CHAO-JIANG XU

Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires

Thèses d'Orsay, 1984

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1984__0164__P0_0>

63927

ORSAY
n° d'ordre : 3825

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3ème CYCLE

Spécialité : Mathématiques Pures.

PAR

Monsieur XU Chao Jiang (徐 超 江)

SUJET : REGULARITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON LINEAIRES.

soutenue le 20 Décembre 1984 devant la Commission d'examen

MM. S. ALINHAC Président

J- M. BONY

A. GRIGIS

C. ZUILY

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement Monsieur J-M. BONY de m'avoir permis de venir travailler à Orsay, sous sa direction. Par ses encouragements et ses conseils, il m'a beaucoup aidé à la réalisation de ce travail.

J'exprime également ma reconnaissance à Monsieur C. ZUILY pour les discussions profitables que j'ai pu avoir avec lui, et pour sa participation au jury.

Je remercie également Monsieur S. ALINHAC pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury et Monsieur A. GRIGIS de s'y être joint.

Ma reconnaissance va également à Monsieur CHI MIN-YOU qui m'a initié à la recherche des problèmes d'équations aux dérivées partielles et m'a constamment encouragé.

Je voudrais aussi remercier Monsieur J-Y. CHEMIN pour avoir amélioré le texte en français, et pour les discussions que j'ai eues avec lui.

Enfin, je dois exprimer toute ma gratitude à Madame A. BARDOT qui a assuré ce magnifique travail de dactylographie.

ABSTRACT :

In a first part, we prove a regularity theorem for solution of quasilinear partial differential equation of second order : if u is a smooth enough real solution, if the principal symbol of the linearized operator is positive, and if the Hörmander's or Oleinik-Radkevič's condition is satisfied, then $u \in C^{\infty}$. With similar methods, we prove that : if $u \in C^{\rho}_{loc}(\Omega)$, $\rho \geqslant 3$, is a "very strict" minimum of an integral functionnal $I(u) = \int_{\Omega} f(x,u,\nabla)dx$, i.e. if for all x in Ω, there are a neighborhood K of x, $C > 0$, $\varepsilon > 0$, such as $I(u+\varphi) \geqslant I(u) + C\|\varphi\|^{2}_{\varepsilon}$ for all $\varphi \in C^{\infty}_{0}(K)$, then $u \in C^{\infty}$.

In a second part, we consider partial differential equation of form $F(x,X^{\alpha}u) = 0$ where $X_1,\ldots,X_p$ are vectors fields satisfying Hörmander's condition. Let us u be of smooth enough solution, we suppose that the localisation of the linearized operator on the Lie group associated to the system of the $\{X_j\}$ is hypoelliptic, we prove with this hypothesis that $u \in C^{\infty}$.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Dans [1], J-M. Bony a introduit une classe d'opérateurs, dits paradifférentiels, associée à une équation aux dérivées partielles non-linéaires. En utilisant cette théorie, on a obtenu beaucoup de résultats de propagation des singularités pour des solutions d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Nous allons maintenant considérer des problèmes d'hypoellipticité pour des équations aux dérivées partielles non-linéaires.

Dans la première partie, on considère des équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre. On suppose que les opérateurs linéarisés, associés à une solution assez régulière satisfont les hypothèses de O.A. Oleinik et E.D. Radkevič [7] (voir précisément le théorème 1.1.). On en déduit que cette solution est infiniment régulière. Si l'opérateur linéarisé s'exprime en une somme de carrés de champs de vecteurs, pour la même conclusion, on pose la condition de Hörmander (voir précisément le théorème 1.2.). On traite également quelques cas exceptionnels, c'est-à-dire, sauf sur une surface compacte, les conditions précédentes sont satisfaites et sur cette surface on suppose que l'équation n'est pas totalement dégénérée ; on obtient des propriétés comme l'hypoellipticité globale.

A la fin de la première partie, on considère des problèmes de calcul de variations intégrales $I(u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)dx$, on sait que, pour une solution assez régulière de l'équation d'Euler, si l'opérateur linéarisé est elliptique, on a l'estimation suivante : $I(u+\varphi) \geqslant I(u) + C\,\|\varphi\|_1^2$, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$ réelle où $C>0$, diamètre de K suffisamment petit. Nous savons que cette solution est infiniment régulière. Nous supposons maintenant que, pour une fonction u réelle, assez régulière, nous avons l'estimation suivante $I(u+\varphi) \geqslant I(u) + C\,\|\varphi\|_\varepsilon^2$ pour tout φ de $C_0^\infty(K)$ réelle, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<C$. Nous obtiendrons que cette fonction est aussi infi-

niment régulière. Enfin, dans certains cas particulier, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour cette estimation.

Dans la deuxième partie, on considère des équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre supérieur qui sont de la forme $F(x,X^{\alpha}u)=0$, $|\alpha|\leqslant m$, où $X_1,\dots,X_p$ un système de champs de vecteurs réels, C^{∞}, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $1\leqslant\alpha_j\leqslant p$, $|\alpha|=k$, $X^{\alpha}=X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_k}$. On suppose que ce système satisfait les conditions de Hörmander et Metivier (voir précisément le théorème 2.1). On localise, à un point fixé, l'opérateur linéarisé de cette équation en associant une solution réelle assez régulière. On obtient un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie nilpotent. S'il est hypoelliptique sur ce groupe de Lie, on déduit que cette solution est infiniment régulière dans un voisinage de ce point.

I. - REGULARITE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES QUASI-LINEAIRES NON ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE.

§.1.0. Introduction.

Dans cette partie, on considère les problèmes de régularité des solutions pour une classe d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre. En 1968, L. Hörmander [4] a donné une condition suffisante d'hypoellipticité pour les opérateurs différentiels linéaires du second ordre qui s'écrivent en $L = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + C$ où $X_0, \dots, X_r$ sont des champs de vecteurs sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, avec les coefficients C^∞. O.A. Oleinik et E.D. Radkevič [7] ont traité une classe d'opérateurs différentiels du second ordre générale qui possédaient une partie principale non-négative. On va maintenant étudier les équations quasi-linéaires en utilisant le calcul paradifférentiel de J-M. Bony par une méthode analogue au cas linéaire.

Soit

$$F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = \sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x,u,\nabla u)\,\partial_{kj}^2 u + b(x,u,\nabla u) = 0 \tag{0.1}$$

une équation aux dérivées partielles quasi-linéaires du second ordre sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, où

$$a_{kj}(x,z,p)\ ,\ b(x,z,p) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+1})\ ,\quad k,j = 1,\dots,n\ .$$

On considère aussi un cas particulier où l'équation peut être écrite sous la forme

$$F(x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 u + X_0 u + f(x,u) = 0 \tag{0.2}$$

où $X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x,u)\,\partial_k$, $X_j^2 = X_j X_j$, $j = 0,\dots,r$ et

$$a_{kj}(x,z)\ ,\ f(x,z) \in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R})\ ,\ \ k=1,\dots,n\ ,\ \ j=0,\dots,r\ .$$

On va donner des conditions suffisantes pour que les équations (0.1) et (0.2) aient l'hypoellipticité ; c'est-à-dire, soit $u\in C^\rho_{loc}(\Omega)$, $\rho>\rho_0$, une solution de l'équation (0.1) ou (0.2). Sous des hypothèses que l'on va préciser, on peut en déduire que $u\in C^\infty(\Omega)$.

Pour énoncer nos résultats, on introduit d'abord quelques notions. Soit $F(x,\xi)$ une fonction homogène de degré 1, de classe C^∞ en $\xi\neq 0$, et $C^\rho_{loc}(\Omega)$ en x , on peut alors, de la manière classique, définir un opérateur pseudo-différentiel $F(x,D)$. On dit que c'est un opérateur de classe C^ρ_{loc} , d'ordre 1. Soit $\{F_1(x,D),\dots,F_m(x,D)\}$ un système d'opérateurs de classe C^ρ_{loc} , $\rho>0$, d'ordre 1. Prenons $I=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ un multi-indice entier, $1\leqslant\alpha_j\leqslant m$, on note $|I|=k$. Si $|I|\leqslant[\rho]$, on a alors que

$$F^1_I(x,\xi) = (-i)^{k-1}\left\{F_{\alpha_1},\dots,\{F_{\alpha_{k-1}},F_{\alpha_k}\}\dots\right\} \tag{0.3}$$

est une fonction homogène de degré 1, de classe C^∞ en $\xi\neq 0$, et $C^{\rho-k+1}_{loc}$ en x , où $\{\cdot\,,\cdot\}$ est le crochet de Poisson, $F^1_I(x,D)$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $F^1_I(x,\xi)$. On donne :

<u>*DEFINITION*</u> <u>*1*</u>. – *Un système d'opérateurs pseudo-différentiels $\{F_1,\dots,F_m\}$ de classe C^ρ_{loc}, d'ordre 1, est dit un système de rang n sur un ouvert $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, si pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe un entier $r(K)\leqslant[\rho]$, et une constante $C(K)>0$ tels que :*

$$\sum_{|I|\leqslant r} |F^1_I(x,\xi)|^2 \geqslant C(K)\ |\xi|^2$$

pour $(x,\xi)\in K\times S^{n-1}$, où $F^1_I(x,\xi)$ défini comme dans (0.3).

On définit un système d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 associé à l'équation (0.1) et (0.2).

Soit $u \in C^{\rho}_{loc}(\Omega)$ une fonction réelle, $\rho > 3$, on a alors

$$\tilde{a}_{kj}(x) = a_{kj}(x,u(x)\ ,\nabla u(x))\ ,\ \tilde{b}(x) = b(x,u(x)\ ,\nabla u(x)) \in C^{\rho-1}_{loc}(\Omega)\ .$$

On pose alors :

$$(0.4)\quad \begin{cases} g_j(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)(i\,\xi_k)\ , & j=1,\dots,n \\ g_{n+\ell}(x,\xi) = |\xi|^{-1} \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \tilde{a}_{kj}(x)(i\,\xi_k)(i\,\xi_j)\ , & \ell=1,\dots,n \\ g_0(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell(x)(i\,\xi_\ell) & \end{cases}$$

où $b_\ell(x) = \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_\ell} a_{kj}(x,u(x)\ ,\nabla u(x))\partial^2_{kj} u(x) + \frac{\partial}{\partial p_\ell} b(x,u(x)\ ,\nabla u(x)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \tilde{a}_{k\ell}$, $\ell = 1,\dots,n$. Ce sont des fonctions homogènes de degré 1 de classe C^∞ en $\xi \neq 0$, et $C^{\rho-2}_{loc}(\Omega)$ en x. On obtient donc un système d'opérateurs pseudo-différentiels $\{G_0,\dots,G_{2n}\}$ de classe $C^{\rho-2}_{loc}(\Omega)$ associé à l'équation (0.1).

On va montrer le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> <u>1.1</u>. - Soit u une solution réelle de l'équation (0.1) de classe $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$. Supposons que $\sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}\,\xi_k\,\xi_j \geqslant 0$ pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, $\rho > 3$, si le système $\{G_0,\dots,G_{2n}\}$ est un système de rang n sur Ω, on a alors :

$$u \in C^\infty(\Omega)\ .$$

Pour l'équation (0.2), soit $u \in C^{\rho}_{loc}(\Omega)$, $\rho > 2$, on a alors $X_j(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)(i\,\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x,u(x))(i\,\xi_k)$, $j = 0,\dots,r$ des fonctions homogènes de degré 1, de classe C^∞ en ξ et de classe $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$ en x, donc $\{X_0,\dots,X_r\}$ est un système d'opérateur différentiel d'ordre 1, à coefficient $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$.

THEOREME 1.2. - Soit u une solution réelle de l'équation (0.2) de classe $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$, supposons que $\rho > 2$, et le système $\{X_0,\dots,X_r\}$ est un système de rang n sur Ω, on a alors $u \in C^{\infty}(\Omega)$.

Comme pour les équations linéaires, on peut également traiter certain cas exceptionnel. Soient N une sous-variété différentiable de dimension n-1 de Ω, M un sous-ensemble de N, un compact de Ω, on suppose qu'il existe localement une fonction réelle $\varphi(x)$ telle que $\{\varphi(x) = 0\} = N_{loc}$ avec $\operatorname{grad}\varphi(x) \neq 0$, on a alors :

THEOREME 1.3. - Supposons que, sur $\Omega \setminus M$, les hypothèses du théorème 1.1. sont satisfaites et pour $x \in M$, on suppose

$$(0.5)\quad \sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\partial_k\varphi(x)\partial_j\varphi(x) + \left|\sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\partial^2_{kj}\varphi(x) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(x)\partial_j\varphi(x)\right| > 0 .$$

Si $M = \{X_0\}$, on suppose :

$$(0.6)\qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{a}_{jj}(x_0) + |\tilde{b}_j(x_0)|\right) > 0$$

on a alors $u \in C^{\infty}(\Omega)$, où

$$\tilde{b}_{\ell}(x) = \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_{\ell}} a_{kj}(x,u(x)\,,\nabla u(x))\partial^2_{kj}u(x) + \frac{\partial}{\partial p_{\ell}} b(x,u(x)\,,\nabla u(x))\,,\ \ell=1,\dots,n .$$

Pour l'équation (0.2), on a :

THEOREME 1.4. - Supposons que, sur $\Omega \setminus M$, les hypothèses du théorème 1.2. sont satisfaites et pour $x \in M$, on suppose qu'il existe $1 \leqslant k \leqslant r$ tel que

$$(0.7) \qquad X_k\varphi(x) \neq 0$$

ou bien si $\sum_{k=1}^{r} |X_k\varphi(x)| = 0$*, on suppose que*

$$\sum_{j=1}^{r} X_j^2\varphi + X_0\varphi \neq 0 .$$

Si $M = \{X_0\}$ *, on suppose qu'il existe un* $\tilde{a}_{kj} \neq 0$ *dans* $k = 1,\dots,n$ *,* $j = 0,1,\dots,r$ *, on a alors*

$$u \in C^\infty(\Omega) .$$

Les démonstrations se servent des opérateurs paradifférentiels de Bony [1]. Avec la même méthode , on peut aussi traiter un minimum local de calcul de variations. Soit :

$$(0.8) \qquad I(u) = \int_\Omega f(x,u(x)\ ,\nabla u(x))dx$$

une intégrale multiple sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f(x,z,p) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^{n+1})$ réelle, u une fonction réelle sur Ω.

Les problèmes de calcul de variations sont de trouver une fonction u qui atteint le minimum de l'intégrale (0.8) dans certains espaces de fonctions sur Ω et d'étudier la régularité de ce minimum. Dans le livre de Morrey [3] on a étudié les problèmes réguliers, c'est-à-dire que l'équation d'Euler

$$(0.9) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha f_{p_\alpha}(x,u,\nabla u) - f_z(x,u,\nabla u) = 0$$

est une équation elliptique où $f_{p_\alpha} = \frac{\partial}{\partial p_\ell} f(x,z,p)$.

Dans ce cas présent, si $u \in C^2(\Omega)$ réelle, $I(u) < +\infty$, minimise l'intégrale (0.8),

u est alors une solution de l'équation (0.9). D'après la théorie d'équations aux dérivées partielles et du théorème 1.1., on a $u \in C^\infty(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Poincaré, on a l'estimation suivante : quelque soit $x \in \Omega$, il existe une constante $C > 0$ et un voisinage compact $K \subset \Omega$, tels que

$$(0.10) \qquad I(u) + C\,\|\varphi\|_1^2 \leqslant I(u+\varphi)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$ réelle.

Il est bien connu que l'estimation (0.10) est équivalente à l'ellipticité de l'équation (0.9) et u une solution. L'ellipticité étant une condition très forte pour la régularité des solutions, on considère donc une estimation faible de style (0.10) qui implique $u \in C^\infty$. On a alors le résultat suivant :

<u>THEOREME</u> <u>1.5.</u> - *Soit u une fonction réelle de $C^3(\Omega)$, supposons qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :*

1) $I(u) < +\infty$

2) Pour tout $x \in \Omega$, il existe un voisinage K de x dans Ω, et deux constantes $C > 0$, $1 \geqslant \varepsilon > 0$ tels que

$$(0.11) \qquad I(u) + C\,\|\varphi\|_\varepsilon^2 \leqslant I(u+\varphi)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$ réelle, on a alors $u \in C^\infty(\Omega)$.

Si u est une solution de l'équation (0.9) satisfaisant les hypothèses du théorème 1.1., on peut obtenir l'estimation (0.11). De plus, si l'équation (0.9) peut s'écrire sous la forme (0.2), l'estimation (0.11) implique que le système de champs de vecteurs $\{X_1,\dots,X_r\}$ satisfait la condition du théorème 1.2.

Dans la section 1.1., on rappelle les résultats principaux sur les opérateurs paradifférentiels de J-M. Bony [1]. Dans la section 1.2., on construit des estimations a priori pour des opérateurs paradifférentiels. Dans la section 1.3., on démontre les théorèmes 1.1. et 1.2. ; les théorèmes 1.3. et 1.4. seront démontré dans la section 1.4. Dans la section 1.5., on démontre le théorème 1.5., et on étudie l'estimation (0.11) dans la section 1.6.

§.1.1. Equation paradifférentielle.

Nous faisons ici un minimum de rappels sur les opérateurs paradifférentiels de Bony, pour les détails, nous renvoyons à [1].

Soit $\ell(x,\xi)$ une fonction homogène de degré m en ξ, C^∞ en $\xi \neq 0$, à support compact en x et de classe C^ρ en x, $\rho > 0$, on définit l'opérateur T_ℓ de la manière suivante :

$$(1.1) \qquad \widehat{T_\ell u}(\xi) = (2\pi)^{-n} \int \chi(\xi-\eta,\eta)\ \hat{\ell}(\xi-\eta,\eta)\ s(\eta)\ \hat{u}(\eta)d\eta$$

où $\chi(\theta,\eta)$ est une fonction de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, homogène de degré 0 et vérifiant pour $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ assez petit

$$\begin{cases} \chi(\theta,\eta) = 1 & \text{pour} \quad |\theta| \leqslant \varepsilon_1 |\eta| \\ \chi(\theta,\eta) = 0 & \text{pour} \quad |\theta| \geqslant \varepsilon_2 |\eta| \end{cases}$$

$s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ réelle, $s(x) = 0$ au voisinage de 0, $s(x) = 1$ en dehors d'un compact. $\hat{\ell}(\xi,\eta)$ est la transformée de Fourier de $\ell(x,\xi)$ par rapport à x. T_ℓ applique alors continûment H^s dans H^{s-m} et une modification du choix de χ et s pour T_ℓ ne modifie cet opérateur que par addition d'un opérateur $(\rho-m)$-régularisant.

DEFINITION 2. - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $\Sigma^m_\rho(\Omega)$, pour $m \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$ non entier, l'ensemble des fonctions $\ell(x,\xi)$ définies sur $\Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et de la forme suivante

$$(1.2) \qquad \ell(x,\xi) = \ell_m(x,\xi) + \dots + \ell_{m-[\rho]}(x,\xi)$$

où $\ell_{m-k}(x,\xi)$ est homogène de degré $(m-k)$ en ξ de classe C^∞ en $\xi \neq 0$, et $C^{\rho-k}_{loc}(\Omega)$ en x.

Il est clair que si $\ell(x,\xi)$ est à support compact en x, on peut alors définir $T_\ell = \sum_{j=m}^{m-[\rho]} T_{\ell j}$. C'est aussi un opérateur continu de H^s dans H^{s-m}.

DEFINITION 3. - Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et L une application linéaire de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans lui-même à support propre. On dit que L est un opérateur paradifférentiel d'ordre m et de classe C^ρ dans Ω et que l'on notera $L \in Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega)$. S'il existe $\ell \in \Sigma^m_\rho(\Omega)$ tel que, pour tout compact $K \subset \Omega$, pour tout $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ égale à 1 au voisinage de K, l'opérateur $L - \chi T_{\chi\ell}$ applique continûment $H^s_{comp}(K)$ dans $H^{s-m+\rho}(\Omega)$.

Il est évident que si $L \in Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega)$, L applique alors $H^s_{loc}(\Omega)$ dans $H^{s-m}_{loc}(\Omega)$. On notera $\sigma(L) = \ell$, le symbole de L, $\sigma_m(L) = \ell_m$ le symbole principal de L. Le symbole de L est unique. On a de plus que l'application de symbole

$$\sigma : Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega) \longrightarrow \Sigma^m_\rho(\Omega)$$

est surjective, son noyau est les opérateurs de $(\rho-m)$-régularisant. Tout le calcul pseudo-différentiel classique peut s'étendre à ces opérateurs. On donne quelques résultats que l'on utilisera pour démontrer nos théorèmes. Les démonstrations sont dans [1].

LEMME 1.1. - a) Soit $L_j \in Op(\Sigma^{m_j}_\rho)(\Omega)$, $j = 1,2$, on a

$$L_1 \circ L_2 \in Op(\Sigma^{m_1+m_2}_\rho)(\Omega)$$

où $L_1 \circ L_2 = L + R$, L est un opérateur paradifférentiel de symbole

$$\ell(x,\xi) = \sum_{k_1+k_2+|\alpha| \leq [\rho]} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi \ell^1_{m_1-k_1} D^\alpha_x \ell^2_{m_2-k_2}$$

et R un opérateur d'ordre $(m_1 + m_2 - \rho)$.

b) Si $L \in Op(\Sigma^m_\rho)(\Omega)$ *, il en est de même de son adjoint* L^* *et on a :*

$$\sigma(L^*) = \sum_{k+|\alpha|\leqslant[\rho]} \frac{1}{\alpha!}\, \partial^\alpha_\xi\, D^\alpha_x\, \overline{\ell}_{m-k}\,.$$

En particulier, si $L \in Op(\Sigma^1_\ell)(\Omega)$ *et* $\sigma(L) = \ell_1(x,\xi)$ *,* $\overline{\ell_1(x,\xi)} = -\,\ell_1(x,\xi)$ *, on a :*

$$L^* = -\,L + C$$

où $C \in Op(\Sigma^0_{\rho-1})(\Omega)$ *pour* $\rho > 1$.

c) Soient $L_j \in Op(\Sigma^{m_j}_\rho)(\Omega)$ *,* $j = 1,2$ *,* $\rho > 1$ *, on a :*

$$[L_1, L_2] \in Op(\Sigma^{m_1+m_2-1}_{\rho-1})(\Omega)$$

et pour le symbole principal, on a :

$$\sigma_{m_1+m_2-1}([L_1,L_2]) = \frac{1}{i}\left\{\sigma_{m_1}(L_1)\,,\,\sigma_{m_2}(L_2)\right\}$$

en particulier si $\sigma(L_j) = \varphi_j(x) \in C^\rho_{loc}(\Omega)$ *,* $j = 1,2,$ *on a alors* $[\varphi_1,\varphi_2]$ *un opérateur* ρ*-régularisant.*

Pour une fonction $\ell \in \Sigma^m_\rho(\Omega)$, on peut également définir un opérateur pseudo-différentiel. Entre ces deux classes d'opérateurs, on a :

<u>LEMME</u> <u>1.2.</u> *- a) Soit* $\ell(x,\xi)$ *homogène en* ξ *de degré* m*, de classe* C^∞ *en* $\xi \neq 0$ *, et* C^ρ *en* x*, à support compact en* x*, avec* $\rho > m$ *, alors l'opérateur* $L(x,D) - T_\ell$ *applique continûment* L^2 *dans* L^2.

b) Si de plus ℓ *est de classe* C^∞ *en* x *alors* $\ell(x,D) - T_\ell$ *est infiniment régularisant, c'est-à-dire qu'il applique* H^s *dans* $H^{s'}$ *pour tout* $s, s' \in \mathbb{R}$.

