**Théorème (VI-6) :** Pour tout  $\vec{f}$  dans  $(C^0(\Omega))^2$ , le problème spectral de collocation (VI - 42) : (VI - 44) admet une solution unique dans  $X_N \times X_N$ . De plus si la solution  $(\vec{U}, p)$  du problème (VI - 37) : (VI - 38) appartient à l'espace  $(H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H^{s-1}(\Omega)$ ,  $s \geq 1$ , et si  $\vec{f}$  appartient à l'espace  $(H^\sigma(\Omega))^2$  pour  $\sigma$  entier  $> 1$ , alors il existe une constante  $C$ , indépendante de  $N$  telle que

$$\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq \frac{C}{\mu_N} \left\{ N^{1-s} (\|\vec{U}\|_{s,\Omega} + \|p\|_{s-1,\Omega}) + N^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega} \right\}, \quad (VI - 76)$$

et

$$\|p - p_N\|_M \leq \frac{C}{\beta_N \mu_N} \left\{ N^{1-s} (\|\vec{U}\|_{s,\Omega} + \|p\|_{s-1,\Omega}) + N^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega} \right\}. \quad (VI - 77)$$

Démonstration :

Les hypothèses du théorème (VI - 3) étant vérifiées, on a

$$\begin{aligned} \|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X &\leq \frac{C}{\mu_N} \inf_{\vec{W}_N \in K_{2N}} \|\vec{U} - \vec{W}_N\|_X + \\ &\inf_{\vec{V}_N \in X_N} \left\{ \|\vec{U} - \vec{V}_N\|_X + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{V}_N, \vec{Z}_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} + \end{aligned}$$

$$\inf_{q_N \in M_N} \left\{ \|p - q_N\|_M + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{B} - b_N^1)(\vec{Z}_N, q_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} +$$

$$\sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{\langle \vec{f} - \vec{f}_N, \vec{Z}_N \rangle}{\|\vec{Z}_N\|_X}$$

Première étape : si  $\vec{U}$  désigne le vecteur donné par la proposition (VI – 7) alors on a :

$$\inf_{\vec{W}_N \in K_{2N}} \|\vec{U} - \vec{W}_N\|_X + \inf_{\vec{V}_N \in X_N} \left\{ \|\vec{U} - \vec{V}_N\|_X + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{V}_N, \vec{Z}_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} +$$

$$\leq \|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X + \|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{U}_N, \vec{Z}_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X}$$

$$\leq 2\|\vec{U} - \vec{U}_N\|_X \leq N^{1-s} \|\vec{U}\|_{s,\Omega}.$$

car  $\forall \vec{Z}_N \in X_N, (\mathcal{A} - \mathcal{A}_N)(\vec{Z}_N, \vec{U}_N) = 0$ .

Deuxième étape : sachant que  $P_{N-1}(\Omega)$  est contenu dans  $M_N$ , on a :

$$\inf_{q_N \in M_N} \left\{ \|p - q_N\|_M + \sup_{\vec{Z}_N \in X_N} \frac{(\mathcal{B} - b_N^1)(\vec{Z}_N, q_N)}{\|\vec{Z}_N\|_X} \right\} +$$

$$\leq \|p - \Pi_{N-2}p\|_{0,\Omega} \leq CN^{1-s} \|p\|_{s-1,\Omega}$$

Troisième étape : pour tout  $\vec{Z}_N$  dans  $X_N$ , on a :

$$|(\vec{f}, \vec{Z}_N) - (\vec{f}_N, \vec{Z}_N)_N| = |(\vec{f} - \Pi_{N-1}\vec{f}, \vec{Z}_N) + (\Pi_{N-1}\vec{f} - I_N\vec{f}, \vec{Z}_N)_N|$$

$$\leq C(\|\vec{f} - \Pi_{N-1}\vec{f}\|_{0,\Omega} + \|\vec{f} - I_N\vec{f}\|_{0,\Omega}) \|\vec{Z}_N\|_X$$

$$\leq CN^{-\sigma} \|\vec{f}\|_{\sigma,\Omega} \|\vec{Z}_N\|_X.$$

De ces trois étapes on retrouve (VI – 76) et on démontre (VI – 77).

### 6.4.1 Résultats numériques de convergence et d'approximation

Pour résoudre le système algébrique (VI – 42) : (VI – 44), nous utilisons l'algorithme déjà présenté dans les chapitres précédents.

La figure (VI-1) représente, comme fonction du nombre d'itérations (n), la norme euclidienne de  $Div(\vec{U}^n)$  calculée à la  $n^{eme}$  itération.

La courbe (a) correspond à l'approximation du problème de Stokes, muni des conditions aux limites Dirichlet non homogènes et ayant pour solution

$$\vec{U}(r, z) = ((z + 1)^9, (r + 1)^9) \quad \text{et} \quad p(r, z) = (r + z)^9.$$

**La courbe (b)** correspond à l'approximation du problème de Stokes, muni des conditions aux limites Neumann non homogène et ayant pour solution

$$\vec{U}(r, z) = ((z + 1)^{19}, (r + 1)^{19}) \quad \text{et} \quad p(r, z) = (r + z)^{19}.$$

De même, **la courbe (c)** correspond à l'approximation du problème de Stokes, muni des conditions aux limites Neumann non homogène et ayant pour solution

$$\vec{U}(r, z) = (\sin(\pi z), \sin(\pi r)) \quad \text{et} \quad p(r, z) = \cos(\pi r) \cos(\pi z).$$

Pour ce cas, on se donne comme test d'arrêt l'erreur spectrale attendue pour une fréquence de coupure égale à 13.

Dans tous les cas, la méthode  $(P_N, P_N)$  nous permet de calculer la vitesse et le gradient de pression mais pas la pression, à cause de la présence des modes parasites. Pour les éliminer, nous allons utiliser l'approximation  $(P_N, P_{N-2})$ , proposée dans les chapitres IV et V.

## 6.5 Approximation $(P_N, P_{N-2})$

l'espace d'approximation de la vitesse étant  $X_N = (P_N^0(\Omega))$ , on prend pour la pression l'espace  $M_N = P_{N-2}(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  et on considère le problème défini par  $(VI - 49) : (VI - 50)$

Le nouveau choix de  $M_N$  nous permet d'écrire que ce problème est équivalent à : Pour  $\vec{f} = (f_1, f_2)$  donnée dans  $(C^0(\Omega))^2$ , trouver  $\vec{U}_N = (U_{1N}, U_{2N})$  dans  $X_N$  et  $p_N$  dans  $M_N$  tels que

$$\forall \vec{V}_N \in X_N, \quad \mathcal{A}_N(\vec{U}_N, \vec{V}_N) + \mathcal{B}(\vec{V}_N, p_N) = \langle \vec{f}, \vec{V}_N \rangle, \quad (VI - 78)$$

et

$$\forall q_N \in M_N, \quad \mathcal{B}(\vec{U}_N, q_N) = 0. \quad (VI - 79)$$

où  $\mathcal{B}$  est défini par  $(VI - 36)$ .

