ABDELLATIF SEGHIER

# Matrices de Toeplitz dans le cas $d$-dimensionnel

*Thèses d'Orsay*, 1987

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1987__0218__P0_0>

63855

**UNIVERSITE PARIS SUD**

**Centre d'Orsay**

# T H E S E

**De Doctorat d'Etat Es Sciences Mathématiques**

*présentée pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR ES-SCIENCES**

**par**

*Abdellatif SEGHIER*

*Sujet :*

- *MATRICES DE TOEPLITZ DANS LE CAS d-DIMENSIONNEL : DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE A L'ORDRE d.*

- *EXTENSION DE FONCTIONS DE TYPE POSITIF DANS LE CAS d-DIMENSIONNEL ET MAXIMUM D'ENTROPIE : APPLICATION A LA RECONSTRUCTION DE DENSITES.*

*Soutenue le 28 Janvier 1988 devant le Jury composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| *MM.* | *DACUNHA-CASTELLE* | *Didier* |
| | *BOUTET DE MONVEL* | *Louis* |
| | *BRETAGNOLLE* | *Jean* |
| | *DOUADY* | *Adrien* |
| | *KAHANE* | *Jean-Pierre* |

**A MA MERE**

**A ELIANE, ma femme**

**à mes filles**
**CARINE et ANISSA**

**REMERCIEMENTS:**

**J'adresse** mes remerciements, en tout premier lieu,au Professeur D.Dacunha-Castelle pour m'avoir acceuilli dans l'équipe de Statistiques en me posant un problème d'origine probabiliste et relevant de techniques hilbertiennes

Ceci m'a permis de reprendre d'anciens problèmes et de les traiter dans le cadre multi-dimensionnel.

Cette activité ne se limite pas à la thèse puisque la dernière partie aborde un problème difficile et d'un grand intêret pour les cristallographes.Des résultats partiels sont obtenues et une collaboration permettrait une avancée décisive.

Mes remerciements vont aux Professeurs qui ont bien voulu participer à mon Jury :

au Professeur L.Boutet de Monvel qui eu la patience de lire mon travail et qui me fait l'honneur d'être membre de mon Jury au Professeur J.Bretagnolle,directeur de recherches du laboratoire de statistiques,dont la constante disponibilité rend trés agréable le travail dans l'équipe du laboratoire.

au Profeseur A.Douady qui,avec amitié, m'a proposé un second sujet traitant d'objets mathématiques fascinants (ensembles de Julia) et nouveaux (ensemble de Mandelbrot).

au Professeur J.P.Kahane qui avec le Professeur H.Helson m'ont initié à l'analyse harmonique, et dont la présence à mon jury est un honneur.

Mes remerciements vont aussi à mon collègue P.Assouad avsc lequel j'ai eu d'interéssantes discussions et qui m'a aidé à mettre au point mon dernier article.

Je remercie le professeur J.Peyrière pour les discussions mathématiques que nous avons eues à propos de ma dernière note.

Je remercie Mmes Baillet et Parvan,qui avec gentillesse et compétence ,ont effectué la frappe de la plupart de mes articles.

Je remercie enfin Mme Zielinski qui a procedé au tirage de cette thèse avec célérité.

**ABSTRACT:**

In the two first chapters we are concerned with the prediction of the a second order stationnary process.Here the information depends on a part of past.The main aspect of these paper is the use of hilbertian technics based on Tœplitz and Hankel operators.

In the following three papers ,we deal with an old Szegö's problem on the expansion of the determinant of Tœplitz matrix.

We give in the multidimensionnal case a more precise expansion ( of the trace of the inverse with order d).

Moreover the knew cœfficients which appear are strongly related with geometrical invariants of the domain on witch the the Tœplitz operators are truncated.

In the last two papers knew results about reconstruction of the spectral densities in the multidimentional case are given

The methods are based on extensions of positive defined function and maximum entropy principle.

This work is motivated by the problem of the determinaton of the phases of the electron density function in crystal analysis.

Nevertheless,there is still a great amount of work to be done in order to solve this problem.

# PRESENTATION DE LA THESE

Le présent travail se divise en sept chapitres correspondant chacun à un article.

# PRESENTATION DES CHAPITRES

## CHAPITRE I

On se donne un processus gaussien stationnaire $X(t)$ observé sur $(-a\ +a)$, où $a > 0$. On suppose qu'on peut lui associer une infinité de corrélations $R$, qui coincident sur $(-2a,\ 2a)$.

On se propose dans ce chapitre de résoudre le problème de la prédiction d'un élément $X(1)$, pour une corrélation donnée par rapport à $\{\ (u),\ |u|\leq a)$ une "partie du passé".

On s'intéresse ensuite à la corrélation qui donne, parmi les corrélations obtenues par prolongement de la fonction de type positif sur $(-2a, 2a)$ induite par le processus $X(t)$, la pire prédiction $X(s)$ relativement à $\{X(u),\ |u|\leq a)$.
Le problème de la prédiction linéaire (interpolation et extrapolation) a été abordé par M.G. Krein (1944) [7]

La solution qui en est donnée nécessite la connaissance de la solution du problème de Sturm-Liouville inverse.

La solution proposée dans cet article utilise des techniques de projection par rapport à des sous-espaces formant "un angle" dont le "cosinus" est inférieur à 1. En effet, grâce au théorème de Bochner on établit une isométrie entre les sous-espaces gaussiens engendrés par la famille $(X(u),\ \epsilon\ )$ et les sous-espaces de Hilbert engendré, par $\{e_u, u\in\mathbb{R}\}$, $e_u(x) = e^{iux}$, dans l'espace $L^2\ (\mathbb{R})$ où $\mu$ est la mesure spectrale associée au processus $(X(u))$.

Notons par $H^2(E)$ le sous-espace de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ engendré par $\{e_u, u\in E,$ $E\subset\mathbb{R}\}$

L'idée essentielle intervenant dans le problème de la prediction est une notion "d'angle" de sous-espace $H^2(-\infty\ -a)$ et $H^2(a\ \infty)$, le passe du processus jusqu'à -a et le futur du processus jusqu'à a.

Les techniques introduites dans ce travail pour résoudre le problème de la prédiction par rapport à une partie du passé font intervenir un nouvel opérateur. Il apparait comme une perturbation de l'opérateur de projection lié à la prédiction par rapport à tout le passé (de $-\infty$ à +a).

Précisons : supposons que $\mu$ = fdx avec $f \in L^1(\mathbb{R})$ et

$\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{Log}\ f(x)/1+x^2)\, dx > \infty$ et soit $f = |g|^2$ avec $g \in H^2(\mathbb{R})$, (g"analytique") et $H^2(\mathbb{R})$ l'espace de Hardy classique. On pose $\phi_a = e_a g/\bar{g}$, Q le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $H^2(\mathbb{R})$.

L'opérateur de Hankel est défini par $\gamma \in H^2(\mathbb{R}) \to H_{\phi_a}(\gamma) = Q(\phi_a \gamma) \in H^2(\mathbb{R})$. La norme de cet opérateur mesure l'angle des sous-espaces $H_{1/f}(-\infty\ -a)$ et $H_{1/f}(a\ \infty)$.

La projection par rapport à une partie du passé fait intervenir, comme perturbation, l'opérateur $(I - H^*_{\phi_a} H_{\phi_a})^{-1}$.

Le problème technique consiste à déterminer sous quelle condition l'opérateur $||H_{\phi_a}||<1$ de façon à assurer l'existence de l'inverse.

Nous avons donné des conditions suffisantes pour que l'opérateur $H_{\phi_a}$ soit compact pour des densités particulières, faisant intervenir des produits de Blaschke infinis dans $\phi_a$ (nous n'avons pas utilisé la version continue du théorème de Helson-Szegö).

Le second volet de ce chapitre concerne un problème d'extremum.

Partant d'une corrélation $R_a$ donnée (fonction de type positif sur $\mathbb{R}$), nous considérons la famille $\mathcal{F}_a$ de corrélations coïncidant avec $R_a$ sur (-2a 2a), chaque corrélation donnant lieu à une mesure spectrale (théorème de Bochner);

On considère pour s > a

$$\sup_{\mu \in \mathcal{J}_\alpha} \left( \inf \int_{-\infty}^{+\infty} | e_\lambda - \sum a_k e_{u_k} |^2 d\mu(t) \right).$$

L'infimum est pris sur toutes les combinaisons linéaires finies de $\{e^{iu_k t}\}$ où $u_k \in (-a\ a)$.

On montre alors que pour $0 \leq \alpha < a$ et si $f^{-1}$ est localement sommable et $\phi_\alpha = \bar{g}/g \cdot e_\alpha$ est une fonction intérieure alors le supremum pour $\mu \in \mathcal{J}_\alpha$ est atteint pour f.dx.

Notons qu'apparaît ici la notion de maximum d'entropie en liaison avec la prédiction linéaire qui va faire l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre VI (cas discret).

## CHAPITRE II

Nous proposons dans ce chapitre une approximation unifiée et générale des problèmes d'extrapolation (Ch. I) et d'interpolation.

Nous montrons grâce au théorème spectral pour les opérateurs autoadjoints qu'il est toujours possible d'exprimer la projection d'un élément de $L^2(\mathbb{R})$ sur $H^2(E)$ (voir notation au Ch. I) comme limite d'une serie d'opérateurs (de Hankel) appliqués à cet élément sans condition de norme pour l'opérateur considéré.

Précisons : le cas où E = (-a a) (Ch. I) se traite avec une condition supplémentaire sur f de sorte que $H_{(-a\ a)} = H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$. Le cas où $E = (-\infty\ -b) \cup (+b\ \infty)$ correspond à l'interpolation d'un élément $X(s)$, $s \in [-b\ b]$ par rapport à $\{X(u),\ u \in E\}$. Les seules conditions requises sont :

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty$$

Le calcul des projections fait intervenir l'opérateur de Hankel $H_{\phi_b}$ où $\phi_b = e_b\ \bar{g}/g$, ce qui correspond à l'angle des sous-espaces

$H_{(-\infty\ b)}$ et $H_{(\infty\ b)}$ dans l'espace $L^2_f$ $(\mathbb{R})$, alors que l'extrapolation fait intervenir l'angle des sous-espaces $H_{(-\infty\ a)}$ dans $L^2_{1/f}$ $(\mathbb{R})$

La fonction $\phi_b$ $(|\phi_b|=1)$ qui permet de définir l'angle de sous-espaces contient toute l'information concernant le processus.

## CHAPITRE III, IV, V

Les théorèmes limites de G. Szegö.

Definissons d'abord le cadre du problème. Soit f $\geq$ 0 définie sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}} \sim [0\ 2\Pi[$. On suppose f et Log f intégrables par rapport à la mesure de Haar du tore $\mathbb{T}$. On note par $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ respectivement les coefficients de Fourier de f et de Log f.

On définit la matrice de Toeplitz associée à f et à un entier N donné par $T_N = (C_{m-n})$ $0 \leq m, n \leq N$.

Le théorème limite de G. Szegö s'énonce

$$\log \det T_N = d_0 N + \sum_{k\geq 1} k|d_k|^2 + o(1).$$

Ce théorème dit théorème fin de Szegö est défini actuellement comme un développement asymptotique dont on peut tracer brièvement l'histoire. G. Szegö établit très tôt (1915) [10] le résultat suivant :

$$(2)\quad \lim_{N\to\infty} (\log \det. T_N)/N = d_0$$

Ce théorème est lié étroitement au calcul de l'erreur de prédiction pour les processus gaussiens stationnaires.

Le théorème fin dont on donne la forme en (1) est établi en 1952 à la suite d'une question d'Onsager ayant trait au modèle d'Ising.

Ce théorème correspond à l'ordre 1.

L'analogue multidimensionnel de ce théorème est établi par H. Widom [12] et Linnick la même année (1975) [8].

Après la lecture de l'article de Widom [12] traitant du développement asymptotique dans le cas continu (et multidimensionnel), j'ai pensé qu'il était possible d'établir l'analogue dans le cas discret ($\mathbb{Z}^2$). Les résultats obtenus font l'objet du Chapitre III. Le développement est obtenu pour des fonctions de l'opérateur plus générales que le logarithme.

Ce n'est qu'après avoir terminé ce travail que j'ai appris l'existence d'un résultat analogue établi par Linnick [8].

La technique utilisée dans ce chapitre était cependant susceptible de permettre une extension du développement asymptotique.

C'est ainsi que l'on obtient dans le chapitre IV, un développement asymptotique à tous les ordres pour une fonction $f = 1/P$ où P est un polynôme trigonométrique dont le support de sa transformée de Fourier se trouve dans $(\mathbb{Z}_+)^d$ ( $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ )

Un aspect remarquable du développement est l'homogénéité des termes d'ordre supérieur ou égal à 2 et dont la forme est nouvelle. En effet, soit $\tau_N = \prod_{j=1}^{d} (0\ N_j)$ un "multirectangle de $\mathbb{Z}^d$.

($N = (N_1, \ldots, N_d)$ est un multientier). Soit $\mathcal{P}_N$ le sous-espace des polynômes trigonométriques dont le support de leurs transformées de Fourier dans $\tau_N$ et $\pi_N$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $\mathcal{P}_N$, alors $T_N(f) = T_N$ est défini par $\mathcal{P}_N \ni p \to \pi_N\ (fp)$. Soit $T_N^{-1}$ l'inverse de $T_N$ (qui existe si $f^{-1}$ est intégrable), soit enfin $V(N) = \mathrm{Card}\,\tau_N$, on a le résultat suivant, lorsque $\inf N_j \to \infty$

$T_\tau\ (T_N^{-1}) = a_0\ V(N) + a_1\ (V(N))^{d-1/d} + \ldots + a_{d-1}\ V(N)^{1/d} + a_d + o(1)$.

Ce résultat est établi pour $f = 1/|P|^2$ où P est un polynôme trigonométrique dont le spectre (support de sa transformée de Fourier) se trouve dans $\tau_L = \prod_{j=1}^{d} [0.L_j]$ un "multirectangle" de $\mathbb{Z}^d$.

Les coefficients $a_0, \ldots, a_d$ du développement font intervenir les propriétés de f (symbole) de Log f et de la géométrie du domaine limite.

En effet, d'aprés le mode de croissance des domaines $\tau_N$, adopté pour le développement asymptotique, les domaines $\tau_N/V(N)$ qui sont plongés dans $\mathbb{R}^d$ tendent vers un domaine limite $\tau_0$ qui est un multirectangle de $\mathbb{R}^d$ dont le volume est égal à 1.

Les coefficients du développement asymptotique apparaîssent alors comme des mesures positives dont le support est contenu, selon l'ordre des termes (à partir de l'ordre 1), dans les "faces" d'ordre 1, les "faces" d'ordre 2,..., les arêtes et les sommets.

Le chapitre VI est une généralisation du travail précédent où le symbole $f = 1/|P|^2$ est remplacé par $f = |g|^2$ où g est analytique.

Nous précisons ainsi les termes du développement à partir du $2^e$ ordre en mettant en évidence un phénomène inattendu : la divergence des termes d'ordre supérieur ou égal à 3 lorsque 1/g n'est pas un polynôme trigonométrique (i.e. la transformée de Fourier de 1/g un support non borné dans $\mathbb{Z}_+^d$).

Il est nécessaire pour obtenir des termes finis, d'approcher 1/g par une suite de polynômes trigonométriques $P_L$ de spectre contenu dans $\tau_L = \prod_{j=1}^{d} [0\ L_j]$, et $\inf L_j \to \infty$, puis de normaliser par une fonction du cardinal de $\tau_L$.

Les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 qui seront finis dépendront alors du mode de croissance d'une part de $\tau_N$, d'autre part de $\tau_L$.

Ce type de développement est tout à fait nouveau.

Le but de l'auteur est de donner la forme du théorème limite de Szegö dans le cas d-dimensionnel comme un développement asymptotique à l'ordre d pour le déterminant de la matrice de Toeplitz.

Ce travail est en cours et sera une conséquence des chapitres III, IV et V.

## CHAPITRES VI et VII

Ces deux chapitres portent sur le principe du maximum d'entropie apparu d'abord en thermodynamique (Bolzmann) et en théorie de l'information (Shannon) (Jaynes [5]).

Son intérêt apparaît actuellement dans l'extension de son utilisation dans les problèmes de reconstruction en physique et en cristallographie (problèmes inverses) ainsi que dans les problèmes de reconstruction de l'image, spectrographie, géophysique.

Notre but est de développer un cadre mathématique de ce principe et de proposer des méthodes plus élaborées en vue d'applications.

La notion d'entropie revêt actuellement deux formes différentes (au moins) dans les problèmes d'application. En effet, soit p une fonction représentant un objet à reconstruire à partir d'informations partielles. La fonction p peut représenter une densité électronique (en cristallographie), une fonction de brillance en image, une densité spectrale pour les processus gaussiens, etc...

Si p est une densité de probabilité, l'entropie de p est alors $-\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log p(x)dx$.

Une autre forme d'entropie est donnée par l'expression

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Log}\, p(x)dx$.

L'une et l'autre forme d'entropie ont donné pour des domaines spécifiques des résultats significatifs, sans pour autant qu'apparaisse clairement, pour les applicateurs, le choix à faire dans chaque situation [9].

Du point de vue des probabilités (ainsi de la théorie de l'information) $-\int_{-\infty}^{+\infty} p \log p(x)dx$ apparait comme une forme particulière de l'information de Kullback entre deux lois de probabilité [3]. Cette fonctionnelle apparait la plus adaptée pour mesurer l'écart entre deux lois.

La forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Log}\ p\ dx$ ([1]), n'est pas à proprement parler une entropie. Lorsque f = p est une densité spectrale d'un processus gaussien stationnaire, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \log f(x)dx$ x représente l'entropie du processus au sens de Kolmogorov. Cette interprétation se trouve dans un article de Chover ([2], 1961) et qui semble avoir été ignoré par les applicateurs jusque-là. Les chapitres VI et VII portent sur les propriétés de convergence des solutions obtenues par l'une ou l'autre entropie.

Les résultats concernant l'entropie $-\int_{-\infty}^{+\infty} p \log p(x)dx$ sont encore élémentaires. Il reste un travail important dans le cadre de l'utilisation de ce principe en reconstruction de phases en cristallographie [3].

Les résultats concernant l'"entropie" $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Log}\ p\ d\ x$ sont très élaborés et très précis, mais l'application en est restreinte aux seuls processus gaussiens stationnaires.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] BURG J.P.

Maximum entropy spectral analysiS, Ph. D. thesis, Dept of Geophysics, Standford University, California, 1979.

[2] CHOVER J.

On normalized entropy of the extensions of a positive-definite function.

J. Math. Mec., 10, n°6, 927-945, 1961.

[3] DACUNHA-CASTELLE D.

Reconstruction des phases en cristallographie par maximum d'entropie (d'après Bricogne).

Séminaire Bourkaki, 36è année, 1983-84, n° 628.

[4] HELSON H. and SZEGö G.

A problem in prediction theory.

Ann. Math. Pura. App. 51, 1960, p. 107-138.

[5] JAYNES E.T.

Information theory and statistical mechanic.

Physical revieew, vol. 106, n°4 (1957), 620-630.

[6] KAC M.

Can you hear the shape of a dum ?

Amer. Math. Monthly 73 (1966), p 1-23.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 282 (26 avril 1976) Série A — 895

THÉORIE DES PROBABILITÉS. — *Prédiction d'un processus stationnaire du second ordre connu sur un intervalle fini.* Note (*) de M. **Abdellatif Seghier**, transmise par M. Robert Fortet.

Soit $X(t)$ un processus stationnaire du deuxième ordre connu sur $[-a, +a]$, on suppose qu'on peut lui associer une infinité de corrélations $R(.)$ coïncidant sur $[-2a, +2a]$. On se propose d'une part, de prédire $X(s)$, pour $R(.)$ donnée, par rapport à $\{X(u) : |u| \leqq a\}$ et d'autre part de déterminer la corrélation $R$ qui donne la plus mauvaise des prédictions.

1. Soient : $r(.)$ une fonction continue définie non négatives ur $\mathbf{R}$; $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$; $\mathscr{R}(r \mid a)$. la classe des fonctions $R(.)$ continues non négatives, identiques à $r(.)$ sur $(-2a, +2a)$.

Soient : $R(.) \in \mathscr{R}(r \mid a)$ et $X(.)$ une fonction aléatoire stationnaire du second ordre, admettant $R(.)$ comme fonction de corrélation; nous étudions les problèmes suivants :

1° Calculer la prédiction linéaire optimale de $X(s)$ $(s > a)$, par rapport à $\{X(u), |u| \leqq a\}$.

2° Déterminer pour quelle $R(.) \in \mathscr{R}(r \mid a)$, la prédiction ci-dessus est la plus mauvaise.

2. On pose

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \, d\mu(x), \tag{1}$$

où $\mu$ est une probabilité sur $\mathbf{R}$.

(1) Permet d'interpréter, par l'isométrie $X(u) \mapsto e_u$ [avec $e_u(x) = e^{iux}$], l'erreur de prédiction comme la distance de $e_s$ au sous-espace fermé $H^{\mu}_{(-a,+a)}$ de $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ engendré par les exponentielles $e_u$, $|u| \leqq a$.

La question 1. 1° a été considérée dans (³), où la solution passe par la résolution d'équations intégrales. L'approche qui en est donnée ici utilise les propriétés des fonctions analytiques sur le demi-plan. Outre les résultats explicites qui sont obtenus pour une famille de mesures associées au processus par (1), cette étude permet de répondre à la question 1.2°.

3. On suppose $\mu = f\,dx$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Log} f(x)).(1+x^2)^{-1} \, dx > -\infty.$$

Une fonction positive presque partout, sommable et vérifiant l'inégalité ci-dessus peut s'écrire :

$$f(x) = |g(x)|^2 \text{ p. p.,} \qquad \text{avec} \quad g \in L^2(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \hat{g} = \mathscr{F} g$$

[$\mathscr{F}$ étant la transformation de Fourier de $L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R})$] vérifiant $\hat{g}(u) = 0$ pour presque tout $u \leqq 0$. On note par $H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbf{R}) / \hat{h}(u) = 0$ pour presque tout $u \leqq 0\}$ et par $H^{2-} = \{h \in L^2(\mathbf{R}) / \hat{h}(v) = 0$ pour presque tout $v \geqq 0\}$. On note par $H_{(bc)}$, $-\infty \leqq b < c \leqq +\infty$, le sous-espace de $L^2_f(\mathbf{R})$ engendré par les exponentielles $e_u$, $b \leqq u \leqq c$.

On peut choisir $g$ telle que $H^{2+} = g\,H_{(0\infty)}$ $(H^{2-} = g\,H_{(-\infty 0)})$. $g$ est dite extérieure (³). Soit P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbf{R})$ sur $H^{2+}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbf{R})$ sur $H^{2-}$, on note par M l'opérateur linéaire de $H^{2+}$ dans $H^{2-}$ défini par

$$M : \quad \theta \to Q(e_{2a}\, g\bar{g}^{-1}\, \theta)$$

*Démonstration.* — Soit $b_s$ la fonction définie par $b_s = -P(\bar{g}e_{s-a})$.

1° Si $P_a(e_s)$ coïncide avec la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty a)}$ alors $M(b_s) = 0$ (pour tout $s \geqq a$). En effet dans le lemme 1 il suffit de tenir compte du fait que $P_a(e_s) - e_s$ est orthogonal à $H_{(-\infty a)} = e_a \bar{g}^{-1} H^{2-}$ implique $0_{2,n} = -b_s$ pour tout $n$ et

$$0_{1,n} = -M\,0_{2,n} = M(b_s) = 0$$

pour tout $n$.

2° Si $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geqq a$, c'est-à-dire $e_{2a}\,g\bar{g}^{-1}\,b_s \in H^{2+}$ pour $s \geqq a$, alors $e_{2a}\,g\bar{g}^{-1}\,\mathcal{M} \in H^{2+}$ avec $\mathcal{M}$ le sous-espace fermé engendré par $b_s$, $s \geqq a$. D'après la forme de $b_s$ ce sous-espace coïncide avec $H^{2+}$, comme $|(e_{2a}\,g\bar{g}^{-1})(x)| = 1$ c'est une fonction intérieure d'après un théorème de Beurling.

3° Si $e_{2a}\,g\bar{g}^{-1}$ est une fonction intérieure il est facile de voir que $e_{2a}\,g\bar{g}^{-1}\,b_s \in H^{2+}$ c'est-à-dire $M(b_s) = 0$ ($s \geqq a$).

4° Si $M(b_s) = 0$ pour $s \geqq a$ d'après 2° $e_{2a}\,g\bar{g}^{-1}\,\theta \in H^{2+}$ pour tout $\theta \in H^{2+}$ donc $M(\theta) = 0$. Il s'ensuit que dans le lemme $\theta_{1,n} = M\,\theta_{2,n} = 0$ et $\theta_{2,n} = -b_s$ et $P_a(e_s) = e_s - e_a\,\bar{g}^{-1}\,b_s$ c'est-à-dire la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty a)}$.

*Exemples de calculs de projections :*

*Exemple* 1. — Projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty a)} \cap H_{(-a+\infty)}$.

Soit

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2},$$

on obtient pour $s > a$ :

$$P_a(e_s)(x) = \left(1 + i(i-1)\frac{x-i}{x-1}(s-a)\,e^{-(s-a)}\right)e^{iax}.$$

*Exemple* 2. — Projection de $e_s$ sur $H_{(-a+a)}$ :

$$f(x) = \frac{2}{5\pi}\,\frac{x^2+4}{(x^2+1)^2};$$

$f^{-1}(x)$ étant localement sommable, la projection de $e_s$ sur $H_{(-a+a)}$ est aussi la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty a)} \cap H_{(-a+\infty)}$ et les calculs donnent, pour $s > a$ :

$$P_a(e_s)(x) = A(s)\frac{(x+i)^2}{x^2+4}e^{-ixa} + \left(e^{-(s-a)}\left(1+(s-a)\frac{x-i}{x-2i}\right) + B(s)\frac{(x-i)^2}{x^2+4}\right)e^{ixa},$$

où

$$A(s) = -\frac{36(s-a)\,e^{-(s-a)}e^{-4a}}{81 - e^{-8a}} \qquad \text{et} \qquad B(s) = -\frac{e^{-4a}}{g}\,A(s).$$

4. Considérons $\Lambda_{(a)} = \{\mu, \hat{\mu} = R, R \in R\{r \mid a\}\}$ et soit $H^{\mu}_{(-a+a)}$ le sous-espace de $L^2_\mu(R)$ engendré par l'exponentielle $e_u$, $\mu \in \Lambda_{(a)}$, $|u| \leqq a$.

PROPOSITION 5. — *Soit $\alpha : 0 < \alpha < a$. On suppose que $g\,\bar{g}^{-1}\,e_{2\alpha}$ est une fonction intérieure et $f^{-1}$ localement sommable. Alors pour tout $s$ compris entre $a$ et $3a - 2\alpha$, la distance de $e_s$ à $H^{\mu}_{(-a+a)}$, $\mu \in \Lambda_{(a)}$, est maximale pour la mesure $f\,dx$.*

et par $M^*$ l'opérateur linéaire de $H^{2-}$ dans $H^{2+}$ défini par

$$M^* : \quad \psi \rightarrow P(e_{-2a}\bar{g}g^{-1}\psi).$$

On note enfin par $P_a$ le projecteur orthogonal de $L^2_f(R)$ sur $H_{(-\infty a)} \cap H_{(-a+\infty)}$, et par $\| \quad \|_f$ la norme dans $L^2_f(R)$ et $\| \quad \|$ la norme dans $L^2(R)$.

LEMME 1. — *Pour tout $s > a$ il existe deux suites $(\theta_{1,n})$ et $(\theta_{2,n})$, $n = 1, 2, \ldots$, dans $L^2(R)$, telles que :*

(i) $$\theta_{1,n} \in H^{2-} \quad \text{et} \quad \theta_{2,n} \in H^{2+}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

(ii) $$P_a(e_s) = e_s + \lim_{n \to +\infty} (e_{-a}g^{-1}\theta_{1,n} + e_a\bar{g}^{-1}\theta_{2,n});$$

(iii) $$\lim_{n \to +\infty} (\theta_{1,n} + M\theta_{2,n}) = 0;$$

(iv) $$\lim_{n \to +\infty} (M^*\theta_{1,n} + \theta_{2,n}) = -P(e_{s-a}\bar{g}).$$

PROPOSITION 1. — *On pose $b_s = -P(e_{s-a}g)$ et on suppose que $I - M^*M$ est inversible*

(i) $$P_a(e_s) = e_s - e_{-a}g^{-1}M[(I - M^*M)^{-1}b_s] + e_a\bar{g}^{-1}(I - M^*M)^{-1}b_s;$$

(ii) $$\|P_a(e_s)\|_f^2 = 1 + \|M[(I - M^*M)^{-1}b_s]\|^2 - \|(I - M^*M)^{-1}b_s\|^2.$$

La proposition qui suit donne une famille de mesures $f\,dx$ pour lesquelles $I - M^*M$ est inversible. On note par $z \longrightarrow g(z)$ la fonction analytique sur le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$ qui coïncide sur R, presque partout avec $g$ et $z \longrightarrow \bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$ la fonction définie sur le plan complexe et qui coïncide avec $\bar{g}(x)$ sur R.

PROPOSITION 2. — *On suppose que $z \longrightarrow \psi(z) = e^{2iaz}(g\bar{g}^{-1})(z)$ est une fonction méromorphe dans le plan complexe et n'ayant qu'un nombre fini de zéros dans $\operatorname{Im} z > 0$. On suppose de plus qu'il existe une constante K positive telle que $|\psi(z)| < K$ pour $|z|$ assez grand. Alors :*

(i) $\dim (M^*M)H^{2+} < +\infty$;

(ii) $(I - M^*M)^{-1}$ *existe et est borné sur* $H^{2+}$.

PROPOSITION 3. — *On suppose $1/f$ localement sommable. Alors pour tout $a > 0$ :*

$$H_{(-\infty a)} \cap H_{(-a+\infty)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{(-a-\varepsilon a+\varepsilon)} = H_{(-a+a)}.$$

C'est un corollaire d'un résultat de Levinson et McKean [4] établi pour $a = 0$ où l'on a

$$H_{(-\infty 0)} \cap H_{(0+\infty)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{(-\varepsilon+\varepsilon)}.$$

On dit qu'une fonction $\varphi$ définie sur R est une fonction intérieure si elle est la restriction presque partout d'une fonction analytique $z \longrightarrow \varphi(z)$ sur le demi plan $\operatorname{Im} z > 0$ et telle que

$$|\varphi(z)| \leqq |\varphi(x)| = 1, \quad \operatorname{Im} z \geqq 0.$$

PROPOSITION 4. — *Pour que la projection de $H_{(-a+\infty)}$ sur $H_{(-\infty a)}$ coïncide avec $H_{(-\infty a)} \cap H_{(-a+\infty)}$, il faut et il suffit que $g\bar{g}^{-1}e_{2a}$ soit une fonction intérieure.*

COROLLAIRE. — *Soit*

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|^2},$$

*où* Q ($z$) *est un polynôme n'ayant pas de zéros dans* Im $z > 0$, $d$ Q $\geqq 1$. *Alors la distance de* $e_s$ *à* $H^{\mu}_{(-a+a)}$, $\mu \in \Lambda_{(a)}$ *est maximale pour la mesure* $f\,dx$ *et pour* $a \leqq s \leqq 3\,a$.

PROPOSITION 7 ([1]). — *Soit* $f\,dx$ *une mesure de probabilité vérifiant*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Log} f(x)).(1+x^2)^{-1}\,dx > 0.$$

*Alors il existe une infinité de mesure de probabilité* $\mu$ *vérifiant* $\hat{\mu}(u) = \hat{f}(u)$, $|u| \leqq 2\,a$, *et pour tout* $a > 0$.

*Exemple.* — Supposons $r(t) = e^{-|t|}$, pour $|t| \leqq 2\,a$. On peut la prolonger par R $(t) = e^{-|t|}$ sur tout R. La mesure spectrale associée est $f(x) = (\pi(1+x^2))^{-1}\,dx$. Il existe une infinité de prolongements en dehors de $[-2\,a+2\,a]$. La plus mauvaise prédiction pour les corrélations R $\in$ R $\{r \mid a\}$ est atteinte pour R $(t) = e^{-|t|}$, si $s$ est compris entre $a$ et $3\,a$. Considérons la correlation $\hat{\mathrm{F}}(t)$ définie par

$$\hat{\mathrm{F}}(t) = e^{-|t|}, \qquad |t| \leqq 2\,a;$$

$$\hat{\mathrm{F}}(t) = -e^{-2a}\,t + e^{-2a}(1+2\,a), \quad 2\,a \leqq |t| \leqq 2\,a+1 \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathrm{F}}(t) = 0, \quad |t| \geqq 2\,a+1,$$

alors la distance de $e_s$ à

$$\mathrm{H}^{\mathrm{F}}_{(-a+a)}\left(\hat{\mathrm{F}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\,\mathrm{F}(t)\,dt\right)$$

est égale à 1 pour $s > 4\,a+1$, et strictement supérieure à la distance de $e_s$ à $\mathrm{H}_{(-a+a)}$ [qui vaut $(1-e^{-2(s-a)})^{1/2}$]. Cet exemple montre que la propriété ci-dessus de corrélation R $(t) = e^{-|t|}$ cesse d'être vraie pour $s \geqq 4\,a+1$.

(*) Séance du 16 février 1976.

([1]) D. DACUNHA-CASTELLE, *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 4480.
([2]) M. G. KREIN, *C. R. (Doklady) Acad. Sc. de l'U.R.S.S.*, 26, n° 1, 1940.
([3]) M. G. KREIN, *On Basic Approximation Problem in Theory of Extrapolation and Filterin Process* (traduction anglaise dans *Selected Transl. Math. Statist. Prob.*, 4, 1964, p. 127-131).
([4]) N. LEVINSON et H. P. MCKEAN, Jr., *Acta. Math.*, 112, 1964, p. 98-143.

1, *square Gabriel-Fauré*,
92160 *Antony*.

ILLINOIS JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 22, Number 3, September 1978

# PREDICTION D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE DU SECOND ORDRE DE COVARIANCE CONNUE SUR UN INTERVALLE FINI

PAR

A. SEGHIER

Soit $X(t)$ un processus stationnaire du 2$^e$ ordre connu sur $(-a, a)$, on suppose qu'on peut lui associer une infinité de corrélations $R$ coïncidant sur $(-2a, 2a)$. On se propose d'une part, de prédire $X(s)$, pour $R$ donnée, par rapport à $\{X(u): |u| \leq a\}$ et d'autre part de déterminer la corrélation $R$ qui donne la plus mauvaise des prédictions.

## Introduction

1. On se donne une densité de probabilité $f$ vérifiant:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty.$$

Soit $L_f^2(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions $\phi$, définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs complexes, telles que $|\phi(x)|^2$ soit intégrable par rapport à la mesure $f \,.\, dx$.

Soit $a, b, -\infty \leq a \leq b \leq \infty$, on note par $H_{(a\,b)}$, l'espace de Hilbert engendré dans $L_f^2(\mathbf{R})$ par l'ensemble des combinaisons linéaires

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{it_n x}, \quad a_n \in \mathbf{C},\ t_n \in \mathbf{R} \text{ et } a \leq t_n \leq b,$$

et soit $e_s$ la fonction $x \to e^{isx}$, $e_s \in L_f^2(\mathbf{R})$.

Dans la première partie on déterminera la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, $s > a$.

Avec une condition sur le poids $f$, on calculera dans la seconde partie, la projection de $e_s$ sur le sous-espace $H_{(-a\,a)}$ (qui coïncidera avec $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, $a > 0$).

On donnera dans la troisième partie des exemples de calculs de projections et une application à un problème d'extremum, à savoir, connaissant la covariance d'un processus stationnaire du 2$^e$ ordre $X(t)$ sur l'intervalle $(-a\ a)$ trouver parmi tous les processus stationnaires ayant la même covariance sur $(-2a\ 2a)$, celui qui donne la plus mauvaise prédiction pour $s > a$.

2. Le problème de la projection d'un élément $e_s$ sur le sous-espace $H_{(-a\,a)}$ a été étudié par M. G. Krein [8]. La solution qui en est donnée nécessite la connaissance de solutions d'un problème de Sturm-Liouville inverse.

Received July 14, 1975; received in revised form November 23, 1977.

Y. A. Rozanov [10] a étudié ce problème et donne une solution explicite dans le cas où le poids $f$ est une fraction rationnelle. Enfin Dym et McKean [2] obtiennent la solution de ce problème (pour une large classe de poids) en utilisant la théorie de de Branges des espaces de Hilbert de fonctions entières.

Le but de ce travail est de montrer que l'étude de la structure du sous-espace $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$ donne, entre autres conséquences, une solution explicite de la projection de $e_s$ sur $H_{(-a\, a)}$ pour une très large classe de poids $f$. Ce qui constitue la généralisation de la solution explicite donnée par Y. A. Rozanov pour des fractions rationnelles. Les méthodes, toutefois, sont différentes.

Celles que nous utilisons sont basées sur les propriétés des fonctions analytiques dans le demi-plan et un théorème de Paley-Wiener.

3. Relation avec la prédiction d'un processus stationnaire du 2$^e$ ordre. (Voir Dym et McKean [2, p. 300–302].)

Soit $X(t)$, $t$ réel, un processus du second ordre stationnaire de corrélation $r$:

$$r(s-t) = \int_\Omega X(t)X(s)\, dP, \quad r(0) = 1.$$

On suppose la corrélation $t \to r(t)$ continue, on a $r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\, d\mu(t)$, où $\mu$ est une probabilité.

La représentation obtenue nous permettra d'interpréter la prédiction de $X(s)$, connaissant $X(t)$, $t \in T$ et $s \notin T$, en termes de projection de $e_s$ sur le sous-espace $H_{(-a\, a)}$ avec $T = (-a\ a)$.

Un processus sans partie déterministe est caractérisé par les mesures $d\mu = f\,.\,dx$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty \quad \text{avec}\, f(x) = f(-x) > 0 \text{ p.p.}$$

Le sujet de cet article a été proposé par Monsieur le Professeur Dacunha-Castelle.

## I. Projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$

Soit $f(x) > 0$ p.p. et vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty. \tag{1}$$

On note par $\hat{h} = \mathscr{F}h$ la transformée de Fourier de $h \in L^2(\mathbf{R})$ et définie par

$$\hat{h} = \lim_{A \to +\infty} \psi_A \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}), \quad \text{avec } \psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{+A} h(t) e^{-itx}\, dx$$

et par $\bar{g}$ la fonction

$$x \to \overline{g(e^{ix})}.$$

On sait que $\mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(\mathbf{R})$ sur $L^2(\mathbf{R})$.

$H^{2+}$ et $H^{2-}$ sont des sous-espaces fermés de $L^2(\mathbf{R})$ définis par

$$H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbf{R}),\ \hat{h}(u) = 0 \text{ p.p.},\ u \leq 0\},$$
$$H^{2-} = \{h \in L^2(\mathbf{R}),\ \hat{h}(v) = 0 \text{ p.p.},\ v \geq 0\}.$$

On a d'autre part $L^2(\mathbf{R}) = H^{2+} \oplus H^{2-}$.

Les deux propositions suivantes sont classiques.

PROPOSITION 1 [3, p. 18–20]. *Soit $f$ une fonction vérifiant les conditions* (1) *ci-dessus. Alors il existe une fonction $g$ (dite extérieure) vérifiant,*

(i) $|g(x)|^2 = f(x)$ p.p.,
(ii) $g \in H^{2+}$,
(iii) $g \cdot H_{(0\ \infty)} = H^{2+}$.

Soit $\mathscr{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, $\mathscr{F}^{-1}$ sa réciproque et $1_{\mathbf{R}_-}$ l'indicatrice de $\mathbf{R}_- = \{x \in \mathbf{R},\ x \leq 0\}$.

PROPOSITION 2 (Szegö [6]). *Soit $g$, avec $|g|^2 = f$, vérifiant les conditions de la proposition* 1 *et $\phi_s$ la projection de $e_s$, $s > 0$, sur $H_{(-\infty\ 0)} = \bar{g}^{-1}H^{2-}$, alors*

$$\phi_s = \bar{g}^{-1}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(e_s\bar{g})1_{\mathbf{R}_-}).$$

*Démonstration.* La projection $\phi_s$ de $e_s$ vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_s - e_s|^2(x)|g|^2(x)\,dx = \min_{\phi \in H_{(-\infty\ 0)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi - e_s|^2(x)|g|^2(x)\,dx$$

ou encore, en tenant compte de $H_{(-\infty\ 0)} = \bar{g}^{-1}H^{2-}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_s \cdot \bar{g} - e_s \cdot \bar{g}|^2(x)\,dx = \min_{\bar{g}\cdot\phi \in H^{2-}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi \cdot \bar{g} - e_s \cdot \bar{g}|^2(x)\,dx.$$

La dernière expression montre que $\phi_s \cdot \bar{g}$ est la projection (dans $L^2(\mathbf{R})$) de $\phi_s \cdot \bar{g}$ sur $H^{2-}$.

D'après la définition de $H^{2-}$ et du fait que $\mathscr{F}$ soit une isométrie de $L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\mathscr{F}(\phi_s \cdot \bar{g}) = \text{projection de } \mathscr{F}(e_s \cdot \bar{g}) \text{ sur } \mathscr{F}(H^{2-}) = \mathscr{F}(e_s \cdot \bar{g}) \cdot 1_{\mathbf{R}_-}$$

d'où la proposition.

La proposition 2 permet de résoudre le problème de la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\ 0)}$ (et plus généralement sur $H_{(-\infty\ a)}$, $a \geq 0$, $s > a$).

Il reste à étudier le cas de $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$.

LEMME 1. *Soit $f$ donnée et $g$ associée à $f$ par la proposition* 1. *Soit $P_a$ le projecteur orthogonal de $L_f^2(\mathbf{R})$ sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$.*

*Alors, pour $s > a$, il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$ dans $L^2(\mathbf{R})$ telles que*

(i) $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$,
(ii) $P_a e_s = e_s + \lim_{n\to\infty} (e_{-a} \cdot g^{-1} \cdot \theta_{1,n} + e_a \cdot \bar{g}^{-1}\theta_{2,n})$.

*Démonstration.* On a la relation d'orthogonalité suivante:

$$(H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)})^{\perp} = \overline{(H^{\perp}_{(-\infty\, a)} + H^{\perp}_{(-a\, \infty)})}.$$

$P_a e_s - e_s$ étant orthogonal à $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, il existe une suite

$$(h_{1,n})_{n\geq 0},\ h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\, a)}$$

et une suite

$$h_{2,n},\ h_{2,n} \in H^{\perp}_{(-a\, \infty)}$$

telles que

$$P_a(e_s) - e_s = \lim_{n\to+\infty} (h_{1,n} + h_{2,n}).$$

D'après la proposition 1:

$$H_{(-\infty\, a)} = e_a \cdot H_{(-\infty\, 0)} = e_a \cdot \bar{g}^{-1} \cdot H^{2-}$$
$$H_{(-a\, \infty)} = e_{-a} \cdot H_{(0\, \infty)} = e_{-a} g^{-1} \cdot H^{2+}.$$

Donc pour tout $n$,

$$(h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\, a)}) \quad\Leftrightarrow\quad (h_{1,n} \cdot e_{-a} \cdot \bar{g} \in H^{2+})$$

et

$$(h_{2,n} \in H^{\perp}_{(-a\, \infty)}) \quad\Leftrightarrow\quad (h_{2,n} \cdot e_a \cdot g \in H^{2-})$$

En posant $\theta_{1,n} = h_{2,n} \cdot e_a \cdot g$ et $\theta_{2,n} = h_{1,n} \cdot e_{-a} \cdot \bar{g}$, on obtient (i) et (ii).

Nous allons établir deux relations qui caractérisent les suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$.

LEMME 2. *Soit $P$ (resp. $Q$) le projecteur de $L^2(\mathbf{R})$ sur $H^{2+}$ (resp. sur $H^{2-}$), $(\theta_{1,n})_{n\geq 0}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 0}$ les deux suites du lemme 1 et $s > a$. On a les relations suivantes:*

$$\lim_{n\to+\infty} (\theta_{1,n} + Q(e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta_{2,n})) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (P(e_{-2a} \cdot \bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta_{1,n} + e_{s-a} \cdot \bar{g}) + \theta_{2,n}) = 0.$$

*Démonstration.* Soit $P_a e_s \in H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$ la projection de $e_s$ sur cet espace, on a

$$P_a e_s \in e_a \cdot \bar{g}^{-1} \cdot H^{2-} \quad \text{et} \quad P_a e_s \in e_{-a} \cdot g^{-1} \cdot H^{2+}$$

d'après la proposition 1, d'où

$$P((P_a e_s) \cdot e_{-a} \cdot \bar{g}) = 0 \quad \text{et} \quad Q((P_a e_s) \cdot e_a g) = 0.$$

On a d'autre part, pour $s > a$, $Q(g \cdot e_{s+a}) = 0$. En remplaçant $P_a e_s$ par son expression du lemme 1, on obtient les deux relations annoncées.

*Remarque.* Dans le cas $s \leq -a$, on obtient des relations analogues en remplaçant $\theta_{1,n}$ par $\theta_{2,n}$ et vice et versa.

Introduisons quelques notations: Soit $M$ l'opérateur linéaire de $H^{2+}$ dans $H^{2-}$ défini par

$$M: \theta \to Q(e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta)$$

et soit $M^*$ l'opérateur linéaire de $H^{2-}$ dans $H^{2+}$ défini par

$$M^*: \theta \to P(e_{-2a} \cdot \bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta)$$

on notera par $\|h\| = (\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 \, dx)^{1/2}$ et $\|k\|_f = (\int_{-\infty}^{+\infty} |k(x)|^2 f(x) \, dx)^{1/2}$.

PROPOSITION 3. *Soit $b_s = -P(\bar{g} \cdot e_{s-a})$, $s > a$. On suppose $I - M^*M$ inversible, alors:*

(i) $P_a e_s = e_s - e_{-a} g^{-1} \cdot M(I - M^*M)^{-1} b_s + e_a \bar{g}^{-1} (I - M^*M)^{-1} b_s$,

(ii) $\|P_a e_s\|_f^2 = 1 + \|M \cdot (I - M^*M)^{-1} b_s\|^2 - \|(I - M^*M)^{-1} b_s\|^2$.

*Démonstration.* Montrons (i). $P_a e_s$ s'écrit, d'après le lemme 1,

$$P_a e_s = e_s + \lim_{n \to \infty} (e_{-a} \cdot g^{-1} \theta_{1,n} + e_a \bar{g}^{-1} \theta_{2,n})$$

où $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$.

D'après le lemme 2, on a

$$\lim_{n \to \infty} (\theta_{1,n} + M\theta_{2,n}) = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} (\theta_{2,n} - M^*\theta_{1,n}) = b_s,$$

soit encore

$$\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} + \alpha_n \quad \text{pour tout } n, \text{ avec } \alpha_n \in H^{2-} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$$

et

$$\theta_{2,n} + M^*\theta_{1,n} = b_s + \beta_n \quad \text{pour tout } n, \text{ avec } \beta_n \in H^{2+} \text{ et } \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0,$$

d'où

$$(I - M^*M)\theta_{2,n} = b_s + \beta_n - M^*\alpha_n.$$

Comme $(I - M^*M)^{-1}$ existe et est borné sur $H^{2+}$ par hypothèse,

$$\lim_{n \to +\infty} \theta_{2,n} = (I - M^*M)^{-1} b_s + \lim_{n \to +\infty} (I - M^*M)^{-1}(\beta_n - M^*\alpha_n).$$

On a d'autre part $\|M^*\| = \|M\| \leq 1$, il s'ensuit que

$$\lim_{n \to +\infty} (\beta_n - M^*\alpha_n) = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \theta_{2,n} = (I - M^*M)^{-1} b_s$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \theta_{1,n} = -\lim_{n \to \infty} M\theta_{2,n} = -M \lim_{n \to \infty} \theta_{2,n}.$$

Prouvons (ii). Posons $\theta_1 = \lim_{n \to +\infty} \theta_{1,n}$ et $\theta_2 = \lim_{n \to \infty} \theta_{2,n}$, on a

$$\begin{aligned} \|P_a e_s - e_s\|_f^2 &= 1 - \|P_a e_s\|_f^2 \\ &= \|e_{-a} g^{-1} \theta_1 + e_a \bar{g}^{-1} \theta_2\|_f^2 \\ &= \|\theta_1\|^2 + \|\theta_2\|^2 + 2R_e(\theta_1, \theta_2 e_{2a} g[\bar{g}]^{-1}). \end{aligned}$$

Comme $\theta_1 = -Q(\theta_2 e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1})$, on obtient $R_e(\theta_1, \theta_2 e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}) = -\|\theta_1\|^2$ d'où

$$\|P_a e_s\|_f^2 = 1 + \|\theta_1\|^2 - \|\theta_2\|^2$$

ce qui donne (ii).

Dans ce qui suit nous allons donné des conditions suffisantes sur le rapport $g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ pour que $M^*M$ soit inversible. Soit $b \geq 0$, supposons que $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = e_b J B^{-1}$ où $J$ est une fonction intérieure et $B$ un produit de Blaschke donné par

$$B(\lambda) = \prod \left( \frac{1 - \lambda/\lambda_n}{1 - \lambda/\bar{\lambda}_n} \right)^{p_n + 1}$$

avec $\operatorname{Im} \lambda_n > 0$, $p_n$ des entiers positifs ou nuls, $n = 1, 2, \ldots$.

Soient $\theta$ un élément de $H^{2-}$, $\tilde{\theta}$ la projection orthogonale de $\bar{J}\theta$ sur $H^{2-} \ominus \bar{B}H^{2-}$ et $\tilde{R}$ l'opérateur de $H^{2-}$ dans $H^{2+} \ominus BH^{2+}$ défini par $\tilde{R} \cdot \theta = B \cdot \tilde{\theta}$.

Posons $a' = 2a + b$ et $U_{a'}$ l'opérateur de $H^{2+} \ominus BH^{2+}$ dans lui-même défini par $U_{a'}\psi = P(e_{-(2a+b)}\psi)$ où $\psi \in H^{2+} \ominus BH^{2+}$ et $P$ la projection orthogonale de $L^2(\mathrm{R})$ sur $H^{2+}$. Soit $M^*$ l'opérateur défini précédemment par

$$M^*\theta = P(e_{-2a}\bar{g} \cdot [g]^{-1} \cdot \theta) = P(e_{-a'} \cdot J^{-1} B \cdot \theta),$$

on vérifie que $M^*\theta = U_{a'} \tilde{R}\theta$ pour tout $\theta \in H^{2+}$.

Notons par $\Lambda$ l'ensemble de zéros de $B$ ($\lambda_n, n = 1, 2, \ldots$), $L^2(\Lambda)$ le sous-espace de $L^2(0\ \infty)$ engendré par les fonctions $\xi_n$ définies par $\xi_n(x) = x^{p_n} e^{i\lambda_n x}$ $(x \geq 0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Notons enfin par $T_{a'}$ l'opérateur de $L^2(\Lambda)$ dans lui-même défini par $(T_{a'}\xi)(x) = \xi(x + a')$ pour $x \geq 0$ $(a' > 0)$ et $(T_{a'}\xi)(x) = 0$ pour $x < 0$.

D'après la remarque de P. Lax [7] l'image de $L^2(\Lambda)$ par la transformation de Fourier, notée $\mathscr{F}$, est l'espace $H^{2+} \ominus BH^{2+}$. On a d'autre part $U_{a'} = \mathscr{F} T_{a'} \mathscr{F}^{-1}$. Comme $\mathscr{F}$ est une isométrie de $L^2(0\ \infty)$ sur $H^{2+}$, $U_{a'}$ est compact si et seulement si $T_{a'}$ est compact.

Nous avons ainsi le théorème:

THEOREME (P. Koosis [7]). *L'opérateur $T_{a'}$ est compact pour tout $(a' > 0)$ si et seulement si*

$$\lim_{|\sigma|\to\infty} \sum \frac{(p_n+1)\operatorname{Im}\lambda_n}{|\lambda_n-\sigma|^2} = 0, \quad \sigma \text{ réel et } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\lambda_n = \infty.$$

COROLLAIRE. *On suppose que les zéros de $B(\lambda)$ vérifie les conditions du théorème précédent. Alors*

(i) *$M^*M$ est un opérateur compact de $H^{2+}$,*
(ii) *$\|M^*M\| < 1$ et $I - M^*M$ est inversible.*

*Preuve.* (i) D'après le théorème de P. Koosis $T_{a'}$ est un opérateur compact donc aussi $U_{a'}$, d'autre part $M^*M = U_{a'}\tilde{R}M$ où $RM$ est un opérateur continu $(\|\tilde{R}M\| \leq 1)$ de $H^{2+}$ dans $H^{2+} \ominus BH^{2+}$, donc $M^*M$ est un opérateur compact.

(ii) $M^*M$ est un opérateur auto-adjoint positif. Comme c'est un opérateur compact sa norme est égale à sa plus grande valeur propre. On aura donc $\|M^*M\| < 1$ si toute valeur propre de $M^*M$ est strictement inférieur à 1.

En effet, soit $\phi_0 \in H^{2+}$ et supposons que l'on ait

$$\|M\phi_0\| = \|Q(e_{2a}g \cdot [\bar{g}]^{-1}\phi_0)\| = \|\phi_0\|.$$

Comme $Q$ est un projecteur orthogonal, cela implique que $\theta = e_{2a}g[\bar{g}]^{-1}\phi_0 \in H^{2-}$. On a alors

$$(\bar{g}\theta)^\wedge(u) = (e_{2a}\cdot g\phi_0)^\wedge(u) = (g\phi_0)^\wedge(u-2a) = 0$$

pour presque tout $u \geq 0$. On a d'autre part $(g\phi_0)^\wedge(v) = 0$ pour presque tout $v \leq 0$, d'où $(g\phi_0)^\wedge(v) = 0$ presque partout. Comme $g \cdot \phi_0 \in L'(\mathbf{R})$ et $g \neq 0$ presque partout on obtient $\phi_0 = 0$ presque partout. On a donc $\|M\phi\| < \|\phi\|$ et $\|M^*M\phi\| < \|\phi\|$ pour tout $\phi \in H^{2+}$.

## II. Consequences de I

PROPOSITION 4. *Pour que la projection de $H_{(-a\,\infty)}$ sur $H_{(-\infty\,a)}$ coïncide avec $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$, il faut et il suffit que $g \cdot [\bar{g}]^{-1}e_{2a}$ soit une fonction intérieure, i.e., la restriction sur $\mathbf{R}$ d'une fonction $\phi$ telle que*

(i) *$z \to \phi(z)$ soit analytique dans* $\operatorname{Im} z > 0$,
(ii) $|\phi(z)| \leq |\phi(x)| = |g(x)\cdot[\bar{g}]^{-1}(x)e^{2iax}| = 1$ p.p. *avec $z = x + iy$ et* $\operatorname{Im} z \geq 0$, *et* $\phi(x) = \lim_{y\to 0} \phi(x+iy)$ p.p.

*Démonstration.* 1. Soit $b_s$ la fonction définie dans la proposition 3 par $b_s = -P(\bar{g}e_{s-a})$. La condition $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$ est nécessaire pour que la projection de $H_{(-a\,\infty)}$ sur $H_{(-\infty\,a)}$ coïncide avec $H_{(-\infty\,a)} \cap H_{(-a\,\infty)}$: il revient au même de voir ce fait pour un élément $e_s$, $s \geq a$.

Supposons que $P_a e_s$ coïncide avec la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)}$, $(s \geq a)$, alors $M(b_s) = 0$. En effet en tenant compte du fait que $P_a e_s - e_s$ est orthogonal à $H_{(-\infty\, a)} = e_a \cdot \bar{g}^{-1} H^{2-}$, on obtient $\theta_{2,n} = -b_s$ pour tout $n$ et $\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} = M(b_s) = 0$ pour tout $n$, ($\theta_{1,n}$ et $\theta_{2,n}$ sont les fonctions du lemme 1).

2. Supposons $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$, alors $g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a}$ est une fonction intérieure. En effet la condition $M(b_s) = Q(g[\bar{g}]^{-1} e_{2a} b_s) = 0$ implique

$$g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} b_s \in H^{2+} \quad \text{pour tout } s \geq a. \tag{1}$$

Notons par $\mathcal{M}$ le sous-espace ferme de $L^2(\mathbf{R})$ engendré par le système $\{b_s\}_{s \geq a}$. On a $\mathcal{M} = H^{2+}$.

En effet, par définition $b_s = -P(\bar{g} \cdot e_{s-a}) \in H^{2+}$, donc $\mathcal{M} \subset H^{2+}$. D'autre part soit $\phi \in H^{2+}$ orthogonal à $\mathcal{M}$, on a

$$(b_s, \phi) = (\bar{g} e_{s-a}, \phi) = 0 \quad \text{pour } s \geq a. \tag{2}$$

Mais comme $g$ est extérieure, le système $\{\bar{g} e_u\}$ $u \leq 0$ engendre $H^{2-}$, d'où $(\bar{g} e_u, \phi) = 0$, pour $u \leq 0$. Il s'ensuit de (2) que $(\bar{g} e_u, \phi) = 0$ pour tout $u \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire $(g \cdot \phi)^\wedge(u) = 0$ pour presque tout $u$, comme $g \cdot \phi \in L^1(\mathbf{R})$ et $g \neq 0$ p.p., on a $\phi = 0$ p.p., d'où $\mathcal{M} = H^{2+}$.

D'après (1) on a aussi

$$g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} \cdot \mathcal{M} = g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a} H^{2+} \subset H^{2+}.$$

Comme $|(g \cdot [\bar{g}]^{-1} e_{2a})(x)| = 1$ p.p., d'après un théorème de Beurling, c'est une fonction intérieure.

3. Si $e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ est une fonction intérieure alors $M(b_s) = 0$ pour $s \geq a$. Il suffit en effet de remarquer que $e_{2a} \cdot g[\bar{g}]^{-1} b_s \in H^{2+}$.

4. Supposons que $M(b_s) = 0$ pour $s \geq a$, d'après 2, $e_{2a} \cdot g \cdot [\bar{g}]^{-1} \theta \in H^{2+}$ pour tout $\theta \in H^{2+}$, donc $M(\theta) = 0$. Il s'ensuit d'après le lemme que $\theta_{1,n} = -M\theta_{2,n} = 0$ et, $\theta_{2,n} = -b_s$ et $P_a e_s = e_s + e_a[\bar{g}]^{-1} b_s$, c'est-à-dire la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)}$.

En résumé on a:

(i) la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)}$ coïncide avec $P_a e_s$ pour $s \geq a$,
(ii) $M(b_s) = 0$ pour tout $s \geq a$,
(iii) $e_{2a} g \cdot [\bar{g}]^{-1}$ fonction intérieure,

avec (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

*Remarque.* La proposition 4 constitue une généralisation d'un résultat de Levinson et McKean [9].

## IIIA. Quelques exemples de calculs de projection

Dans cette partie, nous allons donner des résultats explicites de calculs de projections sur le sous-espace $H_{(-a\, a)}$ pour des conditions assez faibles sur le poids $f$.

Nous noterons par $M_c$ l'opérateur $M$ de la partie $I$, ($c \geq 0$), i.e.,

$$M_c\colon \theta \to Q(e_{2c}g \cdot [\bar{g}]^{-1} \cdot \theta).$$

THEOREME (H. Dym [4]). *Soit $f^{-1}$ localement sommable, alors*

(1) $$H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = \bigcap_{\varepsilon > 0} H_{(-a-\varepsilon\, a+\varepsilon)} \quad \textit{pour tout } a \geq 0.$$

*Si de plus $\|M_c\| < 1$ pour un nombre $c \geq 0$, alors*

(2) $$H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)} \quad \textit{pour tout } a > c.$$

Ce théorème est la généralisation d'un résultat de l'auteur dans un manuscrit non publié.