Le lien fondamental entre opérateurs para-différentiels et équations aux dérivées partielles non-linéaires vient des résultats suivants. Soit

$$
\begin{aligned}
&F(x,u,\ldots,\partial^{\beta}u,\ldots)_{|\beta|\leqslant m}\\
(1.3)\qquad &= \sum_{k_0<k\leqslant m}\ \sum_{|\alpha|=k} A_{\alpha}(x,u,\ldots,\partial^{\beta}u,\ldots)_{|\beta|\leqslant p(k)}\ \partial^{\alpha}u\\
&+ A_{k_0}(x,u,\ldots,\partial^{\beta}u,\ldots)_{|\beta|\leqslant k_0} = 0
\end{aligned}
$$

une équation non-linéaire d'ordre m, où F est réelle et de classe C^{∞}, où on peut supposer $p(k) < k$, en convenant que $p(k) = -\infty$ lorsque les A_{α} correspondants ne dépendent que de x. On pose alors :

$$d = \max\left(k_o\,, \frac{k+p(k)}{2} \right).$$

LEMME *1.3.* *- Soit u une fonction réelle de $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$, avec $\rho > max(K_o,p(K))$, posons :*

$$(1.4)\qquad p(x,\xi) = \sum_{|\beta| > 2d-\rho} \frac{\partial F}{\partial u_{\beta}}\,(x,u(x),\ldots)(i\,\xi)^{\beta},$$

on a alors $p \in \Sigma^{m}_{\rho+m-2d}(\Omega)$.

Maintenant, on peut associer à l'équation non linéaire (1.3) une équation paradifférentielle linéaire. C'est le point de départ de la démonstration des théorèmes 1.1., 1.2., 1.3. et 1.4., parce que nous obtenons une équation linéaire équivalente, on a :

THEOREME *1.6.* *- Soit u une fonction réelle appartenant à $C^{\rho}_{loc}(\Omega) \cap H^{s}_{loc}(\Omega)$ avec $\rho > max(k_0,p(k))$, $s > 0$. Soit P l'opérateur paradifférentiel de symbole $\sigma(P) = p(x,\xi)$ défini par (1.4). Si $\rho > d$, et u une solution de (1.3), on a $P\,u \in C^{2\rho-2d}_{loc}(\Omega) \cap H^{s+\rho-2d}_{loc}(\Omega)$.*

La démonstration est une modification de celle du théorème 5.3 de J-M. Bony [1].

Nous rappelons d'abord la caractérisation des espaces H^s et C^ρ à l'aide des décompositions << en couronnes dyadiques >>.

Soit $K > 1$, on définit les couronnes dyadiques C_j, $j \in \mathbb{N}$, par

$$C_j = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \ ; \ K^{-1}\ 2^j \leqslant |\xi| \leqslant K\ 2^{j+1}\right\}.$$

On désigne par $B(0,R)$ la boule $\{|\xi| \leqslant R\}$. On a alors les propriétés suivantes :

PROPOSITION 1.1. - *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a) $u \in C^\alpha$.

b) Il existe une décomposition $u = u_{-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ *telle que* $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset C_p$ *et* $\|u_p\|_{L^\infty} \leqslant C\ 2^{-p\alpha}$.

c) Il existe une décomposition $u = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$ *telle que* $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset B(0, K\ 2^p)$ *et* $\|u_p\|_{L^\infty} \leqslant C\ 2^{-p\alpha}$.

d) Il existe une décomposition $u = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$, $u_p \in C^\infty$ *telle que, quelque soit* $\lambda \in \mathbb{N}^n$, *il existe* $C_\lambda > 0$, $\|D^\lambda u_p\|_{L^\infty} \leqslant C_\lambda\ 2^{-p(\alpha-|\lambda|)}$.

Pour les espaces de Sobolev, on a :

PROPOSITION 1.2. - *Soit* $s > 0$, *on a l'équivalence entre les propriétés suivantes :*

a)' $u \in H^s$.

b)' $u = u_{-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$, $\|u_p\|_{L^2} \leqslant c_p\ 2^{-ps}$ *et* $(c_p) \in \ell^2$, $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset C_p$.

c)' $u = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$, $\|u_p\|_{L^2} \leqslant C_p\, 2^{-ps}$, $(C_p) \in \ell^2$ *et* $\operatorname{supp} \hat{u}_p \subset B(0, k\, 2^p)$.

d)' $u = \sum_{p=0}^{+\infty} u_p$, $u_p \in C^\infty$ *quelque soit* $\lambda \in \mathbb{N}^n$, *il existe* $(C_{\lambda,p}) \in \ell^2$ *tel que*

$\|D^\lambda u_p\|_{L^2} \leqslant C_{\lambda,p}\, 2^{-p(s-|\lambda|)}$.

En effet, on a une partition de l'unité :

$$1 = \psi(\xi) + \sum_0^\infty \varphi(2^{-j}\xi) \tag{1.5}$$

où φ *et* ψ *appartiennent à* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, *le support de* φ *étant contenu dans la couronne* C_0 *et celui de* ψ *dans la boule* $B(0,1)$. *On a la décomposition « canonique » suivante :*

$$\begin{aligned} u &= u_{-1} + \sum_0^\infty u_j = \psi(D)u + \sum_0^\infty \varphi(2^{-j}D)u \\ u_{-1} &+ \sum_0^{p-1} u_j = \psi(2^{-p}D)u . \end{aligned} \tag{1.6}$$

On peut maintenant démontrer le théorème 1.6.

Démonstration du théorème 1.6. : Il suffit bien entendu de démontrer le théorème lorsque $F(x,u,\ldots)$ est réduit à un seul terme

$$F(x,u,\ldots) = A_\alpha(x,u,\ldots,\partial^\beta u,\ldots)_{|\beta|\leqslant p(k)}\, \partial^\alpha u, \quad |\alpha| = k .$$

Nous distinguerons trois cas ; les décomposition suivantes sont canoniques.

1er cas : $k \leqslant 2d - \rho$.

Dans ce cas là, $p(x,\xi) = 0$, on doit donc démontrer $F(x,u,\ldots) \in C^{2\rho-2d}_{loc} \cap H^{s+\rho-2d}_{loc}$, comme $\partial^\alpha u \in C^{\rho-k}_{loc} \cap H^{s-k}_{loc}$ avec $\rho - k \geqslant 2\rho - 2d > 0$ et $A_\alpha \in C^{\rho-p(k)}_{loc} \cap H^{s-p(k)}_{loc}$,

$\rho - p(k) > \rho - k \geqslant 2\rho - 2d > 0$, on a $F \in C^{2\rho-2d}_{loc}$. Pour démontrer $F \in H^{s+\rho-2d}_{loc}(\Omega)$ on suppose pour simplifier, des fonctions ayant un support compact. On a alors

$$F(x,u,\dots) = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (A_\alpha)_p\, (\partial^\alpha u)_q + \sum_{-1\leqslant q\leqslant p-N_0} (\partial^\alpha u)_q\, (A_\alpha)_p \tag{1.7}$$
$$+ \sum_{|r|\leqslant N_0} \sum_q (A_\alpha)_{q+r}\, (\partial^\alpha u)_q .$$

On vérifie la condition c)' de la proposition 1.2.

$$\operatorname{supp}\left(\widehat{\Big(\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (A_\alpha)_p\Big)(\partial^\alpha u)_q} \right) \subset B(0, K\, 2^{q+1})$$
$$\operatorname{supp}\left(\widehat{\Big(\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (\partial^\alpha u)_q\, (A_\alpha)_p\Big)} \right) \subset B(0, K\, 2^{p+1})$$
$$\operatorname{supp}\left(\widehat{(A_\alpha)_{q+r}\, (\partial^\alpha u)_q} \right) \subset B(0, K\, 2^{q+|r|+1}) .$$

$$\left\| \Big(\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (A_\alpha)_p\Big)(\partial^\alpha u)_q \right\|_{L^2} \leqslant \left\| \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (A_\alpha)_p \right\|_{L^\infty} \| (\partial^\alpha u)_q \|_{L^2}$$
$$\leqslant C \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} 2^{-p(\rho-p(K))}\, C_q\, 2^{-q(s-K)}$$
$$\leqslant C\, C_q\, 2^{-q(s-K)} .$$

$$\left\| \Big(\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (\partial^\alpha u)_p\Big)(A_\alpha)_q \right\|_{L^2} \leqslant \left\| \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (\partial^\alpha u)_p \right\|_{L^\infty} \| (A_\alpha)_q \|_{L^2}$$
$$\leqslant C \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} 2^{-p(\rho-K)}\, C_q\, 2^{-q(s-p(K))}$$
$$\leqslant C\, C_q\, 2^{-q(s-p(K))}$$

$$\| (A_\alpha)_{q+r} \ (\partial^\alpha u) \|_{L^2} \leqslant \| (A_\alpha)_{q+r} \|_{L^\infty} \ \| (\partial^\alpha u)_q \|_{L^2}$$

$$\leqslant C \ 2^{-(q+r)(\rho-p(K))} \ C_q \ 2^{--q(s-K)}$$

$$\leqslant C \ C_q \ 2^{-q(s+\rho-p(K)-K)} \ .$$

On a donc $F(x,u,\ldots) \in H^{s+\rho-2d}_{loc}$.

2ème cas : $k > 2d-\rho$ et $\rho - K < 0$.

Dans (1.7), pour le dernier terme, on a $\displaystyle\sum_{|r|<N_0} \sum_q (A_\alpha)_{q+r} \ (\partial^\alpha u)_q \in H^{s+\rho-2d}$

$$\left\| \Big(\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (\partial^\alpha u)_p \Big) (A_\alpha)_q \right\|_{L^2} \leqslant \left\| \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (\partial^\alpha u)_p \right\|_{L^\infty} \| (A_\alpha)_q \|_{L^2}$$

$$\leqslant C \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} 2^{-q(\rho-K)+p(\rho-K)} \ C_q \ 2^{-q(s+\rho-2d)}$$

$$\leqslant C \ C_q \ 2^{-q(s+\rho-2d)} \ .$$

On a donc $F(x,u,\ldots) = T'_{A_\alpha} \ \partial^\alpha u + v$, $v \in H^{s+\rho-2d}$ où $T'_{A_\alpha} \ \partial^\alpha u = \displaystyle\sum_{-1\leqslant p\leqslant q-N_0} (A_\alpha)_p (\partial^\alpha u)_q$,

mais d'après le théorème 2.1 de [1], on a $T'_{A_\alpha} - T_{A_\alpha}$ $(\rho-p(K))$-régularisant, l'opérateur $T_{A_\alpha} \ \partial^\alpha u$ ayant pour symbole $A_\alpha(i\,\xi)^\alpha$ cela démontre le théorème dans le second cas.

3ème cas : $k > 2d-\rho$ et $\rho - k > 0$.

La même conclusion pour le troisième terme dans (1.7) et $T_{A_\alpha} \ \partial^\alpha u$ ayant pour symbole $A_\alpha(i\,\xi)^\alpha$ pour le deuxième terme. Si on a :

$$A_\alpha(x,u,\ldots) = \sum_{|\beta|\leqslant p(K)} T'_{\frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}} \ \partial^\beta u + v \tag{1.8}$$

et $v \in C^{2(\rho-p(K))} \cap H^{s+\rho-2p(K)}$ on a alors :

$$T_{\partial^\alpha u} A_\alpha(x,u,\dots) = \sum_{|\beta|\leq p(K)} T_{\partial^\alpha u \frac{\partial A_\alpha}{\partial u_\beta}} \partial^\beta u + v'$$

et $v \in C^{2(\rho-d)} \cap H^{s+\rho-2d}$. Cela démontre le théorème dans le troisième cas modulo (1.8). Pour (1.8) on a :

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*1.3.*</u> *- Soit* $u=(u_1,\dots,u_\ell) \in C^\rho \cap H^s$ *réelle,* $\rho, s>0$, $F \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^\ell)$. *On a alors :*

$$F(x,u_1,\dots,u_\ell) = \sum_{j=1}^{\ell} T'_{\frac{\partial F}{\partial u_j}} u_j + R \tag{1.9}$$

et $R \in C^{2\rho} \cap H^{s+\rho}$.

<u>Démonstration</u> : On peut supposer, sans restreindre la généralité, que F est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^{n+\ell}$, et à support compact. Montrons que l'on peut se ramener au cas particulier où F ne dépend pas de x .

Soit en effet $K_1 \subset \mathbb{R}^n$ un compact hors duquel les u_j et $F(x,u)$ sont nulles. Soit $v_j \in C_0^\infty$, $j=1,\dots,n$ égale à x_j au voisinage de K_1 , en supposant (1.9) démontré dans les cas particuliers, on aurait :

$$F(v,u) - \sum T'_{\frac{\partial F}{\partial u_j}} u_j - \sum T'_{\frac{\partial F}{\partial v_j}} v_j \in C^{2\rho} \cap H^{s+\rho}$$

et donc (1.9) dans le cas général, compte tenu du fait que $T'_{\frac{\partial F}{\partial v_j}} v_j$ est de classe C^∞ , et des égalités

$$F(v,u) = F(x,u) \ , \ \frac{\partial F}{\partial u_j}(v,u) = \frac{\partial F}{\partial u_j}(x,u) \ .$$

Supposons donc maintenant que F ne dépend que de $(u_1,\dots,u_\ell)$. Pour simplifier, on suppose encore $\ell = 1$. On va démontrer que l'on a la décomposition suivante qui vérifie la condition d)' de la proposition 1.2.

(1.10)
$$F(u) - T'_{F'(u)}\,u = \sum_{-1\leq p} a_p \,.$$

On désigne par $S_q(f)$ la somme finie $\sum_{-1\leq p\leq q-1} f_p$, si $f = \sum_{-1\leq p} f_p$ $(S_{-1}(f) = 0)$, on a $F(u) = \lim_{q\to+\infty} F(S_q(u))$ car $S_q(u) \to u$ dans L^∞. En posant $v_q = F(S_q(u) + u_q) - F(S_q(u))$, on a $F(u) = \sum_{-1\leq p} v_p$ et $T_{F'(u)}\,u = \sum_q S_{q-N_0}(F'(u))u_q$. On a alors :

$$a_q = F(S_q(u) + u_q) - F(S_q(u)) - S_{q-N_0}(F'(u))u_q \,.$$

On a d'abord $a_q \in C^\infty$. On va estimer $D^\alpha a_p$ dans L^∞ et L^2, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $p \in \mathbb{N}$.

En utilisant la formule de Taylor, on a :

$$F(S_q(u) + u_q) = F(S_q(u)) + F'(S_q(u))u_q + g_q\, u_q^2$$

où

$$g_q(x) = \int_0^1 F''(S_q(u)(x) + t\,u_q(x))\,(1-t)dt$$

on a alors :

(1.11)
$$a_q = g_q u_q^2 + \Big[F'(S_q(u))u_q - S_{q-N_0}(F'(u))u_q \Big].$$

On estime d'abord $D^\alpha g_q u_q^2$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $q \in \mathbb{N}$,

$$D^\alpha g_q u_q^2 = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha} C_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\, D^{\alpha_1} g_q D^{\alpha_2} u_q D^{\alpha_3} u_q \,,$$

On a donc

$$\| D^{\alpha} g_q u_q^2 \|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha \sum \| D^{\alpha_1} g_q \|_{L^\infty} \| D^{\alpha_2} u_q \|_{L^\infty} \| D^{\alpha_3} u_q \|_{L^\infty}$$

$$\leqslant C'_\alpha \sum \| D^{\alpha_1} g_q \|_{L^\infty} 2^{-q(\rho-|\alpha_2|)} 2^{-q(\rho-|\alpha_3|)}$$

$$\| D^{\alpha} g_q u_q^2 \|_{L^2} \leqslant C_\alpha \sum \| D^{\alpha_1} g_q \|_{L^\infty} \| D^{\alpha_2} u_q \|_{L^\infty} \| D^{\alpha_3} u_q \|_{L^2}$$

$$\leqslant C_\alpha \sum \| D^{\alpha_1} g_q \|_{L^\infty} C_{\alpha_1} 2^{-q(\rho-|\alpha_2|)} C_{\alpha_3 q} 2^{-q(s-|\alpha_3|)}$$

où $(C_{\alpha_3,q}) \in \ell^2$, pour $\alpha_3 \in \mathbb{N}^n$.

Nous devons donc estimer $\| D^{\alpha_1} g_q \|_{L^\infty}$ en notant $W_q^t(x) = s_q(u)(x) + t\, u_q(x)$.

On a :

$$D^{\alpha_1} g_q(x) = \int_0^1 D^{\alpha_1} F''(W_q^t(x))(1-t)dt$$

$$D^{\alpha_1} F''(W_q^t(x)) = \sum_{\ell \geqslant 1} \sum_{\overline{r_1+\ldots+r_\ell=\alpha}} F^{(\ell+2)}(W_q^t(x)) \prod_{j=1}^{\ell} D^{r_j} W_q^t(x)$$

(si $|\alpha_1| = 0$ on a $\| g_q \|_{L^\infty} \leqslant C$).

$$\| D^{r_j} W_q^t(x) \|_{L^\infty} \leqslant \| D^{r_j} s_q(u) \|_{L^\infty} + \| D^{r_j} u_q \|_{L^\infty}$$

$$\leqslant C_{r_j} 2^{q|r_j|} + C_{r_j} 2^{-q(\rho-|r_j|)}$$

$$\leqslant C_{r_j} 2^{q|r_j|} \qquad (\rho > 0)$$

de plus $\| F^{(\ell+2)}(W_q^t(x) \|_{L^\infty} \leqslant C_\ell$.

On a obtenu :

$$\| D^\alpha g_q u_q^2 \|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha \, 2^{-q(2\rho-|\alpha|)}$$

$$\| D^\alpha g_q u_q^2 \|_{L^2} \leqslant C_{\alpha,q} \, 2^{-q(s+\rho-|\alpha|)}$$

où $(C_{\alpha,q}) \in \ell^2$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

On estime maintenant le deuxième terme de (1.11).

$$D^\alpha\Big[(F'(s_q(u)) - s_{q-N_0}(F'(u)))u_q\Big] = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{\alpha_1\,\alpha_2} D^{\alpha_1}(F'(s_q(u)) - s_{q-N_0}(F'(u)))D^{\alpha_2} u_q \,.$$

On peut seulement estimer $\| D^\alpha(F'(s_q(u)) - s_{q-N_0}(F'(u)))\|_{L^\infty}$.

On distingue deux cas :

a) $|\alpha| < \rho$.

$$\begin{aligned} & F'(s_q(u)) - s_{q-N_0}(F'(u)) \\ & = [F'(s_q(u)) - F'(u)] + [F'(u) - s_{q-N_0}(F'(u))] \\ & = A_q + B_q \,. \end{aligned}$$

Comme $F'(u) \in C^\rho$, $D^\alpha(F'(u)) \in C^{\rho-|\alpha|}$, $\rho - |\alpha| > 0$,

$$\| D^\alpha B_q \|_{L^\infty} = \| D^\alpha(F'(u) - S_{q-N_0}(F'(u)))\|_{L^\infty}$$

$$= \| D^\alpha F'(u) - s_{q-N_0}(D^\alpha F'(u))\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{q-N_0 \leqslant p} \| (D^\alpha F'(u))_p \|_{L^\infty}$$

$$\leqslant C_\alpha \sum_{q-N_0 \leqslant p} 2^{-p(\rho-|\alpha|)} = C'_\alpha \, 2^{-q(\rho-|\alpha|)} \qquad (\rho - |\alpha| > 0) \,.$$

$$D^\alpha A_q = \sum_{\ell\geq 0} \sum_{\overline{\alpha_1+\ldots+\alpha_\ell=\alpha}} \left(F^{(\ell+1)}(s_q(u)) \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u) - F^{(\ell+1)}(u) \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} u\right).$$

Si $|\alpha| = 0$, $\ell = 0$, on a $\|A_q\|_{L^\infty} = \|F'(s_q(u)) - F'(u))\|_{L^\infty} \leq \|s_q(u) - u\|_{L^\infty}$.

• $\sup_{t,x} |F^{(2)}(W_q^t(x))| \leq C \sum_{q\leq p} 2^{-p\rho} = C\, 2^{-q\rho}$, $(\rho > 0)$ pour $\ell \geq 1$, on a :

$$D^\alpha A_q = \sum_{\ell\geq 1} \sum_{\overline{\alpha_1+\ldots+\alpha_\ell=\alpha}} \Big[F^{(\ell+1)}(s_q(u)) \Big(\prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u) - \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} u\Big)$$

$$+ (F^{(\ell+1)}(s_q(u)) - F^{(\ell+1)}(u)) \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} u\Big],$$

mais on a :

$$\prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u) - \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} u = (D^{\alpha_1} s_q(u) - D^{\alpha_1}(u)) \prod_{j=2}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u)$$

$$+ D^{\alpha_1} u\, (D^{\alpha_2} s_q(u) - D^{\alpha_2} u) \prod_{j=3}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u) + \ldots + (D^{\alpha_\ell} s_q(u) - D^{\alpha_\ell} u) \prod_{j=1}^{\ell-1} D^j u ,$$

de plus

$$\|D^{\alpha_j} s_q(u) - D^{\alpha_j} u\|_{L^\infty} \leq C\, 2^{-q(\rho-|\alpha_j|)} \qquad (\rho - |\alpha_j| > 0)$$

$$\|D^{\alpha_j} s_q(u)\|_{L^\infty} \leq C_{\alpha_j}\, 2^{q|\alpha_j|}$$

$$\|D^{\alpha_j} u\|_{L^\infty} \leq C \quad \|F^{(\ell+1)}(s_q(u))\|_{L^\infty} \leq C$$

$$\|F^{(\ell+1)}(s_q(u)) - F^{(\ell+1)}(u)\|_{L^\infty} \leq \|s_q(u) - u\|_{L^\infty} \sup_{t,x} |F^{(\ell+2)}(W_q^t(x))|$$

$$\leq C_\ell\, 2^{-q\rho} \qquad (\rho > 0).$$

On a obtenu $\|D^\alpha A_q\| \leq C_\alpha\, 2^{-q(\rho-|\alpha|)}$ d'où

$$(1.12)\qquad \begin{aligned} &\| D^\alpha a_q \|_{L^2} \leqslant C_{\alpha,q}\ 2^{-q(s+\rho-|\alpha|)} \\ &\| D^\alpha a_q \|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha\ 2^{-q(2\rho-|\alpha|)} \end{aligned}$$

où $(C_{\alpha,q}) \in \ell^2$, pour $|\alpha| < \rho$.

b) $|\alpha| > \rho$.

$$\| D^\alpha (F'(s_q(u)) - s_{q-N_0}(F'(u))) \|_{L^\infty}$$

$$\leqslant \| D^\alpha F'(s_q(u)) \|_{L^\infty} + \| D^\alpha s_{q-N_0}(F'(u)) \|_{L^\infty}.$$

Comme $F'(u) \in C^\rho$ et $|\alpha| > \rho$ on a :

$$\| D^\alpha s_{q-N_0}(F'(u)) \|_{L^\infty} \leqslant C_\alpha \sum_{-1 \leqslant p \leqslant q-N_0} 2^{-p(\rho-|\alpha|)}$$

$$\leqslant C'_\alpha\ 2^{-q(\rho-|\alpha|)} ,$$

$$D^\alpha F'(s_q(u)) = \sum_{\ell \geqslant 1} \sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_\ell=\alpha} F^{(\ell+1)}(s_q(u)) \prod_{j=1}^{\ell} D^{\alpha_j} s_q(u) ,$$

$$\| D^{\alpha_j} s_q(u) \|_{L^\infty} \leqslant C_{\alpha_j} \sum_{-1 \leqslant p \leqslant q} 2^{-p(\rho-|\alpha_j|)} ,$$

Si $\rho - |\alpha_j| > 0$,

$$\sum_{-1 \leqslant p \leqslant q} 2^{-p(\rho-|\alpha_j|)} < C .$$

Si $(\rho - |\alpha_j|) < 0$,

$$\sum_{-1 \leqslant p \leqslant q} 2^{-p(\rho-|\alpha_j|)} \leqslant C\ 2^{-q(\rho-|\alpha_j|)} .$$

mais $1 < 2^{-q(\rho-|\alpha|)}$. On a obtenu

$$\| D^{\alpha} F'(s_q(u)) \|_{L^\infty} \leq C\, 2^{-q(\rho-|\alpha|)}$$

d'où (1.12) pour $|\alpha| > \rho$. En utilisant la proposition 1.2, on termine la démonstration de la proposition 1.3.