En effet, pour tout  $q_N \in M_N$  et  $\vec{V}_N \in X_N$ , on a

$$b_N^1(\vec{V}_N, q_N) = \left( \vec{V}_N, (\vec{\nabla} q_N)(r + \epsilon) \right)_N = \left( V_{1N}, \frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \right)_N + \left( V_{2N}, \frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \right)_N,$$

or

$$\frac{\partial q_N}{\partial r}(r + \epsilon) \in P_{2N-2}(\Lambda) \otimes P_{2N-2}(\Lambda)$$

et

$$\frac{\partial q_N}{\partial z}(r + \epsilon) \in P_{2N-1}(\Lambda) \otimes P_{2N-2}(\Lambda)$$

alors

$$b_N^1(\vec{V}_N, q_N) = b_N^2(\vec{V}_N, q_N) = \mathcal{B}(\vec{V}_N, q_N). \quad (VI - 80)$$

Nous allons, maintenant écrire le système algébrique à résoudre :

### 6.5.1 Système algébrique :

En prenant dans (VI – 79) comme fonctions tests la suite  $q_N = \tilde{h}_i(r)\tilde{h}_j(z)$  et en utilisant le développement présenté dans le chapitre V, on obtient que (VI – 60) est équivalent à: Pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$\frac{\partial}{\partial r} ((\xi_i + \epsilon)U_{1N}(\xi_i, \xi_j)) + \frac{\partial}{\partial z} U_{2N}(\xi_i, \xi_j) = d_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq N-1. \quad (VI - 81)$$

avec pour tout  $i, j = 1, \dots, N-1$

$$d_{ij} = - \left[ \frac{\partial}{\partial r} ((\xi_0 + \epsilon)U_{1N}(\xi_0, \xi_j)) \frac{\rho_0}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_0) + \frac{\partial}{\partial r} ((\xi_N + \epsilon)U_{1N}(\xi_N, \xi_j)) \frac{\rho_N}{\rho_i} \tilde{h}_i(\xi_N) \right] \\ - \left[ \frac{\partial U_{2N}}{\partial z}(\xi_i, \xi_0) \frac{\rho_0}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_0) + \frac{\partial U_{2N}}{\partial z}(\xi_i, \xi_N) \frac{\rho_N}{\rho_j} \tilde{h}_j(\xi_N) \right]. \quad (VI - 82)$$

Et en choisissant pour l'équation (VI – 78) comme fonctions tests la suite  $q_N = h_i(r)h_j(z)$  on obtient:

$$-\frac{\nu}{\xi_i + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{1N}(\bar{x}) \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{1N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial r}(\bar{x}) = f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (VI - 83)$$

$$-\frac{\nu}{\xi_i + \epsilon} \frac{\partial}{\partial r} \left( (\xi_i + \epsilon) \frac{\partial}{\partial r} U_{2N}(\bar{x}) \right) - \nu \frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{2N}(\bar{x}) + \frac{\partial p_N}{\partial z}(\bar{x}) = f_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Xi_N \cap \Omega; \quad (VI - 84)$$

La résolution de ce système algébrique donne:

### 6.5.2 Résultats numériques :

La courbe 2 représente l'approximation de la pression et la mesure de la divergence, on constate que l'on sait calculer correctement la pression et satisfaire la contrainte de continuité.

### 6.5.3 Conclusion

Le choix de  $M_N = P_{N-2} \cap M$  nous a permis d'approcher la pression et de satisfaire la contrainte de continuité sur tout le domaine frontière comprise, et aussi d'écrire l'ensemble des équations sur une même grille. Cette formulation est plus facile à analyser et correspond à un cadre abstrait plus simple que celui décrit dans ce chapitre.

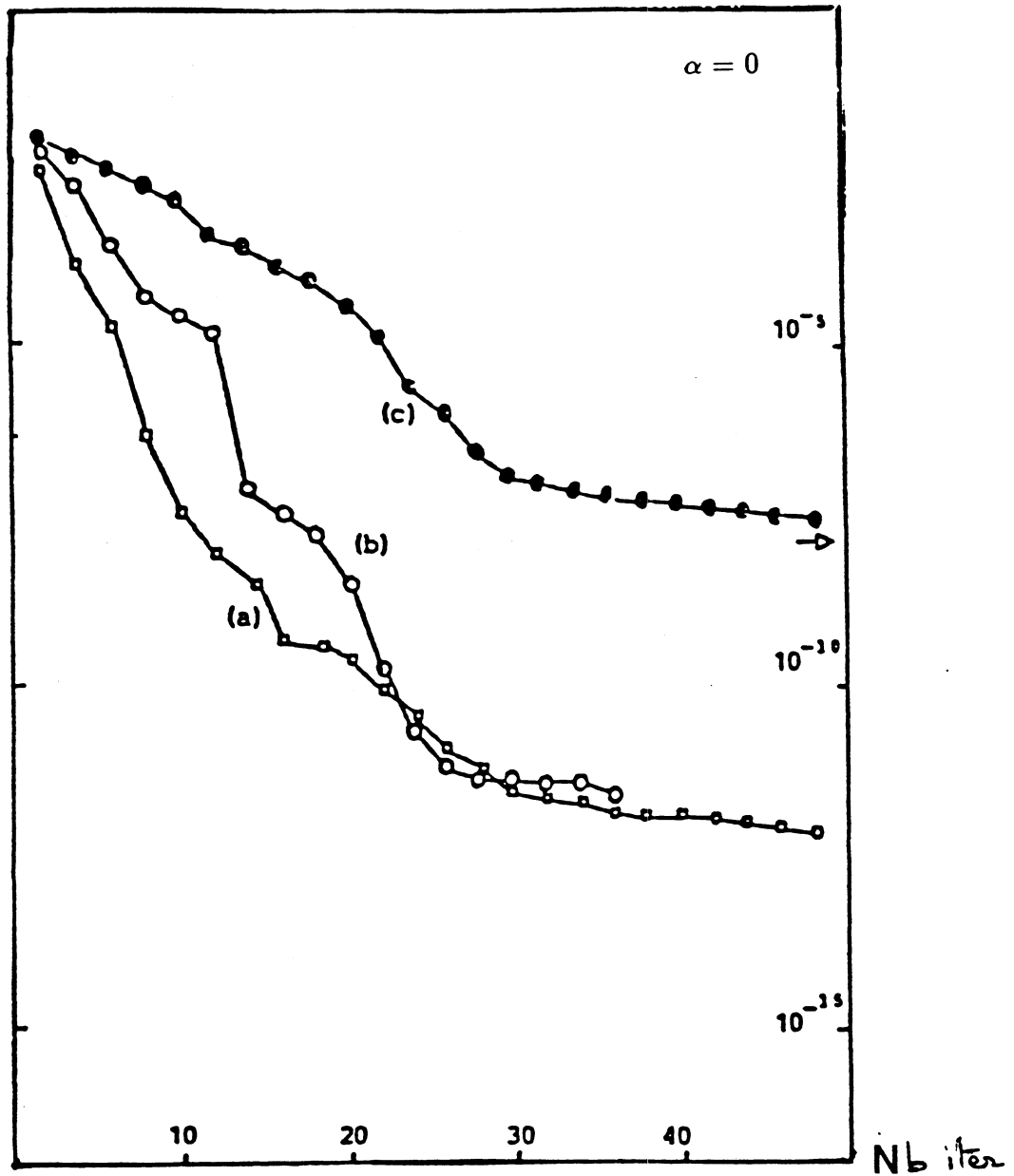
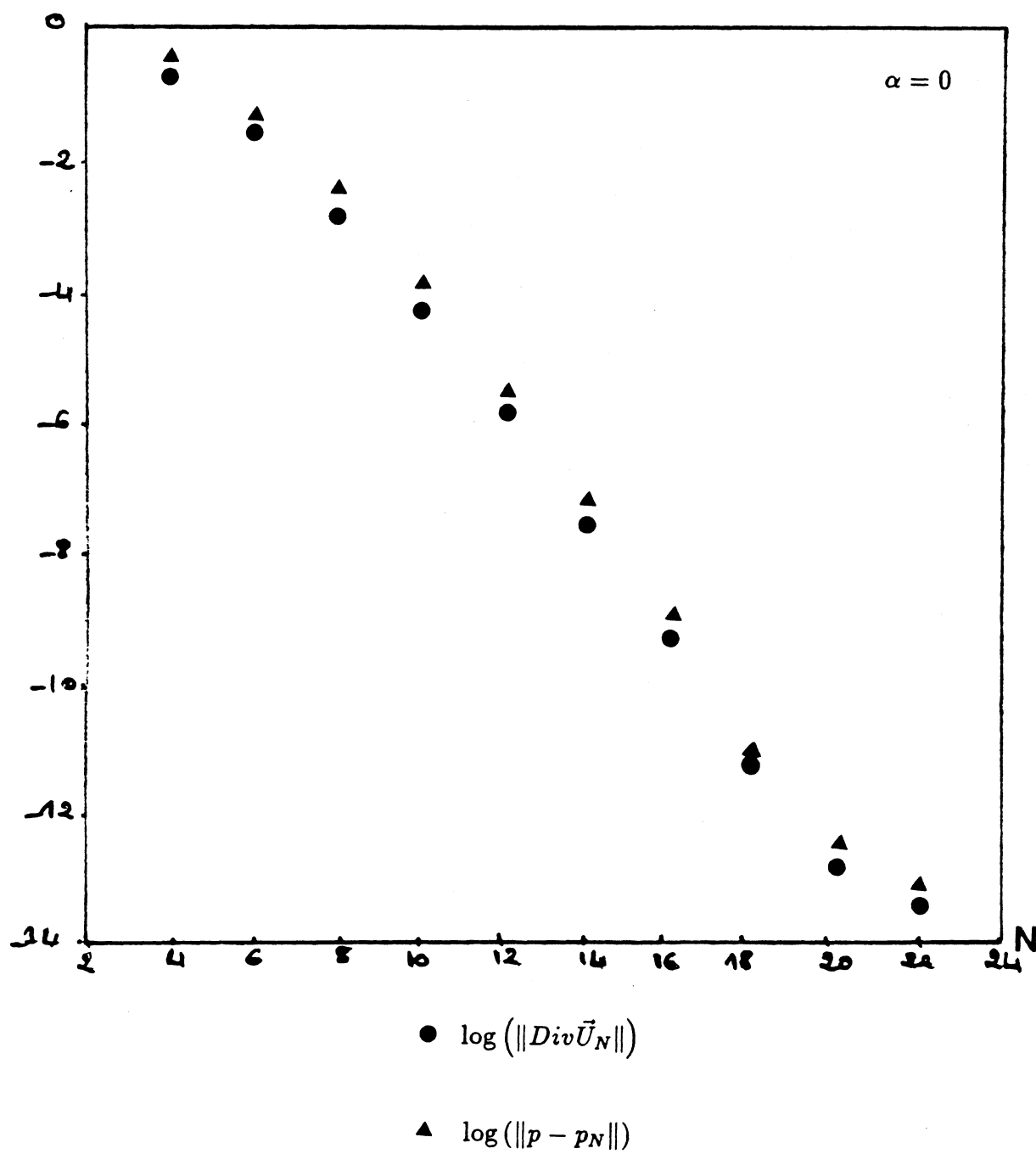


