Thèses d'Orsay

YANICK HEURTEAUX

Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques

Thèses d'Orsay, 1989

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1989__0252__P0_0>

ORSAY
n° d'ordre :

63684

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR EN SCIENCES

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PAR

HEURTEAUX Yanick

SUJET : Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques

soutenue le 11 janvier 1989 devant la Commission d'examen

MM. KAHANE Jean-Pierre Président
ANCONA Alano
HIRSCH Francis
LEBEAU Gilles
ZINSMEISTER Michel

A l'heure où je termine la rédaction de cette thèse, je tiens à passer encore quelques instants pour adresser mes remerciements à tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de ce travail.

Ma pensée va naturellement tout d'abord vers Alano Ancona mon directeur de recherche. Voilà maintenant huit ans que je le connais. J'ai tout d'abord découvert ses talents d'enseignant lorsque je suis arrivé à l'ENSET. J'ai ensuite découvert son enthousiasme de chercheur. S'armant souvent de patience, il m'a appris à acquérir un tempérament de chercheur. Ses conseils m'ont toujours été précieux. Il a toujours su être à mon écoute notamment lorsque j'ai dû faire face à des problèmes extra professionnels. Son attitude m'a alors profondément touché.

Je remercie ensuite Jean-Pierre Kahane pour l'honneur qu'il me fait de bien vouloir présider le jury de cette thèse.

C'est avec joie que je m'adresse maintenant à Francis Hirsch. C'est aussi grâce à lui que j'ai eu envie de faire de l'analyse. Il m'a par ailleurs transmis son goût pour l'enseignement. Il a aussi toujours su me faire confiance et je profite de cet instant pour dire combien je lui en suis reconnaissant. C'est un plaisir pour moi qu'il ait accepté d'écrire un rapport sur mon travail.

J'ai connu Michel Zinsmeister il y a quelques années dans le cadre d'un groupe de travail. Il a eu la patience de lire ma thèse et a bien voulu écrire un rapport sur celle ci. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il a dû le faire à partir d'un manuscrit qui n'était pas toujours bien rédigé.

Je tiens aussi à remercier Gilles Lebeau d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciements les plus chers à Madame Dumas qui, avec beaucoup de compétence a assuré la frappe de ce travail, me facilitant ainsi la tâche.

Je tiens aussi à citer Monique Picqué qui a relu avec patience le texte de cette thèse m'aidant ainsi à corriger les (trop nombreuses) fautes d'orthographe et erreurs de typographie.

Enfin, n'oublions pas Jacques Lubczanski qui m'a aidé à réaliser sur Macintosh les quelques dessins accompagnant mon travail.

HEURTEAUX Yanick

TITTLE : Boundary Harnack inequalities for parabolic operators

ABSTRACT :

Let L be a parabolic operator on $\mathbb{R}^{n+1}$. We compare, near the boundary, the behavior of positive L-solutions on a domain of $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfying a Lipschitz condition relatively to an adapted metric.

We first establish in these domains a so-called *weak* boundary Harnack principle.

In the second chapter, we establish a uniform Harnack principle for certain particular positive L-solutions.

This principle then allow us to prove another *strong* boundary Harnack principle for certain pairs of positive L-solutions.

Using these results, we characterize the Martin boundary for certain domains and we show that the positive L-solutions in such domains admit *non tangential* limits except for a negligible set for harmonic measure. We thus generalize to L-operators results demonstrated by J. T. Kemper for the heat operator.

Finally, in the last part, and for slightly more regular domains, we establish the equivalence between harmonic measure, adjoint harmonic measure and *surface measure* thus developing some of J. M. Wu and R. Kaufman results.

KEY WORDS :

parabolic operator - Harnack-Moser principle - harmonic measure - Green function - boundary Harnack principle - minimal function - Martin boundary.

CODE MATIERE AMS (1980) : 35K10 - 31B25 - 31C05 - 31B10 - 31C35

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous proposons d'étendre les résultats de J.T. Kemper ([17]) à des opérateurs paraboliques de $\mathbb{R}^{n+1}$ plus généraux que l'opérateur de la chaleur $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$.

Nous dirons qu'un point frontière Q d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est lipschitzien si, au voisinage de Q l'ouvert Ω s'écrit $x_n > f(x_1, \ldots x_{n-1}, t)$, f étant une fonction lipschitzienne par rapport à la distance naturelle ici:

$$d((x',t),(y',s)) = \|x'-y'\| \vee |t-s|^{1/2} \quad \text{où} \quad x',y' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{et } t,s \in \mathbb{R} .$$

J.T. Kemper a démontré dans [17] qu'on pouvait associer à chaque point frontière lipschitzien Q d'un ouvert Ω une C-solution minimale positive et non identiquement nulle, unique à un coefficient multiplicatif près. A partir de là, il a établi un théorème de représentation des C-solutions positives dans les ouverts Ω délimités par une hypersurface lipschitzienne et deux hyperplans du type $\{t=\text{cste}\}$. Ensuite, grace à ce théorème de représentation, il a montré que les C-solutions positives de Ω convergeaient non tangentiellement (relativement à la distance décrite plus haut) en μ-presque tout point du bord de Ω (μ désignant la mesure harmonique de l'ouvert considéré). Sa démarche utilise de façon essentielle l'invariance par translations de l'opérateur C .

Nous allons retrouver au cours de ce travail ces résultats dans le cadre d'opérateurs paraboliques s'écrivant sous la forme $L = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(A\nabla_x)$, A étant une matrice $n \times n$ symétrique uniformément elliptique dépendant de $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ et vérifiant de plus certaines hypothèses de régularité. Pour ces opérateurs, on dispose du principe de Harnack-Moser ([20]) ainsi que d'estimations de la solution fondamentale ([6] et [11]).

Dans la dernière partie de ce travail, exploitant des résultats intermédiaires, nous donnons des estimations de la mesure harmonique de certains ouverts dont le bord possède une régularité un peu plus grande. Nous précisons alors les résultats obtenus dans le cadre de l'opérateur C par J.M. Wu ([25]) et par R. Kaufman et J.M. Wu ([16]).

Détaillons maintenant la démarche utilisée pour obtenir ces résultats.

A. Ancona a dans [1] démontré pour des opérateurs elliptiques un principe de Harnack à la frontière dans les ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^n$ ([1] théorème 5.1). Ce principe lui permet alors de caractériser la frontière de Martin de ces ouverts. Il lui permet aussi d'interpréter géométriquement dans les ouverts lipschitziens le théorème de Fatou sur l'existence de limites fines pour le quotient de deux solutions positives : plus précisément, il montre qu'en tout point où un tel quotient posséde une limite fine, il possède aussi une limite non tangentielle.

Nous avons cherché à voir comment pouvait s'étendre ce principe de Harnack à la frontière à des opérateurs paraboliques. Nous savions cependant qu'un principe aussi précis que le théorème 5.1 de [1] était exclu en raison du caractère "orienté" des inégalités de Harnack (voir chapitre 1 §4).

Dans le chapitre 1, on démontre un principe de Harnack "faible" au bord (théorème 1.7) comparant le comportement de deux solutions positives s'annulant sur une partie lipschitzienne du bord d'un ouvert Ω . Ce principe fait intervenir deux points de référence. C'est en ce sens qu'il est faible. Cependant, il s'avèrera précieux au cours des chapitres 2, 3 et 4. Pour l'obtenir, on utilise essentiellement le principe de Harnack-Moser ([20]) et les estimations de la solution fondamentale ([6] et [11]) et on adapte à notre cadre la technique utilisée par A. Ancona dans [1] et [3].

Le chapitre 2 constitue une étape pour obtenir ensuite un principe de Harnack "fort" au bord ne faisant plus intervenir qu'un point de référence. On établit pour certaines solutions positives un principe de Harnack uniforme améliorant les inégalités de Harnack-Moser. C'est l'objet du théorème 2.1. On cherche à contrôler les valeurs prises par ces fonctions dans une boule parabolique à l'aide de la valeur au centre de la boule. Evidemment, on ne peut obtenir une telle estimation pour une solution positive quelconque. On démontre ce principe pour la fonction w, mesure harmonique de $\partial T_Q(r,\lambda r)$ dans un domaine lipschitzien canonique ω_f adapté au cylindre $T_Q(r,\lambda r)$ (Pour les notations, se référer au chapitre 1).

On procède en plusieurs étapes. On établit d'abord ce principe lorsque l'opérateur sous jacent est à coefficients constants. On utilise alors l'invariance par translation d'un tel opérateur. Ensuite, on est conduit à comparer les fonctions en questions pour deux opérateurs coincidant au point **Q** . Pour atteindre cette comparaison, on utilise une technique due à J. Serrin ([23]) et reprise par A. Ancona ([4]). On est amené à introduire une étape intermédiaire qui consiste à regarder les évolutions de la fonction w lorsqu'on effectue de petites perturbations du bord autour du point **Q**. Cette dernière idée m'a été suggérée par A. Ancona.

Les outils mis en place au cours de ce chapitre permettent de dégager l'estimation suivante:

Si Ω est un ouvert délimité au voisinage du point frontière **Q** par un graphe $x_n=f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ où f est une fonction $C^{1,\alpha}$ en $x_1,\ldots,x_{n-1}$ et $(1+\alpha)/2$-hölderienne en t ($\alpha>0$), toute solution positive dans Ω nulle sur le graphe de f et ne s'annulant pas dans Ω est, au voisinage du point **Q**, de l'ordre de la distance au graphe (la distance est toujours celle introduite plus haut).

Dans le chapitre 3, nous établissons pour certains couples de solutions positives un principe de Harnack "fort" au bord ne faisant plus intervenir qu'un point de référence (théorème 3.1 et corollaire 3.2). Ce principe nous permet de décrire le cône des solutions positives de Ω tendant vers zéro au bord de Ω en dehors du point **Q**; c'est une demi-droite engendrée par une solution positive minimale. Nous obtenons ensuite un théorème de représentation des solutions positives de certains ouverts Ω , puis l'existence de limites non tangentielles en presque tout point (relativement à la mesure harmonique) de la partie lipschitzienne du bord.

Notons cependant que le problème du comportement à la frontière du rapport u/v de deux solutions positives quelconques reste ouvert, le théorème de Fatou ne pouvant s'interpréter géométriquement que si on connait un principe de Harnack uniforme pour la fonction v.

Lors du chapitre 4, on considère des portions du bord de Ω délimitées par un graphe $x_n=f(x_1,\ldots,x_{n-1},t)$ où f est lipschitzienne en $x_1,\ldots,x_{n-1}$ et $(1/2)+\epsilon$ hölderienne en t et on démontre que sur ces portions, la mesure harmonique, la mesure harmonique adjointe et la projection de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes. La projection de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sur le graphe peut s'interpréter comme une mesure de surface (voir page 59). Nous commençons par établir l'équivalence entre la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe. Pour y parvenir, nous utilisons les résultats du chapitre 2. Nous obtenons même que la densité de l'une par rapport à l'autre est dans L^∞ . Ensuite, nous nous inspirons de la démarche utilisée par B. Dahlberg ([9]) dans le cadre d'ouverts lipschitziens et de l'opérateur Δ ainsi que de celle d'A. Ancona dans [4]. On montre que la mesure harmonique est absolument continue par rapport à la projection de la mesure de Lebesgue et on controle la norme L^2 de la densité. Ceci nous permet alors d'obtenir l'équivalence des deux mesures.

Rappelons pour terminer que R.Kaufman et J.M. Wu ([16]) ont construit un exemple d'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ délimité par un graphe $x=f(t)$ 1/2-hölderien pour lequel ces trois mesures sont deux à deux étrangères. Ce graphe est de dimension de Hausdorff 3/2 au voisinage de chacun de ses points.

CHAPITRE 0

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout ce travail, on fixe un entier $n \geq 1$ et on introduit sur l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ la distance suivante qu'on appelle distance parabolique:

$$\forall\ (x,t)\ ,\ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad d((x,t),(y,s)) = \|x-y\| \vee |t-s|^{1/2}\ ,$$

où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Les n premières coordonnées d'un point (x,t) de $\mathbb{R}^{n+1}$ sont appelées les coordonnées d'espace et la dernière coordonnée de (x,t) est appelée la coordonnée temporelle. La distance parabolique est adaptée aux problèmes que nous allons rencontrés et, sauf précision contraire, c'est toujours à cette distance qu'on se réfèrera.

Si μ est un réel strictement supérieur à 1, on note $\Lambda(\mu)$ la classe des opérateurs paraboliques sur $\mathbb{R}^{n+1}$ s'écrivant:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(A\nabla_x)$$

où $A = (A_{ij}(x,t))_{ij}$ est une matrice $n \times n$ symétrique vérifiant les propriétés suivantes:

1) A est uniformément elliptique, c'est à dire:

$$\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{\mu}\|\xi\|^2 \leq \langle A\xi \mid \xi \rangle \leq \mu\ \|\xi\|^2$$

2) Les fonctions A_{ij} sont lipschitziennes relativement à la distance parabolique et vérifient:

$$\forall\ (x,t)\ ,\ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad |A_{ij}(x,t) - A_{ij}(y,s)| \leq \mu\ d((x,t),(y,s))$$

3) Afin de rester dans un cadre classique et d'utiliser les résultats de [12], les fonctions A_{ij} sont supposées être de classe C^1 par rapport aux variables d'espace, les fonctions $\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$ étant de plus localement lipschitziennes relativement à la distance parabolique. Il semble cependant que cette dernière propriété ne soit pas nécessaire.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, on note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f sur Ω telles que $\frac{\partial f}{\partial t}$, les $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ $(1 \leq i,j \leq n)$ existent et qui vérifient $Lf = 0$ dans l'ouvert Ω. Une telle fonction est appelée une L-solution dans Ω. D'après des travaux de Friedman ([12]), toute solution faible de l'équation dans Ω possède un représentant dans $H(\Omega)$.

Une L-sursolution dans Ω est une fonction f semi continue inférieurement dans Ω vérifiant:

i) $Lf \geqslant 0$ au sens faible

ii) $\forall\, P \in \Omega$, $f(P) = \underline{\lim}_{\xi \to P} f(\xi)$.

Une fonction f sur Ω est appelée une L-sous solution si $-f$ est une L-sursolution. Ainsi, toute fonction f qui est à la fois une L-sursolution et une L-sous solution dans Ω est une L-solution dans Ω.

Nous allons maintenant énoncer les résultats fondamentaux qui sont à la base de ce travail.

1. PRINCIPE DU MINIMUM ([12])

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$. On note $\partial_p\Omega$ et on appelle frontière parabolique de Ω, l'ensemble des points de $\partial\Omega$ adhérents à une courbe γ: $[0,1[\longrightarrow\Omega$ le long de laquelle la coordonnée temporelle décroit strictement. Si (X,T) est un point de Ω, on note $\partial_p\Omega_{(X,T)}$ l'ensemble $\partial_p(\Omega \cap \{t<T\})$.

<u>**THEOREME 0.1**</u>([12]). Soient $\mu>1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n+1}$ et (X,T) un point de Ω. Soit u une L-sursolution dans Ω. On a alors:

$$u(X,T) \geqslant \operatorname*{Inf}_{(\xi,\tau)\in\partial_p\Omega_{(X,T)}} \ \underline{\lim}_{(x,t)\to(\xi,\tau)} u(x,t) \quad .$$

2. PRINCIPE DE HARNACK-MOSER ([20])

<u>**THEOREME 0.2**</u>([20]). Soient $\mu>1$, et L un opérateur de le classe $\Lambda(\mu)$. Soient P un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, α, α', β, β_1, β_2, β_3 et r des réels vérifiant:

$$0 < \alpha < \alpha' \ , \quad r>0 \quad \text{et} \quad 0 < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1 < \beta \quad .$$

On note Ω l'ouvert $\Omega = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| < \alpha r \text{ et } 0 < t < \beta r^2\}$.
On considère les parties de Ω suivantes:

$\Omega^+ = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| < \alpha' r \text{ et } \beta_1 r^2 < t < \beta r^2\}$

$\Omega^- = P + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| < \alpha' r \text{ et } \beta_3 r^2 < t < \beta_2 r^2\}$.

Alors, il existe une constante $c = c(\alpha,\alpha',\beta_3,\beta_2,\beta_1,\beta)$ strictement positive telle que pour toute L-solution positive dans Ω, on ait:

$$\operatorname*{Max}_{(x,t)\in\Omega^-} u(x,t) \leqslant c \operatorname*{Min}_{(x,t)\in\Omega^+} u(x,t) \quad .$$

3. *ESTIMATIONS DE LA SOLUTION FONDAMENTALE*

On montre dans [12] pour chaque opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ l'existence d'une solution fondamentale Γ. Γ est caractérisée par le fait que pour tout point P de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\Gamma_P(\cdot)$ est l'unique L-sursolution définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ tendant vers zéro à l'infini et vérifiant au sens faible $L\Gamma_P = \delta_P$ où δ_P est la mesure de Dirac au point P. Par le principe du minimum, $\Gamma_P(M)$ est nécessairement nulle en tout point M dont la coordonnée temporelle est inférieure à celle de P.

On connait les estimations suivantes pour la fonction Γ_P (voir [6] et [11]):

THEOREME 0.3. Soient $\mu<1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Notons Γ la solution fondamentale pour l'opérateur L. Il existe une constante c strictement positive ne dépendant que de n et de μ telle que pour tous points (x,t) et (y,s) dans $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant t>s on ait:

$$\frac{\exp(-c\|x-y\|^2/(t-s))}{c(t-s)^{n/2}} \leqslant \Gamma_{(y,s)}(x,t) \leqslant \frac{c\,\exp(-\|x-y\|^2/c(t-s))}{(t-s)^{n/2}} .$$

4. *LE PROBLEME DE DIRICHLET*

On sait résoudre le problème de Dirichlet dans des cylindres de la façon suivante:

THEOREME 0.4([12]). Soient $\mu>1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient P un point de $\mathbb{R}^{n+1}$ et r et h deux réels strictement positifs. On considère l'ouvert Ω suivant:

$$\Omega = P + \{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| < r \text{ et } 0 < t < h \} .$$

Alors, pour toute fonction f continue sur $\partial\Omega$, il existe une unique L-solution F dans Ω convergeant vers f en tout point de $\partial_p\Omega$.

Ensuite, on peut définir dans tout ouvert Ω le problème de Dirichlet au sens de Perron-Wiener-Brelot.

5. *FONCTION DE GREEN D UN OUVERT*

Soient Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^{n+1}$ et P un point de Ω. On appelera fonction de Green de pôle P dans Ω la fonction G_P dans Ω définie par:

$$G_P = \Gamma_P - H^{\Omega}_{\Gamma_P} ,$$

où Γ_P désigne la L-solution fondamentale dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $H^{\Omega}_{\Gamma_P}$ désigne la solution au problème de Dirichlet (au sens de Perron-Wiener-Brelot) dans Ω avec donnée frontière Γ_P. G_P est donc une L-sursolution dans Ω qui vérifie au sens faible $LG_P = \delta_P$ et qui converge vers zéro en tout point de régularité de $\partial_p \Omega$: c'est un L-potentiel de Ω.

On peut alors localiser les estimations de la solution fondamentale de la façon suivante:

COROLLAIRE 0.5. Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient Q un point de $\mathbb{R}^{n+1}$ et R un réel strictement positif. On note Ω l'ouvert:

$$\Omega = Q + \{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| < R \ \text{ et } \ |t| < R^2 \} .$$

Notons G_P la fonction de Green de pôle P dans l'ouvert Ω. Il existe une constante $c = c(n,\mu)$ strictement positive telle que pour tout pôle P dans l'ensemble $Q + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| \leqslant R/2 \ \text{ et } \ -R^2/2 \leqslant t \leqslant 0\}$ et pour tout point M dans l'ensemble $Q + \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| \leqslant R/2 \ \text{ et } \ R^2/4 \leqslant t \leqslant R^2/2\}$ on ait:

$$G_P(M) \geqslant \frac{c}{R^n} .$$

Démonstration. Grâce au théorème 0.3, il existe une constante $c = c(n,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall \ M \in \partial\Omega \qquad \Gamma_P(M) \leqslant c/R^n .$$

Ainsi, on a l'estimation $H^{\Omega}_{\Gamma_P} \leqslant c/R^n$ partout. Fixons alors deux points $M = (x,t)$ et $P = (y,s)$ quelconques dans l'ensemble Ω et tels que $t>s$. Il existe un constante c strictement positive ne dépendant pas des points M et P telle que:

$$G_P(M) = \Gamma_P(M) - H^{\Omega}_{\Gamma_P}(M) \geqslant \frac{\exp(-c\|x-y\|^2/(t-s))}{c(t-s)^{n/2}} - c/R^n .$$

Considérons alors dans un premier temps $P = Q + (0,R^2/8)$ et $M = P + (0,\delta R^2)$ où δ est un réel vérifiant $0<\delta<1/8$. Si δ est choisi suffisamment petit, on obtient l'inégalité:

$$G_P(M) \geqslant \frac{c}{2R^n} .$$

Quitte à modifier la constante c, cette inégalité s'étend alors grâce au principe de Harnack-Moser à tout point M de l'ensemble

$$Q + \{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| \leqslant R/2 \ \text{ et } \ -R^2/2 \leqslant t \leqslant 0 \}.$$

Elle s'étend aussi à tout point M de l'ensemble

$$Q + \{ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x\| \leqslant R/2 \ \text{ et } \ R^2/4 \leqslant t \leqslant R^2/2 \} ,$$

car à M fixé, la fonction $G_{.}(M)$ est une L^*-solution et vérifie donc un principe de Harnack-Moser orienté dans l'autre sens (L^* est l'opérateur adjoint de L).

CHAPITRE 1

PRINCIPE DE HARNACK FAIBLE AU BORD

Les résultats essentiels de ce chapitre sont donnés par le théorème 1.4 et le théorème 1.7.

L étant un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$, le théorème 1.4 donne une première estimation des L-solutions positives tendant vers zéro sur une partie lipschitzienne du bord d'un ouvert Ω (pour les définitions, se référer au chapitre 0 et à la partie 1 du présent chapitre). Il constitue une version locale des lemmes 1.3 et 1.4 établis par J. T. Kemper ([17] pages 247 et 248) dans le cadre de l'opérateur de la chaleur $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$. Ce résultat (écrit pour des opérateurs paraboliques) est à rapprocher d'une estimation de L. Carleson ([8]) . Citons aussi R. A. Hunt et R. L. Wheeden ([14] et [15]) qui ont décrit des inégalités similaires pour les fonctions harmoniques usuelles et A. Ancona ([1]) qui a obtenu le même type d'inégalités pour des opérateurs elliptiques.

Le théorème 1.7 donne une première comparaison du comportement de deux L-solutions positives u et v nulles sur une partie lipschitzienne du bord d'un ouvert Ω. Ce résultat ressemble au principe de Harnack au bord démontré par A. Ancona dans le cadre d'opérateurs elliptiques ([1] théorème 5.1). Le résultat obtenu est cependant moins puissant car les inégalités de Harnack vérifiées par les opérateurs que nous considérons sont moins performantes (voir §4 du présent chapitre). Cependant ce théorème sera très utile lors des chapitres 2 , 3 et 4. La démarche employée reprend des idées de [1], [2] et [3].

Pour démontrer les théorèmes 1.4 et 1.7 nous utilisons de façon essentielle les estimations de la fonction de Green décrites au cours du chapitre 0 (théorème 0.3 et corollaire 0.5).

1. DOMAINE LIPSCHITZIEN CANONIQUE. POINT FRONTIERE LIPSCHITZIEN D'UN OUVERT

On utilisera les ensembles géométriques suivants :

• Cylindre $T_Q(r,h)$:
Un point de $\mathbb{R}^{n+1}$ est noté selon les besoins (x,t) ou (x',x_n,t) (x_n désignant la n-ième coordonnée d'espace du point (x,t)). On note

$T_Q(r,h)$ le cylindre suivant :

$$T_Q(r,h) = Q + \{(x',x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \|x'\| \leq r \ , \ |t| \leq r^2 \ , \ |x_n| \leq h\}$$

où Q est un point de $\mathbb{R}^{n+1}$, r et h sont deux réels strictement positifs et $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^{n-1}$.

• Domaine lipschitzien canonique:
Fixons $Q = (Y,S) = (Y',Y_n,S) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit f une fonction numérique définie sur:

$$B((Y',S),r_0) = \{(x',t) \in \mathbb{R}^n \ ; \|x'-Y'\| \leq r_0 \ , \ |t-S| \leq r_0^2\}$$

et vérifiant la condition de Lipschitz :

$$\forall \ (x',t),(y',s) \in B((Y',S),r_0) \qquad |f(x',t)-f(y',s)| \leq Kd((x',t),(y',s))$$

où K est une constante strictement positive. Notons qu'ici la distance utilisée est la distance parabolique décrite dans le chapitre 0 et que la fonction f est en fait une fonction lipschitzienne par rapport aux coordonnées d'espace et 1/2-höldérienne par rapport à la coordonnée temporelle.

Le domaine $\omega_f = \{(x,t) \in \overset{\circ}{T}_Q(r_0,h) \ ; \ x_n > f(x',t)\}$ est appelé domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0,h)$ dès que les conditions $Y_n = f(Y',S)$ et $h > 5Kr_0$ sont vérifiées.
Si P est un point frontière de ω_f situé sur le graphe de f remarquons que l'ensemble $P+\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x_n < -K\|x'\|\vee|t|^{1/2}\}$ est une sorte de *cône parabolique* extérieur à l'ensemble ω_f. De même, on peut trouver $\ell>0$ tel que le *tronc de cône parabolique* $P+\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \ ; \ K\|x'\|\vee|t|^{1/2} < x_n<\ell\}$ soit intérieur à ω_f .

• Un domaine Ω est dit lipschitzien en $Q \in \partial\Omega$ si à une isométrie près des coordonnées d'espace et pour un certain couple (r_0,h_0) de réels strictement positifs $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0,h_0)$ est un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0,h_0)$.
Ainsi, au voisinage de Q , la frontière de Ω est le graphe d'une fonction lipschitzienne pour la *distance parabolique* d.