On peut maintenant considérer les problèmes pour l'équation (0.1) : $d = \frac{3}{2}$. Soit u une fonction réelle de C^{ρ}_{loc}, $\rho > 3$. On a comme dans le lemme 1.3.

$$p(x,\xi) = p_2(x,\xi) + p_1(x,\xi) + p_0(x) \tag{1.13}$$

où

$$p_2(x,\xi) = \sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)(i\,\xi_k)(i\,\xi_j) \quad , \quad p_1(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{b}_{\ell}(x)(i\,\xi_{\ell})$$

$$p_0(x) = \frac{\partial F}{\partial z}(x,u(x),\nabla u(x),\nabla^2 u(x))$$

$$\tilde{b}_{\ell}(x) = \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_{\ell}} a_{kj}(x,u(x),\nabla u(x))\,\partial^2_{kj}u(x) + \frac{\partial}{\partial p_{\ell}} b(x,u(x),\nabla u(x)) .$$

Soit P l'opérateur paradifférentiel associé à $p(x,\xi)$. P s'écrit alors en

$$\begin{aligned} P &= \sum_{kj=1}^{n} \partial_k A_{kj}\, \partial_j + \sum_{\ell=1}^{n} B_{\ell}\, \partial_{\ell} + P_0 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \partial_k Q_k + Q_0 + P_0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

où Q_k, $k = 0,\dots,n$ sont les opérateurs paradifférentiels de symboles $g_k(x,\xi)$, définis par (0.4). En vertu du théorème 1.6., si u est une solution réelle de (0.1) de classe $C^{\rho}_{loc} = C^{\rho}_{loc} \cap H^3_{loc}$, on a alors

$$Pu = g \in H^{\rho}_{loc}(\Omega) \cap C^{\rho}_{loc}(\Omega) \tag{1.15}$$

Pour l'équation (0.2), $d = 1$, on suppose $\rho > 2$, on a :

$$\ell(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}_{\alpha j}\, \tilde{a}_{\beta j}\, (i\,\xi_\alpha\,(i\,\xi_\beta) \right)$$

$$\tag{1.16} \begin{aligned} &+ \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}_{\alpha j}\, \partial_z\, \tilde{a}_{\beta j}\, \partial_\alpha\, u\,(i\,\xi_\beta) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}_{\alpha j}\, \partial_z\, \tilde{a}_{\beta j}\, \partial_\beta\, u\,(i\,\xi_\alpha) \right) \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{a}_{\alpha j}\, \partial_{x_\alpha}\, a_{\beta j}\, (i\,\xi_\beta) \right) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{a}_{\alpha_0}\, (i\,\xi_\alpha) + P_0(x)\,. \end{aligned}$$

On a alors $\ell(x,\xi) \in \Sigma_\rho^2(\Omega)$. Soit L l'opérateur paradifférentiel de symbole $\ell(x,\xi)$, il s'écrit :

$$\tag{1.17} L = \sum_{j=1}^{r} Y_j^2 + Y_0 + Y_0' + P_0$$

où Y_j , $j = 0,1,\dots,r$ sont les opérateurs paradifférentiels de symbole $X_j(x,\xi)$, et $Y_0' = \sum_{j=1}^{r} A_j\, Y_j$, A_j associés aux symboles $a_j(x) = \sum_{\beta=1}^{n} \partial_j\, \tilde{a}_{\beta j}\, \partial_\beta\, u(x) \in C_{loc}^{\rho-1}(\Omega)$.
Donc si u est une solution de (0.2) de classe $C_{loc}^{\rho}(\Omega)$, $\rho > 2$,

$$\tag{1.18} Lu = f \in C_{loc}^{\rho}(\Omega) \cap H_{loc}^{\rho}(\Omega)\,.$$

Il est clair que pour gagner de la régularité sur u , on peut construire les estimations a priori pour les opérateurs linéaires (1.14) et (1.17) comme pour les opérateurs pseudo-différentiels. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante.

§.1.2. Estimation a priori pour les opérateurs paradifférentiels.

Dans cette section, on va construire les estimations a priori pour les opérateurs paradifférentiels (1.14) et (1.17). C désignera diverses constantes.

PROPOSITION 1.4. - Soit R un opérateur paradifférentiel de $Op\in(\Sigma^r_\sigma)(\Omega)$, $\sigma > 2$, P l'opérateur (1.14), on a alors :

$$[P,R] = \sum_{j=1}^{2n} R_j\, Q_j + R_0 \tag{2.1}$$

où Q_j, $j=1,\dots,2n$ sont les opérateurs paradifférentiels associés au symbole $g_j(x,\xi)$ défini dans (0.4) et $R_j \in Op(\Sigma^r_{\sigma-1})(\Omega)$, $j=1,\dots,2n$, et où $\tilde{\rho} = min\{\rho-3, \sigma-2\}$, $R_0 \in Op(\Sigma^r_{\tilde{\rho}})(\Omega)$.

Démonstration : En effet, $P = P_2 + P_1 + P_0$,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\sigma(P_2) = \sigma(Q_k) \quad , \quad k=1,\dots,n$$

$$|\xi|^{-1}\frac{\partial}{\partial x_\ell}\sigma(P_2) = \sigma(Q_{n+\ell}) \quad , \quad \ell = 1,\dots,n$$

de plus

$$|\xi|\frac{\partial}{\partial\xi_k}\sigma(R) \in \Sigma^r_\sigma(\Omega) .$$

D'après le lemme 1.1, on a donc :

$$\sigma([P_2,R]) = \sum_{k=1}^{n}\left(D_{x_k}\sigma(R)\,\sigma(Q_k) - |\xi|\frac{\partial}{\partial\xi_k}\sigma(R)\,\sigma(Q_{n+k})\right) + R'$$

où $R' \in Op(\Sigma^r_{\tilde{\rho}})(\Omega)$, et $[P_1+P_0,R] \in Op(\Sigma^r_{\tilde{\rho}})(\Omega)$.

Ce qui termine la démonstration.

PROPOSITION *1.5.* – *Soient L un opérateur paradifférentiel dans (1.17), R un opérateur paradifférentiel de $Op(\Sigma^r_\sigma)(\Omega)$, $\sigma > 2$, on a alors :*

$$[L,R] = \sum_{j=1}^{r} R_j Y_j + R_0 \tag{2.2}$$

on pose $\tilde{\sigma} = min\{\sigma,\rho\}$, où R_j, $j = 1,\dots,r$ appartient à $Op(\Sigma^r_{\tilde{\sigma}-1})(\Omega)$, $R_0 \in Op(\Sigma^r_{\tilde{\sigma}-2})(\Omega)$.

Démonstration : Comme $L = \sum_{j=1}^{r} Y_j^2 + Y_0 + Y_0' + P_0$, $Y_0 + Y_0' + P_0 \in Op(\Sigma^1_{\rho-1})$ donc $[Y_0 + Y_0' + P_0, R] \in Op(\Sigma^r_{\tilde{\sigma}-2})(\Omega)$ et

$$\begin{aligned}
[Y_j^2,R] &= Y_j^2 R - R Y_j^2 \\
&= Y_j[Y_j,R] + [Y_j,R]Y_j \\
&= 2[Y_j,R]Y_j + [Y_j,[Y_j,R]]
\end{aligned}$$

on a alors :

$$L = \sum_{j=1}^{r} 2[Y_j,R]Y_j + R_0 .$$

PROPOSITION *1.6.* *(estimation d'énergie)*

Soit P l'opérateur (1.14) avec $\rho > 3$, supposons $\sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\xi_k \xi_j \geqslant 0$ pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$. On a alors pour tous $K \subset\subset \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(K,s)$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_s^2 + \| Q_0 v \|_{s-1/2}^2 \leqslant C\{\| Pv \|_s^2 + \| v\|_s^2\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

Avant la démonstration, on introduit un lemme pour les fonctions convexes.

LEMME 1.4. - Supposons $\sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k \xi_j \geq 0$, *pour* $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ *et* $a_{kj}(x) \in C^{\rho}_{loc}(\Omega)$, $\rho > 2$, *on a alors :*

$$\Big| \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} a_{kj}(x) v_{kj} \Big|^2 \leq M \sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x)\, v_{ks} v_{js}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$. *M dépendant seulement des dérivations du second ordre des* a_{kj} *sur* K, *de plus, on a :*

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k \Big|^2 \leq 2\, a_{jj}(x) \sum_{kj=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_k \xi_j$$

pour tout $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

<u>Démonstration de la proposition 1.6.</u> : On la fait en trois étapes.

a) On estime $\sum_{k=1}^{n} \| Q_k v \|_0^2$ où $Q_k = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\, \partial_j$. Comme $\tilde{a}_{kj}(x)$ sont réelles, selon le lemme 1.4. pour $v \in C_0^\infty(K)$, on a :

$$\Big| \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{kj}\, \partial_j v \Big|^2 \leq C \sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}\, \partial_k v\, \overline{\partial_j v}\,.$$

Intégrant cette inégalité

$$\sum_{j=1}^{n} \| G_j v \|_0^2 \leq C \sum_{kj=1}^{n} \Big(\tilde{a}_{kj}\, \partial_k v\,, \partial_j v \Big)$$

où G_j, $j = 1,\dots,n$ sont les opérateurs pseudo-différentiels de symbole (0.4). Comme $\tilde{a}_{kj} \in C^{\rho-1}_{ioc}(\Omega)$, $\rho > 3$ selon le lemme 1.2., on a $G_j - Q_j : L^2 \to L^2$ et $\sum_{kj=1}^{n} \partial_j (\tilde{a}_{kj} - A_{kj})\partial_k : L^2 \to L^2$ continues, on a alors :

$$\sum_{j=1}^{n} \| Q_j v \|_0^2 \leqslant C \left\{ \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_k v , \partial_j v) + \| v \|_0^2 \right\}$$

de plus

$$\operatorname{Re}(P v , v) = - \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_k v , \partial_j v) + \operatorname{Re}((G_0 + P_0) v , v)$$

mais les coefficients de symbole G_0 sont réels. On a donc :

(2.3)
$$\sum_{k,j=1}^{n} (A_{kj} \partial_k v , \partial_j v) \leqslant C \left\{ |(P v , v)| + \| v \|_0^2 \right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \| Q_j v \|_0^2 \leqslant C \left\{ |(P v , v)| + \| v \|_0^2 \right\}.$$

b) Maintenant, on estime $\sum_{j=n+1}^{2n} \| Q_j v \|_0^2$, en effet

$$Q_{n+j} = L_j \circ E^{-1} + R_0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

où $R_0 \in \operatorname{Op}(\Sigma^{o}_{\rho-3})(\Omega)$, E^{-1} opérateur propre associé au symbole $|\xi|^{-1}$, et L_j associé au symbole $\ell_j(x,\xi) = \sum_{kj=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{a}_{k\ell}(x) (i\, \xi_k) (i\, \xi_\ell)$. En vertu du lemme 1.4., on a

$$\sum_{j=1}^{n} | \ell_j(x,D) v |^2 \leqslant M \sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x) \partial^2_{ks} v \overline{\partial^2_{js} v}$$

En remplaçant v par $\partial_s v$, comme dans le cas a), on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \| L_j v \|_0^2 \leqslant C \left\{ \left| \sum_{s=1}^{n} (P \partial_s v , \partial_s v) \right| + \| v \|_1^2 \right\}.$$

Prenons maintenant $v = E^{-1} \tilde{v}$ pour $\tilde{v} \in C_0^\infty(\Omega)$ et notons $E^{o} = (-\Delta)^{1/2} E^{-1}$ selon la proposition 1.1.,

$$\sum_{j=1}^{n} \| Q_{n+j} \tilde{v} \|_0^2 \leq C \left\{ |(P E^o \tilde{v} , E^o \tilde{v})| + \|\tilde{v}\|_0^2 \right\}$$

$$\leq C \left\{ |(E^o P \tilde{v} , E^o \tilde{v})| + \|\tilde{v}\|_0^2 + \left| \sum_{j=1}^{2n} (E_j^o Q_j \tilde{v} , E^o \tilde{v}) \right| \right\} .$$

En combinant avec a), on a alors :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_0^2 \leq C \left\{ |(P v , v)| + |(E^o P v , E^o v)| + \|v\|_0^2 \right\} . \tag{2.4}$$

c) il nous reste donc $\| Q_0 v \|_{-1/2}$ à estimer, on a, en posant $E_{-1/2}$ un opérateur elliptique d'ordre $-\frac{1}{2}$,

$$(P v , E^*_{-1/2} E_{-1/2} Q_0 v) = - \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_j v , \partial_k E^*_{-1/2} E_{-1/2} Q_0 v)$$

$$+ \| E_{-1/2} Q_0 v \|_0^2 + (P_0 v , E^*_{-1/2} E_{-1/2} Q_0 v)$$

on note $R_0 = E^*_{-1/2} E_{-1/2} Q_0 \in Op(\Sigma^o_{\rho-2})(\Omega)$.

$$\| Q_0 v \|_{-1/2}^2 \leq |(P v , R_0 v)| + \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_k v , \partial_j R_0 v) \right|$$

$$+ \| v \|_0^2$$

mais la matrice $(\tilde{a}_{kj}(x))$ étant positive, on a donc, pour tout $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, $(x,\eta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$.

$$\sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x) \xi_k \xi_j \leq \frac{1}{2} \sum_{kj=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x) (\xi_k \xi_j + \eta_k \eta_j)$$

selon le lemme 1.2.

On obtient :

$$\left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj}\, \partial_k v\, ,\, \partial_j\, R_0 v) \right| \leqslant C \left\{ \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj}\, \partial_k v\, ,\, \partial_j\, v) \right| + \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj}\, \partial_k R_0\, v\, ,\partial_j\, R_0 v) \right| + \| v \|_0^2 \right\} . \tag{2.5}$$

En utilisant (2.3), la proposition 1.4 et (2.4), on a :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j\, v \|_0^2 + \| Q_0\, v \|_{-\frac{1}{2}}^2 \leqslant C \Big\{ |(P\, v\, ,v)| + \| v \|_0^2 + |(P\, v\, ,R_0\, v)| + |(R_0\, P\, v\, ,R_0\, v)| + |(E^o\, P\, v, E^o\, v)| \Big\} \tag{2.6}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

Notons E_s l'opérateur paradifférentiel de symbole $(1 + |\xi|)^s$ pour $s \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j\, v \|_s^2 + \| Q_0\, v \|_{s-\frac{1}{2}}^2$$

$$\leqslant C \left\{ \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j\, E^s v \|_0^2 + \| Q_0\, E_s v \|_{-\frac{1}{2}}^2 + \| v \|_s^2 \right\}$$

$$\leqslant C \Big\{ |(P\, E_s v\, ,\, E_s\, v)| + |(P\, E_s v\, ,\, R_0\, E_s v)| + |(R_0\, P E_s\, v\, ,R_0\, E_s v)| + |(E^o\, P E_s\, v\, ,E^o\, E_s v)| + \| v \|_s^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \left\{ \| P v \|_s^2 + \mu \| [P\, ,\, E^s] v \|_0^2 + C(\mu) \| v \|_s^2 \right\}$$

$$\leqslant C \left\{ \| P v \|_s^2 + \mu \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j\, v \|_s^2 + C(\mu) \| v \|_s^2 \right\}$$

pour $\mu > 0$ assez petit, on obtient alors :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_s^2 + \| Q_0 v \|^2_{s-\frac{1}{2}} \leq C \left\{ \| P v \|_s^2 + \| v \|_s^2 \right\}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 1.6.

Pour l'opérateur (1.17), on a le même résultat.

PROPOSITION 1.7. - Soit L l'opérateur (1.17), avec $\rho > 2$, on a alors, pour tout $K \subset\subset \Omega$, $s \in \mathbb{R}$, il existe alors une constante $C(K,s) > 0$ telle que :

$$\sum_{j=1}^{r} \| Y_j v \|_s^2 + \| Y_0 v \|^2_{s-\frac{1}{2}} \leq C \left\{ \| P v \|_s^2 + \| v \|_s^2 \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

Démonstration :

$$\mathrm{Re}(P v, v) = \mathrm{Re} \sum_{j=1}^{r} (Y_j^2 v, v) + \mathrm{Re}((Y_0 + Y_0')v, v) + \mathrm{Re}(P_0 v, v)$$

comme les coefficients sont réels, il résulte du lemme 1.1. que

$$(Y_j^2 v, v) = -(Y_j v, Y_j v) + (Y_j v, C_j v)$$

$$\mathrm{Re}((Y_0 + Y_0')v, v) = \frac{1}{2} (v, C_0 v).$$

On a donc

$$\sum_{j=1}^{r} \| Y_j v \|_0^2 \leq C \left\{ |(P v, v)| + \| v \|_0^2 \right\}$$

$$\| Y_0 v \|^2_{-\frac{1}{2}} \leq \| E_{-\frac{1}{2}} Y_0 v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \leq (P v, R_0 v) - \sum_{j=1}^{r} (Y_j^2 v, R^0 v)$$

$$- (Y_0' v, R^0 v) - (P_0 v, v)$$

$$(2.7) \qquad \sum_{j=1}^{r} \| Y_j v \|_0^2 + \| Y_0 v \|_{-\frac{1}{2}}^2 \leq C\left\{ |(Pv,v)| + |(Pv,R^0 v)| + \|v\|_0^2 \right\}.$$

Comme dans la proposition 3. on obtient :

$$\sum_{j=1}^{r} \| Y_j v \|_s^2 + \| Y_0 v \|_{s-\frac{1}{2}}^2 \leq C\left\{ \| Pv \|_s^2 + \|v\|_s^2 \right\}.$$

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*1.8.*</u> *(estimation de commutateur).*

Soit P l'opérateur paradifférentiel (1.14) avec $\rho > 3$, $\sum_{k,j=1}^{n} \tilde{a}_{kj}(x)\xi_k \xi_j \geq 0$, pour $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$, et $\{Q_0,\dots,Q_{2n}\}$ les systèmes des opérateurs paradifférentiels de symbole $g_j(x,\xi)$ définis dans (0.4). On a alors pour tout compact $K \subset \Omega$, entier $\ell \leq [\rho - 2]$, il existe deux constantes $C(K,\ell)$ et $\varepsilon(\ell) > 0$ telles que

$$\sum_{|I| \leq \ell} \| Q_I v \|_{\varepsilon-1}^2 \leq C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$ où $I = \{\alpha_1,\dots,\alpha_k\}$, $|I| = k$, $Q_I = [Q_{\alpha_1},\dots,[Q_{\alpha_{k-1}},Q_{\alpha_k}]\dots]$ le commutateur des opérateurs paradifférentiels.

<u>Démonstration</u> : On raisonne par induction.

Soit d'abord $|I| = 1$, en vertu de la proposition 3., prenons $0 < \varepsilon_1 \leq \frac{1}{2}$

$$\sum_{|I|=1} \| Q_I v \|_{\varepsilon-1}^2 = \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_{\varepsilon-1}^2 + \| Q_0 v \|_{\varepsilon-1}^2$$

$$\leq \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|_0^2 + \| Q_0 v \|_{-\frac{1}{2}}^2 \leq C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\}.$$

Supposons que ce soit vrai pour $|I| = k$ avec $0 < \varepsilon_k \leq \frac{1}{2}$. On montre que c'est aussi vrai pour $|I| = k+1 \leq \ell$ avec un autre $\varepsilon_{k+1} > 0$. On pose alors $Q_I = [Q, Q_{I'}]$ où $|I'| = k$. On a :

a) Cas $Q = Q_j$, $j = 1,\dots,2n$.

$$\| Q_I v \|^2_{\varepsilon-1} = ([Q , Q_{I'}] v , T^{2\varepsilon-1} v)$$

où $T^{2\varepsilon-1} = E^*_{\varepsilon-1} E_{\varepsilon-1} [Q , Q_{I'}] \in Op(\Sigma^{2\varepsilon-1}_{\rho-2-k})(\Omega)$.