figure (VI-1)

figure (VI-2)



# Conclusion

Au cours de ce travail on s'est intéressé au problème de **Stokes** en formulation **vitesse-pression** pour des fluides **visqueux incompressibles**. Pour approcher ce problème on a utilisé une **méthode spectrale de collocation** et pour construire le système algébrique issu de la discrétisation on a découplé la vitesse et la pression en construisant un opérateur sur cette dernière. On résout d'abord la pression et on déduit ensuite la vitesse en résolvant un problème de **Helmholtz**. Pour résoudre l'équation en pression on a utilisé une méthode itérative.

Pour l'espace d'approximation de la pression on a présenté deux choix: un premier qui consiste à prendre des polynômes de même degré que pour la vitesse et un second qui consiste à réduire de deux unités ce degré.

Pour chacun de ces choix on a présenté des résultats numériques d'approximation et de divergence. On a montré que le second choix nous permet d'éliminer les **modes parasites** et donc de calculer correctement la pression, d'améliorer le **nombre de conditionnement** de l'opérateur sur la pression et la constante inf-sup et bien sûr de satisfaire la **contrainte de continuité**. Le point important de cette méthode est l'utilisation d'une **grille unique** pour calculer la pression et vitesse.

# Annexes

## Annexe 1

On présente dans cet annexe un rappel sur les propriétés des des polynômes de Legendre et de Chebychev, ainsi que le principe de dérivation spectrale de collocation.

### Propriétés des polynômes de Chebychev

$T_n$  est un polynôme de Chebychev si  $T_n$  vérifie :

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \quad (A1.1)$$

on a :  $T_0(x) = 1$  ,  $T_1(x) = x$  ,  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ .

Les polynômes de Chebychev sont aussi définis comme étant les solutions de:

$$\sqrt{1-x^2} \frac{d}{dx} \sqrt{1-x^2} \frac{T_n}{dx} + n^2 T_n(x) = 0. \quad (A1.2)$$

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $T_n$  vérifie :

- $T_n$  est un polynôme de degré  $n$  et a la même parité que  $n$ .
- Pour tout  $m \geq 0$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} C_n \delta_{nm} \quad (A1.3)$$

où  $C_0 = 2$  et  $C_n = 1$  pour  $n \geq 1$ .

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x); \quad (A1.4)$$

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad T'_n(x) \leq n^2 \quad (A1.5)$$

et

$$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad T_{2n}(0) = (-1)^n, \quad T_{2n+1}(0) = 0. \quad (A1.6)$$

Les points de Gauss-Lobatto associés aux polynômes de Chebychev sont :

$$\xi_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), \quad j = 0, \dots, n, \quad (A1.7)$$

et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto sont :

$$\rho_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2n} & j=0,1 \\ \frac{\pi}{n} & j=1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (A1.8)$$

On trouve dans [A.S] quelques valeurs de ces  $(\xi_j)_{j=0, \dots, n}$ .

### Propriétés des polynômes de Legendre

$L_n$  est un polynôme de Legendre si  $L_n$  vérifie

$$\frac{d}{dx} \left( (1-x^2) \frac{dL_n}{dx} \right) + n(n+1)L_n(x) = 0, \quad (A1.9)$$

on a  $L_0(x) = 1$ ,  $L_1(x) = x$ ,  $L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ .

Pour tout  $n \geq 0$   $L_n$  vérifie :

- $L_n$  est un polynôme de degré  $n$  et a la même parité que  $n$ .
- Pour tout  $m \geq 0$

$$\int_{-1}^1 L_n(x) L_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}, \quad (A1.10)$$

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x), \quad (A1.11)$$

$$L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad L'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad (A1.12)$$

$$|L_n(x)| \leq 1, \quad |L'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad (A1.13)$$

et

$$\int_{-1}^x L_n(x) dx = \frac{L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)}{2n+1}. \quad (A1.14)$$

Les points de Gauss-Lobatto associés à  $L_n$  sont définis par:

$$\xi_0 = -1, \quad \xi_n = +1, \quad \text{et} \quad L'_n(\xi_j) = 0, \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (A1.15)$$

Les poids de la formule de quadrature de Gauss-Lobatto sont :

$$\rho_j = \frac{2}{n(n+1)} \frac{1}{L_n(\xi_j)^2}, \quad \text{pour} \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (A1.16)$$

### Construction des matrices $D^\alpha$ de dérivation :

On désigne par  $C^\alpha$  la matrice de dérivation dans l'espace spectral et  $M^\alpha$  celle de passage de l'espace physique à l'espace spectral. Soit  $f = \sum_{i=0}^N f_i J_i^\alpha$  et soit  $f' = \sum_{i=0}^N f'_i J_i^\alpha$ , on a alors:

$$\vec{f}' = C^\alpha \vec{f} \quad (A1.17)$$

et

$$\vec{F} = (M^\alpha)^{-1} \vec{f} \quad (A1.18)$$

avec  $\vec{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N)$ ,  $\vec{f}' = (f'_0, f'_1, \dots, f'_N)$  et  $\vec{F} = (f(\xi_0), f(\xi_1), \dots, f(\xi_N))$ .