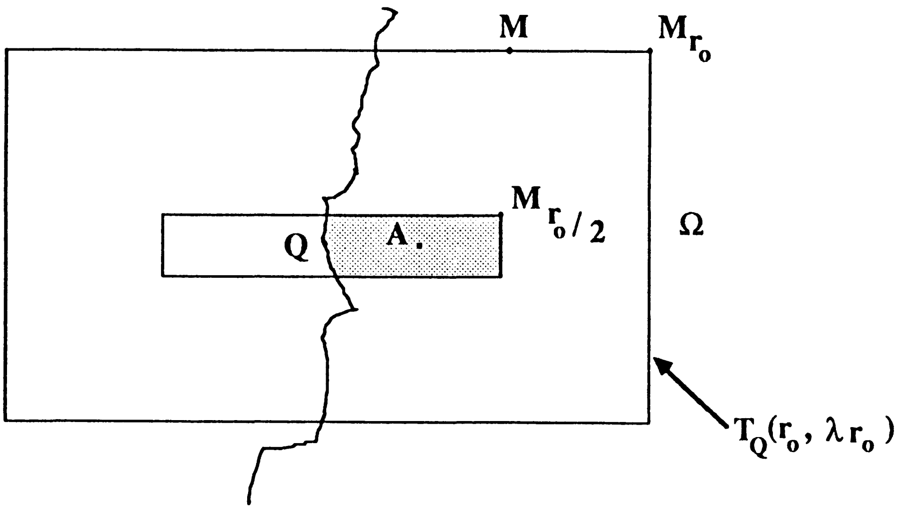
2. UNE ESTIMATION DE LA FONCTION DE GREEN

Afin d'établir le théorème 1.4 nous commençons par démontrer l'estimation suivante de la fonction de Green:

<u>**THEOREME 1.1**</u>. Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ lipschitzien en Q. Soient r_0 et λ deux réels strictement positifs tels que $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Notant G la L-fonction de Green de l'ouvert Ω, il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall\, A \in \Omega \cap T_Q(r_0/2, \lambda r_0/2)\ ,\quad \forall\, M \in \Omega \cap \partial T_Q(r_0, \lambda r_0)\ ,$$

on ait: $\quad G_A(M) \leqslant c\, G_A(M_{r_0})$ où $M_{r_0} = Q + (0, \lambda r_0, r_0^2)$.



REMARQUES. 1. On a une estimation similaire de $G_A(M)$ lorsque le pôle A décrit l'ensemble $\Omega \cap T_Q((1-\epsilon)r_0, \lambda(1-\epsilon)r_0)$ $(\epsilon \in]0,1[)$. La constante c dépend alors aussi de ϵ.

2. L'estimation s'étend à tout point M de $\Omega - T_Q(r_0, \lambda r_0)$ en utilisant le principe du maximum suivant:

<u>**PROPOSITION 1.2**</u>([13]). Soit v une fonction L-sousharmonique définie sur D-F où D est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et F est une partie fermée de D. On suppose que $\limsup_{z \to z_0} v(z) \leqslant 0$ en tout point z_0 de $F \cap D$ et que v est majorée par un L-potentiel de D. Alors v est négative dans D-F.

La démonstration est immédiate en constatant que la fonction v_1 définie par $v_1(z) = \mathrm{Sup}(v(z), 0)$ si $z \in D-F$ et $v_1(z) = 0$ si $z \in D \cap F$ est une fonction L-sousharmonique dans D majorée par le potentiel q.

La fonction $G_A(\cdot)$ converge vers zéro en tout point de $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Pour établir le théorème 1.1, nous avons besoin de contoler la vitesse de convergence. C'est pourquoi nous commençons par démontrer le principe de barrière uniforme suivant:

LEMME 1.3. Notons encore L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et $\mathcal{O}$ un domaine *conique* :

$$\mathcal{O} = P+\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}; \|x'\|<r, |t|<r^2, -\lambda(\|x'\|\vee|t|^{1/2}) < x_n < \lambda r\} .$$

Notons h la L mesure harmonique de $\partial T_Q(r,\lambda r)$ dans $\mathcal{O}$ et (Y',Y_n,S) le point P . Il existe une fonction $\Phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue croissante nulle en zéro mais ne dépendant ni de L ni de r ni de P, telle que pour tout point $M = (x',x_n,t)$ de l'ensemble $\mathcal{O}$ on ait:

$$h(M) \leqslant \Phi\left(\frac{\|x'-Y'\|}{r} \vee \frac{|t-S|^{1/2}}{r} \vee \frac{|x_n-Y_n|}{\lambda r}\right) .$$

Ce lemme nous apprend donc que h(M) tend vers zéro lorsque M tend vers P et nous offre un contrôle de la vitesse de convergence indépendant de L et P.

En particulier, la fonction h constitue une L-barrière locale au voisinage du point frontière lipschitzien P . Le point P est donc L-régulier (au sens de Perron-Wiener-Brelot).

Démonstration. Grâce à l'invariance par translation de la classe d'opérateurs $\Lambda(\mu)$, on peut supposer que P est l'origine de $\mathbb{R}^{n+1}$. Notons alors G la L-fonction de Green du domaine $T_0(r,\lambda r)$ et notons Q le point $Q = (0,\frac{-7\lambda r}{8},\frac{-r^2}{2})$. En utilisant le corollaire 0.5 , on peut trouver une constante $\epsilon_1 = \epsilon_1(n,\lambda,\mu) \in]0,1[$ telle que $G_Q(M) \geq \frac{\epsilon_1}{r^n}$ pour tout point $M \in T_0(r/2,\lambda r/2)$. De plus, en utilisant la majoration de Γ_Q (L-fonction de Green globale au point Q) donnée par le théorème 0.3, on trouve une constante $c_1 = c_1(n,\lambda,\mu)$ telle que :

$$\forall\ M\in\partial T_Q(r/10,\lambda r/10) \quad G_Q(M) \leqslant \Gamma_Q(M) \leqslant \frac{c_1}{r^n} .$$

Cette inégalité se transmet à tout point de $T_Q(r,\lambda r) - \overset{\circ}{T}_Q(r/10,\lambda r/10)$ par le principe du maximum. Ainsi, l'inégalité est entre autre vérifiée dans $\mathcal{O}$ et $\frac{r^n}{c_1} G_Q$ constitue une sous-solution au problème de Dirichlet dans $\mathcal{O}$ avec la donnée frontière 0 sur $\partial T_0(r,\lambda r)$ et 1 sur $\partial\mathcal{O} - \partial T_0(r,\lambda r)$. En d'autres termes, pour tout point M dans $\mathcal{O}$, on a: $\frac{r^n}{c_1} G_Q(M) \leqslant 1-h(M)$.

Par suite, $\forall\ M \in\mathcal{O} \cap T_0(r/2,\lambda r/2)$, $h(M) \leqslant 1-\epsilon$ où $\epsilon = \frac{\epsilon_1}{c_1}$ est une constante de l'intervalle $]0,1[$ qui ne dépend que de n , λ et μ. Par une récurrence immédiate, on a alors :

$$\forall\ k \geq 0 \quad \forall\ M\in\mathcal{O}\cap T_0(\frac{r}{2^k},\frac{\lambda r}{2^k}) \qquad h(M) \leqslant (1-\epsilon)^k .$$

Posons alors $\Phi(x) = 2^\beta x^\beta$ où $\beta = \frac{\log(1-\epsilon)}{\log(1/2)}$. Pour tout point $M = (x',x_n,t)$ de

$\mathcal{O}$, si k désigne le plus grand entier tel que $\frac{\|x'\|}{r} \vee \frac{|t|^{1/2}}{r} \vee \frac{|x_n|}{\lambda r} \leqslant \frac{1}{2^k}$ on a alors :

$$h(M) \leqslant (1-\epsilon)^k = (1/2)^{\beta k} \leqslant \Phi(\frac{\|x'\|}{r} \vee \frac{|t|^{1/2}}{r} \vee \frac{|x_n|}{\lambda r}).$$

Ce qui prouve le lemme.

Démontrons alors le théorème 1.1. On note $\Delta(Q,r_0/2)$ l'ensemble $\partial\Omega \cap T_Q(r_0/2,\lambda r_0/2)$. Commençons par réduire le problème en remarquant qu'il suffit de montrer le résultat pour les points $A = A_\rho = Q + (0, \lambda\rho r_0, 0)$ où $\rho \in]0,1/2]$. En effet, ayant établi ce résultat, en l'appliquant au voisinage d'un point frontière $P \in \Delta(Q,r_0/2)$ et en utilisant les inégalités de Harnack et le principe du maximum on peut alors étendre (quitte à modifier la constante c) l'estimation du théorème à tout point A s'écrivant $P+(0,\lambda\rho r_0/2,0)$ avec $\rho \leqslant 1/2$. Ainsi, l'estimation devient vraie pour tous les points A situés *près du bord*.

Enfin, si $A \in \Omega \cap T_Q(r_0/2,\lambda r_0/2)$ n'est pas du type précédent, (ce qui sous-entend qu'il est loin du bord de Ω), on peut écrire :

* D'une part grâce aux inégalités de Harnack pour l'opérateur adjoint L^* et au corollaire 0.5 ,

$$G_A(M_{r_0}) \geq c_1 G_{B_{r_0}}(M_{r_0}) \geq c_2\, r_0^{-n} \quad \text{où} \quad B_{r_0} = Q + (0,\lambda r_0, 3r_0^2/4) \quad .$$

(on remarque que le cylindre $T_{B_{r_0}}(r_0,\lambda r_0/10)$ reste inclus dans Ω) .

* D'autre part $G_A(M) \leqslant \Gamma_A(M) \leqslant c_3 r_0^{-n}$ en utilisant l'estimation du théorème 0.3 pour la L-fonction de Green globale Γ_A.

En confrontant ces deux dernières comparaisons, on étend alors l'estimation du théorème à tout point $A \in \Omega \cap T_Q(r_0/2,\lambda r_0/2)$ ce qui complète sa preuve.

Venons-en alors au point essentiel qui consiste à établir l'existence d'une constante $c \underset{o}{=} c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall \rho \in]0,1/2],\ \forall M \in \Omega - T_Q(r_0,\lambda r_0) \quad G_{A_\rho}(M) \leqslant c G_{A_\rho}(M_{r_0}) \quad \text{où} \quad A_\rho = Q+(0,\rho\lambda r_0,0).$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On établit dans un premier temps l'existence d'une meilleure constante $c_m = c_m(n,\lambda,\mu)$ strictement positive vérifiant:

$$\forall\ \rho \in [2^{-(m+1)},2^{-m}] \quad \forall M \in \Omega \cap \partial T_Q(r_0,\lambda r_0)\ ,\ G_{A_\rho}(M) \leqslant c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})\ .$$

En effet, majorant G_{A_ρ} par Γ_{A_ρ} la L-fonction de Green globale de pôle A_ρ et utilisant le théorème 0.3 , on obtient pour de tels points M:

$$G_{A_\rho}(M) \leqslant c\ r_0^{-n} \quad \text{où} \quad c = c(n,\lambda,\mu).$$

Ensuite, minorant G_{A_ρ} par la fonction de Green de pôle A_ρ du cylindre $\overset{o}{T}_{A_\rho}(2^{-(m+2)}r_0, 2^{-(m+2)}\lambda r_0)$, utilisant le principe de Harnack-Moser entre les points M_{r_0} et $B_\rho = A_\rho + (0,\frac{1}{2}(2^{-(m+2)}r_0)^2)$ ainsi que le corollaire 0.5, on obtient : $G_{A_\rho}(M_{r_0}) \geq \delta_m G_{A_\rho}(B_\rho) \geq \delta\delta_m(2^{-(m+2)}r_0)^{-n}$.

Ces deux inégalités assurent donc l'existence d'une meilleure constante $c_m = c_m(n,\lambda,\mu)$ permettant l'estimation $G_{A_\rho}(M) \leqslant c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})$.

Voyons enfin que la suite c_m est bornée. C'est maintenant que va intervenir le lemme 1.3. Grâce à ce qui précède, on peut écrire par le principe du maximum :

$$\forall\ \rho\in[2^{-(m+2)},2^{-(m+1)}],\ \forall\ M \in \Omega - \overset{\circ}{T}_Q(\frac{r_0}{2},\frac{\lambda r_0}{2}) \qquad G_{A_\rho}(M) \leqslant c_m G_{A_\rho}(M_{r_0/2}).$$

On obtient donc grâce aux inégalités de Harnack:

$$\forall\ M\in\Omega-\overset{\circ}{T}_Q(r_0/2,\lambda r_0/2) \quad G_{A_\rho}(M) \leqslant c' c_m G_{A_\rho}(M_{r_0}) \ .$$

Soit P un point de $\partial\Omega\cap\partial T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$ et soit $\mathcal{O}$ le domaine conique:

$$\mathcal{O} = P+\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\ ;\ \|x'\| < \frac{r_0}{10}\ ,\ |t|^{1/2} < \frac{r_0}{10}\ ,\ -\lambda(\|x'\|\vee|t|^{1/2}) < x_n < \frac{\lambda r_0}{10}\}.$$

Grâce au lemme 1.3, en notant h la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r_0/10,\lambda r_0/10)$ dans $\mathcal{O}$, on peut trouver ϵ assez petit (ne dépendant ni de P ni de L) tel que h ne dépasse pas $1/c'$ dans $\mathcal{O}\cap T_P(\epsilon r_0,\lambda\epsilon r_0)$. A l'aide du principe du maximum, l'inégalité $G_{A_\rho}(M) \leqslant c' c_m G_{A_\rho}(M_{r_0})$ valable en particulier sur $\partial\mathcal{O}\cap\Omega$ nous donne :

$$\forall\ M \in \Omega \cap T_P(\epsilon r_0,\lambda\epsilon r_0) \quad G_{A_\rho}(M) \leqslant c_m G_{A_\rho}(M_{r_0}) \ .$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Harnack, on a l'existence d'une constante $\tilde{c} = \tilde{c}(n,\lambda,\mu,\epsilon)$ telle que : $G_{A_\rho}(M) \leqslant \tilde{c}\ G_{A_\rho}(M_{r_0})$ pour tout point M de $\Omega\cap\partial T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$ ne se situant pas dans l'un des $\overset{\circ}{T}_P(\epsilon r_0,\epsilon\lambda r_0)$ décrit plus haut. En utilisant une nouvelle fois le principe du maximum (décrit dans la proposition 1.2) à l'extérieur de $T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$, on conclut finalement $c_{m+1} \leqslant \max(\tilde{c},c_m)$ et la suite des c_m est uniformément bornée.

3. COMPORTEMENT DE L-SOLUTIONS POSITIVES AU VOISINAGE D'UN POINT FRONTIERE LIPSCHITZIEN

THEOREME 1.4. Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\underset{o}{\Lambda}(\mu)$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω tel que $\Omega \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu) > 0$ telle que pour toute L-solution positive u dans $\overset{\circ}{\Omega}$ tendant vers 0 en tout point de $\partial\Omega \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$, on ait:

$$\forall\, M \in \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0) \qquad u(M) \leqslant cu(P_{r_0})$$

où $P_{r_0} = Q + (0,\lambda r_0,2r_0^2)$.

REMARQUE. Le point P_{r_0} peut être remplacé dans cette estimation par le point $Q + (0,\lambda r_0,(1+\alpha)r_0^2)$ où $0 < \alpha \leqslant 1$, la constante c dépendant alors aussi du réel α. Cependant, la constante α ne peut pas être prise égale à zéro en raison du caractère *orienté* des inégalités de Harnack : on exhibe des contre-exemples simples dans le cas d'un demi-espace $\{x_n > 0\}$.

Démonstration. On peut évidemment supposer ici $\Omega = \Omega \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ qui devient alors régulier et borné. Appelons G la fonction de Green de Ω, notons $\Sigma = \overset{\circ}{\Omega} \cap T_Q(3r_0/2,3\lambda r_0/2)$ et constatons que $s = R_u^{\Sigma}$ est un L-potentiel dans Ω porté par $\Omega \cap \partial\Sigma$ et coïncidant avec u dans Σ. (la réduite est prise ici au sens des fonctions L-surharmoniques dans Ω).

Ecrivant alors $u(M) = \int_{\Omega\cap\partial\Sigma} G_A(M)d\omega(A)$ pour une certaine mesure ω et pour M dans l'ensemble Σ, on est amené à montrer l'existence d'une constante $c>0$ vérifiant:

$$\forall\, A \in \Omega\cap\partial\Sigma \quad , \quad \forall\, M \in \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0),\ G_A(M) \leqslant cG_A(P_{r_0}) \ .$$

(Il faut remarquer que P_{r_0} est aussi situé dans Σ).

Constatons tout d'abord que l'inégalité n'a besoin d'être vérifiée que pour les points A dont la coordonnée temporelle t(A) ne dépasse pas $t(Q) + r_0^2$, $G_A(M)$ étant nul pour les autres points A. Fixant $P \in \partial\Omega \cap \partial T_Q(3r_0/2,3\lambda r_0/2)$ dont la coordonnée temporelle t(P) ne dépasse pas $t(Q)+r_0^2$, et appliquant le théorème 1.1 dans la boite $\overset{\circ}{\Omega} \cap T_P(r_0/10,\lambda r_0/10)$, on obtient grâce au principe du maximum et au principe de Harnack-Moser l'existence d'une constante $c_1 = c_1(n,\lambda,\mu)$ telle que:

$$G_A(M) \leqslant c_1 G_A(P_{r_0}) \quad \text{pour} \quad M \in \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0) \quad \text{et} \quad A \in \,]P,P+(0,\lambda r_0/40,0)] \ .$$

L'inégalité est donc vraie pour les points A *proches du bord*.

Ensuite, si A n'est pas du type précédent, d'une part on peut écrire $G_A(M) \leqslant \Gamma_A(M) \leqslant c_2 r_0^{-n}$ où $c_2 = c_2(n,\lambda,\mu)$ et d'autre part on peut établir en utilisant les inégalités de Harnack pour l'opérateur adjoint l'estimation $G_A(P_{r_0}) \geqslant c_3 G_{A_{r_0}}(P_{r_0})$ où $A_{r_0} = P_{r_0} - (0,r_0^2/2)$. (Là encore intervient le fait qu'on ne considère que des points A vérifiant $t(A) \leqslant t(Q)+r_0^2$). Enfin, $G_{A_{r_0}}(P_{r_0})$ étant aussi de l'ordre de r_0^{-n}, $(G_{A_{r_0}}(P_{r_0}) \geqslant c_4 r_0^{-n})$, l'inégalité cherchée est vérifiée en posant $c = \max(c_1, \frac{c_2}{c_3 c_4})$.

Nous pouvons aussi déduire de ce théorème le corollaire suivant qui sera utile lors du chapitre 3. On retrouve alors l'analogue du lemme 1.4 de [17] dans le cadre des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$.

<u>**COROLLAIRE 1.5**</u>. Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que Ω est lipschitzien en $Q \in \partial\Omega$ et que $\Omega \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ est un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Il existe $c = c(n,\lambda,\mu) > 0$ telle que pour toute L-solution positive u dans Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - T_Q(r_0/2,\lambda r_0/2)$ et se laissant majorer au voisinage de l'infini par un L-potentiel q d'un ouvert $\Omega' \supset \Omega$, on ait:

$$\forall\, M \in \Omega - T_Q(r_0,\lambda r_0) \quad u(M) \leqslant c\,u(M_{r_0}) \quad \text{où} \quad M_{r_0} = Q+(0,\lambda r_0,r_0^2).$$

REMARQUE : l'infini considéré est l'infini de $\mathbb{R}^{n+1}$ lorsqu'il est adhérent à Ω. Si l'ouvert Ω est borné la domination de u par un potentiel n'intervient donc plus.

Ce corollaire va être une conséquence simple du principe du minimum suivant ([3]).

<u>**PROPOSITION 1.6**</u>. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et s une fonction L-surharmonique dans Ω vérifiant :

1. $\forall\, z_0 \in \partial_p\Omega \ \liminf\limits_{z \to z_0} s(z) \geqslant 0$

2. Si Ω est non borné, on peut trouver un L-potentiel q d'un ouvert $\Omega' \supset \Omega$ tel que $s \geqslant -q$ sur la trace sur Ω d'un voisinage de l'infini de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Alors s est positive dans Ω.

Démonstration. Si Ω est borné, c'est le principe du minimum usuel. Sinon, notons B_R la boule (euclidienne) de rayon R. Pour R suffisamment grand, s+q est positive dans $\Omega - B_R$. La fonction s+q étant positive sur la frontière de l'ouvert borné $\Omega \cap B_{2R}$, elle est alors positive partout. Pour R positif, $R_q^{\Omega-\bar{B}_R}$ étant aussi un L-potentiel dans Ω' vérifiant la même hypothèse que q vis à vis de u, on a aussi $s + R_q^{\Omega-\bar{B}_R} \geqslant 0$ (la réduite est prise ici au sens des fonctions surharmoniques dans Ω'). Lorsque R tend vers $+\infty$, $R_q^{\Omega-\bar{B}_R}$ décroît vers une L solution positive dans Ω' majorée par le potentiel q, elle décroît donc vers zéro. En passant à la limite on obtient donc que s est positive dans Ω.

Démonstration du corollaire 1.5.

En utilisant le théorème 1.4, dans les boites $T_P(r_0/10,\lambda r_0/10) \cap \Omega$, P parcourant $\partial\Omega \cap \partial T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$, ainsi que le principe de Harnack-Moser, on trouve l'existence d'une constante $c = c(n,\lambda,\mu)>0$ telle que:

$$\forall\, M \in \Omega \cap \overset{\circ}{\partial T_Q}(2r_0/3,2\lambda r_0/3) \qquad u(M) \leqslant cu(M_{r_0}).$$

L'inégalité s'étend à $\Omega - T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$ grâce à la proposition 1.6 appliquée à $s = cu(M_{r_0}) - u$ dans $\Omega - T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$.

REMARQUE : Notant $\Sigma = \Omega - T_Q(2r_0/3,2\lambda r_0/3)$, on peut aussi établir ce corollaire en constatant que la fonction $s = R_u^\Sigma$ est un potentiel dans Ω coïncidant avec u dans Σ , et en utilisant le théorème 1.1.

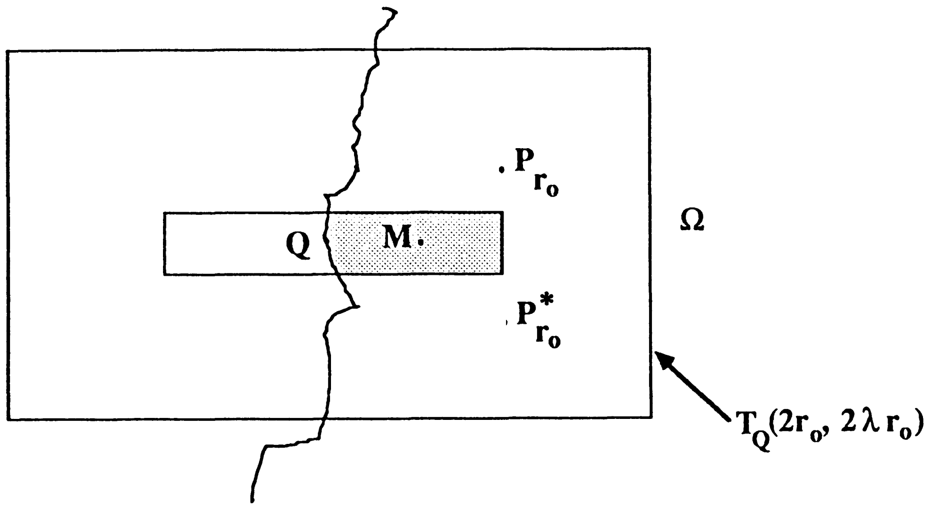
4. *PRINCIPE DE HARNACK FAIBLE AU BORD*

Nous sommes maintenant en mesure de comparer le comportement relatif de deux L-solutions positives au voisinage d'un point frontière lipschitzien. C'est l'objet du théorème suivant:

THEOREME 1.7. Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et $r_0 \leqslant 1$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω tel que $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu) > 0$ telle que pour tout couple (u,v) de L-solutions positives dans Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ on ait :

$$\forall\, M \in \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0) \qquad \frac{u(M)}{u(P_{r_0})} \leqslant c\, \frac{v(M)}{v(P^*_{r_0})}$$

où $P_{r_0} = Q + (0,\lambda r_0,2r_0^2)$ et $P^*_{r_0} = Q + (0,\lambda r_0,-2r_0^2)$.



COMMENTAIRES. Ce théorème est un analogue du théorème 1.5 décrit par A. Ancona dans [1]. On prend pour convention dans cet énoncé qu'il devient vide de sens si l'une des valeurs $u(P_{r_0})$ ou $v(P^*_{r_0})$ est nulle. Notons à ce sujet que si $u(P_{r_0})$ est nulle, la fonction u est identiquement nulle dans $\Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$. Par contre, $v(P^*_{r_0})$ peut être nul sans que v ne soit nulle dans tout l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$. Plus précisément, la fonction v peut rester nulle jusqu'à un temps t_0 puis devenir strictement positive. Pour une telle fonction v, on ne peut espérer estimer la fonction u à l'aide de v dans $\Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$. Comme dans le théorème 1.4, on peut malgré tout remplacer les points de référence P_{r_0} et $P^*_{r_0}$ par les points $Q + (0,\lambda r_0,(1+\alpha)r_0^2)$ et $Q + (0,\lambda r_0,-(1+\alpha)r_0^2)$, où $\alpha \in]0,1]$; la constante c dépend alors aussi de α.

Sa faiblesse provient évidemment du fait que cette comparaison fait intervenir deux points de références (P_{r_0} et $P^*_{r_0}$), et il est clair à l'aide des remarques décrites plus haut, qu'on ne peut espérer sans hypothèses supplémentaires sur les fonctions u et v contrecarrer ce fait. Cependant, ce théorème constituera un outil essentiel lors du chapitre 2, et on s'efforcera dans le chapitre 3, d'établir (sous des hypothèses différentes) un principe de Harnack au bord ne faisant plus intervenir qu'un point de référence.