Comme $k+1 \leqslant \ell \leqslant [\rho-2]$, on a $\rho-2-k > 1$. On a donc

$$\begin{aligned}\| Q_I v \|^2_{\varepsilon-1} &\leqslant |(Q_{I'} v , Q^* T^{2\varepsilon-1} v)| + |(Q v , Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leqslant \| Q_{I'} v \|^2_{\varepsilon_k-1} + \| Q^* T^{2\varepsilon-1} v \|_{-\varepsilon_k+1} \\ &\quad + \| Q v \|_{-\varepsilon_k+2\varepsilon} + \| Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v \|_{\varepsilon_k-2\varepsilon} \\ &\leqslant C \left\{ \| Q_{I'} v \|^2_{\varepsilon_k-1} + \| Q v \|_{-\varepsilon_k+2\varepsilon} + \| v \|_{-\varepsilon_k+2\varepsilon} \right\}.\end{aligned}$$

On prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_k$, on utilise l'hypothèse pour $|I| = k$, et la proposition 1.6 on a alors

$$\| Q_I v \|^2_{\varepsilon_{k+1}-1} \leqslant C \left\{ \| P v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}.$$

b) Cas $Q = Q_0$.

$$\begin{aligned}\| Q_I v \|^2_{\varepsilon-1} &= ([Q_0 , Q_{I'}] v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &= (Q_0 Q_{I'} v , T^{2\varepsilon-1} v) - (Q_{I'} Q_0 v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &= I_1 + I_2 .\end{aligned}$$

Comme $P^* = \sum_{kj=1}^{n} \partial_k A_{kj} \partial_j - Q_0 + P^*_0$,

$$|I_1| = \Big| - (P^* Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v) + \sum_{kj=1}^{n} (\partial_k A_{kj} \partial_j Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v) + (F^* Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v) \Big|$$

Mais si on prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_k$, on a alors

$$\begin{aligned} |(P^* Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v)| &= |(Q_I, v, P\, T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leqslant \| Q_I, v \|^2_{\varepsilon_{k-1}} + \| P\, T^{2\varepsilon-1} v \|^2_{-\varepsilon_{k+1}} \\ &\leqslant C \Big\{ \| P v \|^2_0 + \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \Big\} \\ &\leqslant C \Big\{ \| P v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(P_0^* Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v)| &\leqslant C \Big\{ \| Q_I, v \|^2_{\varepsilon_{k-1}} + \| v \|^2_{-\varepsilon_k + 2\varepsilon} \Big\} \\ &\leqslant C \Big\{ \| P v \| + \| v \|^2_0 \Big\} \end{aligned}$$

de plus $T^{2\varepsilon-1} = E^*_{\varepsilon-1} E_{\varepsilon-1} Q_I = E_{2\varepsilon-2} Q_I = E_{2\varepsilon-1} E^{-1} Q_I$,

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{kj=1}^{n} (\partial_k A_{kj} \partial_j Q_I, v, T^{2\varepsilon-1} v) \Big| \\ &\leqslant \Big| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_j E^*_{2\varepsilon-1} Q_I, v, \partial_k E^{-1} Q_I v) \Big| \\ &\quad + \Big| ([E^*_{2\varepsilon-1}, \sum_{kj=1}^{n} \partial_k A_{kj} \partial_j] Q_I, v, E^{-1} Q_I v) \Big| \\ &= w_1 + w_2 \end{aligned}$$

mais pour w_1 on utilise les inégalités (2.3) et (2.5),

$$w_1 \leqslant \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj}\, \partial_j\, E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v\,,\, \partial_k\, E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v) \right|$$

$$+ \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj}\, \partial_j\, E^{-1}\, Q_I\, v\,,\, \partial_k\, E^{-1}\, Q_I\, v) \right|$$

$$+ \| E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v \|_0^2 + \| E^{-1}\, Q_I\, v \|_0^2$$

$$\leqslant C \Big\{ |(P\, E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v\,,\, E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v)| + \| Q_{I'}\, v \|^2_{2\varepsilon-1}$$

$$+ |(P\, E^{-1}\, Q_I\, v\,,\, E^{-1}\, Q_I\, v)| + \| v \|_0^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \| P\, E_{2\varepsilon}\, v \|^2_{-2\varepsilon} + \| E^*_{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v \|^2_{2\varepsilon} + \| Q_{I'}\, v \|^2_{2\varepsilon-1}$$

$$+ \| P\, E^{o}\, v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \| P\, v \|_0^2 + \| Q_{I'}\, v \|^2_{4\varepsilon-1} + \| v \|_0^2 \Big\}$$

pour w_2, il résulte de la proposition 1 que

$$[E^*_{2\varepsilon-1}\,,\, \sum_{kj=1}^{n} \partial_k\, A_{kj}\, \partial_j] = \sum_{j=1}^{2n} T_j^{2\varepsilon-1}\, Q_j + T_0^{2\varepsilon-1}$$

$$w_2 \leqslant \left| \sum_{j=1}^{2n} (T_j^{2\varepsilon-1}\, Q_j\, Q_{I'} v\,,\, E^{o}\, v) \right| + |(T_0^{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v\,,\, E^{o}\, v)|$$

$$\leqslant \left| \sum_{j=1}^{2n} (T_j^{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v\,,\, Q_j^*\, E^{o} v) \right| + |(T_0^{2\varepsilon-1}\, Q_{I'}\, v\,,\, E^{o}\, v)|$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{2n} ([T_j^{2\varepsilon-1}\,,\, Q_j]\, Q_{I'}\, v\,,\, E^{o}\, v) \right|$$

$$\leqslant C \Big\{ \| Q_{I'}\, v \|^2_{2\varepsilon-1} + \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j\, v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \Big\}$$

donc, si l'on prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{4}\varepsilon_k$, on a

$$|I_1| \leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \| v\|_0^2 \right\}$$

mais pour I_2, on a

$$\begin{aligned} I_2 &= (Q_{I'} Pv , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &\quad - \sum_{kj=1}^{n} (Q_{I'} \partial_k A_{kj} \partial_j v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &\quad + (Q_{I'} P_0 v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &= w_1 + w_2 + w_3 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w_1| &= |(Q_{I'} Pv , T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &= |(Pv , Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leqslant |(Pv , T^{2\varepsilon-1} Q_{I'} v)| + |(Pv , \tilde{T}^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \| Q_{I'} v \|_{2\varepsilon-1}^2 + \| v\|_{2\varepsilon-1}^2 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w_2| &= \left| \sum_{kj=1}^{n} (Q_{I'} \partial_k A_{kj} \partial_j v , T^{2\varepsilon-1} v) \right| \\ &= \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_j v , \partial_k Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v) \right| . \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (2.3) et (2.5), on a :

$$\begin{aligned} |w_2| \leqslant & \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_j v , \partial_k v) \right| + C\| v\|_0^2 \\ & + \left| \sum_{kj=1}^{n} (A_{kj} \partial_j Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v , \partial_k Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v) \right| + C \|Q^*_{I'} T^{2\varepsilon-1} v\|_0^2 \end{aligned}$$

$$\leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 + |(PT^{2\varepsilon}v, Q_I^* T^{2\varepsilon-1}v)| + \| Q_{I'} v \|_{2\varepsilon-1}^2 \right\}$$

$$\leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 + \| Q_{I'} v \|_{4\varepsilon-1}^2 \right\} .$$

$$|w_3| = |(Q_{I'} P_0 v , T^{2\varepsilon-1} v)|$$

$$\leqslant |(P_0 Q_{I'} v , T^{2\varepsilon-1} v)| + |([P_0 , Q_{I'}] v , T^{2\varepsilon-1} v)|$$

$$\leqslant C\left\{ \| Q_{I'} v \|_{2\varepsilon-1}^2 + \|v\|_0^2 \right\}$$

donc si on prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{4} \varepsilon_k$, on a :

$$\| Q_I v \|_{\varepsilon_{k+1}-1}^2 \leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\}$$

si l'on prend $\varepsilon = \frac{1}{4^\ell}$, on obtient la proposition.

Pour l'opérateur (1.17) on a la même estimation.

__PROPOSITION__ __1.9.__ - Soit L l'opérateur (1.17), on a alors pour tout compact $K \subset \Omega$, $\ell \leqslant [\rho]$, il existe deux constantes $C(K,\ell) > 0$ et $\varepsilon(\ell) > 0$, telles que

$$\sum_{|I| \leqslant \ell} \| Y_I v \|_{\varepsilon-1}^2 \leqslant C\left\{ \| Pv \|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$ où $Y_I = [Y_{\alpha_1}, \dots, [Y_{\alpha_{k-1}}, Y_{\alpha_k}] \dots]$, $I = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $0 \leqslant \alpha_k \leqslant r$ le commutateur de système $\{Y_j\}_{j=0}^r$.

__Démonstration__ : On la montre aussi par induction.

Soit $|I| = 1$, prenons $0 < \varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$, c'est la proposition 1.4. Supposons que ce soit vrai pour $|I| = k$ avec $0 < \varepsilon_k \leqslant \frac{1}{2}$, on montre que c'est aussi vrai pour $|I| = k+1$, avec $\varepsilon_{k+1} > 0$, on a :

$$[Y , Y_{I'}] = Y_I \quad , \quad |I'| = k .$$

a) Cas $Y = Y_j$, $j = 1, \dots, r$.

$$\| Y_I v \|^2_{\varepsilon-1} = (Y_I v, T^{2\varepsilon-1} v)$$

$$= (Y_j Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) - (Y_{I'} Y_j v, T^{2\varepsilon-1} v)$$

mais

$$|(Y_j Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v)| = |-(Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} Y_j v) + (Y_{I'} v, \tilde{T}^{2\varepsilon-1})|$$

$$\leqslant C \left\{ \| Y_{I'} v \|^2_{2\varepsilon-1} + \| Y_j v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}$$

$$|(Y_{I'} Y_j v, T^{2\varepsilon-1} v)| = |-(Y_j v, T^{2\varepsilon-1} Y_{I'} v) + (Y_j v, \tilde{T}^{2\varepsilon-1} v)|$$

$$\leqslant C \left\{ \| Y_j v \|^2_0 + \| Y_{I'} v \|^2_{2\varepsilon-1} + \| v \|^2_{2\varepsilon-1} \right\}.$$

Si on prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_k$, on a

$$\| Y_I v \|^2_{\varepsilon_{k+1}-1} \leqslant C \left\{ \| P v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}.$$

b) Cas $Y = Y_0$.

$$\| Y_I v \|^2_{\varepsilon-1} = (Y_I v, T^{2\varepsilon-1} v)$$

$$= (Y_0 Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) - (Y_{I'} Y_0 v, T^{2\varepsilon-1} v)$$

$$= I_1 + I_2.$$

Comme $Y_0 = -P^* + \sum_{j=1}^{r} Y_j^2 - Y'_0 + P_0^*$

$$I_1 = (Y_0 Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) = -(P^* Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) + \sum_{j=1}^{r} (Y_j^2 Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v)$$

$$- (Y'_0 Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) + (P_0^* Y_{I'} v, T^{2\varepsilon-1} v) = w_1 + w_2.$$

Il est évident que si on prend $0<\varepsilon_{k+1}\leqslant\frac{1}{2}\,\varepsilon_k$, on a

$$|w_1|\leqslant|-(P^*Y_{I'}v\,,T^{2\varepsilon-1}v)|+|(Y_0'Y_{I'}v\,,T^{2\varepsilon-1}v)|+|(P_0^*Y_{I'}v\,,T^{2\varepsilon-1}v)|$$

$$\leqslant C\left\{\|Pv\|_0^2+\|v\|_0^2\right\}$$

pour w_2, on a $T^{2\varepsilon-1}=E^{2\varepsilon-1}E^{-1}Y_I=E^{2\varepsilon-1}T^o$.

$$|w_2|=\left|\sum_{j=1}^r (Y_j^2Y_{I'}v\,,T^{2\varepsilon-1}v)\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{j=1}^r (Y_j\,E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\,,Y_j\,T^ov)\right|$$

$$+\left|\sum_{j=1}^r ([E^{2\varepsilon-1^*},Y_j]\,Y_{I'}v\,,Y_j\,T^ov)\right|$$

$$+\left|\sum_{j=1}^r (Y_{I'}v\,,Y_j^*[Y_j\,,E^{2\varepsilon-1}]\,T^ov)\right|$$

$$+\left|\sum_{j=1}^r (Y_{I'}v\,,Y_j^*\,C_j\,T^{2\varepsilon-1}v)\right|$$

$$\leqslant C\left\{\sum_{j=1}^r\|Y_j\,E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\|_0^2+\sum_{j=1}^r\|Y_jv\|_0^2+\|Y_{I'}v\|_{2\varepsilon-1}^2+\|v\|_0^2\right\}$$

mais $E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\in C_0^\infty(K')$, on a donc

$$\sum_{j=1}^r\|Y_j\,E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\|_0^2\leqslant C\left\{|(P\,E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\,,E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v)|+\|Y_{I'}v\|_{2\varepsilon-1}^2\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\|P\,T^{2\varepsilon}v\|_{-2\varepsilon}^2+\|E^{2\varepsilon-1^*}Y_{I'}v\|_{2\varepsilon}+\|Y_{I'}v\|_{2\varepsilon-1}^2\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\|Pv\|_0^2+\|Y_{I'}v\|_{4\varepsilon-1}^2+\|v\|_0^2\right\}.$$

On prend $0<\varepsilon_{k+1}\leqslant\frac{1}{4}\,\varepsilon_k$, on a alors

$$|I_1| \leqslant C\left\{ \| P v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \right\}$$

pour I_2, on a

$$Y_0 = P - \sum_{j=1}^{r} Y_j^2 - Y_0' - P_0$$

$$\begin{aligned}(Y_{I'} Y_0 , T^{2\varepsilon-1} v) &= (Y_{I'} P v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{r} (Y_{I'} Y_j^2 v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &\quad - (Y_{I'} Y_0' v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &\quad - (Y_{I'} P_0 v , T^{2\varepsilon-1} v) \\ &= w_1 + w_2 .\end{aligned}$$

Il est évident que si on prend $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_k$, on a

$$\begin{aligned}|w_1| &= |(Y_{I'} P v , T^{2\varepsilon-1} v) - (Y_{I'} Y_0' v , T^{2\varepsilon-1} v) - (Y_{I'} P_0 v , T^{2\varepsilon-1} v)| \\ &\leqslant C\left\{ \| P v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \right\}\end{aligned}$$

$$|w_2| = \left| \sum_{j=1}^{r} (Y_j^2 Y_{I'} v , T^{2\varepsilon-1} v) + \sum_{j=1}^{r} ([Y_{I'} , Y_j^2] v , T^{2\varepsilon-1} v) \right| ,$$

mais on a pour $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4} \varepsilon_k$,

$$\left| \sum_{j=1}^{r} (Y_j^2 Y_{I'} v , T^{2\varepsilon-1} v) \right| \leqslant C\left\{ \| P v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}[Y_{I'} , Y_j^2] &= [Y_{I'} , Y_j] Y_j + Y_j [Y_{I'} , Y_j] \\ &= - Y_{\tilde{I}} Y_j - Y_j Y_{\tilde{I}}\end{aligned}$$

où $Y_{\tilde{I}}$ est l'opérateur de a).

$$
\begin{aligned}
& |([Y_I , Y_j^2] v , T^{2\varepsilon-1} v)| \\
\leqslant\ & |(\tilde{Y}_I Y_j v , T^{2\varepsilon-1} v)| + |(Y_j \tilde{Y}_I v , T^{2\varepsilon-1} v)| \\
\leqslant\ & |(Y_j v , T^{2\varepsilon-1} \hat{Y}_I v)| + |(\tilde{Y}_I v , T^{2\varepsilon-1} Y_j v)| \\
& + (Y_j v , \tilde{T}^{2\varepsilon-1} v)| + |\tilde{Y}_I v , \tilde{T}^{2\varepsilon-1} v)| \\
\leqslant\ & C \left\{ \| \tilde{Y}_I v \|^2_{2\varepsilon-1} + \| Y_j v \|^2_0 + \| v \|^2_{2\varepsilon-1} \right\} .
\end{aligned}
$$

On prend $0 < 2\varepsilon \leqslant \frac{1}{2} \varepsilon_k$, on a enfin

$$
|I_2| \leqslant C \left\{ \| P v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\}
$$

c'est-à-dire, pour $0 < \varepsilon_{k+1} \leqslant \frac{1}{4} \varepsilon_k$, on a

$$
\| Y_I v \|^2_{\varepsilon_{k+1}-1} \leqslant C \left\{ \| P v \|^2_0 + \| v \|^2_0 \right\} .
$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{4^{\ell}}$, on obtient la proposition.

Remarque : Si l'on suppose, dans les proposition 1.3. et 1.4. que $v \in H^{s+2}_{comp}(K)$, et que $v \in H^2_{comp}(K)$ dans les propositions 1.5. et 1.6., les propositions et les inégalités qu'on a obtenues sont encore valables.

§.1.3. Démonstration des théorèmes 1.1. et 1.2.

PROPOSITION 1.10. - Sous les hypothèses du théorème 1.1., soit P l'opérateur (1.14), et supposons compact $K \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, il existe alors $C(K,t) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, telles que

$$\| v \|^2_{t+\varepsilon} \leq C \left\{ \| Pv \|^2_t + \| v \|_t \right\}$$

pour tout $v \in C_0^\infty(K)$.

Démonstration : D'après l'hypothèse du théorème 1.1., il existe $0 < \ell \leq [\rho - 2]$, tel que

$$\sum_{|I| \leq \ell} |G_I^1(x,\xi)|^2 \geq C |\xi|^2 \tag{3.1}$$

pour $(x,\xi) \in K \times S_\xi^{n-1}$ et $G_I^1(x,\xi) \in \Sigma_\sigma^1(\Omega)$.
$\sigma \geq \rho - 2 - \ell + 1 > 1$. On peut utiliser l'inégalité de Gårding pour l'opérateur pseudo-différentiel $\sum_{|I| \leq \ell} G_I^{1*} G_I^1(x,D)$, c'est-à-dire pour $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe $\ell > 0$ telle que :

$$\| v \|^2_\varepsilon \leq C \left\{ \sum_{|I| \leq \ell} \| G_I^1(x,D) v \|^2_{\varepsilon - 1} + \| v \|^2_0 \right\}$$

pour $v \in C_0^\infty(K)$.

Soit Q_I^1 l'opérateur paradifférentiel associé au symbole $G_I^1(x,\xi)$, selon le lemme 1., on a

$$Q_I = Q_I^1 + Q_I^o$$

où $Q_I^o \in Op(\Sigma_{\sigma-1}^o)(\Omega)$. Il résulte du lemme 1.2 que

$$\|v\|^2_\varepsilon \leq C\Big\{\sum_{|I|\leq \ell} \|Q_I v\|^2_{\varepsilon-1} + \sum_{|I|\leq \ell} \|(G^1_I - Q^1_I)v\|^2_{\varepsilon-1}$$

$$+ \sum_{|I|\leq \ell} \|Q^o_I v\|^2_{\varepsilon-1} + \|v\|^2_0\Big\}$$

$$< C\Big\{\sum_{|I|\leq \ell} \|Q_I v\|^2_{\varepsilon-1} + \|v\|^2_0\Big\}.$$

Comme les hypothèses de la proposition 1.8. sont satisfaites, on choisit $\varepsilon > 0$ comme dans la proposition 1.8., on a alors

$$\|v\|^2_\varepsilon \leq C\Big\{\|Pv\|^2_0 + \|v\|^2_0\Big\}$$

où C dépend de K.

Soit E_t un opérateur paradifférentiel associé au symbole $(1+|\xi|)^t$. Comme E^t est propre, on a encore $E_t v \in C^\infty_0(K')$ pour $v \in C^\infty_0(K)$, K' compact de Ω

$$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leq C\Big\{\|E_t v\|^2_\varepsilon + \|v\|^2_t\Big\}.$$

On a donc

$$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leq C\Big\{\|P E_t v\|^2_0 + \|v\|^2_t\Big\}$$

$$\leq C\Big\{\|Pv\|^2_t + \sum_{j=1}^{2n} \|Q_j v\|^2_t + \|v\|^2_t\Big\}$$

$$\leq C\Big\{\|Pv\|^2_t + \|v\|^2_t\Big\}$$

pour $v \in C^\infty_0(K)$.

Pour l'opérateur (1.17) on a la même

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*1.11*</u>. - *Sous les hypothèses du théorème 1.2., soit* L *l'opérateur (1.17). Supposons compact* $K \subset \Omega$, $t \in \mathbb{R}$, *il existe alors* $C(K,t) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, *telles que*

$$\| v \|^2_{t+\varepsilon} \leqslant C \left\{ \| L v \|^2_t + \| v \|^2_t \right\}$$

pour $v \in C_0^\infty(K)$.

La démonstration est tout à fait analogue à la proposition 1.10 en utilisant la proposition 1.9.

<u>Remarque</u> : Dans les propositions 1.10 et 1.11, on peut prendre $v \in H^{t+2}_{comp}(K)$ parce que les opérateurs P et L sont continus de $H^{t+2}(\Omega)$ dans $H^t(\Omega)$ et $C_0^\infty(K)$ danse dans $H^t_{comp}(K)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Maintenant, on peut montrer le théorème suivant :

<u>*THEOREME*</u> <u>*1.7*</u>. - *Sous les hypothèses du théorème 1.1., soit* P *l'opérateur (1.14),* $u \in C^s_{loc}(\Omega)$ *la solution de (0.1). Supposons* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\mathrm{supp}\, \varphi = K$, *il existe alors* $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $C(K,s) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, *tels que*

$$\| \varphi u \|_{s+\varepsilon} \leqslant C \left\{ \| \varphi_1 P u \|_s + \| \varphi_2 u \|_s + \| f \|_s \right\}$$

où $f \in H^s_{comp}(\Omega)$.

Ce théorème induit le théorème 1.1., parce que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ est quelconque, on a donc obtenu $u \in C^s(K) \cap H^{s+\varepsilon}(K)$ où $\varepsilon > 0$ est indépendant de s. Par récurrence on a $u \in C^\infty(K)$. C'est la conclusion du théorème 1.1.

<u>Démonstration</u> : Comme $u \in C^s_{loc} \cap H^3_{loc}$, d'après (1.15), on a

$$P u = g \in C^s_{loc} \cap H^s_{loc}(\Omega) .$$

Soit $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_1 = 1$ sur K, on pose, pour $0 < \delta \leqslant 1$,

$$u_\delta(x) = T_\delta u(x) = \varphi_1(x)(1 - \delta\Delta)^{-1}\varphi(x)u(x)$$

On a alors $u_\delta \to \varphi u$ dans $\mathcal{D}'$ quand $\delta \to 0$ et

$$\| T_\delta u \|_s \leqslant C \|\varphi u\|_s$$

C indépendant de δ, on utilise la remarque précédente, on a alors

$$\begin{aligned}
\| u_\delta \|^2_{s+\varepsilon} &\leqslant C\left\{ \| P T_\delta u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\} \\
&\leqslant C\left\{ \| T_\delta P u \|^2_s + \| [P, T_\delta] u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\} \\
&\leqslant C\left\{ \| \varphi P u \|^2_s + \| \varphi u \|^2_s + \| [P, T_\delta] u \|^2_s \right\}.
\end{aligned}$$

On estime maintenant $\| [P,T_\delta] u \|^2_s$,

$$\begin{aligned}
[P, T_\delta] = &\sum_{j=1}^{n} \left(P_2^{(j)} T_{\delta(j)} - T_\delta^{(j)} P_{2(j)} \right) \\
&+ \sum_{2 \leqslant |\alpha| \leqslant [\rho - 1]} \left(P_2^{(\alpha)} T_{\delta(\alpha)} - T_\delta^{(\alpha)} P_{2(\alpha)} \right) \\
&+ [P_1 + P_0 , T_\delta]
\end{aligned}$$

mais

$$\sigma(T_{\delta(\alpha)}) = \varphi_1(x)(1 + \delta|\xi|^2)^{-1} D_x^\alpha \varphi(x)$$

$$\sigma(T_\delta^{(\alpha)}) = \varphi_1(x)\left(\partial_\xi^\alpha (1 + \delta|\xi|^2)^{-1}\right)\varphi(x)$$

$$|\partial_\xi^\alpha (1 + \delta|\xi|^2)^{-1}| < C(1 + |\xi|^2)^{-\frac{|\alpha|}{2}}(1 + \delta|\xi|^2)^{-1}$$

où C indépendant de δ. On a alors

$$T_0 = \sum_{2\leq|\alpha|\leq[\rho-1]} \left(P_2^{(\alpha)}\, T_{\delta(\alpha)} - T_\delta^{(\alpha)}\, P_{2(\alpha)}\right)$$

(3.2)
$$+ [P_1 + P_0 , T_\delta]$$

$$= \tilde{T}_0 T'_\delta + T_\delta^{-1}$$

où T'_δ est du même type que T_δ, $\tilde{T}_0$ d'ordre 0 uniformément borné, T_δ^{-1} d'ordre $-\sigma$ uniformément borné à support compact dans $\sigma = \min\{1,\rho-3\}$

$$\begin{aligned}
T_\delta^{(j)}\, P_{2(j)} &= \varphi_1(x)\,(\partial_{\xi_j}(1-\delta\Delta)^{-1})\ \varphi(x)\, P_{2(j)} \\
&= \varphi_1(x)\,(\partial_{\xi_j}(1-\delta\Delta)^{-1})P_{2(j)}\ \varphi(x) + \varphi_1(\partial_{\xi_j}(1-\delta\Delta)^{-1})[\varphi , P_{2(j)}] \\
&= \varphi_1(x)\,(\partial_{\xi_j}(1-\delta\Delta)^{-1})P_{2(j)}(1-\delta\Delta)\varphi_1(1-\delta\Delta)^{-1}\ \varphi \\
&\quad + \varphi_1(\partial_{\xi_j}(1-\delta\Delta)^{-1})(P_{2(j)}(1-\delta\Delta)(1-\varphi_1)(1-\delta\Delta)^{-1}\ \varphi + [\varphi , P_{2(j)}]) \\
&= \tilde{T}_0\, Q_{n+j}\, T_\delta + \tilde{T}_0\, T'_\delta + T_\delta^{-1}
\end{aligned}$$

où $\tilde{T}_0$ d'ordre 0 borné uniformément, T'_δ est du même type que T_δ et remplace φ par $D^\alpha\varphi$. T_δ^{-1} d'ordre $-\sigma$ est borné uniformément et est à support compact, on a donc

$$[P , T_\delta] = \sum_{j=1}^{n} Q_j\, T_{\delta(j)} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_0\, Q_{n+j}\, T_\delta + \tilde{T}_0\, T'_\delta + T_\delta^{-1} \tag{3.3}$$

$$\|[P , T_\delta]\, u\|_s^2 \leq C\left\{\sum_{j=1}^{n} \|Q_j\, T_{\delta(j)}\, u\|_s^2 + \sum_{j=1}^{n} \|Q_{n+j}\, T_\delta\, u\|_s^2 + \|T'_\delta\, u\|_s^2 + \|T_\delta^{-1}\, u\|_s^2\right\}$$

où C est indépendant de δ et $T_{\delta(k)}\, u$, $T_\delta\, u \in H^{s+2}_{comp}(K')$.