COROLLAIRE 1. *Soit $f(x) = |\phi(x)|^{-2}$ où $g = e_c\phi^{-1}$ est une fonction extérieure et $\phi$ une fonction entière de type exponentiel $\leq c$. Alors pour tout $a > c$, la projection de $e_s$ ($s \geq a$) sur $H_{(-a\, a)}$ est donnée par*

$$P_a e_s = e_s - e_{a-c} \cdot \bar{\phi} P(e_{s+c-a}\bar{\phi}^{-1}),$$

$$\|P_a e_s\|_f^2 = 1 - \int_0^{s-a} |(e_{s+c-a}\bar{\phi}^{-1})^\wedge(u)|^2\, du$$

*Preuve.* $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ est une fonction intérieure d'après le lemme 2.1 [5]. D'après le théorème de Dym [4] et le corollaire du théorème de Koosis, on a $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)}$. L'expression de la projection de $e_s$ sur $H_{(-a\, a)}$ découle enfin de la proposition 4.

COROLLAIRE 2. *Soit $f(x) = |R(x)/\phi(x)|^2$ où $g = R \cdot [e_c\phi]^{-1}$ est une fonction intérieure, $\phi$ une fonction entière de type exponentiel $\leq c$ et $R$ un polynôme dont les zéros $w_1, \ldots, w_n$ sont dans le demi-plan* Im $z < 0$, *de multiplicités $r_1, \ldots, r_n$.*

*Alors pour tout $a > c$, la projection de $e_s$ ($s \geq a$) sur $H_{(-a\, a)}$ est de la forme*

$$P_a(e_s)(x) = e^{isx} - \frac{e^{iax}}{\bar{g}(x)}\left(P \cdot (\bar{g}e_{s-a})(x) + \sum_1^n \frac{1}{x - w_k} Q_k\left(\frac{1}{x - w_k}\right)\right)$$
$$+ \frac{e^{-iax}}{g(x)} \sum_1^n \frac{1}{x - \bar{w}_k} R_k\left(\frac{1}{x - \bar{w}_k}\right)$$

*Preuve.* $g \cdot [\bar{g}]^{-1} = R \cdot [\bar{R}]^{-1} e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ où $R[\bar{R}]^{-1}$ est l'inverse d'un produit de Baschke et $e_{2c}\bar{\phi}/\phi$ est une fonction intérieure d'après le lemme 2.1 [5]. D'après les mêmes remarques que dans la preuve du corollaire 1 on a $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} = H_{(-a\, a)}$ et la projection de $e_s$ sur cet espace est donnée par la proposition 3. L'expression de la projection dans le corollaire s'obtient enfin par un calcul de résidus.

*Exemple* 1. Projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

on obtient.

$$P_a(e_s)(x) = \left(1 + i(i-1)\frac{x-i}{x-1}(s-a)\right) e^{-(s-a)} e^{iax}.$$

*Remarque* 1. On a dans ce cas $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)} \neq H_{(-a\, a)}$, car $P_a(e_s)$ n'est pas analytique (on sait que tous les éléments de $H_{(-a\, a)}$ sont de type exponentiel, de paramètre inférieur ou égal à $a$; voir [9]. Cela est dû au fait que $f^{-1}(x)$ admet un pôle en $x = 1$ (donc non localement sommable).

*Exemple* 2. Projection de $e_s$ sur $H_{(-a\, a)}$

$$f(x) = \frac{2}{5\pi} \frac{x^2+4}{(x^2+1)^2};$$

$f^{-1}(x)$ étant localement sommable d'après le corollaire 2 la projection de $e_s$ sur $H_{(-a\, a)}$ est aussi la projection sur $H_{(-\infty\, a)} \cap H_{(-a\, \infty)}$, les calculs donnent

$$P_a(e_s)(x)$$

$$= A(s) \cdot \frac{(x+i)^2}{x^2+4} e^{-ixa} + \left(e^{-(s-a)}\left(1 + (s-a)\frac{x-i}{x-2i}\right) + B(s) \cdot \frac{(x-i)^2}{x^2+4}\right) \cdot e^{ixa}$$

où

$$A(s) = -\frac{36(s-a)e^{-(s-a)} \cdot e^{-4a}}{81 - e^{-8a}} \quad \text{et} \quad B(s) = -\frac{e^{-4a}}{9} A(s).$$

### IIIB. Application à un problème d'extremum

(1) Position du problème. Soit $f$ une fonction positive presque partout, sommable telle que $f\,dx$ soit une probabilité sur $\mathbf{R}$ et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2} dx > -\infty.$$

On considère une famille de mesures de probabilités $\mu$ sur $\mathbf{R}$, vérifiant

$$\text{(i)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut}\, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} f(t)\, dt, \quad |u| \leq 2a,\ a > 0.$$

De telles mesures existent et diffèrent de $f \cdot dx$, un procédé de construction est donné dans [1], on ne les obtient pas toutes cependant.

On note par $H^{\mu}_{(-a\, a)}$ le sous-espace fermé de $L^2_\mu(\mathbf{R})$ engendré par $\{e_u, |u| \leq a\}$ ($e_u(x) = e^{ixu}$). Un nombre $s > a$ étant donné, on cherchera parmi les mesures $\mu$

vérifiant (i), celle pour laquelle la distance de $e_s$ à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ dans $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ est maximum.

Des résultats peuvent être donnés pour une famille particulière de poids et pour $s$, $a \leq s \leq 3a$.

(2) D'après la proposition 1, si $f$ vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty,$$

alors il existe $g$ telle que $|g|^2(x) = f(x)$ p.p. et $\hat{g}(u) = 0$, $u \leq 0$.

La norme d'un élément $\psi$ de $L^2_{\mu}(\mathbf{R})$ sera notée $\|\psi\|_{\mu}$.

PROPOSITION 5. *Soit $c$, $0 \leq c < a$. On suppose $f^{-1}$ localement sommable et $g \,.\, [\bar{g}]^{-1} e_{2c}$ une fonction intérieure. Alors pour tout $s$ tel que $a \leq s < 3a - 2c$ la distance de $e_s$ à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ est maximum pour $f \,.\, dx$.*

*Démonstration.* 1. L'hypothèse $g[\bar{g}]^{-1}e_{2c}$ intérieure entraîne que l'opérateur $M_c$ est nul sur $H^{2+}$ (autrement dit $\|M_c\| = 0$), comme de plus on suppose $f^{-1}$ localement sommable, on a, d'après le théorème de Dym [4],

(1) $$H_{(-\alpha\,\alpha)} = H_{(-\infty\,\alpha)} \cap H_{(-\alpha\,\infty)} \quad \text{pour } \alpha > c.$$

D'après la proposition 4, $g[\bar{g}]^{-1}e_{2\alpha}$ étant aussi intérieure ($\alpha > c$), la projection de $e_s$ sur $H_{(-\alpha\,\alpha)}$ est égale à la projection de $e_s$ sur $H_{(-\infty\,\alpha)}$.

2. Soient $\alpha$, $0 \leq c < \alpha \leq a$ et $s \geq a$; on a

$$\min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{\phi \in H_{(a-2\alpha\,a)}} \|e_s - \phi\|_f.$$

En effet d'après 1,

$$\min_{\phi \in H_{(a-2\alpha\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{e_{\alpha-a}\phi \in H_{(-\alpha\,+\alpha)}} \|e_{s-a+\alpha} - e_{\alpha-a}\phi\|_f,$$

$$\min_{e_{\alpha-a}\cdot\phi \in H_{(-\alpha\,\alpha)}} \|e_{s-a-\alpha} - e_{\alpha-a}\phi\|_f = \min_{e_{a-\alpha}\;\in H_{(-\infty\,a)}} \|e_s - e_{a-\alpha}\psi\|_f.$$

Ce qui donne toujours d'après 1,

$$\min_{\phi \in H_{(-\alpha\,a)}} \|e_s - \phi\|_f = \min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|e_s - \phi\|_f.$$

Il s'ensuit que la projection de $e_s$ sur $H_{(-a\,a)}$ est égale à la projection de $e_s$ sur $H_{(a-2\alpha\,a)}$.

3. La distance de $e_s$ à $H^{\mu}_{(-a\,a)}$ est maximum pour $f \,.\, dx$. Soit $0 < c < \alpha \leq a$. On a, pour $a < s \leq 3a - 2\alpha$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s \right\|_{\mu} = \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s \right\|_f$$

avec $a_1, \ldots, a_N \in \mathbf{C}$ et $a - 2\alpha \leq t_n \leq a$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

En effet

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s\right\|_\mu^2 = \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_\mu^2 + 1 - 2\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu .$$

Comme $\hat{\mu}(t) = \hat{f}(t)$ pour $|t| \leq 2a$, on a d'une part

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_\mu^2 &= \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 1\leq m\leq N}} a_n \bar{a}_m \hat{\mu}(t_n - t_m)\\ &= \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 1\leq m\leq N}} a_n \bar{a}_m \hat{f}(t_n - t_m)\\ &= \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}\right\|_f^2;\end{aligned}$$

d'autre part,

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu = \sum_{n=1}^{N} a_n \hat{\mu}(t_n - s)$$

avec $|t_n - s| \leq 2a$ par hypothèse, donc $\hat{\mu}(t_n - s) = \hat{f}(t_n - s)$, $n = 1, \ldots, N$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_\mu = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n}, e_s\right)_f$$

ce qui prouve l'égalité ci-dessus.

D'après 1, on a

$$\min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|\phi - e_s\|_f = \min \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_{t_n} - e_s\right\|_f$$

pour toute suite de nombres complexes $a_1, \ldots, a_N$ et pour toute suite $t_1, \ldots, t_N$ de nombres vérifiant $a - 2\alpha \leq t_n \leq a$, $n = 1, \ldots, N$.

Tenant compte de l'égalité ci-dessus on obtient

$$\min_{\in H^\mu_{(-a\,a)}} \|\psi - e_s\|_\mu \leq \min_{\phi \in H_{(-a\,a)}} \|\phi - e_s\|_f$$

pour toute probabilité $\mu$ vérifiant $\hat{\mu}(t) = \hat{f}(t)$, $|t| \leq 2a$, ce qui prouve la proposition.

COROLLAIRE. *Soit $f(x) = 1/|Q(x)|^2$, où $Q(z)$ est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et n'ayant pas de zéros dans* Im $z \geq 0$. *Alors la distance de $e_s$ à $H^\mu_{(-a\,a)}$, pour toutes les mesures de probabilité vérifiant $\hat{\mu}(u) = \hat{f}(u)$, $|u| \leq 2a$, est maximum pour la mesure $f \,.\, dx$ et pour $a \leq s < 3a$.*

*Exemple.* Soit $r(t) = e^{-|t|}$ la corrélation d'un processus stationnaire connue sur $(-2a\; 2a)$. On peut la prolonger par $R(t) = e^{-|t|}$ sur tout **R**. La mesure spectrale associée est $f(x)\,dx = \pi(1 + x^2)^{-1}\,dx$. Il existe une infinité de prolon-

25/ 26



gements de $R(t)$ en dehors de $(-2a\ 2a)$. La distance de $e_s$ à $H^{\mu}_{(-a\ a)}$, où $\mu$ parcourt l'ensemble des mesures vérifiant $\hat{\mu}(t) = e^{-|t|}$, $|t| \leq 2a$, est maximum pour la mesure $f\,.\,dx$.

Soit maintenant une autre corrélation $\hat{F}(t)$, prolongeant $e^{-|t|}$ sur $(-2a\ 2a)$ et définie par

$$\begin{aligned} \hat{F}(t) &= e^{-|t|}, & |t| &\leq 2a, \\ &= 0, & |t| &\geq 2a + \varepsilon, \\ &= -e^{-2a}|t| + e^{-2a}(\varepsilon + 2a), & 2a \leq |t| &\leq 2a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour $s \geq 3a + \varepsilon$, la distance de $e_s$ à $H^F_{(-a\ a)}$, $(\hat{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} F(x)\, dx)$ est égale à 1, donc strictement supérieure à la distance de $e_s$ à $H^f_{(-a\ a)}$. Cet exemple montre que la propriété ci-dessus (corollaire) cesse d'être vraie pour $s \geq 3a + \varepsilon$.

## Bibliographie


1. D. Dachuna-Castelle, *Remarque sur un problème de M. Paul Levy*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 259 (1964), p. 4480.
2. H. Dym et H. P. McKean, *Application of Granges spaces of integral functions to the prediction of stationary Gaussian processes*, Illinois J. Math., vol. 14 (1970), pp. 299–343.
3. ———, *Extrapolation and interpolation of stationary Gaussian processes*, Ann. of Math. Statistics, vol. 41 (1970), pp. 1817–1844.
4. H. Dym, *A problem in trigonometric approximation theory*, à paraître.
5. ———, *Trzce formulas for a class of Toeplitz-like operators*, Israel J. Math., vol. 27 (1977), pp. 21–48.
6. U. Grenander et G. Szegög, *Toeplitz forms and their applications*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958, pp. 196–198.
7. P. Koosis, *Interior compact spaces of functions on a half-line*, Comm. Pure Appl. Math., vol. 10 (1957), pp. 583–615.
8. M. C. Krein, *On basic approximation problem in theory of extrapolation and filtering process*, Traduction anglaise dans Selected Transl. Math. Statis. Prob., vol. 4 (1964), pp. 127–131.
9. N. Levinson et H. P. McKean, Jr., *Weighted trigonometrical approximation on $R^1$*, Acta Math., vol. 112 (1964), pp. 98–143.
10. Y. A. Rozanov, *Stationary process*, Prigmatgiz Moskva, 1963, Traduction anglaise par A. Feinstein, Holden Day, San Francisco, 1967, pp. 135–142.


Universite de Paris-Sud
Orsay, France

PROBABILITÉS. — *Prédiction linéaire et opérateur de Hankel.* Note (*) de **Abdellatif Seghier**, transmise par Robert Fortet.

Soient $\mu = f.dx$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $\mathcal{H}_E$ le sous-espace de Hilbert de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ engendré par la famille d'exponentielles $\{e_t;\ t \in E\}$. On suppose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Log} f(x))(1+x^2)^{-1}\, dx > -\infty.$$

Le projecteur orthogonal $P_E$ de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_E$ est explicité en fonction d'une série d'opérateurs de Hankel dans le cas où

$$E = ]-\infty, -b] \cup [b, +\infty[ \qquad (b \geqq 0).$$

*Let* $\mu = f.dx$ *a probability measure on* $\mathbb{R}$, E *a subspace of* $\mathbb{R}$ *and* $\mathcal{H}_E$ *the Hilbert subspace of* $L^2_\mu(\mathbb{R})$ *spanned by the set of functions* $\{e_t,\ t \in \mathbb{R}\}$, *where* $e_t(x) = e^{itx}$.
*We suppose that*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Log} f(x))(1+x^2)^{-1}\, dx > -\infty.$$

*The orthogonal projector from* $L^2_\mu(\mathbb{R})$ *on* $\mathcal{H}_E$ *is given by an expansion of Hankel operators, when*

$$E = ]-\infty, -b] \cup [b, \infty[ \qquad (b \geqq 0).$$

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — Soit $L^2_\mu(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mu$-mesurables définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes et de carré intégrable. On notera $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $\mu = dx$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ [lorsque $\mu = f.dx$, on note $L^2_\mu(\mathbb{R}) = L^2_f(\mathbb{R})$].

La fonction $f$ vérifiant la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{Log} f(x)](1+x^2)^{-1}\, dx > -\infty,$$

peut s'écrire :

$$f(x) = |g(x)|^2 \text{ p.p.}$$

avec $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{g} = \mathcal{F} g$; $\hat{g}(u) = 0$ pour presque tout $u \leqq 0$ [$\mathcal{F}$ étant la transformation de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$].

On note par $\mathbb{H}^{2+} = \{h \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{h}(u) = 0$, pour presque tout $u \leqq 0\}$ et par $\mathbb{H}^{2-} = \{h \in L^2(\mathbb{R}) / \hat{h}(v) = 0$ pour presque tout $v \geqq 0\}$.

On peut choisir $g$ telle que $\mathbb{H}^{2+} = g.\mathcal{H}_{(0,\infty)}$ (resp. $\mathbb{H}^{2-} = \bar{g}\mathcal{H}_{(-\infty,0)}$). Soient $P_E$ le projecteur orthogonal de $L^2_f(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}_E$, P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^{2+}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^{2-}$ (*voir* [2], p. 82-120 ou [3]).

Soit $\Phi \in L^\infty(\mathbb{R})$, l'opérateur de Hankel $H_\Phi$ associé à $\Phi$ est défini par un opérateur de $\mathbb{H}^{2+}$ dans $\mathbb{H}^{2-}$

$$\theta \to H_\Phi(\theta) = Q(\Phi.\theta), \qquad \forall \theta \in \mathbb{H}^{2+}.$$

On définit par $\tilde{H}_{\bar{\Phi}}$ (l'opérateur « conjugué » de $H_\Phi$) de $\mathbb{H}^{2-}$ dans $\mathbb{H}^{2+}$ par

$$\Psi \to \tilde{H}_{\bar{\Phi}}(\Psi) = P(\Phi.\Psi), \qquad \forall \Psi \in \mathbb{H}^{2-}.$$

On notera $e_t$ la fonction $x \to e_t(x) = e^{itx}$.

2. On considèrera l'opérateur $I-\tilde{H}_{\bar{\Phi}} H_{\Phi}$ qui sera auto-adjoint et positif sur $\mathbb{H}^{2+}$, et un inverse de « type faible » de cet opérateur permet de résoudre le problème de la projection de $L^2(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{H}_E$; $E=]-\infty, -b]\cup[b, +\infty[$. Nous allons d'abord établir un lemme sur une propriété d'opérateurs auto-adjoints T sur un espace de Hilbert, opérateurs qui seront bornés et tels que $I-T$ soit surjectif.

Lemme 2.1. — *Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert*, T *un opérateur auto-adjoint, borné et tel que* $\|T\|=1$. *On suppose que l'on ait* $\|T\Phi\|<\|\Phi\|$, *pour tout* $\Phi\neq 0$ *de* $\mathscr{H}$. *Dans ces conditions, on a*

$$\lim_{n\to\infty}\|(I-T)(I+T+\ldots+T^n)\Phi-\Phi\|=\lim_{n\to\infty}\|T^{n+1}\Phi\|=0$$

*pour tout* $\Phi$ *de* $\mathscr{H}$.

Si $\|T\|<1$, cette propriété est vraie et facile à démontrer.

3. Projection de $L^2_f(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{H}_E$, avec $E=]-\infty, -b]\cup[b, +\infty[, b>0$. — On remarque d'abord que $\mathscr{H}_E=\overline{H_{]-\infty,-b]}\cup H_{[b,\infty[}}$.

Signalons dans [2], une approximation de l'opérateur $P_E$ par des puissances d'opérateurs $Q^n$, $n\to\infty$.

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1. — *Soit* $\Psi$ *un élément de* $L^2_f(\mathbb{R})$. *Pour qu'un élément de* $\mathscr{H}_E$ *noté* $P_b(\Psi)$ *soit la projection orthogonale de* $\Psi$ *sur ce sous-espace, il faut et il suffit qu'il existe deux suites* $(\theta_{1,n})_{n\geq 1}$ *et* $(\theta_{2,n})_{n\geq 1}$, *avec* $\theta_{1,n}\in\mathbb{H}^{2-}$ *et* $\theta_{2,n}\in\mathbb{H}^{2+}$ *telles que :*

(i) $\lim_{n\to\infty}(e_{-b}\bar{g}^{-1}\theta_{1,n}+e_b g^{-1}\theta_{2,n})$ *existe dans* $L^2_f(\mathbb{R})$;

(ii) $\lim_{n\to\infty}(\theta_{2,n}+P(e_{-2b}g\bar{g}^{-1}.\theta_{1,n})=P(e_{-b}g\Psi)$;

(iii) $\lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n}+Q(e_{2b}\bar{g}g^{-1}\theta_{2,n})=Q(e_b\bar{g}\Psi)$.

Dans ces conditions la projection est donnée par la limite dans (i).

On notera

$$\Phi_b=e_{2b}\bar{g}g^{-1}\qquad\text{et}\qquad H_{\Phi_b}:\ Q(\Phi_b\theta)=H_{\Phi_b}(\theta),\quad \theta\in\mathbb{H}^{2+}$$

l'opérateur de Hankel associé, on a le résultat suivant :

Proposition 3.1. — *Soit* $d\mu=f.dx$, *où* $f$ *vérifie les conditions dans* 1. *Alors le projecteur orthogonal* $P_b$ *de* $L^2_f(R)$ *sur* $\mathscr{H}_E$ *est donné par le développement suivant :*

$$P_b(\Psi)=\lim_{n\to\infty}(e_{-b}\bar{g}^{-1}\tilde{W}_n(\Psi)+e_b g^{-1}W_n(\Psi)),\qquad \Psi\in L^2_f(\mathbb{R}),$$

*où* $\tilde{W}_n(\Psi)=Q(e_b\bar{g}\Psi)-H_{\Phi_b}(W_n(\Psi))$,

$$W_n(\Psi)=(I+\ldots+(\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b}H_{\Phi_b})^n)G(\Psi)$$

*et* $G(\Psi)=P(g e_{-b}\Psi)-\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b}Q(\bar{g}e_b\Psi)$.

Corollaire 3.1.1. — *Si* $\|\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b}H_{\Phi_b}\|<1$, *alors* $I-\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b}H_{\Phi_b}$ *est inversible et la projection d'un élément* $\Psi$ *de* $L^2_f(\mathbb{R})$ *sur* $\mathscr{H}_E$ *est donnée par*

$$P_b(\Psi)=e_{-b}\bar{g}^{-1}\tilde{W}(\Psi)+e_b g^{-1}W(\Psi),$$

*où*

$$W(\Psi)=(I-\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b} H_{\Phi_b})^{-1}(G(\Psi)),$$
$$\tilde{W}(\Psi)=Q(e_b \bar{g}\Psi)-\tilde{H}_{\Phi_b}(W(\Psi))$$

*et*

$$G(\Psi)=P(e_{-b} g\Psi)-\tilde{H}_{\bar{\Phi}_b}(Q(e_b \bar{g}\Psi)).$$

COROLLAIRE 3.1.2. — *Si* $\Phi_b=e_{2b}\bar{g}g^{-1}$ *est une fonction intérieure alors* $H_{\Phi_b}=0$ *et pour tout* $\Psi\in L^2_f(\mathbb{R})$, *la projection de* $\Psi$ *sur* $\mathcal{H}_E$ *est donnée par*

$$P_b(\Psi)=e_{-b}\bar{g}^{-1} Q(e_b \bar{g}\Psi)+e_b g^{-1} P(e_{-b} g\Psi).$$

*Remarque.* — Nous ne pouvons, faute de place, donner des résultats analogues concernant la projection orthogonale sur $\mathcal{H}_{(-\infty,a)}\cap\mathcal{H}_{(-a,\infty)}$. De tels résultats généralisent et complètent la solution du problème abordé dans [3].

(*) Remise le 21 avril 1980.

[1] V. M. ADAMYAN et D. Z. AROV, *Theory of Probability and its Applications* (traduit du Russe), 13, 1968.
[2] H. DYM et H. P. MCKEAN, *Gaussian Process, Functions Theory, and the Inverse Spectral Problem*, Academic Press, New York, London.
[3] A. SEGHIER, *Ill. J. Math.*, 22, n° 3, septembre 1978.

*Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay,*
*Mathématique*, Bât. 425, 91405 *Orsay*.

# *PREDICTION LINEAIRE ET OPERATEUR DE HANKEL*

*A. SEGHIER*

Let $\mu = f\cdot dx$ a probability mesure on $\mathbb{R}$, $E$ is a subspace of $\mathbb{R}$ and $H_E$ the Hilbert subspace of $L^2_\mu(\mathbb{R})$ spanned by the set of functions $\{e_t,\ t \in E\}$, where $e_t(x) = e^{itx}$.
We suppose that $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{Log}\, f(x))\,(1 + x^2)^{-1}\, dx > -\infty$. The orthogonal projector from $L^2_\mu(\mathbb{R})$ on $H_E$ is given by an expansion of Hankel operators, when $E = ]-\infty\ -b]$ U $[b\ +\infty[$, $b > 0$.

Soit $\mu = f\cdot dx$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, $E$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $H_E$ le sous-espace de Hilbert de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ engendré par la famille d'exponentielles $\{e_t,\ t \in E\}$, où $e_t(x) = e^{itx}$.
On suppose $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{Log}\, f(x))\,(1 + x^2)^{-1}\, dx > -\infty$. Le projecteur orthogonal $P_E$ de $L^2_\mu(\mathbb{R})$ est explicité en fonction d'une série d'opérateurs de Hankel, en particulier dans le cas où $E = ]-\infty\ -b]$ U $[b\ +\infty[$, $b > 0$.

## I. - NOTATIONS ET DEFINITIONS

Soit $L^2_\mu(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mu$-mesurables définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes et de carré intégrable. On notera $L^2(\mathbb{R})$ lorsque $\mu = dx$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (et lorsque $\mu = f\cdot dx$, on notera $L^2_\mu(\mathbb{R}) = L^2_f(\mathbb{R})$.
La fonction f vérifiant la condition $\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathrm{Log}\, f(x))\,(1 + x^2)^{-1}\, dx > -\infty$
peut s'écrire $f(x) = |g(x)|^2$ pp.

avec $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\hat{g} = \mathcal{F} g$ ; $\hat{g}(u) = 0$ pour presque tout $u \leq 0$. ($\mathcal{F}$ étant la transformée de Fourier-Plancherel sur $L^2(\mathbb{R})$).

On note par $H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbb{R})\ /\ \hat{h}(u) = 0$, pour presque tout $u \leq 0\}$ et par $H^{2-} = \{h \in L^2(\mathbb{R})\ /\ \hat{h}(v) = 0$, pour presque tout $v \leq 0\}$.

On peut choisir g telle que $H^{2+} = g\cdot H_{(0\ \infty)}$ (resp. $H^{2-} = \bar{g}\, H_{(-\infty\ 0)}$).

Soit $P_E$ le projecteur orthogonal de $L^2_f$ $(\mathbb{R})$ sur $H_E$, P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $H^{2+}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2$ $(\mathbb{R})$ sur $H^{2-}$ (voir [2] pages 82-120).

Soit maintenant $\phi \in L^\infty$ $(\mathbb{R})$, l'opérateur de Hankel $H_\phi$ associé à $\phi$ et défini par un opérateur de $H^{2+}$ dans $H^{2-}$ :

$$\theta \to H_\phi\ (\theta) = Q\ (\phi.\theta), \qquad \forall\ \theta \in H^{2+}.$$

On définit par $\tilde{H}_{\bar{\phi}}$ (l'opérateur "conjugué" de $H_\phi$) de $H^{2-}$ dans $H^{2+}$ par :

$$\psi \to \tilde{H}_{\bar{\phi}}\ (\psi) = P(\bar{\phi}\ \psi), \qquad \forall\ \ \psi \in H^{2-}.$$

On notera enfin $e_t$ la fonction $\quad x \to e_t(x) = e^{itx}$, $t \in$ R.

<u>II. - On considèrera</u> l'opérateur $I - \tilde{H}_{\bar{\phi}}\, H_\phi$ qui sera auto-adjoint et positif sur $H^{2+}$, et un inverse de type "faible" de cet opérateur permet de résoudre le problème de la projection de $L^2_\mu$ $(\mathbb{R})$ sur E ; $E = \left]-\infty - b\right] \cup \left[b +\infty\right[$ et $E = (-a, a)$ avec une condition d'inversibilité forte (extrapolation).

Nous allons d'abord établir un lemme sur une propriété d'opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert, opérateurs qui seront bornés et tels que I - T soient surjectifs.

<u>Lemme 2.1</u>.

Soit H un espace de Hilbert. T un opérateur auto-adjoint borné tel que $||T|| = 1$. On suppose que l'on ait $||T\phi|| < ||\phi||$ pour tout $\phi \neq 0$ de H. Dans ces conditions on a :

$$\lim_{n\to\infty}\ ||(I-T)(I+T+\ldots+T^n)\phi - \phi|| = \lim_{n\to\infty}\ ||T^{n+1}\phi|| = 0$$

pour tout $\phi$ de H.

(Si $||T|| < 1$, on sait que cette propriété a lieu uniformément par rapport à $\phi$).

Preuve :

Le fait que $||T|| = 1$, i.e. $I \pm T$ non-inversible sur H, prouve que +1 et -1 appartiennent au spectre de l'opérateur (qui est auto-adjoint). D'autre part, la condition $||T\phi|| < ||\phi||$, pour tout $\phi$ non nul entraîne que les valeurs propres de T (s'il en existe) sont en module inférieurs strictement à 1.

Une version du théorème spectral [ ] établit l'existence et l'unicité d'une résolution de l'identité $\{P_\lambda\}$, $\lambda \in \sigma(T)$ (spectre de T) telle que l'on ait pour tout $\psi$ et $\phi \in H$ :

$$(T\,\phi,\psi) = \int_{\sigma(T)} \lambda \; d\,(P_\lambda\,\phi,\,\psi)$$

où $d\,(P_\lambda\,\phi,\,\psi)$ est une mesure complexe de support $\sigma\,(T)$. Nous avons en particulier :

$$(T\,\phi,\phi) = \int_{\sigma(T)} \lambda \; d\,(P_\lambda\,\phi,\,\phi) \qquad \text{et}$$

$$||T^n\,\phi||^2 = (T^{2n}\,\phi,\,\phi) = \int_{\sigma(T)} \lambda^{2n} \; d\,(P_\lambda\,\phi,\phi).$$

où $d\,(P_\lambda\,\phi,\phi)$ est une mesure positive.

Comme -1 et +1 ne sont pas des valeurs propres de T, on a $P_\lambda(\{1\}) = P_\lambda(\{-1\}) = 0$ [4, ], ce qui veut dire que pour tout $\phi \neq 0$, les points $\{+1\}$ et $\{-1\}$ sont des mesures nulle pour $d\,(P_\lambda\,\phi,\phi)$.

Ainsi, $\sigma(T) \subset [-1\ +1]$ et $\lambda^{2n}$ tend vers 0 presque partout, par rapport à $d\,(P_\lambda\,\phi,\,\phi)$ quand $n \to \infty$. D'autre part la constante 1 est intégrable sur $\sigma\,(T)$ par rapport à $d\,(P_\lambda\,\phi,\phi\,)$ et $|\lambda^{2n}| \leq 1$ sur $\sigma\,(T)$. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue s'applique et on a pour tout $\phi$ de H :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} \lambda^{2n} \; d\,(P_\lambda\,\phi,\,\phi) = \int_{\sigma(T)} (\lim \lambda^{2n}) \; d\,(P_\lambda\,\phi,\,\phi) = 0$$

on en déduit :

$$\lim_{n\to\infty} \|(I-T)(I+\dots+T^n)\,\phi \quad \phi\| = \lim_{n\to\infty} \|T^{n+1}\phi\| = 0$$

pour tout $\phi$ de H. Ce qui prouve le lemme.

## III. - PROJECTION ORTHOGONALE SUR $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$.

On suppose que la mesure spectrale $f\,dx$ vérifie $\int \frac{\operatorname{Log} f(x)}{1+x^2}\,dx > -\infty$ et soit $a \geq 0$.
On peut écrire d'après 1 :

$$H_{(-a\ \infty)} = e_{-a}\, g^{-1}\, H^{2+} \quad \text{et} \quad H_{(-\infty\ a)} = e_a\, \bar{g}^{-1}\, H^{2-}.$$

Le lemme suivant caractérise la projection d'un élément $\psi$ de $L_f^2$ (R) sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$. On notera $P_a$ le projecteur de $L_f^2$ (R) sur le sous-espace.

**Lemme 3.1.**

Soit $\psi$ un élément de $L_f^2$ (R). Pour qu'un élément de $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ +\infty)}$ qu'on notera $P_a(\psi)$, soit la projection de $\psi$ sur ce sous-espace, il faut et il suffit qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})$, $(\theta_{2,n})$ dans $L^2$ ($\mathbb{R}$) ; $\theta_{1,n} \in H^{2-}$, $\theta_{2,n} \in H^{2+}$, $n = 1, 2, \dots$ telles que :

(i) $$\lim_{n\to\infty} \left(e_{-a}\, g^{-1}\, \theta_{1,n} + e_a\, \bar{g}^{-1}\, \theta_{2,n}\right) \text{ existe dans } L^2\ (\mathbb{R})$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \left(\theta_{1,n} + Q\,(e_{2a}\, g\, \bar{g}^{-1}\, \theta_{2,n})\right) = -\,Q\,(e_a\, g\, \psi)$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty} P\,(e_{-2a}\, \bar{g}\, g^{-1}\, \theta_{1,n}) + \theta_{2,n}) = -\,P\,(e_{-a}\, \bar{g}\, \psi)$$

La projection de $\psi$ est alors donnée par :

$$P_a(\psi) = \psi + \lim_{n\to\infty} \left(e_{-a}\, g^{-1}\, \theta_{1,n} + e_a\, \bar{g}^{-1}\, \theta_{2,n}\right)$$

**Preuve :**

a) La condition est nécessaire :

Supposons que $P_a(\psi)$ soit la projection orthogonale de $\psi$ (dans $L_f^2(\mathbb{R})$) sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)} = (e_{-a}\bar{g}^{-1} H^{2+}) \cap (e_{-a} g^{-1} H^{2+})$, ou encore que $P_a(\psi)$ appartient à ce sous-espace et $P_a(\psi)-\psi$ appartient à son orthogonal.

Comme $(H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)})^{\perp} = \overline{(H^{\perp}_{(-\infty\ a)} + H^{\perp}_{(-a\ \infty)})}$, il existe deux suites $(h_{1,n})$, $(h_{2,n})$ de $L_f^2(\mathbb{R})$, $h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\ a)} = (e_a \bar{g}^{-1} H^{2-})^{\perp}$ et $h_{2,n} = H^{\perp}_{(-a\ \infty)} = (e_{-a} g^{-1} H^{2+})^{\perp}$, $n = 1,2\ldots$ telles que $P_a(\psi) - \psi = \lim\limits_{n\to\infty} (h_{1,n} + h_{2,n})$.

Mais on a $(h_{1,n} \in H^{\perp}_{(-\infty\ a)}) \Leftrightarrow (h_{1,n}\, e_{-a}\, \bar{g} \in H^{2+})$ et $(h_{2,n} \in H^{\perp}_{(-a\ \infty)}) \Leftrightarrow (h_{2,n}\, e_a\, g \in H^{2-})$.

En posant $\theta_{1,n} = h_{2,n}\, e_a\, g$ et $\theta_{2,n} = h_{1,n}\, e_{-a}\, \bar{g}$, on a la condition (1).

Montrons (ii) et (iii).

D'après (i), $P_a(\psi) = \psi + \lim\limits_{n\to\infty} (e_{-a}\, g^{-1}\, \theta_{1,n} + e_a\, \bar{g}^{-1}\, \theta_{2,n})$, mais $P_a(\psi)$ appartient à $H_{(-\infty\ a)} = e_a\, \bar{g}^{-1} H^{2-}$ et à $H_{(-a\ \infty)} = e_{-a} g^{-1} H^{2+}$ ce qui équivaut à $e_a\, g\, P_a(\psi) \in H^{2+}$ et $e_{-a}\, \bar{g}\, P_a(\psi) \in H^{2-}$.

En tenant compte de l'expression de $P_a(\psi)$ on a :

$$0 = P\,(e_{-a}\, \bar{g}\, P_a(\psi)) = P\,(e_{-a}\psi\, \bar{g}) + \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} P\,(e_{-2a}\, \bar{g}\, g^{-1}\, \theta_{1,n} + \theta_{2,n}).$$

$$0 = Q\,(e_a\, g\, P_a(\psi)) = Q\,(e_a\, \psi\, g) + \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} (\theta_{1,n} + Q\,(e_{2a} g\, \bar{g}^{-1}\, \theta_{2,n})$$

On obtient ainsi les expressions (ii) et (iii).

La condition est suffisante :

Supposons qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 1}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 1}$ vérifiant (i), (ii) et (iii) alors :

α) $P_a(\psi) = \psi + \lim\limits_{n\to\infty} (e_{-a}g^{-1}\theta_{1,n} + e_a\bar{g}^{-1}\theta_{2,n})$ est dans $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$,

en effet :

$$Q\ (e_a\ g\ P_a(\psi)) = Q\ (e_a\ g\ \psi) + Q\ (\lim_{n\to\infty} (\theta_{1,n} + e_{2a}\ g.\bar{g}^{-1}\ \theta_{2,n}))$$

et comme $Q\ (e_a\ g\ P_a(\psi)) = Q\ (e_a\ \psi\ g) + \lim\limits_{n\to\infty} (\theta_{1,n} + Q(e_{2a}\ g.\bar{g}^{-1}\ \theta_{2,n}))$.

De même on a :

$$P\ (e_{-a}\bar{g}\ P_a(\psi)) = P\ (e_{-a}\ \psi\ \bar{g}) + \lim_{n\to\infty} (P(e_{-2a}\bar{g}\ g^{-1}\ \theta_{1,n}) + \theta_{2,n}).$$

D'après les conditions (ii) et (iii) du lemme, on a :

$$Q\ (e_a g\ P_a\ (\psi)) = P(e_{-a}\ \bar{g}\ P_a\ (\psi)) = 0$$

ce qui équivaut à $e_a\ g\ P_a(\psi) \in H^{2+}$ et $e_{-a}\bar{g}\ P_a\ (\psi) \in H^{2-}$

On a vu dans (i) que cela équivalait à $P_a\ (\psi) \in H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$

β) $P_a(\psi) - \psi$ est orthogonal à $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$

En effet, $P_a(\psi) - \psi = \lim\limits_{n\to\infty} (e_{-a}\ g^{-1}\ \theta_{1,n} + e_a\ \bar{g}^{-1}\ \theta_{2,n})$, or

$e_{-a}g^{-1}\theta_{1,n} \in e_{-a}g^{-1}H^{2-} = H^{\perp}_{(-a\ \infty)}$ et $e_a\bar{g}^{-1}\theta_{2,n} \in e_a\bar{g}^{-1}H^{2+} = H^{\perp}_{(-\infty\ a)}$

donc $P_a(\psi) - \psi = \overline{H^{\perp}_{(-\infty\ a)} + H^{\perp}_{(-a\ \infty)}} = (H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)})^{\perp}$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Nous allons établir une proposition qui explicitera l'opérateur de projection de l'opérateur de Hankel et de son conjugué, soit :

$$H_{\phi_a}(\psi) = Q\,(\phi_a\,\psi) = Q\,(e_{2a} g.\bar{g}^{-1}\,\psi), \quad \forall\, \psi \in H^{2+}$$

$$\tilde{H}_{\phi_a}(\psi) = P\,(\bar{\phi}_a\,\psi) = P\,(e_{-2a}\bar{g}g^{-1}\,\psi), \quad \forall\, \psi \in H^{2-}$$

Proposition 3.1.

La mesure $d\mu = f.dx$ vérifiant les conditions dans 1, le projecteur $P_a$ de $L^2_f(\mathbb{R})$ sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$ est donné par un développement en série d'opérateurs.

$$P_a(\psi) = \psi + \lim_{n\to\infty} (e_{-a} g^{-1}\, U_n(\psi) + e_a \bar{g}^{-1}\, V_n(\psi)), \qquad \forall\, \psi \in L^2_f\,(\mathbb{R}),$$

où $\quad U_n(\psi) = -\, H_{\phi_a}\,(V_n(\psi)) - Q\,(e_a\, g.\psi)$

et $\quad V_n(\psi) = -\,(I + \tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a} + \ldots\ldots + (\tilde{H}_{\bar{\phi}_a}\, H_{\phi_a})^n)\,(b(\psi))$

$n = 1, 2, \ldots.$

et $\quad$ où $\quad b\,(\psi) = \tilde{H}_{\bar{\phi}_a}(Q(e_a\, g\,\psi)) - P\,(\bar{g}\, e_{-a}\,\psi).$

Preuve

$P_a\,(\psi)$ est la projection de $\psi$ sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$ si et seulement si les suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 1} = (U_n(\psi))_{n\geq 1}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 1} = V_n(\psi)$ vérifient les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 3.1. Remarquons que puisque $|\phi_a(x)| = 1$ p.p., $||\tilde{H}_{\phi_a}\; H_{\phi_a}|| \leq 1$.

Etape 1 $\quad$ Supposons que $||\tilde{H}_{\bar{\phi}_a}\; H_{\phi_a}|| = 1.$

L'opérateur $I - \tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a}$ (qui est auto-adjoint positif) n'est pas inversible. Mais on a , $||\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a}\theta|| < ||\theta||$ pour tout $\theta$ de $H^{2+}$, $\theta \neq 0$, en effet supposons qu'il existe un élément $\theta_o$ de $H^{2+}$ tel que $||\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a} \theta_o|| = ||\theta_o||$. Comme $||\theta_o|| = ||\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a} \theta_o|| \leq ||H_{\phi_a} \theta_o|| \leq ||\theta_o||$, on en déduit que $||H_{\phi_a}\theta_o|| = ||\theta_o||$ ou encore $||Q(\phi_a \theta_o)|| = ||\phi_a \theta_o||$. L'opérateur Q étant un projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur $H^{2-}$, on obtient $\theta = \phi_a \theta_o \in H^{2-}$. Comme d'autre part $\phi_a = e_{2a} g . \bar{g}^{-1}$ on a $(e_{2a}\, g\, \theta_o)^{\wedge}(u) = (g\theta_o)^{\wedge}(u-2a) = (\bar{g}\, \theta)^{\wedge}(u)$ , or pour tout $u \geq 0$ $(\bar{g}\theta)^{\wedge}(u) = 0$ (car $\bar{g} \in H^{2-}$ et $\theta \in H^{2-}$). Il s'ensuit que $(g\theta_o)^{\wedge}(v) = 0$ quel que soit $v \geq -2a$.

D'un autre côté, comme g et $\theta_o \in H^{2+}$, on a $(g\theta_o)^{\wedge}(v) = 0$ pour tout $v \leq 0$ ; il s'ensuit que $(g\theta_o)^{\wedge}(v) = 0$ pour presque tout $v \in \mathbb{R}$. Enfin comme $g\theta_o \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \neq 0$ presque partout, car $g \in H^{2+}$, on obtient $\theta_o = 0$ presque partout. On a ainsi l'inégalité stricte annoncée ci-dessus.
L'opérateur $\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a}$ vérifie donc les conditions du lemme (2.1.) ($H = H^{2+}$ et $\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a} = T$).

<u>Etape 2</u>

Posons maintenant pour tout $\psi \in L^2_f(\mathbb{R})$ et $n \geq 1$.

$$V_n(\psi) = -(I + \tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a} + \ldots + (\tilde{H}_{\overline{\phi_a}} H_{\phi_a})^n)(P(e_{-a}\bar{g}\psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi_a}}(Q(e_a g\psi)))$$

$$U_n(\psi) = -H_{\phi_a} V_n(\psi) - Q(e_a\, g\, \psi)$$

Par construction, la suite $U_n(\psi)$ vérifie :

$$U_n(\psi) + H_{\phi_a} V_n(\psi) = Q(e_a\, g\, \psi), \qquad \forall\, n \geq 1$$

Cela est vrai quand n tend vers l'infini et la condition (ii) du lemme est vérifiée ($U_n(\psi) = \theta_{1,n}$, $V_n(\psi) = \theta_{2,n}$).

Considérons maintenant pour tout $n \geq 1$, l'expression

$$V_n(\psi) + \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} U_n(\psi) = (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a}) V_n(\psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} Q(e_a g\psi)$$

En remplaçant $U_n(\psi)$ et $V_n(\psi)$ par leurs expressions ci-dessus et en appliquant le lemme 2.1. à $\tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a}$ on obtient, en posant $b(\psi) = - P(e_{-a}\overline{g}\,\psi) + \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} Q(e_a g\psi)$

$$\lim_{n\to\infty} (V_n(\psi) + \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} U_n(\psi)) = \lim (I-\tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a})(\sum_{q=o}^{n} (\tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a})^q b(\psi)) -\tilde{H}_{\overline{\phi}_a}(Q(e_a g\psi))$$

$$= \lim_{n\to\infty} (I -(\tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a})^{n+1}) b(\psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi}_a}(Q(e_a\, g\, \psi))$$

$$= b(\psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi}_a} (Q(e_a g\psi)) = P(e_{-a}\overline{g}\,\psi)$$

la condition (iii) du lemme est donc vérifiée.

Pour montrer que $P_a(\psi)$ est la projection de $\psi$ il reste à vérifier la condition (i) du lemme (où l'on pose $\theta_{1,n} = U_n(\psi)$ et $\theta_{2,n} = V_n(\psi)$).

Etape 3

La limite de la suite $e_{-a}\, g^{-1}\, U_n(\psi) + e_a\, \overline{g}^{-1}\, V_n(\psi)$ existe pour tout $\psi \in L^2_f(\mathbb{R})$.

En effet, remarquons d'abord que la limite de suite ci-dessus et $\lim_{n\to\infty} (U_n(\psi) + \phi_a V_n(\psi))$ existent simultanément dans $L^2_f(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$. Comme par hypothèse $U_n(\psi) + H\phi_a V_n(\psi) = - Q(e_a\, g\, \psi)$, quel que soit n la deuxième limite considérée ci-dessus existe si et seulement si $\lim_{n\to\infty} P(\phi_a V_n(\psi))$ existe.

Montrons que $\lim_{n\to\infty} P(\phi_a(V_n(\psi)))$ existe (pour chaque $\psi \in L^2(\mathbb{R})$).

Soient m et n des entiers positifs quelconques (on suppose $n > m$ pour fixer les idées), on a :

$$||P(\phi_a V_n(\psi)) - P(\phi_a V_m(\psi))||^2 = ||\phi_a(V_n - V_m)\psi||^2 - ||Q(\phi_a(V_n - V_m)(\psi))||^2$$

Remarquons que :

$$||Q(\phi_a(V_n-V_m)(\psi))||^2 = ||H_{\phi_a}(V_n - V_m)(\psi)||^2 = (H_{\phi_a}(V_n - V_m)(\psi), H_{\phi_a}(V_n - V_m)(\psi))$$

$$= ((V_n - V_m)(\psi), \tilde{H}_{\phi_a} H_{\phi_a} (V_n - V_m)(\psi))$$

Il s'ensuit que :

$$||P(\phi_a V_n(\psi)) - P_{\phi_a} V_m(\psi))||^2 = ((V_n-V_m)(\psi), (I-\tilde{H}_{\phi_a}H_{\phi_a})(V_n - V_m)(\psi))$$

$$= (\sum_{m+1}^{n} (\tilde{H}_{\phi_a} H_{\phi_a})^q b(\psi), (I-\tilde{H}_{\phi_a} H_{\phi_a})(\sum_{m+1}^{n} (\tilde{H}_{\phi_a} H_{\phi_a})^q) b(\psi))$$

D'après le théorème spectral sur les opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert [ 3, pages ], on peut associer à l'opérateur positif $\tilde{H}_{\phi_a}H_{\phi_a}$ (auto-adjoint) une fonction $h \in L^\infty_\nu(X)$ (où $H^{2+}$ est isométrique à $L^2_\nu(X)$, $\nu$ étant une mesure positive), avec $0 \leq h < 1$ $\nu$.p.p Car $\|\tilde{H}_{\phi_a} H_{\phi_a} \theta\| < \theta$, $\forall \theta \in H^{2+}$ et $\theta \neq 0$ . associe à la fonction $b(\psi)$ de $H^{2+}$ son image dans $L^2_\nu(X)$, notée $k$, par l'isométrie du théorème spectral. On a alors :

$$||P(\phi_a V_n(\psi)) - P(\phi_a V_m(\psi))||^2 = \int_X \left(\frac{h^{n+1} - h^{m+1}}{1 - h}\right)^2 |k|^2 \, d\nu$$

$$\leq \int_X \frac{h^{2(n+1)}}{1 - h} |k|^2 \, d\nu + \int_X \frac{h^{2(m+1)}}{1 - h} |k|^2 \, d\nu$$

Comme $0 \leq h < 1$ $\nu$ - pp, $\lim_{q\to\infty} h^q = 0$ $\nu$ - pp.

Si $\int_X \frac{|k|^2}{1-h} d\nu < +\infty$, alors le théorème de la convergence dominée, les deux dernières intégrales tendent vers 0 lorsque m et n tendent vers l'infini et donc $\lim_{n\to\infty} P(\phi_a V_n(\psi))$ existe.

## Etape 4

On a $\int_X \frac{|k|^2}{1-h} d\nu < +\infty$

Comme la projection d'un élément $\psi \in L_f^2(\mathbb{R})$ sur le sous-espace $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$ existe (théorème des projections). La condition nécessaire du lemme 3.1. établit l'existence de deux suites qu'on notera ici $(\tilde{\theta}_{1,n})$ et $(\tilde{\theta}_{2,n})$ et qui vérifait les conditions (i), (ii) et (iii). En particulier, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} P(\phi_a \tilde{\theta}_{2,n})$ existe, c'est-à-dire :

$$(*)\quad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} ||P(\phi_a\tilde{\theta}_{2,n}) - P(\phi_a\tilde{\theta}_{2,m})||^2 = \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} (\tilde{\theta}_{2,n} - \tilde{\theta}_{2,m}, (I-\tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a})(\tilde{\theta}_{2,n} - \tilde{\theta}_{2,m})) = 0$$

En associant $\alpha_n \in L_\nu^2(X)$ à $\tilde{\theta}_{2,n}$ le théorème spectral transforme l'expression (*) en :

$$(**)\quad \lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \int_X |\alpha_n - \alpha_m|^2 (1-h)\, d\nu = 0.$$

Ce qui signifie que $\alpha_n(1-h)^{1/2}$ tend vers une fonction w dans $L_\nu^2(X)$. Il existe donc une sous-suite $\{\alpha_{n,k}(1-h)^{1/2}\}$ qui tend vers w $\nu$- p.p.

D'autre part les conditions (ii) et (iii) du lemme impliquent que

$$\lim_{n\to\infty} ||(I-\tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a})\, \tilde{\theta}_{2,n} - b(\psi)||^2 = 0, \text{ avec } b(\psi) = \tilde{H}_{\bar{\phi}_a} Q(e_a g\psi) - P(\bar{g}\, e_{-a}\, \psi))$$

ce qui se traduit par :

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |(1-h)\ \alpha_n - k|^2\ d\ \nu = 0.$$

Il existe donc une sous-suite $(1-h)\ \alpha_{n'_k}$ tendant vers $k$ $\nu$ - p.p. (on peut, en fait, extraire la sous-suite $(\alpha_{n'_k})$ de la sous-suite $(\alpha_{n_k})$).

En conclusion on a le résultat suivant : il existe une sous-suite $\alpha_{n''_k}$ de $L^2_f\ (\mathbb{R})$ telle que :

$$\lim_{n''_k\to\infty} \alpha_{n''_k}\ (1-h)^{1/2} = k/_{(1-h)^{1/2}} \qquad \nu \text{ - p.p.}$$

et

$$\lim_{n''_k\to\infty} \alpha_{n''_k}\ (1-h)^{1/2} = w\ ,\quad \nu \text{ - p.p.}$$

Cela entraine que $k/_{(1-h)^{1/2}} = w$ ~~est~~ dans $L^2_\nu\ (X)$ ce qui achève la démonstration et l'expression de $P_a\ (\psi)$ donnée dans la proposition est bien la projection orthogonale de $\psi$ sur $H_{(-\infty\ \ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$.

Corollaire 3.1.1.

Soit $\psi$ un élément de $H_{(a\ \infty)}$, la projection de $\psi$ sur $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$ est donnée par :

$$P_a\ (\psi) = \psi + \lim_{n\to\infty}\ (e_{-a}\ g^{-1}\ U_n(\psi) + e_a\ \overline{g}^{-1}\ V_n(\psi))$$

où $\quad U_n(\psi) = -\ H_{\phi_a}\ V_n(\psi)$

et $\quad V_n(\psi) = (I + \tilde{H}_{\overline{\phi}_a}\ H_{\phi_a} + \ldots + (\tilde{H}_{\overline{\phi}_a} H_{\phi_a})^n)\ P(e_{-a}\ \overline{g}\ \psi)$

D'autre part :

$$||P_a(\psi) - \psi||^2_f = \lim_{n\to\infty}\ (||V_n(\psi)||^2 - ||H_{\phi_a}\ V_n(\psi)||^2).$$

<u>Preuve</u> :

L'expression de la projection d'un élément $\psi$ de $H_{(a\ \infty)}$ se déduit immédiatement de la proposition 3.1. précédente, après avoir remarqué que $Q\ (e_a \psi g) = 0$ (si $\psi \in H_{(-a\ \infty)} \cap H_{(-\infty\ a)}$ on retrouve évidemment $P_a(\psi) = \psi$).

On a d'autre part :

$$\lim_{n\to\infty} \left( \Big| \, ||P_a(\psi) - \psi||_f - ||e_{-a}\ g^{-1}\ U_n(\psi) + e_a\ \bar{g}^{-1}\ V_n(\psi)|| \, \Big| \right.$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\ ||P_a(\psi) - \psi - e_{-a}\ g^{-1}\ U_n(\psi) - e_a \bar{g}^{-1}\ V_n(\psi)|| = 0.$$

Cependant, en tenant compte de

$(U_n(\psi),\ e_a\ g\ \bar{g}^{-1}\ V_n(\psi)) = (U_n(\psi),\ Q(e_{2a} g\bar{g}^{-1} V_n(\psi)) = (U_n(\psi),\ H_{\phi_a} V_n(\psi))$ et de $U_n(\psi) = -\ H_{\phi_a}\ V_n(\psi)$ (par hypothèse), on obtient :

$$||e_{-a} g^{-1} U_n(\psi) + e_a \bar{g}^{-1}\ V_n(\psi)||_f^2 = ||U_n(\psi)||^2 + ||V_n(\psi)||^2 + 2\mathrm{Re}(U_n(\psi), e_a g\bar{g}^{-1} V_n(\psi))$$

et

$$||P_a(\psi) - \psi||_f^2 = \lim_{n\to\infty} (||V_n(\psi)||^2 - ||H_{\phi_a} V_n(\psi)||^2) = \lim_{n\to\infty}\ ||P(\phi_a\ V_n(\psi)||^2$$

ce qui achève la démonstration du corollaire.

<u>Corollaire 3.1.2.</u>

Si $||\tilde{H}_{\phi_a}\ H_{\phi_a}|| < 1$, alors $(I - \tilde{H}_{\phi_a}\ H_{\phi_a})^{-1}$ existe et on a pour tout $\psi \in L_f^2\ (\mathbb{R})$ :

$$P_a\ (\psi) = \psi + e_{-a}\ g^{-1}\ U(\psi) + e_a\ \bar{g}^{-1}\ V(\psi)$$

$$U(\psi) = -\ H_{\phi_a}\ V(\psi) \text{ et } V\ (\psi) = -(I - \tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a})^{-1}((P(e_{-a}\bar{g}\psi)) - \tilde{H}_{\bar{\phi}_a}\ (Q(e_a\ g\ \psi)))$$

D'autre part, si $\psi \in H_{(a\infty)}$ ; on a une expression simple de la norme :

$$||P_a(\psi) - \psi||_f^2 = ||V(\psi)||^2 - ||H_{\phi_a} V(\psi)||^2 = ||P(\phi_a V(\psi))||^2$$

Preuve

Si $||\tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a}|| < 1$, la série d'opérateurs $\sum_{q=o}^{n} (\tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a})^q$ converge vers l'opérateur $(I - \tilde{H}_{\bar{\phi}_a} H_{\phi_a})^{-1}$.

L'expression du carré de la distance, si $\psi \in H_{(a\ \infty)}$, s'obtient en combinant la remarque ci-dessus et le corollaire précédent. Il est clair que l'on pourrait considérer le cas $\psi \in H_{(-\infty\ -a)}$ on en déduirait des résultats analogues en échangeant P et Q, $e_a \bar{g}^{-1}$ et $e_{-a}$ g etc.......

Projection sur $H_{(-a\ +a)}$

On a l'inclusion suivante $H_{(-a\ +a)} \subset H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ \infty)}$, mais on a pas toujours l'égalité (par exemple $f(x) = x^2/(1+x^2)^2$.

Dans un précédent travail, on donne des conditions suffisantes sur f pour obtenir l'égalité (f localement sommable et une autre condition) (5).

Dès que l'on a l'égalité entre ces deux espaces, on obtient d'après ce qui précède la projection sur $H_{(-a\ +a)}$.

Dans le cas où l'on n'a pas l'égalité, on peut encore déduire la projection sur $H_{(-a\ +a)}$ à partir de celle de $H_{(-\infty\ a)} \cap H_{(-a\ +\infty)}$ au moins dans le cas où f est rationnelle.

## IV. - PREDICTION DANS LE CAS $E = (-\infty - b) \cup (b\ \infty)$, $b>0$

(Interpolation)

On étudie le projecteur orthogonal de $L^2_f$ ($\mathbb{R}$) sur le sous-espace $H_E$ engendré par $\{e_t,\ |t| \geq b\}$, on a aussi :

$$H_E = \overline{H_{(-\infty\ -b)} + H_{(b\ +\infty)}}.$$

L'étude qui va suivre est analogue à la précédente, cependant l'opérateur de Hankel $H_{\phi_b}$ qui apparait fait intervenir la fonction $\phi_b = e_{2b}\bar{g}g^{-1}$ (alors que $\phi_a = e_{2a}g\bar{g}^{-1}$). Nous noterons $\tilde{P}_b$, ce projecteur. Remarquons que Adamyan et Arov [1] ont étudié le problème de la détermination de $\tilde{P}_b$. Le résultat est une approximation de $P_b$ par une suite d'opérateurs. Ici, le travail est plus précis et on obtient $\tilde{P}_b$ comme un développement en série d'opérateurs.

Lemme 4.1.

Soit $\psi$ un élément de $L^2_f$ ($\mathbb{R}$). Pour qu'un élément de $H_E$ noté $\tilde{P}_b(\psi)$ soit la projection orthogonale de $\psi$ sur $H_E$, il faut et il suffit qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n \geq 1}$ et $(\theta_{2,n})_{n \geq 1}$ avec $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ telles que :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (e_{-b}\ \bar{g}^{-1}\ \theta_{1,n} + e_b\ g^{-1}\ \theta_{2,n})$ existe dans $L^2_f$ ($\mathbb{R}$).

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_{2,n} + H_{\phi_b}\ \theta_{1,n}) = P\ (e_{-b}\ g\ \psi)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_{1,n} + H_{\phi_b}\ \theta_{2,n}) = \quad (e_b\ \bar{g}\ \psi)$

Dans ces conditions, la projection est donnée par la limite dans (i).

Preuve :

a) La condition est nécessaire.

Soit $\psi$ un élément de $L^2_f$ ($\mathbb{R}$). L'espace $H_E$ étant l'adhérence dans $L^2_f$ ($\mathbb{R}$) du sous-espace

$e_{-b}\,\bar{g}^{-1}\,H^{2-} + e_b\,g^{-1}\,H^{2+}$, il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 1}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 1}$ où $\theta_{1,n}\in H^{2-}$ et $\theta_{2,n}\in H^{2+}$ telles que :

$$\tilde{P}_b\,(\psi) = \lim_{n\to\infty}\,(e_{-b}\;\theta_{1,n}\,\bar{g}^{-1} + e_b\,\theta_{2,n}\,g^{-1}) \qquad \text{dans } L^2_f(\mathbb{R})$$

D'autre part, $\tilde{P}_b(\psi) - \psi$ est orthogonal à $H_E$, il appartient donc à l'espace :

$$(e_{-b}\bar{g}^{-1}\,H^{2-})^{\perp}\cap(e_b\,g^{-1}\,H^{2+})^{\perp} \;= (e_{-b}\,\bar{g}^{-1}\,H^{2+})\cap(e_b\,g^{-1}\,H^{2-}).$$

Ainsi :

$$(\tilde{P}_b(\psi)-\psi)\,\bar{g}\,e_b\in H^{2+} \text{ et } (\tilde{P}_b(\psi)-\psi)\,g\,e_{-b}\in H^{2-}$$

Ces deux propriétés jointes à l'expression ci-dessus de $\tilde{P}_b(\psi)$ donnent les conditions (ii) et (iii).

b) <u>La condition est suffisante</u>.