Notons cependant qu'on obtient à l'aide du théorème $\underset{o}{1}.7$ le résultat suivant : si w désigne la L-mesure harmonique dans $\Omega \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ de $\partial T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ et si u est une L-solution vérifiant les hyptohèses du théorème 1.7, et pour laquelle $u(P^*_{r_0}) \neq 0$, on a avec une nouvelle constante c et pour tout point M de l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$:

$$\frac{1}{c}\, u(P^*_{r_0})w(M) \leqslant u(M) \leqslant cu(P_{r_0})w(M).$$

Ainsi la vitesse à laquelle u tend vers zéro au bord $\partial\Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$ est comparable à la vitesse à laquelle w tend vers 0 en ces points.

Démonstration du théorème 1.7.

On reprend la démarche d'Alano Ancona dans [1]. En utilisant l'invariance par translation de la classe d'opérateurs $\overset{\circ}{\Lambda}(\mu)$, on peut supposer Q = 0. On peut de plus supposer $\Omega = \Omega \cap T_0(2r_0,2\lambda r_0)$; on note encore G la fonction de Green de cet ouvert.

Considérons une fonction u vérifiant les hypothèses du théorème. A une modification élémentaire près utilisant le principe de Harnack et le principe du maximum, on peut écrire grâce au théorème 1.4:

$$\forall\, M \in \Omega \cap T_0(5r_0/4,5\lambda r_0/4) \quad u(M) \leq c\, u(P_{r_0})h(M)$$

où h désigne la mesure harmonique de $\partial \overset{\circ}{T}_0(5r_0/4,5\lambda r_0/4)$ dans $\tilde{\Omega} = \Omega \cap T_0(5r_0/4,5\lambda r_0/4)$.

On utilise alors le même remarque qu'Ancona dans [1]. Notons avec une étoile les quantités faisant référence à l'opérateur L^* adjoint de L et à la théorie duale. Γ désignant la L-fonction de Green globale, on a $\Gamma_A(M) = \Gamma^*_M(A)$. Ainsi au sens faible, $L^*(\Gamma_{\cdot}(M)) = \delta_M$, mesure de Dirac au point M. Par ailleurs, pour $M \in \tilde{\Omega}$, prolongeant $\tilde{G}^*_M$ (L^*-fonction de Green de $\tilde{\Omega}$) par zéro hors de $\tilde{\Omega}$ et par ses limites supérieures en tout point frontière de $\tilde{\Omega}$, on sait que $\tilde{G}^*_M = \Gamma^*_M - {}^*\hat{R}^{C\tilde{\Omega}}_{\Gamma^*_M}$. (La réduite est prise ici au sens des L-sursolutions sur $\mathbb{R}^{n+1}$).

Utilisant une propriété de symétrie de la notion de réduite lorsqu'on passe au faisceau dual, on obtient alors $L^*(\tilde{G}^*_M) = \delta_M - \mu_M$ où μ_M est la L-mesure harmonique directe au point M dans $\tilde{\Omega}$.

Fixons alors une fonction φ, C^∞ à support compact dans $\overset{\circ}{T}_0(4/3,4\lambda/3)-T_0(6/5,6\lambda/5)$, valant un au voisinage de $\partial T_0(5/4,5\lambda/4)$ et toujours comprise entre zéro et un.

Notons ensuite $\varphi_{r_0}(x,t) = \varphi(x/r_0,t/r_0^2)$. Pour tout point $M \in \overset{\circ}{T}_0(r_0,\lambda r_0)$, on a:

$$\begin{aligned} h(M) &\leq \langle \mu_M | \varphi_{r_0} \rangle \\ &= -\langle\ L^*(\tilde{G}^*_M) | \varphi_{r_0} \rangle \\ &= -\langle \tilde{G}^*_M | L(\varphi_{r_0}) \rangle \\ &\leq \int_{C\Sigma} |L(\varphi_{r_0}(\xi))|\tilde{G}^*_M(\xi)d\xi \\ &\leq \int_{C\Sigma} |L(\varphi_{r_0}(\xi))|G^*_M(\xi)d\xi \quad , \end{aligned}$$

où on a noté $\Sigma = T_0(6r_0/5,6\lambda r_0/5)$.

En utilisant l'analogue du théorème 1.1 pour l'opérateur L^* ainsi que le principe de Harnack pour ce même opérateur, on trouve une constante c>0 telle que:

$$G^*_M(\xi) \leqslant c\ G^*_M(B^*_{r_0}) \quad \text{pour} \quad M \in \Omega \cap T_0(r_0,\lambda r_0) \text{ et } \xi \notin \Sigma$$

où $B^*_{r_0} = P^*_{r_0} + (0\ ,r_0^2/4)$.

Finalement, $h(M) \leqslant c\ G_{B^*_{r_0}}(M).\int_{\complement\Sigma} |L(\varphi_{r_0}(\xi))|d\xi$.

Par un changement de variable élémentaire ramenant à $r_0 = 1$, en utilisant que les coefficients de l'opérateur L sont tous contrôlés par μ en valeur absolue, l'intégrale intervenant dans l'estimation est contrôlée par $c_2 r_0^n$ où $c_2 = c_2(n,\lambda,\mu)$. (C'est ici qu'intervient l'hypothèse $r_0 \leqslant 1$).

Donc avec une nouvelle constante c, on a:

$$(1) \qquad \forall\ M \in T_0(r_0,\lambda r_0),\ u(M) \leqslant cu(P_{r_0})r_0^n\ G_{B^*_{r_0}}(M).$$

Prenons enfin une autre fonction v vérifiant les conditions du théorème et supposons $v(P^*_{r_0}) \neq 0$ (seul cas intéressant). Fixons $\epsilon = \epsilon(n,\lambda,\mu) > 0$ tel que $T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0,\lambda\epsilon r_0)$ soit inclus dans $\Omega\text{-}T_0(r_0,\lambda r_0)$. Imposons de plus $\epsilon^2 < 1/8$. Le principe de Harnack appliqué à v nous assure l'existence d'une constante c>0 telle que:

$$\forall\ M \in \partial T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0,\epsilon\lambda r_0) \quad v(P^*_{r_0}) \leqslant c\ v(M).$$

Majorant en ces mêmes points, grâce au théorème 0.3, $G_{B^*_{r_0}}$ par $c_1 r_0^{-n}$ on obtient alors:

$$(2) \qquad \forall\ M \in \partial T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0,\lambda\epsilon r_0) \qquad r_0^n G_{B^*_{r_0}}(M) \leqslant c_1 c\ \frac{v(M)}{v(P^*_{r_0})}.$$

Cette inégalité se propage à l'extérieur de $T_{B^*_{r_0}}(\epsilon r_0,\lambda\epsilon r_0)$ par le principe du maximum, et est donc vraie en particulier pour $M \in T_0(r_0,\lambda r_0)$. La comparaison de (1) avec (2) nous donne l'estimation du théorème.

CHAPITRE 2

UN PRINCIPE DE HARNACK UNIFORME POUR CERTAINES L-SOLUTIONS POSITIVES

Comme nous l'avons déjà signalé, le théorème 1.7 voit son exploitation limitée car il fait intervenir deux points de référence. En particulier, contrairement au principe de Harnack au bord décrit par A. Ancona pour des opérateurs elliptiques, il ne nous permet pas de décrire les L-solutions positives minimales liées au point frontière lipschitzien Q de l'ouvert Ω. Nous démontrerons au cours du chapitre 3 (sous des hypothèses différentes) un principe de Harnack au bord *fort* ne faisant plus intervenir qu'un seul point de référence. Ce sera l'objet du théorème 3.1 et du corollaire 3.2. Pour atteindre ce but nous devons établir des estimations de Harnack plus précises que le principe de Harnack-Moser. Evidemment, on ne peut espérer les obtenir que pour des L-solutions positives particulières. C'est ce que nous faisons au cours du chapitre 2. L désignant encore un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et ω_f étant un ouvert lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0,\lambda r_0)$, nous démontrons que la fonction w, L-mesure harmonique de $\partial T_Q(r_0,\lambda r_0)$ dans l'ouvert ω_f vérifie un principe de Harnack uniforme: on peut estimer les valeurs de la fonction w dans toute boule parabolique à l'aide de sa valeur au centre de la boule. C'est l'objet du théorème central de ce chapitre (théorème 2.1).

La démonstration s'articule en quatre parties.

La partie 1 (très simple) consiste à établir le résultat lorsque L est un opérateur à coefficients constants.

Ensuite, on est naturellement amené à comparer les fonctions w obtenues pour deux opérateurs coincidant au point Q, un opérateur quelconque de la classe $\Lambda(\mu)$ coïncidant évidemment au point Q avec un opérateur à coefficients constants. Il s'agit alors d'affiner dans ce cadre des résultats d'A. Ancona ([4]).

La démarche utilisée m'a été suggérée par A. Ancona qui m'a fait part d'un résultat non publié décrivant une situation similaire dans le cadre d'opérateurs elliptiques et utilisant le principe de Harnack au bord (théorème 5.1 [1]). Afin d'éviter d'introduire de nouvelles notations, décrivons ce résultat d'A. Ancona dans le cadre du faisceau des Δ-solutions de $\mathbb{R}^n$.

THEOREME 2.0 ([5]). Les notations et les définitions sont similaires à celles du chapitre 1 en "oubliant" la coordonnée temporelle. Soit f_1 une fonction lipschitzienne (pour la norme euclidienne) définie sur $B(0,1)$ (boule euclidienne de $\mathbb{R}^{n-1}$). Soient α et ϵ deux nombres strictement positifs et f_2 une deuxième fonction vérifiant $|f_1(x')-f_2(x')| \leqslant \epsilon\|x'\|^{1+\alpha}$. Pour $i\in\{1,2\}$, on considère $\omega_{f_i} = T_0(1,\lambda) \cap \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n > f_i(x')\}$ et on suppose que ω_{f_i} est un domaine lipschitzien canonique adapté à $T_0(1,\lambda)$. Alors, w_i désignant la Δ-mesure harmonique de $\partial T_0(1,\lambda)$ dans ω_{f_i}, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\alpha,\epsilon)$ strictement positive telle que pour tout point M de l'ensemble $T_0(1/2,\lambda/2) \cap \{(x',x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_n > f(x') + \epsilon\|x'\|^{1+\alpha/2}\}$ on ait:

$$\frac{1}{c}\, w_2(M) \leqslant w_1(M) \leqslant c\, w_2(M) .$$

Lors de la partie 2 de ce chapitre nous obtenons un résultat similaire pour des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ à coefficients constants (théorème 2.2). Cette restriction s'impose dans un premier temps car nous sommes amenés à utiliser le principe de Harnack uniforme pour la fonction w. Lorsque ce principe sera acquis pour tout les opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$, le résultat de la partie 2 pourra être étendu à tous ces opérateurs.

Les résultats de la partie 2 permettent alors dans la partie 3 de comparer le comportement des fonctions w au voisinage d'un point frontière lipschitzien pour deux opérateurs coïncidant en ce point (théorème 2.4). Si L et $\tilde{L}$ sont deux opérateurs coincidant en Q, $\tilde{L}$ étant à coefficients constants, on perturbe un peu la frontière de l'ouvert pour trouver ensuite des fonctions $g(\tilde{\omega})$ comparables dans le cône $Q+\{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$ à la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(r_0,\lambda r_0)$. Les fonctions g trouvées sont des solutions d'équations différentielles. On adapte à notre situation une technique d'A. Ancona ([4]). Notons que J. Serrin ([23]) a utilisé antérieurement une démarche comparable pour résoudre d'autres types de problèmes.

En utilisant la partie 3, on peut étendre lors de la partie 4 le principe de Harnack uniforme décrit dans le théorème 2.1 à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$.

Le théorème 2.1 étendu à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ permet de généraliser les résultats de la partie 2 à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. On obtient alors lors de la partie 5 un comportement très précis des L-solutions positives tendant vers zéro le long d'un graphe $C^{1\alpha}$ en x' et $(1+\alpha)/2$ höldérien en t (corollaire 2.8). Ce résultat est à rapprocher de résultats de Widman ([24], page 523) écrits pour des opérateurs elliptiques.

La motivation principale au cours de ce chapitre était d'obtenir le principe de Harnack uniforme pour la fonction w. Cependant, les résultats intermédiaires (théorème 2.2, théorème 2.4 et corollaire 2.8) seront aussi utiles lors du chapitre 4 lorsque nous comparerons la mesure harmonique, la mesure harmonique adjointe et la *mesure de surface* de certains ouverts de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Dans tout ce chapitre, on suppose $Q = 0$ et $r_0 = 2$; les résultats peuvent se généraliser à tout point Q et tout $r_0 \leqslant 2$ par homogénéité.

Commençons par énoncer le théorème principal de ce chapitre.

THEOREME 2.1. Soit $\omega_f = \{(x,t) \in \overset{\circ}{T_0}(2,2\lambda) \ ; \ x_n > f(x',t)\}$ un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. Soit L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. La fonction w, L-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_f vérifie le principe de Harnack uniforme suivant :
Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)>0$ telle que pour toute boule parabolique $B(M_0,2r)$ incluse dans $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$, on ait :

$$\forall\ M_1, M_2 \in B(M_0,r) \quad w(M_1) \leqslant c\ w(M_2) \quad .$$

1. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1 LORSQUE L EST UN OPERATEUR A COEFFICIENTS CONSTANTS

Fixons $B(M_0,2r)$ une boule vérifiant les hypothèses du théorème 2.1, et appelons M et M^* les points $M_0 + (0,3r^2/2)$, $M_0 - (0,3r^2/2)$. L'opérateur L vérifiant le principe de Harnack-Moser, on est amené à établir l'existence d'une constante $c = c(n,\lambda,\mu)>0$ telle que $w(M) \leqslant c\ w(M^*)$. Considérons alors la translation τ du vecteur $(0,-3Kr,4r^2)$ où K est la constante de Lipschitz associée à la fonction f. Les coefficients A_{ij} de l'opérateur L étant constants, $w \circ \tau^{-1}$ reste une L-solution dans $\tau(\omega_f)$. Par ailleurs, en tenant compte de la valeur particulière de la translation τ, l'ouvert $\omega_f \cap \tau(\omega_f)$ coïncide avec $\omega_f \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x_n < 2\lambda-3Kr, \ \ -4+4r^2 < t < 4\}$. A l'aide du principe du maximum, on peut alors affirmer :

$$\forall\ P \in \omega_f \cap \tau(\omega_f), \quad w(P) \leqslant w \circ \tau^{-1}(P).$$

En particulier $w(M) \leqslant w \circ \tau^{-1}(M)$. Le principe de Harnack-Moser permet ensuite de dire $w(\tau^{-1}(M)) \leqslant c\ w(M^*)$ ce qui donne le résultat.

REMARQUES. 1. Le résultat démontré reste encore valable pour des boules $B(M_0,2r)$ incluses dans $\omega_f \cap \overset{\circ}{T_0}(2-\epsilon\ ,\ (2-\epsilon)\lambda)$. La constante c dépend alors aussi de ϵ.

2. En utilisant le même argument, le résultat reste vrai pour les opérateurs L dont les coefficients sont indépendants de x_n et t.

2. EVOLUTION DE LA FONCTION W LORSQU'ON EFFECTUE DE PETITES PERTURBATIONS DU BORD

<u>THEOREME 2.2</u>. Soit $L \in \Lambda(\mu)$ un opérateur <u>à coefficients constants</u>. Soient f_1 et f_2 deux fonctions lipschitziennes et ω_{f_1}, ω_{f_2} deux domaines lipschitziens canoniques adaptés au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. On suppose que les graphes de f_1 et f_2 sont proches, en ce sens qu'il existe deux constantes ϵ et α strictement positives telles que :

$$\forall\ (x',t)\quad |f_1(x',t) - f_2(x',t)| \leqslant \epsilon\ d((x',t),0)^{1+\alpha} = \epsilon(\|x'\| \vee |t|^{1/2})^{1+\alpha}\ .$$

Alors, w_i désignant la L-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_i}, il existe une constante $c=c(n,\lambda,\mu,\epsilon,\alpha)>0$ telle que pour tout point M de l'ensemble $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2})\}$, on ait:

$$\frac{1}{c}\, w_2(M) \leqslant w_1(M) \leqslant c w_2(M)\ .$$

Démonstration. Quitte à remplacer f_1 par $f_1 \wedge f_2$ et f_2 par $f_1 \vee f_2$, on peut évidemment supposer $f_1 \leqslant f_2$ et donc $\omega_{f_1} \supset \omega_{f_2}$. Notant I la partie de ω_{f_1} située entre les graphes de f_1 et f_2, on a $w_2 = w_1 - \hat{R}^I_{w_1} \leqslant w_1$, la réduite étant prise au sens des fonctions L-surharmoniques sur ω_{f_1}. Comparer w_1 et w_2 consiste donc essentiellement à comparer $\hat{R}^I_{w_1}$ et w_1.

Nous commençons par estimer l'ordre de grandeur de la fonction w_1 au voisinage du graphe de f_1.

<u>LEMME 2.3</u>. Notons $\rho(M)$ la distance parabolique de M au graphe de f_1. Il existe $\beta = \beta(n,\lambda,\mu)$ et $c = c(n,\lambda,\mu)$ deux constantes strictement positives telles que pour tout couple de points (M,N) de l'ensemble $\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$ situés sur un même axe de direction (0,1,0) et vérifiant $M_n \leqslant N_n$,on ait:

$$\frac{w_1(M)}{w_1(N)} \leqslant c\left(\frac{\rho(M)}{\rho(N)}\right)^{\beta}.$$

(M_n (resp N_n) désigne la n-ième coordonnée du point M (resp N)).

Démonstration. $w_1(M)$ étant de l'ordre d'une constante lorsque M est loin du bord, on peut tout d'abord supposer $\rho(M)\leqslant 1/2$. Ensuite, en utilisant le principe de Harnack <u>uniforme</u> pour la fonction w_1 on se ramène à n'étudier que le cas $\rho(N) \leqslant 1/2$. Fixons alors $P_0 \in \partial\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$ et appelons φ la fonction de la variable réelle $\varphi(x) = w_1(P_0 + (0,x,0))$.

En utilisant le théorème 1.4, ainsi que le principe de Harnack <u>uniforme</u>

pour la fonction w_1, on peut écrire,

$$\forall\, x \leqslant \frac{1}{2} \quad \forall\, N \in \omega_{f_1} \cap T_{P_0}(x,\lambda x) \qquad w_1(N) \leqslant c\, \varphi(x).$$

Appelant h la L-mesure harmonique de $\partial T_{P_0}(x,\lambda x)$ dans l'ouvert *cônique* $\overset{\circ}{T}_{P_0}(x,\lambda x) \cap \{x_n > -\lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2})\}$ on a alors , grâce au principe du maximum:

$$\forall\, N \in \omega_{f_1} \cap T_{P_0}(x,\lambda x) \quad w_1(N) \leqslant c\, \varphi(x)h(N).$$

Par le principe de la barrière uniforme, (lemme 1.3), on peut alors trouver $\delta = \delta(n,\lambda,\mu)>0$ tel que $\varphi(\delta x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x)$. Si $0 < y \leqslant x$ et si n est l'unique entier tel que $\frac{1}{\delta^n}y \leqslant x < \frac{1}{\delta^{n+1}}y$, on a donc $\varphi(y) \leqslant \frac{1}{2^n}\varphi(\frac{y}{\delta^n})$. Les inégalités de Harnack <u>uniformes</u> pour la fonction w_1 assurant que $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\frac{y}{\delta^n}\right)$ sont du même ordre de grandeur, on a donc avec une nouvelle constante c:

$$\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} \leqslant c\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta} \qquad \text{où} \quad \beta = \frac{\log 2}{\log 1/\delta} \quad .$$

On termine la démonstration en constatant que si $N = P_0 + (0,x,0)$, $\rho(N)$ et x sont du même ordre de grandeur.

Ce lemme étant acquis, notons pour $p \geqslant 0$:

$$I_p = I \cap (T_0(2^{-p},2^{-p}\lambda) - \overset{\circ}{T}_0(2^{-p-1},2^{-p-1}\lambda))$$

et M_p et M_p^* les points $(0,\lambda 2^{-p},2.2^{-2p})$ et $(0,\lambda 2^{-p},-2.2^{-2p})$.

Constatons que si $X \in I_p$, $\rho(X)$ est inférieur à $c2^{-p(1+\alpha)}$ et que $\rho(M_p^*)$ est de l'ordre de 2^{-p} . Grâce au lemme 2.3 et en utilisant une nouvelle fois le principe de Harnack <u>uniforme</u> pour la fonction w_1, on peut donc trouver une nouvelle constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon)>0$ telle que:

$$\forall\, X \in I_p \quad w_1(X) \leqslant c\left(\frac{2^{-p(1+\alpha)}}{2^{-p}}\right)^{\beta} w_1(M_p^*).$$

Et donc $\forall\, X \in \omega_{f_1}$, $\hat{R}_{w_1}^{I_p}(X) \leqslant c\, 2^{-\alpha\beta p}\, w_1(M_p^*)$. L'inégalité est en particulier vraie au point M_p.

Par ailleurs, on peut trouver $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,\alpha)$ telle que pour tout point de ω_{f_1} vérifiant $d(M,I_p) = 2^{-p}/10$ on ait:

$$\frac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M)}{w_1(M)} \leqslant c \quad \frac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M_p)}{w_1(M_p^*)} \quad .$$

En effet, grâce au principe de Harnack-Moser, une telle inégalité est vraie pour le point M vérifiant de plus $d(M,\partial\omega_{f_1} \cap \overset{\circ}{T}(2,2\lambda)) \geqslant \dfrac{2^{-p}}{20\lambda}$, le rapport $\dfrac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M)}{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M_p)}$ étant alors majoré par une constante et le rapport $\dfrac{w_1(M)}{w_1(M_p^*)}$ étant minoré. Le principe de Harnack faible au bord (théorème 1.7) entre les fonctions $\hat{R}_{w_1}^{I_p}$ et w_1 ainsi que le principe de Harnack-Moser nous permettent alors de prolonger cette estimation aux points M considérés et situés près du bord.

Par le principe du maximum, l'inégalité se propage à tout point M de ω_{f_1} tel que $d(M,I_p) \geqslant 2^{-p}/10$. En particulier, si M est un point de l'ensemble $T_0(1,\lambda) \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ x_n \geqslant \lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2})\}$, on a l'estimation:

$$\frac{\hat{R}_{w_1}^{I_p}(M)}{w_1(M)} \leqslant c\ 2^{-\alpha\beta p} .$$

Fixons alors un entier k tel que $c \sum_{p\geqslant k} 2^{-\alpha\beta p} \leqslant \frac{1}{2}$, et notons $\Sigma_k = \bigcup_{p\geqslant k} I_p$.

Pour tout point M de l'ensemble $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \lambda(\|x'\| \vee |t|^{1/2})\}$, on peut écrire:

$$\hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}(M) \leqslant \frac{1}{2} w_1(M).$$

Ce qui revient à dire: $w_1(M) - \hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}(M) \geqslant \frac{1}{2} w_1(M)$. Il reste alors à comparer w_2 à $w_3 = w_1 - \hat{R}_{w_1}^{\Sigma_k}$. w_3 étant une L-solution dans ω_{f_2} tendant vers zéro en tout point de $\partial\omega_{f_2} \cap \overset{\circ}{T}_0(2^{-k},\lambda 2^{-k})$, à l'aide du principe de Harnack faible au bord (Théorème 1.7), on a :

$$\forall\ M \in \omega_{f_2} \cap T_0(2^{-(k+2)},\lambda 2^{-(k+2)}) \qquad \frac{w_3(M)}{w_2(M)} \leqslant c\ \frac{w_3(M_{k+1})}{w_2(M_{k+1}^*)} \leqslant c\ \frac{w_1(M_{k+1})}{w_2(M_{k+1}^*)} .$$

Enfin, les fonctions w_1 et w_2 sont toutes deux de l'ordre d'une constante dans $\overset{\circ}{T}_0(2,2\lambda) - \overset{\circ}{T}_0(2,\lambda)$. Ainsi grâce au principe de principe de Harnack <u>uniforme</u> pour les fonctions w_1 et w_2 le rapport $\dfrac{w_3}{w_2}$ est contrôlé par une constante en tout point M de l'ensemble:

$$T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \|x'\| \vee |t|^{1/2}\} - \overset{\circ}{T}_0(2^{-(k+2)},\lambda 2^{-(k+2)}).$$

De même, en utilisant encore ce principe de Harnack <u>uniforme</u>,on obtient que le rapport $\dfrac{w_1(M_{k+1})}{w_2(M^*_{k+1})}$ est contrôlé par une constante. Ici, les nouvelles constantes dépendent aussi de k qui a été définitivement fixé.

En conclusion, en tous les points du cône qui nous intéressent $w_1(M) \leqslant 2w_3(M) \leqslant c\, w_2(M)$ ce qui constitue la comparaison non triviale entre w_1 et w_2.

REMARQUE. Il suffit en fait de supposer dans le théorème 2.2 que f_1 est un graphe lipschitzien, la fonction w_2 étant toujours comprise entre w_3 et w_4, mesures harmoniques de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans les ouverts correspondant aux graphes:

$$f_3(x',t) = f_1(x',t) - \epsilon(\|x'\| \vee |t|^{1/2})^{1+\alpha}$$
$$\text{et} \quad f_4(x',t) = f_1(x',t) + \epsilon(\|x'\| \vee |t|^{1/2})^{1+\alpha}.$$

3. COMPARAISON DES FONCTIONS W CORRESPONDANT A DEUX OPERATEURS COINCIDANT EN 0

<u>THEOREME 2.4</u>. Fixons ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. Soit $L \in \Lambda(\mu)$ et $\tilde{L}$ l'opérateur de $\Lambda(\mu)$ à coefficients constants coïncidant avec L au point 0. Notant w (resp $\tilde{w}$) la L (resp $\tilde{L}$) mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_f, pour tout point M situé dans le *cône parabolique* $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$, on a:

$$\frac{1}{c}\,\tilde{w}(M) \leqslant w(M) \leqslant c\tilde{w}(M) .$$

Comme nous l'avons déjà évoqué en introduction, reprenant une technique développée par A. Ancona ([4]), nous allons chercher à estimer le signe de $L(g(\tilde{\omega}))$ pour des fonctions g bien choisies. Nous commençons par minorer $\|\nabla_x\tilde{\omega}\|$.