En utilisant la remarque de la section 2., on a :

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j T_{\delta(k)} u \|_s^2 \leqslant C \Big\{ \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j E_s T_{\delta(k)} u \|_0^2 + \| T_{\delta(k)} u \|_s^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ |(P E_s T_{\delta(k)} u , E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ |(E_o P E_s T_{\delta(k)} u , E_o E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ \| T_{\delta(k)} u \|_s^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ |(E_s P T_{\delta(k)} u , E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ \Big| \sum_{j=1}^{2n} (E_s^j Q_j T_{\delta(k)} u , E_s T_{\delta(k)} u) \Big|$$

$$+ |(E_o E_s P T_{\delta(k)} u , E_o E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ \Big| \sum_{j=1}^{2n} (E_o E_s^j Q_j T_{\delta(k)} u , E_o E_s T_{\delta(k)} u) \Big|$$

$$+ \| T_{\delta(k)} u \|_s^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P u \|_s^2 + \mu \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j T_{\delta(k)} u \|_s^2 + C(\mu) \| T_{\delta(k)} u \|_s^2$$

$$+ |(E_s [P , T_{\delta(k)}] u , E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ |(E_o E_s [P , T_{\delta(k)}] u , E_o E_s T_{\delta(k)} u)| \Big\} ,$$

on a

$$[P , T_{\delta(k)}] = \sum_{j=1}^{n} Q_j T_{\delta(k,j)} + \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_0 Q_{n+j} T_{\delta(k)} + \tilde{T}_0 T'_\delta + T_\delta^{-1}$$

$$|(E_s [P , T_{\delta(k)}] u , E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$\leqslant C \Big\{ \Big| \sum_{j=1}^{n} (Q_j E_s T_{\delta(k,j)} u , E_s T_{\delta(k)} u) \Big| + \Big| \sum_{j=1}^{n} (E_s \tilde{T}_0 Q_{n+j} T_{\delta(k)} u , E_s T_{\delta(k)} u) \Big|$$

$$+ |(E_s \tilde{T}_0 T'_\delta u , E_s T_{\delta(k)} u)| + |(E_s T_\delta^{-1} u , E_s T_{\delta(k)} u)|$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{n} ([E_s , Q_j] T_{\delta(k,j)} u , E_s T_{\delta(k)} u) \right| \Big\}$$

$$\leq C \Big\{ \mu \sum_{j=1}^{2n} \| Q_j T_{\delta(k)} u \|_s^2 + C(\mu) (\| T_{\delta(kj)} u \|_s^2 + \| T_{\delta(k)} u \|_s^2) + \| T_\delta^{-1} u \|_s^2 \Big\}$$

on a donc pour $k = 0,1,\dots,n$

$$\sum_{j=1}^{2n} \| Q_j T_{\delta(k)} u \|_s^2 \leq C \Big\{ \| \varphi_1 Pu \|_s^2 + \| T'_\delta u \|_s^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_s^2 \Big\}$$

enfin, on obtient :

$$(3.4) \qquad \| T_\delta u \|_{s+\varepsilon}^2 \leq C \Big\{ \| \varphi Pu \|_s^2 + \| \varphi_1 Pu \|_s^2 + \| T'_\delta u \|_s^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_s^2 + \| T_\delta u \|_s^2 \Big\} ,$$

mais on a $\| T'_\delta u \|_s^2 \leq C \| \varphi_1 u \|_s^2$, $\| T_\delta u \|_s^2 \leq C \| \varphi u \|_s^2$ et $T_\delta^{-1} u$ borné dans $H^{s+\sigma}_{comp}(K')$ donc $T_\delta^{-1} u \to g \in H^{s+\sigma}_{comp}(K') \subset H^s_{comp}(K')$ ce qui termine la démonstration.

Pour l'équation (0.2) on a aussi :

<u>THEOREME</u> <u>1.8</u>. - *Sous les hypothèses du théorème 1.2., soit L l'opérateur (1.17), $u \in C^s_{loc}(\Omega)$ la solution de (0.2). Supposons $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, supp $\varphi = K$, il existe alors $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $C(K,s) > 0$, $\varepsilon(K) > 0$, tels que*

$$\| \varphi u \|_{s+\varepsilon}^2 \leq C \Big\{ \| \varphi_1 Lu \|_s^2 + \| \varphi_2 u \|_s^2 + \| f \|_s^2 \Big\}$$

où $f \in H^s_{comp}(\Omega)$.

Il est clair que ce théorème induit le théorème 1.2.

<u>Démonstration</u> : D'après (1.10), $Lu = g \in H^s_{loc}(\Omega)$, on pose aussi

$$u_\delta = T_\delta u = \varphi_1 (1-\delta\Delta)^{-1} \varphi u \in H^{s+2}_{comp}(K') .$$

En vertu de la proposition 1.11 et de la remarque, on a :

$$\| u_\delta \|^2_{s+\varepsilon} \leqslant C \left\{ \| L T_\delta u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\}$$

$$\leqslant C \left\{ \| T_\delta L u \|^2_s + \| [L , T_\delta] u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s \right\} .$$

Il nous faut majorer $\| [L , T_\delta] u \|_s$, mais

$$[L , T_\delta] = \sum_{j=1}^{r} 2 Y_j [Y_j , T_\delta] + \sum_{j=1}^{r} [[Y_j , T_\sigma] , Y_j] + [Y_0 + Y_0' + P_0 , T_\delta] .$$

Il est évident que l'on a

$$T_0 = \sum_{j=1}^{r} [[Y_j , T_\delta] , Y_j] + [Y_0 + Y_0' + P_0 , T_\delta]$$
$$= \tilde{T}_0 T_\delta' + T_\delta^{-1}$$

où $\tilde{T}_0$ est d'ordre 0 et est borné uniformément. T_δ' est du même type que T_σ si on remplace φ par $\varphi' \in C_0^\infty(\Omega)$ et T_δ^{-1} d'ordre $-\sigma = \max\{-1 , -(\rho-2)\}$ est à support compact et uniformément borné. De plus,

$$[Y_j , T_\delta] = Y_j \varphi_1 (1-\delta\Delta)^{-1} \varphi - \varphi_1 (1-\delta\Delta)^{-1} \varphi Y_j$$

$$= [Y_j , \varphi_1] (1-\delta\Delta)^{-1} \varphi + \varphi_1 (1-\delta\Delta)^{-1} [Y_j , \varphi]$$

$$+ \varphi_1 (1-\delta\Delta)^{-1} \delta [Y_j , \Delta] (1-\delta\Delta)^{-1} \varphi$$

mais $[Y_j , \varphi] = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \partial_k \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, donc on a

$$[Y_j , T_\delta] = \tilde{T}_0 T_\delta + T_\delta' + R$$

où R est un opérateur infiniment régularisant à support compact et borné uniformément, on a donc

$$\text{(3.5)} \qquad [L , T_\delta] = \sum_{j=1}^{2n} 2\tilde{T}_0 Y_j T_\delta + \tilde{T}_0 T'_\delta + T_\delta^{-1} + \sum_{j=1}^{r} 2 T_0 Y_j T'_\delta$$

$$\| [L , T_\delta] u \|_s^2 \leqslant C \left\{ \sum_{j=1}^{r} \| Y_j T_\delta u \|_s^2 + \sum_{j=1}^{r} \| Y_j T'_\delta u \|_s^2 \right.$$
$$\left. + \| T'_\delta u \|_s^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_s^2 \right\}$$

mais

$$\sum_{j=1}^{r} \| Y_j T_\delta u \|_s^2 \leqslant C \left\{ \sum_{j=1}^{r} \| Y_j E_s T_\delta u \|_0^2 + \| T_\delta u \|_s^2 \right\}$$

$$\leqslant C \left\{ | (L E_s T_\delta u , E_s T_\delta u) | + \| T_\delta u \|_s^2 \right\}$$

$$\leqslant C \left\{ | (E_s L T_\delta u , E_s T_\delta u) | + \| T_\delta u \|_s^2 \right.$$

$$\left. + \left| \sum_{j=1}^{r} (E_s^j Y_j T_\delta u , E_s T_\delta u) \right| + | (E_s^o T_\delta u , E_s T_\delta u) | \right\}$$

$$\leqslant C \left\{ \| T_\delta L u \|_s^2 + \mu \sum_{j=1}^{r} \| Y_j T_\delta u \|_s^2 + C(\mu) \| T_\delta u \|_s^2 \right.$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{r} (Y_j E_s \tilde{T}_0 T_\delta u , E_s T_\delta u) \right|$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{r} (Y_j E_s \tilde{T}_0 T'_\delta u , E_s T_\delta u) \right|$$

$$\left. + | (E_s \tilde{T}_0 T'_\delta u , E_s T_\delta u) | + | (E_s T_\delta^{-1} u , E_s T_\delta u) | \right\}$$

fait la même chose pour $\sum_{j=1}^{r} \| Y_j T'_\delta u \|_s^2$, on obtient donc

$$\| [L , T_\delta] u \|_s^2 \leqslant C \left\{ \| \varphi' L u \|_s^2 + \| T'_\delta u \|_s^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_s^2 \right\} ,$$

enfin, on a :

$$(3.6) \qquad \| u_\delta \|^2_{s+\varepsilon} \leq C \left\{ \| \varphi' Lu \|^2_s + \| T'_\delta u \|^2_s + \| T_\delta u \|^2_s + \| T^{-1}_\delta u \|^2_s \right\}$$

mais, on a $\| T'_\delta u \|_s \leq C \| \varphi_2 u \|_s$, $\| T_\delta u \| \leq C \| \varphi u \|_s$ et $T^{-1}_\delta u \to g$ dans $H^{s+\sigma}_{comp}(K')$ ce qui termine la démonstration du théorème 1.8.

§.1.4. Démonstration des théorèmes 1.3 et 1.4.

Les démonstrations de ces deux théorèmes étant tout à fait analogues, on démontrera seulement le théorème 1.3.

Soit M l'ensemble dans le théorème 1.3. Il existe alors un nombre fini des ouverts $\Omega_j \subset \Omega$, $j=1,\ldots,N$ tels que $M \subset \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_j$. Sous l'hypothèse du théorème il existe χ_j, $j=1,\ldots,N$ difféomorphismes

$$\chi_j : \Omega \to M_j \subset \mathbb{R}^n$$

tel que $\chi_j|_{\Omega_j} : \Omega_j \to \chi_j(\Omega_j) = m_j \subset M_j$ satisfait

$$\chi_j^{-1}\left(\{x_j^n = 0\} \cap m_j\right) = \Omega_i \cap N \supset \Omega_j \cap M$$

avec la Jacobienne $0 < C_1 \leqslant |J\, x_j| \leqslant C_2$.

On change les variables pour les équations (0.1)

$$F(x,u(x) \ldots) = 0 \qquad \text{sur } \Omega$$

$$F(\chi_j^{-1}(y), u_j(y), \ldots) = 0 \quad \text{sur } M_j$$

où $u_j(y) = u(\chi_j^{-1}(y))$. On notera $u_0 = u$.

D'après le théorème 1.6, on a pour la solution de (0.1), $u \in C^{\rho}_{loc} \cap H^{s}_{loc}$,

$$P u \in H^{s+\rho-2d}_{loc}(\Omega)$$

$$P_j u_j \in H^{s+\rho-2d}_{loc}(M_j) \;, \; j=1,\ldots,N$$

où

$$(4.1) \qquad P_j = \sum_{k,r=1}^{n} A^j_{kr}\, \partial^2_{kr} + \sum_{k=1}^{n} B^j_k\, \partial_k + P^j_0 \,.$$

D'après les hypothèses, sur $m_j \cap X_j(M)$, on a

$$\sigma(A^j_{nn}) = a^j_{nn} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \sigma(B^j_n) = b^j_n \neq 0 .$$

On peut supposer que c'est vrai sur m_j , $j=1,\ldots,N$. On note $m_{j,\beta} = m_j \cap \{|y_n| \leqslant \beta\}$, β à choisir. On a :

PROPOSITION 1.12. - *Pour les opérateurs (4.1), sous les hypothèses du théorème 1.3., il existe* $C, C', \mu > 0$ *tels que*

$$\|v\|_0^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|} \|P_j v\|_0^2 + C' \|v\|_{-r}^2$$

pour tout $v \in C_0^\infty(m_{j,\beta})$. *r assez grand,* C, C' *indépendants de* β, μ. $|\mu|$ *assez grand.*

<u>Démonstration</u> : On pose $v = u(T - e^{\mu y_n})$, $u \in C_0^\infty(m_{j,\beta})$, v , u sont réelles.

$$P_j v = (T - e^{\mu y_n})\left\{ \sum_{kr=1}^{n} A^j_{kr}\, \partial^2_{kr} u + \sum_{k=1}^{n} B^j_k\, \partial_k u + P^j_0 u \right\}$$

$$- A^j_{nn}\, \mu^2 e^{\mu y_n} u - B^j_n\, \mu e^{\mu y_n} u - 2 \sum_{k=1}^{n} A^j_{nk}\, \mu e^{\mu y_n} \partial_k u$$

$$+ R u$$

où R est un opérateur $(\rho\text{-}3)$ - régularisant.

On a donc :

$$((T - e^{\mu y_n})^{-1} P_j v , u) = - (\sum_{kr=1}^{n} A^j_{kr}\, \partial_k u , \partial_r u)$$

$$- ((T - e^{\mu y_n})^{-1} (A^j_{nn}\, \mu^2 + B^j_n\, \mu) e^{\mu y_n} u , u)$$

$$- 2((T - e^{\mu y_n})^{-1} \sum_{k=1}^{n} A^j_{nk}\, \mu e^{\mu y_n}\, \partial_k u , u)$$

$$+ (\tilde{C} u , u) + (R u , u)$$

où $|(\tilde{C}u,u) + (Ru,u)| \leqslant C \, \|u\|_0^2$, on obtient

$$((T-e^{\mu y_n})^{-1} (A_{nn}^j \mu^2 + B_n^j \mu) e^{\mu y_n} u, u) + \sum_{kr=1}^{n} (A_{kr}^j \partial_k u, \partial_r u)$$

$$\leqslant |((T-e^{\mu y_n})^{-1} P_j v, u)| + 2\, |((T-e^{\mu y_n})^{-1} \sum_{k=1}^{n} A_{nk}^j \mu e^{\mu y_n} \partial_k u, u)| + C \, \|u\|_0^2$$

$$\leqslant |((T-e^{\mu y_n})^{-1} P_j v, u)| + 2 \left\| \frac{\sum_{k=1}^{n} \psi_j A_{nk}^j \partial_k u}{\sqrt{a_{nn}^j}} \right\|_0 \left\| \sqrt{a_{nn}^j} (T-e^{\mu y_n})^{-1} \mu e^{\mu y_n} u \right\|_0$$

$$+ (C' u, u)$$

$$\leqslant |((T-e^{\mu y_n})^{-1} P_j v, u)| + \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{a_{nn}^j}} \sum_{k=1}^{n} \psi_j A_{nk}^j \partial_k u \right\|_0^2$$

$$+ 2\, (a_{nn}^j (T-e^{\mu y_n})^{-2} \mu^2 e^{2\mu y_n} u, u)| + C' \, \|u\|_0^2 ,$$

où on suppose $a_{nn}^j \neq 0$ sur m_j, $\psi_j \equiv 1$ sur $m_{j,\beta}$, $\psi_j \in C_0^\infty(m_j)$. Selon le lemme 1.4., on a :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{1}{\sqrt{a_{nn}^j}} \sum_{k=1}^{n} \psi_j A_{nk}^j \partial_k u \right\|_0^2 \leqslant \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{nk}^j}{a_{nn}^j} \partial_k u \right\|_0^2 + C \, \|u\|_0^2$$

$$\leqslant \sum_{kr=1}^{n} (A_{kk}^j \partial_k u, \partial_r u) + C \, \|u\|_0^2$$

on a obtenu

$$((T-e^{\mu y_n})^{-1} (A_{nn}^j \mu^2 + B_n^j \mu) e^{\mu y_n} u, u) = (\mu^2 A u, u)$$

$$\leqslant \|u\|_0 \, \|(T-e^{\mu y_n})^{-1} P_j v\|_0 + 2\, |(a_{nn}^j (T-e^{\mu y_n})^{-2} \mu^2 e^{2\mu y_n} u, u)| + C \, \|u\|_0^2 .$$

On suppose sur $m_{j,\beta}$ $0 < C_1 \leqslant a_{nn}^j \leqslant C_2$.

D'abord, on choisit μ et β tels que, pour $|y_n| \leqslant \beta$, on ait $\frac{1}{2} \leqslant e^{\mu y_n} \leqslant 2$, on a donc, pour $T > 2$, μ assez grand

$$\sigma(A) = (T - e^{\mu y_n})^{-1} (a^j_{nn} + \frac{b^j_n}{\mu}) e^{\mu y_n}$$

$$\geqslant \frac{C_1}{2} (T - \tfrac{1}{2})^{-1} \tfrac{1}{2}$$

et de plus

$$2 a^j_{nn} (T - e^{\mu y_n})^{-2} e^{2\mu y_n} \leqslant 8 C_2 (T - 2)^{-2} .$$

On pose $E_{\frac{1}{2}}$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $(1 + |\xi|)^{\frac{1}{2}}$, on a

$$(Au,u) = (A E_{\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} u , E_{\frac{1}{2}} E_{-\frac{1}{2}} u)$$

$$= (\tilde{A} \tilde{u}, \tilde{u})$$

où $\tilde{A} = E^*_{\frac{1}{2}} A E_{\frac{1}{2}}$, $\tilde{u} = E_{-\frac{1}{2}} u$

$$\sigma(\tilde{A}) = \tilde{a}(x,\xi) \geqslant \frac{C_1}{4} (T - \tfrac{1}{2})^{-1} (1 + |\xi|)$$

$$(Au,u) = (\tilde{a}(x,D)\tilde{u}, \tilde{u}) + ((\tilde{A} - \tilde{a})\tilde{u}, \tilde{u})$$

$$\geqslant \frac{C_1}{4} (T - \tfrac{1}{2})^{-1} \|\tilde{u}\|^2_{\frac{1}{2}} - C' \|\tilde{u}\|_0$$

$$\geqslant \frac{C_1}{8} (T - \tfrac{1}{2})^{-1} \|\tilde{u}\|^2_{\frac{1}{2}} - C' \|\tilde{u}\|^2_{-r}$$

$$\geqslant \frac{C_1}{8} (T - \tfrac{1}{2})^{-1} \|u\|^2_0 - C' \|\tilde{u}\|^2_{-r}$$

on a donc :

$$\frac{C_1}{8}\,(T-\tfrac{1}{2})^{-1}\,\mu^2\,\|u\|_0^2 - C'\,\mu^2\,\|u\|_{-r}^2$$

$$\leqslant \|u\|_0\,\|(T-e^{\mu y_n})^{-1}\,P_j v\|_0 + 8\,C_2\,(T-2)^{-2}\,\mu^2\,\|u\|_0^2$$

$$+\ C\,\|u\|_0^2 .$$

On choisit $T>0$ assez grand tel que

$$\frac{C_1}{8}\,(T-\tfrac{1}{2})^{-1} - 8\,C_2\,(T-2)^{-2} = C > 0 .$$

Prenons μ assez grand, on obtient enfin :

$$\|v\|_0^2 \leqslant \frac{C}{\mu^2}\,\|P_j v\|_0^2 + C'\,\|v\|_{-r}^2 .$$

Si $a_{nn}^j = 0$, on peut supposer $a_{kk}^j = 0$, $k = 1,\dots,n$, mais $\left\|\sum_{j=1}^{n} a_{kr}^j\,\partial_r u\right\|_0^2 \leqslant$ $2\,a_{kk}\,(\sum a_{kr}^j\,\partial_k u\,,\partial_r u)$ on a donc $\sum_{k=1}^{n} A_{rk}^j\,\partial_k u = 0$. On obtient

$$((T-e^{\mu y_n})^{-1}\,B_n^j\,\mu\,e^{\mu y_n} u\,,u) = (|\mu|\,A' u\,,u)$$

$$\leqslant \|u\|_0\,\|(T-e^{\mu y_n})^{-1}\,P_j v\|_0 + C\,\|u\|_0^2 .$$

Comme $b_n^j \neq 0$ sur m_j , on prend $\mu \neq 0$ tel que $\mu\,b_n^j > 0$, $|\mu|$ assez grand

$$\sigma(A') = (T-e^{\mu y_n})^{-1}\,b_n^j\,e^{\mu y_n} \geqslant C > 0$$

à ce moment là, on obtient

$$\|v\|_0^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|}\,\|P_j v\|_0^2 + C'\,\|v\|_{-r}^2$$

C'est la proposition.

Maintenant, on note $\Omega_{j,\beta} = X_j^{-1}(m_{j,\beta})$. $\Omega_\beta = \bigcup_{j=1}^{N} \Omega_{j,\beta} \supset M$, $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\sum_{j=1}^{n} \psi_j \equiv 1$ sur Ω_β.

PROPOSITION 1.13 – *Pour les opérateurs (4.1), on note* $u_j(y) = u(X_j^{-1}(y))$, *on a alors :*

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|} \sum_{j=1}^{N} \|P_j u_j\|_0^2 + C\, \|u\|_{-r}^2$$

pour $u \in C_0^\infty(\Omega_\beta)$, *C indépendant de* μ.