On construit alors  $D^\alpha$  en écrivant que:

$$D^\alpha = (M^\alpha)^{-1} C^\alpha M^\alpha. \quad (A1.19)$$

Remarque A1-1 : On construit la matrice de dérivée nième,  $(D^n)^\alpha$ , en écrivant:

$$(D^n)^\alpha = (D^\alpha)^n \quad (A1.20)$$

Remarque A1-2 : Pour  $\alpha = 0$  et  $\alpha = -\frac{1}{2}$ , on trouve dans [C.H.Q.Z] et [P] une expression explicite de  $D^\alpha$ ,  $(D^2)^\alpha$ ,  $C^\alpha$  et  $(C^2)^\alpha$ .

## Annexe 2

### Présentation de l'algorithme utilisé pour résoudre $A^a P = F$

On note dans cet annexe, respectivement  $\| \cdot \|$  et  $(\cdot, \cdot)$  la norme euclidienne de  $\mathcal{R}^n$  et le produit scalaire associé. Soit  $A$  un élément de  $M_n(\mathcal{R})$ , l'ensemble des matrices à coefficients réels et  $b$  un élément de  $\mathcal{R}^n$ , on cherche  $X$  dans  $\mathcal{R}^n$  vérifiant :

$$AX = b. \quad (A2.1)$$

L'algorithme consiste à calculer par récurrence une suite éventuellement fini  $(X_k)$  de  $\mathcal{R}^n$ , telle que la suite  $R_k = AX_k - b$  associée aux  $X_k$  soit décroissante. Deux autres suites de  $\mathcal{R}^n$  sont construites simultanément aux cours des itérations: les suites  $(D_k)$  et  $(P_k)$  où  $D_k$  est la direction de descente associée à  $X_k$  et  $P_k$  vérifie  $P_k = AD_k$ .

### Schéma de l'algorithme :[Ax]

#### Initialisation

Etant donné  $X_0$  dans  $\mathcal{R}^n$ , on pose :

$$R_0 = AX_0 - b, \quad D_0 = R_0 \quad \text{et} \quad P_0 = AD_0. \quad (A2.2)$$

#### $k^{\text{eme}}$ étape

Supposons connu  $X_{k-1}$ ,  $R_{k-1} = AX_{k-1} - b$ ,  $D_{k-1}$  et  $P_{k-1} = AD_{k-1}$ . Supposons de plus que  $P_{k-1}$  est non nul. Alors, on calcule  $\alpha_{k-1}$  en sorte que

$$R_k = R_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1}, \quad (A2.3)$$

satisfasse

$$\|R_k\| = \inf_{\alpha \in \mathcal{R}} \|R_{k-1} + \alpha P_{k-1}\|. \quad (A2.4)$$

On pose alors

$$X_k = X_{k-1} + \alpha_{k-1} D_{k-1}, \quad (A2.5)$$

et on a donc

$$R_k = AX_k - b. \quad (A2.6)$$

On calcule ensuite  $\beta_k$  de sorte que

$$P_k = AR_k + \beta_k P_{k-1} \quad (A2.7)$$

vérifie

$$(P_k, P_{k-1}) = 0, \quad (A2.8)$$

ceci entraîne

$$\beta_k = -\frac{(AR_k, P_{k-1})}{\|P_{k-1}\|^2}. \quad (A2.9)$$

On pose alors

$$D_k = R_k + \beta_k D_{k-1} \quad (A2.10)$$

et par conséquent, on a

$$P_k = AD_K. \quad (A2.11)$$

Cet étape se résume :

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} = -\frac{(R_{k-1}, P_{k-1})}{\|P_{k-1}\|^2}, \\ X_k = X_{k-1} + \alpha_{k-1} D_{k-1}, \\ R_k = R_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1}, \\ \beta_k = -\frac{(AR_k, P_{k-1})}{\|P_{k-1}\|^2}, \\ D_k = R_k + \beta_k D_{k-1}, \\ P_k = AR_k + \beta_k P_{k-1}. \end{cases} \quad (A2.12)$$

Dans [Me], on trouve une analyse de cet algorithme et de ces propriétés, nous en donnons ici quelques une :

On a pour tout k:

$$(P_k, R_k) = 0 \quad (A2.13)$$

$$(R_k, P_k) = (R_k, AR_k) \quad (A2.14)$$

et donc

$$\|P_k\|^2 = (AR_k, P_k). \quad (A2.15)$$

### Annexe 3

Nous allons montrer que la condition inf-sup vérifiée par la forme  $b_N$  définie par (V-11) est du même ordre (en  $N$ ) que celle obtenue par la méthode  $(P_N, P_{N-2})$  à deux grilles [MPR], pour la forme  $b_N^G$  définie par

$$b_N^G(q, \vec{w}) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} q(\zeta_i, \zeta_j) \vec{\nabla} \cdot \vec{w}(\zeta_i, \zeta_j) \rho_i^G \rho_j^G. \quad (A3.1)$$

Prouvons pour cela le lemme suivant:

Lemme : Pour tout polynôme  $p \in P_{N-2}(\Lambda)$  on a

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) p^2(x) dx \leq \sum_{i=1}^{N-1} (1-\zeta_i^2) p^2(\zeta_i) \rho_i^G \leq \int_{-1}^1 (1-x^2) p^2(x) dx. \quad (A3.2)$$

Démonstration : Etant donné que la formule de Gauss est exacte sur  $P_{2N-3}$ , il suffit de prouver ce résultat pour  $p = L'_{N-1}$ . La somme continue se calcule exactement et vaut:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2) L'_{N-1}(x) L'_{N-1}(x) dx = \frac{2(N-1)N}{2N-1}. \quad (A3.3)$$

Pour calculer la même somme discrète on commence par rappeler les formules suivantes:

$$L'_{N-1} = (2N-3)L_{N-2} + L'_{N-3} \quad (A3.4)$$

$$(1-x^2) L'_{N-1}(x) = -(N-1)(x L_{N-1}(x) - L_{N-2}(x)). \quad (A3.5)$$

Donc

$$(1-\zeta_i^2) L'_{N-1}(\zeta_i) = (N-1) L_{N-2}(\zeta_i),$$

car par définition  $L_{N-1}(\zeta_i) = 0$ , et :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} (1-\zeta_i^2) L'_{N-1}(\zeta_i) L'_{N-1}(\zeta_i) \rho_i^G &= (N-1) \int_{-1}^1 L_{N-2}(x) L'_{N-1}(x) dx = \\ &= (N-1)(2N-3) \|L_{N-2}\|^2 = \frac{2(N-1)(2N-3)}{2N-3} = 2(N-1). \end{aligned}$$