<u>LEMME 2.5</u>. Soit ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_0(2,2\lambda)$ et $\tilde{L}$ un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ à *coefficients constants*. $\rho(M)$ désignant la distance parabolique de M au bord de ω_f, pour tout point $M \in \omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ on a:

$$\|\nabla_x\, \tilde{w}(M)\| \geqslant \left|\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}(M)\right| \geqslant \frac{1}{c}\,\frac{\tilde{w}(M)}{\rho(M)}$$

$\tilde{w}$ désignant toujours la $\tilde{L}$-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_f , et c étant une constante strictement positive ne dépendant que de n, λ et μ.

Démonstration. Fixons $P_0 \in \partial\omega_f \cap T_0(3/2,3\lambda/2)$ et appelons φ la fonction de la variable réelle $\varphi(x) = \tilde{w}(P_0 + (0,x,0))$. La démonstration du lemme 2.3 nous a appris l'existence de $\delta \in]0,1[$ tel que $\varphi(\delta x) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(x)$ pour tout réel x tel que le point $P_0 + (0,x,0)$ reste dans l'ensemble $T_0(3/2,3\lambda/2)$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]\delta,1[$ tel que $\varphi'(\theta x) \geqslant \frac{\varphi(x)}{2(1-\delta)x}$. De plus, $\tilde{L}$ étant à coefficients constants, par le principe du maximum, φ est une fonction croissante et $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}$ est une $\tilde{L}$-solution positive.

En utilisant les inégalités de Harnack-Moser pour la fonction $\frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}$, et en notant M le point $P_0 + (0,x,0)$, on a alors:

$$\frac{\tilde{w}(M)}{\rho(M)} \leqslant c\, \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}\Big(M + \big(0,\frac{\rho^2(M)}{10}\big)\Big) .$$

(Il faut pour cela constater que $\rho(M)$ et x sont du même ordre de grandeur).

En particulier, $\forall\, M \in \omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ $\quad \frac{\tilde{w}(M-(0,\rho^2(M)/10))}{\rho(M-(0,\rho^2(M)/10))} \leqslant c\, \frac{\partial\tilde{w}}{\partial x_n}(M)$.

On conclut alors en utilisant le principe de Harnack <u>uniforme</u> pour la fonction $\tilde{w}$.

Nous avons ensuite besoin d'estimer les dérivées partielles de $\tilde{w}$ en fonction de $\tilde{w}$ elle même. Ce genre de résultat est connu sous le nom d'estimations de Schauder. Ici les estimations dont nous avons besoin sont très simples à établir car l'opérateur $\tilde{L}$ est à coefficients constants. Le lemme 2.6 qui suit est un cas particulier simple du théorème 2' page 105 du livre de Friedman ([12]).

<u>LEMME 2.6</u>. Soient $\tilde{L}$ un opérateur à coefficients constants de la classe $\Lambda(\mu)$ et $B(Q,2r)$ la boule parabolique de centre Q et de rayon 2r. Il existe une constante $c = c(n,\mu)>0$ telle que pour toute $\tilde{L}$-solution u dans la boule $B(Q,2r)$ et pour toute dérivation D^i d'ordre $i = 1$ ou 2 par rapport aux variables d'espace, on ait:

$$\sup_{(x,t)\in B(Q,r)} |D^i u(x,t)| \leqslant \frac{c}{r^i} \cdot \sup_{(x,t)\in B(Q,3r/2)} |u(x,t)|.$$

Démonstration. Pour des raisons d'homogénéité, il suffit de montrer le résultat pour $r = 1$ et $Q = 0$. Notons $\Gamma(x,t)$ la solution fondamentale de l'opérateur $\tilde{L}$ au point 0 définie par :

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(\det A)^{1/2}(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\langle A^{-1}x|x\rangle}{4t}\right) \quad \text{pour} \quad t > 0$$

$\Gamma(x,t) = 0$ pour $t \leq 0$.
(A est la matrice à coefficients constants de l'opérateur $\tilde{L}$).

Fixons $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ une fonction test à support dans la boule $B(0,3/2)$ et valant 1 dans la boule $B(0,5/4)$, θ étant toujours comprise entre 0 et 1. On a:

$$\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \qquad \theta u(x,t) = \Gamma * \tilde{L}(\theta u)(x,t).$$

Fixons ensuite $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ une fonction test à support dans la boule $\overset{\circ}{B}(0,1/8)$ valant 1 au voisinage de 0. Comme $\tilde{L}(\theta u)=0$ dans la boule $B(0,5/4)$, pour des raisons de support, $\varphi\Gamma * \tilde{L}(\theta u)$ est nulle au voisinage de la boule $B(0,1)$. En particulier, au voisinage de la boule $B(0,1)$, on a:

$$u(x,t) = (1-\varphi)\Gamma * \tilde{L}(\theta u)(x,t)\ .$$

Ce qui peut encore s'écrire $u(x,t) = \tilde{L}((1-\varphi)\Gamma) * \theta u(x,t)$ car $(1-\varphi)\Gamma$ est une fonction C^∞ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ainsi, si D désigne une dérivation du premier ou du deuxième ordre par rapport aux coordonnées d'espaces,

$$Du(x,t) = D(\tilde{L}((1-\varphi)\Gamma)) * \theta u(x,t) \quad \text{dans la boule} \quad B(0,1).$$

Entre autres, $|Du(x,t)| \leq \sup\limits_{(y,s)} |D(\tilde{L}(1-\varphi)\Gamma)(y,s)| . \int_{B(0,3/2)} |\theta u(y,s)| dyds.$

Constatant enfin que les coefficients de A ainsi que ceux de A^{-1} sont tous majorés en valeur absolue par μ, ayant fixé la fonction φ et la dérivation D, $\sup\limits_{(y,s)} |D(\tilde{L}(1-\varphi)\Gamma)(y-s)|$ se laisse majorer par une constante ne dépendant que de D, n et μ. Finalement, comme θ est toujours comprise entre 0 et 1, on peut écrire avec une nouvelle constante :

$$\forall\ (x,t) \in B(0,1) \qquad |Du(x,t)| \leq c \sup_{(y,s)\in B(0,3/2)} |u(y,s)|.$$

Nous pouvons maintenant aborder la preuve du théorème 2.4. Reprenons les notations de son énoncé.

a) <u>Majoration de w.</u>

Fixons $\gamma > 1$, notons $R(x',t) = \|x'\| \vee |t|^{1/2}$ et fixons ϵ strictement positif tel que si $f_1(x',t) = f(x',t) - \epsilon\ R(x',t)^\gamma$, ω_{f_1} soit encore adapté au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. On recherche, comme A. Ancona dans [4] une fonction $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ nulle en 0, valant 1 en 1 de classe C^2 et telle que $g(\tilde{w}_1)$ soit une L-sursolution dans $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ pour tout opérateur L coïncidant avec $\tilde{L}$ en 0 (nous avons noté $\tilde{w}_1$ la $\tilde{L}$ mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_1}).

On a $L(g(\tilde{w}_1)) = \frac{\partial}{\partial t}(g(\tilde{w}_1)) - \mathrm{div}(A\nabla_x\, g(\tilde{w}_1))$

$= g'(\tilde{w}_1)[L-\tilde{L}](\tilde{w}_1) - g''(\tilde{w}_1)\langle A\nabla_x\tilde{w}_1 | \nabla_x\tilde{w}_1\rangle$

car $\tilde{L}\tilde{w}_1 = 0$.

Grâce au lemme 2.5, si ρ_1 désigne la distance au bord de ω_{f_1}, dans l'ensemble $\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$ on a l'estimation:

$$\langle A\nabla_x\tilde{w}_1 | \nabla_x\tilde{w}_1\rangle \geqslant \frac{1}{c\mu}\,\frac{\tilde{w}_1^2}{\rho_1^2}\ .$$

Majorons alors $|(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)|$.

Chaque terme du second ordre dans cette expression vérifie grâce au Lemme 2.6, au caractère lipschitzien des A_{ij}, et au principe de Harnack <u>uniforme</u> pour la fonction $\tilde{w}_1$:

$$|A_{ij}(M) - A_{ij}(0)|\left|\frac{\partial^2\tilde{w}_1(M)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant c\,\frac{d(M,0)\tilde{w}_1(M)}{\rho_1^2(M)} \quad \text{pour } M \in \omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda).$$

Par ailleurs, si on impose maintenant à M de rester aussi dans ω_f, on peut trouver une constante c strictement positive telle que $d(M,0) \leqslant c\,\rho_1(M)^{1/\gamma}$. En effet, notant $M = (x',x_n,t)$ un tel point, soit $x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}$ auquel cas $d(M,0)$ et $\rho_1(M)$ sont du même ordre, si non, le point M restant dans ω_f , $|x_n| \leqslant \lambda\|x'\|\vee|t|^{1/2}$ et $\rho_1(M) \geqslant c(\|x'\| \vee |t|^{1/2})^\gamma \geqslant c'\,d(M,0)^\gamma$.

Finalement quitte à modifier la constante c,

$$|A_{ij}(M)-A_{ij}(0)|\left|\frac{\partial^2\tilde{w}_1(M)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant \frac{c\tilde{w}_1(M)}{\rho_1(M)^{2-1/\gamma}}\ .$$

Les termes du premier ordre intervenant dans $(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)$ sont, grâce au lemme 2.6 et au principe de Harnack <u>uniforme</u> pour $\tilde{w}_1$, tous contrôlés par $\frac{\tilde{w}_1}{\rho_1}$. (Il faut remarquer que les $\left|\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\right|$ sont presque partout majorés par μ).

Finalement $|(L-\tilde{L})(\tilde{w}_1)(M)| \leqslant c\,\frac{\tilde{w}_1(M)}{\rho_1^{2-1/\gamma}(M)}$ en tout point de $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$.

On recherche alors g croissante et solution d'une équation du type

$g''(\tilde{w}_1) = \dfrac{-\delta}{\tilde{w}_1^{\alpha}}\, g'(\tilde{w}_1)$, avec $\alpha\in]0,1[$. On a alors:

$$Lg(\tilde{w}_1) \geqslant g'(\tilde{w}_1)\ \frac{\tilde{w}_1}{\rho_1^{2-1/\gamma}} \left(-c + \frac{\delta}{c\mu}.\frac{\tilde{w}_1^{1-\alpha}}{\rho_1^{1/\gamma}}\right) \quad \text{dans } \omega_f \cap T_0(1,\lambda)\ .$$

Enfin, on s'assure de l'existence d'un réel $\beta'\in]0,1[$ tel que $\dfrac{\tilde{w}_1}{\rho_1^{\beta'}}$ reste minoré dans $\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$. Le raisonnement est similaire à celui effectué dans le lemme 2.3, et utilise simplement la comparaison $\tilde{w}_1(P_0+(0,2x,0)) \leqslant c\ \tilde{w}_1(P_0+(0,x,0))$ où $P_0 \in \partial\omega_{f_1} \cap T_0(1,\lambda)$. Posons alors $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\beta'\gamma}$. Fixons un nombre réel srictement positif δ tel que $L(g(\tilde{w}_1))$ soit positif, et considérons l'unique solution de $g''(\tilde{w}_1) = \dfrac{-\delta}{\tilde{w}_1^{\alpha}}\, g'(\tilde{w}_1)$ valant 0 en 0 et 1 en 1; $g(\tilde{w}_1)$ est L-surharmonique (pour tout opérateur L coïncidant avec $\tilde{L}$ en $\overset{o}{0}$) dans $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ et est de l'ordre de $\tilde{w}_1$ partout. Par le principe du minimum, en constatant que $\tilde{w}_1$ (et donc $g(\tilde{w}_1)$) est minorée par une constante dans $\partial T_0(1,\lambda)\cap\omega_f$, on obtient avec une nouvelle constante, $w \leqslant c\ g(\tilde{w}_1)$ dans $T_0(1,\lambda) \cap \omega_f$. Enfin, grâce au théorème 2.2, $\tilde{w}_1$, $g(\tilde{w}_1)$ et $\tilde{w}$ sont du même ordre de grandeur dans le cône $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$.

b) <u>Minoration de w.</u>

Les idées de bases sont les mêmes mais un peu plus difficiles à mettre en oeuvre car il s'agit ici de minorer w au voisinage du graphe de f.

<u>LEMME 2.7</u>. Avec les notations du théorème 2.4, il existe deux constantes $c = c(n,\lambda,\mu)$ et $\beta' = \beta'(n,\lambda,\mu)$ strictement positives telles que:

$$\forall\ M \in \omega_f\cap T_0(1,\lambda) \qquad w(M) \geqslant c\ \rho(M)^{\beta'}$$

$\rho(M)$ désignant toujours la distance au bord.

Il faut ici être un peu plus vigilant que lors des lemmes équivalents décrits plus haut, car w ne vérifie pas encore le principe de Harnack uniforme. (L n'est pas à coefficients constants).

Fixons $P_0\in\partial\omega_f\cap\overset{o}{T}_0(1,\lambda)$ et considérons la parabole située dans le plan $\langle P_0,x_n,t\rangle$ d'équation $t-t(P_0) = -\dfrac{\lambda}{2}(x_n-x_n(P_0))^2$. Paramétrons cette parabole par $x = x_n - x_n(P_0)$ et notons $\varphi(x)$ la restriction de w à cette parabole. Les inégalités de Harnack-Moser nous disent $\varphi(2x) \leqslant c\ \varphi(x)$ et on obtient alors si $x \leqslant y \quad \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \geqslant c_1 \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\beta'}$ où $\beta' = \dfrac{\log c}{\log 2}$.

Lorsque y devient grand pour sortir de $T_0(1,\lambda)$ $\varphi(y)$ est de l'ordre d'une constante, donc $\varphi(x) \geqslant c(x)^{\beta'}$ où c est une nouvelle constante. Regardant maintenant le point M ayant même coordonnée x_n que le point paramétré par x et situé sur l'axe $P_0 + \mathbb{R}^+(0,1,0)$, grâce au principe de Harnack-Moser, on a encore $w(M) \geqslant c\ \rho(M)^{\beta'}$ avec une autre constante c. Finalement, M peut être pris arbitrairement dans $\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$.

Pour minorer w, on commence par fixer $\gamma > 1$ puis $\epsilon > 0$ tels que le cylindre $T_0(2,2\lambda)$ soit adapté au graphe $f_2(x',t) = f(x',t) + \epsilon\ R(x',t)^{\gamma}$. Comme précédemment, $R(x',t) = \|x'\| \vee |t|^{1/2}$. En convenant de noter $R(M)$ la quantité $\|x'\| \vee |t|^{1/2}$ lorsque M s'écrit (x',x_n,t), on a $w(M) \geqslant c\ R(M)^{\beta'\gamma}$ sur la portion du graphe de f_2 située dans $T_0(1,\lambda)$. Par ailleurs, notant f_3 un graphe intermédiaire $f_3(x',t) = f_2(x',t) - \epsilon\left(\dfrac{R}{10}\right)^{\gamma'}(x',t)$ où $\gamma' > \gamma$, et $\tilde{w}_3$ la $\tilde{L}$-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_3}, on a grâce au lemme 2.3 $\tilde{w}_3 \leqslant cR^{\beta\gamma'}$ sur la portion du graphe de f_2 situé dans $T_0(1,\lambda)$. On choisit alors γ' tel que $\beta\gamma' \geqslant \beta'\gamma$, ce qui assure $\tilde{w}_3 \leqslant cw$ sur $\partial\omega_{f_2} \cap \overset{\circ}{T}_0(1,\lambda)$. On construit par une technique similaire à celle employée dans le a) une fonction $g(\tilde{w}_3)$ (solution d'une équation du type $g''(\tilde{w}_3) = \dfrac{+\delta}{\tilde{w}_3^{\alpha}}\, g'(\tilde{w}_3)$) telle que $g(\tilde{w}_3)$ soit L-sousharmonique dans $\omega_{f_2} \cap \overset{\circ}{T}_0(1,\lambda)$. En utilisant les inégalités de Harnack, w est minorée par une constante sur $\partial T_0(1,\lambda) \cap \omega_{f_2}$. Finalement $g(\tilde{w}_3) \leqslant cw$ dans $\omega_{f_2} \cap T_0(1,\lambda)$ grâce au principe du maximum. On conclut alors à l'aide du théorème 2.2, les fonctions $\tilde{w}_3$, $\tilde{w}$ et $g(\tilde{w}_3)$ étant du même ordre de grandeur dans le cône $T_0(1,\lambda) \cap \{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$.

4. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1

Reprenant les notations du théorème 2.1, celui-ci devient clair à l'aide du théorème 2.4 et des résultats de la partie 1) du présent chapitre, si la boule $B(M_0,2r)$ reste incluse dans le cône $\{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$. Lorsque $M_0 = (x',x_n,t)$ notons $P_r(M_0) = (x',f(x',t),t)$. Comme par hypothèse $2r$ est inférieur à $d(M_0,P_r(M_0))$ on peut en fait aussi supposer $2r \leqslant \dfrac{d(M_0,P_r(M_0))}{4(\lambda+1)}$. Ainsi la boule $B(M_0,2r)$ est incluse dans le cône $P_r(M_0) + \{x_n \geqslant \lambda\|x'\| \vee |t|^{1/2}\}$. Enfin, on peut aussi supposer $B(M_0,2r) \subset T_{P_r(M_0)}(1/2,\lambda/2)$, car si non, w est de l'ordre d'une constante dans $B(M_0,r)$. Mais alors, le résultat s'obtient en comparant dans

$T_{P_r(M_0)}(1/2,\lambda/2)$ grâce au principe de Harnack faible au bord la fonction w avec w_1 L-mesure harmonique de $\partial T_{P_r(M_0)}(1,\lambda)$ dans $\overset{o}{T}_{P_r(M_0)}(1,\lambda) \cap \omega_f$ puis en utilisant le théorème 2.4 ainsi que la partie 1) du présent chapitre.

5. CONSEQUENCES DU THEOREME 2.1

Notons tout d'abord, qu'une fois acquis le théorème 2.1 pour tout opérateur L de la classe $\Lambda(\mu)$, on peut ensuite étendre le théorème 2.2 à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$.

On déduit alors du théorème 2.2 un résultat de même nature que celui de Widman ([24] p. 523) pour des opérateurs elliptiques.

<u>COROLLAIRE 2.8</u>. Soit ω_f un domaine lipschitzien adapté au cylindre $T_0(2,2\lambda)$. Soit $\alpha \in]0,1[$. On suppose que f est de classe $C^{1\alpha}$ en x' et $(1+\alpha)/2$ lipschitzienne en t, en ce sens :

$$\|\nabla_{x'} f\|_\infty + \sup_{x',y',t} \frac{\|\nabla_{x'} f(x',t) - \nabla_{x'} f(y',t)\|}{\|x'-y'\|^\alpha} + \sup_{x',t,s} \frac{|f(x',t)-f(x',s)|}{|t-s|^{(1+\alpha)/2}} \leqslant K.$$

Alors, il existe une constante strictement positive $c = c(n,\lambda,\mu,\alpha,K)$, telle que pour tout opérateur $L \in \Lambda(\mu)$ et pour toute L-solution positive dans l'ouvert ω_f on ait :

$$\forall\ M \in \omega_f \cap T(1,\lambda) \qquad \frac{1}{c}\, d(M,C\omega_f)\ u(M_1^*) \leqslant u(M) \leqslant c d(M,C\omega_f)\ u(M_1)$$

où $M_1 = (0,1,2)$ et $M_1^* = (0,1,-2)$.

Démonstration. Notant $\rho(M) = d(M,C\omega_f)$ et notant toujours w la L-mesure harmonique dans ω_f de $\partial T_0(2,2\lambda)$, on est ramené à voir en utilisant le principe de Harnack faible au bord que $\frac{1}{c}\rho(N) \leqslant w(N) \leqslant c\rho(N)$.

Considérant ensuite des portions de ω_f du type $\omega_f \cap T_P(1,\lambda)$ où P est un point de $\partial\omega_f \cap T_0(1,\lambda)$ et comparant alors dans $\omega_f \cap T_P(1/2,\lambda/2)$ w à la L-mesure harmonique de $\partial T_P(1,\lambda)$ dans $\omega_f \cap \overset{o}{T}_P(1,\lambda)$ on se ramène finalement à montrer l'estimation souhaitée pour des points M situés sur l'axe $\mathbb{R}^+.(0,1,0)$.

On approche alors le graphe de f par "l'hyperplan tangent" :

$$x_n = f_1(x',t) = x'.\vec{a} \quad \text{où } \vec{a} = \nabla_{x'} f(0)\ .$$

Par hypothèse, $|f(x',t)-f_1(x',t)| = |f(x',t) - x'.\vec{a}|$

$$\begin{aligned} &\leqslant |f(x',t)-f(x',0)| + |f(x',0)-x'.\vec{a}| \\ &\leqslant K|t|^{(1+\alpha)/2} + K\|x'\|^{1+\alpha} \\ &\leqslant 2K[\|x'\| \vee |t|^{1/2}]^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Utilisant le théorème 2.2 (étendu maintenant à tout opérateur $L \in \Lambda(\mu)$), on est ramené à estimer la fonction w_1, L-mesure harmonique de $\partial T_0(2,2\lambda)$ dans ω_{f_1}, sur l'axe $\mathbb{R}^+.(0,1,0)$.
Ce dernier problème est facile : on peut rechercher des barrières sous la forme $s(x,t) = \varphi(x_n-x'.\vec{a})$. On a:

$$L(s) = -\varphi'(x_n-x'.\vec{a}).\mathrm{div}\left(A\begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix}\right) - \varphi''(x_n-x'.\vec{a})\langle A\begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix}\rangle.$$

Les dérivées $\dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}$ étant toutes contrôlées par μ, $\left|\mathrm{div}\left(A\begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix}\right)\right|$ est contrôlé par une constante c car par ailleurs $\|\vec{a}\| = \|\nabla_x.f(0)\| \leqslant K$.

De même, $\left\|\begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix}\right\| \geqslant 1$ et donc $\langle A\begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix} | \begin{pmatrix}-\vec{a}\\1\end{pmatrix}\rangle \geqslant \dfrac{1}{\mu}$.

Considérant $\varphi(x) = e^{c\mu x}-1$, L(s) est alors négatif et s est une L-sous solution dans ω_{f_1}.

Comme dans ω_{f_1} $0 \leqslant x_n-x'.\vec{a} \leqslant 2\lambda + 2\|\vec{a}\| \leqslant 2\lambda + 2K$, on peut trouver une constante δ telle que $0 \leqslant \delta s \leqslant 1$ dans ω_g. On a alors clairement $\delta s \leqslant w_1$. Comme δs est de l'ordre de $x_n-x'.\vec{a}$ qui est elle même de l'ordre de la distance au bord en tout point de $\mathbb{R}^+.(0,1,0) \cap T_0(1,\lambda)$, w_1 est minorée par un multiple de la distance au bord.

De même, $\psi(x) = 1 - e^{-c\mu x}$ est telle que la fonction associée $\psi(x_n-x'.\vec{a})$ est une L-sursolution. On peut aussi choisir δ telle que $\delta\psi(x_n-x'.\vec{a})$ soit supérieur à 1 dans $\partial\omega_{f_1} \cap \{x_n=2\lambda\}$. Cette fonction va alors constituer une L-sursolution pour la mesure harmonique de l'hyperplan $x_n = 2\lambda$ dans ω_{f_1} qui est grâce au principe de Harnack faible au bord du même ordre de grandeur que w_1 dans $\mathbb{R}^+.(0,1,0) \cap T_0(1,\lambda)$.

On a ainsi majoré w_1 par un multiple de la distance au bord, ce qu'il restait à prouver.

Remarque finale. Tous les résultats de ce chapitre peuvent en fait s'écrire aussi pour la théorie adjointe liée à l'opérateur L^*, le passage de L à L^* s'interprétant géométriquement comme un renversement du temps. C'est du reste de cette façon qu'on exploitera les résultats du chapitre 2 dans la première partie du chapitre 3.

CHAPITRE 3

UN PRINCIPE DE HARNACK FORT AU BORD . QUELQUES APPLICATIONS

Au cours de ce chapitre, on établit un principe de Harnack à la frontière (théorème 3.1 et corollaire 3.2) qu'on exploite par la suite.

Lors de la partie 2), on identifie les points frontière lipschitziens d'un domaine Ω à des points de la frontière de Martin pour la théorie liée à l'opérateur L . J. T. Kemper ([17]) a établi la même identification pour l'opérateur de la chaleur.

Au cours de la partie 3) on établit un théorème de représentation des L-solutions positives dans certains domaines de $\mathbb{R}^{n+1}$ (théorème 3.8).

Enfin, lors de la partie 4), on démontre que les L-solutions positives admettent des limites "non tangentielles" en presque tout point (relativement à la mesure harmonique) de la partie lipschitzienne de la frontière de Ω. C'est l'objet du théorème 3.11 qui généralise aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ le théorème 2.6 de [17].

Les parties 2) 3) et 4) réalisent l'extension aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ de résultats déjà démontrés pour l'opérateur de la chaleur. Notons que J.T. Kemper utilise de façon essentielle pour démontrer ses résultats l'invariance par translations de l'opérateur de la chaleur. Grâce au principe de Harnack au bord nous n'avons plus besoin d'aucune invariance par translations.