Démonstration : $u = \sum_{j=1}^{N} \psi_j u$, $\psi_j u \in C_0^\infty(\Omega_{j,\beta})$,

$$\psi_j u(X_j^{-1}(y)) = \tilde{\psi}_j(y)\, u_j(y) = v_j \in C_0^\infty(m_{j,\beta}) .$$

Utilisons les propositions 1.9., 1.1. et 1.3. et prenons $|\mu|$ assez grand ,

$$\|u\|_{0,\Omega_\beta}^2 = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \psi_j u \Big\|_{0,\Omega_\beta}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|\psi_j u\|_{0,\Omega_{j,\beta}}^2$$

$$\leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|v_j\|_{0,m_{j,\beta}}^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|} \sum_j \|P_j v_j\|_0^2 + C'\, \|u\|_{-r}^2$$

$$\leqslant \frac{C}{|\mu|} \Big\{ \sum_j \|\tilde{\psi}_j P_j u_j\|_0^2 + \sum_{j=1}^{n} \|Q_r^j u_j\|_0^2 + \|u_j\|_0^2 \Big\} + C'\, \|u\|_{-r}^2$$

$$\leqslant \frac{C'}{|\mu|} \sum_{j=1}^{N} \|P_j u_j\|_0^2 + C'\, \|u\|_{-r}^2 .$$

Maintenant, on suppose $u \in C_0^\infty(K)$, K compact de Ω, $\overset{\circ}{K} \supset M$, $\psi_1, \psi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\psi_1 + \psi_2 \equiv 1$ sur K, $\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega_{2\beta})$, $\psi_1 \equiv 1$ sur Ω_β, alors ,

$$\|u\|_0^2 \leqslant \|\psi_1 u\|_0^2 + \|\psi_2 u\|_0^2 .$$

Comme dans la démonstration de la proposition 1.10, on a :

$$\|\psi_1 u\|_0^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|} \sum_{j=1}^{N} \|P_j \psi_{1j} u_j\|_0^2 + C' \|u\|_{-r}^2$$

$$\leqslant \frac{C}{|\mu|} \sum_{j=1}^{N} \|P_j u_j\|_0^2 + C' \|u\|_{-r}^2 .$$

D'après la proposition 1.7., on a :

$$\|\psi_2 u\|_0^2 \leqslant C\left\{ \|P\psi_2 u\|_{-\varepsilon}^2 + \|\psi_2 u\|_{-\varepsilon}^2 \right\}$$

$$\leqslant C\left\{ \|P u\|_{-\varepsilon}^2 + \|u\|_{-\varepsilon}^2 \right\}$$

$$\leqslant C\left\{ \frac{1}{|\mu|} \|P u\|_0^2 + C(\mu,r)\|P u\|_{-r}^2 + \delta\|u\|_0^2 + C(\delta,r)\|u\|_{-r}^2 \right\}.$$

On obtient, pour $u \in C_0^\infty(K)$:

$$\|u\|_0^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|}\left\{\|P u\|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \|P_j u_j\|_0^2\right\} + C'\|u\|_{-r}^2 . \tag{4.2}$$

<u>PROPOSITION</u> <u>1.14</u>. - *Sous les hypothèses du théorème 1.3., soit* K *un compact de* Ω, $\overset{\circ}{K} \supset M$, *il existe alors* $C(K,s) > 0$, *tel que*

$$\|u\|_s^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|}\left\{\|Pu\|_s^2 + \sum_{j=1}^{N} \|P_j u_j\|_s^2\right\} + C'\|u\|_{-r}^2$$

pour $u \in C_0^\infty(K)$, C, C' *indépendants de* μ.

On prend $|\mu|$ assez grand, on peut le déduire immédiatement de (4.2). Evidemment, pour $u \in H^{t+2}_{\mathrm{comp}}(K)$, on a le même résultat.

Maintenant, on peut démontrer le théorème 1.3.

Supposons que u est une solution de l'équation (0.1) de classe $C^{\rho}_{loc}(\Omega)$. Sous les hypothèses du théorème 1.3, on a :

$$P_j\,u_j \in C^{2\rho-2d}_{loc}(\Omega) \cap H^{3+\rho-2d}_{loc}(\Omega) \quad , \; j=0,1,\ldots,N$$

où $M_0=\Omega$, $P_0=P$, $\rho-2d=\rho-3>0$, on pose $\sigma=\min\{\varepsilon,\rho-3\}>0$, où ε est la constante du théorème 1.7., on a alors :

$$P_j\,u_j \in H^{3+\sigma}_{loc}(M_j) \quad , \; j=0,1,\ldots,N\,.$$

$u_j \in H^3_{loc}(M_j)$. On va déduire que $u \in H^{3+\sigma}_{loc}(\Omega) \cap C^{\rho}_{loc}$ par récurrence, on obtient le théorème 1.3. mais sur $\Omega \setminus M$, c'est le théorème 1.1, on fait donc l'estimation seulement sur un voisinage compact K de M.

On pose $T_\delta=\varphi_1(x)\,(1-\Delta\delta)^{-2}\,\varphi(x)$ où $\varphi\equiv 1$ sur K, $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$, $\varphi_1 \in C^\infty_0(\Omega)$, $\varphi_1\equiv 1$ sur $\operatorname{supp}\varphi$

$$T_\delta\,u \in H^{3+4}_{comp}(K') \subset H^{3+\sigma+2}_{comp}(K')\,.$$

On a $T_\delta\,u\,(X_j^{-1}(y)) = T^j_\delta\,u_j\,(y)$ et

$$\sigma_4(T^j_\delta) \;=\; \varphi_1(x)\,(1+\delta|{}^t J_{x_j}\,\xi|^2)^{-2}\,\varphi(x)\,.$$

Comme $0<C_1\leqslant |{}^t J_{x_j}|\leqslant C_2$, T^j_δ a la même propriété que T_δ. D'après la proposition 1.14, on a :

$$\|T_\delta u\|^2_{3+\sigma} < \frac{C}{|\mu|}\left\{\|P\,T_\delta u\|^2_{3+\sigma} + \sum_{j=1}^N \|P_j\,T^j_\delta u_j\|^2_{3+\sigma}\right\} + C'\;\|T_\delta\,u\|^2_{-r}$$

$$< \frac{C}{|\mu|}\left\{\|\varphi\,Pu\|^2_{3+\sigma} + \sum_{j=1}^N \|\varphi_j\,P_j\,u_j\|^2_{3+\sigma}\right.$$

$$\left. + \;\|[P\,,T_\delta]u\|^2_{3+\sigma} + \sum_{j=1}^N \|[P_j\,,T_\delta]u_j\|^2_{3+\sigma}\right\} + C'\;\|T_\delta\,u\|^2_{-r}$$

Il nous faut donc estimer $\| [P , T_\delta] u \|_{3+\sigma}$, $\| [P_j , T_\delta^j] u \|_{3+\sigma}$. En faisant comme pour (3.3), nous avons :

$$[P_j , T_\delta^j] = \sum_{k=1}^{n} Q_k \tilde{T}_\delta^j + \sum_{k=1}^{n} \tilde{T}_0 Q_{n+k} T_\delta^j$$

$$+ \tilde{T}'_0 \tilde{T}_\delta^j + \tilde{T}_0^2 T_\delta^j + T_\delta^{-1}$$

où $\tilde{T}_0$, $\tilde{T}'_0$, $\tilde{T}_0^2$ sont d'ordre 0, uniformément borné. T_δ^{-1} d'ordre $(-\min\{1 , \rho-3\} \leqslant -\sigma)$ est à support compact et uniformément borné. $\tilde{T}_\delta^j$ est du même type que T_δ^j mais $\varphi_j(y)$ est remplacé par $D^\alpha \varphi_j$ ou bien par $A_{kj}^j D^\alpha \varphi_j$ et $B_k^j D^\alpha \varphi_j$, $\alpha \neq 0$ comme $\varphi_j \equiv 1$ sur $X_j(K)$. Son support est alors dans $M_j \setminus X_j(K)$; c'est ce que l'on a fait dans le théorème 1.6. i.e. (2.4),

$$\| [P_j T_\delta^j] u_j \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \| Q_k^j \tilde{T}_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \sum_{k=1}^{n} \| Q_{n+j} T_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2$$

$$+ \| \tilde{T}_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| T_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| T_\delta^{-1} u_j \|_{3+\sigma}^2 \Big\}$$

mais comme dans la démonstration du théorème 1.7.

$$\sum_{k=1}^{n} \| Q_k^j \tilde{T}_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P_j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| \tilde{T}_\delta^{j'} u_j \|_{3+\sigma}^2$$

$$+ \| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma} \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P_j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| \varphi P_j u_j \|_3^2 + \| T_\delta^{j'} u \|_3^2$$

$$+ \| T_\delta^{-1} u \|_3^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma}^2 \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P_j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| \varphi_2 P_j u_j \|_3^2 + \| \psi_3 u \|_3^2$$

$$+ \| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma}^2 \Big\}.$$

On a encore :

$$\sum_{r=1}^{2n} \| Q_r^j T_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C \Big\{ \| \varphi P_j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| T_\delta u \|_{3+\sigma}^2$$
$$+ \left| (E_{3+\sigma}[P_j , T_\delta^j] u , E_{3+\sigma} T_\delta u) \right| \Big\}.$$

$$\| \tilde{T}_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P_j u_j \|_3^2 + \| \varphi_2 u_j \|_3^2 + \| T_\delta^{-1} u_j \|_3^2 \Big\} .$$

On a enfin obtenu

$$\| [P_j , T_\delta^j] u_j \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C \Big\{ \| \varphi_1 P_j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| \varphi_2 u \|_3^2$$
$$+ \| T_\delta^j u_j \|_{3+\sigma}^2 + \| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma}^2 \Big\} .$$

$j = 0,1,\dots,N$, on a alors, pour $|\mu|$ assez grand

$$\| T_\delta u \|_{3+\sigma}^2 \leqslant \frac{C}{|\mu|} \Big\{ \| \varphi_1 P u \|_{3+\sigma}^2 + \sum_{j=1} \| \psi_j P_j u_j \|_{3+\sigma}^2$$
$$+ \| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma}^2 \Big\} + C' \| \varphi u \|_{-r}^2$$

où C , C' indépendants de δ, comme $T_\delta^{-1} u$ reste borné dans $H^{3+\sigma}_{comp}(K')$, $\| T_\delta^{-1} u \|_{3+\sigma}^2 \leqslant C''$ indépendant de δ, on a donc que la droite de cette inégalité est inférieur à une constante indépendante de δ i.e.

$$\| T_\delta u \|_{3+\sigma} \leqslant C .$$

On a obtenu alors $\varphi u \in H^{3+\sigma}(\Omega)$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.3.

§.1.5. Régularité d'un minimum local en calcul des variations.

Dans cette section, on démontre le théorème 1.5, on utilise aussi des opérateurs paradifférentiels. Nous transformons d'abord nos problèmes en problèmes d'équations aux dérivées partielles. C désignera diverses constantes.

PROPOSITION 1.15. - Soit u une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème 1.5, u est alors une solution de l'équation d'Euler (0.9).

Démonstration : D'après l'hypothèse 2) du théorème 1.5, pour $t\in\mathbb{R}$, on a $I(u) \leq I(u+t\varphi)$ pour tout $\varphi\in C_0^\infty(K)$ réelle. On fixe pour le moment $\varphi\in C_0^\infty(K)$ et on définit $\psi(t) = I(u+t\varphi)$. La fonction ψ appartient alors à $C^\infty(\mathbb{R})$ et atteint son minimum en $t=0$. On a alors

$$\psi'(0) = \int\left(\sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha}(x,u,\nabla u)\varphi_\alpha + f_z(x,u,\nabla u)\varphi\right)dx = 0 .$$

Comme c'est vrai pour tout $\varphi\in C_0^\infty(K)$, on a obtenu

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \partial_\alpha f_{p_\alpha}(x,u,\nabla u) - f_z(x,u,\nabla u) = 0$$

sur K. C'est la proposition.

Après cette proposition, nos problèmes sont transformés en problèmes de régularité d'une solution de l'équation (0.10). Pour cette équation on a la propriété suivante :

PROPOSITION 1.16. - Si u est la fonction du théorème 1.5, on a alors

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x)\,,\,\nabla u(x))\xi_\alpha\,\xi_\beta \geq 0\,,\ \ \forall(x,\xi)\in T^*(\Omega)\ .$$

C'est la condition nécessaire de Legendre, voir J. Morrey [3].

Maintenant, on construit une estimation a priori pour l'opérateur linaire suivant

$$(5.1) \qquad L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha \, a_{\alpha\beta} \, \partial_\beta + b$$

où $a_{\alpha\beta}(x) = f_{p_\alpha p_\beta}(x,u(x)\ ,\nabla u(x)) \in C^2(\Omega)$.

$$b(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} f_{p_\alpha z}(x,u(x)\ ,\nabla u(x)) - f_{zz}(x,u(x)\ ,\nabla u(x)) \in C^1(\Omega)\ .$$

On a l'estimation suivante :

<u>*PROPOSITION*</u> <u>*1.17.*</u> *- Soit u une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème 1.5. L est l'opérateur (5.1), on a alors pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe $C(K)>0$, $\varepsilon(K)>0$ tels que*

$$(5.2) \qquad \|v\|_\varepsilon^2 \leqslant C\left\{ \|Lv\|_0^2 + \|v\|_0^2 \right\},\ \forall v \in C_0^\infty(K)\ .$$

<u>Démonstration</u> : D'après la définition, $\forall\, x\in K$, il existe $K(x)\ ,C(x)\ ,\ \varepsilon(x)$ tels que

$$I(u+t\varphi) \geqslant I(u) + t^2\, C(x)\,\|\varphi\|_\varepsilon^2\ ,\ \forall\varphi\in C_0^\infty(K(x))\ .$$

On fixe, pour le moment, $\varphi\in C_0^\infty(K(x))$ et on définit $\psi(t) = I(u+t\varphi)$. On sait que $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi'(0)=0$, il existe donc $|\theta|<|t|$, tel que

$$I(u+t\varphi) = I(u) + t^2\,\psi''(\theta)$$

où

$$\psi''(\theta) = \int_\Omega \Big\{ \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta}(x, u+\theta\varphi, \nabla u + \theta\nabla\varphi)\varphi_\alpha \varphi_\beta +$$

$$+ 2 \sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha z}(x, u+\theta\varphi, \nabla u+\theta\nabla\varphi)\varphi_\alpha \varphi +$$

$$+ f_{zz}(x, u+\theta\varphi, \nabla u+\theta\nabla\varphi)\varphi^2 \Big\} dx \ ,$$

on obtient

$$\psi''(\theta) \geqslant C(x) \ \|\varphi\|_\varepsilon^2 \ ,$$

mais $\psi''(\theta)$ est continu. Prenons $t \to 0$, on a $\psi''(\theta) \to \psi''(0)$ par intégration par parties

$$(5.3) \qquad C(x)\|\varphi\|^2_{\varepsilon(x)} \leqslant - (L\varphi, \varphi) \ , \ \forall \varphi \in C_0^\infty(K(x)) \ .$$

On prend $\varepsilon(K) = \inf_{x \in K} \{\varepsilon(x)\}$, on a $\varepsilon(K) > 0$, comme K est compact, il existe $x_j \in K$, $j = 1,\dots,N$ tels que $\{K(x_j)\}$ soit un recouvert de K et sur $K(x_j)$ on a l'estimation (5.3). Supposons $\{\varphi_j\}$ une partition de l'unité sur $\{K(x_j)\}$, $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j \equiv 1$ sur K,

$$v \in C_0^\infty(K) \ , \ v = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j v \ , \ \varphi_j v \in C_0^\infty(K(x_j)) \ .$$

Il résulte de (5.3)

$$\|v\|^2_{\varepsilon(K)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_j v\|^2_{\varepsilon(x_j)} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{C(x_j)} |(L\varphi_j v, \varphi_j v)|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{C(x_j)} \Big\{ |(Lv, \varphi_j^2 v)| + |([L, \varphi_j]v, \varphi_j)| \Big\}$$

$$\leqslant C \Big\{ \|Lv\|_0^2 + \|v\|_0^2 + \sum_{j=1}^{N} \|[L, \varphi_j]v\|_0^2 \Big\} \ .$$

Maintenant, on majore $\| [L , \varphi] v \|_0^2$

$$[L , \varphi] = 2 \sum_{\alpha=1}^{n} (\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \varphi) L_\alpha + \varphi_0$$

où $L_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \partial_\beta$, $\varphi_0 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \varphi$, on a donc

$$\sum_{j=1}^{N} \| [L , \varphi_j] v \|_0^2 \leqslant C \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \| L_\alpha v \|_0^2 + \| v \|_0^2 \right\} .$$

En vertu de la proposition 1.16, on a $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha \xi_\beta \geqslant 0$, pour tout $(x,\xi) \in T^*(\Omega)$. Il résulte donc de la proposition 1.6.

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \| L_\alpha v \|_0^2 \leqslant C \left\{ | (L v , v) | + \| v \|_0^2 \right\} . \tag{5.4}$$

On a donc démontré la proposition.

Pour terminer la démonstration du théorème 1.5. on associe, comme dans la section I, à l'équation (0.9) un opérateur paradifférentiel

$$P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial_\alpha A_{\alpha\beta} \partial_\beta + B \tag{5.5}$$

où $A_{\alpha\beta}$ associé au symbole $a_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} f(x,u(x) ,\nabla u(x)) \in C^2(\Omega)$ et B associé au symbole $b(x) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} f_{p_\alpha p_\beta z} \partial^2_{\alpha\beta} u(x) + \sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha zz} \partial_\alpha u + \sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha z x_\alpha} - f_{zz} \in C^1(\Omega)$. En modifiant le lemme 1.2, on peut démontrer que $(P - L)$ applique continûment $H^{\frac{\varepsilon}{2}}$ dans L^2. En effet, en utilisant la décomposition « en couronnes dyadiques » de (1.6), pour $a \in C_0^2(\Omega)$, $b \in H^{-2+\frac{\varepsilon}{2}}$, $a b - T_a b \in H^{\frac{\varepsilon}{2} - \delta} \subset L^2$ on a donc

$$\| v \|_\varepsilon^2 \leqslant C \left\{ \| P v \|_0^2 + C' \| v \|_{\frac{\varepsilon}{2}}^2 + \| v \|_0^2 \right\}$$

mais $\|v\|^2_{\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant \delta\|u\|^2_\varepsilon + C(\delta)\|v\|^2_0$, pour δ suffisamment petit. Avec une autre constante C, on a donc obtenu

(5.6) $$\|v\|^2_\varepsilon \leqslant C\left\{\|Pv\|^2_0 + \|v\|^2_0\right\}, \quad \forall v \in C_0^\infty(K)$$

où K est un compact de Ω.

En utilisant la proposition 1.16 et les inégalités (5.4) et (5.6), on peut obtenir une estimation a priori sur la chaine des espaces de Sobolev.

<u>PROPOSITION 1.18</u>. - Soit P l'opérateur (5.5), $\forall K \subset \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$, il existe alors $\varepsilon(K) > 0$, $C(K,t) > 0$, tels que

(5.7) $$\|v\|^2_{t+\varepsilon} \leqslant C\left\{\|Pv\|^2_t + \|v\|^2_t\right\}, \quad \forall v \in C_0^\infty(K).$$

En fait, l'inégalité (5.7) est aussi vraie pour tout $v \in H^{t+2}_{comp}(K)$.

Si u est une fonction réelle dans le théorème 1.5, il résulte du théorème 1.6. que

(5.8) $$Pu = g \in C^3(\Omega) \cap H^3_{loc}(\Omega).$$

Nous faisons maintenant tout à fait comme dans le théorème 1.7. On peut déduire $u \in C^3(K) \cap H^{3+\varepsilon}(K)$, par récurrence il résulte enfin que $u \in C^\infty(K)$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.5.

§.1.6. Propriétés de l'estimation de minimum local de calcul des variations.

L'estimation (0.11) possède des propriétés très intéressantes. On va étudier les rapports entre la solution de l'équation (0.9) et l'estimation (0.11). On pose $g_j(x,\xi) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_{p_k p_j}(x)(i\,\xi_k)$, $g_{j+n}(x,\xi) = (-i)|\xi|^{-1} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \partial x_j \tilde{f}_{p_\alpha p_\beta}(x)$ $(i\,\xi_\alpha)(i\,\xi_\beta)$, $j=1,\dots,n$. Pour $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant 2n$, $|\alpha|=k$, on définit la fonction $g_\alpha(x,\xi)$ comme dans (0.3). On a alors :

<u>THEOREME</u> <u>1.9</u>. - *Soit u une solution réelle de l'équation (0.9) dans $C^\rho_{loc}(\Omega)$, $\rho>3$. On suppose que $I(u)<+\infty$, $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \tilde{f}_{p_\alpha p_\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant 0$ pour tout $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^n$, avec les notations ci-dessus. Pour tout compact K de Ω, on suppose encore qu'il existe un entier $r \geqslant 1$, $\rho \geqslant r+2$, et une constante $C>0$, tels que*

$$(6.1) \qquad |\xi|^2 \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant r} |g_\alpha(x,\xi)|^2$$

pour tout $(x,\xi)\in K\times S^{n-1}_\xi$. On a alors que, pour tout compact K de Ω, si $\delta =$ diamètre de K suffisamment petit, il existe deux constantes $C>0$, $1\geqslant\varepsilon>0$, tels que

$$(6.2) \qquad I(u) + C\|\varphi\|^2_\varepsilon \leqslant I(u+\varphi)$$

pour tout $\varphi\in C_0^\infty(K)$ réelle.

<u>Démonstration</u> : Prenons $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ réelle, en posant $\psi(t)=I(u+t\varphi)$ on a $\psi(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\psi'(0)=\int\left(\sum_{\alpha=1}^{n} f_{p_\alpha}(x,u,\nabla u)\partial_\alpha\varphi + f_z(x,u,\nabla u)\varphi\right)dx$. Comme u est une solution de l'équation (0.9), $\psi'(0)=0$. On peut donc écrire

$$\psi(t) = I(u+t\varphi) = I(u) + t^2\psi''(\theta)$$

avec $\theta\in\,]-t,t[$, il suffit donc de démontrer $\psi''(0)\geqslant C\|\varphi\|^2_\varepsilon$ pour certains $C>0$,

$0 < \varepsilon \leqslant 1$ indépendant de φ

$$\psi''(0) = \int \Big(\sum_{\alpha\beta=1}^{n} \tilde{f}_{p_\alpha p_\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi + 2 \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{f}_{p_\alpha z} \partial_\alpha \varphi\varphi + \tilde{f}_{zz} \varphi^2 \Big) dx$$

$$= (L\varphi, \varphi)$$

où

$$L = - \sum_{\alpha\beta=1}^{n} \partial_\alpha \tilde{f}_{p_\alpha p_\beta} \partial_\beta + (\tilde{f}_{zz} - \sum_{\alpha=1}^{n} \partial_{x_\alpha} \tilde{f}_{p_\alpha z}) \tag{6.3}$$

$$= L_2 + b(x) .$$

On doit donc démontrer que, pour tout compact K de Ω, si δ suffisamment petit, il existe deux constantes $C > 0$, et $0 < \varepsilon \leqslant 1$, tels que

$$C \, \|\varphi\|_\varepsilon^2 \leqslant (L\varphi, \varphi) \tag{6.4}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$ réelle.

On définit un système d'opérateurs pseudo-différentiels G_j dont les symboles sont $g_j(x,\xi)$, $j = 1,\dots,2n$. Nous faisons comme dans la démonstration de la proposition 1.3. Pour tout compact K de Ω, il existe $C > 0$ tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \|G_j \varphi\|_0^2 \leqslant C \, (L_2 \varphi, \varphi)$$

de plus dans (2.4), $E^o = - \Delta^{\frac{1}{2}} E^{-1}$, son symbole principal est égal à 1. On a donc

$$\sum_{j=1}^{2n} \|G_j \varphi\|_0^2 \leqslant C \Big\{ (L_2 \varphi, \varphi) + \|v\|_0^2 \Big\}$$

par la méthode de la démonstration de la proposition 1.5. pour tout compact K de Ω, $|\alpha| = k$, il existe $C > 0$, et $0 < \varepsilon_k \leqslant 1$ tels que

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k} \| G_\alpha \varphi \|^2_{\varepsilon_k - 1} \leqslant C \left\{ \sum_{j=1}^{2n} \| G_j \varphi \|^2_0 + \| \varphi \|^2_0 \right\}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. En utilisant l'hypothèse (6.1), on a

$$(6.5) \qquad \| \varphi \|^2_{\varepsilon_r} \leqslant C \sum_{|\alpha|\leqslant r} \| G_\alpha \varphi \|^2_{\varepsilon_r - 1} \leqslant C \left\{ (L_2 \varphi, \varphi) + \| \varphi \|^2_0 \right\}.$$

Si δ suffisamment petit, il résulte de (6.5) l'estimation suivante :

$$(6.6) \qquad \| \varphi \|^2_{\varepsilon_r} \leqslant 2\, C_1 \; (L_2 \varphi, \varphi)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$.