Finalement on a:

$$\sum_{i=1}^{N-1} (1-\zeta_i^2) (L'_{N-1}(\zeta_i))^2 \rho_i^G = \frac{N}{2N-1} \int_{-1}^1 (1-x^2) (L'_{N-1}(x))^2 dx. \quad (C.Q.F.D)$$

De ce lemme on déduit facilement le corolaire suivant:

Corollaire : Soit  $\vec{w} = (u, v) \in (P_N^0(\Omega))$  tel que

$$u(x, y) = (1-x^2)(1-y^2) \sum_{i,j=1}^{N-1} u_{i,j} L'_i(x) L'_j(y), \quad (A3.6)$$

$$u(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2) \sum_{i,j=1}^{N-1} v_{i,j} L'_i(x) L'_j(y). \quad (A3.7)$$

Si on pose  $\tilde{w} = (\tilde{u}, \tilde{v})$  avec

$$\begin{aligned} u_{i,N-1} &= \frac{2N-1}{N} \tilde{u}_{i,N-1} \\ v_{N-1,j} &= \frac{2N-1}{N} \tilde{v}_{N-1,j} \\ u_{i,j} &= \tilde{u}_{i,j} \quad \text{si } j < N-1 \\ v_{i,j} &= \tilde{v}_{i,j} \quad \text{si } i < N-1 \end{aligned} \quad (A3.8)$$

alors, pour tout  $q \in P_{N-2}(\Omega)$  on a

$$b_N^G(q, \tilde{w}) = b_N(q, \tilde{w}). \quad (A3.9)$$

On peut maintenant montrer le théorème suivant:

**Théorème :** Les conditions inf-sup pour les deux formes  $b_N^G$  et  $b_N$  sont du même ordre en  $N$ , c'est-à-dire

$$\frac{\beta_N^G}{\beta_N} = O(1).$$

**Démonstration :** Pour tout  $q$  et  $\tilde{w}$  fixés nous avons déjà montré que  $b_N^G(q, \tilde{w}) = b_N(q, \tilde{w})$ , avec  $\tilde{w}$  défini par (A3.8). Il nous reste à comparer les semi-normes  $H^1$  de  $\tilde{w}$  et de  $\tilde{w}$ . On a:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = -(1 - y^2) \sum_{l,k=1}^{N-1} l(l+1) \tilde{u}_{l,k} L_l(x) L'_k(y) \quad (A3.10)$$

qui peut s'écrire aussi

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = - \sum_{l=1}^{N-1} l(l+1) \sum_{k=0}^N \tilde{\alpha}_{l,k} L_l(x) L_k(y). \quad (A3.11)$$

De même on a:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -(1 - y^2) \sum_{l,k=1}^{N-1} l(l+1) u_{l,k} L_l(x) L'_k(y) \quad (A3.12)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \sum_{l=1}^{N-1} l(l+1) \sum_{k=0}^N \alpha_{l,k} L_l(x) L_k(y). \quad (A3.13)$$

Alors en intégrant le produit de (A3.10) par  $L_i(x) L_j(y)$  on obtient

$$\tilde{\alpha}_{i,j} \|L_j\|^2 = \sum_{n=1}^{N-1} \tilde{u}_{i,n} \int_{-1}^1 (1 - y^2) L'_n(x) L_j(y) dy. \quad (A3.14)$$

Et en utilisant la relation

$$(1 - x^2) L'_n = -\frac{n(n+1)}{2n+1} (L_{n+1} - L_{n-1}). \quad (A3.15)$$

On obtient pour  $i = 1, \dots, N-1$

$$\tilde{\alpha}_{i,N} = \frac{N}{2N-1} \alpha_{i,N} \quad (A3.16)$$

$$\tilde{\alpha}_{i,N-1} = \alpha_{i,N-1} \quad (A3.17)$$

$$\tilde{\alpha}_{i,N-2} = \frac{N}{2N-1} \alpha_{i,N} - R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \tilde{R}_i = \frac{(N-3)(N-2)}{2N-5} u_{i,N-3}. \quad (A3.18)$$

$$\tilde{\alpha}_{i,j} = \alpha_{i,j} \quad \text{si} \quad j \leq N-3 \quad (A3.19)$$

La norme  $L^2$  de  $\partial \tilde{u} / \partial x$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right\|^2 &= \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{k=1, k \neq N-2}^{N-1} (l(l+1))^2 \|L_l\|^2 \|L_k\|^2 \alpha_{l,k}^2 + \\ &+ \sum_{l=1}^{N-1} (l(l+1))^2 \|L_l\|^2 \left\{ \|L_N\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N-2}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (A3.20)$$

Or

$$\|L_N\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N-2}^2 \leq 3 \|L_{N-2}\|^2 (\tilde{\alpha}_{l,N}^2 + R_l^2) \leq 3 \|L_{N-2}\|^2 (\alpha_{l,N}^2 + R_l^2)$$

et en utilisant l'inégalité

$$a^2 + b^2 \leq 3(a^2 + (b-a)^2) \quad (A3.21)$$

on obtient:

$$\|L_N\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N-2}^2 \leq 9 \frac{2N+1}{2N-3} \left\{ \|L_N\|^2 \alpha_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 (\alpha_{l,N} - R_l)^2 \right\}. \quad (A3.22)$$

et donc

$$\|L_N\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 \tilde{\alpha}_{l,N-2}^2 \leq C \left\{ \|L_N\|^2 \alpha_{l,N}^2 + \|L_{N-2}\|^2 \alpha_{l,N-2}^2 \right\}. \quad (A3.22)$$

Finalement, pour  $N \geq 3$  on a

$$\left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right\|^2 \leq C \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2, \quad (A3.23)$$

et de façon analogue on montre que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq C \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right\|^2. \quad (A3.24)$$

On procède de la même façon pour  $\partial u / \partial y$ . Les dérivées de  $v$  donnent aussi le même type de résultat, et la conclusion du théorème découle du corollaire et de la définition de  $\beta_N$  et de  $\beta_N^G$ .

# Références

- (A.S) M. Abramowitz & I.A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables (Gov. Printing Office, Washington D.C.) (1972).
- (Ad) R.A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, (1975).
- (Ax) O. Axelsson. Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations. Linear Algebra and its Application. 29,1-16 (1980).
- (A.H.U) K. Arrow, L. Hurwicz, & H. Uzawa. Studies in Nonlinear Programming. Stanford University Press, Stanford, (1958).
- (A.L.V) M. Azaiez, G. Labrosse, & H. Vandenven. A pressure field pseudo spectral evaluation for 3-D numerical experiments in incompressible fluid dynamics. In Proceedings of the Eleventh International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Springer Verlag, (1989).
- (A.L1) M. Azaiez & G. Labrosse. A unique grid spectral collocation 3-D Stokes solver : numerical study of the pressure operator. Presented in ICOSA-HOM 89, JUNE 26-29, 1989, COMO (Italy).
- (A.L2) M. Azaiez & G. Labrosse. A multidimensional periodic-nonperiodic steady Stokes solver for primitive variables by spectral collocation method, submitted to jour. of Comp. Phys.
- (B.al) C. Basdevant, M. Deville, P. Haldenwang, J.M. Lacroix, J. Ouazzani, R. Peyret, P. Orlandi & A.T. Patera. Spectral and finite difference solutions of the Burgers equation. Comput. Fluids, (1986) 14,23-41.
- (B.C.M) C. Bernardi, C. Canuto & Y. Maday. Generalized Inf-Sup condition

for Chebyshev approximation of the Stokes problem, SIAM J. Numer. Anal. 25 (1988), p. 1237-1271.