1. PRINCIPE DE HARNACK A LA FRONTIERE

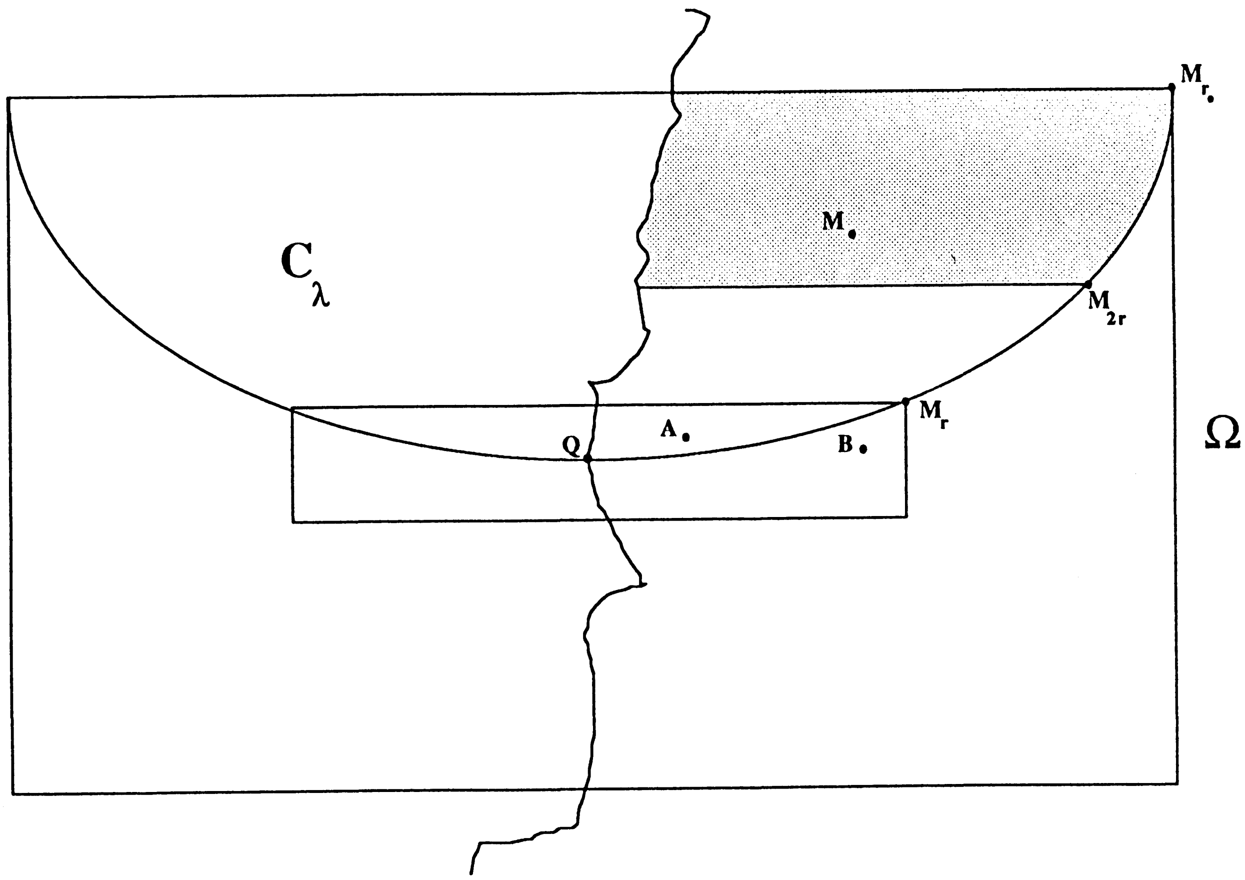
Nous commençons par établir un principe de Harnack au bord pour la fonction de Green. Nous pourrons ensuite étendre ce principe à certains couples de L-solutions positives.

Introduisons les nouveaux ensembles géométriques suivants. λ étant un réel strictement positif, on note C_λ le *cône parabolique* :

$$C_\lambda = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t \geqslant \sup(\|x'\|^2, |x_n|^2/\lambda^2)\}.$$

<u>**THEOREME 3.1**</u>. Soient $\mu > 1$, L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ lipschitzien en Q. Soient $r_0 \in]0,1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\overset{\circ}{\Omega} \cap T(2r_0,2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Notons G la L-fonction de Green de l'ouvert Ω et M_ρ le point $Q + (0,\lambda\rho,\rho^2)$. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu) \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout réel r ne dépassant pas $r_0/4$ et pour tout couple de pôles (A,B) situés dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r,\lambda r)$ on ait:

$$\forall\, M \in [\Omega \cap (Q+C_\lambda) \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)] - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r) \quad , \quad \frac{G_A(M)}{G_A(M_{2r})} \leqslant c\,\frac{G_B(M)}{G_B(M_{2r})} .$$



REMARQUES. 1) On ne peut pas obtenir (comme dans le cas d'opérateurs elliptiques) la même estimation en tout point M de l'ensemble $\Omega - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r)$. En effet, la fonction $G_B(M)$ devient nulle lorsque la coordonnée temporelle de M devient inférieure à celle de B. En de tels points, si le pôle A est antérieur dans le temps au pôle B, $G_A(M)$ peut être par contre strictement positif.

2) On ne peut non plus obtenir la même inégalité (avec une constante ne dépendant pas de r) en tout point M de l'ensemble $\Omega \cap \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1};\ t \geqslant t(M_{2r})\}$, $t(M_{2r})$ désignant la coordonnée temporelle de M_{2r}. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer l'exemple explicite du

demi-espace $\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; x_n>0\}$ pour l'opérateur $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$. Dans ce cas, on connait explicitement la fonction de Green.

Le théorème 3.1 sera surtout intéressant par l'intermédiaire du corollaire qui suit et qui décrit le principe de Harnack au bord pour des couples de L-solutions positives. L'amélioration par rapport aux résultats du chapitre 1 vient du fait que la comparaison obtenue ne fait plus intervenir qu'un seul point de normalisation. Cependant, les L-solutions positives dont on sait estimer le rapport ne sont plus quelconques. Ce principe de Harnack au bord nous permettra lors de la partie 2) de montrer que deux L-solutions positives minimales de Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - \{Q\}$ sont proportionnelles.

<u>COROLLAIRE 3.2</u>. Plaçons-nous sous les hypothèses théorème 3.1. Soient $r \in \,]0,r_0/4]$ et u et v deux L-solutions positives tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - T_Q(r/2,\lambda r/2)$, u et v se laissant de plus majorer au voisinage de l'infini (dans le cas où Ω est non borné) par un L-potentiel d'un ouvert Ω' contenant Ω. On a alors l'estimation:

$$\forall\, M \in [(Q+C_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)] - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r) \quad , \quad \frac{u(M)}{u(M_{2r})} \leqslant c\, \frac{v(M)}{v(M_{2r})} \quad ,$$

où c est une constante strictement positive ne dépendant que de n, λ et μ <u>mais ne dépendant pas de r</u>.

REMARQUES. 1) Si l'ouvert Ω est non borné, la domination de u et v par un L-potentiel doit avoir lieu sur $\complement K \cap \Omega$ où K est un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2) La même comparaison peut être établie pour les couples de L-solutions positives tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - T_Q((2-\epsilon)r,\lambda(2-\epsilon)r)$, la constante c dépendant alors aussi de ϵ.

Le corollaire 3.2 est une conséquence simple du théorème 3.1. Notons Σ l'ensemble $\Omega - T_Q(r,\lambda r)$. En utilisant dans l'ouvert $\Omega \cap \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \; ; \; t < t(Q)-r^2/4\}$ le principe du maximum donné par la proposition 1.6 on constate que u est nulle dans cet ouvert. A l'aide du principe de Harnack faible au bord et des inégalités de Harnack-Moser, on peut alors trouver une constante c dépendant ici aussi de u telle que:

$$\forall\, M \in \partial T_Q(r,\lambda r),\; u(M) \leqslant c\, G_{M^*_{2r/3}}(M) \;.$$

Cette inégalité se propage (toujours grâce à la proposition 1.6) à l'ensemble Σ. Ainsi R_u^Σ est un L-potentiel de Ω porté par $\partial T_Q(r,\lambda r)$ qui coïncide avec u dans Σ. (La réduite est prise au sens des fonctions L-surharmoniques de Ω).

R_v^{Σ} étant aussi un L-potentiel de Ω porté par $\partial T_Q(r,\lambda r)$ coincidant avec v dans Σ le corollaire 3.2 s'obtient alors par une double intégration de l'inégalité obtenue dans le théorème 3.1.

La démonstration du théorème 3.1 s'articule autour de plusieurs lemmes. La première étape (formalisée dans le corollaire 3.4) consiste à ramener la démonstration du théorème 3.1 à la mise en place des mêmes inégalités pour les points $M = M_\rho$ où $2r \leqslant \rho \leqslant r_0$; ces points ayant l'avantage d'être situés *loin du bord.*

<u>LEMME 3.3</u>. Reprenons les hypothèses et notations du théorème 3.1. Notons $T_Q^+(\rho,\lambda\rho) = T_Q(\rho,\lambda\rho) \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t \geqslant t(Q) + \rho^2/4\}$. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que pour tout couple (A,B) de points de l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0/4,\lambda r_0/4)$ on ait:

$$\forall\ M \in \Omega \cap T_Q^+(r_0,\lambda r_0) \quad \frac{G_A(M)}{G_A(M_{r_0/2})} \leqslant c\ \frac{G_B(M)}{G_B(M_{r_0/2})} \quad .$$

<u>COROLLAIRE 3.4</u>. Toujours sous les mêmes hypothèses, si $r \in\ ]0,r_0/4]$ et si (A,B) est un couple quelconque de points de l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r,\lambda r)$, on a:

$$\forall\ M \in [\Omega \cap (Q+C_\lambda) \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)] - \overset{\circ}{T}(2r,2\lambda r) \quad \frac{G_A(M)}{G_B(M)} \leqslant c \sup_{2r\leqslant\rho\leqslant r_0} \frac{G_A(M_\rho)}{G_B(M_\rho)} \quad .$$

Le corollaire 3.4 est une conséquence immédiate du Lemme 3.3 appliqué aux réels $r \leqslant r_0/4$ (à la place du réel $r_0/4$).

Démonstration du lemme 3.3.

La démarche est similaire à celle utilisée dans le théorème 1.7 lorsqu'on a établi le principe de Harnack faible au bord.

Pour simplifier les notations, remarquons qu'on peut supposer Q = 0 origine de $\mathbb{R}^{n+1}$ et aussi $r_0 = 1$ (la classe $\Lambda(\mu)$ est invariante par translation et si A est la matrice d'un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$ et si $|r_0|$ est inférieur ou égal à un, $(x,t) \to A(r_0x,r_0^2t)$ décrit encore la matrice d'un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$). Notons $T^+ = T_0^+(1,\lambda)$ et introduisons les cylindres intermédiaires suivants:

$$T_1 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ d((x,t),T^+) \leqslant 1/4\}$$

et $$T_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ d((x,t),T_1) \leqslant 1/4\} \ .$$

(d désigne toujours la distance parabolique).

En utilisant le théorème 1.1, le principe du maximum et les inégalités de Harnack, pour tout pôle A dans l'ensemble $\Omega \cap T_0(1/4,\lambda/4)$ et en tout point M de l'ensemble T_2 on a l'estimation:

$$G_A(M) \leqslant c\ G_A(M_{1/2}) \quad \text{où} \quad c = c(n,\lambda,\mu).$$

Si h désigne la L-mesure harmonique de ∂T_2 dans $\overset{\circ}{T_2} \cap \Omega$, grâce au principe du maximum, on obtient alors avec la même constante l'inégalité $G_A(M) \leqslant c\ G_A(M_{1/2})h(M)$. Fixons alors une fonction Φ C^∞ positive à support compact dans CT_1 et valant 1 sur ∂T_2. Notant $\tilde{G}$ la L-fonction de Green de $\Omega \cap \overset{\circ}{T_2}$ et reprenant la relation $L^*(\tilde{G}_M^*) = \delta_M - \rho_M$ où ρ_M désigne la L-mesure harmonique au point M dans l'ouvert $\Omega \cap \overset{\circ}{T_2}$, on peut écrire comme lors du théorème 1.7:

$$\begin{aligned} \forall\ M \in T^+ \cap \Omega \quad h(M) &\leqslant \int_{CT_1} |L(\Phi(\xi))|\tilde{G}_M^*(\xi)d\xi \\ &\leqslant \int_{CT_1} |L(\Phi(\xi))|G_M^*(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que le point $M_{1/3}$ est *antérieur* à l'ensemble T^+. En utilisant l'analogue du théorème 1.1 pour l'opérateur L^* et le principe de Harnack pour ce même opérateur, on peut alors trouver une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\ \xi \in CT_1,\ \forall\ M \in T^+ \cap \Omega \quad , \quad G_M^*(\xi) \leqslant c\ G_M^*(M_{1/3}) \ .$$

Ainsi, avec une nouvelle constante c, on a :

$$(1) \qquad \forall\ M \in T^+\ ,\ \forall\ A \in \Omega \cap T_0(1/4,\lambda/4) \quad \frac{G_A(M)}{G_A(M_{1/2})} \leqslant c\ G_{M_{1/3}}(M)\ .$$

Fixons ensuite un nombre strictement positif $\epsilon = \epsilon(n,\lambda)$ tel que $T_{M_{1/3}}(\epsilon,\epsilon)$ soit inclus dans Ω et considérons un autre point B dans l'ensemble $\Omega \cap T_0(1/4,\lambda/4)$. Si M est un point quelconque dans l'ensemble $\partial T_{M_{1/3}}(\epsilon,\epsilon) \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ t \geqslant (1/3)^2\}$, on établit successivement:

$$G_B(M_{1/2}) \leqslant c_1 G_B(M_{7/24}) \leqslant c_1 c_2 G_B(M)\ .$$

La première inégalité s'obtient en utilisant le théorème 1.1 et en remarquant que 1/4 est inférieur à 7/24. Notons qu'elle constitue elle aussi une sorte d'inégalité de Harnack *à l'envers* conséquence du théorème 1.1 et du principe du maximum. La deuxième inégalité résulte du principe de Harnack-Moser en remarquant que 7/24 est inférieur à 1/3.

Comme en ces mêmes points M , $G_{M_{1/3}}(M)$ est majoré par une constante (on a ici fixé les tailles), on peut donc trouver une nouvelle constante c telle que:

$$(2) \qquad G_{M_{1/3}}(M) \leqslant c \, \frac{G_B(M)}{G_B(M_{1/2})} \, .$$

Cette dernière inégalité se propage grâce au principe du maximum à l'ensemble $(\Omega - T_{M_{1/3}}(\epsilon,\epsilon)) \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \; ; \; t \geqslant (1/3)^2\}$. En particulier , si on a choisi ϵ assez petit, elle est vraie dans l'ensemble $T^+ \cap \Omega$.

Le lemme 3.3 résulte alors des inégalités (1) et (2).

Le lemme 3.5 qui suit est la clé de la démonstration du théorème 3.1. Il va utiliser les résultats du chapitre 2 pour la théorie adjointe décrite par l'opérateur L^* . Il consiste à décrire une inégalité de Harnack non naturelle pour les fonctions $G_.(M_\rho)$.

<u>LEMME 3.5</u>. Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. SSoit un ouvert lipschitzien en Q et soient $r_0 \in]0,1]$ et $\lambda > 0$ tels que $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Notons G la L-fonction de Green de Ω. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall \; r \leqslant r_0/4 \quad \forall \; \rho \in [2r,r_0] \quad G_{M^*_{3r/2}}(M_\rho) \leqslant c \; G_{M_{3r/2}}(M_\rho)$$

où $M_\rho = Q + (0,\lambda\rho,\rho^2)$ et $M^*_\rho = Q + (0,\lambda\rho,-\rho^2)$.

Démonstration. Fixons $\rho \leqslant r_0$ et notons w^* la L^* mesure harmonique de $\partial T_Q(2\rho,2\lambda\rho)$ dans l'ouvert $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2\rho,2\lambda\rho)$.

L'analogue du théorème 1.7 pour l'opérateur adjoint L^* nous donne par exemple :

$$\forall \; M \in \Omega \cap T_Q(3\rho/4,3\lambda\rho/4) \quad \begin{cases} \dfrac{G_M(M_\rho)}{G_{M^*_{4\rho/5}}(M_\rho)} \leqslant c \, \dfrac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})} \\[2ex] \dfrac{w^*(M)}{w^*(M^*_{4\rho/5})} \leqslant c \, \dfrac{G_M(M_\rho)}{G_{M_{4\rho/5}}(M_\rho)} \end{cases} .$$

Remarquons comme on l'a déjà fait à plusieurs reprises que les quantités $G_{M^*_{4\rho/5}}(M_\rho)$ et $G_{M_{4\rho/5}}(M_\rho)$ sont de l'ordre de ρ^{-n} . Constatons ensuite en utilisant les résultats du chapitre 2 que les quantités $w^*(M_{4\rho/5})$ et $w^*(M^*_{4\rho/5})$ sont du même ordre de grandeur. On peut alors trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que:

$$(1)\ \forall\, M \in \Omega \cap T_Q(3\rho/4,3\lambda\rho/4) \qquad \frac{1}{c}\,\rho^{-n}\,\frac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})} \leqslant G_M(M_\rho) \leqslant c\,\rho^{-n}\,\frac{w^*(M)}{w^*(M_{4\rho/5})}\,.$$

Par ailleurs, la fonction w^* vérifie le principe de Harnack uniforme décrit dans le chapitre 2. On peut entre autre trouver une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$(2) \qquad \forall\, r \leqslant \rho/2 \qquad w^*(M^*_{3r/2}) \leqslant c\, w^*(M_{3r/2})\,.$$

Le lemme résulte alors des estimations (1) et (2).

Nous sommes maintenant en mesure de compléter la preuve du théorème 3.1. Comme nous l'évoquions lors du corollaire 3.4, il suffit de l'établir pour les points $M = M_\rho$ où $\rho \in [2r,r_0]$. Fixons un pôle A dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r,\lambda r)$ et notons h la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(9r/8,9\lambda r/8)$ dans $\Omega - T_Q(9r/8,9\lambda r/8)$. On peut écrire grâce au théorème 1.1 , aux inégalités de Harnack et au principe du maximum décrit dans la proposition 1.2:

$$\forall\, M \in \Omega - \overset{\circ}{T}_Q(9r/8,9\lambda r/8) \qquad G_A(M) \leqslant c\, G_A(M_{2r})\, h(M)\,.$$

Par une technique similaire à celle employée au cours du théorème 1.7 et du lemme 3.3, on obtient alors :

$$\forall\, M \in \Omega - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r) \qquad G_Q(M) \leqslant c\, r^{-n}\, G_A(M_{2r})\, G_{M^*_{3r/2}}(M)\,.$$

(On utilise en cours de démonstration l'estimation:

$$\forall\, \xi \in T_Q(5r/4,5\lambda r/4)\ ,\ \forall\, M \in \Omega - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r)\,,\quad G^*_M(\xi) \leqslant c\, G^*_M(M^*_{3r/2})$$

qui n'est autre qu'une version du théorème 1.4 dans le cadre adjoint).

Ainsi grâce au lemme 3.5, on peut trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que:

$$(1) \qquad \forall\, \rho \in [2r,r_0] \qquad G_A(M_\rho) \leqslant c\, r^{-n}\, G_A(M_{2r})\, G_{M_{3r/2}}(M_\rho)\,.$$

Considérons enfin un autre point B dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r,\lambda r)$. En reproduisant un des raisonnements effectués au cours du lemme 3.3, on peut trouver un petit voisinage homogène du point $M_{3r/2}$ hors duquel on ait l'estimation:

$$(2) \qquad r^{-n}\, G_{M_{3r/2}}(M) \leqslant c\, \frac{G_B(M)}{G_B(M_{2r})}\,.$$

En particulier, cette dernière estimation est vraie aux points M_ρ. La démonstration du théorème 3.1 provient alors de la comparaison des estimations (1) et (2) et de l'utilisation du corollaire 3.4.

2. ETUDE DES MINIMALES ASSOCIEES A UN POINT FRONTIERE LIPSCHITZIEN

Nous allons retrouver ici, dans le cadre des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ l'analogue du théorème 1.7 décrit par J. T. Kemper [17] pour l'opérateur de la chaleur $C = \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x$.

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω, on notera $C_Q(\Omega)$ le cône des L-solutions positives dans Ω tendant vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - \{Q\}$ et (dans le cas où Ω est non borné) qui se laissent majorer au voisinage de l'infini par un L-potentiel d'un ouvert Ω' contenant Ω.
Rappelons que $\partial_p\Omega$ désigne la frontière parabolique de Ω: c'est la zone *utile* de la frontière de Ω.

<u>**THEOREME 3.6**</u>. Soient $\mu > 1$ et L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Fixons un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que tout point de $\partial_p\Omega$ soit régulier pour le problème de Dirichlet au sens de Perron Wiener Brelot. On suppose que l'ouvert Ω est lipschitzien au point Q. Alors, le cône $C_Q(\Omega)$ est une demi-droite engendrée par une L-solution positive minimale de Ω.

Pour montrer que $C_Q(\Omega) \neq \{0\}$ nous utiliserons les résultats du chapitre 1. Nous obtiendrons un élément non nul de $C_Q(\Omega)$ comme limite de fonctions de Green normalisées.

La démonstration de $\dim C_Q(\Omega) = 1$ utilisera les résultats de la première partie du présent chapitre. On commencera par démontrer que deux minimales u et v de l'ensemble $C_Q(\Omega)$ vérifient l'estimation $u \leqslant cv$ en tout point d'un *cône* $\Omega \cap (Q + C_\lambda) \cap T_Q(r,\lambda r)$. Ayant ensuite démontré que ce *cône* est non effilé par rapport à u et v la comparaison s'étendra à Ω tout entier. On pourra alors conclure que u et v sont proportionnelles.

a) $C_Q(\Omega) \neq \{0\}$.

Fixons $r_0 \leqslant 1$ tel que $\overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0) \cap \Omega$ soit un domaine lipschitzien canonique. Notons G la L-fonction de Green dans Ω. Pour tout point A dans l'ensemble $\Omega \cap T_Q(r_0/2,\lambda r_0/2)$, notons $\varphi_A(M) = G_A(M) \,/\, G_A(M_{r_0})$.

Grâce au théorème 1.1, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que pour tout réel $r \in \,]0,r_0]$ on ait:

$$\forall\, A \in \Omega \cap T_Q(r/2,\lambda r/2) \qquad \forall\, M \in \Omega - \mathring{T}_Q(r,\lambda r)\ , \qquad \varphi_A(M) \leqslant c\ \varphi_A(M_r).$$

Fixons alors une suite A_n convergeant vers Q. Les inégalités précédentes nous assurent que les φ_{A_n} sont uniformément bornées sur $\Omega - \mathring{T}_Q(r,\lambda r)$ si n est assez grand. En effet, r étant fixé, $\varphi_{A_n}(M_r)$ est controlé grâce au principe de Harnack par $\varphi_{A_n}(M_{r_0})$ qui vaut un. La singularité A_n sortant de tout compact de Ω, φ_{A_n} possède une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une L-solution positive dans Ω. Notons φ la limite d'une telle sous-suite.

Notons h_r la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(r,\lambda r)$ dans $\Omega - T_Q(r,\lambda r)$. Grâce au principe du maximum décrit dans la proposition 1.2, si r ne dépasse pas r_0 et si n est assez grand, on a:

$$\forall\, M \in \Omega - \mathring{T}_Q(r,\lambda r) \quad \varphi_{A_n}(M) \leqslant c\ \varphi_{A_n}(M_r) h_r(M) \ .$$

Enfin, en passant à la limite $\quad \varphi(M) \leqslant c\ \varphi(M_r)h_r(M)$.

Les points de $\partial_p\Omega - \{Q\}$ étant tous réguliers, φ converge donc bien vers zéro en tout point de $\partial_p\Omega - \{Q\}$. φ est un élément non nul de $C_Q(\Omega)$ car il vaut un au point M_{r_0} et il est majoré par un potentiel à l'infini. (h_r est lui même majoré par un potentiel à l'infini).

b) $\dim(C_Q(\Omega)) = 1$.

Notons dans un premier temps que $C_Q(\Omega)$ est un cône convexe à base compacte. En effet, les inégalités de Harnack et le principe du maximum de la proposition 1.6 nous assurent qu'un élément de $C_Q(\Omega)$ nul en M_{r_0} est identiquement nul. Ainsi, notant $H_L^+(\Omega)$ l'ensemble des L-solutions positives dans Ω, $C_Q(\Omega) \cap \{h \in H_L^+(\Omega)\ ;\ h(M_{r_0}) = 1\}$ est une base de $C_Q(\Omega)$. Le corollaire 1.5 et les inégalités de Harnack nous prouvent que cette base $\mathcal{B}$ est bornée dans l'ensemble des fonctions continues sur Ω. Ainsi, $\mathcal{B}$ est compacte. $C_Q(\Omega)$ étant à base compacte, grâce au théorème de Krein-Milmann, il est engendré par ses génératrices extrémales qui constituent aussi des génératrices extrémales de $H_L^+(\Omega)$. Montrer que $C_Q(\Omega)$ est une demi-droite revient alors à montrer que deux éléments minimaux de $C_Q(\Omega)$ sont proportionnels.

Ce dernier point sera une conséquence simple du corollaire 3.2 et de la proposition suivante:

PROPOSITION 3.7. En conservant les notations de la première partie du chapitre ainsi que les hypothèses du théorème 3.6, si h est une minimale non nulle de $C_Q(\Omega)$, alors l'ensemble $\Omega \cap (Q + C_\lambda)$ est non effilé en h. Plus généralement, si Q_k est une suite de points convergeant vers Q, $Q_k \in \tilde{\Omega} = \Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t > t(Q)\}$ et telle que $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{d(Q_k, \complement\tilde{\Omega})}{d(Q_k,Q)} > 0$ et si B_k désigne une suite de boules paraboliques centrées en Q_k et de rayons proportionnels à $d(Q_k,Q)$, alors $\bigcup\limits_k B_k$ est non effilé par rapport à h. (Là encore d désigne la distance parabolique).