En effet, s'il existe $\varphi_0 \in C_0^\infty(K)$ telle que

$$(L_2 \varphi_0, \varphi_0) \leqslant \| \varphi_0 \|^2_0$$

il résulte de (6.5) $\| \varphi_0 \|^2_{\varepsilon_r} \leqslant 2\, C_1 \, \| \varphi_0 \|^2_0$ mais en vertu de l'inégalité de Poincaré et du principe d'interpolation

$$(6.7) \qquad \| \varphi \|^2_0 \leqslant C_2 \, \delta \, \| \varphi \|^2_\varepsilon$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. C_2 ne dépends que de ε et n, on a alors $\| \varphi_0 \|^2_0 \leqslant C_2 \, \delta \, \| \varphi_0 \|^2_{\varepsilon_r} \leqslant 2\, C_1 C_2 \, \delta \, \| \varphi_0 \|^2_0$ si δ suffisamment petit tel que $2\, C_1 C_2 \, \delta < 1$, on a obtenu une contradiction.

On démontre maintenant pour δ suffisamment petit

$$(L_2 \varphi, \varphi) + 2(b \varphi, \varphi) \geqslant 0$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$. Il résulte de (6.6) et (6.7)

$$|2(b\varphi,\varphi)| \leqslant C_3\|\varphi\|_0^2 \leqslant C_2 C_3 \delta \|\varphi\|_{\varepsilon_r}^2 \leqslant 2C_1C_2C_3\delta(L_2\varphi,\varphi)$$

en choisissant δ suffisamment petit tel que $2C_1C_2C_3\delta \leqslant 1$, il résulte de (6.6) l'estimation suivante

$$\|\varphi\|_{\varepsilon_r}^2 \leqslant 4C_1(L\varphi,\varphi)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.9.

Si l'équation (0.9) peut s'écrire sous la forme (0.2), nous faisons des hypothèses pour le système X_j, $j=1,\dots,r$ et nous aurons la même conclusion mise à part que la condition est aussi nécessaire. Plus précisément, on a :

<u>THEOREME</u> <u>1.10.</u> - *Soit u une fonction réelle satisfaisant les hypothèses du théorème 1.5. Supposons que l'équation (0.9) puisse s'écrire sous la forme (0.2). On a alors que $\{X_j,\ j=1,\dots,r\}$ est un système de champs de vecteurs C^∞, vérifiant la condition de Hörmander i.e. en tout point x de Ω, les champs X_j et leurs crochets d'ordre finis restreints en x engendrent $T_X\Omega$ tout entier.*

<u>Démonstration</u> : En vertu du théorème 1.5, $u \in C^\infty(\Omega)$, $\{X_j\}$ est donc un système de champs de vecteurs C^∞. On a aussi l'inégalité (5.3) i.e. pour $x \in \Omega$, il existe un voisinage compact K de x dans Ω, et deux constantes $C>0$, $1 \geqslant \varepsilon > 0$ tels que

$$\|\varphi\|_\varepsilon^2 \leqslant C\ (L\varphi,\varphi)$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$ où $L = -\sum_{j=1}^r X_j^2 + C$.

Comme les coefficients de X_j sont réels C^∞, on a

$$X_j^* = -X_j + C_j\ .$$

On en déduit enfin

(6.8) $$\|\varphi\|_{\varepsilon}^{2} \leqslant C\left\{ \sum_{j=1}^{n} \|X_j \varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2 \right\}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$.

D'après le théorème 1.1. de J. Nourrigat [6] l'estimation (6.8) est équivalente à ce que les champs X_j et leurs crochets d'ordre inférieur ou égal à $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, engendrent $T\overset{\circ}{K}$, ce qui termine la démonstration du théorème 1.10.

BIBLIOGRAPHIE DE PREMIERE PARTIE

[1] J.M. BONY :
Calcul symbolique et propagations des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ,
Ann. Scient. Ec. Sup. 4ème (1981), 209-246.

[2] J.M. BONY :
Cours au Colloque de Saint Jean-de Monts ,
(Juin 1984).

[2] C.B. MORREY :
Multiple integrals in the calculs of variations ,
Springer Verlag, Berlin 1966.

[4] L. HÖRMANDER :
Hypoelliptic second order differential equations ,
Acta. Math., 119 (1967), 147-171.

[5] J.J. KOHN :
Pseudo-differential operators and hypoellipticity ,
C.I.M.E., Stresa 1968.

[6] J. NOURRIGAT :
Réduction microlocale des systèmes d'opérateurs pseudo-différentiels ,
(manuscrit).

[7] O.A. OLEINIK et E.D. RADKEVIC :
Second order equations non negative characteristic form ,
Amer. Math. Soc. Providence (1973).

[8] Y. MEYER :
Régularités des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires ,
Séminaire Bourbaki, 1979-1980, n° 560.

[9] K. YAMAMOTO :
Hypoelliptic second order differential operators with complex coefficients ,
Studies in anal. Adv. Math. supplementary studies, 4 (1979), 123-133.

II. - REGULARITE DES SOLUTIONS POUR LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES NON-LINEAIRES ASSOCIEES A UN SYSTEME DE CHAMPS DE VECTEUR.

§.2.0. Introduction.

Soient $X_1, \ldots, X_p$ des champs de vecteurs réels, C^∞, sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. On se propose de donner des conditions suffisantes de régularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires de la forme suivante :

(1)
$$F(x, X^\alpha u, |\alpha| \leqslant m) = 0$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant p$, $|\alpha| = k$. $X^\alpha = X_{\alpha_1} \ldots X_{\alpha_k}$, $F(x, p_\alpha) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$.

On désigne $[X_{\alpha_1}, \ldots, [X_{\alpha_{k-1}}, X_{\alpha_k}] \ldots]$ par X_α et on définit

$$V_j = \text{l'espace engendré par } \{X_\alpha ,\ |\alpha| \leqslant j\} .$$

On suppose que $X_1, \ldots, X_p$ satisfont aux deux conditions suivantes :

(i) Il existe un entier $r \geqslant 1$, tel que V_j est égal à $T_x\Omega$ à chaque point $x \in \Omega$.

(ii) $\dim V_j$ est constant pour $x \in \Omega$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Sous ces conditions, à un voisinage de chaque point, on peut trouver une base $\{X_{j,k} ; j = 1, \ldots, r\}$ de V_r, où X_{jk} est un crochet d'ordre j , et $\{X_{j,k} , j \leqslant q\}$ forme une base de V_q. On suppose que $\{X_{1k}\} = \{X_1, \ldots, X_p\}$ forme une base de V_1 , c'est-à-dire que $X_1, \ldots, X_p$ sont linéairement indépendants (sinon, selon la condition (ii) on peut les remplacer par un autre système linéairement indépendant qui vérifie encore les hypothèses (i) et (ii)).

Pour un point $x \in \Omega$ fixé, un choix de $\{X_{jk}\}$ définit un système de coordonnées locales près de x, par l'application Q_x :

(2) $$Q_x(y) = u = (u_{jk}) = Q(x,y) \quad \text{si} \quad y = \exp(\Sigma\, u_{jk} X_{jk})\, x$$

où exp désigne l'application exponentielle définie dans un voisinage de x. On identifie donc un voisinage de x dans Ω avec un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, on définit

(3) $$X_{jk,x} = Q_x^*(X_{jk})$$

où Q_x^* est le différentiel de Q_x. $X_{jk,x}$ est donc une nouvelle écriture de X_{jk} sous les coordonnées (u_{jk}).

Sur $\mathbb{R}^n$, avec les coordonnées $u = (u_{j,k})$, on introduit une dilatation $\delta_t(u_{jk}) = (t^j u_{jk})$ pour $t > 0$, une fonction $f(u)$ est dite homogène de degré S si $f(\delta_t u) = t^S f(u)$. Un opérateur différentiel de la forme $f(u) \frac{\partial}{\partial u_{jk}}$ est dit homogène de degré S si $f(u)$ est homogène de degré $j - S$. Un opérateur différentiel D sur $\mathbb{R}^n$ est dit de degré local $\leqslant j$ si son développement de Taylor à 0 est une somme des opérateurs différentiels homogènes de degré $\leqslant j$. Metivier a démontré dans [5] le lemme suivant :

LEMME 2.1. - Pour tout $x \in \Omega$, le degré local de $X_{j,x}$ est $\leqslant 1$, on peut donc écrire

(4) $$X_{j,x} = \hat{X}_{j,x} + R_{j,x} \quad , \quad j = 1,\ldots,p$$

où $\hat{X}_{j,x}$ est homogène de degré 1, et R_{jx} est de degré local $\leqslant 0$. $\{\hat{X}_{j,x}\}$ engendre une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}_x$ de dimension n et de rang r ; l'application $x \to \hat{X}_{j,x}$ est lisse.

Pour $x \in \Omega$, on désigne par G_x le groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe correspondant à g_x.

Avec les hypothèses (i) et (ii), g_x et G_x possèdent les propriétés suivantes :

$$g_x = \sum_{j=1}^{r} g_x^j \; ; \; [g_x^j \, ; g_x^k] \subset g_x^{j+k} \;, \text{ si } \; j+k \leqslant r \tag{5}$$

$\dim g_x^j = n_j$ indépendant de x, et δ_t définit un automorphisme de g_x par $\delta_t \big| g_x^j = t^j g_x$ pour $t > 0$. Une algèbre satisfaisant (5) est dite graduée. $\{G_x \, , x \in \Omega\}$ est dit une famille lisse de groupe de Lie nilpotent. La dimension homogène de G_x est définie comme $q = \sum_{j=1}^{r} j \, n_j$, la norme homogène de G_x est définie par

$$||u|| = \left\{ \sum_{j=1}^{r} \sum_{k} |u_{jk}|^{\frac{2r!}{j}} \right\}^{\frac{1}{2r!}} .$$

Maintenant, on revient à l'équation que l'on va étudier. On suppose éventuellement que F est linéaire par rapport à certaines variables de p_α, auquel cas on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} F(x,X^\alpha u) = & \sum_{k_0<k\leqslant m} \; \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x,X^\beta u)_{|\beta|\leqslant p(K)} \; X^\alpha u \\ & + A_{k_0}(x,X^\beta u)_{|\beta|\leqslant k_0} \end{aligned} \tag{6}$$

où on peut supposer $p(K) < k$, on pose alors

$$d = \max\left(K_0 \, , \, \frac{k+p(K)}{2} \right) .$$

On suppose que u est une fonction réelle dans $C^{2d+1}(\Omega)$, et on désigne par L l'opérateur linéarisé de l'équation (1) associé à u

$$(7) \qquad L = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\partial}{\partial p_\alpha} F(x, X^\alpha u(x))\, X^\alpha = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, X^\alpha \text{ sur } \Omega .$$

D'après la définition du nombre d, on a alors $a_\alpha \in C^{|\alpha|+1}(\Omega)$ réels. Notre résultat est le suivant :

<u>THEOREME</u> <u>2.1.</u> - Supposons que u est une solution réelle de l'équation (1) et appartient à $C^{2d+1}(\Omega)$ et que $\{X_j\}$ satisfait les hypothèses (i) et (ii). $\hat{L}_{x_0} = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x_0)\hat{X}_{x_0}^\alpha$ l'opérateur différentiel invariant à gauche sur le groupe de Lie G_{x_0} pour un point fixé $x_0 \in \Omega$. Si pour toute représentation Π unitaire, irréductible, non triviale de G_{x_0}, l'opérateur $\Pi(\hat{L}_{x_0})$ est injectif dans φ_Π (où φ_Π désigne l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation), on a alors que u est C^∞ dans un voisinage de x_0.

B. Helffer et J. Nourrigat [4] ont démontré l'équivalence entre l'injectivité de $\Pi(\hat{L}_{x_0})$ et l'hypoellipticité de $\hat{L}_{x_0}$ sur G_{x_0}. Notre démonstration est donc faite à partir de l'hypothèse d'hypoellipticité de l'opérateur $\hat{L}_{x_0}$ sur G_{x_0}.

Dans la section 2.1, on démontre le théorème 2.1. à partir d'une estimation a priori pour l'opérateur linéarisé de (7). Dans la section 2.2. on construit la solution fondamentale pour les opérateurs différentiels invariants à gauche $\hat{L}_x = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\hat{X}_x^\alpha$ sur le groupe G_x pour x près de x_0. Dans la section 2.3, en utilisant les résultats de la section 2.2., on obtient une estimation a priori pour l'opérateur linéarisé (7).

§.2.1. Démonstration du théorème 2.1.

Nous allons démontrer le théorème 2.1. Comme dans §.1.1 on obtient l'hypoellipticité de l'opérateur paradifférentiel de Bony, associé à l'équation (1). Pour le détail de la théorie des opérateurs paradifférentiels on renvoie à J.M. Bony [1]. On rappelle seulement les résultats dont on va se servir.

Soit $\tilde{L}$ l'opérateur paradifférentiel associé à l'équation (1), il est de la forme $\tilde{L} = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha X^\alpha$, où A_α d'ordre 0 associé au symbole a_α définis dans (7).

LEMME 2.2. - Soit u une solution réelle de l'équation (1) comme dans le théorème 2.1. L l'opérateur (7), on a alors

1) l'opérateur $(L-\tilde{L})$ applique continûment $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

2) $\tilde{L}\,u \in C^{2d+1}(\Omega) \cap H^{2d+1}_{loc}(\Omega)$.

Le théorème 2.1 résultera du théorème suivant :

THEOREME 2.2. - Soit $L = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\, X^\alpha$ l'opérateur (7). Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 soient satisfaites. Il existe alors un voisinage U de x_0, tel que quelque soit K compact de U, on ait une constante C tel que

$$\sum_{|\alpha|\leq m} \| X^\alpha \varphi \|_0^2 \leq C \left\{ \| L\varphi \|_0^2 + \| \varphi \|_0^2 \right\} \tag{8}$$

pour tout $\varphi \in C_0^\infty(K)$.

Le but des sections 2.2. et 2.3. est de démontrer ce théorème. On montre maintenant que le théorème 2.2 implique le théorème 2.1.

résulte de l'estimation suivante ·

(9) $$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|X^{\alpha}\varphi\|_0^2 \leqslant C\left\{\|\tilde{L}\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right\}$$

pour tout $\varphi \in C_0^{\infty}(K)$. On a encore une estimation pour le système des champs de vecteurs.

<u>LEMME</u> <u>2.3.</u> – *(voir §.1.6 dans [7]).*

Supposons que $X_1,\dots,X_p$ satisfait l'hypothèse (i) pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe alors une constante $C>0$ telle que

(10) $$\|\varphi\|_{\frac{1}{r}}^2 \leqslant C\left\{\sum_{j=1}^{p} \|X_j\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right\}$$

pour tout $\varphi \in C_0^{\infty}(K)$.

Les estimations (9) et (10) résultent donc de la suivante :

(11) $$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|X^{\alpha}\varphi\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}^2 \leqslant C\left\{\|\tilde{L}\varphi\|_0^2 + \|\varphi\|_0^2\right\}$$

pour tout $\varphi \in C_0^{\infty}(K)$. En fait, cette estimation est encore vraie pour tout $\varphi \in H^m_{comp}(K)$.

<u>THEOREME</u> <u>2.3.</u> – *Si l'opérateur $\tilde{L}$ satisfait l'estimation (11), on a l'implication suivante, $\forall s \in \mathbb{R}^1$,*

(12) $$\left.\begin{array}{l} u \in H^s_{loc}(U) \\ \tilde{L}u \in H^s_{loc}(U) \end{array}\right\} \Longrightarrow X^{\alpha}u \in H_{loc}^{s+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)\ ;\ |\alpha|\leqslant m .$$

Ce théorème implique évidemment le théorème 2.1 parce que si u est une solution de l'équation (1) dans $C^{2d+1}(\Omega) = C^{2d+1}(\Omega)\cap H^{2d+1}_{loc}(\Omega)$, en vertu du lemme 2.2, $\tilde{L}u \in H^{2d+1}_{loc}(\Omega)$. Le théorème 2.3 résulte de $u \in H^{2d+\frac{m}{r}+1}(U)$, on refait cela et on en déduit enfin que $u \in C^\infty(U)$.

Démonstration du théorème 2.3. : On la fait en plusieurs étapes.

a) On montre d'abord l'implication suivante où K est un compact de U

$$(13)\qquad \left.\begin{array}{l} v \in H^0_{comp}(K) \\ X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(\mathbb{R}^n)\ ;\ |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L} v \in H^0(\mathbb{R}^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K) \\ |\alpha| \leqslant m \end{array}$$

On définit un opérateur

$$T_\varepsilon = a(x)\ (1 - \varepsilon \Delta_x)^{-\frac{m}{2}}\ b(x)$$

où $a,b\ C_0^\infty(U)$, $a \equiv 1$ sur K, $b \equiv 1$ sur $\operatorname{supp} a = K'$, on a alors $T_\varepsilon : H^0_{loc}(U) \to H^m_{comp}(K')$. T_ε est borné dans H^0 pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$, de plus

$$(14)\qquad \begin{array}{l} [X^\alpha, T_\varepsilon] = \displaystyle\sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|-1} T_{\beta\alpha\varepsilon}\, X^\beta \\ [\tilde{L}, T_\varepsilon] = \displaystyle\sum_{|\alpha| \leqslant m-1} T_{\alpha\varepsilon}\, X^\alpha \end{array}$$

où $T_{\alpha\varepsilon}$, $T_{\beta\alpha\varepsilon}$ sont bornés dans H^0, et à support compact. Comme $T_\varepsilon v \in H^m_{comp}(K')$, on peut utiliser (11) pour obtenir

$$(15)\qquad \sum_{|\alpha| \leqslant m} \| X^\alpha T_\varepsilon v \|_{\frac{(m-|\alpha|)}{r}} \leqslant C \left\{ \| \tilde{L} T_\varepsilon v \|_0^2 + \| T_\varepsilon v \|_0^2 \right\}.$$

En utilisant (14), avec une autre constante on a

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \|T_\varepsilon X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)} \leqslant C\Big\{ \|T_\varepsilon \tilde{L} v\|_0^2 + \|v\|_0^2$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \|X^\alpha v\|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|-1} \|X^\beta v\|_{\frac{1}{r}(m-|\beta|)} \Big\}$$

$$\leqslant C\Big\{ \|\tilde{L} v\|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \|X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)} + \|v\|_0^2 \Big\}$$

$$\leqslant C\Big\{ \|\tilde{L} v\|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|X^\alpha v\|_{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)} \Big\}$$

Il en résulte que $a(x)\, X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}$, $|\alpha| \leqslant m$, comme a est quelconque , $X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$.

b) On montre maintenant l'implication suivante :

$$(16) \qquad \left.\begin{array}{l} v \in H^0_{loc}(U) \\ X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}_{loc}(U) \ ; \ |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L} v \in H^0_{loc}(U) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}_{loc}(U) \\ |\alpha| \leqslant m \end{array}$$

quelque soit $\varphi_1 \in C_0^\infty(U)$, $K = \operatorname{supp} \varphi_1$ un compact de U, on pose

$$u = \varphi_1 v \quad , \quad u \in H^0_{comp}(K)$$

$$(17) \qquad X^\alpha u = \varphi_1 X^\alpha v + [X^\alpha, \varphi_1] v$$

où $[X^\alpha, \varphi_1] = \sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|-1} a_{\alpha\beta} X^\beta$, $a_{\alpha\beta}$ à support compact et borné sur H^0, on a donc $[X^\alpha, \varphi_1] v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}_{comp}$, $|\alpha| \leqslant m$ et d'après l'hypothèse $\varphi_1 X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(\mathbb{R}^n)$;

$|\alpha| \leqslant m$. On déduit donc $X^\alpha u \in H^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(\mathbb{R}^n)$, par la même méthode, on peut obtenir $\tilde{L} u \in H^o(\mathbb{R}^n)$. En appliquant a), on a $X^\alpha u \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$, $|\alpha| \leqslant m$. Regardons (17), on obtient $\varphi_1 X^\alpha v \in H^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(K)$ donc $X^\alpha v \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$.

c) On montre maintenant l'implication dans la chaine de l'espace de Sobolev, $\forall t \in \mathbb{R}^1$,

$$\left.\begin{array}{l} v \in H_{loc}^t(U) \\ X^\alpha v \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U) \ ; \ |\alpha| \leqslant m \\ \tilde{L} v \in H_{loc}^t(U) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} X^\alpha v \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U) \\ |\alpha| \leqslant m \end{array} \tag{18}$$

Soit $\Lambda \in L_{c\ell}^t(U)$ un opérateur pseudo-différentiel elliptique à support propre

$$[X^\alpha, \Lambda] = \sum_{|\beta| \leqslant |\alpha|-1} a_{\alpha\beta} X^\beta$$

$$[L, \Lambda] = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} a_\alpha X^\alpha$$

où a_α, $a_{\alpha\beta}$ sont des opérateurs bornés d'ordre t et à support propre. On pose

$$u = \Lambda v, \quad u \in H_{loc}^o(U)$$

$$X^\alpha u = X^\alpha \Lambda v = \Lambda X^\alpha v + [X^\alpha, \Lambda] v . \tag{19}$$

On a donc $X^\alpha u \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$, de la même façon $\tilde{L} u \in H_{loc}^o(U)$ en appliquant b), on obtient $X^\alpha u \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$, $|\alpha| \leqslant m$ vérifie (19), on a $\Lambda X^\alpha v \in H_{loc}^{\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U)$. Enfin

$$X^{\alpha} v \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-|\alpha|)}(U) .$$

d) Dans le théorème, $u \in H_{loc}^{s}(U)$ on a donc pour $|\alpha| \leqslant m$, $X^{\alpha} u \in H_{loc}^{s-|\alpha|}(U)$. On pose $s-m=t$ comme $s-|\alpha| \geqslant s-m+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)$, on a

$$X^{\alpha} u \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U) .$$

En utilisant c), on déduit

$$X^{\alpha} u \in H_{loc}^{t+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}(m-1-|\alpha|)}(U) .$$

On refait cela, il existe un entier N, tel que $t+\frac{N-1}{r} \geqslant s$, ce qui termine la démonstration du théorème 2.3.

§.2.2. Solution fondamentale sur des groupes de Lie nilpotent.

Pour obtenir l'estimation (11), on construit d'abord la solution fondamentale pour l'opérateur $\hat{L}_x = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, X_x^\alpha$ invariant à gauche sur le groupe de Lie G_x. On a besoin pour cela d'un théorème d'existence abstrait.

<u>THEOREME</u> <u>2.4.</u> – *([2], théorème 2.1)*

Supposons que D est un opérateur différentiel, auto-adjoint, invariant à gauche, homogène de degré $d < q$, sur un groupe de Lie nilpotent G, où q est la dimension homogène de G. Si D est hypoelliptique, il existe alors une unique fonction $k \in C^\infty(G \setminus \{0\})$ homogène de degré $-q+d$, telle que $Dk = \delta$ la mesure de Diriac en 0.