(B.C.M.M) C. Bernardi, C. Canuto, Y. Maday & B. Metivet. Single grid spectral collocation for the Navier-Stokes equations, à paraître dans I.M.A. Journal Numer. Anal.

(B.M.M.1) C. Bernardi, Y. Maday, & B. Metivet. Calcul de la pression dans la résolution spectral du problème de Stokes. Recherche Aérospatiale 1 (1987), p. 1-21 .

(B.M.M.2) C. Bernardi, Y. Maday, & B. Metivet. Spectral approximation of the periodic-nonperiodic Navier-Stokes equations. Numer. Math., 51:655-700,(1987).

(B.M.1) C. Bernardi & Y. Maday. A collocation methods over staggered grids for the Stokes problem, Intern. J. for Num. Methods in Fluids, 8 (1988), p. 537-557.

(B.M.2) C. Bernardi & Y. Maday. Relèvement polynômial de trace et applications, à paraître dans Modél. Math. et Anal. Numér.

(B.M.3) C. Bernardi & Y. Maday. Properties of some weighted Sobolev spaces and application to spectral approximations, SIAM J. Numer. Anal. 26 (1989), p. 769-829.

(Bu) J.M. Burgers . The non linear Diffusion Equation. D. Reidel Publishing Compagy, Dordrecht, Holland, (1974).

(Br) F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers. RAIRO Anal. Numer., 8 R2:129-151, (1974).

(C.Ch) J. Cahouet & J.P. Chabard. Some fast 3-D finite element solvers for the generalized Stokes problem. Int. J. Meth. in Fluids, 8 : 869-895, (1988).

(C) A.J. Chorin. Numerical solution of incompressible flow problems. In J.M. Ortega and W.C Rheinboldt, editors, Studies in Numerical Analysis 2, SIAM, (1970).

(C.H.Q.Z) C. Canuto, M.Y. Hussaini, C. Quarteroni & T.A.Zang. Spectral Methods in Fluid Dynamics. Berlin :Springer-Verlag, (1987).

(C.Q) C. Canuto & A. Quarteroni. Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev Spaces; Math. Comp, (1982) 67-86.

(D.R) **P.J. Davis & P. Rabonowitz.** Methods of Numerical Integration. Academic Press, (1985).

(F.P) **J. Frohlich & R. Peyret.** Calculation of non-boussinesq convection by a pseudospectral method. Presented in ICOSAHOM 89, JUNE 26-29, 1989, COMO (Italy).

(G.R) **V. Girault & P.A. Raviart.** Finite Element Approximation of the Navier Stokes Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1986).

(G) **R. Glowinski.** Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Springer-Verlag, (1984).

(G.P) **R. Glowinski & O. Pironneau.** On a mixed finite element approximation of the Stokes problem. Numer. Math., 33:397, (1979).

(G.O) **D. Gottlieb & S.A. Orszag.** Numerical and Analysis of Spectral Methods. SIAM, (1977).

(H) **P. Haldenwang.** Résolution tridimensionnelle des équations de Navier-Stokes par méthodes Spectrales Tchebycheff: Application a la convection naturelle, Thèse, Université de Provence, (1984).

(H.L.D.A) **P. Haldenwang, G. Labrosse, S. Abboudi & M. Deville.** Chebyshev 3-D and 2-D pseudo spectral solver for the Helmholtz equation. J. Comp. Phy, 55 (1984).

(K.M) **J. Kim & P. Moin.** Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. J. Comput. Phys., 59:309, (1985).

(Le) **P. Lequere.** Mono and multi domain Chebyshev algorithm on staggered grid. In Proceedings of the Seventh International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, (1989).

(Ma1) **Y. Maday.** Analysis of spectral projectors in one dimensional domains, submitted to jour. of Comp. Phys.

(M.M.A.L) **A. Mojtabi, K. Mojtabi, M. Azaiez, & G. Labrosse .** Numerical and experimental study of multicellular free convection flows in an annular porous layer (à paraître).

(M.M.P.R) **Y. Maday, D. Meiron, A.T. Patera, & E.M. Ronquist.** Analysis of iterative methods for the steady and unsteady Stokes Problem: application to spectral element discretisation. Submitted to Journal of Computation Physics.

(M.P.R) **Y. Maday, A.T Patera, & E.M Ronquist.** A well-posed optimal spectral element approximation for the Stokes problem. SIAM J. Numer. Anal., to appear.

(M.Q) **Y. Maday & A. Quarteroni.** Legendre and Chebychev spectral approximation of Burgers equation. Numer. Math., 37(1981), pp.321.332.

(Me) **B. Métivet.** Résolution des équations de Navier-Stokes par méthodes spectrales. Thèse, Université Pierre-et-Marie-Curie,(1987).

(Me.Mo) **B. Métivet & Y. Morchoine.** Une méthode spectrale avec prise en compte de la condition Inf-Sup pour le calcul d' un écoulement de fluide visqueux incompressible. La Recherche Aérospatiale.

(Pe) **R. Peyret.** Introduction to Spectral Methods. Von Karman Institute Lecture Series 1986-04,Rhode-Saint Genese, Belgium. (1986)

(SJ) **S. Jie.** Résolution numérique des équations de Stokes et de Navier- Stokes par les méthodes spectrales, Thèse, Université Paris Sud (1987).

(T) **R. Temam .** Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis. North-Holland, Amsterdam, (1977).

(V1) **H. Vandeveen.** Analysis of the eigenvalues of spectral differentiation operators. SIAM J. Numer. Anal., submitted.

(V2) **H. Vandeveen.** Compatibilité des espaces discrets pour l'approximation spectrale du problème de Stokes periodique non periodique.M2AM

(Y.C.B) **Y. Yamaguchi, C.J. Chang, & R.A. Brown.** Multiple bouyancy-driven flows in a vertical cylinder heated from below. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 313:519, (1984).

(Z.H) **T.A. Zang & M.Y. Hussaini.** Fourier-Legendre spectral methods for incompressible chanel flows, Proc. 9th. Conf. on Numer. Methods in Fluid Dynamics, Saclay (1984).

A PRESSURE GRADIENT FIELD SPECTRAL COLLOCATION EVALUATION  
FOR 3-D NUMERICAL EXPERIMENTS IN INCOMPRESSIBLE FLUID DYNAMICS

by

M. AZAIEZ +++, G. LABROSSE ++, H. VANDEVEN ++

++ Laboratoire FAST, UA CNRS  
Dept. Hydrodynamique, Université de Paris Sud  
Bat 502, 91405 ORSAY Cedex, FRANCE

+ Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris XI, UA CNRS

+++ Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris VI, UA CNRS

Three dimensional numerical experiments in Fluid Dynamics should be more and more feasible, owing to the increasing of computer performances and memory capacities. Many physical situations of flows confined in simple geometries are, then, worth being studied in some detail with the help of accurate 3-D numerical schemes, formulated in primitive variables. Spectral methods are well designed for this purpose (1). To evaluate a velocity field with a spectral accuracy is not a very hard task (2), providing the fluid properties are held constant (with temperature for example) and the advective terms are treated explicitly in time. But the difficulty arises for the determination of the pressure field to get a residual to the constraint equation  $\text{div}(\underline{v})=0$  of the same magnitude as the one obtained for the momentum conservation equation. This is clearly a criterion of coherence for the numerical scheme and of confidence for the numerical results physical reality.

An iterative spectral collocation Stokes solver has been implemented for mixed boundary conditions on the velocity. We have used an unique grid made of the Gauss-Lobatto points on which the incompressibility condition is imposed.