REMARQUE. La suite de points Q_k converge non tangentiellement (relativement à d) vers Q dans $\tilde{\Omega}$. Notons qu'une famille similaire de boules situées dans l'ensemble $\Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ t < t(Q)\}$ est par contre effilée par rapport à h, h étant nulle dans l'ensemble $\Omega \cap \{t < t(Q)\}$.

Rappelons que si h est une minimale de $H_L^+(\Omega)$ et E un sous-ensemble de Ω , $\hat{R}_h^E$ est égale à h ou est un potentiel dans Ω (la réduite étant prise au sens de L-sursolutions dans Ω). E est dit effilé en h si $\hat{R}_h^E$ est un potentiel. Pour établir que $E = \bigcup\limits_k B_k$ est non effilé en h, il suffit de montrer que $\hat{R}_h^{B_k}$ ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini, car alors, notant $E_k = \bigcup\limits_{j\geq k} B_j$, $\inf\limits_k \hat{R}_h^{E_k}$ constituera une L-minorante harmonique positive non identiquement nulle de $\hat{R}_h^E$.

Notons enfin avant de prouver la proposition que celle-ci constitue dans le cadre des opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ l'analogue d'un résultat établi par A. Ancona ([1], page 198) pour des opérateurs elliptiques.

Fixons $\epsilon > 0$ tel que pour tout entier k suffisamment grand on ait:

$$d(Q_k, \complement\tilde{\Omega}) \geq 4\epsilon d(Q_k,Q) = 4\epsilon r_k \ .$$

Quitte à diminuer ϵ, on peut supposer de plus que la boule B_k contient la boule $B(Q_k, \epsilon r_k)$, et il suffit alors d'établir le résultat pour $B_k = B(Q_k, \epsilon r_k)$, boule de centre Q_k de rayon ϵr_k. Supposons enfin $\epsilon < 1 \wedge \lambda$ de telle sorte que la boule B_k reste incluse dans le cylindre $T_Q(2r_k, 2\lambda r_k)$. En constatant que B_k reste inclus dans le demi espace $t > t(Q) + 2(\epsilon r_k)^2$ on peut trouver une constante de Harnack $c_1 = c_1(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\, M \in B_k \quad , \quad h(M) \geq c_1 \ h(M_{\epsilon r_k}).$$

L'inégalité $\hat{R}_h^{B_k} \geq c_1 \ h(M_{\epsilon r_k})\hat{R}_1^{B_k}$ est alors vraie dans tout l'ensemble Ω.

Par ailleurs, $\hat{R}_1^{B_k}$ étant un L-potentiel dans Ω porté par ∂B_k on peut à l'aide d'une integration de l'inégalité du théorème 3.1 trouver une constante $c_2 = c_2(n,\lambda,\mu) > 0$ telle que pour tout entier k suffisamment grand, on ait:

$$\frac{\hat{R}_1^{B_k}(M_{r_0})}{\hat{R}_1^{B_k}(M_{4r_k})} \geqslant c_2 \frac{h(M_{r_0})}{h(M_{4r_k})}.$$

D'où on déduit $\quad \hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0}) \geqslant c_1 c_2 \; h(M_{r_0}).\hat{R}_1^{B_k}(M_{4r_k}).\dfrac{h(M_{\epsilon r_k})}{h(M_{4r_k})}$.

En utilisant le corollaire 1.5, on a de plus $h(M_{4r_k}) \leqslant c_3 \; h(M_{\epsilon r_k})$. Notons qu'il s'agit là encore d'une inégalité de Harnack *à l'envers*.

Enfin, notant $\tilde{Q}_k = Q_k + (0,2(\epsilon r_k)^2)$, on a, grâce aux inégalités de Harnack :

$$\hat{R}_1^{B_k}(M_{4r_K}) \geqslant c'_3 \; \hat{R}_1^{B_k}(\tilde{Q}_k) \geqslant c'_3 \; \varphi(\tilde{Q}_k) \quad ,$$

où φ est la L-mesure harmonique de ∂B_k dans $B(Q_k,2\epsilon r_k) - B_k$.

Par un raisonnement similaire à celui effectué lors du lemme 1.3, la quantité $\varphi(\tilde{Q}_k)$ est minorée par une constante $c_4 = c_4(n,\mu) > 0$. Ainsi on a minoré pour tout entier k assez grand $\hat{R}_h^{B_k}(M_{r_0})$ par $c_5 h(M_{r_0})$ où c_5 est une constante strictement positive ne dépendant pas de k. $\hat{R}_h^{B_k}$ ne tend pas vers zéro lorsque k tend vers l'infini et $\bigcup_k B_k$ est donc bien non effilé en h.

Montrons alors que deux minimales du cône $C_Q(\Omega)$ sont toujours proportionnelles. Fixons h_1 et h_2 deux telles minimales non nulles. Grâce au corollaire 3.2, on peut trouver une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\, r \leqslant \frac{r_0}{4} \qquad \forall\, M \in [(Q + C_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)] - \overset{\circ}{T}_Q(2r,2\lambda r) \;,$$

$$\frac{h_1(M)}{h_1(M_{2r})} \leqslant c \; \frac{h_2(M)}{h_2(M_{2r})}.$$

On obtient donc en tout point M de l'ensemble $(Q+C_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$ l'inégalité:

$$\frac{h_1(M)}{h_1(M_{r_0})} \leqslant c^2 \; \frac{h_2(M)}{h_2(M_{r_0})} \quad .$$

Comme l'ensemble $(Q+C_\lambda) \cap \Omega \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$ est non effilé en h_1 et h_2, en passant aux réduites, la même inégalité se propage à tout point de Ω. Ainsi il existe une constante α strictement positive telle que $h_1 \leqslant \alpha \; h_2$. Mais, la fonction $\alpha \, h_2$ étant une L-solution minimale, h_1 est donc proportionnelle à h_2 . Le cône $C_Q(\Omega)$ possède donc au plus une génératrice extrémale. Etant non réduit à {0} et engendré par ces génératrices extrémales, c'est une demi-droite.

3. UN THEOREME DE REPRESENTATION DES L-SOLUTIONS POSITIVES

Nous nous bornerons ici à écrire ce théorème dans le cadre d'ouverts lipschitziens canoniques. On pourrait établir un résultat plus général imitant le théorème 1.10 de J. T. Kemper ([17], page 254). Ce théorème de représentation nous servira surtout à montrer l'existence de limites *non tangentielles* pour les L-solutions positives. L'existence de ces limites sera un outil utile lors du chapitre 4.

THEOREME 3.8. Soient $\Omega = \omega_f$ un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(r_0, \lambda r_0)$ et $Q_0 = (X,T)$ un point de Ω. Soit L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Alors :

a) Pour chaque point P de l'ensemble $\partial\Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ t < T\}$ il existe un unique élément du cône $C_P(\Omega)$ noté K_P valant 1 au point Q_0.

b) K_p désignant (si $P \in \Omega$) la L-fonction de Green de pôle P normalisée en Q_0, pour tout point P_0 dans l'ensemble $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et pour tout point M dans Ω on a:

$$\lim_{P \to P_0,\, P \in \bar{\Omega}} K_P(M) = K_{P_0}(M).$$

c) Pour toute L-solution positive u dans Ω, il existe une unique mesure de radon positive ν portée par $\partial\Omega \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ t < T\}$ et telle que:

$$\forall\, M \in \omega_f \cap \{(x,t)\ ;\ t < T\} \quad u(M) = \int K_P(M)\, d\nu(P).$$

Démonstration.

a) Considérons un prolongement lipschitzien de la fonction f et notons:

$\Omega_1 = \{x_n > f(x',t)\} \cap (Q + \{\|x'\| < r_0\ ,\ |x_n| < \lambda r_0\ ,\ -2r_0^2 < t < r_0^2\})$.

On a ainsi prolongé l'ouvert Ω *dans le passé.*

Les points frontière de Ω à considérer sont de trois types : les points *côté* au voisinage desquels la frontière de Ω est lipschitzienne, les points *coin* correspondant aux points de $\partial\Omega_1 \cap \{t=t(Q)-r_0^2\}$ et les points *fond* correspondant aux points de $\Omega_1 \cap \{t=t(Q)-r_0^2\}$.

Si P est un point *côté*, l'existence et l'unicité de K_P est claire grâce aux travaux précédents, K_P s'obtenant comme limite des fonctions de Green normalisées en Q_0. (Par le principe de Harnack-Moser, les éléments de $C_P(\Omega)$ ne peuvent s'annuler en Q_0 sans être identiquement nuls).

Si P est un point *coin*, grâce au principe du maximum, l'application $h \in C_P(\Omega_1) \longrightarrow h_{|\Omega} \in C_P(\Omega)$ est une bijection, et le résultat est établi.

Enfin si P est un point *fond*, et $h \in C_P(\Omega)$, prolongeant h par 0, on obtient clairement un L-potentiel de Ω_1 porté par P donc une fonction proportionnelle à la L-fonction de Green dans Ω_1 de pôle P. Réciproquement, si φ est un L-potentiel dans Ω_1 porté par P, $\varphi_{|\Omega}$ est clairement un élément de $C_P(\Omega)$ car $\varphi_{|\Omega_1-\Omega} = 0$. $C_P(\Omega)$ est encore bien une demi-droite dans ce cas.

Notons que dans tous les cas, les fonctions K_P s'obtiennent comme limites de fonctions de Green normalisées en Q_0.

b) Grâce à la continuité des fonctions de Green et à l'identification précédente, la propriété de continuité est claire aux points *fond*.

Les points *coins* s'assimilant à des points *côté* de l'ouvert Ω_1, il suffit d'établir ce principe de continuité pour ce dernier type de points. Soit P un tel point et soit P_n une suite de $\bar{\Omega}$ convergeant vers P. Par le théorème 1.1 et le corollaire 1.5 on peut trouver une constante c>0 telle que pour tout entier n suffisamment grand, pour tout réel r sufisamment petit et pour tout point M dans l'ensemble $\Omega - \overset{\circ}{T}_P(r,\lambda r)$ on ait:

$$K_{P_n}(M) \leqslant c\, K_{P_n}(M_r) \ ,$$

où $M_r = P + (0,\lambda r, r^2)$.

Le principe du maximum assure alors en ces mêmes points l'estimation $K_{P_n}(M) \leqslant c\, K_{P_n}(M_r) h_r(M)$ où h_r est la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r,\lambda r)$ dans $\Omega - \overset{\circ}{T}_P(r,\lambda r)$. Grâce aux inégalités de Harnack, il existe donc une nouvelle constante c_r telle que:

$$K_{P_n}(M) \leqslant c_r\, K_{P_n}(Q_0) h_r(M) = c_r\, h_r(M) .$$

Cette estimation étant valable pour tout réel r strictement positif et sufisamment petit, il est alors clair que toute valeur d'adhérence de la suite K_{P_n} est dans le cône $C_P(\Omega)$. La suite K_{P_n} étant localement uniformément bornée, elle possède des valeurs d'adhérences. En évaluant au point Q_0, on conclut que K_P est l' unique valeur d'adhérence de la suite K_{P_n} et finalement, cette suite converge vers K_P.

c) Pour établir le théorème de représentation, on reprend la technique de Martin [19]. Rappelons la notion de réduite suivante :

Si A est inclus dans la frontière de Ω, et si u est une L-sursolution positive dans Ω, R_u^A désigne la borne inférieure des L-sursolutions positives dans Ω majorant u au voisinage de A.

Rappelons les propriétés de cette réduites qui nous seront utiles (pour ces propriétés, voir aussi [10]).

* R_u^A est une L-solution positive dans Ω. De plus si $A = \partial\Omega \cap \{t < T\}$, et si u est une L-solution positive, par le principe du maximum, $u = R_u^A$ sur $\Omega \cap \{t < T\}$.

* Si A est fermé dans $\partial\Omega$ et si B_n est une suite de voisinages de A décroissant vers A,
$$R_u^A = \operatorname*{Inf}_n R_u^{B_n \cap \Omega}.$$

* La réduite est additive, positivement homogène et idempotente.

* Si A_n est une suite croissante de sous-ensembles de $\partial\Omega$,
$$R_u^{\cup A_n} = \operatorname*{Sup\nearrow}_{n\to+\infty} R_u^{A_n}.$$

Montrons d'abord l'unicité de la mesure. Elle va résulter du lemme suivant:

<u>LEMME 3.9</u>. Si B est un compact inclus dans $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et si P est un point de $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ alors:

$$\begin{cases} R^B_{K_P} = 0 \quad \text{si} \quad P \notin B \\ \\ R^B_{K_P} = K_P \quad \text{si } P \in B \end{cases}.$$

En effet, si P n'appartient pas à B, et si ϵ est strictement positif, K_P est inférieur à ϵ au voisinage de B donc $R^B_{K_P}$ est inférieur à ϵ partout (ϵ est une L-solution).

Si P appartient à B et s est une L-sursolution positive majorant K_P au voisinage de B, alors $\liminf_{\xi \to P}(s(\xi) - K_P(\xi)) \geqslant 0$. Comme par ailleurs K_P tend vers zéro en tout point de $\partial\mathfrak{M} \cap \{t < t(Q)+r_0^2\}$ différent de P on en déduit par le principe du maximum l'inégalité $K_P \leqslant s$. On obtient alors $K_P \leqslant R^B_{K_P}$ ce qui constitue l'inégalité non triviale entre les deux fonctions.

Soit ν une mesure représentant u. Fixons un compact B inclus dans

$\partial\Omega \cap \{t < T\}$ et B_n une suite de voisinages ouverts de B décroissant vers B. Enfin notons pour tout compact σ inclus dans Ω, ε_M^σ une mesure de radon portée par σ et prolongeant $u \longrightarrow \hat{R}_u^\sigma(M)$. On a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad R_u^{B_n \cap \Omega}(M) = \sup_{\substack{\sigma \subset B_n \cap \Omega \\ \sigma \text{ compact}}} \hat{R}_u^\sigma(M)$$

$$= \sup_{\substack{\sigma \subset B_n \cap \Omega \\ \sigma \text{ compact}}} \int_\sigma u(\xi)\, d\varepsilon_M^\sigma(\xi)$$

$$= \sup_{\substack{\sigma \subset B_n \cap \Omega \\ \sigma \text{ compact}}} \int_\sigma \left[\int K_P(\xi)\, d\nu(P)\right] d\varepsilon_M^\sigma(\xi).$$

En utilisant le théorème de Fubini et en remontant les calculs, on a alors:

$$R_u^{B_n \cap \Omega}(M) = \int R_{K_P}^{B_n \cap \Omega}(M)\, d\nu(P).$$

Puis en passant à la borne inférieure en n, on obtient:

$$R_u^B(M) = \int R_{K_P}^B(M)\, d\nu(P).$$

Finalement, en utilisant le lemme 3.9 et en évaluant au point Q_0, on obtient l'identité $R_u^B(Q_0) = \nu(B)$. ν est donc parfaitement déterminée sur les compacts de $\partial\Omega \cap \{t<T\}$. Comme elle est régulière, elle est parfaitement déterminée sur tous les boréliens.

Pour prouver l'existence, commençons par fixer un compact B inclus dans $\partial\Omega \cap \{t < T\}$, puis considérons une suite B_n de voisinages ouverts de B décroissant vers B.

Fixons un entier n et un compact σ inclus dans $B_n \cap \Omega$. $\hat{R}_u^\sigma$ étant un potentiel porté par $\partial\sigma$, il existe une mesure positive ν_σ telle que:

$$\hat{R}_u^\sigma(M) = \int_\sigma K_P(M)\, d\nu_\sigma(P).$$

L'évaluation en Q_0 assure que $\nu_\sigma(\sigma) = \hat{R}_u^\sigma(Q_0) \leqslant u(Q_0)$. La famille ν_σ a donc une valeur d'adhérence (au sens de la convergence vague) lorsque σ croit vers $B_n \cap \Omega$. Notons ν_n une telle valeur d'adhérence (portée par $\overline{B_n \cap \Omega}$). Par les propriétés de continuité des noyaux, on a alors:

$$\forall\, M \in \Omega - \overline{B_n \cap \Omega} \qquad \hat{R}_u^{B_n \cap \Omega}(M) = \int K_P(M)\, d\nu_n(P).$$

Toujours en évaluant au point Q_0, on obtient $\int d\nu_n \leqslant u(Q_0)$. La suite ν_n possède donc elle aussi une sous-suite convergeant vaguement vers une mesure ν^B portée par B et telle que $R_u^B(M) = \int K_P(M)\, d\nu^B(P)$ dans Ω. Enfin les mesures ν^B étant toujours bornées en masse par $u(Q_0)$ on obtient toujours par le même raisonnement en faisant croître B vers $\partial\Omega \cap \{t<T\}$ l'existence d'une mesure ν telle que:

$$\forall\, M \in \Omega\,, \quad R_u^{\partial\Omega\cap\{t<T\}}(M) = \int K_P(M)d\nu(P).$$

On conclut en constatant que $R_u^{\partial\Omega\cap\{t<T\}}$ coincide avec u dans l'ensemble $\Omega \cap \{t < T\}$.

4. EXISTENCE DE LIMITES NON TANGENTIELLES A LA FRONTIERE.

Nous étendons ici le résultat de J. T. Kemper ([17], théorème 2.6) aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$. Nous allons donc démontrer que les L-solutions positives possèdent des limites non tangentielles en presque tout point de la partie lipschitzienne de la frontière de Ω (le presque partout étant relatif à la mesure harmonique).

Rappelons aussi que R. A. Hunt et R. L. Wheeden ([14] et [15]) ont démontré un résultat semblable pour les fonctions harmoniques positives usuelles dans les ouverts lipschitziens de $\mathbb{R}^n$. Ce résultat a ensuite été étendu par A. Ancona ([1]) aux opérateurs elliptiques.

La démonstration du théorème 3.11 reprend les idées de J. T. Kemper. Le principe de Harnack au bord permet cependant de rendre les preuves des lemmes plus simples. Entre autre, contrairement à J.T. Kemper, nous nous passons de toute invariance par translations de l'opérateur L.

Pour démontrer le théorème 3.11, nous allons établir certaines estimations des éléments des cônes $C_Q(\Omega)$ (lemmes 3.12 et 3.13), puis nous utiliserons le théorème de représentation des L-solutions positives (théorème 3.8).

Définissons tout d'abord la notion de convergence non tangentielle:

<u>**DEFINITION 3.10**</u>. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $Q \in \partial\Omega$. On dira qu'un sous-ensemble V de Ω est une approche non tangentielle du point Q dans Ω si $Q \in \bar{V}$ et $\operatorname*{Inf}_{x\in V} d(x,\partial\Omega)/d(x,Q) > 0$, où d désigne toujours la distance parabolique. On dira ensuite qu'une fonction u converge non tangentiellement vers ℓ au point Q si pour toute approche non tangentielle V de Q dans Ω, on a:

$$\lim_{\substack{x\to Q\\ x\in V}} u(x) = \ell.$$

<u>THEOREME 3.11</u>. Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ soit un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Soit (X,T) un point de Ω joignable au point $Q+(0,\lambda r_0, r_0^2)$ par une courbe strictement décroissante en temps. Soit $L \in \Lambda(\mu)$ et h une L-solution positive dans Ω. Alors, si $\mu_{(X,T)}$ désigne la L-mesure harmonique au point (X,T) dans Ω, h admet des limites non tangentielles en $\mu_{(X,T)}$ presque tout point de $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0, \lambda r_0)$.

Démonstration. Faisons tout d'abord la réduction suivante : si P est un point de l'ensemble $\partial\Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$ et si r est un réel inférieur à 1 tel que $E = \Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(2r, 2\lambda r)$ soit inclus dans $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0, \lambda r_0)$, notons $\mu^r_.$ la L-mesure harmonique dans E. Pour tout borélien A de $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r, \lambda r)$ on a:

$$\mu^r_.(A) = \mu_.(A) - \hat{R}^{CE}_{\mu_.(A)} \ .$$

Ainsi, notant P_r le point $P + (0, \lambda r, 2r^2)$ on constate que $\mu^r_{P_r}$ et $\mu_{(X,T)}$ sont équivalentes sur $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r, \lambda r)$ (la nullité de $\mu_{(X,T)}(A)$ entrainant si A est inclus dans $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r\ \lambda r)$ la nullité de $\mu_.(A)$ dans tout l'ensemble Ω).
En remarquant que tout borélien A de $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0, \lambda r_0)$ peut s'écrire comme une réunion au plus dénombrable de boréliens inclus dans les ouverts $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r, \lambda r)$ (avec $r \leqslant 1$ et $\Omega \cap T_P(2r, 2\lambda r) \subset \Omega \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$) , on se ramène donc à établir le résultat lorsque Ω est l'ensemble $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ $(r_0 \leqslant 1)$ et lorsque $Q_0 = (X,T)$ est le point $Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$.

On se place désormais dans le cadre de cette réduction. Les minimales K_p sont supposées être normalisées au point $Q_0 = (X,T) = Q + (0, \lambda r_0, 2r_0^2)$.

<u>LEMME 3.12</u>. Soit $P \in \partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0, \lambda r_0)$. Notons, pour $r \leqslant r_0/8$, $\Delta_r(P)$ l'ensemble $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r, \lambda r)$ et M_{2r} le point $P + (0, 2\lambda r, 4r^2)$. Il existe une constante $c = c(n, \lambda, \mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\, B \in \Delta_r(P) \quad , \quad K_B(M_{2r}) \leqslant \frac{c}{\mu_{Q_0}(\Delta_r(P))} \ .$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence simple du principe de Harnack à la frontière. Sous les hypothèses du lemme, grâce au corollaire 3.2 on peut écrire:

$$\frac{K_B(M_{2r})}{K_B(M_{r_0/2})} \leqslant c \cdot \frac{\mu_{M_{2r}}(\Delta_r(P))}{\mu_{M_{r_0/2}}(\Delta_r(P))} .$$

Par ailleurs, grâce au corollaire 1.5, si N n'appartient pas à l'ensemble $\overset{\circ}{T}_P(r_0/2,\lambda r_0/2)$, on a:

$$\mu_N(\Delta_r(P)) \leqslant c\ \mu_{M_{r_0/2}}(\Delta_r(P)).$$

Ainsi, quitte à modifier à nouveau la constante c , on a l'estimation:

$$K_B(M_{2r}) \leqslant c\ \frac{K_B(M_{r_0/2})}{\mu_{Q_0}(\Delta_r(P))} .$$

Enfin, grâce aux inégalités de Harnack, $K_B(M_{r_0/2})$ est de l'ordre de $K_B(Q_0)$ qui vaut un.

<u>**LEMME 3.13**</u>. Soient $P \in \partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0,\lambda r_0)$ et V une approche non tangentielle de P dans Ω. Soient r un réel strictement positif et N le premier entier tel que $2^N r > \frac{r_0}{16}$. On note , pour $j \leqslant N$, Δ_j l'ensemble $\Delta_{2^j r}(P)$. On définit alors des *couronnes* R_j sur la frontière de la façon suivante:

$$R_0 = \Delta_0 \quad \text{et pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant N \quad R_j = \Delta_j - \Delta_{j-1} .$$

Alors, il existe une série convergente c_j <u>indépendante</u> de r (mais dépendant de V et Ω) telle que pour tout entier j compris entre 0 et N , on ait:

$$\forall\ B \in R_j ,\ \forall\ M \in V \cap \partial T_P(r,\lambda r) \quad K_B(M) \leqslant \frac{c_j}{\mu_{Q_0}(\Delta_j)} .$$

Démonstration. Notons M_j les points $P + (0\ ,\ \lambda 2^{j+1} r\ ,\ 4^{j+1} r^2)$.

Considérons tout d'abord un entier $j \leqslant 4$ et fixons un point B dans l'ensemble R_j. En utilisant successivement les inégalités de Harnack et le lemme 3.12, on peut trouver une constante $c' = c'(V,n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\ M \in V \cap \partial T_P(r,\lambda r) \quad , \quad K_B(M) \leqslant \frac{c'}{\mu_{Q_0}(\Delta_j)} .$$

On pose alors $c_j = c'$ pour $j \leqslant 4$.

Si $j > 4$, et si B est encore un point de R_j, en utilisant le corollaire 1.5 et les inégalités de Harnack, on peut écrire :

$$\forall\ M \notin \overset{\circ}{T}_B(2^{j-2} r\ ,\ \lambda 2^{j-2} r) \quad K_B(M) \leqslant c\ K_B(M_j) .$$

Cette inégalité est en particulier vraie lorsque M est dans l'ensemble $T_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3r}r) \cap \Omega$. Grâce au lemme 3.12, on peut alors trouver une nouvelle constante c telle que:

$$\forall\, M \in T_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3}r) \cap \Omega \qquad K_B(M) \leqslant \frac{c}{\mu_{Q_0}(\Delta_j)} .$$

Notons alors h_j a L-mesure harmonique de $\partial T_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3}r)$ dans le cône $\overset{\circ}{T}_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3}r) \cap (P + \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \; ; \; x_n > -\lambda\|x'\|\vee|t|^{1/2})$. Par le principe de maximum on a alors:

$$\forall\, M \in \Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3}r) \quad , \quad K_B(M) \leqslant \frac{c\; h_j(M)}{\mu_{Q_0}(\Delta_j)} .$$

En particulier, en utilisant le théorème 1.4 on obtient :

$$\forall\, M \in \Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r,\lambda r) \quad , \quad K_B(M) \leqslant c\; K_B(M_0) \leqslant \tilde{c}\; \frac{h_j(M_0)}{\mu_{Q_0}(\Delta_j)} .$$

Il reste à se convaincre pour conclure que les quantités $h_j(M_0)$ sont dominées par le terme général d'une série convergente ne dépendant pas de r.