Supposons qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\geq 1}$ et $(\theta_{2,n})_{n\geq 1}$, $\theta_{1,n}\in H^{2-}$ et $\theta_{2,n}\in H^{2+}$ telles que les conditions (i), (ii) et (iii) soient vérifiées : Posons :
$\tilde{P}_b(\psi) = \lim_{n\to\infty}\;(e_{-b}\;\theta_{1,n}\,\bar{g}^{-1} + e_b\;\theta_{2,n}\;g)$, on a :

$$\tilde{P}_b(\psi)\;g\;e_{-b} = e_{-b}\;g\;\psi = \lim_{n\to\infty}\;(\theta_{2,n} + \bar{\phi}_b\;\theta_{1,n}) - g\;e_{-b}\;\psi$$

$$= \lim_{n\to\infty}\,[(\theta_{2,n}+P(\phi_b\theta_{1,n}) - P(g\;e_{-b}\psi)] \;+$$

$$\lim_{n\to\infty}\;(Q(\bar{\phi}_b\;\theta_{1,n})) - Q(g\;e_{-b}\;\psi)\;.$$

Par hypothèse $\lim_{n\to\infty}\;(\theta_{2,n} + \bar{\phi}_b\;\theta_{1,n}) = g\;e_{-b}\;\lim_{n\to\infty}\,(e_{-b}\;\theta_{1,n}\,\bar{g}^{-1} + e_b\;\theta_{2,n}\;g^{-1})$ existe et d'autre part, d'après (ii), la première limite dans la troisième egalité tend vers zéro quand $n\to\infty$ , donc $\lim_{n\to\infty}\,[Q(\bar{\phi}_b\;\theta_{1,n}) - \;Q\;(g\;e_{-b}\;\psi)]$ existe dans $H^{2-}$

ce qui implique :

$$\tilde{P}_b\ (\psi)\ g\ e_{-b} - \psi\ g\ e_{-b} \in H^{2-}.$$

On obtient de la même manière :

$$\tilde{P}_b\ (\psi)\ \overline{g}\ e_b\ - \psi\ \overline{g}\ e_b \in H^{2+}.$$

Ces deux conditions sont équivalentes au fait que $\tilde{P}_b(\psi) - \psi$ est orthogonal à la famille $\{e_t,\ |t| \geqslant b\}$ ou encore à $H_E$ et le lemme est démontré.

Notons par $G(\psi) = P\ (g\ e_{-b}\ \psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ Q\ (\overline{g}\ e_b\ \psi)$ pour tout $\psi \in L^2_f\ (\mathbb{R})$. La proposition suivante résout le problème de l'interpolation dans $L^2_f\ (\mathbb{R})$.

Proposition 4.1.

Soient $d\mu\ = f.dx,\ f \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}} \text{Log}\ f(x)/_{1+x^2}\ .\ dx > -\infty$, $g \in H^{2+}$, $|g|^2\ = f$ et $g.H_{(o\ \infty)}\ = H^{2+}$.

Alors le projecteur orthogonal $\tilde{P}_b$ de $L^2_f\ (\mathbb{R})$ sur $H_E$ est donné par une limite simple d'opérateurs :

$$\tilde{P}_b\ (\psi) = \lim_{n\to\infty}\ (e_{-b}\ \overline{g}^{-1}\ W_n(\psi) + e_b\ g^{-1}\ \tilde{W}_n(\psi)), \qquad \forall\ \psi \in L^2_f\ (\mathbb{R}),$$

où $$\tilde{W}_n\ (\psi) = Q\ (e_b\ \overline{g}\ \psi) - H_{\phi_b}\ (W_n(\psi))$$

et $$W_n\ (\psi) = (I + \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b} + \ldots + (\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b})^n)\ G(\psi),\ \forall\ \psi \in L^2_f\ (\mathbb{R})$$

$n \geq 1$.

Preuve

La limite dans la proposition donne la projection de $\psi$ sur $H_E$ si et seulement si les suites $(\tilde{W}_n\ (\psi))_{n \geq 1}$, et $(W_n\ (\psi))_{n \geq 1}$ vérifient les conditions du lemme 4.1.

La démonstration de la preuve à partir de l'étape 2 est identique point par point à celle de la preuve de la proposition 3.1.

Etape 1

On suppose que $||\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}|| = 1$, c'est-à-dire que l'opérateur auto-adjoint $I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}$ n'est pas inversible.

Le sous-espace $H^{2+}$ s'écrit comme somme hilbertienne :

$$H^{2+} = \mathrm{Ker}\ (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}) + \mathrm{Im}\ \ (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}).$$

Posons $H = \mathrm{Im}\ (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b})$, la restriction de $\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}$ à $H$ vérifie les conditions du lemme 2.1.

En effet, si $\theta \in H^{2+}$ vérifie $||\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}\ \theta|| = ||\theta||$ alors,

$$||\theta|| = ||\ \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}\ \theta|| \leq ||H_{\phi_b}\ \theta|| \leq ||\theta||$$

$$(\text{car } H_{\phi_b}\ \theta = Q\ (\phi_b \cdot \theta) \text{ et } (\phi_b) = 1).$$

Il s'ensuit que $||H_{\phi_b}\ \theta|| = ||\theta||$ et comme $H_{\phi_b}$ est la projection du produit $\phi_b \bullet \theta$, on a $H_{\phi_b}\ \theta = \phi_b\ \ \theta$ d'où :

$$\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}\ \theta = \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ \phi_b \cdot \theta = P\ (\overline{\phi}_b\ \phi_b\ \theta) = P(\theta) = \theta$$

et $\qquad \theta \in \mathrm{Ker}\ (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b}).$

L'élément $G\ (\psi) = P\ (g\ e_{-b}\ \psi) - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ Q\ (\overline{g}\ e_b\ \psi)$ est dans $H$, en effet d'après le lemme, il existe une suite $(\theta_{2,n})_{n\geq 1}$ qui vérifie $G\ (\psi) = \lim\limits_{n\to\infty} (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\ H_{\phi_b})\ \theta_{2,n}$.

Etape 2

Posons maintenant :

$$W_n(\psi) = (I + \tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b} + \ldots + (\tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b})^n)\, G(\psi)$$

et $\tilde{W}_n(\psi) = Q\,(e_b\, g\, \psi) - H_{\phi_b}\,(W_n(\psi))$

On a :

$$\tilde{H}_{\overline{\phi}_b}(\tilde{W}_n(\psi)) + W_n(\psi) = \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}(Q(e_b \overline{g}\, \psi)) + (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b})(I + \ldots + (\tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b})^n)\, G(\psi)$$

$$= \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}(Q(e_b\, \overline{g}\, \psi)) + G(\psi) - (\tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b})^{n+1} G(\psi)$$

Or d'après le lemme 2.1. $\|(\tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b})^n G(\psi)\|$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini (où on a posé $\tilde{H}_{\overline{\phi}_b} H_{\phi_b} \cong T$ et $G(\psi) = \psi$), d'où :

$$\lim_{n\to\infty} (W_n(\psi) + \tilde{H}_{\overline{\phi}_b} \tilde{W}_n(\psi)) = \tilde{H}_{\overline{\phi}_b} Q\,(e_b\, \overline{g}\, \psi) + G(\psi) = P\,(e_{-b} g\, \psi)$$

D'autre part, par définition de $\tilde{W}_n(\psi)$

$$\lim_{n\to\infty} (\tilde{W}_n(\psi) + H_{\phi_b} W_n(\psi)) = Q\,(e_b\, \overline{g}\, \psi)$$

Les conditions (ii) et (iii) du lemme 4.1. sont donc vérifiées par les suites $(\tilde{W}_n(\psi))_{n\geq 1}$ et $(W_n(\psi))_{n\geq 1}$ construites ci-dessus.

Etape 3

Il reste à montrer que ces suites vérifient la condition (i) du lemme 4.1., c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to\infty} (e_{-b}\, \overline{g}^{-1}\, \tilde{W}_n(\psi) + e_b\, g^{-1}\, W_n(\psi)) \text{ existe dans } L^2_f(\mathbb{R}).$$

Elle sera alors égale à la projection $\tilde{P}_b(\psi)$ de $\psi$ sur $H_E$. Remarquons d'abord que $\lim_{n\to\infty} (e_{-b}\, \bar{g}^{-1}\, \tilde{W}_n(\psi) + e_b\, g^{-1}\, W_n(\psi))$ et $\lim_{n\to\infty} (W_n(\psi) + \phi_b\, W_n(\psi))$ existent simultanément dans $L^2_f\,(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$. Comme par hypothèse $\tilde{W}_n(\psi) + Q(\phi_b\, W_n(\psi))$ converge (vers $Q(e_b\, \bar{g}\, \psi)$), la deuxième limite ci-dessus existe si et seulement si $P\,(\phi_b\, W_n\,(\psi))$ converge dans $H^{2+}$.

Posons $W_n(\psi) = \theta_n$ et soient m et n des entiers positifs quelconques (on suppose n>m) ; on a :

$$||P\,(\phi_b\,\theta_n) - P\,(\phi_b\,\theta_m)||^2 = ||\phi_b\,(\theta_n - \theta_m)||^2 - ||Q\,(\phi_b\,(\theta_n - \theta_m)||^2$$

$$= ||\theta_n - \theta_m||^2 - ((\theta_n - \theta_m),\, \tilde{H}_{\bar{\phi}_b}\, H_{\phi_b}\,(\theta_n - \theta_m))$$

$$= (\sum_{m+1}^{n} (\tilde{H}_{\bar{\phi}_b} H_{\phi_b})^p\, G(\psi), (I-\tilde{H}_{\bar{\phi}_b} H_{\phi_b}) \sum_{m+1}^{n} (\tilde{H}_{\bar{\phi}_b} H_{\phi_b})^p\, G\,(\psi))$$

Comme l'opérateur $H_{\bar{\phi}_b}\, H_{\phi_b}$ est auto-adjoint positif sur H, le théorème spectral [3 permet d'associer à cet opérateur une fonction $h \in L^\infty_\nu\,(X)$ ($\nu$ et X sont déterminés par l'opérateur $\tilde{H}_{\bar{\phi}_b}\, H_{\phi_b}$ et l'espace H), plus précisément $0 \le h < 1$, $\nu$ p.p. puisque :

$||\tilde{H}_{\phi_b} H_{\phi_b}\, \psi|| < ||\psi||, \forall\, \psi \in H$, et à $G(\psi) \in H$, une fonction $\tilde{k}$ de $L^2_\nu(X)$ telle que:

$$||P(\phi_b\,\theta_n) - P(\phi_b\,\theta_m)||^2 = \int_X \frac{(h^{n+1} - h^{m+1})^2}{1-h}\, |\tilde{k}|^2 d\nu \le \int_X \frac{h^{2(n+1)}}{1-h} |\tilde{k}|^2 d\nu + \int_X \frac{h^{2(m+1)}}{1-h} |\tilde{k}|^2\, d\nu.$$

Comme $0 \le h < 1$, $\nu$-p.p. $h^q$ tend vers 0, $\nu$-p.p. lorsque q tend vers l'infini, d'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue les deux dernières intégrales tendent vers zéro quand m et n tendent vers l'infini si $\int_X \frac{|\tilde{k}|^2}{1-h}\, d\nu < +\infty$, (car la fonction dominante 1 serait $\nu$-intégrable).

Etape 4 :

On a : $$\int_X \frac{|\tilde{k}|^2}{1-h}\, d\nu < +\infty$$

Dans le lemme 4.1. on établit l'existence de deux suites qu'on notera ici $\tilde{\theta}_{1,n}$ et $\tilde{\theta}_{2,n}$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii). On en déduit en particulier que $P\,(\phi_b\, \tilde{\theta}_{2,n})$ converge.

Si on pose donc $\tilde{\theta}_n = \theta_{2,n}$, on a :

$$(*) \quad \|P(\phi_b\, \tilde{\theta}_n) - P\,(\phi_b\, \tilde{\theta}_m)\|^2 = (\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_m, (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\, H_{\phi_b})\,(\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}_m))$$

expression qui tend vers 0 quand m et $n \to \infty$

Remarquons que $\tilde{\theta}_n$ n'appartient pas nécessairement à $H = \mathrm{Im}\,(I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\, H_{\phi_b})$, mais si nous notons $P_H\, \tilde{\theta}_n$ sa projection sur H, l'égalité ci-dessus devient :

$$(*) = (P_H\, \tilde{\theta}_n - P_H\, \tilde{\theta}_m,\ (I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\, H_{\phi_b})(P_H\, \tilde{\theta}_n - P_H\, \tilde{\theta}_m));$$

nous pouvons ainsi, de nouveau, utiliser le théorème spectral.

En associant $\beta_n \in L^2_\nu\,(X)$ à $P_H\, \tilde{\theta}_n$, l'égalité (*) ci-dessus devient :

$$(*) = \int_X |\beta_n - \beta_m|^2\,(1-h)\, d\nu$$

et cette quantité tend vers 0 quand m et n tendent vers l'infini (par hypothèse). Ceci équivaut au fait que $\beta_n\,(1-h)^{1/2}$ tend vers une fonction w de $L^2_\nu\,(X)$. Il existe donc une sous-suite $\beta_n\,(1-h)^{1/2}$ qui tend vers w $\nu$-p.p. .

D'autre part, l'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} \|(I - \tilde{H}_{\overline{\phi}_b}\, H_{\phi_b})\, \tilde{\theta}_{2,n} - G\,(\psi)\|^2 = 0$

se traduit par : $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X |(1-h)\beta_n - \tilde{k}|^2\, d\nu = 0.$

(Remarquons que $(I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}) \tilde{\theta}_n = (I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}) P_H \tilde{\theta}_n$)).

Il existe donc une sous-suite $\beta_{n'_k}(1-h)^{1/2}$ qui tend vers $\tilde{k}$ (qu'on peut extraire de $(\beta_{n_k})$).

En conclusion, on a le résultat suivant, il existe une sous-suite $(\beta_{n''_k})$ telle que :

$$(1-h)^{1/2} \beta_{n''_k} \to \frac{\tilde{k}}{(1-h)^{1/2}} \quad \nu\text{-p.p. et } (1-h)^{1/2} \beta_{n''_k} \to w \quad \nu\text{-p.p., quand}$$

$n''_k \to \infty$.

Cela entraîne que $\tilde{k}/_{(1-h)^{1/2}} = w$, $\nu$-p.p. donc $\tilde{k}/_{(1-h)^{1/2}} \in L^2_\nu (X)$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Corollaire 4.1.1.

Si $||\tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}|| < 1$, alors $I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}$ est inversible et la projection d'un élément $\psi$ de $L^2_f (R)$ sur $H_E$ est donnée par :

$$\tilde{P}_b (\psi) = e_{-b} \overline{g}^{-1} \tilde{W} (\psi) + e_b g^{-1} W (\psi)$$

où

$$\tilde{W}(\psi) = Q (e_b \overline{g} \psi) - H_{\phi_b} (W (\psi))$$

$$W(\psi) = (I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b})^{-1} G (\psi).$$

Preuve

L'hypothèse $||\tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}|| <1$ implique que $I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}$ est inversible car l'opérateur $\tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b}$ est auto-adjoint (positif). On a d'autre part, une convergence dans l'espace des opérateurs :

$$(I - \tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b})^{-1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=o}^{n} (\tilde{H}_{\overline{\Phi}_b} H_{\phi_b})^p$$

(série de Von-neumann), ce qui donne l'expression de la projection dans le lemme.

Corollaire 4.1.2.

Si $\phi_b = e_{2b}\,\overline{g}\,g^{-1}$ est une fonction intérieure alors $H_{\phi_b} = 0$ et pour tout $\psi \in L^2_f(\mathbb{R})$, la projection de $\psi$ sur $H_E$ est donnée par :

$$\tilde{P}_b(\psi) = e_{-b}\,\overline{g}^{-1}\,Q\,(e_b\,\overline{g}\,\psi) + e_b\,g^{-1}\,P\,(e_{-b}\,g\,\psi).$$

Remarque :

On peut donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que la prédiction soit parfaite ou ce qui équivaut au fait que $H_E$ coïncide avec $L^2_f(\mathbb{R})$. De telles conditions sont connues ([2] pages 136-145). Nous donnerons ici une condition nécessaire et suffisante dont l'application est aisée dans le cas de fonctions assez régulières.

Proposition 4.2.

Les quatres assertions suivantes sont équivalentes :

(i) la prédiction est parfaite : $H_E = L^2_f(\mathbb{R})$,

(ii) l'opérateur de Toeplitz associé à $\overline{\phi}_b$, défini par $T_{\overline{\phi}_b} : \theta \to P(\phi_b\,\theta)$, est injectif.

(iii) l'opérateur $I - \tilde{H}_{\phi_b} H_{\overline{\phi}_b}$ est injectif.

(iv) l'opérateur de Hankel associé à $\overline{\phi}_b$ $H_{\overline{\phi}_b}$ vérifie $||H_{\overline{\phi}_b}\,\theta|| < ||\theta||$ quelque soit $\theta \in H^{2+}$.

Preuve :

Par définition, $H_E = H_{(-\infty\ -b)} + H_{(b\ \infty)}$.

La prédiction est parfaite $\Longleftrightarrow H_E = L^2_f(R) \Longleftrightarrow H_E^{\perp} = \{0\}$

$$\text{Or } H_E^{\perp} = H^{\perp}_{(-\infty\ -b)} \cap H^{\perp}_{(b\ \infty)} = \Big(e_{-b}\,\frac{H^{2-}}{\overline{g}}\Big)^{\perp} \cap \Big(e_b\,\frac{H^{2+}}{g}\Big)^{\perp}$$

$$= (e_{-b}\,\overline{g}^{-1}\,H^{2+}) \cap (e_b\,g^{-1}\,H^{2-}).$$

Supposons que $H_E^{\perp} \neq \{0\}$ , il existe donc $\psi_1 \in H^{2-}$, $\psi_2 \in H^{2+}$ tels que

$$\frac{e_{-b}}{\bar{g}}\ \psi_2 = \frac{e_b}{g}\ \psi_1, \text{ ou encore } \psi_1 = e_{-2b} \cdot \frac{g}{\bar{g}}\ \psi_2 .$$

On aura ainsi :

α) $H_{\bar{\Phi}_b}(\psi_2) = \psi_1$ ou encore β) $\tilde{H}_{\Phi_b} H_{\bar{\Phi}_b}(\psi_2) = \psi_2$. On aura de même γ) $T_{\bar{\Phi}_b}(\psi_2) = P(\bar{\Phi}_b \psi_2) = 0$

Inversement les conditions α), β) et γ) sont de manière évidente équivalentes entre elles et entrainent $H_E^{\perp} \neq \{0\}$.

les quatres assertions sont donc équivalentes.

Corollaire 4.2.1.

La prédiction est parfaite si $\bar{\Phi}_b = e_{-2b} \frac{g}{\bar{g}}$ est une fonction intérieure (car dans cas $H_{\bar{\Phi}_b} = 0$).

## V. - QUELQUES APPLICATIONS

Exemple 1 :

Soit $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ ; $g(x) = \dfrac{e^{2ix}-1}{2ix}$ , $\bar{g}(x) = \dfrac{1-e^{-2ix}}{2ix}$

$$\phi_b(x) = e^{2ibx}\ \bar{g}\ g^{-1}(\bar{x}) = e^{2(b-1)ix}$$

1. Si $0 \le b \le 1$, $\bar{\Phi}_b(x) = e^{2(1-b)ix}$ est une fonction intérieure, la prédiction est parfaite d'après le corollaire, i.e.

$$\tilde{P}_b(\psi) = \psi\ ,\ \forall\psi \in L_f^2(\mathbb{R}).$$

2. Si $b \ge 1$, $\phi_b$ est une fonction intérieure et d'après le corollaire l'expression d'un élément $\psi = e_s$, $|s| \le b$ est donné par :

$$\tilde{P}_b(e_s)(x) = e^{-ibx}\ \frac{1-e^{(\alpha-2)ix}}{1-e^{-2ix}} + e^{ibx}\ \frac{1-e^{(\beta+2)ix}}{e^{2ix}-1}$$

avec $\alpha = b+s$, $\beta = -b + s$, si $b \leq +2$ et $|s| \leq 2 - b$.

On obtient aisément les autres expressions de $\tilde{P}_b(e_s)$ lorsque $s \geq 2 - b$, et $s \leq b - 2$, ainsi que $b \geq 2$.

En particulier, si $s = 0$, $(e^{lix} = 1)$ on a pour $1 \leq b \leq 2$.

$$\tilde{P}_b(1)(x) = 1 - \frac{\sin(b-1)\, x}{\sin x}$$

Enfin lorsque $b \geq 2$, $\tilde{P}_b(1) = 0$.

<u>Exemple 2</u>

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1_{1+x^2}} \qquad g = \frac{1-e^{2ix}}{1+ix}$$

$$\phi_b(x) = e^{2ibx}\,\bar{g}\, g^{-1} = e^{-2(b-1)\, ix}\ \frac{1+ix}{1-ix}$$

1. Si $0 \leq b \leq 1$, $\bar{\phi}_b$ est une fonction intérieure d'après le corollaire $\tilde{P}_b(\psi) = \psi$, $\forall\psi \in L^2_f(R)$ (prédiction parfaite).

2. Si $b \geq 1$, $\phi_b$ est intérieure et l'expression de $\tilde{P}_b\ (e_s)$ est donnée par le corollaire et dans ce cas aussi les calculs sont aisés à mener.

En particulier pour $s = 0$, $(e_s = 1)$ on considérera deux cas :

$\alpha$) $1 \leq b \leq 2$

$$\tilde{P}_b(1)(x) = 1 - e^{-b}\ \frac{\sin\ (b-1)x}{\sin x}$$

$\beta$) $b \geq 2$

$$\tilde{P}_b(1)(x) = e^{-b}\ (e^2-1)\ \frac{\sin\ (b-1)\ x}{\sin x}$$

Remarque :

Ces deux exemples sont traités dans [2] pages 321). On y obtient par des méthodes différentes l'écart quadratique $||1 - \tilde{P}_b(1)||^2$.

On remarquera ici, l'analogie des expressions entre les exemples 1,et 2 le facteur $\frac{1}{1 + x^2}$ ayant entraîné la multiplication de l'expression $\frac{\sin (b-1)x}{\sin x}$ par le facteur $e^{-b}$, $1 \leq b \leq 2$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] V.M. ADAMYAN and D.Z. AROV, Theory of probability and its applications 1968 Vol. 13, (traduit du russe).

[2] H. DYM et H.P. Mc KEAN, Gaussian process, functions theory and the inverse spectral problem.
Academic Press New-York - London.

[3] KUNZE - SEGAL , Integral and operators, pages 240-253 (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York)

[4] W.RUDIN , Functional analysis, pages 301-319 (Mc Graw-Hill Book Company)

[5] A. SEGHIER, Prédiction d'un processus stationnaire, Illinois Journal of Mathematics. Volume 22, Number 3, september 1978.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Inversion de la matrice de Tœplitz en plusieurs dimensions et théorème de Szegö.* Note (*) de Abdellatif Seghier, transmise par Robert Fortet.

On définit la matrice de Tœplitz associée à une fonction positive dans $L^1(\mathbb{T}^n)$ comme la matrice d'un opérateur sur un espace vectoriel (de dimension finie) de polynômes trigonométriques de $n$ variables, dont le spectre est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^n$.

On donne un développement asymptotique de la trace de l'inverse (avec des conditions sur $f$). On montre que ce résultat est équivalent à la forme classique du théorème de Szegö relatif au développement asymptotique du logarithme du déterminant.

*A Tœplitz matrix associated to a positive function in $L^1(\mathbb{T}^n)$ is defined. A new computation of the inverse of this Tœplitz matrix is given. We give a limit theorem and we show that it is equivalent to Szegö's limit theorem.*

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — ($a$) On se limitera sans nuire à la généralité à $n=2$. Soit $\mathbb{T}^2=\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ le bi-tore $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$ et $f\geqq 0$ et $\mathbb{Z}_+^2=\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2, k\geqq 0, l\geqq 0\}$.

Soient M et N deux entiers positifs, on note par .

$$\tau_{M,N}=\{(k,l)\in\mathbb{Z}_+^2/0\leqq k\leqq M,\ 0\leqq l\leqq N\}$$

un rectangle de $\mathbb{Z}_+^2$. On désignera par $E_{M,N}$ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans $\tau_{M,N}$ et $P_{M,N}$ le projecteur de $L^1(\mathbb{T}^2)$ sur $E_{M,N}$ défini par :

$$P_{M,N}h=\sum_{(m,n)\in\tau_{M,N}}\alpha_{m,n}\chi_1^m\chi_2^n;\qquad \alpha_{m,n}\in\mathbb{C},$$

où :

$$\chi_1(e^{is})=e^{is},\qquad \chi_2(e^{it})=e^{it},\qquad (s,t)\in\mathbb{R}^2$$

et :

$$h\sim\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\alpha_{m,n}\chi_1^m\chi_2^n.$$

La matrice de Tœplitz associée à $f$ et au rectangle $\tau_{M,N}$ est définie comme la matrice de l'opérateur :

$$\forall p\in E_{M,N},\quad T_{M,N}(f)p=P_{M,N}fp.$$

($b$) Dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ on note :

$$H^{2+}=\{h\in L^2(\mathbb{T}^2),\ h\sim\sum\alpha_{m,n}\chi_1^m\chi_2^n,\ (m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\}$$

et P le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur $H^{2+}$ :

$H^{2-}=\chi_1\chi_2\overline{H^{2+}}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur cet espace;

$\tilde{H}^{2-}=L^2(\mathbb{T}^2)\ominus H^{2+}$ et $P_-$ le projecteur orthogonal sur cet espace;

$\tilde{H}^{2+}=L^2(\mathbb{T}^2)\ominus H^{2-}$ et $P_+$ le projecteur orthogonal sur cet espace.

2. INVERSION DE LA MATRICE DE TŒPLITZ. — ($a$) Soit $f\in L^1(\mathbb{T}^2)$, pour inverser $T_{M,N}(f)$ on procède de la manière suivante. On construit dans $L^2_{1,f}(\mathbb{T}^2)$ un sous-espace K de dimension finie tel que pour tout $\theta\in K$ $\theta/f\in E_{M,N}$. On décompose (1) : $L^2_{1,f}(\mathbb{T}^2)=K\oplus K^\perp$. On observe que $L^2_{1,f}(\mathbb{T}^2)\subset L^1(\mathbb{T}^2)$. Le sous-espace $K^\perp$ est alors composé de fonctions $\psi\in L^2_{1,f}(\mathbb{T}^2)$ vérifiant (2) : $\psi(k,l)=0$, $(k,l)\in\tau_{M,N}$.

Soit $P_K$ le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^2)$ sur K et $q \in E_{M,N}$. On écrit $P_K q = fp$ où $p$ est un polynôme de $E_{M,N}$.

On décompose $q$ sur la somme orthogonale (1) de $L^2_{1/f}$ :

$$q = fp + q - fp.$$

On a d'après (2), $q = P_{M,N} q = P_{M,N} fp = T_{M,N}(f)p$.

Ceci montre que $p = (T_{M,N}(f))^{-1} q = (1/f) P_K(q)$.

(*b*) On suppose que $f = |g^2|$ avec $g^{\pm 1} \in H^{2+}$, on construit alors un sous-espace K décrit en *a*.

Lemme 1. — *Posons* $K = \bar{g} H^{2+} \cap g \chi_1^{M+1} \chi_2^{N+1} H^{2-}$, *le sous-espace* K *vérifie les propriétés décrites en* (*a*).

*Remarque.* — On peut écrire $K = \bar{g}(H^{2+} \cap g/\bar{g}\, \chi_1^{M+1} \chi_2^{N+1} H^{2-}) = \bar{g} K_0$, on note par $P_{K_0}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur $K_0$, on a :

$$P_K q = \bar{g} P_{K_0}(q/\bar{g}) \qquad \text{et} \qquad (T_{M,N}(f))^{-1} q = 1/g\, P_{K_0}(q/\bar{g}).$$

(*c*) Explicitons $(T_{M,N}(f))^{-1} = (T_{M,N}(|g|^2))^{-1}$ avec $1/g$ polynôme trigonométrique. On pose $\varphi_{M,N} = \chi_1^{M+1} \chi_2^{N+1} g/\bar{g}$ et on note par :

$$\forall\, 0 \in \tilde{H}^{2+}, \quad H\varphi_{M,N} : 0 \to P_-(\varphi_{M,N} 0) \in \tilde{H}^{2-},$$

l'adjoint est donné par :

$$\forall\, 0 \in \tilde{H}^{2-}, \quad H^*_{\varphi_{M,N}} : \eta \to P_+(\bar{\varphi}_{M,N} \eta).$$

On a une proposition :

Proposition 1. — *On suppose* $f = |g|^2$ *avec* $g$ *et* $1/g \in H^{2+}$. *On suppose en outre qu'il existe un entier* L *tel que* $1/g = \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \beta_{m,n} \chi_1^m \chi_2^n$ *et* $\beta_{m,n} = 0$ *dès que* $\operatorname{Sup}(m, n) \geqq L$.

*Alors l'opérateur* $T_{M,N}(f)$ *est inversible et d'inverse :*

$$(T_{M,N}(f))^{-1}(q) = q/|g|^2 - 1/g\, P_-(q/\bar{g}) - 1/g\, P\varphi_{M,N} \sum_{k=0}^{\infty} (H^*_{\varphi_{M,N}} H_{\varphi_{M,N}})^k P_+ \bar{\varphi}_{M,N} P(q/\bar{g})$$

pour tout $q \in E_{M,N}$.

La série du second membre converge uniformément par rapport à (M, N) en norme d'opérateurs dès que $\operatorname{Sup}(M, N) \geqq 2L$.

3. Comportement asymptotique de la trace de $(T_{M,N}(f))^{-1}$. — On prend M = N, et on pose $e_N = (\chi_1 \cdot \chi_2)^{N+1}$.

Proposition 2. — *On suppose* $g$ *et* $1/g \in H^2(\mathbb{T}^2) \cap C(\mathbb{T}^2)$ :

$$1/g \sim \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \beta_{m,n} \chi_1^m \chi_2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} (m+n) |\beta_{m,n}|^2 < +\infty.$$

*Soit* $B_{N,N}(q) = T_{N,N}(1/f)(q) - P_{N,N}(1/g\, P_-(q/\bar{g}) + e_{N/g}\, P_+(\bar{e}_{N/g}\, q))$ *pour tout* $q \in E_{N,N}$.

*Alors :*

1° *il existe un entier* $N_0$ *et une constante* $K > 0$ *tels que* $N \geqq N_0$ :

$$0 \leqq \operatorname{Tr}(T_{N,N}(f)^{-1} - B_{N,N}) \leqq K \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} (m+n)|\beta_{m,n}|^2;$$

2° $$\lim_{N\to\infty} 1/N+1 \operatorname{Tr}((T_{N,N}(f))^{-1} - T_{N,N}(1/f)) = -2 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (m+n)|\beta_{m,n}|^2.$$

*Soit* $h \in L^1(\mathbb{T}^2)$, *on note par* $C_{m,n}(h)$ *le coefficient de Fourier de* $h$ *pris au point* $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Théorème. — *Soit* $f > 0$ *et continue sur* $\mathbb{T}^2$, *on suppose que :*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)|C_{m,n}(f)|^2 < +\infty.$$

*On a :*

$$\lim_{N\to\infty} (1/N+1)(\operatorname{Tr}(T_{N,N}(f)^{-1} - T_{N,N}(1/f)) = -\langle \operatorname{Log} f, 1/f \rangle_{2,1,2}$$
$$- \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)\, C_{m,n}(\log f)\, \bar{C}_{m,n}(1/f).$$

Équivalence avec le théorème de Szegö.

Corollaire 1 (théorème de Szegö). — *Soit* $f > 0$ *et continue sur* $\mathbb{T}^2$. *On suppose que :*

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)|C_{m,n}(f)|^2 < +\infty.$$

*Alors :*

$$\lim_{N\to\infty} (1/N+1)(\log \det T_{N,N}(f) - \operatorname{Tr} T_{N,N}(\log f)) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)|C_{m,n}(\log f)|^2.$$

Généralisation à une fonction analytique :

Soit $\mathbb{C}$ le corps des complexes.

Corollaire 2. — *Soit* F *une fonction de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}$, *analytique au voisinage de* 1 :

$$F(z) = \sum_{k=0}^{r} a_k (z-1)^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z \in \mathbb{C},$$

$k$ *entier :* $h$ *est une fonction qui vérifie :*

$$0 \leqq h < 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)|\bar{C}_{m,n}(h)|^2 < +\infty.$$

*Soit* $\lambda \in [0, 1]$, *on pose :*

$$\varphi(\lambda) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)\, C_{m,n}(\log(1-\lambda h))\, \bar{C}_{m,n}(1/1-\lambda h).$$

*Alors :*

(i) $$\lim_{N\to\infty} (1/N+1)\operatorname{Tr}(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k)) = (1/k!)\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi\right)(0).$$

(ii) $$\lim_{N\to\infty} (1/N+1)\operatorname{Tr}((F(T_{N,N}(1-\lambda h)) - T_{N,N}(F(1-\lambda h))) = \sum_{k=0}^{r} \frac{a_k}{k!}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}\varphi\right)(0)\lambda^k,$$

*pour tout* $\lambda$ *dans un voisinage de* 0 *convenablement choisi.*

*Remarques*. — (*a*) Diverses extensions de ces résultats seront données dans une prochaine Note, par exemple $f$ non réelle, le spectre $\Lambda$ des polynômes ne sera plus un carré, mais un sous-ensemble fini quelconque, etc.

(*b*) Les formes générales du théorème limite de Szegö ont été établies par Widom [2] dans le cas de $\mathbb{R}^n$ et par I. Linnick dans le cas de $\mathbb{T}^n$.

(*c*) Le lien entre la trace de l'inverse et le logarithme du déterminant est utilisé par H. Widom. Ce travail, en donnant une approximation systématique et plus précise de l'inverse, permet d'éclairer la structure sous-jacente du théorème de Szegö, de redonner des démonstrations simplifiées et de permettre des généralisations.

(*) Remise le 16 novembre 1981.

[1] I. Ju. Linnick, *Math. U.S.S.R.* 12 *r*, 9, 1975, p. 1323-1332.
[2] H. Widom, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 44, 1975, p. 191-240.

*E.R.A. n° 532, Statistique appliquée, Bâtiment de Mathématique n°* 425,
*Université de Paris-Sud*, 91405 *Orsay Cedex*.

# INVERSION DE LA MATRICE DE TOEPLITZ EN PLUSIEURS DIMENSIONS ET THEOREME LIMITE DE SZEGÖ : GENERALISATIONS

A. SEGHIER

Soit $\mathbb{T}^2$ le tore à deux dimensions, $f$ une fonction positive dans $L^1(\mathbb{T}^2)$ et $C_{m,n}(f) = C_{m,n}$ les coefficients de Fourier de $f$.

Soit $\Lambda$ une partie finie de $\mathbb{Z}^2$

$$F_\Lambda(f) = \int_{\mathbb{T}^2} \Big|\sum_{(m,n)\in\Lambda} {}_{m,n}\, e^{(i(m\,\theta_1 + n\,\theta_1))}\Big|^2 d(\theta_1,\theta_2), ( {}_{m,n} \in \mathbb{C})$$

La forme de Toeplitz associée à $f$ et $T_\Lambda(f) = (C_{m-m',m-n'})$, $((m,n),(m',n')) \in \Lambda \times \Lambda$, sa matrice : on l'appelle matrice de Toeplitz.

1. On étudie, lorsque $\Lambda = [0,N] \times [0,N]$ est un "carré" de $\mathbb{Z}^2$, le comportement de $T_r(T_\Lambda(f))^{-1}$ (à condition que l'inverse existe), quand $N \longrightarrow \infty$ ($T_r$ = Trace).

Dans le cas du tore $\mathbb{T}$, G. Szegö [6] établit le théorème suivant (avec quelques conditions restrictives sur $f$) :

$$\lim_{N\to\infty} (\text{Log det } T_N(f) - T_r\, T_N(\text{Log } f)) = \sum_{n=1}^{\infty} |n|\; |C_n(f)|^2$$

où det : déterminant

Le principal résultat établi ici est un théorème limite portant sur la trace de $(T_\Lambda(f))^{-1}$ dans le cadre du bi-tore $\mathbb{T}^2$ (le passage de $n = 2$ à $n$ quelconque n'offre qu'une difficulté d'écriture).

Soit $f > 0$ et continue sur $\mathbb{T}^2$ et $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)|C_{m,n}(f)|^2 < +\infty$

on a :

$$\lim_{N\to\infty} T_r \frac{1}{N+1}(T_\Lambda(f)^{-1} - T_\Lambda(\tfrac{1}{f})) = \sum_{(m,n)\in Z^2} (|m|+|n|) C_{m,n}(\tfrac{1}{f})\overline{C}_{m,n}(\mathrm{Log}(f))$$

2. Le comportement asymptotique de $T_r(T_\Lambda(f))^{-1}$ permet d'obtenir le théorème limite de Szegö, ainsi que cela a été fait dans un article de Widom [2] dans le cadre du tore $\mathbb{T}$ et de $\mathbb{R}^n$

Cette idée est naturellement reprise ici et on obtient bien le théorème de Szegö sur les déterminants pour $\mathbb{T}^2$ (ou $\mathbb{T}^n$) relativement à des carrés (croissants). Cependant le fait que le second terme du développement de $T_r(T_\Lambda(f))^{-1}$ (le premier terme étant

$T_r\, T_\Lambda(\frac{1}{f}) = N^2 . C_{o,o}(\frac{1}{f}) = N^2 \int_{\mathbb{T}^2} f^{-1}\, d(\theta_1,\theta_2)$) soit explicité, permet

d'établir le lien entre les deux développements par des dérivations de normes dans une algèbre de Banach $A = \{f \in C(\mathbb{T}^2),\ \Sigma(|m|+|n|)|C_{m,n}(f)|^2 < +\infty\}$.
Cette algèbre a été introduite par H. Widom dans le cas de $\mathbb{T}$ et $\mathbb{R}^n$ [8] .
Le passage du théorème sur les traces à celui sur les déterminants se fait alors d'une manière courte et naturelle.
On peut de plus avoir l'expression explicite de $T_\Lambda(f)^{-1}$ (on le fait dans le cas où $\frac{1}{f}$ est un polynôme trigonométrique).

3. Le théorème de Szegö sur les déterminants généralisé à $\mathbb{T}^n$ (et à $\mathbb{R}^n$) a été établi par I. Linnck [3] avec $f > 0$, $\Sigma|m|\ |C_m(f)|$ et $\Sigma|m|\ |C_m(f)|^2 < +\infty$ avec

$m = (m_1,\ldots,m_n)$ et $|m| = |m_1| + \ldots + |m_n|$, et où les sous-ensembles $\Lambda$ croissent à l'infini selon un certain mode (ce résultat a été obtenu presque simultanément avec celui de Widom en 1974-1975).

4. Les méthodes introduites ici pour le calcul de la trace nous permettent de généraliser le théorème de G. Szegö en établissant une expression explicite de :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^n} T_r(F(T_\Lambda) - T_\Lambda F(f)) ,$$

où $F$ est analytique au voisinage de 1.

Ainsi les deux limites 1 correspondent à $F(f) = \frac{1}{f}$ et $F(f) = \text{Log } f$ .

Cette question a été posée dans le livre de Grenander et Szegö [2] et reprise dans l'article de Widom [5]. La réponse qui en est donnée ici découle sans difficulté du théorème principal.

5. Le champ d'applications de tels résultats est important, il suffit de se référer à l'abondante littérature concernant le théorème limite de G. Szegö. Signalons toutefois une application aux statistiques pour étudier la qualité de l'approximation due à Whittle, de la vraisemblance d'un champ aléatoire gaussien.

6. Dans un prochain travail diverses prolongements des résultats obtenus ici, seront donnés dans $\mathbb{T}^n$, $\Lambda$ ne sera plus un carré, mais quelconque (dans une famille filtrante de $\mathbb{T}^n$) , $f$ complexe, etc ...

On résoudra dans $\mathbb{R}^n$, l'équation de Wiener-Hopf attachée à des parties bornées de $\mathbb{R}^n$ et on donnera des résultats asymptotiques analogues à ceux obtenus dans $\mathbb{T}^n$

Les méthodes utilisées se basent sur des idées géométriques simples : intersection de sous-espaces de Hilbert, angle de sous-espaces. Elles seront d'ailleurs utilisées pour résoudre des problèmes de prédiction de processus stationnaires, comme cela a été fait dans le cas de $\mathbb{R}$ [5] .

En fait nous traitons le cas de $\mathbb{T}^2$ plutôt que $\mathbb{T}^n$ par simple commodité d'écriture. Le cas $\mathbb{T}^2$ (ou $\mathbb{T}^n$) est beaucoup plus complexe que le cas $\mathbb{T}$, à cause du fait que les fonctions analytiques dans le disque unité correspondent (en gros) à des séries trigonométriques à spectre dans $\mathbb{Z}_+$ (entiers relatifs positifs) ; alors que les fonctions analytiques dans le bi-disque correspondent à des séries trigonométriques dans $\mathbb{Z}_+^2$ avec $\mathbb{Z}_+^2 = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ m \geqslant 0,\ n \geqslant 0\}$ .

Notations et définitions

a) On se limitera comme cela a été dit ci-dessus à $n = 2$ .
Soit $f > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ .

Soit $\Lambda$ une partie finie de $Z_+^2$, on désignera par $E_\Lambda$ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans $\Lambda$ et $P_\Lambda$ le projecteur de $L^1(\mathbb{T}^2)$ sur $E_\Lambda$ défini par :

$$\forall\ h \in L^1(\mathbb{T}^2) : \quad P_\Lambda h = \sum_{(m,n)\in\Lambda} \alpha_{m,n} \chi_1^m \chi_2^n$$

où $\chi_1(e^{i\theta_1}) = e^{i\theta_1}$ , $\chi_2(e^{i\theta_2}) = e^{i\theta_2}$, $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$, et $h \sim \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \alpha_{m,n} \chi_1^m \chi_2^n$

(série de Fourier de $h$).

On peut aussi définir la matrice de Toeplitz associée à $f$ et à la partie $\Lambda$ comme la matrice de l'opérateur

$$\forall\, p \in \mathcal{E}_\Lambda \,, \quad T_\Lambda(f)p = P_\Lambda f\, p$$

b) On note dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ :

$$H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbb{T}^2) \,, \quad h \sim \Sigma\, \alpha_{m,n}\, \chi_1^m\, \chi_2^n \,, \ (m,n) \in \mathbb{Z}_+^2\}$$

et $P$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur $H^{2+}$

$H^{2-} = \overline{\chi_1\, \chi_2\, H^{2+}}$ et $Q$ le proj. orth. de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur cet espace

$\tilde{H}^{2-} = L^2(\mathbb{T}^2) \ominus H^{2+}$ et $P_- = I - P$

$\tilde{H}^{2+} = L^2(\mathbb{T}^2) \ominus H^{2-}$ et $P_+ = I - Q$

<u>Inversion de la matrice de Toeplitz</u>

A.- L'idée générale pour inverser $T_\Lambda(f)$ peut être la suivante : on construit dans $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^2)$ un sous-espace $K$ de dimension finie tel que pour tout $\theta \in K$, $\theta/f \in E_\Lambda$. On considère la décomposition suivante :

$$L^2_{1/f}(\mathbb{T}^2) = K \oplus K^\perp \quad .$$

On observera que $L^1_{1/f}(\mathbb{T}^2) \subset L^1(\mathbb{T}^2)$, du fait que $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ et de l'inégalité de Schwarz. Le sous-espace $K^\perp$ est alors composé de fonctions $\psi \in L^2_{1/f}(\mathbb{T}^2)$ vérifiant :

(2) $\qquad \hat{\psi}(k,\ell) = 0 \quad , \quad \forall (k,\ell) \in \Lambda$

En effet soit $\psi \in K^\perp$ et $\theta \in K$, on a :

$$\int \theta \cdot \frac{\overline{\psi}}{f}\, d\sigma = 0 \qquad (\sigma \text{ mesure de Haar sur } \mathbb{T}^2)$$

D'après la propriété ci-dessus $\theta/f$ est un polynôme de $E_\Lambda$ et la relation (2) s'ensuit .

Soit $P_K$ le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^2)$ sur $K$ et $q \in E_\Lambda$ .

On écrit $P_K q = fp$ où $p$ est un polynôme de $E_\Lambda$ .

On décompose $q$ suivant la somme orthogonale (1)

$$q = fp + q - fp \ . \quad \text{On a d'après (2)}$$

$$q = P_\Lambda q = P_\Lambda f\, p = T_\Lambda(f)p$$

Ceci montre que $p = (T_\Lambda(f))^{-1} q = 1/f\, P_K q$ .

b) On notera dans la suite $H^\infty$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{T}^2$ et qui sont limites au bord de fonctions analytiques dans le bi-disque unité et bornées (voir [4]). On suppose $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$, on prend $\Lambda = [0,M] \times [0,N]$ et on note $E_{M,N} = E_\Lambda$

<u>Lemme 1</u> : Posons $K = \overline{g}\, H^{2+} \cap g\, \chi_1^{M+1}\, \chi_2^{N+1}\, H^{2-}$ .

**Le sous espace $K$ vérifie alors les propriétés décrites en a) .**

<u>Preuve</u> :

Le fait que $g^{\pm 1} \in H^\infty$ implique $g^{-1} H^{2+} = H^{2+}$ (et $\overline{g}^{-1} H^{2-} = H^{2-}$).

Soit $\phi \in K$, alors $\dfrac{\phi}{f} = \dfrac{\phi}{|g|^2}$ et $\dfrac{\phi}{|g|^2} \in \dfrac{1}{g} H^{2+} \cap \dfrac{1}{\overline{g}}\, \chi_1^{M+1}\, \chi_2^{N+1}\, H^{2-} = E_{M,N}$ .

<u>Remarque</u>

On peut écrire $K = \overline{g}(H^{2+} \cap \frac{g}{\overline{g}}\, \chi_1^{M+1}\, \chi_2^{N+1}\, H^{2-}) = \overline{g}\, K_0$, On note par $P_{K_0}$ le projecteur orthogonal de $L^2(T^2)$ sur $K_0$ , on a , $\forall\, q \in E_{M,N}$

$$P_K(q) = \overline{g}\, P_{K_0}\left(\frac{q}{\overline{g}}\right) \quad \text{et} \quad (T_{M,N}(f))^{-1}(q) = \frac{1}{g}\, P_{K_0}\left(\frac{q}{\overline{g}}\right) \ .$$

c) Il ne reste plus qu'à expliciter $P_{K_o}$ .

Posons $\phi_{M,N} = \chi_1^{M+1}\chi_2^{N+1}\frac{q}{g}$ et explicitons la projection orthogonal $P_{K_o}$ de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur $K_o = H^{2+} \cap \phi_{M,N}H^2$ .

L'orthogonal de $K_o$ s'écrit :

$$\overline{K_o = \tilde{H}^{2-} + \phi_{M,N}\,\tilde{H}^{2+}}$$

Si on pose $L_{M,N} = \tilde{H}^{2+} \cap (\tilde{H}^{2+} \ominus \overline{\phi}_{M,N}\,\tilde{H}^{2-})$ , on a aussi $\overline{K_o = \tilde{H}^{2-} + \phi_{M,N}\,L_{M,N}}$ . On remarquera que $L_{M,N} = \overline{P_+(\overline{\phi}_{M,N}\,H^{2+})}$ .

Ainsi, pour tout $\psi \in L^2(T^2)$ on a :

(i) $$P_{K_o}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + \phi_{M,N}\,P_+(\overline{\phi}_{M,N}\,\theta_{2,n}))$$

Avec $\forall n > 0$ , $\theta_{1,n} \in \tilde{H}^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ { $n \in \mathbb{N}$ = ensemble des entiers}

Nous allons donner un lemme qui caractérise cette projection.

<u>Lemme 2</u>

Soit $\psi$ un élément de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Pour qu'un élément de $K_o$ noté $P_{K_o}$ soit la projection orthogonale de $\psi$ sur e sous-espace , il faut et il suffit qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ , $(\theta_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $\theta_{1,n} \in \tilde{H}^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ telles que :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_{1,n}+\phi_{M,N}P_+\overline{\phi}_{M,N}\theta_{2,n})$ existe dans $L^2(\mathbb{T}^2)$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(P_+(\overline{\phi}_{M,N},\theta_{1,n}) + P_+(\overline{\phi}_{M,N},\theta_{2,n})) = P_+(\overline{\phi}_{M,N}\,\psi)$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + P_-\,\phi_{M,N}\,P_+\,\overline{\phi}_{M,N}\,\theta_{2,n})$

et la projection est donnée par :

$$P_{K_o}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty}(\theta_{1,n} + \phi_{M,N}\,P_+\,\overline{\phi}_{M,N}\,\theta_{2,n}) .$$

Preuve

a) Les conditions sont nécessaires : si $P_{K_o}(\psi)$ est la projection de $\psi$ sur $K_o$ la relation (1) dans c) implique (i) ; on obtient (ii) et (iii) en écrivant que $P_{K_o}(\psi) \in H^{2+}$ et $P_{K_o}(\psi) \in \phi_{M,N} H^{2-}$ .

b) Les conditions sont suffisantes :
La condition (i) montre que si on pose $P_{K_o}(\psi) = \psi - \lim_{n\to\infty} (\theta_{1,n} + \phi_{M,N} P_+ \overline{\phi}_{M,N} \theta_{2,n})$ alors $\psi - P_{K_o}(\psi) \in K_o$ et les conditions (ii) et (iii) montrent que $P_{K_o}(\psi) \in K_o$ .

Les équations (ii) et (iii) du lemme impliquent

$$\lim_{n\to\infty} (I - P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_- \phi_{M,N}) P_+(\overline{\phi}_{M,N} \theta_{2,n}) = P_+ \overline{\phi}_{M,N} P(\psi) .$$

Remarquons que $L_{M,N} = (I - P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_- \phi_{M,N}) H^{2+}$ , on a $P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_- \phi_{M,N} L_{M,N} \subset L_{M,N}$ . Notons par $H_{\phi_{M,N}}$ la restriction de $\psi \longrightarrow P_- \phi_{M,N} \psi$ à $L_{M,N}$ . La restriction de l'opérateur $\theta \longrightarrow P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_- \phi_{M,N} \theta$ à $L_{M,N}$ est égale à $H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}}$ .

Proposition 1

On suppose $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$ . Alors

(i) Il existe une constante positive $\alpha$ telle que :

$$\forall (M,N) \quad ||H_{\phi_{M,N}}|| \leqslant \alpha < 1 .$$

(ii) L'opérateur $T_{M,N}(f)$ est inversible et d'inverse : $\forall q \in E_{M,N}$ ,

$$(T_{M,N}(f))^{-1}(q) = \frac{q}{|g|^2} - \frac{1}{g} P_-\left(\frac{q}{g}\right) - \frac{1}{g} P_{\phi_{M,N}} (I - H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}})^{-1} P_+ \phi_{M,N} P\left(\frac{q}{g}\right) .$$

Preuve

a) Montrons que pour tout $(M,N) \in Z_+^2$, $\|H_{\phi_{M,N}}\| < 1$.

Posons $\phi_{M,N} = \phi$. On a $\|H_\phi^* H_\phi\| = \|H_\phi\|^2$. Comme $H_\phi^* H_\phi$ est autoadjoint, dire que $\|H_\phi^* H_\phi\| < 1$ équivaut à dire que ($I - H_\phi^* H_\phi$ est inversible). (Voir par exemple : leçons d'analyse fonctionnelle, page 264, RIESZ et NAGY). Ainsi le fait que $\|H_\phi^* H_\phi\| < 1$ équivaut à $\mathrm{Im}(I - H_\phi^* H_\phi)$ fermée. Remarquons par ailleurs que $\mathrm{Im}(I - H_\phi^* H_\phi) = (I - H_\phi^* H_\phi)L_{M,N} = P_+ \overline{\phi} P\phi \tilde{H}^{2+}$. En effet, soit $\psi \in \tilde{H}^{2+}$, on a $P_+ \overline{\phi} P\phi \psi = P_+ \overline{\phi}(I - P_-)\phi \psi = \psi - P_+ \phi P_- \psi$, or $\mathrm{Im}(I-H_\phi^* H_\phi) = (I - P_+ \overline{\phi} P_- \phi)\tilde{H}^{2+}$.

Montrons que $P_+ \overline{\phi} P \phi \tilde{H}^{2+}$ est fermé.

Le sous-espace $P \phi \tilde{H}^{2+}$ est l'orthogonal dans $H^{2+}$ du sous-espace $H^{2+} \cap \phi H^{2-}$, cela est clair. Mais par construction $H^{2+} \cap \phi H^{2-} = g(\frac{1}{g} H^{2+} \cap \frac{1}{\overline{g}} \chi_1^{M+1} \chi_2^{N+1} H^{2-}) = g\, E_{M,N}$ (où $E_{M,N}$ est composé de polynômes trigonométriques à spectre dans $[0,M] \times [0,N]$. Ceci implique que $\dim(H^{2+} \cap \phi H^{2-}) = (M+1)(N+1)$ est finie. Ainsi $P \phi \tilde{H}^{2+}$, étant l'orthogonal d'un sous-espace de dimension finie, est fermé.

Le sous-espace $P_+\overline{\phi} P \phi \tilde{H}^{2+} = (I-Q) \overline{\phi} P \phi \tilde{H}^{2+}$ est fermé, si la norme du projecteur $Q$ restreint à $\overline{\phi} P \phi \tilde{H}^{2+}$ est inférieure strictement à 1. Notons par $Q_\phi$ l'opérateur $\theta \longrightarrow Q \overline{\phi} \theta$ de $H^{2+}$ dans $H^{2-}$. Ecrivons $H^{2+} = \mathrm{Ker}(I - Q_\phi^* Q_\phi) \oplus \overline{\mathrm{Im}}(I - Q_\phi^* Q_\phi)$, mais nous avons :

$\mathrm{Ker}(I - Q_\phi^* Q_\phi) = H^{2+} \cap \phi H^{2-}$ qui est de dimension finie. (Voir ci-dessus) et comme précédemment on conclut au fait que $\mathrm{Im}(I - Q_\phi^* Q_\phi)$ (dont l'orthogonal est $H^{2+} \cap \phi H^{2-}$) est fermé. L'opérateur $Q_\phi^* Q_\phi$ restreint à $\mathrm{Im}(I - Q_\phi^* Q_\phi) = P \phi \tilde{H}^{2+}$ est de norme inférieure à 1 et est égale au carré de la norme de $Q_\phi$ restreint à $P \phi \tilde{H}^{2+}$.

Ceci démontre que $P_+ \overline{\phi} P \phi \tilde{H}^{2+}$ est fermé et donc $||H_\phi^* H_\phi|| < 1$.

b) Il existe un nombre $\alpha$ positif tel que $\forall (M,N)$, $||H_{\phi_{M,N}}|| \leqslant \alpha < 1$.
Posons $\rho_{M,N} = ||H_{\phi_{M,N}}||$, nous avons vu dans 1) que pour tout $(M,N) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\rho_{M,N} < 1$. Supposons que $\rho_{M,N}$ ne soient pas uniformément bornées par $\alpha < 1$. Il existera alors une sous-suite infinie $(M_k, N_k)$ de $\mathbb{Z}_+^2$ et une suite $\psi_k \in L_{M_k,N_k}$, $||\psi_k|| = 1$, telle que :

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} ||H_{\phi_{M_k,N_k}} \psi_k|| = 1$$

Posons $\psi_k' = \chi_1^{M_k} \chi_2^{N_k} \psi_k \in \tilde{H}^{2+} = \mathrm{Ker}(I - H_{\phi_{1,1}}^* H_{\phi_{1,1}}) \oplus \mathrm{Im}(I - H_{\phi_{1,1}}^* H_{\phi_{1,1}})$
Projetons $\psi_k'$ sur le noyau et l'image : $\psi_k' = \psi_{k,1}' + \psi_{k,2}'$, on a :

$$H_{\phi_{M_k,N_k}}(\psi_k) = P_- \phi_{M_k,N_k} \psi_k = P_- \phi_{1,1} \psi_k' = P_- \phi_{1,1} \psi_{k,1}' + P_- \phi_{1,1} \psi_{k,2}'.$$

Comme $\psi_{k,1}' \in \mathrm{Ker}(I - H_{\phi_{1,1}}^* H_{\phi_{1,1}}) = \tilde{H}^{2+} \cap \overline{\phi}_{1,1} \tilde{H}^{2-}$, on a

$P_- \phi_{1,1} \psi_{k,1}' = \phi_{1,1} \psi_{k,1}'$ et donc

$$||P_- \phi_{1,1} \psi_{k,1}'||^2 = ||\psi_k'||^2 + ||P_- \phi_{1,1} \psi_{k,2}'||^2 + (\phi_{1,1}\psi_{k,1}', P_-\phi_{1,1} \psi_{k,2}')$$

mais $(\phi_{1,1} \psi_{k,1}', P_- \phi_{1,1} \psi_{k,2}) = (\phi_{1,1} \psi_{k,1}', \phi_{1,1} \psi_{k,2}') = 0$,

et l'hypothèse (1) devient :

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} (1 - ||\psi_{k,1}'||^2 - ||P_- \phi_{1,1} \psi_{k,2}'||^2) = 0$$

En posant $1 = ||\psi_{k,1}'||^2 + ||\psi_{k,2}'||^2 = ||\psi_k'||^2$ on a :

$$(3) \qquad \lim_{k\to\infty} (||\psi_{k,2}'||^2 - ||P_- \phi_{1,1} \psi_{k,2}'||^2) = 0 \quad .$$

Montrons maintenant que pour tout $k$, $||\psi_{k,2}'|| \neq 0$.

En effet supposons le contraire, c'est à dire que $\psi'_k \in \tilde{H}^{2+} \cap \overline{\phi}_{1,1} \tilde{H}^{2-}$, on a alors $P_- \phi_{1,1}\psi'_k = P_- \phi_{N,N} \psi_k = \phi_{M,N} \psi_k = \phi_{1,1} \psi'_k$. Cela n'est possible que si $\psi_k \in \tilde{H}^{2+} \cap \phi_{M,N} \tilde{H}^{2-} = (L_{M,N})^{\perp}$.
Comme $\psi_k \in L_{M,N}$, ceci implique que $\psi_k = 0$ or $||\psi_k|| = 1$ par construction, l'hypothèse faite est donc absurde et on a bien $||\psi'_{k,2}|| \neq 0$, pour tout k. Nous deduisons de (3) la relation :

$$(4) \qquad \lim_{k\to\infty} ||P_- \phi_{1,1}(\psi'_{k,2}/||\psi'_{k,2}||)|| = \lim_{k\to\infty} ||H_{\phi_{1,1}}(\psi'_{k,2}/||\psi'_{k,2}||)||=1$$

pour une suite $(\psi'_{k,2}/||\psi'_{k,2}||)_{k>o}$ dans $L_{1,1}$. Mais cela équivaudrait au fait que $||H_{\phi_{1,1}}|| = 1$. Ce qui est contraire à ce que nous avons établi dans 1).