Both,  $\text{div}(\underline{v})=0$  and  $\underline{\nabla}p$  are obtained, with the spectral accuracy, in a reasonable number of iterations as compared to the collocation points number.

This code has been tested in 2-D orthogonal geometries, cartesian and bounded cylindrical annulus, its extension to 3-D being straightforward.

## 1 - NUMERICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

Let us consider the Stokes system to be solved within a domain  $\Omega$  bounded by  $\Gamma$  :

$$(\underline{\nabla}^2 - h^2)\underline{v} - \underline{\nabla}p = \underline{F} \quad \text{in } \Omega$$

boundary conditions for  $\underline{v}$  on  $\Gamma$

$$\text{div}(\underline{v}) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

where  $h^2$  and  $\underline{F}$  are given Helmholtz constant and source term respectively.

The first two equation lines define a linear non singular operator,  $H$ , acting on  $\underline{v}$ , and can be written formally :

$$H \underline{v} - \underline{\nabla}' p = \underline{F}'$$

where  $\underline{\nabla}'$  and  $\underline{F}'$  are deduced from the corresponding quantities by properly taking into account the boundary conditions on  $\underline{v}$ .

The operator  $H$  and  $\underline{\nabla}'$  are not anymore pure differential operators and do not commute with the divergence operator. The constraint  $\text{div}(\underline{v}) = 0$  gives, then, the following operator acting on  $p$  :

$$A p = (\text{div}.H^{-1}.\underline{\nabla}')p = - (\text{div}.H^{-1})\underline{F}'$$

Noting that the differential order of  $A$  being zero, no extra conditions are required on  $p$  to solve it, as it should be in this problem.

From a practical point of view : 1) The  $A$  operator mixes all the space directions and its matricial representation is full. For the time being, there is no efficient direct solver for it. 2) Some redundancies appear between the imposed conditions on  $\underline{v}$ :  $\underline{v}|_{\Gamma} = \underline{v}_0$  (for example) and  $\text{div}(\underline{v})=0$  (4). The pressure and velocity mathematical representations must then be properly chosen if one needs an unique and accurate determination of the pressure field (3). This amounts, for example, to use staggered grids in a spectral collocation code. The theoritical analysis of such a procedure has been performed for a Legendre spectral decomposition of the  $p$ ,  $\underline{v}$  fields in a 2-D cartesian geometry (3). Otherwise, spurious pressure modes are present in the linear system. They are well localised in the spectral space (4) when a Tau method is chosen to solve the differential system, while some of them are distributed on the whole physical and spectral spaces in the case of a collocation method (3). In a 2-D bounded cylindrical annulus, we have the same spurious modes with an unique grid as in the 2-D cartesian case. And, from a theoritical analysis, it can be shown that the  $(\underline{v}, p)$  numerical solution is unique if those modes are excluded from the  $p$  representation space.

## 2 - THEORITICAL STATEMENTS ABOUT THE 2-D BOUNDED CYLINDRICAL ANNULUS CASE

The problem to be solved is :

$$\begin{aligned} -\mu[ ((r+\alpha)\underline{v}_{,r})_{,r} / (r+\alpha) + \underline{v}_{,zz} ] + \underline{\nabla} p &= \underline{F} & \text{in } \Omega \\ \underline{v} &= 0 & \text{in } \Gamma \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\underline{v}(r+\alpha)) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

where the constant  $\alpha$  comes from the transform  $[R1, R2]$  to  $[-1, 1]$

Let us define the functional spaces  $X_N$  and  $M_N$

$$X_N = (H_0^1(\Omega))^2 \cap (P_N(\Omega))^2$$

$$M_N \text{ in } L_0^2(\Omega) \cap P_N(\Omega)$$

and the collocation point set  $E_N = \{ \underline{x} = (x_i, x_j) \mid 0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N \}$  where the  $x_i$  are solution of  $(1-x^2)L'_N$ ,  $L_N$  being the  $N^{\text{th}}$  degree Legendre polynomial. One has :

$$x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1.$$

The discretized formulation of the problem is then : find  $(\underline{v}_N, p_N)$  in  $X_N \times M_N$  such that

$$-\mu [((x_i + \alpha) \underline{v}_{,r})_{,r} / (x_i + \alpha) + \underline{v}_{,zz}] (\underline{x}) + \nabla p(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x}), \quad \underline{x} \text{ in } \Omega \cap E_N$$

$$\underline{v}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \text{ in } \Gamma \cap E_N$$

$$[(1/(x_i + \alpha))[(x_i + \alpha) \underline{v}_{,r}]_{,r} + \underline{v}_{,zz}] (\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \text{ in } \Omega \cap E_N$$

Making use of the discretized Legendre scalar product  $(f, g)_N$  one has the following steps :

a) Proposition : The problem is equivalent to the following variational problem : find  $(\underline{u}_N, p_N)$  such that :

$$\text{for any } \underline{v}_N \text{ in } X_N, \mu (\nabla \underline{u}_N, (r+\alpha) \nabla \underline{v}_N)_N + (\nabla p_N, (r+\alpha) \underline{v}_N)_N = (\underline{F}, (r+\alpha) \underline{v}_N)_N$$

$$\text{for any } q_N \text{ in } P_N(\Omega), \quad (\operatorname{div}(\underline{u}_N(r+\alpha)), q_N)_N = 0$$

### 3 - NUMERICAL FORMULATION OF THE PROBLEM

The Stokes system has been solved in the following configurations :

- inhomogenous Dirichlet or Neumann boundary conditions for  $\underline{v}$ .
- 2-D cartesian or meridian plan of a bounded cylindrical annulus.
- Legendre or Chebyshev collocation method with an unique grid for the pressure and velocity fields. 8 spurious pressure modes are then expected (4) to be present in our linear problem. Their gradient cancels on the  $\Omega$  collocation points.

The Stokes solver proceeds as follows :

- in a preprocessing stage, the  $H$  operator eigenspaces are built up following the well known sequential diagonalisation procedure (2).
- the  $A$  operator is then solved for the pressure gradient field evaluation. An extended conjugate gradient method, as proposed in (5), has been

used for this unsymmetric operator.

-then comes the velocity field determination.

Convergence rates and accuracy have been measured by running the code on polynomial solutions (whose higher degree is given by the spectral cut-off) and on large spectral band solutions.

The essential features are :

- there is no significant difference between our results in Legendre or Chebyshev decompositions. We present therefore only data obtained with the Chebyshev collocation method.

- the iterative procedure converges to the expected spectral accuracy of the  $\text{div}(\underline{v})$  and  $\nabla p$  fields. A moderate number of iterations, as compared to the number of collocation points, allows to get very satisfactory results. Figure 1 presents, as function of the iteration number  $n$ , the euclidian norm of  $\text{div}(\underline{v}^{(n)})$  and  $\nabla(p^{(n)} - p_{\text{exact}})$  in the case of a polynomial solution corresponding to an inhomogeneous Dirichlet boundary conditions on  $\underline{v}$ . Choosing two spectral cut-off,  $10^2$  and  $19^2$ , we have reported only results with  $\|\text{div}(\underline{v}^{(n)})\|_2 \geq 10^{-16}$  : 30 and 44 iterations, respectively, have been necessary to go down 14 decades in  $\text{div}(\underline{v})$ . On figure 2 are given similar results for bounded cylindrical annulus, with inhomogeneous Dirichlet or Neumann boundary conditions on  $\underline{v}$ . Curve (c) on this figure corresponds to a non limited spectral band solution.