Comme $2^{j-3} \leqslant 1$, grâce aux résultats du chapitre 2, si L^0 désigne l'opérateur à coefficients constants coïncidant avec L au point P et si h_j^0 désigne la L^0 mesure harmonique de $\partial T_P(2^{j-3}r,\lambda 2^{j-3}r)$ dans le cône considéré, on a:

$$h_j(M_0) \leqslant c\; h_j^0(M_0).$$

Notons h^0 la L^0 -mesure harmonique de $\partial T_0(1,\lambda)$ dans l'ensemble $\overset{\circ}{T}_0(1,\lambda)\cap\{x_n>-\lambda\|x'\|\vee|t|^{1/2}\}$. Par homogénéité, $h_j^0(M_0) = h^0(0,\lambda 2^{2-j},2^{4-2j})$. De plus, on a établi dans le chapitre 2 l'existence d'un $\beta > 0$ tel que $h^0(0,\lambda 2^{2-j},2^{4-2j}) \leqslant c(2^{2-j})^{\beta}$. On peut alors prendre c_j sous la forme $\alpha 2^{-j\beta}$ où α est une constante strictement positive ne dépendant pas de j.

Pour démontrer le théorème, on va utiliser les résultats évoqués en appendice et relatifs à la différentiation des mesures. Pour cela, énonçons la propriété d'adaptation de la mesure μ_{Q_0} par rapport à la distance parabolique d :

<u>LEMME 3.14</u>. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que pour tout point P dans l'ensemble $\Delta_{r_0}(Q)$ et pour tout réel r tel que $\Delta_{6r}(P) \subset \Delta_{r_0}(Q)$, on ait:

$$\mu_{Q_0}(\Delta_{3r}(P)) \leqslant c\; \mu_{Q_0}(\Delta_r(P)) .$$

C'est encore une conséquence simple du principe de Harnack au bord. En écrivant celui-ci dans l'ouvert $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r_0,\lambda r_0)$ et en notant M_r le point $P + (0,\lambda r,r^2)$ on a :

$$(1) \qquad \frac{\mu_{M_{r_0/2}}(\Delta_{3r}(P))}{\mu_{M_{6r}}(\Delta_{3r}(P))} \leqslant c\, \frac{\mu_{M_{r_0/2}}(\Delta_r(P))}{\mu_{M_{6r}}(\Delta_r(P))} \; .$$

De plus, grâce au corollaire 1.5, on a l'estimation:

$$(2) \qquad \mu_{Q_0}(\Delta_{3r}(P)) \leqslant c\, \mu_{M_{r_0/2}}(\Delta_{3r}(P)) \; .$$

En utilisant le principe de Harnack-Moser on obtient alors à l'aide de (1) et (2):

$$\mu_{Q_0}(\Delta_{3r}(P)) \leqslant c\, \frac{\mu_{Q_0}(\Delta_r(P))}{\mu_{M_{6r}}(\Delta_r(P))} \; .$$

Par ailleurs, grâce au principe de Harnack-Moser et au principe du maximum, $\mu_{M_{6r}}(\Delta_r(P)) \geqslant c\, \tilde{\mu}(\Delta_r(P))$ où $\tilde{\mu}$ est la L-mesure harmonique au point $P + (0,\lambda r/2,0)$ dans l'ouvert $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_P(r,\lambda r)$. Les résultats du chapitre 2 permettent d'affirmer que $\tilde{\mu}(\Delta_r(P))$ est de l'ordre d'une constante. Le lemme 3.14 est alors vérifié.

Nous pouvons alors démontrer le théorème 3.11 :

Soit h une L-solution positive dans Ω. Notons ν l'unique mesure portée par $\partial\Omega \cap \{t < T\}$ telle que:

$$\forall\, M \in \Omega \cap \{t < T\} \quad h(M) = \int K_P(M)\,d\nu(P).$$

Ecrivons $d\nu(P) = g(P)d\mu_{Q_0}(P) + d\sigma(P)$ la décomposition de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ_{Q_0}. Fixons un point P_0 de l'ensemble $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0,\lambda r_0)$ en lequel $g(P_0)$ est fini. Supposons en outre que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sigma(\Delta_r(P_0))}{\mu_{Q_0}(\Delta_r(P_0))} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\int_{\Delta_r(P_0)} |g(P)-g(P_0)|\,d\mu_{Q_0}(P)}{\mu_{Q_0}(\Delta_r(P_0))} = 0.$$

Grâce aux résultats sur la différentiation des mesures données en appendice μ_{Q_0} presque tout point P est de ce type.

Nous allons établir qu'alors $h(M)$ converge non tangentiellement vers $g(P_0)$ au point P_0. N'ayant exclu de l'ensemble $\partial\Omega \cap \overset{\circ}{T}(r_0,\lambda r_0)$ qu'un négligeable pour la mesure harmonique, on aura bien prouvé le résultat.

Soit V une approche non tangentielle de P_0 dans Ω. Fixons ϵ strictement positif et $\Delta = \Delta_{r_1}(P_0)$ tels que:

$$\frac{\sigma(\Delta)}{\mu_{Q_0}(\Delta)} < \epsilon \quad \text{et} \quad \frac{\int_\Delta |g(P)-g(P_0)|\,d\mu_{Q_0}(P)}{\mu_{Q_0}(\Delta)} < \epsilon ,$$

Soit enfin $M \in V \cap T_Q(r_1,\lambda r_1)$. On peut trouver un réel r inférieur à r_1 tel que M appartienne à l'ensemble $V \cap \partial_Q(r,\lambda r)$. Notons alors $\Delta_0, \dots, \Delta_N$ les ensembles $\Delta_r(P_0), \dots, \Delta_{2^N r}(P_0)$ où N est le premier entier tel que $2^N r > r_1$. Avec les notations du lemme 3.13, on a:

$$\begin{aligned} |h(M) - g(P_0)| &= \left| \int K_P(M)\big[(g(P)-g(P_0))\,d\mu_{Q_0}(P) + d\sigma(P)\big] \right| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{N} \int_{R_j} K_P(M)\big[|g(P)-g(P_0)|\,d\mu_{Q_0}(P) + d\sigma(P)\big] + \\ &\qquad \int_{(\partial\Omega-\Delta)\cap\{t<T\}} K_P(M)\big(d\nu(P) + g(P_0)\,d\mu_{Q_0}(P)\big). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.13 la première somme est dominée par $2\epsilon(\sum_{j\geqslant 0} c_j)$. Par ailleurs on peut majorer le dernier terme de l'estimation par:

$$\sup_{P\in(\partial\Omega-\Delta)\cap\{t<T\}} K_P(M)\,(\|\nu\| + g(P_0)).$$

Il suffit alors de remarquer que cette borne supérieure tend vers zéro lorsque M tend vers P_0. Ainsi on pourra rendre arbitrairement petit la quantité $|h(M) - g(P_0)|$.

C'est l'objet du lemme qui suit:

<u>LEMME 3.15</u>. $$\lim_{M\to P_0} \left(\sup_{P\in(\partial\Omega-\Delta)\cap\{t<T\}} K_P(M) \right) = 0.$$

En effet, comme $\Delta = \Delta_{r_1}(P_0)$, si M est un point de l'ensemble $\Omega \cap T_{P_0}(r_1/2,\lambda r_1/2)$ et si P est un point frontière non situé dans Δ, on a:

$$K_P(M) \leqslant c\, K_P(\tilde{M}) \quad \text{où } \tilde{M} = P_0 + (0,\lambda r_1/2, r_1^2/2) .$$

(On utilise ici une nouvelle fois le théorème 1.4).

Les inégalités de Harnack entre le point $\tilde{M}$ et le point Q_0 permettent alors d'établir que $K_P(M)$ est de l'ordre d'une constante. Notant h la L-mesure harmonique de $\partial T_{P_0}(r_1/2,\lambda r_1/2)$ dans $\Omega \cap \overset{\circ}{T}_{P_0}(r_1/2,\lambda r_1/2)$, on a alors:

$$\forall\, M \in \Omega \cap \overset{\circ}{T}_{P_0}(r_1/2,\lambda r_1/2) \ , \qquad \sup_{P\in(\partial\Omega-\Delta)\cap\{t<T\}} K_P(M) \leqslant c\ h(M) \ .$$

Le lemme 3.15 résulte alors de cette dernière estimation et le théorème 3.11 est ainsi complètement démontré.

CHAPITRE 4

ESTIMATIONS DE LA MESURE HARMONIQUE POUR DES OUVERTS PLUS REGULIERS

Au cours de ce chapitre, on cherche à effectuer des comparaisons entre mesure harmonique et mesure de surface. On va ainsi préciser les résultats obtenus par Jung-Mei Wu dans [25] et par Robert Kaufman et Jang-Mei Wu dans [16].

Rappelons tout d'abord ces résultats.

<u>THEOREME A</u>([25]). Soient f une fonction lipschitzienne (relativement à la distance parabolique) et $\omega_f = \overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0) \cap \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \ ; \ x_n \geqslant f(x',t)\}$ un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Notons $M_0 = Q + (0,\lambda r_0,2r_0^2)$, $M_0^* = Q+(0,\lambda r_0,-2r_0^2)$, μ_{M_0} la C-mesure harmonique au point M_0 dans ω_f et $\mu^*_{M_0^*}$ la C^*-mesure harmonique au point M_0^* dans ω_f $(C = \dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)$. Enfin, notons Δ l'ensemble $\partial\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_Q(r_0,\lambda r_0)$ et σ l'image de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ par l'application $(x',t) \to (x',f(x',t),t)$ qu'on appelera *mesure de surface* sur Δ.

Soit E un sous ensemble de Δ négligeable pour la mesure σ. Alors il existe une décomposition de E de la forme $E = F \cup F^*$ vérifiant:

$$\mu_{M_0}(F) = 0 \quad \text{et} \quad \mu^*_{M_0^*}(F^*) = 0.$$

<u>THEOREME B</u>([16]). Ici n est égal à 1. Il existe une fonction f lipschitzienne (relativement à d) telle que les mesures σ, $\mu_{M_0}|_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*}|_\Delta$ soient deux à deux étrangères.

REMARQUE. Bien qu'étant appelée *mesure de surface*, la mesure σ n'est en général pas équivalente à la mesure de Hausdorff n-dimensionnelle. La propriété vérifiée par la fonction f nous permet uniquement d'affirmer que son graphe Δ a une dimension de Hausdorff comprise entre n et n + 1/2. En particulier, sur Δ, la mesure n-dimensionnelle peut être identique à l'infini. C'est du reste ce qui se produit dans le contre-exemple développé par R. Kaufman et J.M. Wu, le graphe construit étant partout localement de dimension de Hausdorff 3/2 (au cours de ce contre-exemple, n=1).

Cependant, on peut aussi considérer la théorie de la dimension lorsqu'on munit l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ de la distance parabolique d. L'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est alors un espace métrique de dimension n+2, la mesure n+2-dimensionnelle étant équivalente à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Le graphe Δ d'une fonction lipschitzienne par rapport à d est un ensemble de dimension n+1 et la mesure σ est alors équivalente à la mesure n+1-dimensionnelle. C'est pour ces raisons que nous appellerons malgré tout σ la *mesure de surface* sur Δ.

Le théorème B prouve qu'on ne peut sans hypothèse supplémentaire sur la fonction f obtenir une meilleure comparaison des mesures σ, μ_{M_0} et $\mu^*_{M_0^*}$ que celle décrite lors du théorème A. De plus, le contre-exemple décrit dans le théorème B constitue un cas limite, la fonction f n'étant pas localement $(1/2)+\epsilon$-höldérienne par rapport à la variable t.

Nous allons obtenir au cours de ce chapitre l'équivalence des mesures σ, $\mu_{M_0}|_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*}|_\Delta$ lorsque la fonction f est un peu plus régulière. C'est l'objet des deux théorèmes qui suivent.

<u>THEOREME 4.1</u>. Soient $r_0 \leqslant 1$ et ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. Soit L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Reprenant les notations du théorème A, on appelle μ_{M_0} (resp. $\mu^*_{M_0^*}$) la L-mesure harmonique (resp. L^*-mesure harmonique) au point M_0 (resp. M_0^*) dans l'ouvert ω_f.
On suppose de plus qu'il existe deux constantes $\epsilon \in]0,1/2]$ et $K \in]0,+\infty[$ telles qu'en tous points du domaine de définition de f on ait:

$$|f(x',t) - f(y',s)| \leqslant K\|x'-y'\| \vee |t-s|^{\epsilon+\frac{1}{2}} .$$

Alors, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,K)$ strictement positive telle que:

$$\frac{1}{c}\, \mu^*_{M_0^*}|_\Delta \leqslant \mu_{M_0}|_\Delta \leqslant c\, \mu^*_{M_0^*}|_\Delta .$$

Ainsi les mesures $\mu_{M_0}|_\Delta$ et $\mu^*_{M_0^*}|_\Delta$ sont équivalentes, la densité de l'une par rapport à l'autre étant de plus dans L^∞.

<u>THEOREME 4.2</u>. Reprenant les hypothèses et notations du théorème 4.1, les mesures μ_{M_0} et σ sont équivalentes dans Δ, σ désignant toujours l'image de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ par l'application $(x',t) \to (x',f(x',t),t)$. De plus, la densité de μ_{M_0} par rapport à σ est dans l'espace $L^2(\sigma)$, sa norme dans $L^2(\sigma)$ étant contrôlée par une constante ne dépendant que des constantes géomètriques du problème.

REMARQUE. En raison du principe du maximum vérifié par les opérateurs L et L^*, si l'on veut espérer comparer la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe dans Δ, le point M_0^* doit être *antérieur* à l'ensemble Δ et le point M_0 doit être *postérieur* à Δ.

Rappelons que B. Dahlberg a montré ([9]) dans les domaines lipschitziens l'équivalence entre la mesure harmonique (pour l'opérateur du laplacien) et la mesure de surface. A. Ancona ([4]) a généralisé ce résultat à certain opérateurs elliptiques. Du reste pour démontrer le théorème 4.2, nous reprendrons certaines idées de [4] et [9].

1. EQUIVALENCE ENTRE MESURE HARMONIQUE ET MESURE HARMONIQUE ADJOINTE.

Nous commençons par donner une comparaison entre la mesure harmonique et la fonction de Green de l'ouvert ω_f. C'est l'objet du lemme 2.3. Il généralise aux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ le lemme 2.2, page 175 démontré par J.M. Wu ([25]). Nous allons l'obtenir facilement à l'aide du principe de Harnack au bord, ce principe nous permettant de nous passer de toute invariance par translation de l'opérateur L. <u>Ce lemme n'utilise pas l'hypothèse de régularité supplémentaire pour f introduite lors du théorème 4.1</u>.

En observant le résultat de ce lemme, on constate alors que pour comparer la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe, il suffit de savoir comparer la fonction de Green et la fonction de Green adjointe dans l'ouvert ω_f. Grâce au principe de Harnack faible au bord, il suffit donc de savoir comparer les fonctions w et w^* qui sont les L et L^* mesures harmoniques de $\partial T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ dans ω_f. C'est ce que nous faisons (grâce aux résultats du chapitre 2) lors du lemme 4.4, lorsque f vérifie les hypothèses de régularité supplémentaires du théorème 4.1.

<u>LEMME 4.3</u>. Soit L un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$. Soient $r_0 \leqslant 1$ et ω_f un domaine lipschitzien canonique adapté au cylindre $T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$. Notons encore M_0 le point $Q+(0,\lambda r_0,2r_0^2)$. Pour tout point $P=(X',X_n,T)$ de l'ensemble $\partial\omega_f \cap T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$, on note $\Delta_r(P)$ (lorsque ça a un sens) la partie du bord:

$$\Delta_r(P) = \{(x',x_n,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \;;\; \|x'-X'\|_\infty < r \;,\; |t-T| < r^2,\; x_n = f(x',t)\} .$$

(Notons que c'est la norme infinie qui est utilisée ici et que les ensembles $\Delta_r(P)$ décrivent des *cubes* sur la surface Δ).
Si G désigne la L-fonction de Green de l'ouvert ω_f et μ_{M_0} la L-mesure harmonique au point M_0 dans ω_f, Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait:

$$\forall\, P \in \Delta \quad \frac{1}{c}\,\mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant r^n\, G_{P+(0,\lambda r,0)}(M_0) \leqslant c\,\mu_{M_0}(\Delta_r(P)) ,$$

cette estimation étant encore valable pour tout borélien compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$.

Démonstration.

a) Majoration de la fonction de Green.

Fixons un point P dans l'ensemble $\overset{\circ}{\Delta}$ et r un réel strictement positif tel que $\Delta_r(P)$ reste inclus dans $\partial\omega_f \cap T_Q(3r_0/2, 3\lambda r_0/2)$. Notons P_1 le point $P + (0,\lambda r,0)$. Grâce aux estimées de la fonction de Green globale décrites au chapitre 0, on peut écrire :

$$\forall\, M \in \partial T_{P_1}(r/10, \lambda r/10) \qquad G_{P_1}(M) \leqslant c\, r^{-n}\ .$$

Par ailleurs, notons $\mathcal{O}$ l'ouvert $P + \overset{\circ}{T}_P(r/2, 2\lambda r) \cap \{x_n > \lambda \|x'\| \vee |t|^{\frac{1}{2}}\}$ et notons h la L-mesure harmonique de $\partial T_P(r/2, 2\lambda r)$ dans $\mathcal{O}$. Grâce au principe du maximum, on a l'estimation $\mu_M(\Delta_r(P)) \geqslant 1 - h(M)$ dans l'ouvert $\mathcal{O} \cap \omega_f$. En utilisant la technique du lemme 1.3, on montre alors l'existence d'une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\forall\, M \in \partial T_{P_1}(r/10, \lambda r/10) \qquad \mu_M(\Delta_r(P)) \geqslant c\ .$$

Ainsi quitte à modifier la constante c, on a:

$$\forall\, M \in \partial T_{P_1}(r/10, \lambda r/10) \qquad r^n G_{P_1}(M) \leqslant c\, \mu_M(\Delta_r(P))\ .$$

Cette inégalité se propage grâce au principe du maximum à l'ensemble $\overset{\circ}{\omega_f} - T_{P_1}(r/10, \lambda r/10)$. Elle est en particulier vraie au point M_0.

b) Minoration de la fonction de Green.

Fixons un point P dans l'ensemble $\overset{\circ}{\Delta}$, notons P_r le point $P + (0, \lambda r, r^2)$ et appliquons le principe de Harnack au bord dans l'ouvert $\omega_f \cap T_P(r_0, \lambda r_0)$. Comme $\Delta_r(P)$ reste inclus dans le cylindre $T_P(\sqrt{n-1}\, r, \lambda\sqrt{n-1}\, r)$ on obtient entre autre si $2\sqrt{n-1}\, r$ ne dépasse pas $r_0/8$:

$$\frac{\mu_{P_{r_0/2}}(\Delta_r(P))}{\mu_{P_{4\sqrt{n-1}\, r}}(\Delta_r(P))} \leqslant c\, \frac{G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{r_0/2})}{G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{4\sqrt{n-1}\, r})}.$$

Grâce aux inégalités de Harnack et à la minoration de $\mu_{\cdot}(\Delta_r(P))$ effectuée dans le a), $\mu_{P_{4\sqrt{n-1}\, r}}(\Delta_r(P))$ est de l'ordre d'une constante.

Grâce aux inégalités de Harnack et aux estimations de la fonction de Green données au cours du chapitre 0, $G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{4\sqrt{n-1}\, r})$ est de l'ordre de r^{-n} .

Enfin, les inégalités de Harnack et le corollaire 1.5 nous donnent respectivement:

$$\begin{cases} G_{P+(0,\lambda r,0)}(P_{r_0/2}) \leqslant c\ G_{P+(0,\lambda r,0)}(M_0) \\ \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant c\ \mu_{P_{r_0/2}}(\Delta_r(P)) \end{cases} .$$

Cette succession de comparaisons fournit la minoration de la fonction de Green.

Comme annoncé plus haut, nous allons maintenant comparer sous les hypothèses du théorème 4.1 la mesure harmonique et la mesure harmonique adjointe de $\partial T_Q(2r_0,\lambda r_0)$ dans ω_f. C'est le point clé de la démonstration du théorème 4.1.

<u>LEMME 4.4</u>. Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 4.1 et notons, (comme lors le chapitre 2) w (resp. w^*) la L-mesure harmonique (resp. L^*-mesure harmonique) de $\partial T_Q(2r_0,2\lambda r_0)$ dans ω_f . Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,K)$ strictement positive telle que:

$$\forall\ M \in \omega_f \cap T_Q(r_0,\lambda r_0) \quad \frac{1}{c}\, w^*(M) \leqslant w(M) \leqslant c\ w^*(M).$$

Démonstration. Il suffit de l'établir pour des points $M = (x',x_n,t)$ vérifiant de plus $|x_n - f(x',t)| \leqslant r_0/2$, les fonctions w et w^* étant de l'ordre d'une constante aux autres points considérés.

Introduisons les portions de ω_f du type $\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_P(r_0,\lambda r_0)$ où P est un point de $\partial\omega_f \cap T_Q(r_0,\lambda r_0)$. En utilisant le principe de Harnack faible au bord (théorème 1.7) pour comparer w (resp. w^*) à la L-mesure harmonique (resp. L^*-mesure harmonique) de $\partial T_P(r_0,\lambda r_0)$ dans $\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_P(r_0,\lambda r_0)$, on se ramène à établir l'estimation pour les points M situés sur l'axe $Q + \mathbb{R}^+.(0,1,0)$.

On peut ensuite supposer $Q = 0$ et $r_0 = 1$ (si $r_0 \leqslant 1$, la fonction $f(r_0x',r_0^2t)/r_0$ vérifie les mêmes hypothèses que f et la matrice $A(r_0x',r_0^2t)$ décrit encore la matrice d'un opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$).

En utilisant le théorème 2.4 (et son homologue pour l'opérateur L^*), on peut geler au point O les coefficients de la matrice A qui décrit L et donc supposer que L est un opérateur à coefficients constants. Considérons alors le graphe *tangent* à f décrit par $g(x',t) = f(x',0)$. Il vérifie vis à vis de f l'approximation:

$$|g(x',t) - f(x',t)| \leqslant K[d[(x',t),0]]^{1+2\epsilon} .$$

Grâce au théorème 2.2, on peut donc aussi supposer que f ne dépend pas de t.

Plaçons-nous alors dans l'ouvert de $\mathbb{R}^n$: $\{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ (x,0) \in \omega_f\}$. C'est un ouvert lipschitzien de $\mathbb{R}^n$ et notons $\varphi(x)$ la mesure harmonique dans cet ouvert de $\{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; (x,0) \in \partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)\}$ pour l'opérateur à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$ $\operatorname{div}(A\nabla_x)$. f ne dépendant pas de t et L étant à coefficients constants, la fonction $h(x,t) = \varphi(x)$ constitue alors une L-solution (et une L^*-solution !) dans ω_f nulle sur $\partial\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$.

Grâce au principe de Harnack faible au bord, on a la comparaison $\frac{1}{c} h \leqslant w \leqslant ch$ dans l'ensemble $\omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Mais, en utilisant la version adjointe du théorème 1.7, on a aussi dans ce même ensemble l'estimation $\frac{1}{c} h \leqslant w^* \leqslant ch$. Ces deux comparaisons assurent la conclusion du lemme.

La démonstration du théorème 4.1 est alors très simple.

Avec les notations du lemme 4.4, et grâce au principe de Harnack faible au bord et au lemme 4.3, on peut trouver une nouvelle constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait:

$$\forall\, P \in \Delta \qquad \frac{r^n}{cr_0^n} w^*(P+(0,\lambda r,0)) \leqslant \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant \frac{cr^n}{r_0^n} w^*(P+(0,\lambda r,0)) \;.$$

De même pour la théorie adjointe, on a:

$$\forall\, P \in \Delta \qquad \frac{r^n}{cr_0^n} w(P+(0,\lambda r,0)) \leqslant \mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \leqslant \frac{cr^n}{r_0^n} w(P+(0,\lambda r,0)) \;.$$

En utilisant le lemme 4.4 on trouve finalement une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,K)$ strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit et pour tout point P dans l'ensemble Δ on ait:

$$\frac{1}{c}\, \mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \leqslant \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant c\, \mu^*_{M_0^*}(\Delta_r(P)) \;.$$

Cette inégalité est encore vraie pour tous les boréliens compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Tout ouvert de Δ s'écrivant comme réunion au plus dénombrable et disjointe de tels boréliens, l'inégalité se propage à tout ouvert de Δ. Par régularité des mesures on obtient finalement l'estimation souhaitée pour tout borélien de Δ.

2. EQUIVALENCE ENTRE MESURE HARMONIQUE ET MESURE DE SURFACE

Reprenant des idées de [9] et [4] nous allons commencer par démontrer l'équivalence entre mesure harmonique et mesure de surface lorsque le graphe est plus régulier. Ensuite nous chercherons à estimer la norme L^2 de la densité de la mesure harmonique par rapport à la mesure de surface. Cette estimation nous permettra par un argument d'approximation d'obtenir le résultat dans le cas général.

Considérons donc dans un premier temps un ouvert lipschitzien canonique ω_f vérifiant les hypothèses du théorème 4.2, la fonction f étant de plus de classe C^2 (f de classe $C^{1\ 2\epsilon}$ en x' et ϵ+1/2 hölderienne en t suffirait). Grâce au corollaire 2.8 écrit pour l'opérateur L^*, il existe une constante c strictement positive dépendant ici aussi de l'ouvert ω_f telle que :

$$\forall\, P \in \Delta \quad , \quad \frac{1}{c}\, r \leqslant w^*(P+(0,\lambda r,0)) \leqslant c\, r \ .$$

En utilisant le lemme 4.3 ainsi que le principe de Harnack faible au bord, on trouve alors une nouvelle constante c strictement positive (dépendant aussi de r_0) telle que:

$$\forall\, P \in \Delta \quad , \quad \frac{1}{c}\, r^{n+1} \leqslant \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant c\, r^{n+1} \ .$$

Comme par définition $\sigma(\Delta_r(P))$ vaut r^{n+1}, on obtient en fait:

$$\forall\, P \in \Delta \quad , \quad \frac{1}{c}\, \sigma(\Delta_r(P)) \leqslant \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant c\, \sigma(\Delta_r(P)) \ .$$

Cette inégalité est encore valable pour tout borélien compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Tout ouvert de Δ s'écrivant comme une réunion dénombrable disjointe de tels boréliens, la même inégalité est donc vraie pour tout ouvert de Δ. Enfin par régularité des mesures, elle est vraie pour tout borélien de Δ. En particulier, les mesures σ et $\mu_{M_0}|_\Delta$ sont équivalentes, la densité de l'une par rapport à l'autre étant de plus dans L^∞. Cependant, la norme dans L^∞ de cette densité dépend de constantes liées à la différentiabilité de la fonction f. On ne pourra la contrôler lors d'une approximation d'un graphe général par des graphes plus réguliers. C'est pourquoi, comme dans [9] et [4], nous allons chercher à contrôler la norme dans $L^2(\sigma)$ de la densité de $\mu_{M_0}|_\Delta$ par rapport à σ. Pour y parvenir, comme A. Ancona dans [4], nous allons nous ramener au cas où l'opérateur L ne dépend pas de la variable x_n. Ceci sera possible grâce au lemme suivant qui est l'analogue du corollaire 6 de [4] dans notre cadre.