Montrons (ii).

Nous allons utiliser le lemme 2. Posons :

$$\psi_p = \sum_{k=o}^{p} (H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}})^k P_+ \phi_{M,N} P(\frac{q}{g})$$

Les sommes $\psi_p$ vérifient les conditions du lemme 2.

Posons $P_+ \overline{\phi}_{M,N} \theta_{2,p} = \psi_p$ et $\theta_{1,p} = P_-(\frac{q}{g}) - P_-(\phi_{M,N} \psi_p)$

(comme $\psi_p \in \mathrm{Im}(I - H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}})$, $\theta_{2,p} \in H^{2+}$ existe pour tout p).

Les sommes $\psi_p$ convergent d'après (i), il s'ensuit que les conditions (i) et (ii) du lemme sont satisfaites.

Etudions la condition (ii) du lemme, on a :

$$P_+(\overline{\phi}_{M,N} \theta_{1,p}) + P_+(\overline{\phi}_{M,N} \theta_{2,p}) =$$

$$P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_-(\frac{q}{g}) - P_+ \overline{\phi}_{M,N} P_- \phi_{M,N}\psi_p + \psi_p$$

On a, par construction de $\psi_p$ :

$$(I - P_+\overline{\phi}_{M,N}\, P_-\phi_{M,N})\psi_p = (-(I-H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}})^{p+1})P_+\, \overline{\phi}_{M,N}\, P_\psi .$$

Le fait que $\|H^*_{\phi_{M,N}} H_{\phi_{M,N}}\| < 1$ , implique (en tenant compte de $P_- = I - P)$ :

$$\lim_{p\to\infty} (P_+(\overline{\phi}_{M,N}\, \theta_{1,p}) + P_+(\overline{\phi}_{M,N}\, \theta_{2,p})) = +P_+(\phi_{M,N}\, \psi)$$

ce qui est la condition (ii) du lemme 2.

En tenant compte enfin de la relation :

$$\forall q \in E_{M,N} \text{ , } (T_{M,N}(f))^{-1}\, q = \frac{1}{g}\, P_{K_o}(\frac{q}{\overline{g}})$$

on obtient l'expression annoncée de l'inverse de $T_{M,N}(f)$. Le prochaine étape sera consacrée à l'étude du comportement asymptotique de la trace de $(T_{M,N}(f))^{-1}$.

Comportement asymptotique de la trace de l'inverse

On pose $M = N$ , et on note $\mathcal{C}_{N,N}$ le "carré" "$[0,N] \times [0,N]$ de $\mathbb{Z}^2_+$.

Proposition 2

On suppose toujours $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$ . Soit $P_{N,N}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur $E_{N,N}$ . On pose pour tout $q \in E_{N,N}$ :

$$B_{N,N}(q) = T_{N,N}(\tfrac{1}{f})(q) + P_{N,N}(\frac{1}{g} - P_-(\frac{q}{\overline{g}}) + \frac{e_{N+1,N+1}}{\overline{g}}\, P_+(\frac{\overline{e}_{N+1,N+1}}{g}\, q))$$

Alors :

(i) $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\, T_r((T_{N,N}(f))^{-1} - B_{N,N}) = 0$

(ii) Si $\beta_{m,n}$ est le coefficient de Fourier de $\frac{1}{g}$ au point $(m,n) \in \mathbb{Z}_+^2$ :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} T_r((T_{N,N}(f))^{-1} - T_{N,N}(\tfrac{1}{f})) = -2 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)|\beta_{m,n}|^2$$

(la somme du 2ème membre peut être égale à $-\infty$) .

<u>Preuve</u> :

Montrons (i).

Posons : $A_{N,N}(q) = P_{N,N}(\frac{q}{|g|^2}) - P_{N,N}(\frac{1}{g} P_-(\frac{q}{g}) + \frac{1}{g} P \phi_{N,N} P_+ \overline{\phi}_{M,N} P(\frac{q}{g}))$

et $e_{k,\ell} = \chi_1^k \chi_2^\ell$ . On a d'après la proposition 1 :

$$T_r((T_{N,N}(f))^{-1} - A_{N,N}) = \sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}} ((T_{N,N}(f))^{-1} - A_{N,N})e_{k,\ell}, e_{k,\ell})$$

$$= \sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}} \sum_{j=o}^{\infty} (H^*_{\phi_{N,N}} H_{\phi_{N,N}})^j P_+\overline{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}), P_+\overline{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}))$$

$$\leqslant (\sum_{1\leqslant j\leqslant\infty} ||H_{\phi_{N,N}}||^j) \sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}} ||P_- \phi_{N,N} P_+ \overline{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})||^2$$

a) D'après la proposition 1, $\forall N, \sum_{1\leqslant j\leqslant\infty} ||H_{\phi_{N,N}}||^j \leqslant K < +\infty$ .

(K constante positive).

Etudions dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessous la somme étendue au "carré" $\tau_{N,N}$ .

Soit $\beta_{m,n}$ le coefficient de Fourier de $\frac{1}{g}$ au point $(m,n)$ .

Posons $\frac{1}{g_L} = \sum_{(m,n)\in[0,L]^2} \beta_{m,n} \chi_1^m \chi_2^n$ ;

$(L < N)$ et $A_{k,\ell} = ||P_-\phi_{N,N} P_+\overline{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})||^2$ .

On a :

$$(1)\quad \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} ||P_- \phi_{N,N}\, P_+\bar{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2 \leq \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2\setminus[L,N]^2} A_{k,\ell} + \sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2} A_{k,\ell} + \sum_{(k,\ell)\in[L,N]^2\setminus[L\ N-L]^2} A_{k,\ell}$$

a) Etudions la première somme du second membre :

on a : $A_{k,\ell} \leq ||P_+\, \bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g} P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2$

et $P_+(\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g} P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})) = P_+\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}} - P_+\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g_L} P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})$

$$- P_+\, \bar{e}_{N+1,N+1}(\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L})\bar{g}\, P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})$$

Remarquons que si $(k,\ell) \in [0,\ N-L]^2$ alors le spectre de $\frac{\bar{g}}{g_L} P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})$ est contenu dans $[-\infty,N]^2$ et donc $P_+\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g_L} P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})=0$ .

On note par $R_o = [0,N]^2\setminus[L,N]^2$ , $R_1 = [0,L] \times [N-L,N]$ et $R_2 = [N-L,N] \times [0,L]$ . On a :

$$\Big(\sum_{(k,\ell)\in R_o} ||P_+\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g} P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_o} P_+(\bar{e}_{N+1,N+1} \frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} ||P_+\, \bar{e}_{N+1,N+1} \frac{\bar{g}}{g} P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_o\setminus R_1\cup R_2} ||P_+\, \bar{e}_{N+1,N+1}(\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L})\bar{g}\, P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

Nous allons majorer chacune des sommes du second membre de l'inégalité ci-dessus :

$$\sum_{(k,\ell)\in R_o} \|P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}\|^2 = \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \|P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g})\|^2$$
$$+ \sum_{(k,\ell)\in R_o\setminus R_1\cup R_2} \|P_+(e_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}\|^2 \;;$$

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \|P_+\,\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{\overline{g}}{g}P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})\|^2 \leq \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}\|^2 \;;$$

$$\sum_{(k,\ell)\in R_o\setminus R_1\cup R_2} \overline{e}_{N+1,N+1}(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L})\overline{g}\,P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})\|^2$$
$$\leq 2(N+L)(L+1)\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\|_2^2\,\|g^{-1}\|_\infty\,\|g\|_\infty .$$

b) Etudions la troisième somme du second membre de (1), on écrit :

$$P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{\overline{g}}{g}P\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}) = P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}) - P_+\,\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{\overline{g}}{g}P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})$$

on a spectre de $P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}) \subset [k-N,\infty]\times[\ell-N,+\infty]$, dès que $k\geq L,\ell\geq L$,

on aura aussi $Sp(e_{N+1,N+1}\frac{g}{g_L}\;P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}))\subset[k-L,\infty]\times[\ell-L,\infty]\subset\mathbb{Z}_+^2$

et $P_-(e_{N+1,N+1}\frac{g}{\overline{g}_L}P_+\,\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}) = 0$ dès que $(k,\ell)\in[L,N]^2$.

On obtient l'inégalité suivante en notant par $R_3 = [L,N]^2\setminus[N-L,N]^2$

$$\Big(\sum_{(k,\ell)\in R_3}\|P_-\phi_{N,N}P_+\overline{\phi}_{N,N}\,P(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_3}\|P_-(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L})e_{N+1,N+1}\,g\,P_+\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_3}\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq (2(N+1-L)(L+1))^{\frac{1}{2}}\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\|_2\,\|g\|_\infty\|g^{-1}\|_\infty + \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_3}\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{g}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

c) Etudions la deuxième somme du second membre de (1)

$$\Big(\sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2} A_{k,\ell}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{[L,N-L]^2}\|P_-\phi_{M,N}P_+\overline{\phi}_{M,N}\,(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}} - P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \Big(\sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2}\|P_+(\overline{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}})\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2}\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\overline{g}}\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

d) Nous allons montrer que chacune des sommes étudiées en a), b), c) divisées par $(N+1)^{1/2}$ tendent vers 0 lorsque $N \to \infty$. On remarque d'abord que :

$$(1) \quad \sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2} \left\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}\right\|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2} \left\|P_+\bar{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}\right\|^2 =$$

$$= \sum_{(k,\ell)\in[L,N-L]^2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$$

$$(2) \quad \sum_{(k,\ell)\in R_3} \left\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}\right\|^2 = \sum_{(k,\ell)\in R_o\setminus R_1\cup R_2} \left\|P_+\bar{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}\right\|^2 =$$

$$= \sum_{(k,\ell)\in R_3} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^{2+}\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$$

$$(3) \quad \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}\right\|^2 = \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left\|P_+\bar{e}_{N+1,N+1}\frac{e_{k,\ell}}{g}\right\|^2 =$$

$$= \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$$

et enfin, intéressons nous à la troisième somme.

On a :

$$\Big(\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left\|P_-\big(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}\big)\right\|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left\|P_-\big(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}_L}\big)\right\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sqrt{2}(L+1)\left\|\frac{1}{g_L} - \frac{1}{g}\right\|_2 \|g^{-1}\|_\infty \|g\|_\infty$$

Evaluons la somme $\displaystyle\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left\|P_-\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}_L}\right\|^2 = \sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$

avec la convention que $\beta_{m,n} = 0$ dès que $m \geqslant L$ ou $n \geqslant L$.

Ecrivons :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2 = \sum_{j=o}^{\ell} \sum_{m\geq k+1} |\beta_{m,j}|^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{n\geq \ell+1} |\beta_{i,n}|^2 + \sum_{\substack{m\geq k+1 \\ n\geq \ell+1}} |\beta_{m,n}|^2$$

Dans le second membre on note par $I_{k,\ell}$ la première somme, $J_{k,\ell}$ la seconde et $H_{k,\ell}$ la troisième. On a, $(N > 2L)$,

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} I_{k,\ell} = \sum_{(k,\ell)\in R_1} I_{k,\ell}$$ car si $(k,\ell)\in R_2$, $\beta_{m,j} = 0$ dès que $m \geq k_{+1} > N-L > L$, et

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1} I_{k,\ell} = \sum_{\ell=N-L}^{N} \sum_{k=o}^{L} I_{k,\ell} = \sum_{\ell=N-L}^{N} \left( \sum_{j=o}^{\ell} \sum_{k=o}^{L} \sum_{m\geq k+1} |\beta_{m,j}|^2\right)$$

Comme $\ell \in [N-L,N]$ et que $\beta_{m,j} = 0$ dès que $j \geq \ell \geq N-L > L$, la somme étendue de $j = 0,\ldots,\ell$ se réduit à la somme étendue de $j = 0,\ldots,L$, d'où :

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} I_{k,\ell} = \sum_{\ell=N-L}^{N} \left( \sum_{j=o}^{L} \sum_{k=o}^{L} \sum_{m\geq k+1} |\beta_{m,j}|^2\right)$$

Mais, comme $\displaystyle\sum_{k=o}^{L} \sum_{m\geq k+1} |\beta_{m,j}|^2 = \sum_{k=o}^{L} k\,|\beta_{k,j}|^2$,

on obtient :

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} I_{k,\ell} = (L+1) \sum_{j=o}^{L} \sum_{k=o}^{L} k\,|\beta_{k,j}|^2$$

On a de manière symétrique :

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} J_{k,\ell} = (L+1) \sum_{i=o}^{L} \sum_{\ell=o}^{L} \ell\,|\beta_{i,\ell}|^2$$

On remarque, en outre que $H_{k,\ell} = 0$ si $(k,\ell) \in R_1\cup R_2$ et la somme cherchée est égale à :

$$\sum_{(k,\ell)\in R_1\cup R_2} \left|\left| P_- \frac{e_{k,\ell}}{\bar g} \right|\right|^2 = (L+1) \sum_{(k,\ell)\in[0,L]^2} (k+\ell)\ |\beta_{k,\ell}|^2$$

La même technique permet d'évaluer les sommes (1) et (2), on en déduit ainsi en faisant tendre N vers l'infini puis L vers l'infini que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \left|\left| P_-\ \phi_{N,N}\ P_+\ \bar\phi_{N,N}\ P\left(\frac{e_{k,\ell}}{\bar g}\right) \right|\right|^2 = 0$$

avec l'hypothèse $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)\,|\beta_{m,n}|^2 < + 0$ et donc que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ T_r((T_{N,N}(f))^{-1} - A_{N,N}) = 0$$

e) Montrons enfin que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} (T_r\ (A_{N,N} - B_{N,N})) = 0$ .

On a $B_{N,N}(q) - A_{N,N}(q) = P_{N,N}\left(\frac{e_{N+1,N+1}}{\bar g}\ P_+\ \frac{\bar e_{N+1,N+1}}{g} - \frac{1}{g}\phi_{N,N}\ P_+\ \bar\phi_{N,N}\ P\left(\frac{q}{\bar g}\right)\right)$

et $T_r(B_{N,N}-A_{N,N}) = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \left(\left|\left|P_+ \frac{\bar e_{N+1,N+1}}{g}\ e_{k,\ell}\right|\right|^2 - \left|\left|P_+\bar\phi_{N,N}P\left(\frac{e_{k,\ell}}{\bar g}\right)\right|\right|^2\right)$

Posons $W_N(q) = U_N(q) - V_N(q) = P_{N,N}\left(P_+\ \frac{\bar e_{N+1,N+1}}{g}\ q\right) - P_{N,N}\ P_+\ \bar\phi_{N,N}\ P\left(\frac{q}{\bar g}\right)$

$$= P_{N,N}\left(P_+\ \bar\phi_{N,N}\ P_-\ \left(\frac{q}{\bar g}\right)\right)$$

on a $T_r(B_{N,N}-A_{N,N}) = ||U_N||^2_{H.S} - ||V_N||^2_{H.S} < (||U_N||_{H.S}-||V_N||_{H.S})$

$$(||U_N||_{H.S}+||V_N||_{H.S})$$

(H.S = norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur).

Notons que $\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \| P_+ \bar{e}_{N+1,N+1} \frac{e_{k,\ell}}{g} \|^2 = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \| P_- \frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}} \|^2$

$$= \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \ \sum_{((m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$$

et les mêmes techniques de sommation utilisées dans d) pour évaluer la somme (3) et l'hypothèse $\Sigma(m+n)|\beta_{m,n}|^2 < +\infty$ donnent

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \ \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{M,n}|^2 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)|\beta_{m,n}|^2$$

Cela nous permet de dire que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)^{1/2}} \|U_N\|_{H.S} \ ( \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n) \ |\beta_{m,n}|^2 < +\infty$$

(on écrit $P \frac{q}{g} = \frac{q}{g} - P_-(\frac{q}{g})$ et on utilise les majorations analogues à celles utilisées en a), b), c) et d)) .

Par ailleurs $\|U_N\|_{HS} - \|V_N\|_{HS} < \|W_N\|_{HS}$ ,

or $$\|W_N\|_{HS}^2 = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} \|P_+ \bar{\phi}_{M,N} \ P_- \frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}\|^2$$

$$\leqslant \sum_{[0,N]^2\setminus[L,N]^2} (\|P_+ \frac{\bar{e}_{N+1,N+1}}{g} \bar{\bar{e}}_{k,\ell}\|^2 - \|P_+ \bar{\phi}_{N,N} P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})\|^2)$$

$$+ \sum_{[L,N]^2} \|P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})\|^2$$

Les mêmes techniques de sommations utilisées ic-dessus nous permettent de montrer que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \|W\|_{HS}^2 = 0$ .

On obtient alors $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \ T_r(A_{N,N} - B_{N,N}) = 0 \ .$$

Montrons (ii) :

On suppose toujours $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)\ |\beta_{m,n}|^2 < +\infty$ .

Comme nous l'avons remarqué plus haut et du fait que les traces des opérateurs $q \longrightarrow P_{N,N}(\frac{1}{g}\ P_-(\frac{q}{g}))$ et $q \longrightarrow P_{N,N}\ \frac{e_{N+1,N+1}}{\bar{g}}\ P_+(\frac{\bar{e}_{N+1,N+1}}{g}q)$ sont égales respectivement à $\sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}} ||P_-(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})||^2$ et $\sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}} ||P_+\ \frac{\bar{e}_{N+1,N+1}}{g}\ q||^2$ dont la valeur commune est

$\sum_{(k,\ell)\in\tau_{N,N}}\ \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$ et tenant compte de (i) nous obtenons :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ T_r\Big((T_{N,N}(f))^{-1} - T_{N,N}(\tfrac{1}{f})\Big) = -2 \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)\,|\beta_{m,n}|^2$$

On suppose maintenant $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)\ |\beta_{m,n}|^2 = \infty$ .

D'après l'expression de $(T_{N,N}(f))^{-1}$ dans la proposition 1, on a :

$$T_r((T_{N,N}(\tfrac{1}{f})-(T_{N,N}(f))^{-1}) = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2} ||P_-(\frac{e_{k,\ell}}{g})||^2$$

$$+ \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\ \sum_{\beta=o}^{\infty} ((H^*_{\phi_{N,N}}\ H_{\phi_{N,N}})^p P_+\ \bar{\phi}_{N,N}P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}})\ P_+\bar{\phi}_{N,N}P(\frac{e_{k,\ell}}{\bar{g}}))$$

Autrement dit :

$$(T_r(T_{N,N}(\tfrac{1}{f})-T_{N,N}(f))^{-1}) \geqslant \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\ \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2$$

Mais comme $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ (\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\ \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2\setminus\tau_{k,\ell}} |\beta_{m,n}|^2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2}(m+n)\,|\beta_{m,n}|^2$

(Nous avons établi ci-dessus cette égalité lorsque la somme du 2^e^ membre est finie. Lorsque la somme est infinie, on la considère comme limite de sommes $\sum_{(m,n)\in[0,L]^2} (m+n)\ |\beta_{m,n}|^2)$ .

On obtient alors :

$$\lim_{N\to\infty} T_r \frac{1}{N+1} (T_{N,N}(\tfrac{1}{f}) - (T_{N,N}(f))^{-1}) = +\infty$$

ce qui démontre complètement (ii).

Dans ce qui suit nous allons donner une forme plus intrinsèque à la proposition 2

Théorème

Soit $f > 0$ et continue sur $\mathbb{T}^2$ .

Alors :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} T_r \left((T_{N,N}(f))^{-1} - T_{N,N}(\tfrac{1}{f})\right)$$

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (|m|+|n|)\ C_{m,n}(\mathrm{Log}\ f)\ \overline{C_{m,n}}\ (\tfrac{1}{f})$$

Preuve :

Lorsque $f$ est semi-continue inférieurement positive et bornée sur $\mathbb{T}^2$ (sur $\mathbb{T}^n$ en générale), on peut trouver une fonction $g$ telle que $f = |g|^2$, la fonction $g$ étant définie comme limite p.p. sur $\mathbb{T}^2$ d'une fonction analytique $\tilde{g}$ dans le bi-disque $U^2$ ([4] Théorème 3.5.3., page 55).

Comme en outre $f$ est continue alors $g^{-1}$ est limite au bord de $\frac{1}{\tilde{g}}$ , c'est ainsi que $g^{\pm} \in H^{\infty}$ et $f$ vérifie les conditions de la proposition, donc la limite du premier membre est égale à

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_+^2} (m+n)\ |C_{m,n}(\tfrac{1}{g})|^2 .$$

Pour démontrer le théorème il faut établir l'égalité entre cette expression et l'expression du second membre de l'égalité ci-dessus.

Soient $\psi_1, \psi_2 \in L^1(\mathbb{T}^2)$, on note par :

$$<\psi_1,\psi_2>_{2,\frac{1}{2}} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)\ C_{m,n}(\psi_1).\overline{C}_{m,n}(\psi_2)$$

On pose $\psi_r(e^{i\theta_1},e^{i\theta_2}) = \frac{1}{\tilde{g}}(z_1,z_2) = \frac{1}{\tilde{g}}(re^{i\theta_1},re^{i\theta_2})$ avec $r < 1$.

On a $\|\psi_r\|^2_{2,\frac{1}{2}} = <-(\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2})\psi_r\ ,\ \psi_r>_2$ (produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$),

comme $\psi_r(e^{i\theta}) \neq 0$ pour $r < 1$, on a aussi :

$$\|\psi_r\|^2_{2,\frac{1}{2}} = <-(\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \frac{\partial}{\partial\theta_2})\ \psi_{r/\psi_r}\ ,\ |\psi_r|^2>_2$$

On procède de même avec $\overline{\psi}_r$ et la somme des deux expressions donne :

$$2\ \|\psi_r\|^2_{2,\frac{1}{2}} = <\mathrm{Log}|\psi_r|^2, |\psi_r|^2>_{2,\frac{1}{2}} = \sum_{(m,n)\in Z^2} (|m|+|n|) C_{m,n}(\mathrm{Log}|\ _r|^2)\overline{C}_{m,n}(|\psi_r|^2)$$

Il faut noter que :

$$\mathrm{Log}|\psi_r|^2 \longrightarrow \mathrm{Log}\ \frac{1}{|g|^2} = \mathrm{Log}\ \frac{1}{f} \qquad \text{p.p.}$$

([4] théorème 3.5.3. page 55 et théorème 2.3.1 page 24).

Comme d'autre part $\mathrm{Log}|\phi_r|$ est bornée pour tout $r < 1$, le théorème de la convergence dominée implique :

$$\lim_{r\to 1}\ C_{m,n}(\mathrm{Log}|\psi_r|) = C_{m,n}(\mathrm{Log}(\tfrac{1}{f}))$$

En utilisant les mêmes arguments, on obtient :

$$\lim_{r\to 1}\ C_{m,n}(|\psi_r|^2) = C_{m,n}(\tfrac{1}{f})$$

et le théorème se trouve démontré.

Equivalence avec le théorème de Szegö

Corollaire 1 (Théorème de Szegö)

Soit $f$ positive strictement et continue sur $\mathbb{T}^2$ et $\|f\|_{2,\frac{1}{2}} < +\infty$

Alors :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \operatorname{Log}(\det T_{N,N}(f) - T_r\, T_{N,N}(\operatorname{Log} f))$$

$$= \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)\, |C_{m,n}(\operatorname{Log} f)|^2 = \|\operatorname{Log} f\|_{2,\frac{1}{2}}$$

Avant de donner la preuve du corollaire, nous aurons besoin d'un lemme.

Soit $N(f)$ une norme équivalente à

$f \longrightarrow \|f\|_{2,\frac{1}{2}} = \left(\sum_{(m,n)\in Z^2} (|m|+|n|)\, |C_{m,n}(f)^2\right)^{1/2} < +\infty$ , que nous

preciserons dans la démonstration du lemme et soit :

$$\mathcal{A} = \{f \in L^\infty(\mathbb{T}^2) \,/\, \|f\|_A = \|f\|_\infty + N(f) < +\infty\} \;.$$

Lemme 3

(i) $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach

(ii) Soit $f = |g|^2$ telle que $g^{\pm 1} \in H^\infty \cap \mathcal{A}$, soit $h \in H^\infty \cap \mathcal{A}$ dans un voisinage de 0 (dans $\mathcal{A}$) tel que $T_{N,N}(|g+h|^2)$ soit inversible. Posons $\psi_N(g) = \frac{1}{N+1} T_r((T_{N,N}(|g|^2))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{|g|^2}))$ .

Alors il existe une constante $K > 0$ telle que ;

$$|\psi_N(g+h) - \psi_N(g)| \leqslant K(\|h\|_\infty + \|h\|_{2,\frac{1}{2}}) \;.$$

<u>Preuve</u>

Nous n'allons pas donner ici la preuve de (ii) qui est purement technique et dont la propriété n'est pas utilisée dans la suite.

Prouvons (i) :

Considérons la quantité suivante :

$$N^2(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{[0,2\pi]^2} \frac{|f(\theta+x)-f(\theta)|^2}{\|x\|^3}\, d\theta - dx$$

(on identifie $f$ définie sur le bi-tore $\mathbb{T}^2$ et $\tilde{f}(\theta) = f(e^{i\theta})$ où $\tilde{f}$ est périodique sur $\mathbb{R}^2$).

En suivant la méthode employée dans [6], page 153 , on a d'après l'égalité de Parseval :

$$N^2(f) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |\hat{f}(m,n)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i\langle (m,n),x\rangle} - 1}{\|x\|^3}\, dx$$

et l'intégrale du second memebre est égale à $C(m^2+n^2)^{1/2}$ où $C > 0$ ne dépend que de la dimension de l'espace.

Ceci montre que les normes $N(f)$ et $\|f\|_{2,\frac{1}{2}}$ sont équivalentes. Il est clair alors que :

$$N^2(f_1.f_2) \leqslant N^2(f_1)\|f_2\|_\infty^2 + N^2(f_2)\|f_1\|_\infty^2 \leqslant (N(f_1)\|f_1\|_\infty + N(f_2)\|f_2\|_\infty)^2$$

On en déduit que :

$$\|f_1 f_2\|_\infty + N(f_1 f_2) < (N(f_1) + \|f_1\|_\infty)(N(f_2) + \|f_2\|_\infty)$$

et avec l'inégalité établie ci-dessus $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach.

Preuve du corollaire

a) Etablissons la relations suivante :

Soit $h$ une fonction positive et continue sur $\mathbb{T}^2$ telle que $||h|| \leq 1$.

$$(1) \quad \text{Log det } T_{N,N}(1-h) - T_r T_{N,N} \text{Log}(1-h) = -\int_0^1 (T_r(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h})) \frac{d\lambda}{\lambda} .$$

En effet on a la propriété suivante :

$$\frac{d}{d\lambda} \text{Log det } T_{N,N}(1-\lambda h) = -T_r \, T_{N,N}(h)(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1}$$

et d'autre part :

$$\frac{d}{d\lambda} T_r \, T_{N,N}(\text{Log}(1-\lambda h)) = - T_r \, T_{N,N} (\frac{h}{1-\lambda h})$$

On en déduit :

$$\frac{d}{d\lambda} (\text{Log det } T_{N,N}(1-\lambda h) - T_{N,N} \text{ Log}(1-\lambda h)) = \frac{-1}{\lambda} T_r((T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h}))$$

et la relation s'obtient par intégration sur l'intervalle $[0,1]$.

b) Etablissons la relation suivante :

$$(2) \quad \lim_{N\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{N+1} T_r(T_{N,N}(1-\lambda h)^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h}))\, d\lambda$$

$$= \int_0^1 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} T_r(T_{N,N}(1-\lambda h)^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h}))d\lambda$$

$$= 2 \int_0^1 <\text{Log } (1-\lambda h), \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

En effet pour tout $\lambda \in [0,1]$ le théorème 1 implique que l'égalité entre l deuxième et troisième expression ci-dessus.

D'autre part le calcul de la trace de $\frac{1}{N+1}((T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h}))$ tel qu'il a été fait pour prouver la proposition 2, montre que l'on a:

$$\forall N, \ |\frac{1}{N+1} T_r(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h})) \leqslant 2 <\log(1-\lambda h), \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}}$$

Comme d'autre part la fonction $\lambda \longrightarrow <\mathrm{Log}(1-\lambda h), \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[0,1]$ (Elle est $C^{\infty}$ à cause de l'hypothèse $||h|| < 1)$ , le théorème de la convergence dominée justifie l'égalité entre le premier et second terme de l'égalité (2), ce qui prouve (2) complètement.

c) Montrons que :

$$(3) \quad ||\mathrm{Log}(1-h)||^2_{2,\frac{1}{2}} = -2\int_0^1 <\mathrm{Log}(1-\lambda h), \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}} d\lambda$$

où ce qui revient au même :

$$\frac{d}{d\lambda} ||\mathrm{Log}(1-\lambda h)||^2_{2,\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\lambda} <\mathrm{Log}(1-\lambda h), \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}}$$

Le fait que $||h||_{\mathcal{A}} < 1$ , nous permet de montrer (à l'aide d'un développement en serie entière, comme il a été suggéré dans (1), de $\mathrm{Log}(1-\lambda h)$ et $\frac{1}{1-\lambda h}$ en fonction de $\lambda h$) que :

$$\frac{d}{d\lambda} ||\mathrm{Log}(1-\lambda h)||^2_{2,\frac{1}{2}} = 2\mathrm{Re}<\mathrm{Log}(1-\lambda h), \frac{h}{1-\lambda h}>_{2,1/2}$$

$$= -2 <\mathrm{Log}\ 1-\lambda h, \frac{h}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}} \quad .$$

En écrivant $\quad -\frac{h}{1-\lambda h} = \frac{1}{\lambda}(1-\frac{1}{1-\lambda h})$ , on obtient :

$$\frac{d}{d\lambda} \; ||\text{Log}(1-\lambda h)||^2_{2,\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\lambda} <\text{Log}(1-\lambda h) \, , \, \frac{1}{1-\lambda h}>_{2,\frac{1}{2}}$$

En réunissant (1), (2) et (3) , on a :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} (\text{Log det } T_{N,N}(1-h) - T_r T_{N,N}\text{Log}(1-h)) = ||\text{Log}(1-h)||^2_{2,\frac{1}{2}}$$

e) Si $f$ est positive et continue sur $\mathbb{T}^2$ et $||f||_{2,\frac{1}{2}} < +\infty$ , alors en divisant $f$ par une constante convenable, et en écrivant $f = 1-h$ avec $||h|| < 1$ , on se ramène au cas précédent et on obtient la forme générale du théorème limite de Szegö.

Nous étendons le théorème de Szegö, dans le sens que nous remplaçons la fonction logarithme par une fonction analytique au voisinage de 1.

<u>Corollaire 2</u>

Soit $F$ une fonction à valeurs complexe, analytique au voisinage de $1$ : $F(z) = \Sigma\, a_n z^n$ , $a_n \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$ .

Soit $f(\lambda) = 1-\lambda h$ où $h$ vérifie $0 < h < 1$

et $\Sigma(|m|+|n|)|C_{m,n}(h)|^2 < +\infty$ , $\lambda \in |0,1|$ . On pose

$\phi(\lambda) = <\text{Log } f(\lambda), \frac{1}{f(\lambda)}>_{2,\frac{1}{2}}$ .

Alors :

(i) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} T_r(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k)) = \frac{1}{k!}\left(\frac{dk}{d\lambda^k}\phi\right)(0)$ (k entier)

(ii) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} (T_r(F(T_{N,N}(1-\lambda h)) - T_{N,N}(F(1-\lambda h))) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\left(\frac{dk}{d\lambda^k}\phi\right)(0).\lambda^k$

pour tout $\lambda$ dans un voisinage de $0$ convenablement choisi.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4

Soient $f_1$ et $f_2$ dans $L^1(\mathbb{T}^2)$, on suppose que :

$$\|f_j\|^2_{2,\frac{1}{2}} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} (|m|+|n|)\,|C_{m,n}(f_j)|^2 < +\infty \qquad j = 1,2$$

On a :

(i) $$\operatorname{Lim} \frac{1}{N+1} T_r(T_{N,N}\, f_1\, \overline{f}_2 - T_{N,N}f_1 T_{N,N}\overline{f}_2) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}(|m|+|n|)C_{m,n}(f_1)\overline{C}_{m,n}(f_2)$$

(ii) On a pour tout $N$

$$\frac{1}{N+1}\ \|T_{N,N}f_1\cdot\overline{f}_2 - T_{N,N}f_1\ T_{N,N}\overline{f}_2\|_1 \leqslant \|f_1\|_{2,\frac{1}{2}}\|f_2\|_{2,\frac{1}{2}}$$

( $\|\ \ \|_1$ = norme nucléaire d'opérateurs).

Preuve du Lemme

(i) On a :

(1) $$T_r T_{N,N}f_1\overline{f}_2 = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}(T_{N,N}f_1\overline{f}_2\, e_{k,\ell}, e_{k,\ell}) = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}(\overline{f}_2 e_{k,\ell}, \overline{f}_1 e_{k,\ell})$$

(2) $$T_r T_{N,N}f_1\ T_{N,N}\overline{f}_2 = \sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}(P_{N,N}\ \overline{f}_2\ e_{k,\ell}\ ,\ \overline{f}_1\ e_{k,\ell})$$

($P_{N,N}$ désigne la projection de $L^2(\mathbb{T}^2)$ sur le sous-espace $E_{N,N}$ des polynômes de spectre dans $[0,N]^2$).

La différence de (1) et (2) donne :

$*$ : $$\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}((I-P_{N,N})\overline{f}_2 e_{k,\ell}, f_1 e_{k,\ell}) =$$

$$\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\ \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus[0,N]^2} C_{m,n}(\overline{f}_1 e_{k,\ell})\ \overline{C}_{m,n}(f_2 e_{k,\ell})\ .$$

On obtient le résultat de (i) par des calculs analogues à deux effectués dans la proposition 2.

(ii) En fait l'opérateur $\frac{1}{N+1}\,(T_{N,N}f_1\bar{f}_2 - T_{N,N}f_1\; T_{N,N}\bar{f}_2) \;=\; S_{N,N}$ se présente comme un produit d'opérateurs sur $E_{N,N}$ :

$$S_{N,N} = P_{N,N}\, K^{*}_{N,\bar{f}_1}\; K_{N,\bar{f}_2}\,, \quad \text{avec pour tout } p \in E_{N,N}$$

$$K_{N,\bar{f}_j}(p) = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\,(I-P_{N,N})(f_j p)\;,\quad j = 1,2\;.$$

Les opérateurs $K_{N,\bar{f}_j}$ sont des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $H^{2+}$.
On a ainsi :

$$\left\|\frac{1}{N+1}(T_{N,N}f_1\bar{f}_2-T_{N,N}f_1T_{N,N}\bar{f}_2)\right\|_1 \leqslant \|P_{N,N}\|\;\; \|K^{*}_{N,\bar{f}_1}\|_{H.S}\;\; \|K_{N,\bar{f}_2}\|_{H.S}$$

$$\leqslant \Big(\frac{1}{N+1}\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\;\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus[0,N]^2}|C_{m,n}(\bar{f}_1 e_{k,\ell})|^2\Big)^{1/2}\,.$$

$$\Big(\frac{1}{N+1}\sum_{(k,\ell)\in[0,N]^2}\;\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus[0,N]^2}|C_{m,n}(\bar{f}_2 e_{k,\ell})|^2\Big)^{1/2}$$

D'après des calculs analogues à ceux faits dans la proposition 2 et l'hypothèse $\|f_j\|^2_{2,\frac{1}{2}}$, les expressions du second membres de l'égalité ci-dessus tendent, en restant majorées vers, $\|f_1\|^2_{2,\frac{1}{2}}$ et $\|f_2\|^2_{2,\frac{1}{2}}$, d'où l'inégalité de (ii).

<u>Preuve du Corollaire 2</u>

Montrons (i), pour $k = 2$, on a :

$$T_r\,\frac{1}{N+1}\,\Big|(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}\Big(\frac{1}{1-\lambda h}\Big)\Big|$$

$$= T_r\,\frac{1}{N+1}\,\Big(\lambda^2(T^2_{N,N}(h)-T_{N,N}(h^2)) + \lambda^3(T^3_{N,N}(h)\,(I-\lambda\; T_{N,N}(h))^{-1}-T_{N,N}(h^3)T_{N,N}\Big(\frac{1}{1-\lambda h}\Big)\Big)$$

La fonction $\lambda \longrightarrow \phi(\lambda)$ est dans $C^\infty([0,1])$ à cause de l'hypothèse $\|h\| < 1$ . En tenant compte du fait que $\phi(0) = 0$ et en faisant tendre $N$ vers l'infini, on a :

$$\phi(\lambda) - \phi(0) - \lambda\, \phi'(0) = \lambda^2 \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ T_r(T^2_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^2))$$

$$= \lambda^3 (\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ T_r(T_r(T^3_{N,N}(h)(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(h^3) T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h}))$$

Les quantités $\frac{1}{N+1}\ |T_r(T^3_{N,N}(h) - T_{N,N}(h)\ T_{N,N}(h^2))|$ et

$\frac{1}{N+1}\ |(T_{N,N}(h)\ T_N(h^2) - T_{N,N}(h^3)|$ sont majorées respectivement d'après le lemme ci-dessus, par $\|h\|_\infty . \|h\|^2_{\frac{1}{2}}$ et $\|h\|_{2,\frac{1}{2}} \|h^2\|_{2,\frac{1}{2}}$ d'autre part en utilisant l'égalité $|\frac{1}{N+1}\ T_r(T_{N,N}(1-\lambda h))^{-1} - T_{N,N}(\frac{1}{1-\lambda h})|$

$\leq 2 \sup_{\lambda\varepsilon[0,1]} |\langle \mathrm{Log}\ 1-\lambda h\ ,\ \frac{1}{1-\lambda n} \rangle_{2,\frac{1}{2}}|$ , on remarquera que

$\|h^2\|_{2,\frac{1}{2}} \leq K_1(\|h\|_\infty + \|h\|_{2,\frac{1}{2}})$ , comme il a été vu plus haut ( $K_1$ = constante positive

On obtient ainsi :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\ T_r(T^2_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^2)) = \frac{\phi''(0)}{2}$$

On établit (i) pour tout entier k, par un raisonnement par récurrence et par le même procédé que celui utilisé ci-dessus.

Montrons (ii)

Remarquons d'abord que pour un choix convenable de $\lambda$ au voisinage de 0 les séries :

$$\sum_{k=o}^{\infty} a_k\ \lambda^k\ T^k_{N,N}(h) \quad \text{et} \quad \sum_{k=o}^{\infty} a_k\ \lambda^k\ T_{N,N}(h^k)$$

Convergent pour tout $N$ en normes d'opérateurs

(en effet $\|T^k_{N,N}(h)\| \leq \|h\|^k_\infty$ et $\|T_{N,N}(h^k)\| \leq \|h\|^k_\infty$)

D'autre part il existe une constante $C'$ telle que : $(k > 3)$

$$(1) \qquad \left|\frac{1}{N+1} T_r(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k))\right| \leq C'^k(\|h\|_\infty + \|h\|_{2,\frac{1}{2}})^k$$

En effet, on a :

$$\frac{1}{N+1} |T_r(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k)| \leq \frac{1}{N+1}|T_r(T_{N,N}(h).T^{k-1}_{N,N}(h) - T_{N,N}(h).T_{N,N}(h^{k-1})|$$

$$+ \frac{1}{N+1}|T_r(T_{N,N}(h)T_{N,N}(h^{k-1}) - T_{N,N}(h.h^{k-1})|$$

$$\leq \|T_{N,N}(h)\| \ |T_r \frac{1}{N+1} (T^{k-1}_{N,N}(h)-T_{N,N}(h^{k-1})| + \|h\|_{2,\frac{1}{2}} \|h^{k-1}\|_{2,\frac{1}{2}}$$

or $\|h^k\|_{2,1/2} \leq C'^{k-1}(\|h\|_{2,\frac{1}{2}} + \|h\|_\infty)^{k-1}$ (cela se déduit de la

démonstration du fait que $\mathcal{A}$ est une algèbre, voir le Lemme 3) en prenant $C' > 1$, et en utilisant une hypothèse de récurrence sur $k-1$, on obtient l'inégalité (1), dès qu'on l'a montré pour $k = 3$. On a :

$$\frac{1}{N+1} |T_r \ T^3_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^3)| \leq \|h\|_\infty \frac{1}{N+1} |(T^2_{N,N}(h)-T_{N,N}(h^2)|+\|h\| \quad \|h^2\|_{2,\frac{1}{2}}$$

L'utilisation du lemme 4 et les mêmes remarques que ci-dessus permettent de montrer l'inégalité (1) ci-dessus pour $k = 3$.

L'inégalité (2) du lemme 4 nous permet , pour un choix convenable de $\lambda$ au voisinage de 0, d'utiliser la convergence uniforme pour obtenir :

$$\lim_{N\to\infty} (\sum_{k=o}^{\infty} a_k \lambda^k \frac{1}{N+1} T_r(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k)) .$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} a_k \lambda^k \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} (T_r(T^k_{N,N}(h) - T_{N,N}(h^k)))$$

et le corollaire est démontré.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] D. DACUNHA-CASTELLE : Inversion des opérateurs de Toeplitz et statistiques des champs aléatoires gaussiens. Colloque international du C.N.R.S., Vol. n° 307.

[2] GRENANDER and SZEGÖ : Toeplitz forms and their applications. Universite of California press. Berkeley and Los Angeles. 1958.

[3] J.IU. LINNICK : A multidimensional analogue of a limit theorem of G. Szegö.

[4] W. RUDIN : Functions theory in polydiscs. W.A. BENJAMIN, INC. 1969 .

[5] A. SEGHIER : Prédiction d'un processus stationnaire ... Illinois. Journal of Mathematics. Vol. 22. 6 Number 3 Sept. 1978.

[6] E.M. STEIN : Singular Integrals and differentials properties of functions. Princeton University press, 1970.

[7] G. SZEGÖ : On certain helmitian forms associated with the Fourier Series of a positive functions, Comm, Seminaire math. Univ. Lund tome supp. 1952, p. 228-237.

[8] H. WIDOM : A symptotic inversion of convolution operators . Publi. Math. I.H.E.S. 44, 1975 , p. 191-240.

[9] H. WIDOM : Szegö's limit theorem : the Higher dimensional Matrix Case. Journal of Functional analysis vol. 39. Number 2, November 1980, page 182-198.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Inversion de la matrice de Toeplitz en d dimensions : développement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre d.* Note de **Abdellatif Seghier**, présentée par Jean-Pierre Kahane.

L'opérateur de Toeplitz associé à une fonction positive $f$ de $L^1(T^d)$ et à une partie finie $\Lambda$ de $Z^d$ est le produit de la multiplication par $f$ et de la projection sur l'espace $E_\Lambda$ des polynômes trigonométriques à spectre dans $\Lambda$. On le restreint à $E_\Lambda$. Supposant $f=|P|^{-2}$ (P : polynôme trigonométrique) on donne un développement asymptotique à l'ordre $d$ de la trace de l'inverse quand $\Lambda$ tend vers $Z^{+d}$. Dans une précédente Note [1] nous avions indiqué le développement à l'ordre 1 (deux termes).

*FUNCTIONAL ANALYSIS.* — Inversion of Toeplitz matrix in $d$ dimensions: asymptotic development of the trace of the inverse operator of order $d$.

*The Toeplitz operator associated with a positive $f\in L^1(T^d)$ and a finite $\Lambda\subset Z^d$ consists of multiplying by $f$ and projecting the product on $E_\Lambda$, space of trigonometric polynomials with spectrum in $\Lambda$. Considered as a mapping from $E_\Lambda$ to $E_\Lambda$, it can be inverted, and we study the trace of the inverse operator as $\Lambda$ tends to $Z^{+d}$. Assuming $f=|P|^{-2}$ (P: trigonometric polynomial) we give an asymptotic expansion of the trace to the order d (in a previous Note [1] we had the expansion to the order 1).*

1. NOTATIONS ET DÉFINITIONS. — (*a*) Soient $f>0$, $f\in L^1(T^d)$, $d$ un entier supérieur ou égal à 1, $\Lambda$ une partie finie de :

$$Z_+^d=\{m=(m_1,\ \ldots,\ m_d)\in Z^d,\ \forall j=1,\ \ldots,\ d,\ m_j\geqq 0\}.$$

On désignera par $E_\Lambda$ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans $\Lambda$. On pose pour :

$$m=(m_1,\ \ldots,\ m_d)\in Z^d \quad \text{et} \quad (\theta_1,\ \ldots,\ \theta_d)\in T^d,$$
$$\chi^m(e^{i\theta_1},\ \ldots,\ e^{i\theta_d})=e^{i\sum_{j=1}^{d}\langle m_j,\theta_j\rangle},$$

et, pour $h\in L^1(T^d)$, $h\sim\sum_{\in Z^d}\hat h(m)\chi^m$ (série de Fourier de $h$). On pose $\pi_\Lambda h=\sum_{m\in\Lambda}\hat h(m)\chi^m$.

On définit la matrice de Toeplitz associée à $f$ et à la partie $\Lambda$, qu'on notera $T_\Lambda(f)$, comme la matrice de l'opérateur :

$$\forall p\in E_\Lambda,\quad T_\Lambda(f)p=\pi_\Lambda fp.$$

(*b*) On note, dans $L^2(T^d)$ :

$$H^{2+}=\{h\in L^2(T^d),\ h\sim\sum\hat h(n)\chi^m,\ m\in Z_+^d\},$$

et P le projecteur orthogonal de $L^2(T^d)$ sur $H^{2+}$.

$H^{2-}=\overline{\chi H^{2+}}$ et Q le projecteur orthogonal de $L^2(T^d)$ sur $H^{2-}$ et enfin :

$$\tilde H^{2-}=L^2(T^d)\,\theta\,H^{2+} \quad \text{et} \quad P_-=I-P;$$
$$\tilde H^{2+}=L^2(T^d)\,\theta\,H^{2-} \quad \text{et} \quad P_+=I-Q.$$

(*c*) Dans une précédente Note nous avons indiqué une façon d'inverser la matrice de Toeplitz. Cela est faisable à l'aide d'opérateurs que nous allons définir.

Soit $N=(N_1,\ \ldots,\ N_j)$ un multi-entier. On note par $\varphi_N=\chi^{N+1}g/\bar g$ et on définit :

$$\forall\theta\in\tilde H^{2+},\qquad H_{\varphi_N}:\ \theta\to P_-(\varphi_N\theta)\in\tilde H^{2-}.$$

0249-6321/85/03000539 \$ 2.00 © Académie des Sciences

L'adjoint est donné par :

$$\forall \eta \in \bar{H}^{2-}, \qquad H^*_{\varphi_N} : \quad \eta \to P_+ (\bar{\varphi}_N \eta) \in \bar{H}^{2-}.$$

2. On rappelle, en la généralisant, la proposition obtenue dans [1]. On prend $\Lambda = \sum_{j=1}^{d} \{0, \ldots, N_j\}$ et on note $T_N(f) = T_\Lambda(f)$.

PROPOSITION. — *On suppose $f = |g|^2$, avec $g$ et $1/g \in H^\infty$.*
*Alors :*
(i) *Il existe une constante positive K telle que :*

$$\forall N, \qquad \| H_{\varphi_N} \| \leqq K < 1.$$

(ii) *L'opérateur $T_N(f)$ est inversible et d'inverse défini, pour tout $q \in E_N$, par :*

$$(T_N(f))^{-1}(q) = \frac{q}{|g|^2} - \frac{1}{g} P_- \left( \frac{g}{g} \right) - \frac{1}{g} P_{\varphi_N} (I - H^*_{\varphi_N} H_{\varphi_N})^{-1} P_+ \bar{\varphi}_N P\left( \frac{g}{\bar{g}} \right).$$

2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $(T_N(f))^{-1}$ À L'ORDRE 1. — On suppose que :

$$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leq j \leq d}} \frac{N_{i+1}}{\left( \prod_{k=1}^{d} (N_k + 1) \right)^{1/d}} = \alpha_i > 0.$$

On note par $\pi_N$ le projecteur de $L^2(T^d)$ sur $E_N$. On obtient un théorème qui généralise celui de la précédente Note, en ce sens que la variation du volume du « rectangle » $\tau_N = \prod_{j=1}^{d} \{0, \ldots, N_j\}$ dépend de toutes les directions de $Z^d_+$ quand $\inf N_j \to \infty$.

THÉORÈME 1. — *Les hypothèses sont les mêmes que dans la proposition ci-dessus. On suppose en outre que :*

$$\sum_{m \in Z^d_+} \left| \left( \frac{1}{g} \right)^\wedge (m) \right| < +\infty, \quad \left( \left( \frac{1}{g} \right)^\wedge (m) = \textit{coefficient de Fourier au point } m \right)$$

*et :*

$$\sum_{m \in Z^d_+} \left( \sum_{k=1}^{d} m_k \right) \left| \left( \frac{1}{g} \right)^\wedge (m) \right|^2 < \infty.$$

*On pose pour tout $q \in E_N = E_\Lambda$ :*

$$A_{N,0}(q) = T_N \left( \frac{1}{f} \right) (q),$$

$$A_{N,1}(q) = \pi_N \left( \frac{1}{g} \right) P \left( \frac{q}{\bar{g}} \right) + \frac{X^{N+1}}{\bar{g}} P_+ \left( \frac{\bar{X}^{N+1}}{g} q \right).$$

*Alors* :

(i) $$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leq j \leq d}} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)\right)^{1-1/d}} T_r((T_N(f))^{-1} - A_{N,0} - A_{N,1}) = 0.$$

(ii) $$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ i \leq j \leq d}} \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)\right)^{1-1/d}} T_r\left((T_N(f))^{-1} - T_N\left(\frac{1}{f}\right)\right)$$

$$= -2 \sum_{m \in Z_+^d} \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{m_k}{\alpha_k}\right) \left| \left(\frac{1}{g}\right)^{\wedge} (m) \right|^2.$$

3. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE $(T_N(f))^{-1}$ À L'ORDRE $d$. — Pour $d \geqq 2$, nous supposerons que $f = |g|^2$ avec $1/g$ polynôme trigonométrique. On rappelle que :

$$H_{\varphi_{2L}} P_+ \bar{\varphi}_{2L} P\left(\frac{q}{g}\right) = P_- \frac{g}{\bar{g}} \chi^{2L+1} P_+ \frac{\bar{g}}{g} \bar{\chi}^{2L+1} \left(P\left(\frac{g}{\bar{g}}\right)\right).$$

Soient $c$ et $c'$ deux sous-ensembles de $\{1, \ldots, d\}$ tels que $c \cap c' = \varnothing$, $\operatorname{card} c \leqq k \leqq d$, $\operatorname{card} c' = d-k$. On pose :

$$\Omega(c, c') = \prod_{i \in c} \{0, \ldots, L_i\} \prod_{j \in \{1, \ldots, d\}/(c \cup c')} \{L_j, \ldots, 2L_j+1\} \prod_{l \in c'} \{LL_l\}$$

et :

$$Z(c) = \{(m, \ldots, m_d) \in Z^d, \exists i \in l, m_i < 0\};$$

$$H^{2-}(c) = \{h \in \tilde{H}^{2-}, \hat{h}(m) = 0, \text{ si } m \notin Z(c)\}$$

et enfin l'opérateur $P_c$ qui est le projecteur orthogonal de $L^2(T^d)$ sur $H^{2-}(c)$.

On définit alors l'opérateur :

$$E_L \ni q \to P_c H_{\varphi_{2L}} P_+ \bar{\varphi}_{2L} P\left(\frac{q}{g}\right).$$

On peut énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit* $f = |g|^2$, $g^{\pm 1} \in H^\infty$. *On suppose que* $1/g$ *est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans* $\tau_L = \prod_{i=1}^{d} [0, L_i]$.

*Alors pour* $k = 0, \ldots, d$ :

(i) $$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(V(N))^{1-(k/d)}} T_r\left[(T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^{k} A_{N,l}\right] = 0.$$

(ii) *Les limites suivantes existent :* $(k \geqq 2)$ :

$$a_k = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-(k/d)}} T_r(A_{N,k})$$

$$= \sum_{\substack{c' \subset \{1, \ldots, d\} \\ \text{card } c' = d-k}} \Big(\prod_{l \in c'} \alpha_l\Big) \sum_{c \subset \{1, \ldots, d\}/c'} \sum_{h \in \Omega(c, c')} \left\| P_c H_{\varphi_{2L}} P_+ \bar{\varphi}_{2L} P\Big(\frac{c}{g}\Big)\right\|^2$$

*et :*

$$T_r(T_N(f))^{-1} = a_0 \prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)$$

$$+ a_1 \Big(\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)\Big)^{(d-1)/d} + \ldots + a_{d-1} \Big(\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)^{1/d}\Big) + a_d + o(1).$$

*Remarque.* — (*a*) Le problème du développement asymptotique à un ordre $d \geqq 1$ a été abordé par H. Widom dans un cadre plus général (opérateurs pseudo-différentiels) englobant les opérateurs de Wiener Hopf (analogue des matrices de Toeplitz dans le cas continu).

Trois termes explicites ont été donnés [2].

(*b*) Le développement asymptotique de la trace de l'inverse est équivalent au développement asymptotique du déterminant de la matrice de Toeplitz, et en procédant comme dans [1], il est permis de s'attendre à un développement à l'ordre $d$ du déterminant. En outre, une extension du cas $f = 1/|P|^2$ où P est un polynôme trigonométrique à $f$ quelconque (avec certaines restrictions) sera possible. Cela fera l'objet d'une prochaine Note.

(*c*) Le domaine sur lequel est tronqué l'opérateur de Toeplitz varie selon toutes les directions de $Z_+^d$ ($d$ paramètres) et non plus par rapport à un paramètre. Cependant la géométrie du domaine reste encore simple (multi-rectangle).

Remise le 4 février 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. SEGHIER, *Comptes rendus*, 293, série I, 1981, p. 605-608.

[2] H. WIDOM, Szegö's theorem and a complete symbolic calculus... in *Seminar on singularities of linear partial differential equations, Annals of Math. Studies* n° 91, Princeton Univ. Press, N.J., 1979, p. 261-283.

*E.R.A.-C.N.R.S. n° 532, Université de Paris-Sud, Mathématique*, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex*.

Reprinted from JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

Vol. 67, No. 3, July 1986
*Printed in Belgium*

# Inversion de la matrice de Toeplitz en $d$ dimensions et développement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre $d$

A. SEGHIER

*Université Paris-Sud, Bâtiment 425 – Statistique Appliquée, 91405 Orsay Cedex, France*

*Communicated by Irving Segal*

Received September 8, 1984; revised March 4, 1985

Let $f$ be an integrable function of the $d$-dimensional torus and let $C_m$ be the Fourier coefficients of $f$ ($m=(m_1,..., m_d)\in \mathbb{Z}^d$). We denote by $\Lambda=\prod_{j=1}^d \{0N_j\}$; $(N_1,..., N_d)\in \mathbb{Z}^d$. A Toeplitz matrix associated to $f$ and $\Lambda$ is defined by

$$T_\Lambda(f)=(C_{m-m'}),$$

$(m, m')=((m_1,..., m_d), (m'_1,..., m'_d))\in \Lambda\times\Lambda$. The asymptotic development (with order $d$) of the trace of $(T_\Lambda(f))^{-1}$, as $|\Lambda|=\text{Card } \Lambda$ tends to infinity is given when $f=|P|^{-2}$ and $P$ is trigonometrical polynomial. We denote by Tr, the trace of the matrix and we have the main result of this paper: $\text{Tr}(T_\Lambda(f))^{-1} = |\Lambda|\, a_0(f)+|\Lambda|^{(d-1)/d}\, a_1(f)+\cdots+|\Lambda|^{(d-k)/d}\, a_k(f)+\cdots+a_d(f)+o(1)$. © 1986 Academic Press, Inc.

Soit $\mathbb{T}^d$ le tore à $d$ dimensions, $f$ une fonction positive de $L^1(\mathbb{T}^d)$, $m=(m_1,..., m_d)\in\mathbb{Z}^d$ et $C_m(f)=C_m$ les coefficients de Fourier aux points $m$.

Soit $\Lambda$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$, on définit la forme de Toeplitz associée à $f$ par:

$$F_\Lambda(f)=\int_{\mathbb{T}^d}\left|\sum_{m\in\Lambda} C_m\, e^{i\langle\theta, m\rangle}\right|^2 d\sigma$$

où $d\sigma$ est la mesure de Haar sur $\mathbb{T}^d$.

On note par $T_\Lambda(f)=(C_{m-m'})$, $(m, m')\in\Lambda\times\Lambda$ sa matrice: on l'appelle matrice de Toeplitz associée à $f$.

## 1

Soit $N=(N_1,..., N_j)$ un élément de $\mathbb{Z}^d_+$. On étudie, lorsque $\Lambda=\prod_{j=1}^d \{0,..., N_d\}$, le comportement de la trace de $(T_\Lambda(f))^{-1}$ (à condition que l'inverse existe) quand inf $N_j$ tend vers l'infini. Dans le cas du



0022-1236/86 $3.00

tore $\mathbb{T}$, Szegö [2] établit le théorème suivant (avec quelques conditions restrictives sur $f$):

$$\lim_{N\to\infty} (\log(\det T_N(f) - T_r T_N(\log f)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n|\ |C_n(\log f)|^2$$

(où det = déterminant).

Nous proposons dans ce travail deux résultats:

**A**

Lorsque $f=|g|^2$, avec $g^{\pm 1}\in H^\infty$, $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d} |(1/g)\hat{\ }(m)|<\infty$ et $\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d} (\sum_{k=1}^d m_k)|(1/g)\hat{\ }(m)|^2<\infty$, nous obtenons un développement asymptotique avec deux termes, le multi-rectangle tend "vers l'infini" dans toutes les directions de $\mathbb{Z}_+^d$ de manière différente. On note $T_N(1/f)$ la matrice de Toeplitz associée à $1/f$, et $m=(m_1,..., m_d)$, on a:

$$\lim_{\substack{\inf N_j\to\infty\\ 1\leqslant j\leqslant d}} \left(1\Big/\prod_{i=1}^d (N_i+1)^{1-1/d)}\operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1} - T_N\left(\frac{1}{f}\right)\right)\right)$$

$$= -2\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}\sum_{k=1}^d \frac{m_k}{\alpha_k}\left|\left(\frac{1}{g}\right)\hat{\ }(m)\right|^2$$

($\alpha_k$ sont des nombres positifs caractérisant le mode de croissance des "rectangles" $\Lambda$, quand $\inf N_j$ tend vers l'infini).

**B**

Le deuxième résultat, qui est aussi le principal, est un développement asymptotique de la trace à l'ordre $d$, qui correspond à la dimension de l'espace. Dans ce travail, nous supposons $f=1/|P|^2$ où $P$ est un polynôme trigonométrique, une extension à $f=|g|^2$ où $g\in H^\infty$ est en préparation.

$$\operatorname{Tr}(T_N(f))^{-1} = a_0\prod_{i=1}^d (N_i+1) + a_1\left(\prod_{i=1}^d (N_i+1)\right)^{d-1/d}$$
$$+\cdots + a_{d-1}\left(\prod_{i=1}^d (N_i+1)^{1/d}\right) + a_d + o(1).$$

**2**

Le comportement asymptotique de $\operatorname{Tr}(T_\Lambda(f))^{-1}$ permet d'obtenir un théorème limite de Szegö, sur les déterminants ainsi que cela a été fait dans un article de Widom [7] dans le cadre du tore $\mathbb{T}^d$ et de $\mathbb{R}^n$. Cette idée est reprise ici, et l'effort portera sur le développement asymptotique de la trace à tout ordre. En effet, nous avons donné, dans une précédente note [4], un développement asymptotique de la trace de l'inverse, avec deux termes, et nous avons précisé le calcul qui rendait ce développement équivalent au théorème limite sur les déterminants (et plus généralement pour Tr $F(T_N(f))$ où $F$ est une fonction analytique telle que $F(T_N(f))$ ait un sens).