The  $(\underline{v}, \nabla p)$  fields can thus be obtained at any given accuracy, just by choosing adequate spectral cut-off. The pressure field situation is somewhat different because of the spurious modes. On table 1 is shown, with an arbitrary scale, the map of  $\delta p = p_N - p_{\text{exact}}$  on the grid points, excluding the four corners of our domain where there is no access to the pressure. Of course since  $\nabla \delta p = 0$  on the internal points, these pressure modes have no effect, neither on the iterative procedure, nor on the velocity field evaluation. It is only a matter of filtering them out if one needs an accurate pressure field !

#### 4 - CONCLUSION

The Stokes system can be solved within the framework of spectral methods to get accurate solenoidal velocity fields. The present drawback of the numerical procedure lies in the pressure iterative loop. Although its convergence is surprisingly good, it will not be a refinement to conceive an accelerated algorithm, particularly for unsteady 3-D incompressible fluid flows.

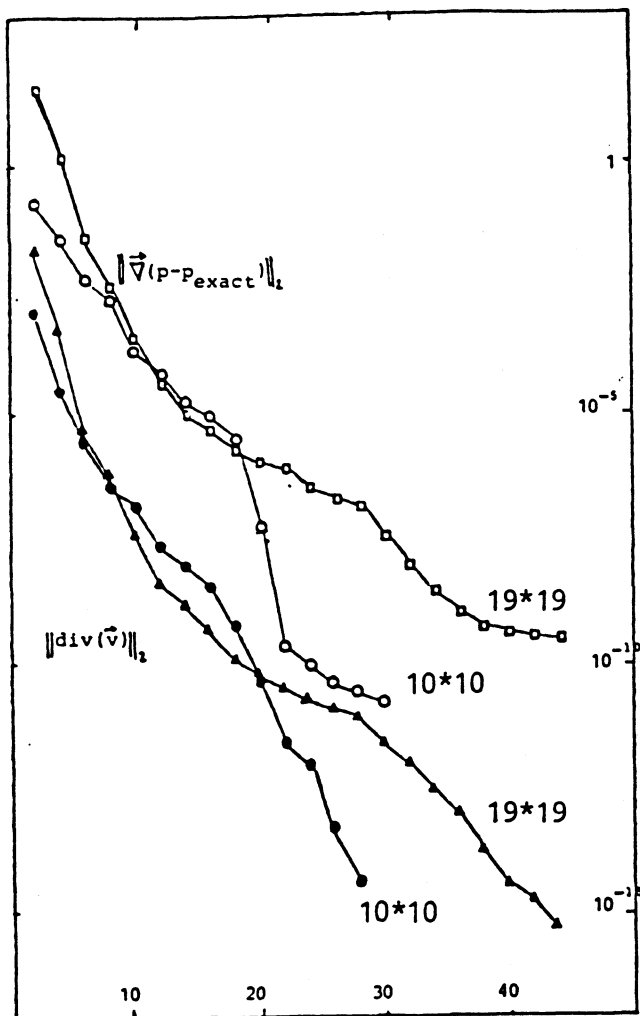


Figure 1

2-D Cartesian geometry, collocation Chebychev method  
Inhomogeneous Dirichlet boundary conditions on velocity.  
Are presented, as function of the iteration number  $n$ ,  
the Euclidian norms of  $\text{div}(\vec{v}^{(n)})$  and  $\vec{v}^{(n)} - p_{\text{exact}}$ .

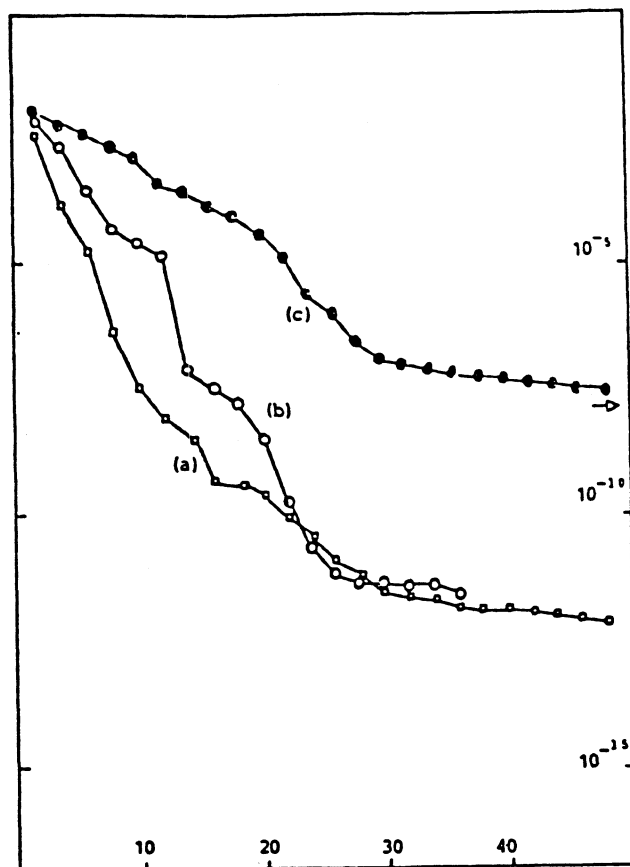


Figure 2

Meridian plan of a bounded cylindrical annulus. The Euclidian norm of  $\text{div}(\vec{v}^{(n)})$  is presented, as function of the iteration number  $n$ , for the following cases:

- curve (a) : polynomial solution, with inhomogeneous Dirichlet b.c., spectral cut-off are  $11 \times 11$
  - curve (b) : polynomial solution, with inhomogeneous Neumann b.c., spectral cut-off are  $20 \times 20$
  - curve (c) : non limited spectral band solution, same b.c. as in (b), spectral cut-off are  $13 \times 13$ .
- indicates the expected spectral value.

#### REFERENCES

- (1)-D.GOTTlieb, S.A.ORZAG (1977), "Numerical analysis of spectral methods : theory and applications." SIAM, Philadelphia.
- (2)-D.B.HAIDVOGEL, T.ZANG (1979), "The accurate solution of Poisson's equation by expansion in Chebychev polynomials.", J.Comp.Phys., 30, 167-180
- P.HALDENWANG, G.LABROSSE, S.ABDOUDI, M.DEVILLE (1984), "Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation." J.Comp.Phys., 55, 115-128.
- (3)-C.BERNARDI, Y.MADAY, B.METIVET (1987), "Calcul de la pression dans la résolution spectrale du problème de Stokes." La Recherche Aérospatiale, n° 1987-1, 1-21.
- (4)-P.HALDENWANG (1984), "Résolution tridimensionnelle des équations de Navier-Stokes par méthodes spectrales Tchebycheff : application à la convection naturelle." Ph.D.Thèse, Université de Provence.
- P.HALDENWANG, G.LABROSSE (1986), proceedings of the 6<sup>th</sup> Int.Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, ed. by M.O.Bristeau, R.Glowinski, A.Hausel, J.Periaux, 261-266.
- (5)-C.AXELSON (1980), "Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations." Linear algebra and its applications, 29, 1-16
- (6)-F.BREZZI (1974), "On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers.", RAIRO Anal.Numer., 8/R2, 129-151.

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
| .  | 17 | 14 | 17 | 14 | 17 | .  |
| 17 | 10 | 17 | 10 | 17 | 10 | 17 |
| 14 | 17 | 14 | 17 | 14 | 17 | 14 |
| 17 | 10 | 17 | 10 | 17 | 10 | 17 |
| 14 | 17 | 14 | 17 | 14 | 17 | 14 |
| 17 | 10 | 17 | 10 | 17 | 10 | 17 |
| .  | 17 | 14 | 17 | 14 | 17 | .  |

Table 1.