<u>LEMME 4.5</u>. Soient $r_0 \in\,]0,1]$ et ω_f un domaine lipschitzien adapté au cylindre $T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$. On n'impose pas ici de régularité supplémentaire sur f. Soient L_1 et L_2 deux opérateurs de la classe $\Lambda(\mu)$ dont les matrices A_1 et A_2 coïncident sur le graphe de f. Notant μ_i la L_i mesure harmonique dans ω_f au point $M_0 = Q + (0,\lambda r_0, 2r_0^2)$, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu)$ strictement positive telle que:

$$\frac{1}{c}\, \mu_2\, |_\Delta \leqslant \mu_1\, |_\Delta \leqslant c\, \mu_2\, |_\Delta \quad .$$

(on note toujours Δ l'ensemble $\overset{\circ}{T_Q}(r_0, \lambda r_0) \cap \partial\omega_f$).

Démonstration. Notons w_i^* la L_i^* mesure harmonique de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ dans ω_f. w_1^* et w_2^* vont être comparables dans $\omega_f \cap T_Q(r_0, \lambda r_0)$. Il suffit pour s'en convaincre d'utiliser l'analogue du chapitre 2 pour la théorie duale. Le principe de Harnack faible au bord pour les opérateurs L_1^* et L_2^* nous permet comme lors du lemme 4.4 de n'avoir à effectuer cette comparaison que sur l'axe $Q + \mathbb{R}^+.(0,1,0)$. La comparaison découle alors directement du théorème 2.4, les opérateurs L_1^* et L_2^* coïncidant au point Q.

De plus, grâce au lemme 4.3 et au principe de Harnack faible au bord, on peut trouver une constante c strictement positive telle que pour tout r suffisamment petit on ait:

$$\forall P \in \Delta, \begin{cases} \mu_1(\Delta_r(P)) \leqslant c \dfrac{r^n}{r_0^n} w_1^*(P + (0,\lambda r,0)) \\ \\ \mu_2(\Delta_r(P)) \geqslant \dfrac{1}{c} \dfrac{r^n}{r_0^n} w_2^*(P + (0,\lambda r,0)) \end{cases} .$$

Ainsi, quitte à modifier la constante c, on obtient:

$$\mu_1(\Delta_r(P)) \leqslant c\, \mu_2(\Delta_r(P)).$$

Cette inégalité est aussi vraie pour les boréliens compris entre $\Delta_r(P)$ et $\overline{\Delta_r(P)}$. Comme précédemment, on peut alors conclure que $\mu_1\,|_\Delta \leqslant c\, \mu_2\,|_\Delta$. Les mesures μ_1 et μ_2 jouant des rôles similaires, la deuxième inégalité est aussi vérifiée.

<u>LEMME 4.6</u>. Soit $L \in \Lambda(\mu)$. On se place dans les hypothèses du théorème 4.2 et on suppose en plus que f est la restriction d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ de classe C^2 et globalement lipschitzienne par rapport à d. Notant φ la densité de $\mu_{M_0}|_\Delta$ par rapport à σ, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,K)$ strictement positive telle que:

$$\int_\Delta \varphi^2 \, d\sigma \leqslant \frac{c}{r_0^{n+1}} .$$

Démonstration. Comme nous l'avons déjà évoqué, en reprenant une idée de [4], nous allons nous ramener au cas où l'opérateur L ne dépend pas de la variable x_n. Pour cela, introduisons l'opérateur $L_1 = \dfrac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div} A_1 \nabla_x$ où $A_1(x,t) = A(x', f(x',t), t)$. Alors $L_1 \in \Lambda(\mu_1)$ où μ_1 est une constante ne dépendant que des données géométriques du problème. De plus, A_1 ne dépend plus de x_n. En utilisant le lemme 4.5, si la conclusion est vraie pour l'opérateur L_1 elle le demeure pour l'opérateur L.

Supposons donc l'opérateur L indépendant de x_n. Notons encore w la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(2r_0, 2\lambda r_0)$ dans ω_f. Grâce aux lemmes 4.3, 4.4 et au principe de Harnack faible au bord, il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,\epsilon,K)$ strictement positive telle que pour tout réel r suffisamment petit, on ait:

$$\forall\, P \in \Delta \qquad \mu_{M_0}(\Delta_r(P)) \leqslant c\, \frac{r^n}{r_0^n}\, w(P + (0,\lambda r,0)) \ ,$$

ce qui s'écrit encore: $$\frac{\mu_{M_0}(\Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))} \leqslant \frac{c}{r_0^n} \cdot \frac{w(P+(0,\lambda r,0))}{r}.$$

Mais, l'opérateur L ne dépend pas de x_n. Grâce au principe du maximum, la fonction $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}$ est donc une L-solution positive. En utilisant le théorème 3.11, elle admet des limites radiales en μ_{M_0}-presque tout point de Δ.

Appelons encore $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}(P)$ ces limites radiales aux points P de Δ où elles existent. La mesure σ étant adaptée à la distance $\delta((x,t),(y,s)) = \|x'-y'\|_\infty \vee \dfrac{|x_n-y_n|}{\lambda} \vee |t-s|^{1/2}$ dans l'ouvert $\mathring{T}_Q(r_0,\lambda r_0)$, grâce au théorème sur la différentiation des mesures énoncé en appendice, $\dfrac{\mu_{M_0}(\Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))}$ converge vers $\varphi(P)$ en σ-presque tout point de Δ lorsque r converge vers 0.

Ainsi, grâce au théorème des accroissements finis, on peut trouver une nouvelle constante c strictement positive telle qu'en μ_{M_0}-presque tout point P de Δ on ait:

$$\varphi(P) \leqslant \frac{c}{r_0^n}\, \frac{\partial w}{\partial x_n}(P) \ .$$

($d\sigma$ et $d\mu_{M_0}|_\Delta$ sont équivalentes).

On a alors:

$$\begin{aligned}
\int_\Delta \varphi^2(P)\, d\sigma(P) &= \int_\Delta \varphi(P)\ d\mu_{M_0}(P) \\
&\leqslant \frac{c}{r_0^n} \int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P)\ d\mu_{M_0}(P) \\
&\leqslant \frac{c}{r_0^n}\ \underline{\lim}_{r\to 0} \int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P+(0,r,0))\ d\mu_{M_0}(P) \ .
\end{aligned}$$

Notons ω_f^r l'ouvert $\omega_f \cap \mathring{T}_Q(2r_0, 2\lambda r_0 - r)$ et $\mu_{M_0}^r$ la L-mesure harmonique au point M_0 dans cet ouvert. On peut trouver une nouvelle constante c strictement positive telle que, pour r suffisamment petit, on ait la comparaison $\mu_{M_0}|_\Delta \leqslant c\ \mu^r_{M_0}|_\Delta$. Ce résultat s'obtient aisément grâce au lemme 4.3 et au principe de Harnack faible au bord qui permet de comparer les fonctions de Green adjointes des deux ouverts ω_f et ω^r_f. Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned}\int_\Delta \varphi^2(P)\, d\sigma(P) &\leqslant \frac{c}{r_0^n}\ \underline{\lim}_{r\to 0} \int_\Delta \frac{\partial w}{\partial x_n}(P+(0,r,0))\ d\mu^r_{M_0}(P)\\ &\leqslant \frac{c}{r_0^n}\ \underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0 + (0,r,0))\\ &= \frac{c}{r_0^n}\ \frac{\partial w}{\partial x_n}(M_0)\ ,\end{aligned}$$

car la fonction $M \to \dfrac{\partial w}{\partial x_n}(M+(0,r,0))$ est une L-sursolution au problème de Dirichlet dans ω^r_f de donnée frontière $\mathbb{1}_\Delta(P)\ \dfrac{\partial w}{\partial x_n}(P+(0,r,0))$.

Par ailleurs, appelons M_1 le point $Q + (0{,}9\lambda r_0/10, 3r_0^2)$ et M_2 le point $Q+(0{,}11\lambda r_0/10, 3r_0^2)$. On a $w(M_1) \geqslant \alpha(n,\lambda,\mu) > 0$ et $w(M_2) \leqslant 1$. Donc par le théorème des accroissements finis, il existe une constante c strictement positive et un point M_3 du segment $[M_1, M_2]$ tels que $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}(M_3) \leqslant \dfrac{c}{r_0}$. Par le principe de Harnack-Moser, il existe donc une nouvelle constante c strictement positive telle que $\dfrac{\partial w}{\partial x_n}(M_0) \leqslant \dfrac{c}{r_0}$.

On obtient finalement $\displaystyle\int_\Delta \varphi^2\, d\sigma \leqslant \frac{c}{r_0^{n+1}}$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On va maintenant généraliser cette estimation à tout graphe vérifiant les hypothèses du théorème 4.2 mais n'ayant plus nécessairement la régularité C^2. On retrouve alors dans ce nouveau cadre l'analogue d'une estimation de Dahlberg ([9]).

<u>LEMME 4.7</u>. On se place sous les hypothèses du théorème 4.2. f n'a plus nécessairement la régularité C^2. Il existe une constante $c = c(n,\lambda,\mu,K,\epsilon)$ strictement positive telle que pour tout borélien E inclus dans Δ on ait:

$$\mu_{M_0}(E) \leqslant \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\sigma(E)}\ .$$

Démonstration. f se prolonge à $\mathbb{R}^n$ en une fonction vérifiant la même condition de lipschitzianité par rapport à la distance parabolique (voir [18]). A l'aide d'une approximation de l'unité de classe C^2, on peut alors trouver des fonctions f_k vérifiant les hypothèses du lemme 4.6 et décroissant vers f, la convergence étant uniforme sur tout compact. Notons μ^k_M la L-mesure harmonique au point M dans le cylindre

$\overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0) \cap \{x_n > f_k(x',t)\}$ et σ_k la projection de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ sur le graphe $x_n = f_k(x',t)$. Considérons toutes ces mesures comme des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Fixons dans un premier temps un compact K inclus dans Δ, un ouvert Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ contenant K et inclus dans $\overset{\circ}{T}_Q(r_0,\lambda r_0)$ et enfin K' un voisinage compact de K dans $\mathbb{R}^{n+1}$ inclus dans Ω. Soit ψ une fonction continue à support compact vérifiant $\mathbb{1}_{K'} \leqslant \psi \leqslant \mathbb{1}_\Omega$. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant le lemme 4.6, pour tout entier k, on obtient:

$$\int \psi \, d\mu^k_{M_0} \leqslant \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 \, d\sigma_k} \; .$$

Appelons K_k le projeté de K sur le graphe de f_k. En utilisant les barrières construites lors le lemme 1.3, il existe une constante $\alpha = \alpha(n,\lambda,\mu,r_0,K')$ strictement positive telle que pour tout entier k suffisamment grand et pour tout point P dans l'ensemble K_k on ait:

$$\left(d(M,P) < \alpha \quad \text{et} \quad M \in \overset{\circ}{T}_Q(2r_0,2\lambda r_0) \cap \{x_n > f_k(x',t)\} \right) \Rightarrow \int \psi \, d\mu^k_M \geqslant \frac{1}{2} \; .$$

Entre autre, si k est assez grand, la propriété est vraie en tout point de K. Par le principe du maximum, on a alors en tout point M de l'ouvert ω_f:

$$\int_K d\mu_M \leqslant 2\int \psi \, d\mu^k_M \; .$$

Par suite, il existe une nouvelle constante c telle que pour tout entier k assez grand :

$$\mu_{M_0}(K) \leqslant \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 \, d\sigma_k} \; .$$

La suite f_n convergeant simplement vers f, la suite σ_k converge vaguement vers la mesure σ, projection de la mesure de Lebesgue sur le graphe de f . On obtient donc finalement:

$$\mu_{M_0}(K) \leqslant \frac{c}{r_0^{(n+1)/2}} \sqrt{\int \psi^2 d\sigma} \leqslant \frac{c\sqrt{\sigma(\Omega)}}{r_0^{(n+1)/2}} \; .$$

Par régularité de la mesure σ, le résultat du lemme est alors vrai pour tout compact de Δ. L'inégalité se propage aux boréliens de Δ par régularité des des mesures μ_{M_0} et σ.

On peut alors démontrer le théorème. Le lemme 4.7 montre déjà que $\mu_{M_0}|_\Delta$ est absolument continue par rapport à σ. Pour obtenir l'absolue continuité de σ par rapport à $\mu_{M_0}|_\Delta$, on procède comme Dahlberg dans [9]. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un borélien E inclus dans Δ qui soit μ_{M_0}-négligeable mais qui ne soit pas σ-négligeable. Grâce aux compléments sur la différentiation des mesures donnés en appendice il existe un point P dans l'ensemble E tel que:

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sigma(E\cap\Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))} = 1.$$

On va alors appliquer le lemme 4.7 dans les ouverts $\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_P(2r,2\lambda r)$ lorsque r est petit. Notons μ_M^r la L-mesure harmonique au point M dans ce nouvel ouvert et notons P_r le point $P + (0,\lambda r,2r^2)$. En remarquant que pour tout borélien F inclus dans $\partial\omega_f \cap \overset{\circ}{T}(r,\lambda r)$, on a:

$$\mu_{P_r}^r(F) = \mu_{P_r}(F) - \hat{R}_{\mu_{\cdot}(F)}^{\complement(\omega_f\cap T_P(2r,2\lambda r))}(P_r) \ ,$$

on conclut que $\mu_{P_r}^r$ et μ_{M_0} sont équivalentes dans $\partial\omega_f \cap \overset{\circ}{T}_P(r,\lambda r)$ (Le raisonnement a déjà été effectué au cours du chapitre 3).
On a alors pour tout réel r suffisamment petit:

$$\mu_{P_r}^r(\Delta_r(P)) = \mu_{P_r}^r(\Delta_r(P)-E) \leqslant \frac{c}{r^{(n+1)/2}} \sqrt{\sigma(\Delta_r(P)-E)}$$

$$\leqslant c \left(1 - \frac{\sigma(E\cap\Delta_r(P))}{\sigma(\Delta_r(P))}\right)^{1/2} .$$

On aboutit alors à une contradiction en se souvenant que $\mu_{P_r}^r(\Delta_r(P))$ est minoré par une constante strictement positive (ce raisonnement a déjà été effectué). La mesure σ est finalement absolument continue par rapport à la mesure $\mu_{M_0}|_\Delta$. La preuve du théorème 4.2 est alors complète.

COMPLEMENT SUR LA DIFFERENTIATION DES MESURES

La métrique naturelle dans ce travail n'étant pas la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^{n+1}$, les travaux de A. S. Bésicovitch sur la différentiation des mesures ([7]) ne s'appliquent pas directement. Nous allons donc démontrer un théorème de différentiation des mesures qui peut être utilisé lors des chapitres 3 et 4. Sa démonstration reprend les idées de Saks ([22]) et Rudin ([21]) lorsqu'ils différencient une mesure par rapport à la mesure de Lebesgue.

<u>DEFINITION</u>. Soient $k \geqslant 1$ et μ une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^k$. Soit d une distance sur $\mathbb{R}^k$ compatible avec la topologie naturelle. On appelle $B(x,r)$ la boule ouverte (pour la distance d) de centre x et de rayon r. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^k$. On dit que la mesure μ est adaptée à la distance d dans l'ouvert U s'il existe une constante c strictement positive telle que:

$$\forall\, x \in U,\ \exists r_0 = r_0(x) \quad ; \quad r \leqslant r_0 \implies \mu(B(x,3r)) \leqslant c\ \mu(B(x,r)) \ .$$

<u>THEOREME</u>. Soit μ une mesure de Radon positive de $\mathbb{R}^k$ adaptée à la distance d dans l'ouvert U. Soit ν une autre mesure de Radon (non nécessairement positive). Ecrivons $\nu = f\mu + \sigma$ la décomposition de Radon-Nikodym de ν par rapport à μ. Alors:

1) En μ-presque tout point de x de U, $f(x) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}$.

2) En μ-presque tout point de x de U,

$$\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(\xi)-f(x)|\,d\mu(\xi) \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Démonstration.

<u>LEMME 1</u>. (version finie du lemme de recouvrement de Vitali). Il existe une constante α strictement positive telle que si Ω est une réunion de boules ouvertes $B(x,r)$ incluses dans U dont le rayon r ne dépasse pas $r_0(x)/3$, et si t est un nombre réel strictement inférieur à $\mu(\Omega)$, on peut trouver une sous famille finie de boules $B_1 \ldots B_n$ deux à deux disjointes et vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) > \alpha t.$$

En effet, par régularité de la mesure μ, on peut trouver un compact K inclus dans l'ouvert Ω tel que $t < \mu(K)$. Isolons $S_1 \ldots S_p$ une sous-famille finie de la collection de boules proposée au départ recouvrant K et rangée par ordre décroissant de rayons. On pose $B_1 = S_1$. On oublie toutes les boules S_j, $j \geqslant 2$, rencontrant B_1 et on appelle B_2 la première des boules S_j restantes (s'il en reste) . On recommence le procédé en oubliant ensuite les boules S_j rencontrant B_1 ou B_2, et ce jusqu'à épuisement complet de la collection $S_1 \ldots S_p$. On obtient ainsi une sous-famille $B_1 \ldots B_n$ constituée de boules disjointes. Par construction, chaque boule S_j non sélectionnée rencontre une boule B_i qui a un rayon supérieur au sien. On a donc:

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{p} S_j \subset \bigcup_{i=1}^{n} 3B_i \quad .$$

La propriété d'adaptation de la mesure μ nous permet alors d'écrire:

$$t < \mu(K) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(3B_i) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i),$$

ce qui assure la conclusion.

<u>LEMME 2</u>. Si ν est une mesure de radon positive et si A est un borélien inclus dans U et ν-négligeable, il existe un borélien A' inclus dans A et de complémentaire dans A μ-négligeable tel que:

$$\forall\, x \in A', \quad \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 0.$$

En effet, il suffit d'établir que pour tout entier j , l'ensemble

$$A_j = \{\, x \in A \cap \operatorname{Supp} \mu \quad ; \quad \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} > \frac{1}{j} \}$$

est μ-négligeable.

Fixons un réel ϵ strictement positif et un ouvert W tels que $A_j \subset W \subset U$ et $\nu(W) < \epsilon$. Tout point de A_j est le centre d'une boule $B_x = B(x,r_x)$ incluse dans W, de rayon r_x inférieur à $r_0(x)/3$ et telle que $\nu(B_x) > \frac{1}{j}\,\mu(B_x)$. Grâce au lemme 1, si $t < \mu(\bigcup_x B_x)$, on sélectionne des boules $B_1 \ldots B_n$ deux à deux disjointes et telles que:

$$\alpha t < \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) < j \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) \leqslant j\, \nu(W) \leqslant j\epsilon .$$

Ainsi, en tenant compte de l'arbitraire sur t, on a:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad , \quad \mu^*(A_j) \leqslant \frac{j\epsilon}{\alpha} .$$

L'ensemble A_j est donc bien μ-négligeable.

Venons-en alors à la démonstration du premier point du théorème. Par décomposition, on peut évidemment supposer que la mesure ν est réelle. Grâce à la décomposition de Radon-Nikodym, il suffit de plus d'établir le résultat séparément dans le cas où ν est absolument continue par rapport à μ puis dans le cas où ν est étrangère à μ.

Si ν est réelle et étrangère à μ, décomposons ν sous la forme $\nu = \nu^+ - \nu^-$, ν^+ et ν^- étant étrangères à μ et positives. La conclusion résulte alors du lemme 2 appliqué aux mesures ν^+ et ν^-.

Si ν est absolument continue par rapport à μ, on peut écrire $d\nu = f\, d\mu$ où f est une fonction réelle. Posons alors pour tout rationnel q :

$$A_q = \{x \in U \text{ , } f(x) < q\} \quad \text{et} \quad B_q = U - A_q \text{ ,}$$

et regardons la mesure positive ν_q définie par:

$$\nu_q(E) = \int_{E\cap B_q} (f(x) - q)d\mu(x).$$

A_q est un ensemble ν_q-négligeable. Donc grâce au lemme 1, il existe un ensemble A_q' inclus dans A_q tel que:

$$\mu(A_q - A_q') = 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in A_q' \qquad \lim_{r\to 0} \frac{\nu_q(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = 0 \text{ .}$$

Notons alors N l'ensemble $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (A_q - A_q') \cup \{x\in U \text{ ; } |f(x)| = +\infty\}$. N est μ-négligeable car ν est σ finie. On va obtenir le résultat souhaité en tout point x de l'ensemble U - N.

Soit x un tel point. Fixons un rationnel q tel que $f(x) < q$; $x \in A_q'$ et pour r suffisamment petit, on a:

$$\begin{aligned}\nu(B(x,r)) &= \int_{B(x,r)} f(y)d\mu(y) = q\, \mu(B(x,r)) + \int_{B(x,r)} (f(y)-q)d\mu(y)\\ &\leqslant q\, \mu(B(x,r)) + \nu_q(B(x,r)).\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \leqslant q.$$

En passant à la borne inférieure en q, on obtient finalement:

$$\forall\, x \in U - N \qquad \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \leqslant f(x).$$

En remplaçant f par -f on obtient de même qu'en μ-presque tout point de U $\underline{\lim}_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} \geqslant f(x)$. Le premier point du théorème est alors acquis.

Le deuxième point du théorème est alors classique. Fixons r_n une suite dense de $\mathbb{C}$. Le premier point appliqué à la mesure $\nu_n = |f - r_n|\mu$ nous apprend l'existence d'un ensemble N_n μ-négligeable tel que:

$$\forall\, x \in U - N_n \qquad |f(x)| < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{r\to 0} \frac{\nu_n(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} = |f(x) - r_n| \,.$$

Si $x_0 \in U - \bigcup_n N_n$, et ϵ est un réel strictement positif, choisissons un entier n tel que $|f(x_0) - r_n| < \epsilon$. En constatant que:

$$0 \leqslant \frac{1}{\mu(B(x_0,r))} \int_{B(x_0,r)} |f(y) - f(x_0)|\,d\mu \leqslant \frac{\nu_n(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,r))} + \epsilon \;,$$

on obtient le résultat souhaité au point x_0 en remarquant que la quantité $\frac{\nu_n(B(x_0,r))}{\mu(B(x_0,r))}$ devient elle même strictement inférieure à ϵ si r est petit.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ANCONA Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien. Ann. Inst. Fourier 28 (1978), 162-213.

[2] ________ Une propriété de la compactification de Martin d'un domaine euclidien. Ann. Inst. Fourier 29 n°4 (1979), 71-90.

[3] ________ Régularité d'accès des bouts et frontière de Martin d'un domaine euclidien. J. Math. Pures & Appl. 63 (1984), 215-260.

[4] ________ Comparaison des mesures harmoniques et des fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques sur un domaine lipschitzien. C. R. Acad. Sc. Paris 294 (1982).

[5] ________ Communication personnelle (1988).

[6] D. G. ARONSON Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 890-896.

[7] A. S. BESICOVITCH A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 42 (1946), 1-10.

[8] L. CARLESON On the existence of boundary values for harmonic functions of several variables. Ark. för Math. 4 (1962).

[9] B. DAHLBERG Estimates of harmonic measure. Arch. Rational Mech. Anal. 65 n°3 (1978), 275-288.

[10] J. L. DOOB Classical potential theory and its probabilistic counterpart. New York, Springer-Verlag (1984).

[11] E. B. FABES & D. W. STROOCK A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old idea of Nash. Arch. Rat. Mech. and Anal. 96 (1986), 326-338.

[12] A. FRIEDMAN Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Englewood cliffs, N. J. (1964).

[13] R. M. HERVE Recherches sur la théorie axiomatique des fonctions surharmoniques et du potentiel. Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 415-471.

[14] R. A. HUNT & R. L. WHEEDEN On the boundary values of harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 307-322.

[15] ______________________ Positive harmonic functions on Lipschitz domains. Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 507-528.

[16] R. KAUFMAN & J. M. WU Singularity of parabolic measures. Compositio Mathematica 40 n°2 (1980), 243-250.

[17] J. T. KEMPER Temperatures in several variables : kernel functions, representations, and parabolic boundary values. Trans. Amer. Math. Soc. 167 (1972), 243-262.

[18] E J. Mac SHANE Extansion of range of functions. Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 837-842.

[19] R. S. MARTIN Minimal positive harmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 49 (1941), 137-172.

[20] J. MOSER A Harnack inequality for parabolic differential equations. Comm. Pure & Appl. Math. 17 (1964), 101-134.

[21] W. RUDIN Real and complex analysis. 2nd. ed. Mc Graw-Hill (1974).

[22] S. SAKS Theory of the integral. Stechert, New York (1937).

[23] J. SERRIN On the Harnack inequality for linear elliptic equations. J. Anal. Math. 4 (1956), 292-308.

[24] K. O. WIDMAN On the boundary behavior of solutions to a class of elliptic partial differential equations. Ark. för Math. 6 (1967), 485-533.

[25] J. M. WU On parabolic measures and subparabolic functions. Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 171-186.