Ce point de vue permet de s'attendre, dans le cadre de ce travail, à un développement asymptotique du déterminant (respectivement de Tr $F(T_N(f))$) à l'ordre $d$, comme conséquence du résultat énoncé en $B$.

3

Le théorème limite de Szegö sur les déterminants généralisé à $\mathbb{T}^d$ et à $\mathbb{R}^d$ (développement avec deux termes) a été établi par Linnick en 1975 [3].

La même année, la généralisation à $\mathbb{R}^d$ de ce théorème est proposée par Widom [5], avec des conditions plus générales sur $f$ (transformée de Fourier du symbole) qui permet de définir l'opérateur de Toeplitz.

4

Le champ d'applications de tels résultats est important, il suffit de se référer à l'abondante littérature concernant le théorème limite de G. Szegö. Signalons toutefois deux applications récentes:

(i) une application aux statistiques pour étudier la qualité de l'approximation (due à Whittle) de la vraisemblance d'un champ aléatoire gaussien.

(ii) une interprétation de l'entropie en cristallographie à l'aide du théorème limite de Szegö (Entropie de Burg).

5

Les résultats les plus importants et les plus décisifs concernant le comportement asymptotique du déterminant sont obtenus par H. Widom (1975–1981) où le lien a été fait avec d'autres domaines et d'autres opérateurs (opérateurs pseudo-différentiels) sont mis en évidence [5–7].

Ainsi, dans le cadre le plus général (variétés riemanniennes), Widom propose un développement asymptotique à un ordre quelconque et où les trois premiers termes sont explicités.

Il serait intéressant d'établir un pont entre les deux points de vue.

Les méthodes utilisées ici, dans le cadre discret, se basent sur des idées géométriques: intersection de sous-espaces de Hilbert, angle de sous-espaces, etc.

Je tiens à remercier particulièrement le Professeur D. Dacunha-Castelle pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour les encouragements prodigués au cours de la rédaction de cet article.

## Notations et définitions

a

Soient $f > 0$, $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $d$ un entier supérieur ou égal à 2, $\Lambda$ une partie finie de $\mathbb{Z}_+^d = \{m = (m_1, ..., m_j),\ m_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., d\}$.

On désignera par $E_\Lambda$ le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques à spectre dans $\Lambda$.

On pose pour $m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{Z}^d$ et $(\theta_1, ..., \theta_d) \in \mathbb{T}^d$. $\chi^m$ est définie par:

$$\chi^m(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, ..., e^{i\theta_d}) = e^{i\sum_{j=1}^d \langle m_j, \theta_j \rangle},$$

$\forall h \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $h \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \alpha_m \chi^m$ (série de Fourier de $h$), on pose

$$\pi_\Lambda h = \sum_{m \in \Lambda} \alpha_m \chi^m,$$

ce qui définit $\pi_\Lambda$ comme projecteur de $L^1(\mathbb{T}^d)$ sur $E_\Lambda$.

On définit la matrice de Toeplitz associée à $f$ et à la partie $\Lambda$, qu'on notera $T_\Lambda(f)$, comme la matrice de l'opérateur:

$$\forall p \in E_\Lambda, \qquad T_\Lambda(f)\, p = \pi_\Lambda f p.$$

b

On note dans $L^2(\mathbb{T}^d)$:

$$H^{2+} = \{h \in L^2(\mathbb{T}^d),\ h \sim \sum \alpha_m \chi^m,\ m \in \mathbb{Z}_+^d\}$$

et $P$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{2+}$

$H^{2-} = \overline{\chi H^{2+}}$ et $Q$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur cet espace. Enfin:

$$\tilde{H}^{2-} = L^2(\mathbb{T}^d) \ominus H^{2+} \qquad \text{et} \qquad P_- = I - P,$$

$$\tilde{H}^{2+} = L^2(\mathbb{T}^d) \ominus H^{2-} \qquad \text{et} \qquad P_+ = I - Q.$$

## Inversion de la matrice de Toeplitz

a

L'idée générale pour inverser $T_\Lambda(f)$ peut être la suivante: on construit dans $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d)$ un sous-espace $K$ de dimension finie tel que $E_\Lambda = \{\theta/f : \theta \in K\}$. On considère la décomposition suivante:

$$L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d) = K \oplus K^\perp. \tag{1}$$

On observera que $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d) \subset L^1(\mathbb{T}^d)$ du fait que $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ et de l'inégalité de Schwarz.

Le sous-espace $K^\perp$ est alors composé de fonctions $\psi \in L^2_{1/f}(\Pi^d)$ vérifiant

$$\hat{\psi}(k) = 0, \qquad \forall k \in \Lambda. \tag{2}$$

En effet soit $\psi \in K^\perp$ et $\theta \in K$, on a:

$$\int \theta \cdot \frac{\bar{\psi}}{f}\, d\sigma = 0 \qquad (\sigma \text{ mesure de Haar sur } \mathbb{T}^d).$$

Comme par construction tout polynôme $\in E_\Lambda$ s'écrit $\theta/f$, la relation (2) s'ensuit.

Soit $P_K$ le projecteur orthogonal de $L^2_{1/f}(\mathbb{T}^d)$ sur $K$ et $q \in E_\Lambda$. On écrit $P_K q = fp$ où $p$ est un polynôme de $E_\Lambda$. On décompose $q$ suivant la somme orthogonale (1):

$$q = fp + q - fp.$$

On a d'après (2),

$$q = P_\Lambda q = P_\Lambda fp = T_\Lambda(f)\, p = P_\Lambda P_K q.$$

Ceci montre que $T_\Lambda(f)$ est un opérateur surjectif sur $E_\Lambda$. Comme nous sommes en dimension finie, il est inversible et:

$$p = (T_\Lambda(f))^{-1} q = (1/f)\, P_K q.$$

b

On notera dans la suite $H^\infty$ l'espace de fonctions definies sur $\mathbb{T}^d$ qui sont limites au bord de fonctions analytiques et bornées dans le polydisque-unité. On suppose $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$. Soit $N = (N_1, ..., N_d) \in \mathbb{Z}^d_+$, on prend $1 = (1, 1, ..., 1)$, $\Lambda = \prod_{j=1}^d \{0, ..., N_j\}$ et on note $E_N = E_\Lambda$.

Lemme 1. *Posons $K = \bar{g} H^{2-} \cap g \chi^{N+1} H^{2-}$. Le sous-espace $K$ vérifie alors les propriétés décrites en a.*

*Preuve.* Comme $g^{\pm 1} \in H^\infty$, $g^{-1} H^{2+} = H^{2+}$ et $\bar{g}^{-1} H^{2-} = H^{2-}$. Soit $\phi \in K$, alors $\phi/f = \phi/|g|^2$ et $\phi/|g|^2 \in (1/g)\, H^{2+} \cap (1/\bar{g})\, \chi^{N+1} H^{2-} = E_N$.

*Remarque.* On peut écrire $K = \bar{g}(H^{2+} \cap (g/\bar{g})\, \chi^{N+1} H^{2-}) = \bar{g} K_0$. On note par $P_{K_0}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $K_0$, on a:

$$\forall q \in E_N, \qquad P_K(q) = \bar{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right)$$

et

$$(T_N(f))^{-1}(q) = \frac{1}{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter $P_{K_0}$.

Posons $\phi_N = \chi^{N+1} g/\bar{g}$. L'orthogonal de $K_0$ dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ s'écrit:

$$K_0^- = \overline{\tilde{H}^{2-} + \phi_N H^{2+}}.$$

Si on pose $L_N = \tilde{H}^{2+} \cap (\tilde{H}^{2+} \theta \bar{\phi}_N \tilde{H}^2\ )$, ou aussi: $K_0 = \overline{\tilde{H}^2 \ \oplus \phi_N L_N}$. On remarquera que $L_N = \overline{P_+(\bar{\phi}_N H^{2+})}$. Ainsi pour tout $\psi \in L^2(\mathbb{T}^d)$ on a:

(i) $P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n \to \infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,n}))$.

Avec $\forall n > 0$, $\theta_{1,n} \in \tilde{H}^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ ($n$ entier).

Lemme 2. *Soit $\psi$ un élément de $L^2(\mathbb{T}^d)$. Pour qu'un élément de $K_0$ noté $P_{K_0}$ soit la projection orthogonale de $\psi$ sur ce sous-espace, il faut et il suffit qu'il existe deux suites:*

$(\theta_{1,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{H}^{2-}$ *et* $(\theta_{2,n})_{n \in \mathbb{N}} \subset H^{2+}$ *telles que:*

(i) $\lim_{n \to \infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+ \phi_N \theta_{2,n})$ *existe dans* $L^2(\mathbb{T}^d)$.

(ii) $\lim_{n \to \infty}(P_+(\bar{\phi}_N \theta_{1,n}) + P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,n})) = P_+(\bar{\phi}_N \psi)$.

(iii) $\lim_{n \to \infty}(\theta_{1,n} + P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n})$

*et la projection est donnée par*:

$$P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n \to \infty}(\theta_{1,n} + P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n}).$$

*Preuve.* (a) Les conditions sont nécessaires: si $P_{K_0}(\psi)$ est la projection de $\psi$ sur $K_0$, la relation (1) dans *c.* implique (i) et on obtient (ii) et (iii) en écrivant que

$$P_{K_0}(\psi) \in H^{2+} \qquad \text{et} \qquad P_{K_0}(\psi) \in \phi_N H^{2-}.$$

(b) Les conditions sont suffisantes: La condition (i) montre que si on pose $P_{K_0}(\psi) = \psi - \lim_{n \to \infty}(\theta_{1,n} + \phi_N P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,n})$ alors $\psi - P_{K_0}(\psi) \in K_0$ et les conditions (ii) et (iii) montrent que $P_{K_0}(\psi) \in K_0$.

Les équations (ii) et (iii) du lemme impliquent

$$\lim_{n \to \infty}(I - P_+ \phi_N P_- \bar{\phi}_N)\, P_+(\bar{\phi}_N \theta_{2,n}) = P_+ \overline{\phi_N}\, P(\psi).$$

Remarquons que $L_N = \overline{(I - P_+ \bar\phi_N P_- \phi_N)\, H^{2+}}$, et on a $P_+ \bar\phi_N P_- \phi_N L_N \subset L_N$. Notons par $H_{\phi_N}$ la restriction de $\psi \to P_- \phi_N \psi$ à $L_N$. La restriction de l'opérateur $\theta \to P_+ \bar\phi_N P_- \phi_N \theta$ à $L_N$ est égale à $H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}$.

PROPOSITION 1. *On suppose que $f = |g|^2$ avec $g^{\pm 1} \in H^\infty$. Alors*

(i) *Il existe une constante positive $\alpha$ telle que*

$$\forall N \in \mathbb{Z}^d_+, \qquad \|H_{\phi_N}\| \leqslant \alpha < 1.$$

(ii) *L'opérateur $T_N(f)$ est inversible et d'inverse*: $\forall q \in E_N$

$$(T_N(f))^{-1}(q) = \frac{q}{|g|^2} - \frac{1}{g} P_-\left(\frac{q}{\bar g}\right) - \frac{1}{g} P\phi_N (I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{-1} P_+ \bar\phi_N P\left(\frac{q}{\bar g}\right).$$

*Preuve.* (a) Montrons que pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\|H_{\phi_N}\| < 1$. D'après la définition de l'opérateur $H_{\phi_N}$ ceci équivaut à montrer que $\tilde H^{2-} + \phi_N L_N$ est fermé pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$. D'après ce qui précède ce sous-espace est le même que

$$\tilde H^{2-} + \phi_N \tilde H^{2+} = \tilde H^{2-} + \frac{g}{\bar g} \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+}.$$

La fonction $g^{\pm 1} \in H^\infty$ par hypothèse. Ceci implique que $\bar g \tilde H^{2-} = \tilde H^{2-}$ et $g \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+} = \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+}$.

Le sous-espace précédent s'écrit:

$$\bar g \tilde H^{2-} + g \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+} = \tilde H^{2-} + \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+}.$$

Nous avons alors:

$$\tilde H^{2-} + \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+} = \tilde H^{2-} \ominus (\chi^{(N+1)} H^{2+} \ominus (\tilde H^{2-} \cap \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+})).$$

Il suffit en effet de remarquer que:

$$\chi^{(N+1)} \tilde H^{2+} \ominus (\tilde H^{2-} \cap \chi^{(N+1)} \tilde H^{2+}) = H^{2+} \ominus E_N \subset (\tilde H^{2-})^\perp$$

($E_N$ est le sous-espace des polynômes trigonométriques défini ci-dessus).

Ceci démontre que $P_+ \bar\phi_N P \phi_N \tilde H^{2+}$ est fermé, donc

$$\|H^*_{\phi_N} H_{\phi_N}\| < 1.$$

(b) Il existe un nombre $\alpha$ positif tel que $\forall N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\|H_{\phi_N}\| \leqslant \alpha < 1$.

Posons $\rho_N = \|H_{\phi_N}\|$, nous avons vu dans *a*) que pour tout $N \in \mathbb{Z}^d_+$, $\rho_N < 1$. Supposons que $(\rho_N)$ ne soit pas uniformément bornée par $\alpha < 1$. Il existera alors une sous-suite infinie $(N_k)$ d'éléments de $\mathbb{Z}_+^d$ et une suite $\psi_k \in L_{N_k}$ avec $\|\psi_k\| = 1$, telles que:

$$\lim_{k \to \infty} \|H_{\phi N_k} \psi_k\| = 1. \tag{1}$$

Posons $\psi'_k = \chi^{N_k}\psi_k$, $\tilde{H}^{2+} = \ker(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1}) \oplus \operatorname{Im}(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1})$. Projetons $\psi'_k$ sur le noyau et l'image: $\psi'_k = \psi'_{k,1} + \psi'_{k,2}$, on a:

$$H\phi_{N_k}(\psi_k) = P_- \phi_{N_k}\psi_k = P_- \phi_1\psi'_{k,1} + P_- \phi_1\psi'_{k,2}.$$

Comme $\psi'_{k,1} \in \ker(I - H^*_{\phi_1} H_{\phi_1}) = \tilde{H}^{2+} \oplus \bar{\phi}_1 \tilde{H}^{2-}$, on a $P_- \phi_1\psi'_{k,1} = \phi_1\psi'_{k,1}$. Il s'ensuit que:

$$\|P_- \phi_1\psi'_k\|^2 = \|\psi'_{k,1}\|^2 + \|P_- \phi_1\psi'_{k,2}\|^2 + (\phi_1\psi'_{k,1}, P_- \phi_1\psi'_{k,2})$$

mais

$$(\phi_1\psi'_{k,1}, P_- \phi_1\psi'_{k,2}) = (\phi_1\psi'_{k,1}, \phi_1\psi'_{k,2}) = 0$$

et l'hypothèse (1) devient:

$$\lim_{k \to \infty} (1 - \|\psi'_{k,1}\|^2 - \|P_- \phi_1\psi'_{k,2}\|^2) = 0. \tag{2}$$

En posant $1 = \|\psi'_{k,1}\|^2 + \|\psi'_{k,2}\|^2 = \|\psi'_k\|^2$, on a:

$$\lim_{k \to \infty} (\|\psi'_{k,2}\|^2 - \|P_- \phi_1\psi'_{k,2}\|^2) = 0. \tag{3}$$

Montrons maintenant que pour tout $k$, $\|\psi'_{k,2}\| \neq 0$.

En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que $\psi'_k \in \tilde{H}^{2-} \cap \bar{\phi}_1 \tilde{H}^{2-}$, on a alors

$$P_- \phi_1\psi'_k = P_- \phi_{N_k}\psi_k = \phi_{N_k}\psi_k = \phi_1\psi'_k.$$

Cela n'est possible que si $\psi_k \in H^{2+} \cap \phi_{N_k} H^{2-} = (L_{N_k})^{\perp}$. Comme par ailleurs $\psi_k \in L_{N_k}$ ceci implique $\psi_k = 0$, or $\|\psi_k\| = 1$ par construction, l'hypothèse faite est donc absurde et on a bien $\|\psi'_{k,2}\| \neq 0$, $\forall k$.

Nous déduisons de (3) la relation:

$$\lim_{k \to \infty} \|P_- \phi_1(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{k,2}\|)\| = \lim_{k \to \infty} H_{\phi_1}(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{l,2}\|)\| = 1, \tag{4}$$

pour une suite $(\psi'_{k,2}/\|\psi'_{k,2}\|)_{k>0}$ dans $L_1$. Mais ceci équivaudrait au fait que $\|H_{\phi_1}\| = 1$. Ce qui est contraire à ce que nous avons établi dans a).

*Montrons* (ii)

Nous allons utiliser le lemme 2. Posons

$$\psi_p = \sum_{k=0}^{p} (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^k P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Les sommes $\psi_p$ vérifient les conditions du lemme 2. Posons $P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,p} = \psi_p$ et $\theta_{1,p} = P \quad (q/\bar{g}) - P \quad (\phi_N \psi_p)$. (Comme $\psi_p \in \operatorname{Im}(I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})$, $\theta_{2,p} \in H^{2+}$ existe pour tout $p$.)

Les sommes $\psi_p$ convergent d'après (i), il s'ensuit que les conditions (i) et (iii) du lemme sont satisfaites.

Étudions la condition (ii) du lemme, on a:

$$P_+ (\bar{\phi}_N \theta_{1,p}) + P_+ (\bar{\phi}_N \theta_{2,p}) = P_+ \bar{\phi}_N P \quad \frac{q}{\bar{g}} - P_+ \bar{\phi}_N P \quad \phi_N \psi_p + \psi_p.$$

On a par construction de $\psi_p$:

$$(I - P_+ \bar{\phi}_N P \quad \phi_N) \psi_p = (-(I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p+1}) P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{q}{\bar{g}}\right).$$

Le fait que $\| H^*_{\phi_N} H_{\phi_N} \| < 1$, implique (en tenant compte de $P \quad = I - P$):

$$\lim_{p \to \infty} (P_+ (\bar{\phi}_N \theta_{1,p}) + P_+ \bar{\phi}_N \theta_{2,p})) = P_+ (\bar{\phi}_N \psi).$$

Ce qui est la condition (ii) du lemme 2. En tenant compte enfin de la relation:

$$\forall q \in E_N, \qquad (T_N(f))^{-1} q = \frac{1}{g} P_{K_0}\left(\frac{q}{\bar{g}}\right),$$

on obtient l'expression annoncée de l'inverse de $T_N(f)$.

La prochaine étape sera consacrée à l'étude du compotement asymptotique de la trace de $(T_N(f))^{-1}$.

## Comportement asymptotique de la trace de $(T_N(f))^{-1}$

### 1. *Développement asymptotique à l'ordre* 1

(a) *Notations.* Soit $N = (N_j)$, $j = 1, \ldots, d$, un multi-indice dans $\mathbb{Z}^d_+$ ($\mathbb{Z}_+$ est l'ensemble des entiers positifs ou nuls, $d$ entier positif fixe). On considère $\tau_N = \prod_{j=1}^{d} [0 N_j] \subset \mathbb{Z}^d_+$ et on pose $V(N) = \operatorname{card} \tau_N = \prod_{j=1}^{d} (N_j + 1)$. On suppose $\lim(N_j) = \infty$, et $\lim_{\inf(N_j) \to \infty} (N_k / V(N)^{1/d}) = \alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, d$.

Le symbole Tr signifie trace d'un opérateur (les opérateurs considérés dans la suite seront de rang fini). On rappelle enfin que $E_N$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques à spectre contenu dans le multi-rectangle $\tau_N$.

(b) *Résultat.* On a alors un premier théorème qui donne un développement de la trace de $(T_N(f))^{-1}$ à l'ordre 1 (deux termes) et qui est équivalent au théorème de Szegö sur les déterminants.

Ce résultat généralise un peu celui qui a été obtenu dans une précédente note (4), en ce sens que le multi-rectangle $\tau_N$ varie différemment suivant les directions de $\mathbb{Z}_+^d$ lorsque $\inf N_j$ tend vers l'infini. Cependant la géométrie du domaine reste simple pour l'instant.

THÉORÈME 1. *On suppose toujours $f=|g|^2$ et $g^{\pm 1}\in H^\infty$. Soit $\beta_m$ le coefficient de Fourier de $1/g$ au point $m=(m_1,\ldots,m_d)$ de $\mathbb{Z}_+^d$.*

*On suppose en outre que $\sum_{m\in \mathbb{Z}_+^d} |\beta_m| < +\infty$ et $\sum_{m\in \mathbb{Z}_+^d}(\sum_{k=1}^d m_k)\,|\beta_m|^2<\infty$. Soit $\pi_N$ le projecteur de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $E_N$. On pose pour tout $q\in E_N$:*

$$A_{N,0}(q)=T_N\left(\frac{1}{f}\right)(q),$$

$$A_{N,1}(q)=-\pi_N\left(\frac{1}{g}P_-\left(\frac{q}{\bar g}\right)+\frac{\chi^{N+1}}{\bar g}P_+\left(\frac{\bar\chi^{N+1}}{g}q\right)\right).$$

*Alors*

$$\text{(i)}\quad \lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1}-A_{N,0}-A_{N,1})=0,$$

$$\text{(ii)}\quad \lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\operatorname{Tr}\left((T_N(f))^{-1}-T_N\left(\frac{1}{f}\right)\right)$$

$$=-2\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d}\left(\sum_{k=1}^d\frac{m_k}{\alpha_k}\right)|\beta_m|^2.$$

*Preuve* (Montrons (i)). Posons $\tilde A_N(q)=\pi_N(q/|g|^2)-\pi_N((1/g)\,P_-(q/\bar g)+(1/g)\,P\phi_N P_+\bar\phi_N P(q/\bar g))$ et pour $n\in\tau_N$, $e_n=\chi^n$.

On a d'après la proposition 1,

$$\operatorname{Tr}((T_N(f))^{-1}-\tilde A_N)=\sum_{n\in\tau_N}((T_N(f))^{-1}-\tilde A_N)\,e_n,e_n)$$

$$=\sum_{n\in\tau_N}\sum_{p=1}^{\infty}\left\langle (H_{\phi_N}^* H_{\phi_N})^p\,P_+\bar\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar g}\right),P_+\bar\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)\right\rangle$$

$$\leqslant\left(\sum_{p=1}^{\infty}\|H_{\phi_N}\|^p\right)\sum_{n\in\tau_N}\left\|P\;\phi_N P_+\bar\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)\right\|^2.$$

D'après la proposition 1, il existe une constante positive $K$ telle que $\forall N$, $\sum_{p=1}^{\infty}\|H_{\phi_N}\|^p\leqslant K$.

Étudions dans le second membre de l'inégalité la somme étendue à $\tau_N$. On définit, pour $L=(L_1,\dots,L_d)\in\mathbb{Z}_+^d$, $1/g_L=\sum_{m\in\tau_L}\beta_m\chi^m(\tau_L=\prod_{j=1}^d[0\,L_j])$. Comme $1/g\in L^2(\mathbb{T}^d)$ on a $\lim_{\inf L_j\to\infty}\|(1/g)-(1/g_L)\|_2=0$ et d'autre part la condition $\Sigma\,|\beta_m|<+\infty$ implique $\lim_{\inf L_j\to\infty}\|(1/g)-(1/g_L)\|_\infty=0$.

Ces deux limites nous permettront d'approcher $1/g$ par $1/g_L$ dans la suite. La preuve de (i) se fera en deux étapes.

Soit maintenant $L=(L_1,\dots,L_d)\in\tau_N$, et décomposons $\tau_N$ en deux sous-ensembles: $\tau_N=\tau_{N,L}\cup(\tau_N\backslash\tau_{N,L})$ où $\tau_{N,L}=\prod_{j=1}^d[L_j\,N_j-L_j]$.

*Étape* 1. Majoration de $(1/V(N)^{1-1/d})\sum_{n\in\tau_{N,L}}\|P_-\phi_N P_+\bar\phi_N P(e_n/g)\|^2$. Utilisant le fait que $P=I-P_-$, on écrit:

$$P_+\bar\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)=P_+\left(\frac{\bar\chi^{N+1}}{g}e_n\right)-P_+\bar\phi_N P_-\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)$$

$$=P_+\left(\frac{\bar\chi^{N+1}}{g}e_n\right)-P_+\bar\chi^{N+1}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar g P_-\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)$$

$$-P_+\bar\chi^{N+1}\frac{\bar g}{g_L}P_-\left(\frac{e_n}{\bar g}\right).$$

Si $n\in\tau_{N,L}$ alors $P_+\bar\chi^{N+1}(\bar g/g_L)\,P_-(e_n/\bar g)=0$. En effet soit $h\in\tilde H^{2+}$:

$$\left\langle P_+\bar\chi^{N+1}\frac{\bar g}{g_L}P_-\left(\frac{e_n}{\bar g}\right),h\right\rangle=\left\langle P_-\frac{e_n}{\bar g},\chi^{N+1}\frac{g}{\bar g_L}h\right\rangle.$$

Comme $1/g_L$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans $\tau_L$, on a $\chi^{N+1}(g/\bar g_L)\,h\in\chi^{N+1}\tilde H^{2+}$ et $P_-(e_n/\bar g)\in\chi^n H^{2-}$, mais $H^{2-}=(\tilde H^{2+})^\perp$, il s'ensuit que le produit scalaire ci-dessus est nul pour $n_j<N_j+1-L_j$ $(j=1,\dots,d)$ et en particulier pour $n\in\tau_{N,L}$.

On a d'autre part:

$$P_-\phi_N P_+\bar\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)$$

$$=P_-\phi_N P_+\left(\frac{\bar\chi^{N+1}}{g}e_n\right)-P\phi_N P_+\chi^{N+1}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar g P_-\left(\frac{e_n}{\bar g}\right)$$

on procède comme ci-dessus et on écrit:

$$P_-\phi_N P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)=P_-\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}\chi^{N+1}P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)$$
$$+P_-\chi^{N+1}\frac{\bar{g}}{g_L}P_+\frac{\chi^{N+1}}{g}e_n,$$

et on remarque que $P_-\chi^{N+1}\bar{g}/g_L\,P_+(\bar{\chi}^{n+1}/g)\,e_n=0$, si $n_j>L_j$ $(j=1,\dots,d)$.

Ainsi pour $n\in\tau_{N,L}$ on a la majoration suivante

$$\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P\left(\frac{1}{\bar{g}}-\frac{1}{\bar{g}_L}gP_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}\right)\right\|^2$$
$$+\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}\bar{\chi}^{N+1}P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\left\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right\|_\infty\|g\|_\infty\left(\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g}e_n\right)\right\|^2+\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right).$$

On remarque que $\|P_+(\bar{\chi}^{(N+1)}/g)\,e_n\|^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\tau_{n'}}|\beta_m|^2$ $(\tau_{n'}=\prod_{j=1}^d[0n_j'])$, $n'=N-n$, et

$$\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\tau_n}|\beta_m|^2.$$

On obtient alors $\sum_{n\in\tau_{N,L}}\|P_+((\bar{\chi}^{N+1}/g)\,e_n)\|^2=\sum_{n\in\tau_{N,L}}\|P\ (e_n/g)\|^2$. On peut d'ailleurs majorer ces sommes par des sommes étendues à $\tau_N$ et on a:

$$\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum\left\|P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant\left(\left\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right\|_\infty\|g\|_\infty\right)\left(\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)$$

dans la partie (ii) nous montrerons que

$$\lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum_{n\in\tau_N}\left\|P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\text{cte}.$$

En faisant tendre inf $N_j$ et inf $L_j$ vers l'infini on obtient:

$$\lim_{\inf N_j\to\infty}\frac{1}{V(N)^{1-1/d}}\sum_{n\in\tau_{N,L}}\left\|P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=0$$

ce qui achève l'étape 1.

*Étape* 2. Majoration de:

$$\frac{1}{V(N)^{1-1/d}} \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 .$$

Posons $\phi_{N,L} = (g_L/\bar{g}_L)\, \chi^{N+1}$. On a

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) - P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) - P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\qquad + \left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) - P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\qquad + \left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) - P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) \right\|^2 \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

tenant compte de $\|\phi_N - \phi_{N,L}\|_\infty \leqslant 2\,\|(1/g_L)\|_\infty\, \|(1/g) - (1/g_L)\|_\infty$. L'expression (2.1) ci-dessus est majorée par

$$(\operatorname{card}(\tau_N \setminus \tau_{N,L}))^{1/2} \left( \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_L} \right\|_2 + 4 \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_L} \right\|_\infty \left\| \frac{1}{g_L} \right\|_\infty^2 \right).$$

On obtient la majoration suivante

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad \leqslant \left( \sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) \right\|^2 \right)^{1/2} \\
&\qquad + (\operatorname{card}(\tau_N \setminus \tau_{N,L}))^{1/2} \left( \left\| \frac{1}{g_L} - \frac{1}{g} \right\|_2 + 4 \left\| \frac{1}{g_L} \right\|_\infty^2 \left\| \frac{1}{g} - \frac{1}{g_L} \right\|_\infty \right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Majoration de $\sum_{n \in \tau_N \setminus \tau_{N,L}} \|P_- \phi_{N,L} P_+ \bar{\phi}_{N,L} P((e_n/\bar{g}_L))\|^2$. Quelques remarques d'abord, on écrit:

$$P_+ \bar{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right) = P_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g_L} e_n\right) - P_+ \bar{\phi}_{N,L} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right),$$

or $\forall h \in \tilde{H}^{2-}$,

$$\left\langle P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right), h\right\rangle = \left\langle e_n, \frac{h}{g_L}\right\rangle = 0 \qquad \text{si } n_i > L_i$$

de même $P_+((\bar{\chi}^{N+1}/g_L)\, e_n) = 0$ si $n_i < N_i - L_i$ ($i = 1,..., d$).

D'autre part $P_- \phi_{N,L} P_+(\bar{\chi}^{N+1}/g_L)\, e_n) = 0$ si $n_i > L_i$, $i = 1,..., d$. En effet soit $h \in \tilde{H}^{2-}$

$$\left\langle P_- \phi_{N,L} P_+ \frac{\bar{\chi}(N+1)}{g_L} e_n, h\right\rangle = \left\langle P_+ \frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g_L} e_n, \chi^{-(N+1)} \frac{\bar{g}_L}{g_L} h\right\rangle.$$

Comme $1/g_L$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans $\prod_{j=1}^d [0L_j]$, $\chi^{-(N+1)}(\bar{g}_L/g_L)\, h \in \chi^{-(N+1)+L} \tilde{H}^{2-}$, d'autre part $P_+((\chi^{-(N+1)/g)} e_n) \in \chi^{-(N+1)+n} H^{2+}$ et les deux sous-espaces sont orthogonaux si $n_i \geqslant L_i$, $i = 1,..., d$.

On a aussi $P_+ \tilde{\phi}_{N,L} P_-(e_n/\bar{g}_L) = 0$, si $n_i \leqslant N_i - L_j$. En effet, soit $h \in \tilde{H}^{2+}$,

$$\left\langle P_+ \tilde{\phi}_{N,L} P_- \frac{e_n}{\bar{g}_L}, h\right\rangle = \left\langle P_- \frac{e_n}{\bar{g}_L}, \frac{g_L}{\bar{g}_L} \chi^{N+1} h\right\rangle.$$

Comme ci-dessus on a $P_-(e_n/\bar{g}_L) \in \chi^n H^2$ et $(g_L/\bar{g}_L)\, \chi^{N+1}\, h \in \chi^{N+1-L}\, \tilde{H}^{2+}$ et ces deux sous-espaces sont orthogonaux si $n_i \leqslant N_i - L_i$.

Ces remarques montrent alors que $P_-(\phi_{N,L} P_+ \tilde{\phi}_{N,L} P(e_n/\bar{g}_L))$ est nul si $n \notin S_{N,2}$, avec

$$S_{N,2} = \tau_N \Big\backslash \left(\left(\prod_{j=1}^{d} [0N_j - L_j]\right) \cup \prod_{j=1}^{d} [L_j N_j]\right).$$

L'étude de la somme précédente se réduit à l'étude de la somme sur $S_{N,2}$ et on a la majoration suivante:

$$\left(\sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_{N,L} P_+ \tilde{\phi}_{N,L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}_L}\right)\right\|\right)^{1/2} \leqslant (\text{card } S_{N,2})^{1/2} \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_2.$$

On en déduit la majoration cherchée.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{V(N)^{1-1/d}} \sum_{n \in \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \tilde{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{g_L}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\ &\quad \leqslant \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_2 \left(\frac{\text{card } S_{N,2}}{V(N)^{1-1/d}}\right)^{1/2} + \left(\frac{\text{card } \tau_N \backslash \tau_{N,L}}{V(N)^{1-1/d}}\right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\left\|\frac{1}{g_L} - \frac{1}{g}\right\|_2 + 4 \left\|\frac{1}{g_L}\right\|_\infty^2 \left\|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_L}\right\|_\infty\right)\end{aligned}$$

Nous allons montrer que le 2$^e$ membre tend vers 0 quand $\inf_{j=1,\dots,d} N_j \to \infty$ et $\inf L_j \to \infty$.

Évaluons card $S_{N,2}$:

$$S_{N,2} = \{n = (n_1, \dots, n_d) \in \tau_N / \exists (i,j),\ i \neq j;\quad (n_i, n_j) \in [0 L_i] \times [N_j - L_j + 1 N_j]\}$$

mais $\operatorname{card}([0L_i] \times [N_j - L_{j+1} N_j] \times \prod_{(k,k) \neq (i,j), k=1}^{d} [0 N_k]) = L_i L_j \prod_{(k,k) \neq (i,j), k=1}^{d} (N_k + 1)$. Or $S_{N,2}$ est formé d'une réunion finie de tels sous-ensembles.

On en déduit que

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_{N,2}}{V(N)^{1-1/d}} = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} S_{N,2}}{\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1)^{1-1/d}} = 0.$$

Calculons maintenant

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card} \tau_N \backslash \tau_{N,L}}{V(N)^{1-1/d}},$$

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\operatorname{card}(\tau_N / \tau_{N,L})}{V(N)^{1-1/d}} = \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{\prod_{j=1}^{d}(N_j + 1) - \prod_{j=1}^{d} (N_j - 2L_j)}{(\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1))^{1-1/d}}.$$

Les $L_j$ étant fixés il est clair que cette limite est bornée. On obtient finalement, en faisant tendre aussi $\inf L_j$ vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \left( \sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0$$

ce qui achève l'étape 2.

Les résultats des étapes 1 et 2 montrent que

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 = 0$$

ce qui prouve (i).

*Montrons* (ii). Calcul de $\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{(1-1/d)} \sum_{n \in \tau_N} \| P_-(e_n/\bar{g}) \|^2$. On a vu précédemment que

$$\left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \backslash \tau_n} |\beta_m|^2 \qquad \left(\tau_n = \prod_{j=1}^{d} [0, n_j]\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un élément $L \in \mathbb{Z}_+^d$ tel que $\sum_{m \notin \tau_L} (\sum_{i=1}^{d} m_i) |\beta_{m_1, \dots, m_d}|^2 < \varepsilon$.

Ceci découle des hypothèses du théorème, soit $N$ tel que $L \in \tau_N$. Soit à étudier la somme

$$\sum_{n \in \tau_N} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2. \tag{1}$$

Décomposons cette somme sur $\tau_N = \tau_L \cup (\tau_N \setminus \tau_L)$, on obtient:

$$\sum_{n \in \tau_L} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 + \sum_{C \subset \{1,\dots,d\}} \sum_{n \in \mathcal{A}_N(C)} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 \tag{2}$$

où card $C \geqslant 1$ et $\mathcal{A}_N(C) = \{n \in \tau_N, \forall l \in C, n_l > L_l\}$.

Comme par hypothèse $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} |\beta_m|^2$ est finie et card $\tau_L$ ne dépend que de $L$, la première somme dans (2) est finie et ne dépend pas de $N = (N_1, \dots, N_d)$.

Étudions la deuxième somme de (2). Nous avons:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \tau_n} |\beta_m|^2 = \sum_{B \subset \{1,\dots,d\}} \left( \sum_{\substack{i \in B^c \\ m_i \leqslant n_i}} \sum_{\substack{j \in B \\ m_j > n_j}} |\beta_{m_1,\dots,m_d}|^2 \right)$$

où $B^c = \{1,\dots,d\} \setminus B$.

Fixons $C$ tel que card $C = d-1$ et $B = \{l_0\} = \{1,\dots,d\} \setminus C$ et notons par $I(B, C)$ la somme suivante

$$I(B,C) = \sum_{n \in \mathcal{A}_N(C)} \sum_{\substack{i \in B^c = C \\ m_i \leqslant n_i}} \sum_{m_{l_0} \geqslant n_{l_0}} |\beta_m|^2 = \sum_{l \in C} \sum_{\substack{L_l \leqslant n_l \leqslant N_l - L_l \\ m_l \leqslant n_l}} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2. \tag{3}$$

Pour $n$ fixé dans $\mathcal{A}_N(C)$, considérons la somme suivante:

$$\sum_{\substack{l \in C \\ m_l \leqslant n_l}} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 = \sum_{m_l \leqslant L_l} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant n_{l_0}}} |\beta_m|^2 + \sum_{\substack{L_l < n_l \leqslant N_l m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2. \tag{4}$$

La première quantité du second membre de (4) s'écrit:

$$\sum_{m_l \leqslant L_l} \left( \sum_{m_{l_0} \leqslant l_0} m_{l_0} |\beta_m|^2 + (L_{l_0} + 1) \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} |\beta_m|^2 \right)$$

$$= \sum_{m_l \in \tau_L} m_{l_0} |\beta_m|^2 + (L_{l_0} + 1) \sum_{\substack{m_{l_0} > L_{l_0} \\ m_l \leqslant L_l}} |\beta_m|^2$$

Mais $(L_{l_0} + 1) \sum_{m_{l_0} > L_0, m_l < L_l} |\beta_m|^2 \leqslant \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}, m_l \geqslant 0} m_{l_0} |\beta_m|^2$.

Or $L$ a été choisi de sorte que $\sum_{m_{l_0} > L_{l_0}, m_l \geqslant 0} m_{l_0} |\beta_m|^2 < \varepsilon$. La deuxième quantité du 2ème membre de (4) se traite de la même manière:

$$\sum_{L_l < m_l \leqslant N_l} \sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 \leqslant \sum_{0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_0} \Bigg( \sum_{\substack{m_{l_0} \geqslant n_{l_0} \\ L_l \leqslant m_l \leqslant N_l}} |\beta_m|^2 \Bigg)$$

$$\leqslant \sum_{0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}} \Bigg( \sum_{\substack{m_{l_0} \geqslant 0 \\ L_l \leqslant m}} |\beta_m|^2 \Bigg) \leqslant (L_{l_0} + 1)\, \varepsilon.$$

Pour évaluer (3) il faut sommer (4) sur $n' \in \prod_{l \in C'} [L_l N_l - L_l]$. Mais toutes les quantités dans (4) sont majorées indépendamment de $N$. On a alors

$$\left| I(B, C) - \Bigg( \sum_{m \in \tau_L} m_{l_0} |\beta_m|^2 \Bigg) \operatorname{card} \Bigg( \prod_{l \in C'} [L_l N_l] \Bigg) \right|$$

$$\leqslant \operatorname{card} \prod_{l \in C'} [L_l N_l] \cdot (L_{l_0} + 2)\, \varepsilon.$$

Passons aux limites avec $\inf N_j \to \infty$:

$$\lim_{\inf N_l \to \infty} \Bigg( \operatorname{card} \prod_{l \in C'} [L_l N_l] \Bigg) \Big/ V(N)^{1 - 1/d}$$

$$= \lim_{\inf N_l \to \infty} \prod_{l \in C'} (N_l - L_l) \Big/ \Bigg( \prod_{j=1}^{d} (N_j + 1) \Bigg)^{1 - 1/d}$$

$$= \prod_{j \neq l_0} \alpha_j.$$

Il vient donc en faisant tendre $\inf N_j$ et $\inf L_j$ vers l'infini

$$\lim_{\inf N_l \to \infty} (I(B, C)\, 1/V(N)^{1 - 1/d} = \prod_{\substack{j \neq l_0 \\ j = 1}}^{d} \alpha_j \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} m_{l_0} |\beta_m|^2.$$

Examinons maintenant la situation où $B$ et $C$ sont des parties quelconques de $\{1, ..., d\}$ et ne vérifiant que $B \cap C \neq \varnothing$. Soit toujours $l_0$ un point de $B \cap C$.

La modification dans l'expression $I(B, C)$, que l'on notera alors $\tilde{I}(B, C)$, dans (3) est la suivante:

$$\sum_{\substack{m_{l_0} > n_{l_0} \\ 0 \leqslant n_{l_0} \leqslant L_{l_0}}} |\beta_m|^2 \qquad \text{devient} \qquad \sum_{\substack{m_0 > n_{l_0} \\ L_{l_0} < n_{l_0} \leqslant N_{l_0}}} |\beta_m|^2$$

ceci grâce à la définition de $\mathscr{A}_N(C)$, expression qui est par ailleurs majorée par $\sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} m_{l_0} |\beta_m|^2$.

L'expression correspondant à (4) est majorée par $\sum_{m_l \geqslant 0} \sum_{m_{l_0} > L_{l_0}} m_{l_0} |\beta_m|^2$ qui est par hypothèse inférieure à $\varepsilon$.

Enfin l'expression correspondant à (3) est majorée par $(\prod_{l \in \{1,\dots,d\}\setminus l_0}(N_l - L_l))\,\varepsilon$ et on obtient en faisant tendre $\inf N_j$ et $\inf L_j$ vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d}\, \tilde{I}(B, C) = 0.$$

Les limites qui sont différentes de 0 correspondent aux choix de card $C = d-1$ et $B = \{1,\dots, d\}\setminus C = \{l_0\}$. Il suffit de faire varier $l_0$ dans $\{1,\dots, d\}$ pour couvrir toutes les situations et comme par ailleurs dans le cas où les limites sont nulles le choix de $B$ et $C$ est fini on obtient finalement:

$$\begin{aligned}\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N} \left\| P_-\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2 \\ = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+^d} \left(\sum \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{d} \alpha_j\right) m_k\Big)\, |\beta_{m_1,\dots,m_d}|^2.\end{aligned}$$

Pour achever la démonstration de (ii), il reste à montrer que:

$$\lim_{\inf N_l \to \infty} 1/V(N)^{1-1/d}$$

$$\times\left(\sum_{n \in \tau_N} \left\langle \frac{1}{g} P\phi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) - \frac{\chi^{N+1}}{\bar{g}} P_+ \frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g} e_n, e_n\right\rangle\right) = 0. \quad (5)$$

La somme dans (5) s'écrit:

$$\sum_{n \in \tau_N} \left(\left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{g}\right)\right\|^2 - \left\| P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1}}{g} e_n\right)\right\|^2\right) \quad (6)$$

Posons, $\forall q \in E_N$,

$$W_N(q) = U_N(q) - V_N(q) = \pi_N P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{q}{\bar{g}}\right) - \pi_N P_+\left(\frac{\bar{\chi}^{N+1} q}{g}\right).$$

Comme $P_- = I - P$, on a aussi

$$W_N(q) = \pi_N\left(P_+ \bar{\phi}_N P_-\left(\frac{q}{\bar{g}}\right)\right)$$

L'expression (6) devient alors

$$\|U_N\|^2_{H.S} - \|V_N\|^2_{H.S} = (\|U_N\|_{H.S} - \|V_N\|_{H.S})(\|U_N\|_{H.S} + \|V_N\|_{H.S}) \tag{7}$$

(H.S = norme Hilbert–Schmidt de l'opérateur).

L'expression (7) est alors majorée en valeur absolue par:

$$\|W_N\|_{H.S}(\|W_N\|_{H.S} + 2\|V_N\|_{H.S}) \tag{8}$$

avec

$$\|V_N\|^2_{H.S} = \sum_{n\in\tau_N} \left\| P_+ \left(\frac{\bar{\chi}^{N+1} e_n}{g}\right)\right\|^2 = \sum_{n\in\tau_N} \left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2$$

et

$$\|W_N\|^2_{H.S} = \sum_{n\in\tau_N} \left\| P_+ \phi_N P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2.$$

Il faut maintenant calculer

$$\lim_{\inf N_j\to\infty} 1/V(N)^{1-1/d} \|V_N\|^2_{H.S} \text{ et } \lim_{\inf N_j\to\infty} 1/V(N)^{1-1/d} \|W_N\|^2_{H.S}$$

La première limite, qui a été établie précédemment, est finie. Étudions la seconde limite:

Dans (i) nous avons décomposé $\tau_N = \tau_{N,L} U(\tau_N \backslash \tau_{N,L})$. Pour $n \in \tau_{N,L}$, on obtenait:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n\in\tau_{N,L}} \left\| P_+ \frac{\bar{g}}{g}\bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sum_{n\in\tau_{N,L}} \left\| P_+ \left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right)\bar{g}\bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{n\in\tau_{N,L}} \left\| P_+ \frac{\bar{g}}{g_L}\bar{\chi}^{N+1} P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left\|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_L}\right\|_\infty \left(\sum_{n\in\tau_{N,L}} \left\| P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

On obtient alors, comme dans (i), lorsque $\inf N_j$ et $\inf L_j$ ($L_j \leqslant N_j$) tendent vers l'infini:

$$\lim_{\inf N_j\to\infty} 1/V(N)^{1-1/d} \left(\sum_{n\in\tau_{N,L}} \left\| P_+ \phi_N P_- \left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\right) = 0.$$

Pour $n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}$, on approxime $\| P_+ \bar{\phi}_N P_-(e_n/g) \|$ par $\| P_+ \bar{\phi}_L P_-(e_n/\bar{g}_L) \|$, puis on évalue

$$1/V(N)^{1-1/d} \sum_{n \in \tau_N \backslash \tau_{N,L}} \left\| P_+ \bar{\phi}_L P_- \left( \frac{e_n}{\bar{g}_L} \right) \right\|^2. \tag{9}$$

Comme précédemment, $1/g_L$ étant un polynôme trigonométrique de spectre dans $\tau_L$, $P_+ \bar{\phi}_L P(e_n/\bar{g}_L)$ est nul si $n \notin S_{N,2} = \tau_N \backslash (\prod_{j=1}^d [0\, N_j - L_j] \times \prod_{j=1}^d [L_j\, N_j])$.

L'expression (9) est majorée par:

$$\operatorname{card} S_{N,2}/V(N)^{1-1/d} \cdot \left\| \frac{1}{g_L} \right\|_2^2,$$

quantité qui tend vers 0 lorsque $\inf N_j \to \infty$, comme cela a été établi ci-dessus.

Ce qui précède montre alors que la limite dans (5) est bien nulle, ce qui achève de démontrer (ii) puis le théorème.

## II. Développement asymptotique à l'ordre $d \geqslant 1$, de $(T_N(f))^{-1}$

Nous donnerons dans cette partie un développement asymptotique à l'ordre $d$ ($d =$ dimension de $\mathbb{Z}^d$) de l'opérateur $(T_N(f))^{-1}$ relativement au cardinal de $\tau_N = \prod_{j=1}^d [0\, N_j]$, qui tendra vers l'infini.

Ce développement comporte $d+1$ opérateurs. Ceci nous permettra d'obtenir le développement asymptotique à l'ordre $d$ de la trace de $(T_N(f))^{-1}$.

*Notations.* Les opérateurs $A_N$ et $A_{N,k}$, $k = 1, \ldots, d$. Pour tout polynôme trigonométrique $q \in E_N$ on définit:

$$A_N(q) = \frac{1}{g} P \phi_N (I - H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{-1} P_+ \bar{\phi}_N P \left( \frac{q}{\bar{g}} \right).$$

Soit $L = (L_1, \ldots, L_d) \in \mathbb{Z}^d_+$. On suppose que $1/g$ est un polynôme trigonométrique qui s'écrit:

$$\frac{1}{g} = \sum \beta_m \chi^m, \qquad m = (m_1, \ldots, m_d) \in \tau_L = \prod_{j=1}^d [0 L_j].$$

Soit $N = (N_1, \ldots, N_d)$, tel que $\forall i$, $2L_i \leqslant N_i$. On définit les intervalles d'entiers $I_i$ par $I_i = [0\, L_i - 1]$ ou $I_i = [N_i - L_i N_i]$.

Soit $B \subset \{1, \ldots, d\}$ et card $B = k \leqslant d$, on définit les sous-ensembles $T_{N,k}$ de $\tau_N$ de la façon suivante: $T_{N,k} = \bigcup_{B \subset \{1, \ldots, d\}} t_{n,k}$ où $t_{n,k}$ est le sous-ensemble: $t_{n,k} = \{ n = (n_l) \in \tau_N : \forall j \in B,\ n_j \in I_j$ et $\exists (l, l') \in B \times B$, tel que

$$I_l = [0\, L_l - 1] \qquad \text{et} \qquad I_{l'} = [N_{l'} - L_{l'} + 1\, N_{l'}].$$

Les sous-ensembles $E_{N,k}$ de $E_N$. On pose $S_{N,k} = T_{N,k} \backslash T_{N,k+1}$ pour $2 \leqslant k \leqslant d-1$, et $S_{N,d} = T_{N,d}$ et on définit $E_{N,k} \subset E_N$, comme sous-ensemble de polynômes trigonométriques à spectre contenu dans $S_{N,k}$ et enfin les opérateurs $A_{N,k}$ sont les restrictions de $A_N$ à $E_{N,k}$.

L'opérateur $E_L \ni q \to P_c H_{\phi_{2L}} \cdot P_+ \bar{\phi}_{2L} P(q/\bar{g})$.

On rappelle que $H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P(q/\bar{g}) = P_-(g/\bar{g}) \bar{\chi}^{2L+1} P_+(\bar{g}/g) \chi^{2L+1} P(q/\bar{g})$.

Soient $C$ et $C'$ deux sous-ensembles de $\{1, \dots, d\}$ tels que $C \cap C' = \phi$, card $C \leqslant k$ card $C' = d-k$. On pose:

$$\Omega(C, C') = \prod_{i \in C} [0\, L_i] \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \backslash C \cup C'} [L_j + 1\ 2L_j] \prod_{l \in C''} \{L_l\}.$$

Soit maintenant le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ défini de la façon suivante:

$$\mathbb{Z}(C) = \{(m_1, \dots, m_d)\ \mathbb{Z}^d_- : \exists i \in C, m_i < 0\} (\tilde{\mathbb{Z}}^d = \mathbb{Z}^d \backslash \mathbb{Z}^d_+)$$

ce qui permet de définir:

$$H^{2-}(C) = \{h \in \tilde{H}^{2-}; \hat{h}(m) = 0, \text{ si } m \notin \mathbb{Z}(C)\}$$

et enfin l'opérateur $P_c$ est le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{2-}(C)$, ceci donne un sens à l'opérateur ci-dessus: (On rappelle que $V(N) = \prod_{i=1}^d (N_i + 1)$). On peut énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit $f = |g|^2$, $g^{\pm 1} \in H^\infty$, on suppose $1/g = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d_+} \beta_m \chi^m$ est un polynôme trigonométrique de spectre contenu dans $\tau_L = \prod_{i=1}^d [0\, L_i]$.*

*Alors pour $k = 0, \dots, d$*

(i) $\lim_{\inf N_i \to \infty} (1/V(N)^{1-(k+1)/d}) \operatorname{Tr}[(T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^k A_{N,l}] = 0.$

(ii) *Les limites suivantes existent*: $(k \geqslant 2)$,

$$\begin{aligned} a_k &= \lim_{\inf N_i \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \operatorname{Tr}(A_{N,k}) \\ &= \sum_{C'' \subset \{1, \dots, d\}, \operatorname{card} C'' = k} \left( \prod_{l \in C''} \alpha_l \right) \sum_{C' \subset \{1, \dots, d\} \backslash C''} \\ &\quad \times \sum_{n \in \Omega(C', C'')} \left\| P_c H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(T_N(f))^{-1} &= a_0 \prod_{i=1}^d (N_i + 1) + a_1 (\Pi(N_i + 1))^{(d-1)/d} + \cdots \\ &\quad + a_{d-1} (\Pi(N_i + 1))^{1/d} + a_d + o(1). \end{aligned}$$

*Preuve du théorème* 2. Montrons (i). On a, par définition des opérateurs $A_{N,k}$ pour $k \geqslant 2$:

$$\left((T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^{k} A_{N,l}\right) = \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l}.$$

Cet opérateur ainsi obtenu est la restriction de l'opérateur $A_N$ sur le sous-ensemble de $E_N$, de polynômes trigonométriques à spectre dans $T_{N,k+1}$.

Soit $e_n = \chi^n = \chi_1^{n_1} \cdots \chi_d^{n_d}$. On a:

$$\operatorname{Tr} \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l} = \sum_{n \in T_{N,k+1}} \langle A_N e_n, e_n \rangle$$

$$= \sum_{n \in T_{N,k+1}} \sum_{p=1} \left\langle (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^p P + \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\rangle. \quad (1)$$

On peut majorer la trace dans (1), par:

$$\operatorname{T_r} \sum_{l=k+1}^{d} A_{N,l} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \|H_{\phi_N}\|^{2p} \sum_{n \in T_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2.$$

*1ère étape.* Majoration de $\sum_{n \in T_{N,k+1}} \|P_+ \bar{\phi}_N P((e_n/\bar{g}))\|^2$ (1).

D'après la définition de $T_{N,k+1}$ et $t_{N,k+1}$, il suffit d'étudier cette somme sur $t_{N,k+1}$ (qui est fixe grâce au choix de $B \subset \{1,..., d\}$ et card $B = k+1$).

Soit $C_1, C_2, C_3$ une partition de $\{1,..., d\}$. On suppose en outre que $C_1 \cup C_2 \supset B$.

Soit $n = (n_1,..., n_d) \in t_{N,k}$ vérifiant les conditions:

$$\forall i \in C_1, 0 \leqslant n_i \leqslant L_i, \forall j \in C_2, \quad N_j - L_j \leqslant n_j \leqslant N_j$$

et

$$\forall l \in C_3, L_l \leqslant n_l < N_l - L_l,$$

et $u(n) = (\tilde{n}_1,..., \tilde{n}_d)$ où

$$\forall i \in C_1, \tilde{n}_i = n_i, \forall j \in C_2, \quad \tilde{n}_j = n_j + 2L_j - N_j$$

et

$$\forall l \in C_3, \tilde{n}_l = L_l.$$

Montrons alors que $\|P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})\| = \|P_+ \bar{\phi}_{2L} P(e_{u(n)}/\bar{g})\|$. Posons

$$A_1(n) = \prod_{i \in C_1} \chi_i^{n_i} \prod_{j \in C_2} \chi_i^{n_j - N_j + 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{L_l} = e_{u(n)}$$

$$A_2(n) = \prod_{j \in C_2} \chi_j^{N_j - 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi^{n_l - N_l}.$$

On peut donc écrire:

$$\frac{\chi^n}{\bar g} = \frac{\chi_1^{n_1}\cdots\chi_d^{n_d}}{\bar g} = \frac{1}{\bar g}\, A_1(n)\, A_2(n).$$

Comme par ailleurs

$$\frac{\chi^n}{\bar g} = \sum_{m\in\tau_L} \beta_m \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \chi^{-m_i+n_i}$$

on a $P(\chi^n/\bar g) = \sum_{m\in\tau_L, i\in C_1, m_i\leqslant i} \beta_m \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \chi^{n_i-m_i} = P(A_1(n)\, A_2(n)/\bar g)$ et

$$P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right) = \sum \beta_m \prod_{i\in C_1} \chi_i^{-m_i+n_i} \prod_{l\in C_2} \chi_j^{-m_j+n_j-N_j+2L_j} \prod_{l\in C_3} \chi_l^{-m_l+L_l}.$$

Comme $A_2(n)\, P(A_1(n)/\bar g) \in H^{2\cdot}$, il s'ensuit que

$$A_2(n)\, P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right) = P\left(\frac{A_2(n)\, A_1(n)}{\bar g}\right) = P\left(\frac{\chi^n}{\bar g}\right).$$

Posons $A_3(n) = \prod_{i\in C_1} \chi^{-(N_i-2L_i)} \prod_{l\in C_3} \chi^{-(N_l-n_l-2L_l)}$, et montrons que

$$P_+\left(\bar\phi_{2L} A_3(n)\, P\left(\frac{A_1^{(n)}}{\bar g}\right)\right) = A_3(n)\, P_+\left(\bar\phi_{2L}\, P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right)\right).$$

Comme $\bar g\in \bar H^\times$ et que le spectre de $1/g$ est contenu dans $\prod_{j=1}^d [0 L_j] = \tau_L$, celà entraîne que $\bar\phi_{2L} = (\bar g/g)\, \bar\chi^{2L+1}$ appartient à $(\prod_{i=1}^d \chi^{-(L_i+1)})$. $\bar H^\infty$. On peut donc écrire:

$$\bar\phi_{2L} P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right) = \sum_{m_i\leqslant -1,\, m_j\leqslant L_j,\, m_l\leqslant -1} \gamma_{m_1,\ldots,m_j} \prod_{i\in C_1} \chi_i^{m_i} \prod_{j\in C_2} \chi_j^{m_j} \prod_{l\in C_3} \chi_l^{m_l}.$$

Soit $Q = I - P_+$. On a

$$Q\left(\bar\phi_{2L} A_3(n)\, P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right)\right) = A_3(n)\, Q\bar\phi_{2L} P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right).$$

En effet:

$$A_3(n)\bar\phi_{2L} P\left(\frac{A_1(n)}{\bar g}\right) = \sum_{m_i\leqslant -1,\, m_j\leqslant L_j,\, m_l\leqslant -1} \gamma_m \prod_{i\in C_1} \chi_i^{m_i-N_i+2L_i}$$

$$\times \prod_{j\in C_2} \chi_j^{m_j} \prod_{l\in C_3} \chi_l^{m_l-n_l+N_l+L_l}.$$

Comme $n_l-(N_l-L_l)\leqslant 0$, le projecteur $Q$ appliqué à l'élément ci-dessus ne va modifier que les coefficients $\gamma_m$ tels que $m_j\leqslant L_j$, on a ainsi:

$$Q\left(\Lambda_3(n)\,\phi_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=\sum_{m_i\leqslant -1,m_j\leqslant -1,m_l\leqslant -1}\gamma_m\prod_{i\in C_1}\chi_i^{m_i-N_i+2L_i}$$

$$\times\prod_{j\in C_2}\chi_j^{m_j}\prod_{l\in C_3}\chi_l^{m_l-n_l+N_l+L_l}.$$

D'autre part

$$Q\left(\phi_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=\sum_{m_i\leqslant -1,\,m_j\leqslant -1,\,m_l\leqslant -1}\gamma_m\prod_{i\in C_1}\chi^{m_i}\prod_{j\in C_2}\chi_j^{m_j}\prod_{l\in C_3}\chi_l^{m_l}.$$

On observe ainsi que

$$\Lambda_3(n)\left(Q\phi_{2L}\,P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right)=Q\left(\Lambda_3(n)\,\phi_{2L}P\left(\frac{\Lambda_1(n)}{\bar{g}}\right)\right),$$

on en déduit la même relation pour le projecteur $P_+=I-Q$ et on obtient l'égalité annoncée, en posant $\Lambda_1(n)=e_{u(n)}$.

*2ème étape.* Comme $u(n)\in u(t_{N,k})=\prod_{i\in C_1}[0\,L_i]\quad\prod_{j\in C_2}[L_j\,1\,2L_j]$ $\prod_{l\in C_3}\{L_l\}$ que card $u(t_{N,k})=\prod_{i\in C_1}L_i\prod_{j\in C_2}L_j$ et que $\mathrm{card}(C_1\cup C_2)\leqslant d$, il existe une constante $M$ indépendante de $N$ telle que

$$\forall N,\qquad \sup_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\phi_{2L}\,P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right)\right\|=M<+\infty\qquad\left(M\leqslant\left\|\frac{1}{g}\right\|_2\right)$$

et on a

$$\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2=\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P_+\,\phi_{2L}\,P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right)\right\|^2\leqslant M^2\,\mathrm{card}(t_{N,k+1})$$

$$\leqslant\left(\prod_{j\in C_1\cup C_2\supset B}(L_j+1)\right)\prod_{l\in C_3}(N_l+1))\cdot M^2$$

avec card $C_1\cup C_2\geqslant$ card $B=k+1$, card $C_3\leqslant d-k-1$ $(V(N)=\prod_{i=1}^{d}(N_i+1))$,

$$\frac{1}{((N_i+1))^{1-k/d}}\sum_{n\in t_{N,k+1}}\left\|P\phi_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right)\right\|^2\leqslant M^2\prod_{j\in C_1\cup C_2}(L_j+1)$$

$$\times\left(\prod_{l\in C_3}\left(\frac{N+1}{V(N)^{1/d}}\right)\frac{1}{V(N)^{r/d}}\right),\qquad r\geqslant 1.$$

Comme par hypothèse $\lim_{\inf N_j \to \infty}(N_i + 1/V(N)^{1/d}) = \alpha_i$ et $\lim_{\inf N_j \to \infty} V(N) = \infty$, on obtient

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \left( \sum_{n \in t_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0.$$

Comme le sous-ensemble $T_{N,k}$ est une réunion finie de sous-ensemble $t_{N,k}$, on a de même

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \left( \sum_{n \in T_{N,k+1}} \left\| P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\|^2 \right) = 0$$

et enfin, comme $\forall N$, $\sum_{p=1}^{\infty} \|H_{\phi_N}\|^{2P} \leqslant K < \infty$

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \operatorname{Tr}\left( (T_N(f))^{-1} - \sum_{l=0}^{k} A_{N,l} \right) = 0$$

ce qui montre (i).

(ii) Montrons que $\lim_{\inf N_j \to \infty} (1/V(N)^{1-k/d}) \operatorname{Tr} A_{N,k}$ existe. Posons $\psi_n = P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})$, on a:

$$\operatorname{Tr} A_{N,k} = \sum_{n \in S_{N,k}} \left\langle \sum_{p=1}^{\infty} (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^P \psi_n, \psi_n \right\rangle.$$

Fixons un sous-ensemble $C_3$ de $\{1,..., d\}$ tel que card $C_3 = d - k$ et soit $C_1, C_2, C_3$ une partition de $\{1,..., d\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, on définit un sous-ensemble $s_{N,k}$ et $S_{N,k}$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} s_{N,k} = \{n = (n_1,..., n_d) \in S_{N,k} &: \forall i \in C_1, 0 \leqslant n_i \leqslant L_i - 1; \\ &\forall j \in C_2, N_j - L_j + 1 \leqslant n_j \leqslant N_j \\ &\forall l \in C_3, L_l < n_l \leqslant N_l - l\}. \end{aligned}$$

Nous avons défini dans (i) les fonctions $A_1(n)$, $A_2(n)$ et $A_3(n)$ $(A_2(n)\, \bar{A}_3(n) = \prod_{i=1}^{N} \chi_i^{N_i - 2L_i})$ et nous avons établi que:

$$\psi_n = P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) = A_3(n)\, P_+ \left( \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_{u(n)}}{\bar{g}}\right) \right) = A_3(n)\, \psi_{u(n)}. \qquad (1)$$

*Étape* 1. Étude de $H_{\phi_N}\psi_n = P_- \phi_N P_+ \bar{\phi}_N P(e_n/\bar{g})$, quand $N = (n_1,..., n_d)$ est dans un voisinage de l'infini.

$$\text{On a } H_{\phi_N}\psi_n = P_- A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}. \qquad (2)$$

En effet, soit $h$ un élément de $\tilde{H}^{2-}$ (i.e., $\hat{h}(m)=0$ si $m\in\mathbb{Z}^d_+$).

$$\langle H_{\phi_N}\psi_n, h\rangle = \left\langle P_-\phi_N P_+\bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), h\right\rangle = \langle \psi_n, \bar{\phi}_N h\rangle.$$

Remplaçons $\psi_n$ par la quantité correspondante dans (1):

$$\begin{aligned}\langle \psi_n, \bar{\phi}_N h\rangle &= \langle \Lambda_3(n)\,\psi_{u(n)}, h\bar{\phi}_N\rangle = \langle \Lambda_2(n)\,\phi_{2L}\psi_{u(n)}, h\rangle \\ &= \langle P_-\Lambda_2(n)\,\phi_{2L}\psi_{u(n)}, h\rangle.\end{aligned}$$

Ce qui montre la relation ci-dessus.

Comportement de l'expression (2) au voisinage de l'infini. On a, en posant $h=\chi_1^{m_1},..., \chi_d^{m_d}$,

$$I_3 = \|P_-\Lambda_2(n)\,H_{\phi_{2L}}\psi_n\|^2 = \sum_{h\in\tilde{H}^{2-}} |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h\rangle|^2. \tag{3}$$

Définissons un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^d$ de la façon suivante:

$$\mathbb{Z}(C_1) = \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}^d_-, \exists i\in C_1, m_i<0\} \qquad (\mathbb{Z}^d_- = \mathbb{Z}^d\backslash\mathbb{Z}^d_+),$$

ce qui nous permet de définir:

$$H^{2-}(C_1) = \{h\in H^{2-}, \hat{h}(m)=0, \text{ si } m\notin\mathbb{Z}(C_1)\}.$$

La somme dans (3) se décompose:

$$I_3 = \sum |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h_1\rangle|^2 + \sum |\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \bar{\Lambda}_2(n)\,h_2\rangle|^2$$

où la première somme est étendue aux éléments $h_1\in H^2_-(C_1)$ et la 2e somme aux éléments $h_2\in\tilde{H}^{2-}\ominus H^{2-}(C_1)$.

Considérons la seconde somme, c'est-à-dire celle qui est étendue aux éléments $h_2=\chi_1^{m_1}\cdots\chi_d^{m_d}$, où

$$\begin{aligned} m = (m_1,..., m_d) &\in \tilde{\mathbb{Z}}^d_-\backslash\mathbb{Z}(C_1) \\ &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}^d_-, \forall i\in C_1, m_i\geqslant 0\}.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant $\tilde{\mathbb{Z}}^d_-\backslash\mathbb{Z}(C_1)=\Omega_1\cup\Omega_2$ où $\Omega_1$ et $\Omega_2$ sont disjoints et

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}^d_-\backslash\mathbb{Z}(C_1), \exists j\in C_2, m_j<0\},\\ \Omega_2 &= (\mathbb{Z}^d\backslash\mathbb{Z}(C_1))\backslash\Omega_1 \\ &= \{(m_1,..., m_d)\in\tilde{\mathbb{Z}}^d_-\backslash\mathbb{Z}(C_1), \exists l\in C_3, m_l<0\}.\end{aligned}$$

(a) Soit $m=(m_1,\ldots,m_{j_0},\ldots,m_d)$ un point de $\Omega_1$ tel que $m_{j_0}<0$. On a

$$\bar{\Lambda}_2(n)\,h_2=\left(\prod_{j\in C_2}\chi_j^{-(N_j-2L_j)}\prod_{l\in C_3}\chi^{-(n_l-N_l)}\right)\prod_{i=1}^{d}\chi_i^{m_i}$$

$$=\left(\prod_{i\in C_1}\chi_i^{m_i}\right)\left(\prod_{j\in C_2}\chi_j^{m_j-N_j+2L_j}\right)\prod_{l\in C_3}\chi_l^{m_l-n_l+L_l}.$$

Comme, pour $j_0\in C_2$, $m_{j_0}<0$, $m_{j_0}-N_{j_0}+2L_{j_0}$ tend vers $-\infty$ quand $N_{j_0}$ tend vers $\infty$ et le point $((m_i)_{i\in C_1}, (m_j-N_j+2L_j)_{j\in C_2}, (m_l-n_l+L_l)_{l\in C_3})\in\mathbb{Z}^d$ n'est pas à distance finie quand inf $N_j$ tend vers l'infini.

La somme qui apparaît dans $I_3$ et qui est étendue aux $h_2=\Pi\chi_i^{m_i}$, $m=(m_1,\ldots,m_d)\in\Omega_1$, tend vers zéro, quand inf $N_j\to\infty$ et $j\in C_2$ (car c'est un élément de $L^2(\mathbb{T}^d)$).

(b) Soit maintenant $m=(m_1,\ldots,m_d)\in\Omega_2$, tel qu'il existe donc $l_0\in C_3$ pour lequel $n_{l_0}<0$ et par définition de $l_0\in C_3$, on a $L_0\leqslant n_{l_0}\leqslant N_{l_0}-L_{l_0}$.

La somme dans (3) étendue aux $h_2=\prod_{i=1}^{d}\chi_i^{m_i}=\chi^m$, $m=(m_1,\ldots,m_d)\in\Omega_2$, et soit très petite soit bornée selon que $n\in s_{N,k}$ est dans un voisinage de l'infini où à une distance finie. Précisons: $\varepsilon>0$, soit $N_0$ déterminé par $\varepsilon>0$. On décompose $s_{N,k}=s^1_{N,k}\cup s^2_{N,k}$ qui est une partition avec

$$s^1_{N,k}=\{n=(n_1,\ldots,n_d)\in s_{N,k};\ \exists l_0\in C_3,\ n_{l_0}\geqslant N_0\}.$$

Soit $n\in s^1_{N,k}$, définissons le sous-ensemble suivant:

$$\mathscr{A}_{N_0}=\{((m_i),(m_j-N_j+2L_j),(m_l-n_l+L_l))\in\mathbb{Z}^d,\qquad (i,j,l)\in C_1\times C_2\times C_3,$$
$$m=(m_1,\ldots,m_d)\in\Omega_2, n_{l_0}\geqslant N_0\}.$$

Si $n\in s^2_{N,k}$, nous définissons alors:

$$\mathscr{A}'_{N_0}=\{((m_i),(m_j-N_j+2L_j),(m_l-n_l+L_l))\in\mathbb{Z}^d,\qquad (i,j,l)\in C_1\times C_2\times C_3,$$
$$m_2\in\Omega_2,\ n_0<N_0\}.$$

Posons $\bar{\Lambda}_2(n)\,h_2=\prod_{i=1}^{d}\chi_i^{m_i}=\chi^{m'}$, alors la 2e somme dans (3) s'écrit: si $n\in s^1_{N,k}$,

$$\sum_{m'=(m'_1,\ldots,m'_d)\in\mathscr{A}_{N_0}}|\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)},\chi^{m'}\rangle|^2=t_N(u(n)),$$

si $n\in s^2_{N,k}$,

$$\sum_{m'=(m'_1,\ldots,m'_d)\in\mathscr{A}'_{N_0}}|\langle H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)},\chi^{m'}\rangle|^2=t_N(u(n)).$$

$N_0$ est alors choisi, lorsqu'on se donne $\varepsilon>0$, tel que $\mathscr{A}_{N_0}$ qui contient le point $m_{l_0}-n_{l_0}+L_{l_0}$ $(n_{l_0}\geqslant N_0)$ soit un voisinage de l'infini et que la somme ci-dessus étendue à $\mathscr{A}_{N_0}$ soit unférieure à $\varepsilon>0$.

Quant à la somme étendue à $\mathscr{A}'_{N_0}$, elle peut être majorée par $\|H_{\phi_{2L}}\| \leqslant \|1/g\|_2^2$.

(c) Considérons la somme du type précédent étendue aux éléments

$$\prod_{i=1}^{d} \chi^{m'_i} = \chi^{m'} \in \bar{A}_2(m)\, H^{2-}(C_1).$$

Rappelons que $\mathbb{Z}(C_1) = \{m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{Z}^d,\ \exists j \in C_1, m_j < 0\}$. Soit $P_{C_1}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^{2-}(C_1)$.

Considérons la somme du type précédent étendue aux éléments $q \in \bar{A}_2(n)\, H^{2-}(C_1)$:

$$\sum_{q \in \bar{A}_2(n) H^{2-}(C_1)} |\langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q\rangle|^2 = \sum_{q' \in H^{2-}(C_1)} |\langle A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q'\rangle|^2$$
$$= \|P_{C_1} A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.$$

Mais nous avons

$$P_{C_1}(A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}) = A_2(n)\, P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}.$$

En effet, soit $q' \in H^{2-}(C_1)$

$$\langle P_C A_2(n)\, H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q'\rangle = \langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, \bar{A}_2(n)\, q'\rangle$$

or

$$\bar{A}_2(n)\, q' = \chi^m = \left(\prod_{i=1}^{d} \chi^{m_i}\right) \prod_{j \in C_2} \chi_j^{-N_j + 2L_j} \prod_{l \in C_3} \chi_l^{-N_l + L_l} \quad \text{avec } m = (m_i) \in \mathbb{Z}(C_1).$$

$m'$ peut donc être décrit par $m' = ((m_i), (m_j - N_j + 2L_j), (m_l - n_l + L_l)) \in \mathbb{Z}^d$ avec $(i, j, l) \in C_1 \times C_2 \times C_3$ et $m \in \mathbb{Z}(C_1)$. Les seuls indices modifiés dans les coordonnées de $m'$ sont ceux correspondant à $(j, l) \in C_2 \times C_3$, donc par définition de $\mathbb{Z}(C_1)$, $m'$ appartient aussi à $\mathbb{Z}(C_1)$, par conséquent $\bar{A}_2(n)\, q' \in H^{2-}(C_1)$ et on obtient la relation annoncée. Il s'ensuit alors que:

$$\sum_{q \in \bar{A}_2(n) H^{2-}(C_1)} |\langle H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}, q\rangle|^2 = \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.$$

(d) Soit $V(N) = \prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)$, étudions la quantité:

$$\frac{1}{V(N)^{1-k/d}} \sum_{n \in S_{n,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2.$$

Nous avons établi en a), b) et c) que:

$$\|H_{\phi_N} \psi_n\|^2 = \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 + t_N(u(n))$$

tenant compte de la décomposition de $s_{N,k}$ dans b), on a:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N}\psi_n\|^2 = \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 + \sum_{n \in s^1_{N,k}} t_N(u(n))$$

$$+ \sum_{n \in s^2_{N,k}} t_N(u(n)).$$

Notons que $u(n) \in u(s_{N,k}) = \prod_{i \in C_1} [0 L_i] \prod_{j \in C_2} [L_j + 1\ 2L_j] \prod_{l \in C_3} \{L_l\}$ et donc $u(n)$ varie dans un ensemble fini d'indices. Nous avons établi dans (b), que $\varepsilon > 0$, $\exists N_0$ tel que, $n \in s^1_{N,k}$, $N > N_0$ alors $t_N(u(n)) < \varepsilon$. On peut choisir $N_0$, pour que $\forall u(n) \in s_{N,k}$, $t_N(u(n)) < \varepsilon$. Nous avons par ailleurs majoré $t_N(u(n))$ par $\|1/g\|_2^2$ lorsque $n \in s^2_{N,k}$.

Il vient donc

$$\sum_{n \in s^1_{N,k}} t_N(u(n)) < \varepsilon \operatorname{card} s^1_{N,k}$$

et

$$\sum_{n \in s^2_{N,k}} t_N(u(n)) < \operatorname{card} s^2_{N,k} \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2.$$

On a card $s^1_{N,k} \leqslant$ card $s_{N,k} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i \prod_{l \in C_3} (N_l - 2L_l)$ et comme

$$s^2_{N,k} = \{n \in s_{N,k}, \text{ tel que } n_{l_0} < N_0\},$$

$$\operatorname{card} s^2_{N,k} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} (L_i + 1) \prod_{l \in C_3 \setminus \{l_0\}} (N_l - 2L_l) \times (N_0 - 2L_{l_0}).$$

On peut alors évaluer, en notant que card $C_3 = d - k$

$$\frac{\operatorname{card} s^1_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1 - k/d}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i \frac{\prod_{l \in C_3}(N_l - 2L_l)}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}}$$

et

$$\frac{\operatorname{card} s^2_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i (N_0 - 2L_{l_0}) \frac{\prod_{l \in C_3 \setminus \{l_0\}}(N_l - 2L_l)}{(\pi(N_i + 1)^{1/d})^{d-k}}.$$

Comme card $C_3 \setminus \{l_0\} = d - k - 1$, on peut encore écrire

$$\frac{\operatorname{card} s^2_{N,k}}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} L_i (N_0 - 2L_{l_0}) \Bigg( \prod_{k \in C_3 \setminus l_0} \frac{N_l - 2L_l}{(\pi(N_i + ))^{1/d}}$$

$$\times \frac{1}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1/d}}$$

Comme $\lim_{\inf N_j \to \infty} (N+1)/(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1))^{1/d} = \alpha_l$, $\forall l \in \{1,..., d\}$, ceci nous permet d'obtenir

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} t_N(u(n)) = 0$$

et

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2$$
$$= \lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2.$$

(e) Étudions l'existence de la seconde limite. Rappelons que $u(n) = ((n_i), (n_j - N_j + 2L_j), (L_l))$; $(i, j, l) \in C_1 \times C_2 \times C_3$. On en déduit que si $n' = ((n_i), (n_j), (n'_l))$ alors $u(n) = u(n')$. On peut réduire ainsi la somme suivante:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)}\|^2 = \prod_{l \in C_3} (N_l - 2L_l) \sum_{n' \in u(s_{n,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2.$$

et

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{(\prod_{d=1}^{d} (N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|H_{\phi_N} \psi_n\|^2$$
$$= \lim_{\inf N_j \to \infty} \left( \prod_{l \in C_3} \frac{N_l - 2L_l}{N_l + 1} \right) \sum_{n \in u(s_{N,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2$$
$$= \left( \prod_{l \in C_3} \alpha_l \right) \sum_{n' \in u(s_{N,k})} \|P_{C_1} H_{\phi_{2L}} \psi_{n'}\|^2$$

car $u(s_{N,k}) = \prod_{i \in C_1} [0 L_i] \prod_{j \in C_2} [L_j + 1\ 2L_j] \prod_{l \in C_3} \{L_l\}$ ne dépend pas de $N = (N_1, ..., N_d)$ et la limite *est finie* et ne dépend que de $1/g$ et de son spectre, (et du choix de $C_1, C_2, C_3$ partition de $\{1,..., d\}$). Comme $C_2 = \{1,..., d\} \backslash (C_1 \cup C_3))$, le choix de $s_{N,k}$ ne dépend en fait que de $C_3$, dont on impose card $C_3 = d - k$ et $C_1$ dont le cardinal est inférieur ou égal à $k$.

On notera désormais $u(s_{N,k}) = \Omega(C, C')$, où on pose $C = C_1$ et $C' = C_3$. Les sous-ensembles $S_{N,k}$ spectres des polynômes $E_{N,k}$ sur lesquels sont définis les opérateurs $A_{N,k}$ sont réunion finie de sous-ensembles $s_{N,k}$, réunion qui correspond aux choix de $(C, C')$ avec card $C \leqslant k$ et card $C' = d - k$.

On obtient ainsi:

$$\lim_{\inf N_i \to \infty} \frac{1}{(\pi(N_i+1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in S_{N,k}} \|H_{\phi_N}\psi_n\|^2$$

$$= \sum_{C' \subset \{1,\ldots,d\},\, \operatorname{card} C' = d-k,\; C \subset \{1,\ldots,d\}/C'} \left(\prod_{l \in C'} \alpha_l\right)$$

$$\times \sum_{n' \in \Omega(C,C')} \|P_C H_{\phi_{2L}}\psi_{n'}\|^2.$$

*Étape* 2. Étudions le comportement de $P_+\bar{\phi}_N P_-\phi_N\psi_n$. D'après ce qui précède pour $n$ fixé

$$\lim_{\inf N_i \to \infty} P_-\phi_N\psi_n = \lim_{\inf N_i \to \infty} P_- A_2(n)\, H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)} = P_{C'} H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}.$$

On obtient alors

$$\lim_{\inf N_i \to \infty} P_+\bar{\phi}_N P_-\phi_N\psi_n = \lim_{\inf N_i \to \infty} P_+\bar{\phi}_N P_{C'} H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}.$$

Pour tout $h \in \tilde{H}^{2+}$, on a

$$\langle P_+\bar{\phi}_N P_{C'} H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, h\rangle = \langle \bar{\phi}_{2L} A_2(n)\, P_{C'} H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, \bar{A}_3(n)\, h\rangle.$$

Comme $\bar{A}_3(n) = \prod_{i \in C} \chi_i^{N_i - 2L_i} \prod_{l \in C'} \chi_l^{N - n_l - L_l}$, $\bar{A}_3(n)\, h \in \tilde{H}^{2+}$. Le produit scalaire précédent est donc égal à

$$\langle \bar{\phi}_{2L}\, P_C H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, A_2(n)\, \bar{A}_3(n)\, h\rangle.$$

Comme d'autre part $A_2(n)\, \bar{A}_3(n) = \prod_{i=1}^d \chi_i^{N_i - 2L_i}$,

$$A_2(n)\, \bar{A}_3(n)\, h \in \tilde{H}^{2+}.$$

Posons $h = \prod \chi_i^{r_i} = \chi^r$ où $r = (r_1,\ldots,r_d) \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d = \{r = (r_1,\ldots,r_d) \in \mathbb{Z}^d, \exists l, r_l \geqslant 0\}$.
Considérons alors la quantité $\|P_+\bar{\phi}_N P_-\psi_{u(n)}\|^2$. Elle est égale à:

$$\sum_{(r_1,\ldots,r_d) \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d} |\langle P_+\bar{\phi}_{2L} P_C H_{\phi_{2L}}\psi_{u(n)}, A_2(n)\, \bar{A}_3(n) \prod \chi_i^{r_i}\rangle|^2.$$

Posons $\chi^s = A_2(n)\, \bar{A}_3(n)\, h$ et $\tilde{\mathbb{Z}}_+^d(n) = (N_1 - 2L_1,\ldots, N_d - 2L_d) + \tilde{\mathbb{Z}}_+^d$. La somme considérée ci-dessus devient:

$$\sum_{s \in \tilde{\mathbb{Z}}_+^d(n)} |\langle P_+\bar{\phi}_{2L} P_C H_{\phi_{2L}} - \psi u(n), \chi^s\rangle|^2.$$

Lorsque $\inf_{1 \leqslant j \leqslant d} N_j$ tend vers l'infini, $\mathbb{Z}_+^d(n)$, ne contient pas de point à distance finie (c'est un voisinage de l'infini), cette somme tend donc vers zéro puisque $P_+ \bar{\phi}_{2L} P_{C'} H_{\phi_{2L}} \psi_{u(n)} \in L^2(\mathbb{T}^d)$.

Considérons maintenant la somme étendue à $s_{N,k}$:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2 = \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \phi_N P_- \phi_N \psi_{u(n)}\|^2.$$

Or comme nous l'avons remarqué précédemment $u(n) = u(n')$ si $n$ et $n'$ ne différent que par les composantes d'indice dans $C'$. La somme précédente s'écrit alors:

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P \phi_N \psi_n\|^2 = \prod_{l \in C''} (N_l - 2L_l) \sum_{n' \in u(s_{N,k})} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_{n'}\|^2.$$

Comme card $u(s_{N,k})$ est fini la somme dans le 2ème membre de l'égalité ci-dessus tend vers 0, d'après ce qui précède.

$$\begin{aligned} &\lim_{\inf N_i \to \infty} \frac{1}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1)^{1/d})^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2 \\ &\quad = \lim_{\inf N_i} \prod_{l \in C''} \frac{N_l - 2L_l}{(\prod_{i=1}^d (N_i + 1))^{1/d}} \cdot \lim_{\inf N_i \to \infty} \sum_{n' \in u(s_{n,k})} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_{n'}\|^2. \end{aligned}$$

La première limite tend par hypothèse vers

$$\prod_{l \in C''} \alpha_l.$$

Comme la seconde limite tend vers zéro ainsi que nous l'avons remarqué, la limite totale est nulle.

Passons maintenant à $S_{N,k}$ qui est une réunion finie de $s_{n,k}$, on obtient

$$\lim_{\inf N_i \to \infty} 1/V(N)^{1-k/d} \sum_{n \in S_{N,k}} \|P_+ \bar{\phi}_N P_- \phi_N \psi_n\|^2 = 0.$$

Nous en déduisons immédiatement que pour tout $p$ fini

$$\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant d}} 1/V(N)^{1-k/d} \sum_{n \in S_{N,k}} \left\langle (H_{\bar{\phi}_N}^* H_{\phi_N})^p P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right), P_+ \bar{\phi}_N P\left(\frac{e_n}{\bar{g}}\right) \right\rangle = 0.$$

Nous avons par ailleurs démontré dans la proposition 1 qu'il existe $K$, $0 < K < 1$, tel que $\forall N$, $\|H_{\bar{\phi}_N}^* H_{\phi_N}\| \leqslant K < 1$.

Comme

$$\sum_{n \in s_{N,k}} \sum_{p' \geqslant p} \|(H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p'} \psi_n\|^2$$

$$\leqslant \frac{K^p}{1-K} \sum_{n \in s_{N,k}} \|\psi_n\|^2 \leqslant \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \frac{K^p}{1-K} \operatorname{card}(s_{N,k}).$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné on peut choisir $p$ tel que $K^p/(1-K) < \varepsilon$. Il s'ensuit alors que

$$\overline{\lim_{\substack{\inf N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant d}}} \frac{1}{[(\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1))^{1/d}]^{d-k}} \sum_{n \in s_{N,k}} \sum_{p' \geqslant p} \|(H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p'} \psi_n\|^2$$

$$\leqslant \varepsilon \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \lim_{\inf N_j \to \infty} \prod_{l \in C''} \frac{N_l - 2L_l}{\prod_{j=1}^{d} (N_j + 1)^{1/d}} = \varepsilon \left\|\frac{1}{g}\right\|_2^2 \cdot \prod_{l \in C''} \alpha_l.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire cette limite est nulle. On a au total, comme $S_{N,k}$ est une réunion finie de $s_{N,k}$:

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} \frac{1}{[\prod_{i=1}^{d} (N_j + 1)^{1/d}]^{d-k}} \sum_{n \in S_{N,k}} \langle (H^*_{\phi_N} H_{\phi_N})^{p} \psi_n, \psi_n \rangle = 0$$

et ainsi, pour $k = 2, 3, \ldots, d$, on a (ii),

$$a_k = \lim_{\inf N_i \to \infty} \frac{1}{[\prod_{i=1}^{d} (N_i + 1)^{1/d}]^{d-k}} \operatorname{Tr} A_{N,k}$$

$$= \sum_{\substack{C'' \subset \{1, \ldots, d\} \\ \operatorname{card} C'' = d-k}} \sum_{C \subset \{1, \ldots, d\} \setminus C''} \left(\prod_{l \in C''} \alpha_l\right) \sum_{n' \in \Omega(C, C'')} \left\| P_C H_{\phi_{2L}} P_+ \bar{\phi}_{2L} P\left(\frac{e_n}{g}\right)\right\|^2.$$

## BIBLIOGRAPHIE


1. D. DACUNHA-CASTELLE, Inversion des opérateurs de Toeplitz et statistiques des champs aléatoires gaussiens, *in* "Colloque International du CNRS," Vol. 307, CNRS, Lyon, 1980.
2. GRENANDER AND SZEGÖ, "Toeplitz Forms and Their Applications," Univ. of California Press, Berkeley/Los Angeles, 1958.
3. J. IU. LINNICK, A Multidimensional analogue of a limit theorem of G. Szegö, *Math. USSR-Izv.* 9 (1975), 1323–1332.
4. A. SEGHIER, Inversion de la matrice de Toeplitz en plusieurs dimensions et théorème de Szegö, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.* **293** (1981).
5. H. WIDOM, Asymptotic inversion of convolution operators, *Publ. Math. IHES* **44** (1975), 191–240.
6. H. WIDOM, Szegö's limit theorem: The higher dimensional matrix case, *J. Funct. Analys.* **39** (1980), 182–198.
7. H. WIDOM, Szegö's Theorem and a complete symbolic calculus, *in* "Seminar on Singularities of Linear Partial Differential Equations," Annals of Math. Studies, No. 91, pp. 261–283, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1979.


Printed by the St. Catherine Press Ltd., Tempelhof 41, Bruges, Belgium

# INVERSION DES MATRICES DE TOEPLITZ EN d-DIMENSIONS DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE A L'ORDRE d.

A.SEGHIER.

## INTRODUCTION

Les résultats qui suivent constituent un travail d'explicitation des termes du développement asymptotique, obtenus dans un précédent travail.

Le fait inattendu est la divergence des termes du développement à partir du 3ème ordre ($d \geq 3$).

Ceci se produit lorsque le symbole n'est plus l'inverse d'un polynome trigonométrique mais une fonction de $L^{\infty}(\mathbb{T}^{d})$ ayant un nombre infini de coefficients de Fourier non nuls.

En effet pour obtenir des théorèmes limites, nous sommes amenés à procéder à une deuxième troncature de l'espace $\mathbb{Z}_{+}^{d}$, c'est-à-dire à considérer un multi-rectangle sur lequel nous définissons des opérateurs qui interviennent dans l'approximation asymptotique de $(T_N(f))^{-1}$.

Nous observons ainsi que les trois premiers termes $a_o$, $a_1$, $a_2$ ne dépendent que de la première troncature, tandis que les termes $a_3,\dots,a_d$ dépendent des deux troncatures.

La deuxième contribution de ce travail est une interprétation géométrique des invariants du développement asymptotique.

Ces questions sont à rapprocher du celles que se sont posées les auteurs dans [1], à propos du développement asymptotique de la trace de l'exponentielle de l'opérateur de la chaleur. Cependant, les domaines considérés (sous-ensemble de $\mathbb{R}^{d}$) sont de nature plus générale.

Nous rappelons le théorème principal établi dans [3].

On considère une partie finie $\Lambda = \prod_{j=1}^{d} [ON_j]$, où $[ON_j]=\{0,1,\ldots,N_j\}$, $N_j \in \mathbb{N}$.

$\tau_L = \prod_{j=1}^{d} [OL_j]$ et $\tau_L \subset \Lambda$.

Toutes les notations utilisées dans la suite sont définies dans [3].

THEOREME :

Soit $f = |g|^2$, $g^{-1} \in H^{\infty}$. On suppose que $g^{-1} = \sum_{m\in\tau_L} \beta_m \chi^m$ (polynome trigonométrique).

Alors pour $k=0,\ldots,d$ :

(i) $\liminf_{N_j \to \infty} 1/(N_j+1)\ d-k/d\ (\mathrm{Tr}\ (T_N(f))^{-1} - \sum_{\ell=0}^{k} A_{N,\ell}) = 0$

(ii) $a_k = \liminf_{N_j \to \infty} (V(N))^{-(1-k/d)}\ \mathrm{Tr}\ A_{N,k}$.

$$= - \sum_{C\subset\{1,\ldots,d\}} (\prod_{\ell\in C} \alpha_\ell) \sum_{\mathrm{Card}\ C'=d-k-n}\ \sum_{n\in\Omega(c,c')} \| P_C H_{\varnothing_{2L}} H^*_{\varnothing_{2L}} P(\frac{e_n}{g}) \|^2 .$$

Avant de donner un lemme qui précise les coefficients $a_k$, dans le cas où $1/g$ est un polynome trigonométrique, nous aurons besoin de quelques notations.

On écrit $1/g = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d_+} \beta_m X^m$, $g\ (\bar{g})^{-1} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}^d} \gamma_\ell X^\ell$.

On pose $\Lambda_g = \{m \in \mathbb{Z}^d_+ .\ (1/g)\ (m) \neq 0\}$.

Pour tout $q \in \mathbb{Z}\ (C_1)$ (défini dans [3], $C_1 \subset \{1,\ldots,d\}$).

Soit $C_{1,0}(q) \subset C_1$, tel que $i_o \in C_{i,o}(q) \Longleftrightarrow q_{i,o} < 0$, ($q_{i,o}$ est une coordonnée de $q = (q_1,\ldots,q_d)$).

Pour tout $r \in \mathbb{Z}_+^d$, $C_{2,0}(r) \subset C_2$, tel que $j_0 \in C_{2,0}(r) \Longleftrightarrow r_{j_0} \geq 0$ $(C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1,\dots,d\},\ C_i \cap C_{i'} = \emptyset,\ i,\ i' = 1,2,3,\ i \neq i')$.

$$\mathcal{M}(q) = \begin{cases} i_0 \in C_{1,0}(q) \quad : \quad 0 \leq m_{i_0} < -q_{i_0} \\ 0 \leq m_i \leq L_i \qquad \forall\, i \in \{1,\dots,d\} \setminus C_{1,0}(q). \end{cases}$$

Soit $(m,m') \in \mathcal{M}^2(q)$, on pose $\tilde{m}_i = \sup(m_i,m'_i)$, $i \in C_1$.

Soit $(r,r') \in (\mathbb{Z}_+^d)^2$, on pose :

$$\tilde{r}_{j_0} = \begin{cases} r_{j_0}, \text{ si } j'_0 \in C_{2,0}(r),\ j_0 \notin C_{2,0}(r') \\ \inf(r_{j_0}, r'_{j_0}) \qquad \text{si } j_0 \in C_{2,0}(r) \cap C_{2,0}(r') \\ r'_{j_0}, \text{ si } j_0 \in C_{2,0}(r'),\ j_0 \notin C_{2,0}(r). \end{cases}$$

On a d'abord un lemme :

LEMME. Pour tout $k \geq 2$ et tout "multirectangle" $\tau_L = \prod_{p=1}^{d} [0\ L_p]$ tel que $\Lambda_g \subset \prod_{p=1}^{d} [0\ L_p]$, on a

$$a_k = \sum_{\substack{C' \subset \{1,\dots,d\} \\ \text{card } C' = d-k}} \ \sum_{C \subset \{1,\dots,d\} \setminus C'} \ \prod_{\ell \in C'} \alpha_\ell \sum_{n \in \Omega(C,C')} \| P_C H_{\Phi_{2L}} P_+ \bar{\Phi}_{2L} P(\tfrac{e_n}{g}) \|^2$$

et

$$\sum_{n \in \Omega(C,C')} \| P_C H_{\Phi_{2L}} P_+ \bar{\Phi}_{2L} P(\tfrac{e_n}{g}) \|^2 =$$

$$= \sum_{q \in \mathbb{Z}(C)} \ \sum_{(r,r') \in (\mathbb{Z}_+^d)^2} \ \sum_{(m,m') \in \mathcal{M}^2(q)} \text{card } \eta \ \gamma_{q-r}\, \bar{\gamma}_{q-r'}\, \bar{\gamma}_{-m-r}\, \gamma_{-m'-r'}\, \beta_m\, \bar{\beta}_{m'}$$

et

$$\text{card } \eta = \prod_{i_0 \in C_{1,0}(q)} (-q_{i_0} - \tilde{m}_{i_0}) \prod_{j_0 \in C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r')} (\tilde{r}_{j_0} + 1) \prod_{i \in C_1 \setminus C_{1,0}(q)} (L_i + 1 - m_i)$$

$$\prod_{j \in C_2 \setminus C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r')} (L_j + 1)$$

Le lemme donne une expression des $a_k$ lorsqu'un choix de troncature est fait pour les opérateurs $A_N$, qui constituent le développement asymptotique de $(T_N(f))^{-1}$.

Ainsi, pour $d \geq 3$, dès que $\inf L_j$ tend vers l'infini les termes d'ordre supérieur ou égal à 3 deviennent infinis.

Preuve du lemme :

Soit $k$ un entier fixe dans $\{2,\ldots,d\}$ et $(n_1,\ldots,n_d) = n$ un élément de $\Omega(C,C') \subset \mathbb{Z}^d$ (voir [3] , page 23). On pose $C_1 = C$ , $C' = C_3$ avec $\{C_1, C_2, C_3\}$ une partition de $\{1,\ldots,d\}$ et Card $C_1 \leqslant k$, Card $C_3 = d-k$.

On écrit alors $n \in \Omega(C,C')$, comme $n=((n_i),(n_j)(n_\ell))$, $i \in C_1$, $j \in C_2$, $\ell \in C_3$. D'après la définition de $\Omega(C,C')$ on a $0 \leqslant n_i \leqslant L_i$ , $i \in C$ ; $L_j \leqslant n_j \leqslant 2L_j + 1$ , $n_\ell = L_\ell$

<u>Calcul de (*)</u> : $P\left(\dfrac{e_n}{\bar{g}}\right) = P\left(\sum_{m \in \prod_{p=1}^{d}[0,L_p]} \bar{\beta}_m \chi^{m-n}\right) = \sum_{m \in M(n)} \bar{\beta}_m \chi^{m-n}$ ,

avec

$$M(n) = \begin{cases} 0 \leqslant m_i \leqslant n_i \quad , \quad i \in C_1 \\ \\ 0 \leqslant m_j \, 6(-L_j + 1) + n_j \quad , \quad 0 \leqslant m_\ell \leqslant L_\ell \quad , \quad (i,j) \in C_2 \times C_3 \end{cases}$$

On pose $g.(\bar{g})^{-1} = \sum_{m \in \prod_{p=1}^{d}[-L_p \; \infty]} \gamma_m \chi^m$

<u>Calcul de (**)</u> : $P_{\pm}\left(\bar{g}/g \; \chi^{-(2L+1)} \; P(e_n/\bar{g})\right)$ .

On a :

$$(**) = \sum_{m \in M(n)} \left( \sum_{s \in \mathcal{P}(m,n)} \bar{\beta}_m \gamma_s \chi^{-s-m} \right) \chi^m \chi^{-(2L+1)}$$

avec

$$\mathcal{P}(m,n) = \begin{cases} s = (s_i), (s_j), (s_e)) \\ (-s_i) \leqslant L_2 \quad , \quad -s_e \leqslant L_e \quad , \quad (i,j) \in C_1 \times C_3 \\ \exists \, \gamma_o \in C^2 : 2L_o + 1 - n_{j_o} + m_{j_o} \leqslant -s_{j_o} \leqslant L_{j_o} \end{cases}$$

Posons $r=-s-m$ et réordonnons les sommes (**) par rapport à $\chi^n$.

$$(**) = \left(\sum_{r\in R}\left(\sum_{s\in\mathcal{P}(m,n)} \bar\beta_{-s-r}\,\bar\gamma_s\right)\chi^r\right)\chi^n\,\chi^{-(2L+1)}.$$

$$\text{avec } r\in R \iff \left[\begin{array}{l} \exists\, j_o \in C_2 : 2L_{j_o}+1-n_{j_o} \leq r_{j_o} \leq L_{j_o} \\ \text{Soit } C_{2,0}(r) \text{ ce sous-ensemble de } C_2 \\ \\ j\in C_2 \setminus C_{2,0}(r) : r_j \leq L_j \\ (i,j)\in C_1\times C_3 \ , \ r_i \leq L_i \ , \ r_\ell \leq L_\ell \end{array}\right.$$

Calcul de $(***) = \| P_c\, g/\bar g\ \chi^{2L+1}\ P_-\ \bar g\,/g\ \bar\chi^{2L+1}\ P(e_n/\bar g)\|^2 = \| P_c\, \varnothing_{2L}(**)\|^2$

Soit

$$\mathcal{P}(r,n) = \left[\begin{array}{ll} s=((s_i),(s_j),(s_\ell)) & \\ r_i \leq -s_i \leq n_i + r_i & ,\ i\in C_1 \\ r_j \leq -s_j \leq n_j + L_j & ,\ j\in C_2 \\ r_\ell \leq -s_\ell \leq L_\ell + r_\ell & ,\ \ell\in C_3 \end{array}\right.$$

Multiplions l'expression (**) par $\chi^{2L+1}\ g/\bar g = \varnothing_{2L}$.
Comme $g/\bar g = \sum\limits_{p\in\prod_{i=1}^{d}[-L_i\ \infty[=P}$ , on a :

$$\varnothing_{2L}(**) = \sum_{p\in P}\gamma_p \sum_{r\in R}\left(\sum_{s\in\mathcal{P}(r,n)} \bar\beta_{-s-r}\,\bar\gamma_s\right)\gamma^{2+n-p}.$$

Posons $r+p=q$ , l'expression ci-dessus devient :

$$\varnothing_{2L}(**) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^d}\ \sum_{r\in R}\gamma_{q-r}\left(\sum_{s\in\mathcal{P}(r,n)} \bar\beta_{-s-r}\,\bar\gamma_s\right)\chi^{q+n}.$$

Projetons $\varnothing_{2L}(**)$ sur le sous-espace $H^2(C_1)$ défini dans [3] (voir page 24) :

$$P_C\,\varnothing_{2L}(**) = \sum_{q+n\in\mathbb{Z}(C_1)}\left(\sum_{r\in R}\gamma_{q-r}\sum_{s\in\mathcal{P}(r,n)} \bar\beta_{-s-r}\,\bar\gamma_s\right)\chi^{q+n}$$

(n étant fixe dans $\Omega(C,C')$) .

La norme de cette expression est :

$$\|P_C\, \emptyset_{2L}(**)\|^2 = \sum_{q+n\in\mathbb{Z}(C_1)} \Big|\sum_{r\in R} \gamma_{q-r} \sum_{s\in\mathcal{P}(r,n)} \overline{\beta}_{-s-r}\, \overline{\gamma}_s \|_s\Big|^2 .$$

En développant le carré du module et en sommant sur $n\in\Omega(C,C')$ on obtient :

$$(****) = \sum \|P_C\, \emptyset_{2L}\ (**)\|^2$$

$$\sum_{n\in\Omega(C,C')}\ \sum_{q:q+n\in\mathbb{Z}(C_1)}\ \sum_{\substack{(s,s')\in(\mathcal{P}(r,n))^2\\(r,r')\in R^2}} \gamma_{q-r}\, \overline{\gamma}_{q-r'}\, \overline{\beta}_{-s-r}\, \beta_{-s'-r'}\, \overline{\gamma}_{s'}\, \gamma_s \ ;$$

Le but des calculs qui suivent est de réordonner la somme (****) en intervertissant (soigneusement !) les signes de sommation.

Notons $Q_o$ l'ensemble des éléments $q\in\mathbb{Z}^d$ , $q+n\in\mathbb{Z}(C_1)$ et $N_o = \Omega(C_1,C_3)$.

1. Echange des signes de sommation $\sum_{n\in n_o}$ et $\sum_{q\in Q}$ .

On obtient une sommation suivant cet ordre $\sum_{q\in Q_1}$ et $\sum_{n\in n_1}$ avec $Q_1 = \bigcup_{\eta\in n_o} (-n+\mathbb{Z}(C_1))$ et $n_1 = n_o \cap Q_o$. On peut préciser :

$$\eta_1 = \left[\begin{array}{l} \exists\, C_{1,0}(q) \subset C_1 / i_o \in C_{i,o}\ ,\ n_{i_o} < -q_{i_o}\ , \\ 0 \leqslant n_i \leqslant L_i\ ,\ i \in C_1\backslash C_{1,0}(q) \\ L_j + 1 \leqslant n_j \leqslant 2L_j+1\ ,\quad j\in C_2\ ,\ n_\ell = L_\ell\ ,\ \ell\in C_3 \end{array}\right.$$

## 2. Echange des signes de sommation $\sum_{n\in\eta_1(q)}$ et $\sum_{(r,r')\in R^2}$

En appliquant le même principe que ci-dessus on obtient $\sum_{r\in R_1^2}$ et $\sum_{n\in\eta_2}$ avec :

$$r\in R_1 \Longleftrightarrow = \bigcup_{n\in\eta_1} R \left[\begin{array}{l} \exists\, C_{2,0}(r)\subset C_2 : j\in C_{2,0}(r),\ 0\leqslant r_{j_o}\leqslant L_{j_o} \\ \text{Les autres composantes de } r \text{ sont identiques à} \\ \text{celles de } r\in R. \end{array}\right.$$

$$n\in\eta_2(r,r') : \left[\begin{array}{l} \exists\, C_{2,0}(r)\subset C_2/j_o\in C_{2,0}(r) : n_{j_o}\geqslant 2L_{j_o}+1-r_{j_o} \\ \exists\, C_{2,0}(r')\subset C_2/j'_o\in C_{2,0}(r') : n_{j'_o}\geqslant 2L_{j'_o}+1-r'_{j_o} \\ \text{Les autres coordonnées de } n \text{ sont identiques à celles} \\ \text{de } n\in\eta_1. \end{array}\right.$$

## 3. Echange de $\sum_{n\in\eta_2}$ et $\sum_{s\in(\varphi(r,n))^2}$.

On obtient la disposition suivante :

$\sum_{(s,s')\in(\varphi_1(q,r))^2}$ et $\sum_{n\in\eta_3(q,(r,r'),(s,s'))}$

avec

$$\varphi(q,r) = \bigcup_{n\in\eta_2} \varphi(r,n) = \left[\begin{array}{l} \exists C_{1,0}(q)\subset C_1,\ i_o\in C_{1,0}(q),\ r_{i_o}\leqslant -s_{i_o}\leqslant -q_{i_o}+r_{i_o} \\ \forall i\in\{1,\dots,d\}\setminus C_{1,0}(q),\ r_i\leqslant -s_i\leqslant L_i+r_i \end{array}\right.$$

Pour définir $\eta_3$, nous avons besoin de définir de nouveaux entiers :

$$(r_{i_o}+s_{i_o}) = \inf(r_{i_o}+s_{i_o},\ r'_{i_o}+s'_{i_o})$$

$$r_{j_o} = \left[\begin{array}{l} = r_{j_o} \text{ si } j_o\in C_{2,0}(r),\ j_o\notin C_{2,0}(r') \\ = \inf(r_{j_o}, r'_{j_o}) \quad \text{si } j_o\in C_{2,0}(r)\cap C_{2,0}(r') \\ = r_{j_o} \quad \text{si } j_o\notin C_{2,0}(r) \text{ et } j_o\in C_{2,0}(r') \end{array}\right.$$

Alors :

$$n \in \eta_3(q_1(r,r'),(s,s)) : \left[\begin{array}{l} \forall\ i_o \in C_{1,0}(q)\ ,\ 0 \leqslant (-r_{i_o} - s_{j_o})^{\sim} \leqslant -\tilde{q}_{i_o}\ . \\ \forall\ j_o \in C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r') ;\ 2L_{j_o} + 1 - r_{j_o} \leqslant n_{j_o} \leqslant 2L_{j_o} + 1 \\ i \in C_1 \backslash C_{1,0}(q)\ :\ (-r_i - s_i)^{\sim} \leqslant n_i \leqslant L_i \\ j \in C_2 \backslash C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r') :\ L_j + 1 \leqslant n_j \leqslant 2L_j + 1 \\ \qquad n_\ell = L_\ell\ ,\quad \ell \in C_3 \end{array}\right.$$

Ceci étant la somme (****) devient :

$$\sum_{q \in Q_1} \ \sum_{(r,r') \in R_1^2(q)} \ \sum_{(s,s') \in \mathcal{S}_1^2(q,r)} \operatorname{Card}\eta_3 \cdot \gamma_{q-r} \overline{\gamma}_{q-r'} \overline{\beta}_{-s} - \beta_r \overline{\gamma}_{-s-r} \gamma_{s} \gamma_{s'}$$

Calcul de Card $\eta_3$

Posons de nouveau $m=-r-s$ la somme précédente s'écrit :

$$\sum_{q \in \mathbb{Z}(C_1)} \ \sum_{(r,r') \in (\mathbb{Z}_+^d)^2} \ \sum_{(m,m') \in M^2(q)} \operatorname{Card}\eta_3 \cdot \gamma_{q-r} \overline{\gamma}_{q-r'} \beta_m \overline{\beta}_{m'} \overline{\gamma}_{-m-r} \gamma_{-m'-r'}$$

$$\text{avec } M(q) = \left[\begin{array}{l} \forall\ C_{1,0}(q)\ ,\ i_o \in C_{1,0}(q)\ ,\ 0 \leqslant m_{i_o} < -q_{i_o} \\ 0 \leqslant m_i \leqslant L_i\ ,\quad \forall\ i \in \{1,\dots,d\} \backslash C_{1,0}(q)\ . \end{array}\right.$$

Si on pose $\tilde{m}_{i_o} = -(r_{i_o} + s_{i_o})^{\sim}$ , alors

$$\operatorname{Card}\eta_3 = \prod_{i_o \in C_{i_o}(q)} (-q_{i_o} - m_{i_o}) \prod_{j_o \in C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r')} (\tilde{r}_{j_o} + 1)\ .$$

$$\cdot \prod_{i \in C_1 \backslash C_{1,0}(q)} (L_j - \tilde{m}_j) \prod_{j \in C_2 \backslash C_{2,0}(r) \cup C_{2,0}(r')} 0\ .$$

Ceci achève la démonstration du Lemme.

Il faut normaliser, pour avoir des limites finies, par $\prod\limits_{d}[0\ L_j]^{\frac{k-2}{d}}$.

On suppose comme dans le cas du multirectangle $\tau_N = \prod\limits_{j=1}^{d} [0\ N_j]$, que :

$$0 < \lim_{\inf L_j \to \infty} \frac{L_i+1}{\prod\limits_{j=1}^{d} (L_j+1)} = \mu_i < \infty .$$

Nous donnons un théorème dans le cas où $\frac{1}{g}$ n'est plus un polynôme.

Voici quelques notations :

$q \in \widetilde{Q} \iff (\exists !\ i_0 \in C_1$ tel que $q_{i_0} < 0)$

$r \in \widetilde{R} \iff (\exists !\ j_0 \in C_2$ tel que $r_{j_0} \geq 0)$.

On pose $V(N) = \prod\limits_{j=1}^{d} (N_j+1)$, $V(L) = \prod\limits_{j=1}^{d} (L_j+1)$.

THEOREME. On suppose $f = |g|^2$, $g^{\pm 1} \in H^\infty$ et de plus

$$\sum_{m=(m_1,\dots,m_d)\in \mathbb{Z}_+^d} (m_1+\dots+m_d)\,|(g^{\pm 1})\hat{}\,(m)|^2 < +\infty \ ; \quad \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d} |(g^{\pm 1})\hat{}\,(m)| < +\infty.$$

Alors la trace de l'inverse $(T_N(f))^{-1}$ de l'opérateur de Toeplitz quand $\inf N_j \to \infty$ et $\inf L_j \to \infty$ est donné par le développement asymptotique suivant :

$$\mathrm{Tr}(T_N(f))^{-1} = a_0 V(N) + a_1 V(N)^{d-1/d} + a_2 (V(N))^{d-2/d}$$

$$+ \tilde{a}_3 (V(N))^{d-3/d}\, V(L)^{1/d} + \dots + \tilde{a}_k V(N)^{d-k/d} V(L)^{k-2/d} + \dots + \tilde{a}_d V(L)^{d-2/d} + O(1).$$

Les termes $a_0$, $a_1$ sont donnés dans [3] page 12. On pose $a_2 = \tilde{a}_2$ et les termes $\tilde{a}_k$ pour $k \geq 2$ sont donnés par les formules suivantes :

posons :

$$A(k,C,C') = \sum_{q\in\widetilde{Q}} \ \sum_{(r,r')\in\widetilde{R}^2} \Big( \prod_{s\in\{1,\dots,d\}\setminus\{i_0,j_0\}} \mu_s \Big)$$

$$\times \sum_{(m,m')\in M^2(n)} (-q_{i_0} - \tilde{m}_{i_0})(\tilde{r}_{j_0}+1)\ \gamma_{q-r}\ \bar{\gamma}_{q-r'}\ \beta_m\ \bar{\beta}_{m'}\ \bar{\gamma}_{-m-r}\ \gamma_{-m'-r'} \ .$$

Nous avons :

$$\tilde{a}_k = \sum_{\substack{C'\subset\{1,\dots d\} \\ \mathrm{card}\ C'=d-k}} \ \sum_{C\subset\{1,\dots,d\}\setminus C'} \Big(\prod_{\ell\in C'} \alpha_\ell\Big)\ A(k,C,C').$$

Etant donné le multi-entier $N=(N_1,\dots,N_d)$, on prend le multi-entier $L=(L_1,\dots,L_d)$ vérifiant $L_i<N_i$, $i=1,\dots,d$. Soit

$\tau_L = \prod_{j=1}^{d} [0\ L_j]$ le multi-rectangle associé à $L$.

Définissons les opérateurs $A_{k,N,L}$ comme dans un précédent travail [3, page 23] où $1/g$ n'est plus un polynome trigonométrique mais vérifiant seulement les hypothèses du théorème.

La preuve se décompose en deux étapes.

La première étape consistera à prouver que

$$\liminf_{L_j \to\infty} \ \liminf_{N_j \to\infty} (V(L))^{-d-k/d}\, V(N)^{-d-k/d}\, \mathrm{Tr}[(T_N(f))^{-1} - \sum_{p=1} A_{p,N,L}]=0.$$

<u>Etape 1.</u>

On a comme dans [3, page 25] :

$$(T_N(f))^{-1} - \sum_{p=0}^{k} A_{p,N,L}) = \sum_{\ell=k+1} A_{p,N,L}$$

et

$$\mathrm{Tr} \sum_{\ell=k+1}^{d} A_{N,\ell} \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \| H_{\varnothing_N} \|^{2p} \sum_{n\in T_{N,k+1}} \| P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g}) \|^2 .$$

<u>Majoration de $\sum_{n\in T_{N,k+1}} \| P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g})\|^2$</u>

Ecrivons $1/g = 1/g_L + (1/g - 1/g_L)$ avec $Sp(1/g_L) \subset \tau_L$,

$\varnothing_{N,L} = g_L/\bar{g}_L\, \chi^{N+1}$. Nous avons :

$$\|P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g})\| \leqslant \|P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g}) - P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} P(e_n/\bar{g}_L)\| + \|P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} P(e_n/\bar{g}_L)\|$$

Nous avons d'autre part :

$$\|P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g}) - P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} P(e_n/\bar{g})\| \leqslant \|1/g\|_2 + \|1/g_L\|_2 .$$

En récapitulant :

$$\Big(\sum_{n\in T_{N,k+1}} \|P_+ \bar{\emptyset}_N \; P(e_n/\bar{g})\|^2\Big)^{1/2} \leqslant \text{Card } T_{N,k+1} (\|1/g\|_2 + \|1/g_L\|_2$$

$$+ \Big(\sum_{n\in T_{N,k+1}} \|P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} \; P(e_n/\bar{g}_L)\|^2\Big)^{1/2} .$$

Comme $T_{N,k+1} = \bigcup_{B\subset\{1,\ldots,d\}} t_{n,k+1}$ (voir [3] , page 23) .

et Card $C_1 \cup C_2 \geqslant$ Card B = k+1 et Card $C_3$ = d-k-1 , et enfin

par hypothèse $\liminf_{N_j\to\infty} \dfrac{N_i+1}{V(N)} = \alpha_i$ , il s'ensuit que :

$$\liminf_{N_j\to\infty} (\text{Card } T_{N,k+1}) / V(N)^{\frac{d-k}{d}} . V(L)^{(k-2)/d} = 0$$

Au total, grace au résultat établi en [3, page 27] pour $1/g=1/g_L$, nous avons :

$$\liminf_{N_j\to\infty} (1/V(n)^{d-k/d} . V(L)^{k-2/d}) \Big(\sum_{n\in T_{N,k+1}} \|P_+ \bar{\emptyset}_N \; P(e_n/\bar{g})\|^2\Big) = 0$$

ce qui prouve l'étape 1 .

<u>Etape 2 . Calcul de</u> :

$$a_k = \liminf_{L_j\to\infty} \; \liminf_{N_j\to\infty} 1/V(L)^{k-2/d} . \; 1/V(N)^{d-k/d} \; \text{Tr } A_{k,N,L} .$$

Nous noterons, pour plus de clarté, l'opérateur $A_N$ associé à $1/g$ (resp à $1/g_L$) et restreint à $S_{N,k}$ par $A_{k,N,L}(1/g)$ (resp $A_{k,N,L}(1/g_L)$) .

Ecrivons comme précédemment $1/g = 1/g_L + (1/g - 1/g_L)$, et étudions la quantité suivante :

$$\liminf_{L_j \to \infty} \liminf_{N_j \to \infty} V(L)^{-k-2/d} . V(N)^{-d-k/d} . \mathrm{Tr}(A_{k,N,L}(1/g) - A_{k,N,L}(1/g_L))$$

Dans ce but nous étudierons d'abord :

$$\liminf_{L_j \to \infty} \liminf_{N_j \to \infty} \sum_{n \in t_{N,k}} \| P_- \varnothing_N P_+ \bar{\varnothing}_N P(e_n/\bar{g}) \|^2$$

soit la décomposition suivante :

$$1/g = 1/\bar{g}_L + (12/\bar{g} - 1/\bar{g}_L) \quad .$$

Posons $\varnothing_{N,L} = g_L/\bar{g}\, X^{N+1}$, on a :

$$P(X^n/\bar{g}) = P(X^n/\bar{g}_L) + P(X^n (1/\bar{g} - 1/\bar{g}_L)) \; .$$

$$P_+ \bar{\varnothing}_N P(X^n/\bar{g}) = P_+((\bar{\varnothing}_N - \bar{\varnothing}_{N,L}) + \bar{\varnothing}_{N,L}) P(X^n/\bar{g})$$

$$= P_+(\bar{\varnothing}_{N,L} P(X^n/\bar{g}_L)) + P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} PX^n (1/\bar{g} - 1/\bar{g}_L) + P_+(\bar{\varnothing}_N - \bar{\varnothing}_{N,L}) P(X^n/\bar{g})$$

et enfin :

$$(***) \quad P_+ \bar{\varnothing}_N P_+ \bar{\varnothing}_N P(X^n/\bar{g}) = P_- \varnothing_{N,L} P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} P(X^n/\bar{g}_L)$$

$$+ P_- \varnothing_{N,L} P_+ \bar{\varnothing}_{N,L} PX^n (1/\bar{g} - 1/\bar{g}_L) + P_- \varnothing_{N,L} P_+ (\bar{\varnothing}_N - \bar{\varnothing}_{N,L}) P(X^n/\bar{g})$$

$$+ P_- (\varnothing_N - \varnothing_{N,L}) P_+ \bar{\varnothing}_N P(X^n/\bar{g}) \quad .$$

Nous avons donc à étudier la limite pour $\inf N_j \to \infty$ des som-, mes du type :

$$(**) = \sum \| P_- X^{N+1} \psi_1 P_+ X^{-N+1} \psi_2 PX^n h \|^2$$

avec $h = \sum_{r\in\mathbb{Z}^d_+} \bar{a}_r X^{-r}$ , $\psi_1 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} \mu_m X^m$ ,

$\psi_2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \gamma_k X^k$ .

En explicitant (**) en fonction des coefficients de Fourier des fonctions définies ci-dessus nous obtenons :

$$(**) = \sum_{n\in t_{n,k}} \sum_{q\in -n+\mathbb{Z}^d_-} \sum_{(s,s')\in(N+1-n+\mathbb{Z}^d_+)^2} \sum_{\substack{r_i\leqslant n_i \\ r'_i\leqslant n_i \\ r\in\mathbb{Z}^d_+}} C(q,(r,r')(s,s'))$$

avec $C(q,(r,r'),(s,s'))=\mu_{q-s}\, \bar{a}_r\, \gamma_{s+r}\, \bar{\mu}_{q-s'}\, a_{r'}\, \gamma_{s'+r'}$

Rappelons que pour $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1,\dots,d\}$

$C_u \cap C_{u'} = \varnothing$ , $u = 1,2,3$ ; $u' = 1,2,3$

$$t_{n,k} = \left[\begin{array}{l} 0 \leqslant n_i \leqslant L_i \ , i \in C_1 \\ N_j - L_j \leqslant n_j \leqslant N_j \ , \ j \in C_2 \\ L_\ell \leqslant n_\ell \leqslant N_\ell - L_\ell \ , \ \ell \in C_3 \end{array}\right.$$

Pour évaluer (**), nous allons intervertir les signes de sommation et naturellement il y aura des transformations d'indice que nous décrivons :

a) Echange de $\sum_{n\in t_{n,k}}$ et $\sum_{q\in -n+\mathbb{Z}^d_-}$

on obtient :

$$\sum_{q \in \bigcup_{n \in t_{n,k}} (-n+\mathbb{Z}^d_-)} \quad \sum_{n \in \eta_1(q)}$$

$$\eta_1(q) = t_{n,k} \cap \bigcup_{n \in t_{n,k}} (-n+\mathbb{Z}^d_-) \ .$$

Précisons :

Soit $n \in Q(q) \Longleftrightarrow \{\exists i \in \{1,\dots,d\} \ , \ n_i < -q_{i_o} \}$

Nous obtenons : $\eta_1(q) = t_{n,k} \cap Q(q)$ .

Echange de $\sum_{n \in \eta_1(q)}$ et $\sum_{(s,s') \in (N+1-n+\mathbb{Z}^d_+)^2}$

Posons $n \in S(s) : \{\exists \ j \in \{1,\dots,d\}, \ s_j + n_j - (N_j + 1) \geqslant 0\}$

et $\eta_2 \ (q,(q,q')) = t_{n,k} \cap Q(q) \cap S(s) \cap S(s')$ .

Les sommations deviennent :

$$\sum_{(s,s') \in \bigcup_{n \in \eta_1} (N+1-n+\mathbb{Z}^d_+)} \quad \sum_{n \in \eta_2}$$

Echangeons enfin $\sum_{\eta_2}$ et $\sum_{\substack{(r_i \geqslant n_i)_{i=1,\dots,d} \\ (r'_i \geqslant n'_i)_{i=1,\dots,d}}}$ .

Posons $n \in L(r) : \{\forall \ell \in \{1,\dots,d\}, \ r_\ell \geqslant n_\ell\}$ nous obtenons:

$$\eta_3 = t_{n,k} \cap Q(q) \cap S(s) \cap S(s') \cap L(r) \cap L(r') \ .$$

L'échange donne :

$$\sum_{(r,r')\in(\bigcup_{n\in t_{n,k}}\{\forall \ell,\ n_\ell \geqslant r_\ell\})^2}\ \sum_{n\in\eta_3}$$

$$(***)\quad \sum_q\ \sum_{(s,s')}\ \sum_{(r,r')} \text{Card}\ \eta_3 \,.\, \mu_{q-s}\ \alpha_r\ \gamma_{s+r}\ \mu_{q-s'}\ \alpha_{r'}\ \bar{\gamma}_{s'+r'} \ .$$

Il ne nous reste plus qu'à majorer Card $\eta_3$ pour $q$ et $(s,s')$ donnés.

Soit $(i_o,j_o) \in \{1,\ldots,d\}^2$ tels que

$$-q_{i_o} = \sup_{i\{1,\ldots,d\}} (\max(-q_i,0)) \quad \text{et} \quad S_{j_o} = \max \sup_{(j,j')\in(\{1,\ldots,d\}\setminus i_o)^2} (s_j, s'_j)$$

Pour $\inf N_j$ grand par rapport à $\inf L_j$, on peut trouver

$i_o \in C_1$ tel que $n_i < -q_{i_o}$ (on a déjà $n_{i_o} < L_{i_o}$) et

$j_o \in C_2$ tel que $n_{j_o} \geqslant N_j + 1 - s_{j_o} - s_{j_o}$ (on a déjà $N_{j_o} - L_j \leqslant n_{j_o} \leqslant N_{j_o}$)

Comme $\eta_3 \subset t_{n,k} \cap Q(q) \cap S(s)$ et que

$$t_{n,k} = \left[\begin{array}{ll} 0 \leqslant n_i \leqslant L_i\ , & i \in C_1 \\ N_j - L_j \leqslant n_j \leqslant N_j\ , & i \in C_2 \\ L_\ell \leqslant n_\ell \leqslant N_\ell - L_\ell\ , & \ell \in C_3 \end{array}\right.$$

et Card $C_1 \cup C_2 = k$ , Card $C_3 = d-k$ .

On peut alors majorer Card $\eta_3$ par :

$$\text{Card}\ \eta_3 \leqslant (-q_{i_o})\, s_{j_o} \cdot \prod_{j\in C_1\cup C_2-\{i_o,j_o\}} (L_j+1)\ .\ \prod_{\ell\in C_3} (N_\ell-2L_\ell)$$

Grace aux hypothèses sur la croissance des multi-rectangles $\tau_N$ et $\tau_L$, il existe une constante positive telle que :

$$\text{Card}\ \eta_3/V(L)^{(k-2/)d}\ .\ V(N)^{(d-k)/d} < M\ (-q_{i_o})\, s_{j_o})$$

Pour achever la démonstration du théorème nous avons besoin du lemme suivant :

<u>LEMME</u> :

Soient $\varnothing_1$, $\varnothing_2 \in L^1(T^d)$, on suppose en outre pour $j=1,2$ que

$$\|\varnothing_j\|^2_{1/2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |k_1+\ldots+k_d|\ |\hat{\varnothing}_j\ (k_1,\ldots,k_d)|^2 < \infty$$

On pose $\|\ \varnothing_j\ \|_j = \|\varnothing_j\|_{1/2} + \|\varnothing_j\|_\infty$

Alors $\|\varnothing_1.\varnothing_2\|_{1/2} \leqslant \|\varnothing_1\|_{1/2}\ \|\varnothing_2\|_\infty + \|\varnothing_1\|_\infty\ \|\varnothing_2\|_{1/2}$ .

La preuve de ce lemme est donnée dans [4] . La norme correspondante a été donnée par H. Widom dans [5] .

Reprenons la démonstration du théorème. Posons dans les expressions (**) et (***) selon les cas :

$\{\psi_1 = \varnothing_{N,L}$ , $\psi_2 = \bar{\varnothing}_{N,L}$ , $h = 1/g - 1/\bar{g}_L\}$ , soit

$\{\psi_1 = \varnothing_{N,L}$ , $\psi_2 = \bar{\varnothing}_N - \bar{\varnothing}_{N,L}$ , $\psi 3 = 1/\bar{g}_L\}$ , soit

$\{\psi_1 = \varnothing_{N,L} - \varnothing_N$ , $\psi_2 = \bar{\varnothing}_N$ , $\psi_3 = 1/\bar{g}\}$

D'après le lemme les fonctions $\varnothing_N = X^{n+1}\ g/\bar{g}$ et $\varnothing_{N,L} = X^{N+1}\ g_L/\bar{g}_L$ sont telles : $\|\varnothing_N\|_{1/2} < \infty$ et $\|\varnothing_{N,L}\|_{1/2} < \infty$ , puisque $\|g^{\pm 1}\|_{1/2} < +\infty$ par hypothèse.

Il en est de même de $\psi_1, \psi_2, \psi_3$.

Tenant compte du lemme et de l'inégalité portant sur Card $\eta_3$, nous obtenons par passage aux limites pour inf $N_j \longrightarrow \infty$ et inf $L_j \longrightarrow \infty$ :

$$\lim_{\inf L_j \to \infty} \lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{d-k/d} . V(L)^{k-2/d} (\Sigma \| P_- \emptyset_n P_+ \bar{\emptyset}_N P(X^{n-}/g)$$

$$-P_- \emptyset_{N,L} P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} P(X^{n-}/g) \| 2)^{1/2} = 0$$

Pour terminer étudions la quantité

$1/V(N)^{d-k/d} \sum_{n \in S_{n,k}} \| P_+ \bar{\emptyset}_N P_- \bar{\emptyset}_N P_+ \bar{\emptyset}_N P(X^{n-}/g) \|^2$, quand inf $N_j \longrightarrow \infty$.

Posons $\psi_n = P_+ \bar{\emptyset}_N P(X^{n-}/g)$ , $\psi_{N,L} = P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} P(X^{n-}/g_L)$

On a :

$$(\Sigma \| P_+ \bar{\emptyset}_N P_- - \bar{\emptyset}_N \psi_N \|^2)^{1/2} \leqslant (\Sigma \| P_+ \bar{\emptyset}_N P_- \emptyset_N \psi_N - P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} P_- \emptyset_{N,L} \varphi_{N,L} \|^2)^{1/2}$$

$$+ \Sigma \| P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} P_- \emptyset_{N,L} \psi_{N,L} \|^2)^{1/2}$$

Nous avons établi ci-dessus que la norme de la différence des deux quantités qui se trouvent au second membre de l'inégalité précédente, divisée par $V(N)^{d-k/d}$ $V(L)^{k-2/d}$ tend vers 0, quand inf $N_j$ et inf $L_j$ tendent vers l'infini.

Nous avons par ailleurs établi dans [3, page 37] que :

$$\lim_{\inf N_j \to \infty} 1/V(N)^{k-d/d} ( \sum_{n \in S_{N,k}} \| P_+ \bar{\emptyset}_{N,L} P_- \bar{\emptyset}_{N,L} \psi_{N,L} \|^2)^{1/2} = 0$$

et le même raisonnement utilisé dans cette page ([3, p. 37] peut être reproduit pour la fonction 1/g . Ce qui permet de prouver que :

$$\liminf_{L_j} \liminf_{N_j} 1/V(N)^{d-k/d} \cdot 1/V(L)^{k-2/d} \sum_{n\in S_{N,k}} \sum_{p=1} \left( (H^*_{\emptyset_N} H_{\emptyset_N})^P P \bar{\emptyset}_{+N} P^{e_n/\bar{g}} , P \bar{\emptyset}_{+N} P^{e_n/\bar{g}} \right) .$$

Et ceci achève de prouver le théorème.

Dans ce qui suit nous proposons un corollaire obtenu en spécialisant le domaine $\Lambda$ . La structure géométrique du "multirectangle" apparaît plus clairement.

Quelques notations.

Soit $(n_1,\dots,n_d)$ un multi-entier fixe dans $\mathbb{Z}_+^d$ . $R_0 = \prod_{k=1}^{d} \{0,\dots,n_d\}$ le "multirectangle associé". On note $|R_0| = \prod_{k=1}^{d} (n_k+1)$. Soit $C \subset \{1,\dots,d\}$ et $|C| = d-\ell$ $(0 \leq \ell \leq d)$. On pose :

$F_C^{(\ell)} = \prod_{i\in C} \{0,\dots,n_i\} \times \prod_{s\in C^c} \{\omega_s\}$ , où $\omega_s = 0$ ou $n_s$ .

Soit $F^{(\ell)}$ l'union de toutes ces "faces d'ordre $\ell$ " . Ainsi pour $\ell = 0$, $F^{(\ell)} = R_0$ , $\ell = 1$, $F^{(\ell)}$ est le bord du rectangle $R_0$ , etc... . Si $\ell = d$ $F^{(d)} =$ "sommets" de $R_0$ . On pose alors $\Lambda = N.R_0$ , $N$ étant un entier et on note $T_N(f)$ l'opérateur de Toeplitz associé à $\Lambda$ . On considère d'autre part, $\tau_L = L\,R_0$ $L$ entier et $L \leq N$.

<u>COROLLAIRE</u>. Soit $\Lambda = N\,R_0$ une partie finie de $\mathbb{Z}_+^d$ définie comme ci-dessus, $f$ comme dans le théorème et $\tau_L = L\,R_0$ ; pour $k \geq 3$, $C'$ est tel que $\operatorname{card} C' = d-k$.

Alors :

$$\operatorname{Tr}(T_N(f))^{-1} = N^d |R_0| C_0(\tfrac{1}{f}) + N^{d-1} \sum_{\substack{C'\cup\{i\}=\{1,\dots,d\} \\ i\in\{1,\dots,d\}}} |F_{C'}^{(1)}| \sum_{m\in\mathbb{Z}_+^d} m_i |\beta_{m_1,\dots,m_d}|^2$$

$$+ N^{d-k} L^{k-2} \sum_{F_{C'}^{(k)} \subset F_{C'}^{(k)}} |F_{C'}^{(k)}|\, B_{C'}^{(k)}(f) + \dots + \sum_{F^d - \{(0,\dots,0)\}\cup\{n_1,\dots,n_d\}} B_{C'}^{(d)}(f).$$

où

$$B_{C'}^{d}(f) = \sum_{q\in\widetilde{Q}} \sum_{(r,r')\in R^2} |F_{C'-\,i_0,j_0}^{(k)}|$$

$$\times \sum_{(m,m')\in M^2(m)} (-q_{i_0} - \widetilde{m}_{i_0})(\widetilde{r}_{j_0}+1)\, \gamma_{q-r}\, \bar{\gamma}_{q-r'}\, \gamma_{-m-r}\, \bar{\gamma}_{-m'-r'}\, \beta_m\, \bar{\beta}_{m'} \,.$$

<u>Remarque</u> :

On voit apparaître malgré la simplicité du domaine les trois premiers termes du développement, comme l'intégrale de mesures positives, successivement portées par le "multirectangle" $R_0$ , par les "faces" d'ordre $d-1,\dots,$ les "sommets".

A partir du quatrième terme cependant ($d \geq 3$) les termes apparaîssent comme l'intégrale de mesures portées par les "faces" d'un produit de "rectangles" qui dépendra du choix d'une deuxième troncature ($\Lambda = N\,R_0$ est la première troncature $L\,R_0$ est la deuxième troncature).

Ainsi, pour avoir des limites finies quand $N \to \infty$ et $L \to \infty$, à partir du quatrième terme, il est nécessaire de normaliser par des fonctions des volumes de $N\,R_0$ et $L\,R_0$.

Ce travail peut être rapproché au problème de l'estimation du spectre d'un laplacien dans l'équation de la chaleur.

En effet dans un article de 1966 ([1]) M. Kac aborde le problème de savoir comment le spectre du laplacien $\Delta$ sur un domaine $D$ bornés par des segments dans $\mathbb{R}^2$, reflète la forme de $D$. M. Kac obtient un développement asymptotique de la trace de $e^{t\Delta}$ (quand $t \to 0$) en trois termes en fonction successivement de l'aire, de la longueur de segments du bord de $D$ et des coins. Mc Kean et Singer [2] généralisent ce résultat en 1967 à des variétés riemanniennes, (voir aussi [5], [6]).

<u>BIBLIOGRAPHIE</u>.


[1] M. KAC.- *Can you hear the shape of a drum ?* *Amer. Math. Monthly 73, (1966) p. 1-23.*

[2] H.P. Mc KEAN, Jr. and I.M. SINGER.- *Curvature and the eigenvalues of the laplacian.* *J. of Differential Geometry 1, (1967) p. 43-49.*

[3] A. SEGHIER.- *Inversion de la matrice de Toeplitz en d dimension et développement asymptotique de la trace à l'ordre d.* *A paraître dans J. of Functional Analysis.*

[4] A. SEGHIER.- *C.R.A.S. t. 300, Série I. n° 15, 1985.*

[5] B.V. FEDOSOV.- *Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace operator for a polyhedron.* *Dokl. Akad. Nauk SSSR 157 (1964) p. 536-538.*

[6] J. CHEEGER.- *Spectral geometry of singular riemannian space.* *J. of Differential Geometry. Vol. 18, n° 4, p. 575-657, 1983.*



*A. SEGHIER*
*Université Paris Sud*
*UA C.N.R.S. 743*
*Bâtiment 425 Mathématique*
*91405 ORSAY Cedex*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 517-520, 1987 517

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

# Reconstruction de la densité spectrale par maximum d'entropie. Cas $d$-dimensionnel

Abdellatif SEGHIER

***Résumé*** — **Le principe du maximum d'entropie fournit un procédé de reconstruction de densités spectrales à partir d'informations partielles (problème des moments trigonométriques). Nous donnons des conditions suffisantes de reconstruction dans le cas $d$-dimensionnel, $d \geqq 2$, et une étude complète dans le cas $d=1$.**

## Spectral density reconstruction by maximum entropy method: the $d$-dimensional case

***Abstract*** — ***The maximum entropy principle gives a way to reconstruct spectral density from partial information (the trigonometric moment problem) we give sufficient conditions in the d-dimensional case, $d \geqq 2$ and a complete study in the case $d=1$.***

## I. CAS $d \geqq 1$.

INTRODUCTION ET NOTATIONS. — Soit S un « demi-espace » de $\mathbb{Z}^d$ ayant les propriétés suivantes :

(1) $(0, \ldots, 0) \in S$;

(2) $(m_1, \ldots, m_d) \in S$ si et seulement si $(-m_1, \ldots, -m_d) \notin S$, excepté pour le point $m_1 = m_2 = \ldots = m_d = 0$;

(3) $(m_1, \ldots, m_d) \in S$ et $(m_1, \ldots, m_d) \in S$ impliquent $(m_1 + m'_1, \ldots, m_d + m'_d) \in S$.

On note par $\Lambda_+$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ contenue dans S, par $\Lambda = \Lambda_+ \cup (-\Lambda_+)$, $\tilde{\Lambda} = \Lambda_+ - \Lambda_+$ et enfin $\Lambda_* = \Lambda_+ \setminus \{(0, 0, \ldots, 0)\}$.

Soit $f$ une fonction positive sur le $d$-tore et de logarithme intégrable :

$$\int_{\mathbb{T}^d} f\,d\sigma < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{T}^d} \operatorname{Log} f\,d\sigma > -\infty.$$

Soient

$$\chi : (\theta_1, \ldots, \theta_d) \to e^{i\theta_1} \ldots e^{i\theta_d}$$

et

$$\chi^n(\theta_1, \ldots, \theta_d) = e^{i(n_1\theta_1 + \ldots + n_d\theta_d)}, \qquad n = (n_1, \ldots, n_d).$$

On note par

$$\hat{f}(m) = c_m = \int_{\mathbb{T}^d} f\chi^{-m}\,d\sigma, \qquad m = (m_1, \ldots, m_d).$$

Le sous-ensemble fini $(c_m)_{m \in \tilde{\Lambda}}$ des coefficients de Fourier $\chi^{-m} f$ permet de définir une classe, notée $\mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}$, de fonctions $h$ positives intégrables de logarithme intégrable et vérifiant $\hat{h}(m) = c_m$ pour tout $m \in \tilde{\Lambda}$.

On note par $\mathscr{P}_{\Lambda_*}$ l'ensemble des polynômes à transformée de Fourier nulle en dehors de $\Lambda_*$

$$P = \sum_{m \in \Lambda_*} \alpha_m \chi^m, \qquad \alpha_m \in \mathbb{C}.$$

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0249-6291/87/03050517 \$ 2.00 

On étudie alors le minimum de

(1) $$\int_{\mathbb{T}^d} |1 - \Sigma \alpha_m \chi^m|^2 f d\sigma$$

où $P = \Sigma \alpha_m \chi^m \in \mathscr{P}_{\Lambda}$. Soit $\mu_\Lambda^2(f)$ ce minimum.

On étudiera ensuite

(2) $$\max_{h \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}} \exp \int_{\mathbb{T}^d} \operatorname{Log} h\, d\sigma,$$

et on comparera cette quantité à $\mu_\Lambda^2(f)$.

L'expression (2) est liée à la notion d'extension de fonction de type positif apparue dans un travail de M. G. Krein (1944) ([7], p. 127-137). Elle est d'autre part associée à la notion d'entropie de processus gaussiens (Chover, 1961, [2], p. 927-945).

Soit $-P_0$ le polynôme qui réalise le minimum dans (1).

L'objectif de ce travail est de « reconstruire » $f$ comme limite de $f_\Lambda = \mu_\Lambda^2(f)\,|1 + P_0|^{-2}$ quand $\Lambda$ tend en croissant vers $\mathbb{Z}^d$, puis de donner des conditions pour que $f_\Lambda \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}$ [$f_\Lambda$ réalise alors « le maximum d'entropie » dans (2)].

Nous proposons une réponse complète dans le cas $d = 1$. Dans le cas $d > 1$, nous proposons des conditions nécessaires et suffisantes pour que $f_\Lambda \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}$. Le comportement asymptotique de $f_\Lambda$ est à l'étude.

Les résultats obtenus sont en partie une conséquence des développements asymptotiques de l'inverse de matrices de Toeplitz.

Résultat principal. — Soit $\pi_M$ la projection de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur le sous-espace des polynômes trigonométriques à coefficients de Fourier nuls en dehors de M.

On note d'autre part $T_\Lambda(f) = (c_{m-n})$, $(m, n) \in \Lambda \times \Lambda$ la matrice de Toeplitz associée au domaine $\Lambda$ et à la fonction $f$. Le polynôme constant égal à 1 est noté **1**.

Par abus de notation $T_\Lambda(f)$ sera l'opérateur de Toeplitz sur $\mathscr{P}_\Lambda$ dont la matrice est $T_\Lambda(f)$.

Théorème 1. — *Soit* $-P_0$ *le polynôme qui réalise le minimum dans* (1).

(i) *On suppose que* $f^{-1} \in L^1(\mathbb{T}^d)$. *Alors :*

$$(\mu_\Lambda^2(f))^{-1}(1 + P_0) = (T_\Lambda(f))^{-1}(\mathbf{1}).$$

(ii) *On suppose en outre que* $(1 + P_0)^{-1} \in H^\infty(S)$. *Alors :*

(*a*) *il existe un polynôme* $P_{\tilde{\Lambda}}$ *réel tel que*

$$(P_{\tilde{\Lambda}} \cdot |1 + P_0|^{-2})^\wedge(k) = \hat{f}(k), \qquad \forall k \in \tilde{\Lambda};$$

(*b*) *une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$f_0 = \mu_\Lambda^2 |1 + P_0|^{-2} \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}$$

*est qu'il existe un polynôme* $C_{\tilde{\Lambda}}(f)$, *que l'on construit, tel que*

(*) $$\pi_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}(f) = C_{\tilde{\Lambda}}(f).$$

(iii) *On a d'autre part*

(*a*) $$\max_{h \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}} \left(\exp \int \operatorname{Log} h\, d\sigma\right) \leq \exp \int \operatorname{Log} f_0\, d\sigma = \mu_\Lambda^2(f).$$

(*b*) *On suppose que la condition* (*) *est satisfaite. Alors :*

$$\mu_\Lambda^2(f) = \exp \int \operatorname{Log} f_0\, d\sigma = \max_{h \in \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}} \exp \int \operatorname{Log} h\, d\sigma.$$

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 517-520, 1987 

*Remarque.* — Si $\tilde{\Lambda}=\Lambda-\Lambda=\Lambda$ alors $C_{\tilde{\Lambda}}=0=\pi_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}(f)$.
La condition (*) est vérifiée et on retrouve le cas $d=1$.

II. CAS $d=1$. — Dans ce cas, nous avons en outre un comportement asymptotique de $\mu_\Lambda^2(f)|1+P_0|^2$.

$$S=\mathbb{Z}_+\overset{*}{=}\{k\in\mathbb{Z},\ k\geqq 0\}.$$

Soient $d=1$, $\Lambda=[0, N]$, N entier positif,

$$\mu_N(f)=\mu_\Lambda(f),\qquad \mathscr{F}_{\tilde{\Lambda}}=\mathscr{F}_N.$$

COROLLAIRE. — *Soit* $-P_0$ *le polynôme trigonométrique qui réalise l'infimum dans* (1). *On suppose que* $1/f\in L^1(\mathbb{T})$.

*Alors :*

(i) $h_N=\mu_N^2.|1+P_0|^{-2}\in\mathscr{F}_N$;

(ii) $\displaystyle\int \operatorname{Log} h_N\,d\sigma=\max_{h\in\mathscr{F}_N}\int \operatorname{Log} h\,d\sigma$;

(iii) $\mu_N^{-2}(1+P_0)=(T_N(f)^{-1})(1)$.

*Remarque.* — 1. Dans le cas $d=1$ l'hypothèse $h\in H^\infty(\mathbb{Z}_+)$ est automatiquement vérifiée grâce à un théorème de Szegö [3].

2. Ce résultat est classique dans la littérature d'ingénieurs (Burg, 1967, [1]). Il se démontre par des méthodes variationnelles qui n'ont pu s'étendre au cas multidimensionnel.

L'extension est obtenue dans ce travail (théorème 1) à l'aide de méthodes de projections hilbertiennes inspirées du théorème de Helson-Lowdenslager ([4], p. 165-202).

Posons $B(h)=\int \operatorname{Log} h\,d\sigma$. Soit $g$ extérieure telle que $h=|g|^2$.

Soit $\varphi_N=e_{N+1}\,g/\bar{g}$. $(e_N(\theta)=e^{iN\theta})$.

Comparons les quantités $B(h)$ et $B(h_N)$.

Soit $h\in L^\infty(\mathbb{T})$. On pose :

$$E_N(h)=\inf_Q\|h-Q\|,\qquad \text{où}\quad Q(e^{i\theta})=\sum_{0\leq|n|\leq N}a_n e^{in\theta}.$$

THÉORÈME 2. — (i) *On suppose* $1/f\in H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$. *Alors :*

($\alpha$) $\lim_{N\to\infty}\rho_N(1/f)=0$

($\beta$) $\displaystyle B(h_N)-B(f)=\int \operatorname{Log} h_N\,d\sigma-\int \operatorname{Log} f\,d\sigma\leqq\rho_{N+1}^2(1/f)$.

(ii) *Si on suppose* $1/f\in C(\mathbb{T})$ *et* $0<m\leqq 1/f$, *alors*

$$B(h_N)-B(f)\leqq\frac{1}{m^2}\left(E_N\left(\frac{1}{f}\right)\right)^2.$$

*Preuve.* — (i) ($\alpha$) résulte des définitions; on peut d'ailleurs caractériser plus précisément les fonctions $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ (théorème de Helson-Sarason [5]).

(ii) ($\beta$) s'obtient par des techniques de projection.

(ii) s'obtient en combinant ($\beta$) et un résultat de Rozanov-Ibrahimov [6].

*Remarques.* — 1. On peut, avec des conditions de dérivabilité sur $1/f$, estimer $E_N(1/f)$ très précisément à l'aide d'un théorème de Berstein (*voir* [6]).

2. On peut utiliser le corollaire et le théorème 2 pour construire des algorithmes numériques très simples (résolution de systèmes linéaires) permettant de bonnes approximations de $f$.

Note reçue le 15 juin 1987, acceptée le 10 juillet 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. P. BURG, Maximum Entropy Spectral Analysis, *Ph.D. Thesis.*, Dept. of Geophysics, Stanford University, California, 1975.

[2] J. CHOVER, On normalized entropy of the extensions of a positive definite function, *J. Math. Mec.*, 10, n° 6, 1961, p. 927-945.

[3] U. GRENANDER et G. SZEGÖ, *Toeplitz forms and theirs applications*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, p. 40-41, 1958.

[4] H. HELSON et D. LOWDENSLAGER, Prediction theory and Fourier Series in Several variables, *Acta Mathematica*, 1958, p. 165-202.

[5] H. HELSON et D. SARASON, Past and future, *Math. Scand.*, 21, n° 1, 1967, p. 5-16.

[6] I. IBRAHIMOV et Y. ROZANOV, *Processus aléatoires gaussiens*, Mir, Moscou, 1967, p. 212-213.

[7] M. G. KREIN, On basic approximation problem in theory of extrapolation and filtering process, Selected, *Transl. Math. Statis. Proba.*, 4, 1964, p. 127-137.

*E.R.A.-C.N.R.S. n° 532, Université de Paris-Sud,*
Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex.*

# RECONSTRUCTION DE DENSITES DE PROBABILITE ET DE DENSITES SPECTRALES PAR LE PRINCIPE DU MAXIMUM D ENTROPIE.

## 0. INTRODUCTION.

Soit $f \geq 0$, $f$ et $\operatorname{Log} f \in L^1(\mathbb{T})$ $(\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \sim [0, 2\pi[\ )$. On pose $d\sigma = \dfrac{d\theta}{2\pi}$, $c_k = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, d\sigma$, $c_o = \hat{f}(0) = 1$. Le signe $\int$ correspond à $\int_{\mathbb{T}}$.

Soit $\varepsilon_N$ la classe de fonctions $h$ vérifiant ($N$ entier)

$$h \in \varepsilon_N \Leftrightarrow (h \text{ et } \operatorname{Log} h \in L^1(\mathbb{T}),\ \hat{h}(k) = c_k\ ,\quad 0 \leq |k| \leq N).$$

On considère deux problèmes d'extension de fonction de type positif (i.e. des suites $(\hat{h}(k))$ où $h \in \varepsilon_N$) correspondant à deux contraintes différentes (maximum d'entropie).

Problème 1: Reconstruction de densités de probabilité.

Construire explicitement la solution de

$$\max_{h \in \varepsilon_N} - \int h \operatorname{Log} h\, d\sigma \quad = - \int f_N \operatorname{Log} f_N\, d\sigma$$

et estimer la difference:

$$(1) \qquad \int h \operatorname{Log} h\, d\sigma \quad - \quad \int f_N \operatorname{Log} f_N\, d\sigma\ .$$

La quantité $- \int h \operatorname{Log} h\, d\sigma$ est connue en théorie de l'information sous le nom de Shannon-Jaynes [12].

Problème 2: Reconstruction de densités spectrales.

Il s'agit de décrire l'élément $h_N$ de $\varepsilon_N$ tel que

$$(i) \qquad \max_{h \in \varepsilon_N} \int \operatorname{Log} h\, d\sigma \quad = \quad \int \operatorname{Log} h_N\, d\sigma$$

et estimer la différence:

$$\left| \int \mathrm{Log}\, f\, d\sigma - \int \mathrm{Log}\, h_N\, d\sigma \right| .$$

La quantité $\int \mathrm{Log}\, f\, d\sigma$ est connue sur le nom d'entropie de Burg.

On ne connaît pas la solution explicite du problème 1, mais on sait que $f_N$ se présente sous la forme d'une exponentielle d'un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N. Elle est obtenue par un calcul variationnel (ou par l'optimisation de l'information de Kullback) (voir [3 ] ou [6 ]).

La solution du problème 2 se présente sous la forme d'un inverse d'un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N. On l'obtient par des méthodes de projections hilbertiennes (ou des méthodes variationnelles classiques).

Contrairement au problème 1, on obtient explicitement la solution du problème 2, par l'inversion d'une matrice de Toeplitz, c'est donc un problème linéaire.

Quant à la solution du problème 1, on peut cependant l'approcher asymptotiquement (N grand) par des méthodes linéaires par le biais de la solution du problème N°2.

Le travail qui suit se présente en deux parties. Dans une premiere partie nous proposons une majoration de la quantité $K(f,f_N) = \int f\, \mathrm{Log}\, f\, d\sigma - \int f\, \mathrm{Log}\, f_N\, d\sigma$ quand N tend vers l'infini.

Le problème sommatoire abordé par E. Gassiat [6] trouve ici un prolongement plus précis.

La partie II se rapportera à la construction de la solution du problème N°2 (l'expression explicite est déjà connue [2]). Nous proposons comme dans la partie I des estimations précises de $\int \mathrm{Log}\, f \, d\sigma - \int \mathrm{Log}\, f_N \, d\sigma$. Ces questions font suite à un problème plus général de reconstruction de densités électroniques par maximum d'entropie.

Elles ont été proposées par D. Dacunha-Castelle [3].

Partie I.

A) Majoration de $K(f,f_N)$.

Soient $f$ et $f_N$ les deux éléments de $\varepsilon_N$ définis dans l'introduction, $f_N$ vérifiant

$$-\int f_N \operatorname{Log} f_N \, d\sigma = \max_{h\in\varepsilon_N} -\int h \operatorname{Log} h \, d\sigma .$$

Pour l'existence du maximum voir [ 6 ].

Comme $\operatorname{Log} f_N$ est un polynôme, on a:

$$0 \leq K(f,f_N) = \int f \operatorname{Log} f \, d\sigma - \int f \operatorname{Log} f_N \, d\sigma$$

$$= \int f \operatorname{Log} f \, d\sigma - \int f_N \operatorname{Log} f_N \, d\sigma .$$

On a les hypothèses suivantes:

$(H_1)$ On suppose $\operatorname{Log} f \in L^{\infty}(\mathbb{T})$, ce qui implique l'existence de deux constantes positives $m$ et $M$ telles que

$$0 < m \leq f \leq M .$$

On pose $\varphi_N = \sum_{|k|\geq N+1} (\operatorname{Log} f)\hat{}(k)\, e^{ik\theta}$ .

$(H_2)$ On suppose qu'il existe une constante $L$ telle que

$$\forall N, \ \|\varphi_N\|_{\infty} \leq L < \infty .$$

On a le théorème suivant:

Théorème:

(i) Soient $f$ et $f_N$ définies comme ci-dessus et $f$ satisfaisant à l'hypothèse $(H_1)$. Alors:

$$0 \leq K(f,f_N) \leq \frac{1}{2}\left(\int f\, \varphi_N^2 \, d\sigma\right) e^{\|\varphi_N\|_{\infty}} .$$

(ii) On suppose en outre que l'hypothèse $(H_2)$ est vérifiée. Alors, pour tout $\lambda < 1$, $\exists\, N_0(\lambda)$ tel que $N \geq N_0$ on ait:

$$0 \leq K(f,f_N) \leq \frac{1}{2\lambda}\left(e^{\|\varphi_N\|_\infty} \cdot \int f\, \varphi_N^2\, d\sigma - \left(\int f\, \varphi_N\, d\sigma\right)^2\right).$$

PREUVE.

Posons $\operatorname{Log} f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\, e^{ik\theta}$, on a $\varphi_N = - \sum_{|k|\geq N+1} \gamma_k\, e^{ik\theta}$.

Définisons $\operatorname{Log} \tilde{f}_N = \gamma_0' + \sum_{1\leq|k|\leq N} \gamma_k\, e^{ik\theta}$, avec

$$\tilde{f}_N = e^{\gamma_0'} \exp\left(\sum_{1\leq|k|\leq N} \gamma_k\, e^{ik\theta}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\tilde{f}}_N(0) = 1.$$

Ceci impose une condition sur $\gamma_0'$ :

$$(1) \qquad - \int \operatorname{Log} \tilde{f}_N\, d\sigma = - \gamma_0' = \operatorname{Log} \int \exp\left(\sum_{1\leq k\leq N} \gamma_k\, e^{ik\theta}\right) d\sigma .$$

On établit par des arguments de convexité l'inégalité suivante: (Voir [6])

$$0 \leq K(f,f_N) \leq K(f,\tilde{f}_N).$$

Majoration de $K(f,\tilde{f}_N)$.

$$K(f,\tilde{f}_N) = \int f(\operatorname{Log} f - \operatorname{Log} \tilde{f}_N)\, d\sigma$$

$$= \int \operatorname{Log} f\, d\sigma - \int \operatorname{Log} \tilde{f}_N\, d\sigma + \int f\Big((\operatorname{Log} f - \int \operatorname{Log} f\, d\sigma) -$$

$$- (\operatorname{Log} \tilde{f}_N - \int \operatorname{Log} \tilde{f}_N\, d\sigma)$$

$$= \int (\operatorname{Log} f - \operatorname{Log} \tilde{f}_N)\, d\sigma - \int f\, \varphi_N\, d\sigma .$$

D'après (1) et en écrivant $1 = f\cdot f^{-1} = f \exp(\operatorname{Log} f)$,

$$- \int \operatorname{Log} \tilde{f}_N\, d\sigma = \operatorname{Log} \int f \exp\left(\sum_{1\leq|k|< N} \gamma_k\, e^{ik\theta} - \operatorname{Log} f\right) d\sigma$$

$$= \mathrm{Log} \int f \exp(-\gamma_o + \varphi_N)\, d\sigma$$

$$= -\gamma_o + \mathrm{Log} \int f \exp \varphi_N \, d\sigma \, .$$

Comme $\gamma_o = \mathrm{Log}\, f$, on a

$$\int \mathrm{Log}\, f \, d\sigma - \int \mathrm{Log}\, \tilde{f}_N \, d\sigma = \mathrm{Log} \int f \exp(\varphi_N)\, d\sigma$$

et

$$(1) \qquad K(f,\tilde{f}_N) = \mathrm{Log} \int f \exp(\varphi_N)\, d\sigma - \int f \varphi_N \, d\sigma$$

Remarque:

Cette formule est valable pour tous éléments $f$ et $h$ tels que $\hat{f}(0) = \hat{h}(0) = 1$. On remplace $\phi_N$ par

$$\varphi = (\mathrm{Log}\, f - \mathrm{Log}\, h) - ((\mathrm{Log}\, f)\,\hat{}\,(0) - (\mathrm{Log}\, h)\,\hat{}\,(0) \quad .$$

Utilisant l'inégalité $\mathrm{Log}\, t \leq t-1$, on a:

$$\mathrm{Log} \int f \exp(\varphi_N)\, d\sigma \leq \int f \exp(\varphi_N)\, d\sigma - 1$$

$$\leq \int f (\exp(\varphi_N) - 1)\, d\sigma \, ,$$

car $\int f \, d\sigma = \hat{f}(0) = 1$.

On déduit du théorème des accroissements finis l'inégalité suivante:

$$\exp(\varphi_N) - 1 \leq \varphi_N + \frac{\varphi_N^2}{2} \exp(\|\varphi_N\|_\infty) \quad .$$

Si bien que:

$$K(f,\tilde{f}_N) \leq \frac{1}{2} \exp(\|\varphi_N\|_\infty) \int f \varphi_N^2 \, d\sigma$$

$$\leq \frac{1}{2} \exp(\|\varphi_N\|_\infty) \cdot \|f\|_2 \; \|\varphi_N\|_\infty \; \|\varphi_N\|_2 \quad .$$

Ceci montre l'assertion (i).

Prouvons (ii):

() Nous proposons un encadrement de $k(f,f_N)$. L'hypothèse $\|\text{Log } f\|_\infty < \infty$ et $\|\varphi_N\|_\infty < \infty$, implique l'existence d'une constante $m_2$ telle que

$$\forall\ N, \quad 0 < m_2 \leq \tilde{f}_N = \exp \sum_{|k|\leq N} \gamma_k\ \chi^k .$$

Dans (i) nous avons établi la relation suivante:

$$(\ ) \qquad K(f,\tilde{f}_N) = \text{Log} \int f \exp \varphi_N\, d\sigma - \int f\, \varphi_N\, d\sigma.$$

Ecrivons:

$$\int f\, \varphi_N\, d\sigma = \text{Log} \exp \int f\, \varphi_N\, d\sigma \quad ,$$

et appliquons l'inégalité pour $b > a > 0$ :

$$\text{Log } b - \text{Log } a \leq \frac{b-a}{a} \quad ,$$

à (1), nous obtenons:

$$\frac{\int f \exp \varphi_N\, d\sigma - \exp \int f\, \varphi_N\, d\sigma}{\exp \int f\, \varphi_N\, d\sigma} \leq K(f,\tilde{f}_N) .$$

Posons $A_N = \int f \exp \varphi_N\, d\sigma - \exp \int f\, \varphi_N\, d\sigma$ . Développons en série l'exponentielle, ( $\|\varphi_N\|_\infty < \infty$ )

$$A_N = \int f \left( \sum_{p\geq 0} \varphi_N^p / p! \right) d\sigma - \sum_{p\geq 0} \frac{\left(\int f\, \varphi_N\, d\sigma\right)^p}{p!} .$$

Comme $\|\varphi_N\| < \infty$, la convergence est uniforme et

$$A_N = \frac{1}{2} \int f\, \varphi_N^2\, d\sigma - \left(\int f\, \varphi_N\, d\sigma\right)^2 + \sum_{p\geq 3} \frac{1}{p!} \left( \int f\, \varphi_N^p\, d\sigma - \left(\int f\, \varphi_N\, d\sigma\right)^p \right).$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\int f\ \varphi_N\ d\sigma \leq \left(\int f\ \varphi_N^p\ d\sigma\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int 1^q\ f\ d\sigma\right)^{\frac{1}{q}} \quad ,$$

les quantités sous le signe somme sont positives et

$$0 \leq \frac{1}{2}\left(\int f\ \varphi_N^2\ d\sigma \ - \ \left(\int f\ \varphi_N\ d\sigma\right)^2\right) \leq A_N \ .$$

d'autre part

$$\left|\int f\ \varphi_N\ d\sigma\ \right| \ \leq \ \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int (\varphi_N^2)\right)^{\frac{1}{2}} \quad .$$

Comme par hypothèse $f$ et $\varphi_N$ sont dans $L^2(\mathbb{T})$, nous avons

$$\lim_{N\to\infty} \int f\ \varphi_N\ d\sigma \ = \ 0$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \exp \int f\ \varphi_N\ d\sigma \ = 1 \ .$$

Soit $0 < \lambda < 1$. Il existe alors un entier $N_0$ tel que $N \geq N_0$ ,

$$\int f\ \exp\ \varphi_N\ d\sigma \ \leq \ 1/\lambda \ .$$

On obtient en définitive une minoration de $K(f,\tilde{f}_N)$:

$$0 \leq \frac{\lambda}{2}\left(\int f\ \varphi_N^2\ d\sigma - \left(\int f\ \varphi_N\ d\sigma\right)^2\right) \ \leq \ K(f,\tilde{f}_N) \quad .$$

Par les mêmes techniques, nous améliorons la majoration de $K(f,\tilde{f}_N)$.

Nous avons, pour les mêmes raisons que ci-dessus, l'inégalité suivante:

$$0 \leq K(f,f_N) \ \leq K(f,\tilde{f}_N) \ \leq \ \frac{\int f\ \exp\ \varphi_N\ d\sigma - \exp \int f\ \varphi_N\ d\sigma}{\int f\ \exp\ \varphi_N\ d\sigma} \ .$$

D'après (i), nous avons, dès que $\|\varphi_N\|_\infty < \infty$ (uniformement)

$$\lim_{N\to\infty} K(f,\tilde{f}_N) = \lim_{N\to\infty}\left(\mathrm{Log}\int f \exp\varphi_N\, d\sigma - \int f\,\varphi_N\, d\sigma\right) = 0 .$$

Comme $\lim\limits_{N\to 0}\int f\,\varphi_N\, d\sigma = 0$, on en déduit

$$\lim_{N\to\infty}\int f \exp\varphi_N\, d\sigma = 1 .$$

On a pour le même choix de $\lambda$ que ci-dessus et le même $N_o$, dès que $N > N_o$ :

$$\lambda \leq \int f \exp\varphi_N\, d\sigma .$$

On a d'autre part les inégalités suivantes:

$$\int f \exp\varphi_N\, d\sigma \leq 1 + \int f\,\varphi_N\, d\sigma + \frac{1}{2}\left(\exp\|\varphi_N\|_\infty\right)\int f\,\varphi_N^2\, d\sigma$$

et

$$\exp\int f\,\varphi_N\, d\sigma \geq 1 + \int f\,\varphi_N\, d\sigma + \frac{1}{2}\left(\int f\,\varphi_N\, d\sigma\right)^2 .$$

Ainsi pour tout $\lambda < 1$, $\exists\, N_o(\lambda)$ tel que dès que $N \geq N_o$, alors

$$0 \leq K(f,f_N) \leq K(f,\tilde{f}_N) \leq \frac{1}{2\lambda}\left(e^{\|\varphi_N\|_\infty}\int f\,\varphi_N^2\, d\sigma - \left(\int f\,\varphi_N\, d\sigma\right)^2\right).$$

Corollaire:

Soit f vérifiant les mêmes conditions que le théorème ci-dessus. On suppose en outre que $\lim_{N \to \infty} \|\varphi_N\|_\infty = 0$. Alors

$$\lim_{N \to \infty} \frac{K(f, \tilde{f}_N)}{\frac{1}{2}\left(\int f \varphi_N^2 \, d\sigma - \left(\int f \varphi_N \, d\sigma\right)^2\right)} = 1 .$$

B) Construction d'une approximation $h_N$ de $f_N$.

On construit, dans la Partie II, la solution du problème N°2. Cette solution a pour propriété d'appartenir à $\varepsilon_N$ et de s'écrire comme l'inverse d'un polynôme trigonométrique. Il existe, plus précisement, un polynôme trigonométrique $P_N = \sum_{0 \leq k \leq N} \beta_k X^k$ tel que $h_N = \frac{1}{|P_N|^2}$. En outre la construction de $h_N$ est explicite (Inversion de matrice de Tœplitz). Posons $\tilde{h}_N = \exp\left(\sum_{0 \leq |k| \leq N} d_k X^k\right)$

et soit une autre écriture de $\tilde{h}_N$ de la forme:

$$\frac{1}{\tilde{h}_N} = \left| \sum_{k \geq 0} \tilde{\beta}_k X^k \right|^2 .$$

On impose alors à $\tilde{h}_N$ de vérifier

$$\tilde{\beta}_k = \beta_k \quad , \qquad -N \leq k \leq N \,.$$

Nous avons donc

$$k_o' \exp\left(- \sum_{1\leq k\leq N} d_k \, X^k \right) = \sum_{p\geq 0} \tilde{\beta}_p \, X^p$$

Soit la relation:

$$\frac{d}{d\theta} \exp\left(- \frac{d_o}{2} - \sum_{1\leq k\leq N} d_k \, X^k\right)$$

$$= - \frac{d}{d\theta} \left( \sum_{1\leq k\leq N} d_k \, X^k \right) \exp\left(- \frac{d_o}{2} - \sum_{1\leq k\leq N} d_k \, X^k\right)$$

$$= \left(- \sum_{1\leq k\leq N} i \, k \, d_k \, X^k\right)\left( \sum_{k\geq 0} \tilde{\beta}_k \, X^k \right) = \sum_{1\leq k\leq N} i \, k \, \tilde{\beta}_k \, X^k \,.$$

Projetons sur l'ensemble des polynômes engendrés par $\{X, X^2, \ldots, X^N\}$ (Soit $\pi_{[1,N]}$ le projecteur):

$$\pi_{[1,N]} \left(- \sum_{1\leq k\leq N} i \, k \, d_k \, X^k\right) \left( \sum_{k\geq 0} \tilde{\beta}_k \, X^k \right) = \pi_{[1,N]}\left(\sum i \, k \, \tilde{\beta}_k \, X^k\right)$$

Tenant compte de la contrainte $\tilde{\beta}_k = \beta_k$ , pour $k= 1,\ldots,N$ on a le système suivant :

$$- \sum_{j=0}^{k} j \, d_j \, \beta_{k-j} = k \, \beta_k \,, \qquad k = 1, \ldots, N \,.$$

Comme $\beta_o \neq 0$, le système triangulaire a une solution unique en $d_1, \ldots, d_N$ (mais ne fournit pas $d_0$ que l'on calculera directement par une intégrale à l'aide de la condition $\hat{\tilde{h}}(0) = 1$ ).

Supposons maintenant que $h_N = \exp\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_k X^k\right)$; on a des relations analogues aux précédentes:

$$\left(-\sum_{k\geq 0} i\, k\, \tilde{d}_k X^k\right)\left(\sum_{0\leq k\leq N} \beta_k X^k\right) = \sum_{1\leq k\leq N} i\, k\, \beta_k X^k \quad .$$

On en déduit le système suivant:

$$-\sum_{j=0}^{N} j\, \tilde{d}_j\, \beta_{k-j} = k\, \beta_k \,, \qquad k = 1, 2, \ldots, N \quad .$$

Il s'ensuit d'après l'unicité de la solution du système **linéaire** précédent que $d_k = \tilde{d}_k$ pour $k = 1, \ldots, N$ . Dans la partie II on montrera que la construction de $h_N$ pour tout N est possible lorsque $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{T})$ .

On pose $\tilde{\varphi}_N = \sum_{|k|\geq N+1} (\mathrm{Log}\; h_N)\hat{\ }(k)\, X^k$ .

On a le résultat suivant:

<u>Théorème 2</u>:

On suppose que f définie en A vérifie l'hypothèse $\frac{1}{f} \in L^1(\mathbb{T})$. Alors pour tout $\lambda > 1$, $\exists\, N_0(\lambda)$ tel que $N \geq N_0(\lambda)$ (entier):

(i) $\quad -\int f_N \,\mathrm{Log}\, f_N \, d\sigma \leq -\int h_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \, d\sigma$

(ii) $\quad 0 \leq \int f_N \,\mathrm{Log}\, f_N \, d\sigma - \int h_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \, d\sigma \leq$

$$\leq \int h_N \,\mathrm{Log}\, h_N \, d\sigma - \int h_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \, d\sigma$$

$$\leq \frac{\lambda}{2}\left(e^{\|\tilde{\psi}_N\|_\infty}\int h_N\,\tilde{\psi}_N^2\,d\sigma - \left(\int h_N\,\tilde{\psi}_N\,d\sigma\right)^2\right.$$

PREUVE.

Comme $h_N \in \varepsilon_N$ et, $\mathrm{Log}\, f_N$ et $\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N$ sont des polynômes trigonométriques, on a:

$$\int h_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \,d\sigma = \int \tilde{f}_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \,d\sigma .$$

Comme d'autre part $K(f_N, \tilde{h}_N) = \int \tilde{f}_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{f}_N \,d\sigma - \int \tilde{h}_N \,\mathrm{Log}\, \tilde{h}_N \,d\sigma \geq 0$,

on a bien (i).

On obtient (ii) en tenant compte de l'inégalité

$$-\int h_N \,\mathrm{Log}\, h_N \,d\sigma \leq -\int f_N \,\mathrm{Log}\, f_N \,d\sigma ,$$

et en appli le théorème 1, car $h_N$ est continue et sans zéro sur .. ( $\|\mathrm{Log}\, h_N\|_\infty < \infty$ )

## II. RECONSTRUCTION DE DENSITE SPECTRALE.

Enoncé du problème N°2.

Il s'agit de construire l'élément $h_N$ de $\varepsilon_N$ tel que

$$\text{(i)} \qquad \max\left(-\int \operatorname{Log} f \, d\sigma\right) = -\int \operatorname{Log} h_N \, d\sigma$$

et estimation de la diférence

$$\left| \int \operatorname{Log} f \, d\sigma - \int \operatorname{Log} h_N \, d\sigma \right| .$$

Grâce au théorème de G.Szegö, le problème N°2 est équivalent au suivant:

(S) Soit $f \geq 0$, $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $\operatorname{Log} f \in L^1(\mathbb{T})$. Trouver l'infimum de

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + \sum_{k=1}^{N+1} \alpha_k e^{ik\theta} \right|^2 f(e^{i\theta}) \, d\theta \quad ,$$

puis déterminer le polynôme qui réalise cet infimum. [ ]

Dans l'approche qui suit nous proposons une interprétacion géométrique plus complète et nous expliciterons le projecteur sous-jacent au problème (S)("Projecteur de prédiction").

Soit $\mathcal{A}_N$ le sous espace vectoriel fermé de $L^2_f(\ )$ engendré par les exponentielles $\{1, \ldots, e^{iN\theta}\}$. Le problème (S) est équivalent à (3):

(3) Calculer le carré de la distance de l'élément $\overline{X}_1$ , ($\overline{X}_1(\theta) = e^{-i\theta}$) , au sous-espace $\mathcal{A}_N$ et expliciter sa projection.

En fait nous calculerons plus généralement la distance d'un élément $\psi \in L^2_f(\mathbb{T})$ au sous-espace $\mathcal{A}_N$.

Nous suivons une méthode qui a été déjà utilisé dans [13], puis dans [14]. Nous aurons besoin de quelques notations.

Comme $\operatorname{Log} f \in L^1(\mathbb{T})$, il existe une factorisation de f de la manière suivante: (Voir [9])

$$f = |g|^2, \quad g \in H^2 \quad \text{et } g \text{ extérieure .}$$

Soit $H_f^{2+}$ le sous-espace de $L_f^2(\mathbb{T})$ engendré par $\{1, e^{i\theta}, \ldots\}$ et $H_f^{2-}$ le sous-espace engendré par $\{e^{-i\theta}, e^{-2i\theta}, \ldots\}$. Posons $X: X(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$.

Le sous-espace $\mathcal{A}_N$ s'écrit comme l'intersection de $X^{N+1}\, H_f^{2-}$ et de $H_f^{2+}$ :

$$\mathcal{A}_N = X^{N+1}\, H_f^{2-} \cap H_f^{2+} .$$

Le fait que $g$ soit extérieure implique que $H_f^{2+} = \frac{1}{g} H^{2+}$ et $H_f^{2-} = \frac{1}{\bar{g}} H^{2-}$ $\quad (H^{2-} = L^2(\ ) \ominus H^{2+})$, d'où:

$$\mathcal{A}_N = \frac{X^{N+1}}{\bar{g}}\, H^{2-} \cap \frac{1}{g}\, H^{2+} = \frac{1}{g}\left(\frac{g}{\bar{g}}\, X^{N+1}\, H^{2-} \cap H^{2+}\right) .$$

On posera dans la suite $\varphi_N = \frac{g}{\bar{g}}\, X^{N+1}$.

<u>Remarque</u>:

Notons $H_o = \varphi_N\, H^{2-} \cap H^{2+}$ et soit $P_{H_o}(g\psi)$ la projection, dans $L^2(\pi)$, de $g\psi$ sur $H_o$; on a la relation suivante:

$$P_{\mathcal{A}_N}(\psi) = \frac{1}{g}\, P_{H_o}(g\psi) .$$

Explicitons le projecteur $P_{\mathcal{A}_N}$ .

Quelques notations:

Soit P le projecteur de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^{2+}$ et $Q = I - P$. Posons $L_N = (I - P\overline{\Phi}_N\, Q\Phi_N)\, H^{2+}$. On aura $P\overline{\Phi}_N\, Q\Phi_N\, L_N \subset L_N$.

Notons par $H_{\Phi_N}$ la restriction de l'opérateur $\theta \longrightarrow Q\,\Phi_N\,\theta$ à $L_N$. La restriction de l'opérateur $\theta \longrightarrow P\overline{\Phi}_N\, Q\Phi_N\, \theta$ à $L_N$ est égale à $H^*_{\Phi_N}\, H_{\Phi_N}$.

Nous avons le lemme suivant:

<u>Lemme</u>:

Soit $\varphi$ un élément de $L^2(\mathbb{T})$. Pour qu'un élément de $H_o$ noté $P_{H_o}\psi$ soit la projection orthogonale de $\psi$ sur $H_o$, il faut et il suffit qu'il existe deux suites $(\theta_{1,n})$, $\theta_{1,n} \in H^{2-}$ et $\theta_{2,n} \in H^{2+}$ telles que:

(1) $$\lim_{n \to \infty} (\theta_{1,n} + \Phi_N\, P\overline{\Phi}_N\, \theta_{2,n}) \text{ existe dans } L^2(\pi)\ .$$

(2) $$\lim_{n \to \infty} (P_+\, (\overline{\Phi}_{1,n}\, \theta_{1,n}) + P_+\, (\Phi_N\, \theta_{2,n}) = P_+(\Phi_N\, \psi).$$

(3) $$\lim_{n \to \infty} (\theta_{1,n} + Q\Phi_N\, (P\overline{\Phi}_N\, \theta_{2,n})) = Q\,\Phi\ .$$

La projection est alors bornée par

$$P_{H_o}(\varphi) = \varphi - \lim_{n \to \infty} (\theta_{1,n} + \Phi_N\, P_+\overline{\Phi}_N\, \theta_{2,n})$$

Grâce au Lemme précédent nous allons préciser la projection d'un élément sur $\mathcal{A}_N$.

<u>Proposition</u>.

La projection d'un élément $\psi$ de $L^2_f(\mathbb{T})$ sur $\mathcal{A}_N$ est donnée par:

(i) $$P_{\mathcal{A}_N}(\psi) = \frac{1}{g} P_{H_o}(g\psi) = \psi - \frac{1}{g} Q(g\psi) -$$

$$- \frac{1}{\bar{g}} P\bar{\Phi}_N \left( \sum_{n=0}^{\infty} H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} \right)^n \cdot P\bar{\Phi}_N P(g\psi) \quad ;$$

(ii) Si de plus $\|H_{\Phi_N}\| < 1$, alors $I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N}$ est inversible et la projection s'exprime par:

$$P_{\mathcal{A}_N}(\psi) = \psi - \frac{1}{g} Q(g\psi) - \frac{1}{\bar{g}} P\bar{\Phi}_N (I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} P\bar{\Phi}_N P(g\psi) \quad .$$

<u>Corolaire 1</u>:

Si $f = 1/|P|^2$ avec $P$ polynôme trigonométrique (sans zéro sur le cercle unité), alors:

$$P_{\mathcal{A}_N}(\psi) = \psi - \frac{1}{g} Q(g\psi) - \frac{1}{\bar{g}} P\Phi_N P\bar{\Phi}_N P(g\psi) \quad .$$

Nous ne donnons pas les démonstrations car les techniques précédentes ont déjà été utilisées dans les travaux antérieurs de l'auteur (voir [14 ] et [15]).

Pour répondre au problème (S), posons $\psi = \bar{\chi}$. De plus, notons:

$$\mathcal{H}(\Phi_N, g) = P\bar{\Phi}_N \left( \sum_{n=0}^{\infty} H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} \right)^n P\bar{\Phi}_N P(\bar{\chi} g) ).$$

<u>Corolaire 2</u>:

(i) L'élément qui réalise l'infimum dans (S) est le polynôme trigonométrique

$$\tilde{P}_N = 1 - \chi \cdot P_{\mathcal{A}_N}(\bar{\chi}) = \frac{1}{g} Q(\bar{\chi} g) + \frac{1}{g} \mathcal{H}(\Phi_N, g) \quad .$$

(ii) On a d'autre part:

$$\|\tilde{P}_N\|_f^2 = \|1 - X\, P_{\mathcal{A}_N}(\bar{X})\|_f^2 = \int |Q(g\bar{X})|^2 \, d\sigma + \int |\mathcal{H}(\Phi_N, g)|^2 d\sigma$$

$$= \exp\left(\int \text{Log } f \, d\sigma\right) + \int |\mathcal{H}(\Phi_N, g)|^2 \, d\sigma \quad .$$

PREUVE.

On remarquera que $|Q(g\bar{X})|^2 = |g(0)|^2$ et comme $g$ est extérieure par hypothèse on a bien $|g(0)|^2 = \exp\left(\int \text{Log } f \, d\sigma\right)$. Le reste se déduit des propriétés d'orthogonalité des expressions qui interviennent dans la projection $\tilde{P}_N$ .

Remarque:

Un théorème classique de G. Szegö affirme que $\lim_{N \to \infty} \|\tilde{P}_N\|_f^2 =$ $= \exp \int \text{Log } f \, d\sigma$ . Le résultat ci-dessus nous permettra de préciser la vitesse de convergence de $\mu_N$ vers $\mu$ .

C) Nous allons considérer une classe particulière de fonctions positives f.

Etant donnée une suite de coefficients $\{C_{-N}, \ldots, C_0, \ldots, C_N\}$ $(\bar{C}_k = C_{-k})$ et soit $\varepsilon_N$ la classe de fonctions positives définies comme dans l'introduction.

Remarque 1:

Soient deux fonctions $f_1$ et $f_2$ de $\mathcal{A}_N$, alors pour tout polynôme trigonométrique $P_N = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$, on a:

$$\|P_N\|_{f_1}^2 = \int \quad |\sum \alpha_k \, \chi^k|^2 \; f_1 \, d\sigma = \int \; |\sum \alpha_k \, \chi^k| \; f_2 \, d\sigma = \; \|P_N\|_{f_2}^2$$

Remarque 2:

Le problème de l'extension des fonctions de type positif a pour origine les travaux de M.G. Krein (1944) [11], pour le cas continu.

Ce problème est connu, dans le cas discret, sous le nom de problème de moments. La construction d'une solution au moins (mesure singulière) a été donnée par Caratheodory [7, pp 56-61]. Des résultats récents sont à signaler dans les travaux de M.G. Krein et D.Z. Arov [1]. On peut aussi se référer à un travail de Chover ([5], 1961).

Le but de ce qui suit est la construction explicite d'une solution du problème (2) satisfaisant à un critère de "maximum d'entropie" d'une part, et l'estimation de la distance de la solution ainsi construite à un élément de $\varepsilon_N$ d'autre part.

Nous avons un théorème:

<u>Théorème</u>:

Il existe un polynôme trigonométrique $P_0$ tel que:

(i) $\quad f_0 = \mu_N^2 \,/\, |1+P_0|^2 \;\in\; \varepsilon_N$ ;

(ii) $\quad \exp \displaystyle\int_\pi \text{Log } f \, d\sigma = \max_{f \in \varepsilon_N} \exp \int \text{Log } f \, d\sigma$ .

(iii) $\quad (1+P_0)/(1+P_0)(0) = \widetilde{P}_N = 1 - X \, P_{\mathcal{A}_N}(\overline{X})$ .

PREUVE.

L'élément $P_o$ vérifie

(1) $$\inf \int |1+P|^2 f\, d\sigma \quad , \text{ où } P = \sum_{m\in[1\ N]} \alpha_m \chi^m .$$

Soit $E_N$ l'ensemble des polynômes trigonométriques à spectre contenu dans $[-N\ \ N]$.

La relation (1) implique la relation d'orthogonalité suivante:

(2) $$\int (1+P_o)\, \chi^{-m} f\, d\sigma = 0 , \quad \forall\, m \in [1\ \ N] .$$

et par passage au conjugué:

(3) $$\int (1+\bar{P}_o)\, \chi^{-m'} f\, d\sigma = 0 , \quad m' \in [-N\ \ 1] .$$

On a par ailleurs:

(4) $$\int (1+P_o) f\, d\sigma = \int |1+P_o|^2 f\, d\sigma = \mu_N^2 .$$

Notons par $T_N(f)$ l'opérateur sur $E_N$ tel que pour tout polynôme $p \in E_N$:

$$T_N(f)\, p = \pi_N(fp) ,$$

où $\pi_N$ est la projection de $L^2(\mathbb{T})$ sur $E_N$. Notons enfin par $S(1+P_o)$, l'opérateur de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui-même tel que pour tout $h \in L^2(\mathbb{T})$, $S(1+P_o)(h)$ vérifie:

$$\langle S(1+P_o)(h)\, ,\, \chi^m\rangle_2 = ((1+P_o)h)\hat{\ }(m) , \qquad m \geq 0$$

$$\langle S(1+P_o)(h)\, ,\, \chi^n\rangle_2 = ((1+\bar{P}_o)\bar{h})\hat{\ }(n) , \qquad n < 0 .$$

On écrira $\mathbb{1}$ pour le polynôme trigonométrique constant.

Les relations (3) et (4) s'écrivent alors sous la forme suivante:

(5) $$T_N(f)(1+P_o) = \mu_N^2 \mathbb{1}$$

(6) $$\pi_N S(1+P_o) \pi_N(f) = \mu_N^2 \mathbb{1} .$$

Montrons (i).

Construisons une suite de polynômes $h_M$ de la façon suivante:

$$h_M = \pi_N(f) + \tilde{h}_M ,$$

où $M > N$ et $h_M$ est un polynôme réel de spectre contenu dans $[-M \quad M]/[-N \quad N]$. Le polynôme $h_M$ vérifie (s'il existe), la relation:

(8) $$\pi_M S(1+P_o) \cdot h_M = \mu_N^2 \cdot \mathbb{1} .$$

Montrons qu'il existe une solution unique $h_M$ de (8). En effet appliquons l'opérateur $\pi_M S(1+P_o)$ à la relation (7), nous avons:

$$\pi_M S(1+P_o) h_M = \pi_M S(1+P_o) \pi_N(f) + \pi_N S(1+P_o) h_M = \mu_N^2 \cdot \mathbb{1} ,$$

ou encore:

(9) $$\pi_M(1+P_o) \tilde{h}_M = \mu_N^2 \cdot \mathbb{1} - \pi_M(1+P_o) \pi_N(f) .$$

A. Notons par $E_{M,N}$ le sous-espace de $L^2(\mathbb{T})$ des polynômes trigonométriques à spectre dans $[-M \quad M] / [-N \quad N]$ et $\pi_{M,N}$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $E_{M,N}$. Nous avons grâce à la propriété (6):

$$\mu_N^2 \cdot \mathbb{1} - \pi_M S(1+P_o) \pi_N(f) \in E_{M,N} .$$

Ainsi la relation (9) peut s'écrire:

$$(10) \qquad \pi_{M,N}\ S(1+P_0)\ \tilde{h}_M = \pi_{M,N}(\mu_N^2 \cdot \mathbb{1} - S(1+P_0)\ \pi_N(f)) .$$

Montrons que l'opérateur $\pi_{M,N}\ S(1+P_0)\ \pi_{M,N}$ est inversible sur $E_{M,N}$.

Décomposons dans $L^2(\pi)$ le sous-espace $E_{M,N}$ de la façon suivante:

$$(11) \qquad E_{M,N} = E_{M,N}^{(1)} \oplus E_{M,N}^{(2)} ,$$

où $E_{M,N}^{(1)}$ (resp. $E_{M,N}^{(2)}$ ) est l'ensemble des polynômes trigonométriques à spectre dans $[N+1, M]$ (resp. $[-M, -(N+1)]$).

Soit $\pi_{M,N}^{(1)}$ (resp. $\pi_{M,N}^{(2)}$ ) le projecteur correspondant. Soit $p \in E_{M,N}$ et $p = p_1 + p_2$ l'écriture de p suivant la décomposition (11). Comme le spectre de $1+P_0$ est contenu dans $[0\quad N]$ et que $M > N$, on a la relation

$$(12) \qquad \pi_{M,N}\ S(1+P_0)p = \pi_{M,N}^{(1)}\ (1+P_0)p_1 + \pi_{M,N}^{(2)}\ (\overline{1+P_0})p_2 .$$

Appliquons à cette relation l'opérateur $\pi_{M,N}\ S\ \frac{1}{1+P_0}$

$$\pi_{M,N}\ S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\ \pi_{M,N}\ S(1+P_0)p$$

$$= \pi_{M,N}^{(1)}\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\pi_{M,N}^{(1)}\ (1+P_0)p_1 + \pi_{M,N}^{(2)}\left(\frac{1}{\overline{1+P_0}}\right)\pi_{M,N}\ \overline{(1+P_0)}\ p_2 .$$

Avec l'hypothèse $\frac{1}{1+P_0} \in H^\infty$, on obtient, en écrivant par exemple:

$$\pi_{M,N}^{(1)}\ (1+P_0)p_1 = (1+P_0)p_1 + (I_N - \pi_{M,N}^{(1)})\ p_1 ,$$

où $I_N$ est l'identité du sous-espace $X^{N+1}\ H^{2+}$

la relation suivante:

$$\pi_{M,N}\ S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\ \pi_{M,N}\ S(1+P_0)p = p .$$

On obtient de même, en utilisant le fait que $1+P_0 \in H^{\infty}$ :

$$\pi_{M,N}\, S(1+P_0)\, \pi_{M,N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right) p = p .$$

Ce qui signifie que $\pi_{M,N}\, S(1+P_0)$ est inversible et d'inverse

$\pi_{M,N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)$ et $\tilde{h}_M$ s'écrit:

$$(13) \qquad \tilde{h}_M = \pi_{M,N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right) (\mathbb{1} - \pi_M\, S(1+P_0\quad \pi_N(f)). \qquad (\tilde{h}_M \text{ est réel})$$

Montrons que la suite $(h_M)$ ainsi construite converge dans $L^2(\;)$.

En effet, soient deux entiers $M$ et $M'$ tendant vers l'infini; on a:

$$(14) \qquad h_{M'} - h_M = \tilde{h}_{M'} - h_M = \pi_{M',N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right) (\mathbb{1} - \pi_{M'}(S(1+P_0)\, \pi_N(f)) -$$

$$- \pi_{M,N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)(\mathbb{1}\quad \pi_M\, S(1+P_0)\, \pi_N(f)) .$$

Remarquons que pour $M \geq 2N+1$ ,

$$\pi_M\, S(1+P_0)\, \pi_N(f) = S(1+P_0)\, \pi_N(f) ,$$

et l'on posera $\psi = \mathbb{1} - S(1+P_0)\, \pi_N(f)$ .

Nous avons donc, d'après (13) et (14)

$$h_{M'} - h_M = (\pi_{M',N} - \pi_{M,N})\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\psi = \pi_{M',N}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\psi$$

Comme $\frac{1}{1+P_0}\psi \in L^2(\;)$, il s'en suit:

$$\lim_{\substack{M' \to \infty \\ M \to \infty}} \|h_{M'} - h_M\|_2 = \lim_{\substack{M' \to \infty \\ M \to \infty}} \|\pi_{M',M}\, S\left(\frac{1}{1+P_0}\right)\psi\|_2 = 0 .$$

Soit $h = \lim_{M \to \infty} h_M$ et $h$ réel.

De plus les propriétés vérifiées par $h_M$ se transferent à h et on a:

$$\int h \, |1+P_o|^2 \, d\sigma = \mu_N^2$$

$$\int h(1+P_o)\, X^{-M} \, d\sigma = 0 \;;$$

par passage au conjugué on obtient:

$$\int h \, |1+P_o|^2 \, X^{-M} \, d\sigma = 0, \qquad \forall M \neq 0 .$$

Il s'en suit alors que

$$h = \frac{\mu_N^2}{|1+P_o|^2} \quad p\, p \; .$$

D'autre part h vérifie

$$\hat{h}(m) = \hat{f}(m) \;, \quad \forall m \in [-N \quad N] \;,$$

ce qui signifie que $\dfrac{\mu_N^2}{|1+P_o|^2} \in \varepsilon_N$ , et la partie (i) est démontrée.

En utilisant la remarque importante ci-dessus et en fixant

$\alpha_o = 1$ , on a:

$$\inf_{\substack{P_N \in \mathcal{A}_N \\ P_N(0)=1}} \|P_N\|_{f_1} = \inf_{\substack{P_N \in \mathcal{A}_N \\ P_N(0)=1}} \|P_N\|_{f_2} \; .$$

Les assertions (ii) et (iii) s'obtiennent comme conséquences des corolaires (1) et (2) précédents.

Le théorème est alors démontré.

Un théorème classique de G. Szegö donne le comportement asymptotique de $\mu_N = \exp \int_\pi \operatorname{Log} f_o \, d\sigma$, $(\mu = \exp \int_\pi \operatorname{Log} f \, d\sigma)$

<u>Théorème</u> [7, p ]:

Pour $\theta \in [-\pi \quad \pi]$, soit $f(\theta)$ définie pp par:

$$f(\theta) = p(\theta) \prod_{\nu=1}^{s} |e^{i\lambda} - e^{i\lambda_\nu}|^{2\lambda_\nu} \text{, où } \theta \longrightarrow p(\theta)$$

est positive,

les $\alpha_\nu$ sont des entiers positifs et $\lambda_\nu$ des points distincts dans $-\pi \leq \lambda \leq \pi$ . Alors deux cas sont possibles:

(i) La fonction $\theta \longrightarrow f(\theta)$ n'a pas de zéros, $s = 0$, alors

$$\mu_n - \mu = \delta_n = \theta(n^{(5/2)-k}) \ .$$

(ii) Soit $s > 0$, on peut seulement affirmer que

$$\delta_n = O(n^{-1}) \ .$$

Dans ce qui suit nous proposons un résultat sur le comportement asymptotique de $\mu_N - \mu$ qui fait intervenir la quantité suivante:

$$\rho_{N+1}(1/f) = d(e^{i(N+1)\theta} \frac{\bar{g}}{g} \text{, } H^\infty) \text{ ,}$$

où $d$ est la distance par la norme $\| \quad \|_\infty$ . (Voir [10,pp 174-175].)

Un théorème classique de Helson-Sarason donne une condition nécésaire et suffisante pour que $\lim_{N \to \infty} \rho_N(f) = 0$. Son application n'est cépendant pas aisée (voir [10]).

Le théorème qui suit de Ibrahimov et Rozanov donne une condition suffisante plus explicite.

Théorème: [10, p. 175]

Pour que $\rho_N$ vérifie

$$\rho_N = O(N^{-r-\beta}) , \qquad \text{où} \qquad 0 < \beta < 1$$

il faut et il suffit que la densité spectrale $f(\theta)$ admette la représentation:

$$f(\theta) = |P(e^{i\theta})|^2 \ \omega(\theta) ,$$

où $P(z)$ est un polynôme ayant des zéros sur le cercle unité $\{z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1\}$ et la frontière $\omega(\theta)$, $\omega(\theta) \geq m > 0$, est r fois dérivable et sa dérivée d'ordre r satisfait à la condition de Hölder d'ordre $\beta$.

Nous sommes en mesure de donner un théorème qui donne le contrôle de la convergence de $\mu_N$ vers $\mu$ lorsque N tend vers l'infini. Posons $f = |g|^2$ et $f_o = |g_{o,N}|^2 = |g_o|^2$.

Théorème:

On suppose que $\mu = \int \text{Log } f \, d\sigma > 0$, on a:

(i) $$\left\| \frac{g}{g_o} g_o(0) - g(0) \right\|^2 = \| \mathcal{H}_{\Phi_N}(g) \|^2 = \mu_N^2 - \mu^2$$

$$= \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log } f_{o,N}(e^{i\theta}) \, d\theta - \exp \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \text{Log } f(e^{i\theta}) \, d\theta\right]$$

(ii) On suppose que f vérifie les conditions du théorème de Helson-Sarason ou théorème de Ibrahimov-Rozanov. Alors

$$\mu_N - \mu \leq \rho_{N+1}^2\left(\frac{1}{f}\right) - \mu .$$

PREUVE.

Montrons (i).

On a démontré que $f_o = |g_o|^2$ est telle que $\frac{1}{g_o}$ est un polynôme trigonométrique analytique de degré inférieur ou égal à N.

On a d'autre part, d'après ce qui précède:

$$\frac{g_o(0)}{g_o} = \frac{g(0)}{g} + \frac{1}{\bar{g}} \mathcal{H}(\Phi_N, g).$$

En multipliant par $g$ et en prenant la norme on obtient:

$$\left\| \frac{g}{g_o} g_o(0) - g(0) \right\|^2 = \| \mathcal{H}_\Phi(g) \|_2^2 = \mu_N^2 - \mu^2 ,$$

d'où (i).

Montrons (ii).

On a d'après ci-dessus que

$$\mu_N^2 - \mu^2 = \| \mathcal{H}(\Phi_N, g) \|_2^2 \quad ; \text{ il s'en suit que}$$

$$\mu_N - \mu = \frac{1}{\mu_N + \mu} \| \mathcal{H}(\Phi_N, g) \|_2^2 .$$

Comme $\mu \leq \mu_N$, on a $\frac{1}{\mu_N + \mu} \leq \frac{1}{2\mu}$ .

Par ailleurs

$$\mathcal{H}(\Phi_N, g) = P_{\Phi_N}(I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} P\bar{\Phi}_N P(g\, e^{-i\theta}) ,$$

or $P\bar{\Phi}_N P(g e^{-i\theta}) = P(\bar{\Phi}_N(g\, e^{i\theta}) - \bar{\Phi}_N Q(g\, e^{i\theta}))$;

comme $\bar{\Phi}_N g\, e^{-i\theta} = e^{-i(N+1)\theta} \frac{\bar{g}}{g} g\, e^{-i\theta} = e^{-i(N+1)\theta} \bar{g}$ , on a:

$$P\bar{\Phi}_N P(g\, e^{-i\theta}) = - P\bar{\Phi}_N Q(g\, e^{-i\theta}), \quad \text{car} \quad \bar{g} \in XH^{2-} .$$

On remarque que $Q(g\, e^{-i\theta}) = g(0)$; il s'en suit que

$$P\bar{\Phi}_N\, P(g\, e^{i\theta}) = -g(0)\, P\Phi_N .$$

Ainsi

$$\| \mathcal{H}(\Phi_N, g) \|_2 \leq \| (I - H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N})^{-1} \| \; \| P\Phi_N \| \; |g(0)| .$$

On a $\| H^*_{\Phi_N} H_{\Phi_N} \| = \| H_{\Phi_N} \|^2$. On peut considérer $H_{\Phi_N}$ comme un opérateur de $H^{2+}$ dans $H^{2-}$ (au lieu de le restreindre à $L_N$).

Soit $\|\psi\|_2 = 1$.

$$\| H_{\Phi_N} \psi \| = \| Q\Phi_N \psi \| = \sup \left| \int Q\Phi_N \psi \cdot \bar{\eta} \, d\theta \right| ,$$

où le supremum est pris pour $\|\eta\|_2 = \|\psi\|_2 = 1$, $\eta \in H^{2-}$ et $\psi \in H^{2+}$.

On a encore

$$\| H_{\Phi_N} \psi \| = \sup_{\substack{\|\psi\| = \|\eta\| = 1 \\ \psi \in H^{2+};\, \eta \in H^{2-}}} \left| \int \Phi_N (\psi \bar{\eta}) \, d\theta \right| .$$

Comme $\psi\bar{\eta} \in H^1$ on a

$$\| H_{\Phi_N} \psi \| = \sup_{\|\eta\| = \|\psi\| = 1} \left| \int (\Phi_N - \Phi)\, \psi\bar{\eta} \, d\theta \right| .$$

Cette égalité a lieu pour tout $\Phi \in H^\infty$. Il s'en suit alors:

$$\| H_{\Phi_N} \psi \| \leq \inf \| \Phi_N - \Phi \|_\infty = d(\Phi_N, H^\infty) = \rho_{N+1}\left(\tfrac{1}{f}\right) .$$

On peut montrer que l'égalité est réalisée par un argument de dualité et le théorème de Hahn-Banach. La technique ci-dessus est analogue à celle utilisée dans le théorème de Helson-Szegö dans un article de 1960 [9].

Nous obtenons ainsi:

$$\|(1-H^*_{\Phi_N}\,H_{\Phi_N})^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|H_{\Phi_N}\|^2} \leq \frac{1}{1-\rho^2_{N+1}(\frac{1}{f})}$$

et

$$\|\mathcal{H}(\Phi_N,g)\| \leq \frac{1}{1-\rho_N^2}\ \rho_{N+1}\ \mu.$$

Comme $\lim\limits_{N\to\infty} \rho_N(\frac{1}{f}) = 0$, on a l'inégalité, pour N grand

$$\mu_N - \mu \leq \mu\ \rho^2_{N+1}(\tfrac{1}{f}) ,$$

ce qui est l'inégalité du théorème.

Un autre théorème intérés montre que $\rho_N$ converge plus vite qu'une certaine approximation de $f$ que l'on définit de la façon suivante: Soit $E_N(h)$ la meilleure approximation de la fonction $h$ par des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à $N$ sur $[-\pi\quad \pi]$ et pour la norme uniforme.

Théorème: (Ibrahimov-Rozanov [10], page )

Si la densité spectrale $f(\theta)$ est continue et strictement positive, $f(\theta) \geq m > 0$, alors

$$\rho_N \leq \frac{1}{m}\, E_{N-1}(f) .$$

CONCLUSION.

Nous avons mis en évidence grâce au principe du maximum d'entropie, un procédé sommatoire dans le sans suivant:

Soit $f$ vérifiant les conditions du théorème ci-dessus et $f = |g|^2$, on a:

$$\left\| \frac{1}{g} - \frac{g_o(0)}{g(0)} \frac{1}{g_o} \right\|_2 \leq |g(0)|^2 \left\|\frac{1}{g}\right\|_2 \rho_{N+1}\left(\frac{1}{f}\right) .$$

En posant $c = |g(0)|^2 \cdot \|\frac{1}{g}\|_2$ , on peut approcher $\frac{1}{g}$ par la suite $\frac{1}{g(0)} \cdot \frac{g_{o,N}(0)}{g_{o,N}}$ en norme $L^2$ plus vite que $\frac{c}{m} E_{N-1}(f)$ décrit plus haut.

De plus la démontration du théorème met en évidence un procédé de construction des coefficients de $\frac{1}{g} = \frac{\mu_N^2}{1+P_o}$ . Ceux des éléments de la premiére ligne de $(T_N(f))^{-1}$, l'inverse de la matrice de Tœplitz associée à f.

## III. Relation entre la factorisation d'une densité spectrale et l'inversion de la matrice de Toeplitz correspondante.

Nous avons établi dans un précédent travail l'expression explicite de l'inverse d'une matrice de Tœplitz [14].

On suppose $f = |g|^2$ avec $g^{\pm} \in H^{\infty}$, on a

$$(T_N(f))^{-1} = T_N(\tfrac{1}{f}) + A_{N,1} + A_{N,2} \quad ,$$

où l'opérateur $A_{N,1}$ est défini par:

$\forall\ q$ polynôme trigonométrique analytique

$$A_{N,1}(q) = \frac{1}{q}\, Q(\frac{q}{\bar{g}}) + \frac{\chi^{N+1}}{\bar{g}}\, P\left(\frac{\chi^{N+1}}{g}\, q\right) \quad ,$$

P et Q étant des opérateurs définis comme dans la partie I.

L'opérateur $A_{N,2}$ d'expression plus compliquée vérifie

$$\lim_{N \to \infty} T_r\, A_{N,2} = 0 \ .$$

Soit maintenant $f_o = \dfrac{1}{|g_o|^2}$ où $g_o$ est un polynôme trigonométrique analytique. On suppose que $\hat{f}_o(m) = \hat{f}(m)$, $m \in [-N \quad N]$. Alors

$$T_N(f) = T_N(f_o) \ .$$

Il en est de même pour les inverses. L'expression de l'inverse de $(T_N(f_o))^{-1}$ se simplifie et devient, après transformation (Q=I-P):

$$(T_N(f_o))^{-1}(q) = \frac{1}{g_o}\ P(\frac{q}{\bar{g}_o}) - \frac{\chi^{N+1}}{\bar{g}_o}\, P\left(\frac{\overline{\chi^{N+1}}}{g_o}\, q\right) .$$

Ainsi un élément $a_{k,j}$ de $(T_N(f))^{-1}$ est donné par:

$$a_{k,j} = \left\langle \frac{1}{g} P\left(\frac{X^k}{\bar{g}_o}\right), X^j \right\rangle_2 - \left\langle \frac{X^{N+1}}{\bar{g}_o} P \frac{\overline{X^{N+1}}}{g_o} X^k, X^j \right\rangle_2$$

$$= \left\langle P\left(\frac{X^k}{\bar{g}_o}\right), P\left(\frac{X^j}{\bar{g}_o}\right) \right\rangle_2 - \left\langle P \frac{X^{N+1}}{g} X^k, P \frac{\overline{X^{N+1}}}{g} X^j \right\rangle_2$$

Posons $\frac{1}{g_o} = \sum_{p=0}^{N} \beta_p X^p$ .

Alors pour $k \leq j$ :

$$a_{k,j} = \sum_{p \leq k} |\beta_p|^2 - \sum_{p' \geq j} |\beta_{p'}|^2 .$$

Soit maintenant $C = (C_o, \ldots, C_N)$ une suite de nombres complexes ($C_o$ réel).

On suppose que pour tout $i \in [0, \ldots, N]$, la matrice de Tœplitz $T_i$ associée à la suite $(C_o, \ldots, C_i)$ est définie positive. On note $T_N(C)$ la matrice de Tœplitz d'ordre N associée à (C). Soit

$$(\alpha_o, \ldots, \alpha_N) = T_N^{-1}(C)(1,0, \ldots,0) .$$

On a

$$\alpha_o = \frac{\det T_{N-1}}{\det T_N} > 0 .$$

Posons $\beta_o = \sqrt{\alpha_o}$ et $\beta_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{\alpha_o}}$ , $p = 1, \ldots, N$ .

On a le corollaire suivant:

<u>Corollaire</u>:

Soit $(C) = (C_o, C_1, \ldots, C_N)$ une suite de nombres complexes vérifiant les conditions ci-dessus. Posons $P = \sum_0^N \beta_p X^p$. Alors:

(i) $$T_N\left(\frac{1}{|P|^2}\right) = T_N(C)\ .$$

(ii) Un élément $a_{k,j}$ , $k \leq j$ de la matrice inverse $(T_N(C))^{-1}$ est donné par:

$$a_{k,j} = \sum_{p\leq k} |\beta_p|^2 - \sum_{p'\geq j} |\beta_{p'}|^2\ , \qquad (a_{k,j} = a_{j,k})\ .$$

Remarque 1:

Le corollaire précédent donne une nouvelle méthode d'inversion de la matrice de Toeplitz basée sur l'inverse d'un système linéaire: $T_N(f)\ X = \mathbb{1}$ où $X = (x_0, \ldots, x_N)$ est connue et $\mathbb{1} = (1,0,0, \ldots, 0)$.

La résolution d'un tel système se fait depuis longtemps à l'aide d'algorithmes très rapides (Levinson, Trench, etc.)

La méthode précédente (qui doit être numérique moins rapide) a l'intérêt de proposer une exprésion analytique de l'inverse.

Remarque 2:

L'expression $\int \mathrm{Log}\ f\ d\sigma$ a deux interprétations; d'une part dans la théorie de la prédiction (d'un procesus stationnaire), c'est le logarithme de l'erreur de prédiction, d'autre part elle constitue l'entropie d'un processus stationnaire. Ce lien a été mis en évidence pour les processus gaussiens stationnaires par Chover [5] en 1960 et récémment par A. Mokkadem [13], en 1984.

# B I B L I O G R A P H I E

[1] AROV, D.Z. and KREIN, M.G.

On computations of entropy and their minimum.

Acto.Sci.Math. 45 (1983) pp 33-50.

[2] BURG, J.P., 1975.

"Maximum Entropy Spectral Analysis". Ph.D. Thesis.

Dept. of Geophysics, Standford University, California, 197 .

[3] DACUNHA-CASTELLE, D. 1984.

Reconstruction des phases en cristallographie par maximum d'entropie (d'après G. Bricogne).

Séminaire Bourbaki 36$^{e}$ année 1983-84 N° 628.

[4] CHILDERD, D. (Editeur)

Modern Spectral Analysis

IEEE Press.

[5] CHOVER, J.

"On normalized entropy of the extensions of a positive-definite function." J. Math.

J.Math.Mech. 10 N° 6 927-945, 1961.

[6] GASSIAT, E.

Problème Sommatoire par maximum d'entropie.

C.R.A.S. Paris t. 303, serie I, N°14, 1986.

[7] GRENANDER, U. and SZEGÖ,G.

Tœplitz forms and their applications.

University of California Press, Berkeley and Los Angales, 1958.

[8]

Past and Future. Math. Scand. 21, N°1. 1967, 16.

[9] HELSON, H. and SZEGÖ, G.

A problem in prediction theory.

Ann. Math. Pure App. 51, 1960, pp. 107-138.

[10] IBRAHIMOV, I. and ROZANOV, Y.

Processus aléatoires gaussiens

(1967) Editions MIR Moscou.

[11] KREIN, M.G.

On Basic Approximation Problem in Theory of Extrapolation and Filtering Process; in Selected Transl. Math. Statis. vol.4 (1964); pp. 127-137.

[12] LIVESEY, A.K. and SKILLING, J.

Maximum Entropy Theory

Acta Cryst. (1985) A41; pp. 113-122.

[13] MOKKADEM, A.

Entropie de processus et erreur de prédiction.

C.R.A.S. Paris, t.298, Serie I, N°19, 1984.

[14] SEGHIER, A.

Prédiction d'un processus stationnaire du second ordre.

Illinois Jounal of Mathematics.

[15] SEGHIER, A.

Inversion de la matrice de Tœplitz en d dimentions et

dévéloppement asymptotique de la trace de l'inverse à l'ordre d.
Journal of Functional Analysis. Vol. 67, N°3, July 1986.

-°- * -°-

IV Cas d-dimensionnel



I. Introduction.

Nous poursuivons le travail effectué dans le cas unidimentionnel . Soit S un "demi-espace" de $\mathbb{Z}^d$ ayant les propriétés suivantes [ 2 ]:

1) $(0, \dots, 0) \in S$.

2) $(m_1, \dots, m_d) \in S$ si et seulement si $(-m_1, \dots, -m_d) \notin -S$ excepté pour le point $m_1 = m_2 = \dots = m_d = 0$.

3) $\{(m_1, \dots, m_d) \in S$ et $(m_1', \dots, m_d') \in S\}$ impliquent $(m_1+m_1', \dots, m_d+m_d') \in S$.

On note par $\Lambda_+$ une partie finie de $\mathbb{Z}^d$ contenue dans S, par $\Lambda = \Lambda_+ \cup (-\Lambda_+)$, $\tilde{\Lambda} = \Lambda_+ - \Lambda_+$ et enfin $\Lambda_* = \Lambda_+ \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Soit f une fonction positive définie sur le d-tore intégrable par rapport à la mesure de Haar $d\sigma$ et de logarithme intégrable:

$$\int_{\mathbb{T}^d} f \, d\sigma < \infty \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{T}^d} \mathrm{Log}\, f \, d\sigma > -\infty \quad .$$

Soit $\chi : (\theta_1, \dots, \theta_d) \longrightarrow e^{i\theta_1} \dots e^{i\theta_d}$

et $\chi^n(\theta_1, \dots, \theta_d) = e^{i(n_1\theta_1 + \dots + n_d\theta_d)}$ ; $n = (n_1, \dots, n_d)$.

On note par $\hat{f}(m) = C_m = \int_{\mathbb{T}^d} f\chi^{-m} \, d\sigma$, $m = (m_1, \dots, m_d)$.

Le sous-ensemble fini $(C_m)_{m \in \tilde{\Lambda}}$ de coefficients de Fourier de f permet de définir une classe, notée $\mathcal{F}_{\tilde{\Lambda}}$ de fonctions positives h intégrables, de logarithme intégrable et vérifiant $\hat{h}(m) = C_m$, pour tout $m \in \tilde{\Lambda}$.

On notera desormais $\int_{\mathbb{T}} = \int$

On note par $\mathcal{P}_{\Lambda_*}$ l'ensemble des polynômes à transformée de Fourier nulle en dehors de $\Lambda_*$ ;

$$P = \sum_{m\in\Lambda_*} \alpha_m \chi^m , \qquad \alpha_m \in \mathbb{C} .$$

On étudie alors l'infimum de:

$$(1) \qquad \int |1 - \sum \alpha_m \chi^m|^2 f \, d\sigma ,$$

où $P = \sum \alpha_m \chi^m \in \mathcal{P}_{\Lambda_*}$. Soit $\mu_\Lambda(f)$ cet infimum. Rappelons un résultat de Helson-Lowdenslager, généralisant un théorème de Szegö [ 2 ]:

$$(2) \qquad \inf \int |1 - \sum \gamma_n \chi^n|^2 f \, d\sigma = \exp \int \operatorname{Log} f \, d\sigma ,$$

et où $\sum \gamma_n \chi^n$ sont des polynômes quelconques dans $H^2(S - \{(0,\dots,0)\})$.
(On note par $H^2(\Lambda)$ les fonctions de $L^2(\mathbb{T}^d)$ telles que $\sup \hat{f} \subset \Lambda \subset \mathbb{Z}^d$.)

On étudiera ensuite

$$(3) \qquad \max_{h\in \mathcal{F}_{\tilde{\Lambda}}} \exp \int \operatorname{Log} h \, d\sigma ,$$

et on le comparera à la quantité $\mu_\Lambda^2(f)$.

Les expressions dans (1) et (2) caractérisent le problème classique de la prédiction linéaire. L'expression dans (3) est liée à la notion d'extension de fonction de type positif apparue dans un travail de M.G. Krein (1944) [3 ]. Elle est d'autre part associée à la notion d'entropie (Chover 1961, [1].)

Nous établissons dans ce travail le résultat suivant que nous allons décrire. Notons par $P_o$ le polynôme qui réalise l'infimum dans (1). On suppose que $(1+P_o)^{-1} \in H^{\infty}(S)$ et on pose $f_o = \mu_{\Lambda}^2(f)\ |1 + P_o|^{-2}$.

Le maximum dans (3) est majoré dans tous les cas par $\mu_{\Lambda}^2(f) = \exp \int \operatorname{Log} f_o \, d\sigma$. On démontre alors l'existence d'un polynôme trigonométrique $P_{\Lambda}$ réel tel que $(P_{\Lambda}\ |1-P_o|^{-2})\hat{}(k) = \hat{f}(k)$ pour tout $k \in \tilde{\Lambda}$.

D'autre part on donne une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de Fourier de f indexés par $\tilde{\Lambda} \setminus \Lambda$, pour que $f_o = \mu_{\Lambda}^2(f)\ |1+P_o|^{-2} \in \mathcal{F}_{\tilde{\Lambda}}$ et ainsi $f_o$ répond au problème (3).

Cette question a été abordée par plusieurs auteurs, en particulier par Kunsch [4].

On montre, avec la condition $f^{-1}$ sommable, et pour des parties finies quelconques M de $\mathbb{Z}^d$, l'existence d'un polynôme trigonométrique positif dont les coefficients de Fourier son nuls en dehors de M et dont l'inverse répond au problème (3).

Le but de ce travail est de donner des solutions factorisables.

Le comportement de la différence $\mu_{\Lambda}(f) - \mu(f)$ lorsque les parties $\Lambda$ tendent en croissant vers $\mathbb{Z}^d$, sera étudié dans un prochain article. Les solutions de (1) et (3) s'obtiennent par des techniques inspirées de la démonstration du théorème de Helson-Lowdenlanger [2].

Notations.

Nous noterons $\pi_M$ la projection de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur le sous-espace de polynômes trigonométriques à coefficients de Fourier nuls en dehors de M. On note d'autre part par $T_\Lambda(f) = (C_{m-n})$, $(m-n) \in \Lambda \times \Lambda$ la matrice de Toeplitz associée au domaine $\Lambda$ et à la fonction f. Le polynôme constant est noté par $\mathbb{1}$.

On a le résultat suivant:

THEOREME. Soit $-P_0$ le polynôme qui réalise l'infimum dans (1).

(i) On suppose que $f^{-1} \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Alors

$$(\mu_\Lambda^2(f))^{-1} \; (1+P_0) = (T_\Lambda(f))^{-1} \; (\mathbb{1}).$$

(ii) On suppose en outre que $(1+P_0)^{-1} \in H^\infty(S)$. Alors:

a) Il existe un polynôme $P_{\tilde\Lambda}$ réel tel que:

$$(P_{\tilde\Lambda} \cdot |1+P_0|^{-2}) \,\hat{}\,(k) = \hat{f}(k), \quad \forall\; k \in \tilde\Lambda .$$

b) Il existe un polynôme $C_{\tilde\Lambda}$ tel que la condition

$$(*) \qquad \pi_{\tilde\Lambda / \Lambda}(f) = C_{\tilde\Lambda}$$

est nécessaire et suffisante pour que

$$\mu_\Lambda^2(f) \; (|1+P_0|^{-2}) \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda} .$$

(iii) On a d'autre part

a) $$\max_{h \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda}} \left( \exp \int \operatorname{Log} h \, d\sigma \right) \le \mu_\Lambda^2(h) = \mu_\Lambda^2(f) .$$

b) On suppose que la condition (*) est vérifiée. Alors:

$$\mu_\Lambda^2(f) = \exp \int \operatorname{Log} f_0 \, d\sigma = \max_{h \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda}} \left( \exp \int \operatorname{Log} h \, d\sigma \right).$$

Preuve

La relation (1) implique la relation d'orthogonalité suivante:

(4) $$\int (1+P_o)\, \mathcal{X}^{-m} f\, d\sigma = 0\ , \qquad \forall\ m \in \Lambda_*$$

et par passage au conjugué

(5) $$\int (1+P_o)\, \mathcal{X}^{-m'} f\, d\sigma = 0, \qquad \forall\ m \in -\Lambda_* \ .$$

On a par ailleurs

$$\int (1+P_o)\, f\, d\sigma = \int |1+P_o|^2 f\, d\sigma = \mu_\Lambda^2(f).$$

Soit $S(1+P_o)$ l'opérateur de $L^2(\mathbb{T}^d)$ dans lui-même tel que pour tout $h \in L^2(\mathbb{T}^d)$ on ait:

$$(S(1+P_o)h)\ \hat{}\ (0) = (|1+P_o|^2\, h)\ \hat{}\ (0)$$

$$\langle S(1+P_o)h, \mathcal{X}^m \rangle_2 = ((1+P_o)h)\ \hat{}\ (m), \qquad m \in S\setminus\{0,$$

$$\langle S(1+P_o)h, \mathcal{X}^{m'} \rangle_2 = ((1+P_o)h)\ \hat{}\ (m'), \quad m' \in -S\setminus\{0,$$

Notons par $B_\Lambda$ le polynôme trigonométrique égal à $S(1+P_o)\ \pi_\Lambda(f)$, d'après les relations ci-dessus $B_\Lambda$ a pour coefficients de Fourier la suite $(\mu_\Lambda^2,\ 0,\ \dots,\ 0,\ ((1+P_o)\ \pi_\Lambda(f))\ \hat{}\ (n),\ \dots,\ 0,\ \dots)$ , où $n \in S\setminus (\Lambda_+ \cup \Lambda_-)$.

. On note par $\mathbb{1}$ le polynôme trigonométrique constant de valeur $1$ .

Les relations (2), (3) et (4) s'écrivent alors sous la forme:

$$\begin{cases} T_{\Lambda_*}(f)(1+P_o) = \mu_\Lambda^2 \cdot \mathbb{1} \\ S(1+P_o)\ \pi_{\tilde{\Lambda}}(f) = B_\Lambda \end{cases} .$$

Notons par $\Lambda'$ le support de $(B_\Lambda)\hat{}$.

Voici le problème: On cherche à déterminer un élément h de $L^2(\mathbb{T}^d)$ à valeurs réelles, tel que:

$$(6)\quad \begin{cases} \int |1+P_0|^2\ h\, d\sigma = \mu_\Lambda^2(f) \\ \int (1+P_0)\ h\, \chi^{-m}\, d\sigma = 0, \quad \forall\ m \in (S \setminus \widetilde{\Lambda}) \cup \Lambda_* \\ \int (1+P_0)\ h\, \chi^{-m}\, d\sigma = \hat{D}_\Lambda(m)\ , \quad \forall\ m \in \widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda \\ h = \pi_{\widetilde{\Lambda}}(f) + \widetilde{h}, \quad \text{avec } (\widetilde{h})\hat{} \in \ell^2\,(\mathbb{Z}^d \setminus \widetilde{\Lambda}) \end{cases}$$

Dans le système (6), il y a deux inconnues à déterminer, $\widetilde{h}$ et le polynôme $D_\Lambda$ à spectre dans $(\widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda) \cup \{0,\ldots,0\}$ $(\hat{D}_\Lambda(0) = \mu_\Lambda^2(f))$.

Les relations (6) s'écrivent d'après nos notations:

$$(7)\qquad S(1+P_0)\ h = S(1+P_0)\ \pi_{\widetilde{\Lambda}}(f) + S(1+P_0)\ \widetilde{h} = D_\Lambda\ ,$$

ou encore

$$(8)\qquad S(1+P_0)\ \widetilde{h} = D_\Lambda - B_\Lambda\ .$$

Posons $\Lambda^c = S \setminus (S \cap \widetilde{\Lambda})$ et $\pi_{\Lambda^c}$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ sur $H^2(\Lambda^c)$.

Soit $p \in H^2(\Lambda^c)$; on peut écrire $\widetilde{h}$ (qui est réelle) $\widetilde{h} = p+\bar{p}$.

Appliquant $\pi_{\Lambda^c}$ aux deux membres de l'équation (8), on obtient:

$$\pi_{\Lambda^c}\ S(1+P_0)(p+\bar{p}) = \pi_{\Lambda^c}\ (1+P_0)(p+\bar{p}) = \pi_{\Lambda^c}(D_\Lambda - B_\Lambda) = -\pi_{\Lambda^c} B_\Lambda\ ,$$

ou encore

$$(9)\qquad \pi_{\Lambda^c}(1+P_0)p + \pi_{\Lambda^c}(1+P_0)\bar{p} = -\ \pi_{\Lambda^c}\ B_\Lambda$$

(car $\Lambda^c \subset S$).

(Remarquons à cause du rôle symétrique joué par $\pi_+$ et $\pi_-$, que (9)) est équivalent à (7) ).

Nous allons résoudre l'équation (9).

Nous avons la formulation équivalente suivante. Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{T}^d)$, on pose $J\varphi = \overline{\varphi}$. $J$ définit une isométrie. La relation (9) devient

$$(10) \qquad \pi_{\Lambda^c}(1+P_0)p + \pi_{\Lambda^c} \frac{1+P_0}{\overline{1+P_0}} J(1+P_0)p = -\pi_{\Lambda^c} B_\Lambda \quad .$$

Montrons que cet opérateur est inversible.

ETAPE 1:

Il existe une constante $\gamma$, $0 < \gamma < 1$, telle que $\forall\ p \in H^2(\Lambda^c)$ (on notera désormais $\pi_{\Lambda^c} = \pi$ ):

$$\|\pi(1+P_0)p + \pi(1+P_0)\overline{p}\|^2 \geq (1-\gamma)(\|\pi(1+P_0)p\|^2 + \|\pi(1+P_0)\overline{p}\|^2) \ .$$

En effet, considérons pour p comme ci-dessus l'expression suivante:

$$(11) \qquad \|\pi(1+P_0)p + \pi(1+P_0)\overline{p}\|^2 = \|\pi(1+P_0)p\|^2 + \|\pi(1+P_0)\overline{p}\|^2 + $$
$$+ 2\,\mathrm{Re}\,\langle \pi(1+P_0)p,\ \pi(1+P_0)\overline{p}\rangle \ .$$

Etudions la quantité suivante:

$$(12) \qquad \langle \pi(1+P_0)p,\ \pi(1+P_0)\overline{p}\rangle = \langle \pi(1+P_0)p,\ (1+P_0)\overline{p}\rangle \ .$$

C'est le produit scalaire d'éléments:

$$\pi(1+P_0)p \in H^2(\Lambda^c) \quad \text{et} \quad (1+P_0)\overline{p} \in (1+P_0)\ \overline{H^2(\Lambda^c)}.$$

Considérons la somme de ces deux sous-espaces:

$$H^2(\Lambda^c) + (1+P_0)\ \overline{H^2(\Lambda^c)} = (1+P_0)\left(\frac{1}{1+P_0} H^2(\Lambda^c) + \overline{H^2(\Lambda^c)}\right) .$$

Cette somme est fermée (dans $L^2(\mathbb{T}^d)$ ). En effet soit

$(\psi_n+(1+P_o)\theta_n)$, $\psi_n \in H^2(\Lambda^c)$ et $\theta_n \in \overline{H^2(\Lambda^c)}$, une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. On a:

$$A_{m,n} = \|\psi_n + (1+P_o)\theta_n - \psi_m - (1+P_o)\theta_m\|^2 .$$

Comme d'après l'hypothèse $(1+P_o)^{-1} \in H^\infty$, $\mathrm{mf}(|1+P_o|) = \alpha > 0$, on a:

$$A_{m,n} \geq \alpha^2 \left\| \left( \frac{\psi_m}{1+P_o} - \frac{\psi_n}{1+P_o} \right) + (\theta_m - \theta_n) \right\|^2 .$$

De plus, comme $1/(1+P_o) \in H^\infty(S)$, les sous-espaces $(1/(1+P_o)\ H^2(S)$ et $\overline{H^2(\Lambda^c)}$ sont orthogonaux et:

$$A_{m,n} \geq \alpha^2 \left\| \frac{\psi_m}{1+P_o} - \frac{\psi_n}{1+P_o} \right\|^2 + \|\theta_m - \theta_n\|^2 .$$

Il s'en suit immédiatement que les suites $\dfrac{\psi_m}{1+P_o}$ et $\theta_m$ convergent respectivement vers $\dfrac{\psi_o}{1+P_o}$, $\psi_o \in H^2(S)$ et $\theta_o \in \overline{H^2(\Lambda^c)}$.

Ceci montre que la somme $H^2(\Lambda^c)+(1+P_o)\overline{H^2(\Lambda^c)}$ est fermé (car l'opérateur $\mu_{1+P_o}: \theta \longrightarrow (1+P_o)\theta$ est inversible grâce à l'hypothèse $1/(1+P_o) \in L^\infty(\mathbb{T}^d)$ ).

Ceci équivaut, d'après un lemme classique, à l'assertion suivante: Il existe une constante $\gamma$, $0 \leq \gamma < 1$, telle que pour tout couple $(\psi_1,\psi_2) \in H^2(\Lambda^c) \times (1+P_o)\ \overline{H^2(\Lambda^c)}$ et vérifiant $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$, on ait:

$$|\langle \psi_1,\psi_2 \rangle| \leq \gamma < 1 .$$

Ainsi, le produit scalaire dans (12) peut être majoré:

$$2|\langle \pi(1+P_o)p, \pi(1+P_o)\overline{p} \rangle| \leq 2\gamma \left( \|\pi(1+P_o)p\|\ \|\pi(1+P_o)\overline{p}\| \right)$$

$$\leq \gamma \left( \|\pi(1+P_o)p\|^2 + \|\pi(1+P_o)\bar{p}\|^2 \right)$$

et la norme dans (11) peut être minorée par:

$$(13) \qquad \|\pi(1+P_o)p + \pi(1+P_o)\bar{p}\|^2 \geq (1-\gamma) \left( \|\pi(1+P_o)p\|^2 + \|\pi(1+P_o)\bar{p}\|^2 \right).$$

ETAPE 2:

Il existe une constante $m > 0$ telle que $\forall p \in H^2(\Lambda^c)$ on ait:

$$\|\pi(1+P_o)p + \pi(1+P_o)\bar{p}\|^2 \geq m \|p\|^2 \quad .$$

Raisonons par l'abs urde en supposant le contraire: il existe une suite $(p_n)$, $(p_n) \in H^2(\Lambda^c)$, de norme minorée par une constante positive (on prendra par exemple $(p_n)$ vérifiant $\|(1+P_o)p_n\| = 1$, car on a $\mathrm{mf}|1+P_o| > 0$ ), telle que:

$$\|\pi(1+P_o)p_n + \pi(1+P_o)\bar{p}_n\|^2 \longrightarrow 0 \quad .$$

L'inégalité dans (13) implique immédiatement:

$$\|\pi(1+P_o)p_n\| \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \|(I - \pi)(1+P_o)p_n\| \longrightarrow 1$$

lorsque n tend vers l'infini. (I est l'opérateur identité sur $H^2(\mathcal{S})$ car $(1+P_o)p_n \in H^2(\mathcal{S})$ .)

Comme d'autre part $(I-\pi^+)(1+P_o)H^2(\Lambda^c)$ est contenu dans $H^2(\tilde{\Lambda})$, l'espace des polynômes trigonométriques définis sur $\tilde{\Lambda}$, il est donc de dimension finie. La boule unité de ce sous-espace étant compacte et la suite $(1-\pi)(1+P_o)p_n$ bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un élément $\psi_o$ du suos-espace. Ce sous-espace étant fermé, il existe un élément $q_o$ tel que $\psi_o = (1-\pi)(1+P_o)q_o$ . Cet élément vérifie donc:

$$\|(I-\pi)(1+P_o)q_o\| = \|(1+P_o)q_o\| = 1 \ ,$$

ou encore $(1+P_o)q_o \in H^2(\tilde{\Lambda})$, soit $\tau_o$ ce polynôme; il vérifie donc:

$$(14) \qquad \pi_{\tilde{\Lambda}}\,(\tau_o/(1+P_o)) = 0 \ .$$

Montrons que $\tau_o = 0$.

Tenant compte du fait que $1/(1+P_o) = \varphi \in H^\infty(S)$ et $\hat{\varphi}(0,\ldots,0)=1$, l'équation (14) s'écrit comme un système linéaire:

$$(15) \qquad \sum_{(k,j)\in\tilde{\Lambda}\times\tilde{\Lambda}} \hat{\varphi}(k-j)\ \hat{\tau}_o(j) = 0 \ .$$

En réécrivant le système dans un certain ordre, on constate qu'il est triangulaire (car $\varphi$ est analytique).

La solution de (14) est alors $\tau_o=(1+P_o)q_o=0$, ce qui contredit l'hypothèse faite ci-dessus ( $\|\tau_o\| = 1$ ).

Il existe donc $\varepsilon>0$ tel que $\forall p\in H^2(\Lambda^c)$,

$$\|\pi(1+P_o)p\| \geq \varepsilon\ \|p\|$$

et il existe une constante $m$ positive, grâce à l'inégalité (14) établie dans l'etape 1,

$$(16) \qquad \|\pi(1+P_o)p + \pi(1+P_o)\overline{p}\| \geq m\ \|p\| \ .$$

ETAPE 3:

L'opérateur défini dans (10) est inversible. Soit $\pi_-$ le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{T}^J)$ sur $\overline{H^2(\Lambda^c)}$ et considérons l'opérateur suivant

$$\forall p\in H^2(\Lambda^c), \quad p+\overline{p} \longrightarrow \pi_-(\overline{1+P_o})(p+\overline{p}) + \pi(1+P_o)(p+\overline{p}) \ .$$

Cet opérateur défini sur $\mathcal{M} = \{p+\bar{p},\ p\in H^2(\Lambda^c)\}$ dans lui-même est autoadjoint. En effet, soit $\psi \in H^2(\Lambda^c)$, $\bar{\psi} \in \overline{H^2(\Lambda^c)}$, on a

$$\begin{aligned}
&\langle \pi_-(1+P_0)(p+\bar{p}) + \pi(1+P_0)(p+\bar{p}),\ \psi+\bar{\psi} \rangle \\
&= \langle \pi_-(\overline{1+P_0})(p+\bar{p}),\ \bar{\psi} \rangle + \langle \pi(1+P_0)(p+\bar{p}),\ \psi \rangle \\
&= \langle p+\bar{p},\ (1+P_0)\bar{\psi} \rangle + \langle p+\bar{p},\ (\overline{1+P_0})\psi \rangle \\
&= \langle p,\ \pi(1+P_0)\bar{\psi} \rangle + \langle \bar{p},\ \pi_-(1+P_0)\bar{\psi} \rangle + \\
&\qquad + \langle p,\ \pi(\overline{1+P_0})\psi \rangle + \langle \bar{p},\ \pi_-(1+P_0)\psi \rangle \\
&= \langle p+\bar{p},\ \pi(1+P_0)(\psi+\bar{\psi}) + \pi(\overline{1+P_0})(\psi+\bar{\psi}) \rangle \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'opérateur ci-dessus est autoadjoint.

On a d'autre part:

$$(*) \qquad \|\pi_-(\overline{1+P_0})(p+\bar{p}) + \pi(1+P_0)(p+\bar{p})\|^2$$

$$= \|\pi_-(\overline{1+P_0})(p+\bar{p})\|^2 + \|\pi(1+P_0)(p+\bar{p})\|^2 \quad ,$$

et par construction l'expression (*) ci-dessus est égale à

$$(*) = 2\,\|\pi(1+P_0)(p+\bar{p})\|^2 .$$

Cette norme est minorée d'après l'inégalité (16) par

$$2m\ \|p\| = m\ \|p+\bar{p}\| .$$

Comme l'opérateur ci-dessus est autoadjoint cette condition implique qu'il est inversible dans $\mathcal{M}$. Cela signifie que l'équation:

$$\pi(\overline{1+P_0})(p+\bar{p}) + \pi(1+P_0)(p+\bar{p}) = \psi \in \overline{H^2(\Lambda^c)} \oplus H^2(\Lambda^c)$$

a une solution unique $p+\bar{p}$ et à cause de la décomposition orthogonale, l'équation:

$$\pi(1+P_0)(p+\bar{p}) = -\ \pi(B_\Lambda) \in H^2(\Lambda^c)$$

a aussi une solution unique $p+\bar{p}$ $(\pi = \pi_{\Lambda^c})$. Ainsi l'opérateur

$\pi_{\Lambda^c}(1+P_o) + \pi_{\Lambda^c} \dfrac{1+P}{\overline{1+P_o}} J(1+P_o)$ est inversible sur $H^2(\Lambda^c)$ et

$$(17\text{bis}) \qquad p = [\pi_{\Lambda^c}(1+P_o) + \pi_{\Lambda^c} \frac{1+P}{1+P_o} J(1+P_o)]^{-1} (-\pi_{\Lambda^c} B_\Lambda)$$

répond à la question.

En effet, posons

$$D_\Lambda^+ = \pi_{\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda}(1+P_o)(p+\bar{p}) \qquad \text{et} \quad D_\Lambda = D_\Lambda^+ + \quad {}_\Lambda$$

Ce polynôme à spectre dans $\tilde{\Lambda}\setminus\Lambda$ est bien défini grâce à (17bis) et l'élément $h = \pi_{\tilde{\Lambda}}(f) + p+\bar{p}$ vérifie

$$\int h(1+P_o)X^{-m}\, d\sigma = 0 , \qquad \forall\ m \in S\setminus\tilde{\Lambda} \qquad (17\text{bis})$$

$$\int h(1+P_o)X^{-m}\, d\sigma = 0 , \qquad m \in \Lambda_*$$

car $\pi_{\tilde{\Lambda}}(f)$ vérifie la même relation par construction de $1+P_o$.

On a d'autre part, comme $p \in H^2(\Lambda^c)$ $(\Lambda^c = S\setminus\tilde{\Lambda})$:

$$((1+P_o)p)\,\hat{}\,(k) = 0 \quad \text{pour tout} \quad k \in \Lambda$$

(ce fait est une conséquence de la relation $\tilde{\Lambda} = \Lambda - \Lambda$ ) et

$$\int h(1+P_o)X^{-m}\, d\sigma = \hat{D}_\Lambda(m) - \hat{B}_\Lambda(m) , \qquad \forall\ m \in \tilde{\Lambda}\setminus\Lambda ,$$

ce qui traduit la relation (18). De plus

$$\int |1+P_o|^2\, h\, d\sigma = \mu_\Lambda^2 .$$

Comme $h$ est réel, ces relations sont vérifiées par passage au conjugué.

Considérons les produits scalaires suivants

$$\int |1+P_o|^2 h \, \chi^{-m} \, d\sigma = \int (1+P_o) \, h \, \overline{(1+P_o) \, \chi^m} \, d\sigma .$$

Posons $\Lambda' = \tilde{\Lambda} + \Lambda$, on a d'après les relations (19):

$$\int |1+P_o|^2 h \, \chi^{-m} \, d\sigma = 0 , \quad \forall \, m \in S \setminus \Lambda' .$$

On a d'autre part

$$\int |1+P_o|^2 h \, \chi^{-m} \, d\sigma = \sum (\overline{1+P_o}) \,\hat{}\,(k)((1+P_o)h) \,\hat{}\,(m-k)$$

$$= \sum_{m-k \in \overline{\Lambda}} (\overline{1+P_o}) \,\hat{}\,(m-k)((1+P_o)h) \,\hat{}\,(k) .$$

Ces coefficients sont connus grâce aux relations (19) et (20). Notons par $P_\Lambda$ le polynôme ayant les coefficients ci-dessus, i.e.:

(21) $$\hat{P}_{\tilde{\Lambda}}(m) = \int_{\pi^d} |1+P_o|^2 \chi^{-m} \, d\sigma , \qquad m \in \Lambda' .$$

D'après ce qui precède, la relation (21) est valable pour tout $m \in \mathbb{Z}^d$, cela signifie qu'il existe un polynôme $P_{\tilde{\Lambda}}$ (ci-dessus) tel que la fonction

$$h = \frac{P_{\tilde{\Lambda}}}{|1+P_o|^2} \quad \text{P.P} \quad \text{et} \quad \hat{h}(k) = \hat{f}(k), \quad \forall \, k \in \tilde{\Lambda} .$$

La partie (ii) du théorème est donc prouvée. Montrons la partie (iii).

a) D'après le théorème de Helson-Lowdenslager cité dans l'introduction (relation (2)), on a

$$\mu_\Lambda^2 = \inf_{P \in \mathcal{P}_\Lambda} \int |1-P|^2 f \, d\sigma \geq \inf_Q \int |1-Q|^2 f \, d\sigma$$

$$= \exp \int \mathrm{Log} \, f \, d\sigma ,$$

où $Q$ est un polynôme trigonométrique quelconque à spectre dans $S$. Ainsi en remarquant que $\mu_\Lambda(f) = \mu_\Lambda(h)$, car $f$ et $h \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda}$, on a:

$$\max_{h \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda}} \exp \int \operatorname{Log} h \, d\sigma \leq \mu_\Lambda^2(h) = \mu_\Lambda^2(f) .$$

b) Dès que $f_o = \mu_\Lambda^2(f) / |1+P_o|^2 \in \mathcal{F}_{\tilde\Lambda}$, ce qui équivaut à $P_\Lambda = 0 \ \mu_\Lambda^2(f)$ ou encore, $\pi_{\Lambda \setminus \tilde\Lambda}(f) = C_\Lambda$, alors

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_\Lambda} \int |1-P|^2 f_o \, d\sigma = \mu_\Lambda^2(f_o) = \exp \int \operatorname{Log} f_o \, d\sigma .$$

En effet, montrons que la projection de $1$ sur $H^2_{f_o}(S^*)$ appartient au sous-espace $H^2_{f_o}(\Lambda)$ des polynômes trigonométriques dans $\Lambda$. L'hypothèse $1/(1+P_o) \in H^\infty(S)$, s'écrit

$$\int \frac{\chi^m}{1+P_o} d\sigma = 0 = \int \frac{\chi^{-m}}{1+P_o} d\sigma , \qquad m \in S ,$$

ou encore:

$$\int \frac{1+P_o}{|1+P_o|^2} \chi^{-m} \, d\sigma = 0, \qquad m \in S .$$

Cela veut dire que $1$ est orthogonal à $(1+P_o)\, \overline{H^2(S^*)}$ $= \dfrac{1+P_o}{\overline{1+P_o}} \overline{H^2(S^*)}$ (car $H^2(S^*) = \dfrac{1}{\overline{1+P_o}} H^2(S^*)$ ).

Remarquons que $H^2_{f_o}(S^*) \ominus \mathcal{P} = \dfrac{1+P_o}{\overline{1+P_o}} \overline{H^2(S^*)} \qquad H^2(S^*)$.

Ainsi la projection orthogonale de $1$ sur $H^2_{f_o}(S^*)$ appartient à $H^2_{f_o}(\Lambda)$, ou encore:

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_\Lambda} \int |1-P|^2 f_o \, d\sigma = \inf \int |1-\tilde{P}|^2 f_o \, d\sigma ,$$

où $\widetilde{F}$ est un polynôme trigonométrique quelconque de $H^2(S^*)$.

Ceci montre la partie (iii) b).

Remarquons enfin si $\widetilde{\Lambda} = \Lambda - \Lambda = \Lambda$ , alors $C_{\widetilde{\Lambda}} = 0$ et $\pi_{\widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda}(f) = 0$. La condition (*) est vérifiée et on retrouve en particulier les résultats du cas $d = 1$.

Ceci démontre complètement le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chover, J.
"On normalized entropy of the extension of a positive definite function."
J. Math. Mech. 10 N°6 pp 927-945, 1961.

[2] Helson, H. - Lowdenslager,
Prediction Theory and Fourier Series in Several variables (II).

[3] K eih, M.G.
On basic approximation problem in theory of extrapolation and filtering process.
Selected Transl. Math. Statis. Prob. vol 4 (1964), pp 127-137.

[4] Kunsch,
Thermodynamics and Statistical A nalysis of Gaussians Random Fields.
Z. Wahrsheintichkeits - Theorie verw. Gebeite.

[5] Rudin, W.
"The extension problem of positive definite functions".
Illinois J. Math. 7, 1963; pp 532-539.

[6] Seghier, A.
Reconstruction de densités de probabilités et de densités spectrales par le principe du maximum d'entropie.
A paraître 1987.

[7] Seghier, A.
Inversion de la matrice de Tœplitz en plusieurs dimentions.
Journal of Functional Analysis, Vol 67, N°", July 1986.