On considère un cas où la proposition est appliqué
Dans [6] L.P. Rotschild a démontré le théorème suivant :

<u>THEOREME</u> <u>2.5.</u> – *Soient L l'opérateur (7), et $\hat{L}_x = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\, \hat{X}_x^\alpha$ l'opérateur différentiel invariant à gauche sur G_x. Supposons que les hypothèses du théorème 2.1 soient satisfaites et que $\hat{L}_x$ est auto-adjoint, homogène de degré $d < q$. Il existe alors un voisinage U de x_0 tel que $\hat{L}_x$ est hypoelliptique pour tout $x \in U$, donc il existe une unique fonction $k_x \in C^\infty(G_x \setminus \{0\})$, homogène de degré $-q+d$, telle que $\hat{L}_x k_x = \delta$.*

En effet, dans [6] Rotschild a démontré qu'il existe une constante $\varepsilon_{x_0} > 0$, quand $|x - x_0| < \varepsilon_{x_0}$, $\hat{L}_x$ possède une solution fondamentale de la forme

$$K_x(u) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j\, k^{(j)}_{x_0,x} \tag{20}$$

où $K^{(j)}_{x_0,x} = (\hat{L}_x - \hat{L}_{x_0})K_{x_0} * (\hat{L}_x - \hat{L}_{x_0})K_{x_0} * \dots * (\hat{L}_x - \hat{L}_{x_0})K_{x_0} * K_{x_0}$ et $K^{(0)}_{x_0,x} = K_{x_0}$ où K_{x_0} la solution fondamentale homogène de $\hat{L}_{x_0}$, les convolutions sont prises sur $G_x \cong \mathbb{R}^n$, $K_x(u)$ est C^∞ par rapport à $u \in G_x \setminus \{0\}$, et C^{m+1} en $x \in U_{x_0} = \{|x - x_0| < \varepsilon_0\}$ où $u = Q_x(y) = \theta(x,y)$, pour $y \in U_{x_0}$. $K_x(u)$ est homogène de degré $-q+d$, et on définit

$$K_x f = f * K_x$$

pour $f \in L^p$, $0 < p < \infty$, la convolution est prise sur G_x, K_x applique continûment L^p dans L^ℓ avec $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{p} - \frac{d}{q}$ et satisfait

$$(21) \qquad \hat{L}_x(K_x f) = \hat{L}_x(f * K_x) = f * \hat{L}_x K_x = f$$

mais $\hat{L}_x$ est auto-adjoint, on a donc encore

$$(21)' \qquad K_x(\hat{L}_x f) = \hat{L}_x f * K_x = f * \hat{L}_x K_x = f .$$

Comme pour tout $x \in U_{x_0}$, $\hat{L}_x$ est hypoelliptique, on peut remplacer x_0 par un autre $z \in U_{x_0}$. En utilisant le théorème 1.7, il existe $\varepsilon_z > 0$ quand $|x - z| < \varepsilon_{x_0}$, on peut construire la solution fondamentale K_x comme dans (20) à partir de K_z. Donc si on définit

$$(22) \qquad K(x,y) = K_y(\theta(y,x))$$

K est définie sur $U_{x_0} \times U_{x_0}$, $K_y(u)$ est C^∞ pour $u \neq 0$, C^{m+1} pour $y \in U_{x_0}$.

Avec cette fonction K, on peut obtenir l'estimation (8) dans la section suivante.

§.2.3. Estimation a priori pour l'opérateur linéarisé.

On déduit l'estimation (8) en utilisant la fonction (22). Prenons $a,b \in C_0^\infty(U)$, $b \equiv 1$ sur $\operatorname{supp} a$, on définit un opérateur sur $C_0^\infty(U)$

(23) $$K f = \int a(x)\ K(x,y)\ b(y)\ f(y)\ dy.$$

On étudie d'abord les propriétés de l'opérateur K. On introduit une classe d'opérateurs qu'on appelle opérateurs de type (λ,α).

Une fonction $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est dite de type λ , si h est homogène de degré $-q+\lambda$, par rapport à la dilatation et q la dimension homogène avec $0 \leqslant \lambda < q$, si $\lambda = 0$, on suppose de plus que

(24) $$\int_{a \leqslant \|u\| \leqslant b} h(u)\ du = 0$$

pour tout a , b avec $0 < a < b < \infty$.

Une distribution de type $\lambda > 0$ est obtenue par une fonction de type λ , une distribution de type 0 est de la forme $C\,\delta + \tau$, où C est une constante et τ est une distribution obtenue par une fonction de type 0 (valeur principale). On a

<u>*LEMME*</u> <u>*2.4.*</u> *- Soit* h *une distribution de type* $\lambda \geqslant 1$ *,* $D\,h$ *est alors de type* $\lambda - 1$ *, pour tous les opérateurs homogènes de degré 1.*

On donne une définition qui généralise la fonction K.

<u>*DEFINITION 4.*</u> *- Une fonction $T(x,y)$ sur $U \times U$ est dite un noyau de type (λ,α), avec $\lambda,\alpha \geq 0$ si elle est de la forme suivante*

$$T(x,y) = \sum_{j=1}^{s} a_j(x)\, T_y^j(\theta(y,x))\, b_j(y) \tag{25}$$

où $a_j, b_j \in C_0^\infty(U)$. $T_y^j(u)$ est C^∞ en $u \neq 0$, et une distribution de type $\geq \lambda$ $C^{\alpha+1}$ en y.

Un opérateur de type (λ,α) est une application T définie sur $C_0^\infty(U)$ par

$$Tf(x) = \int T(x,y)\, f(y)\, dy .$$

<u>*PROPOSITION 2.1.*</u> *- Soit T un opérateur de type (λ,α), $\lambda,\alpha \geq 0$. Si $\lambda \geq 1$, $X_j T$ est de type $(\lambda-1,\alpha)$. Si, $\lambda, \alpha \geq 1$, TX_j est de type $(\lambda-1, \alpha-1)$ pour $1 \leq j \leq p$.*

<u>Démonstration</u> : On considère d'abord $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned} X_j Tf(x) &= \int X_j^x\, T(x,y)\, f(y)\, dy \\ TX_j f(x) &= \int T(x,y)\, X_j^y f(y)\, dy \\ &= \int (-X_j^y\, T(x,y) + C_j(y)\, T(x,y))\, f(y)\, dy \end{aligned} \tag{26}$$

où $C_j \in C^\infty$, X_j^x désigne X_j opérant sur les variables x. Il suffit donc de démontrer que si $T(x,y)$ est un noyau de type (λ,α), $X_j^x\, T(x,y)$ est un noyau de type $(\lambda-1,\alpha)$ et $X_j^y\, T(x,y)$ est un noyau de type $(\lambda-1,\alpha-1)$. Evidemment, on peut considérer $T(x,y) = a(x)\, T_y(\theta(y,x))b(y)$, $T_y(u)$ homogène de degré $-q+\lambda$ pour un point y fixé dans les coordonnées $x \to u = \theta(y,x)$. On peut écrire

$$X_j^x = X_j = \hat{X}_{j,y} + R_{j,y}$$

où $\hat{X}_{j,y}$ homogène de degré 1, $R_{j,y}$ de degré $\leqslant 0$

$$\begin{aligned} X_j^x\, T(x,y) &= (X_j\, a(x))\, T_y(\theta(y,x))\, b(y) \\ &+ a(x)\ (\hat{X}_{j,y}\, T_y(u))\, b(y) \qquad (27) \\ &+ a(x)\ (R_{j,y}\, T_y(u))\, b(y) \end{aligned}$$

où $\hat{X}_{j,y}$, $R_{j,y}$ opèrent sur les variables $u = Q_y(x)$ en utilisant le lemme 1.8. $\hat{X}_{j,y} T_y(u)$ est de type $\lambda - 1$, $R_{j,y} T_y(u)$ de type λ, ils sont $C^{\alpha+1}$ en y. On a démontré que $X_j^x T(x,y)$ est un noyau de type $(\lambda-1, \alpha)$.

On peut aussi écrire, pour x fixé

$$X_j^y = X_j = \hat{X}_{jx} + R_{jx}$$

où $\hat{X}_{jx}$ homogène de degré 1, R_{jx} de degré 0 opère sur les variables $u = Q_x(y) = \theta(x,y)$ mais on a

$$\theta(x,y) = -\theta(y,x) = \theta(y,x)^{-1}$$

$$\begin{aligned} X_j^y\, a(x)\ T_y(\theta(y,x))b(y) &= a(x)\ (X_j^y\, T_y(-u))\, b(y) \\ &+ a(x)\ (\hat{X}_{jx}\, T_y(-u))\, b(y) \\ &+ a(x)\ (R_{jx}\, T_y(-u))\, b(y) \\ &+ a(x)\, T_y(-\theta(x,y))X_j^y\, b(y) \end{aligned}$$

où $X_j^y\, T_y(u)$ est encore homogène de degré $-q + \lambda$, C^∞ en $u \neq 0$, mais C^α en y.

$\hat{X}_{jx}T_y(u)$ homogène de degré $-q+\lambda-1$, C^∞ en $u \neq 0$, $C^{\alpha+1}$ en y. $R_{jx}\ T_y(u)$ homogène de degré $-q+\lambda$, C^∞ en $u \neq 0$, $C^{\alpha+1}$ en u, on a démontré que $X_j^y\ T(x,y)$ est un noyau de type $(\lambda-1, \alpha-1)$.

Pour $\lambda = 1$, la démonstration est pareille, sauf une modification. On doit démontrer que si $T(u)$ est de type 1, $\hat{X}_j\ T(u)$ est de type 0, selon le lemme 1.8 $\hat{X}_j\ T(u)$ est homogène de degré $-q$. Il nous reste donc à vérifier (24). En effet, $\hat{X}_j\ T(u)$ est une distribution de type 0, elle est de la forme $C\delta + \tau$, τ satisfait (24), $\hat{X}_j\ T(u)$ satisfait donc (24). On a enfin démontré la proposition.

PROPOSITION 2.2. - *Les opérateurs de type 0 sont bornés dans* L^2.

Démonstration : Un opérateur de type 0 peut s'écrire en

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

où T_1 est de la forme suivante

$$T_1 f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|\theta(x,y)|>\varepsilon} a_1(x)\ T_{1y}(\theta(y,x))\ b_1(y)\ f(y)\ dy \tag{28}$$

$T_{1y}(u)$ est homogène de degré $-q$, C^∞ en $u \neq 0$, C^1 en y. T_2 est un opérateur de type (λ,α), avec $\alpha \geqslant 0$, $\lambda > 0$; T_3 est une multiplication par un élément de $C_0^\infty(U)$.

Evidemment, T_3 est borné dans L^2, pour T_2 comme $\lambda > 0$, on a

$$|a_2(x)\ T_y(\theta(y,x))\ b_2(y)| \leqslant C\ |\theta(y,x)|^{\lambda-q}$$

$$\int |a_2(x)\ T_y(\theta(y,x))\ b_2(y)|\ dy \leqslant C$$

$$\int |a_2(x)\ T_y(\theta(y,x))\ b_2(y)|\ dx \leqslant C$$

alors

$$|T_2 f(x)| = \left| \int a_2(x)\, T_y(\theta(y,x))\, b_2(y)\, f(y)\, dy \right|$$

$$\leqslant \left(\int \left| a_2(x)\, T_y(\theta(y,x))\, b_2(y) \right| dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \left| a_2(x)\, T_y(\theta(y,x))\, b_2(y) \right| \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, |f(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant C \left(\int \left| a_2(x)\, T_y(\theta(y,x))\, b_2(y) \right| \cdot |f(y)|^2\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\| T_2 f \|^2_{L^2} = \int |T_2 f(x)|^2\, dx$$

$$\leqslant C \iint \left| a_2\, T_y(\theta(y,x))\, b_2(y) \right| \, |f(y)|^2\, dy\, dx$$

$$\leqslant C' \int |f(y)|^2\, dy = C' \, \| f \|^2_{L^2} \, .$$

Il nous reste donc à démontrer que T_1 est borné dans L^2. Nous faisons comme dans [3]. On désigne $a_1(x)\, T_{1y}(\theta(y,x))\, b_1(y)$ par $T_1(x,y)$, il nous faut seulement démontrer

1) $|T_1(x,y)| \leqslant C\, |\theta(x,y)|^{-q}$

2) $\left| \displaystyle\int_{\varepsilon<|\theta(x,y)|<\delta} T_1(x,y)\, dy \right| \leqslant C\, (\delta - \varepsilon)$

3) l'estimation suivante :

$$|T_1(x,y) - T(x,z)| \leqslant C\, \| \theta(x,y) - \theta(x,z) \| \, \| \theta(x,y \|^{-q-1}$$

quand $\| \theta(x,y) \| \geqslant C \| \theta(y,z) \|$, avec C assez grand.

Mais 1) est obtenu par $T_{1y}(u)$ homogène de degré $-q$. Pour 2) dans les coordonnées de $y \to u = \theta(x,y)$, $dy = (1 + O(u))du$, on a donc

$$\int_{\varepsilon < \|\theta(x,y)\| < \delta} T_1(x,y)dy = \int_{\varepsilon < \|u\| < \delta} a_1(x)\, T_{1y}(-u)\, b_1(y)\, (1 + O(u)du$$

comme $\int_{\varepsilon < |u| < \delta} T_{1y}(-u)du = 0$, $|T_{1y}(-u)| \leqslant C\|u\|^{-q}$, on a

$$\left| \int_{\varepsilon < \|\theta(x,y)\| < \delta} T_1(x,y)dy \right| \leqslant C \int_{\varepsilon < \|u\| < \delta} \|u\|^{-q+1}\, du \leqslant C\,(\delta - \varepsilon)\ .$$

Pour obtenir 3) on note $u = \theta(y,x)$, $v = \theta(z,x)$, $\rho(x,y) = \|\theta(x,y)\|$. Dans [3] on a démontré que si $\rho(x,y)$, $\rho(y,z) \leqslant C$, il y a une estimation

$$\|\theta(x,y) - \theta(x,z)\| \leqslant C\left(\rho(y,z) + \rho(y,z)^{\frac{1}{2}}\, \rho(x,y)^{\frac{1}{2}}\right).$$

On a donc que si $\rho(x,y) \geqslant C\,\rho(z,y)$, alors

$$\|u\| = \rho(x,y) \geqslant C'\left(\rho(z,y) + \rho(z,y)^{\frac{1}{2}}\, \rho(x,y)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\geqslant C'\ \|\theta(y,x) - \theta(z,x)\| = C'\ \|u - v\|\ .$$

On choisit C' telle que $C' \geqslant 2$, l'estimation pour $|T_1(x,y) - T_1(x,z)|$ quand $\rho(x,y) \geqslant C\,\rho(y,z)$ devient l'estimation pour $|T_{1y}(u) - T_{1z}(v)|$ quand $\|u\| \geqslant 2\,\|u-v\|$

On peut écrire

$$T_{1y}(u) - T_{1z}(v) = \left(T_1 y(u) - T_{1z}(u)\right) + \left(T_{1z}(u) - T_{1z}(v)\right)$$

pour le premier terme, comme $T_{1y}(u)$ est C^1 en y et $y \to \theta(x,y)$ est un difféomorphisme

$$|T_{1y}(u) - T_{1z}(u)| = |y-z|\ |T'_{1,y+\theta(y-z)}(u)|$$

$$\leqslant C\ ||\theta(x,y) - \theta(x,z)||\ \ ||u||^{-q}$$

$$\leqslant C'\ ||\theta(x,y) - \theta(x,z)||\ \ ||u||^{-q-1}$$

pour le deuxième terme, comme $T_{1z}(u)$ est homogène de degré $-q$, on a

$$|T_{1z}(u) - T_{1z}(v)| \leqslant \sup_{||u|| \geqslant 2||u-v||} \left|T'_{1z}\left(\frac{u+\theta(u-v)}{||u||}\right)\right| ||u-v||\ \ ||u||^{-q-1}$$

mais quand $||u|| \geqslant 2\,||u-v||$,

$$1 - \frac{1}{2} \leqslant \frac{||u+\theta(u-v)||}{||u||} \leqslant 1 + \frac{1}{2}$$

donc $\sup |T'_{1z}((u+\theta(u-v))/||u||)| \leqslant C$. On a obtenu 3), ce qui termine la démonstration de la proposition.

Maintenant, on démontre l'estimation (8). On pose

(28) $$L' = L_m^* \cdot L_m + \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)^{2m}$$

où s est choisi avec $s+q > 2m$, L' définit sur $\Omega \times \mathbb{R}^s$, le système de champs de vecteurs $\left\{X_1,\dots,X_p\,;\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_s}\right\}$ satisfait encore les hypothèses i) et ii). Dans l'introduction, la dimension homogène de groupe $G_{(x,t)}$ égale à $s+q$, d'après le théorème de Helffer-Nourrigat [4] , $\hat{L}'_{(x_0,t)}$ est hypoelliptique pour tout $t \in \mathbb{R}^s$ si $\hat{L}_{x_0}$ est hypoelliptique. Sur tout $\hat{L}'_{(x,t)}$ satisfait les hypothèses du théorème 1.7, il existe donc un voisinage $U \times M$ de $(x_0,0)$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^s$ avec $\overline{U}, \overline{M}$ compact et une fonction $K'_{(x,t)}$ qui satisfait (21) et (21)'. On définit

(29) $$K' f(x,t) = \int a(x,t)\, K'_{(y,\tau)}\, (\theta(y,\tau,x,t))\, b(y,\tau)\, f(y,\tau)dy\, d\tau$$

où $a,b \in C_0^\infty(U\times M)$. K' est alors un opérateur de type $(2m,m)$.

On désigne par $\bar{x} = (x,t)$, $\bar{y} = (y,\tau) \in U\times M$

(30) $$L_m^* \cdot L_m = \sum_{|\alpha|=m} X^{*\bar{\alpha}}\, a_\alpha \cdot \sum_{|\beta|=m} a_\beta\, X^\beta$$

où $\bar{\alpha} = (\alpha_k,\ldots,\alpha_1)$ si $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$, $a_\alpha \in C^{m+1}$, $|\alpha| = m$ et $X_j^* = -X_j + C_j$, $C_j \in C^\infty(\Omega)$, $j = 1,\ldots,p$ en vertu du lemme 1.1, on peut écrire près de x

(31) $$L_m^* \cdot L_m = (L_m^* \cdot L_m)\hat{}_x + R_x$$

où

(32) $$R_x = \sum_{|\alpha|\leq m} b_\alpha\, X^\alpha \cdot \sum_{|\alpha|\leq m-1} R_\alpha\, C_\alpha\, X^\alpha$$

où $b_\alpha \in C^\infty(U)$, $C_\alpha \in C^m(U)$. R_α opérateur d'ordre 0 avec les coefficients C^∞.

Quelque soit un compact $K\subset U$, prenons $a,b \in C^\infty(U\times M)$, $a(\bar{x}) = a_1(x)\, a_2(t)$ avec $a_1 \equiv 1$ sur K, $b \equiv 1$ sur $\mathrm{supp}\, a$, $a_1 \in C_0^\infty(U)$, $a_2 \in C_0^\infty(M)$, on a alors, pour $f \in C_0^\infty(K)$

$$\begin{aligned} K' L' f &= \int a(\bar{x}) K'(\bar{x},\bar{y})\; b(\bar{y})\; L' f(y)dy\, d\tau \\ &= \int a(\bar{x})\; K'(\bar{x},\bar{y})\; \hat{L}'_{y,\tau}\; b(\bar{y})\; f(y)dy\, d\tau \\ &+ \int a(\bar{x})\; K'(\bar{x},\bar{y}) \left[b(\bar{y}) \; , \; \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial}{\partial t_j}\right)^{2m} \right] f(y)\; dy\, d\tau \\ &+ \int a(\bar{x})\; K'(\bar{x},\bar{y})\; b(\bar{y})\; R_y f(y)dy\, d\tau \\ &= \int a(\bar{x})\; \delta_{(\bar{x}-\bar{y})}\; b(\bar{y})\; f(y)dy\, d\tau \\ &+ \int a(\bar{x})\; K'(\bar{x},\bar{y})\; b(\bar{y})\; R_y f(y)\, dy\, d\tau \end{aligned}$$

$$+ \int a(\bar{x})\ K'(\bar{x},\bar{y})\ \tilde{b}(\bar{y})\ f(y)dy\,d\tau$$

$$= a_2(t)\ f(x) + \int a(\bar{x})\ K'(\bar{x},\bar{y})\ \tilde{b}(\bar{y})\ f(y)dy\,d\tau$$

$$+ \int a(\bar{x})\ K'(\bar{x},\bar{y})\ b(\bar{y}) \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha X^\alpha \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} R_\alpha C_\alpha X^\alpha\ f(y)dy\,d\tau$$

où $\tilde{b}(\bar{y}) \in C_0^\infty(U\times M)$.

D'après la proposition 1.10 $K' \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha X^\alpha$ est un opérateur de type (m,m) on a donc, pour $|\beta|\leqslant m$,

$$X^\beta K' \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha X^\alpha$$

est un opérateur de type (0,0).

D'après la proposition 1.11, ils sont bornés dans L^2, pour la même raison, $X^\alpha K' X^{*\bar{\beta}}$ est un opérateur de type (0,0) pour $|\alpha|\leqslant m$, $|\beta|\leqslant m$, mais

$$K' L_m^* \cdot L_m = \sum_{|\beta|=m} K' X^{*\bar{\beta}} a_\beta L_m .$$

On obtien enfin

$$a_2(t) \sum_{|\alpha|\leqslant m} X^\alpha f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \sum_{|\beta|=m} X^\alpha K' X^{*\bar{\beta}} a_\beta L_m f$$

$$+ \sum_{|\alpha|\leqslant m} X^\alpha \tilde{K}' f - \sum_{|\alpha|\leqslant m} X^\alpha K' \sum_{|\beta|\leqslant m} b_\beta X^\beta \sum_{|r|\leqslant m-1} R_r C_r X^r f$$

(32) $$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \| X^\alpha f \|_0^2 \leqslant C \left\{ \| L_m f \|_0^2 + \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \| X^\alpha f \|_0^2 \right\}$$

où on a utilisé $\int_M d\tau = C < +\infty$, finalement on a obtenu

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \| X^{\alpha} f \|_0^2 \leqslant C\left\{ \| L f \|_0^2 + \| (L_m - L) f \|_0^2 + \sum_{|r|\leqslant m-1} \| X^r f \|_0^2 \right\}$$

$$\leqslant C' \left\{ \| L f \|_0^2 + \sum_{|\beta|\leqslant m-1} \| X^{\beta} f \|_0^2 \right\} .$$

D'après le lemme 1.4

$$\sum_{|\beta|\leqslant m-1} \| X^{\beta} f \|_0^2 \leqslant C \left\{ \sum_{|\beta|\leqslant m} \| X^{\beta} f \|_{-\frac{1}{r}}^2 \right\}$$

$$\leqslant C\left\{ \delta \sum_{|\beta|\leqslant m} \| X^{\beta} f \|_0^2 + C(\delta) \| f \|_0^2 \right\}$$

on choisit $\delta > 0$ assez petit, et on arrive à l'estimation (8)

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} \| X^{\alpha} f \|_0^2 \leqslant C\left\{ \| L f \|_0^2 + \| f \|_0^2 \right\}$$

$\forall f \in C_0^{\infty}(K)$, la constante C ne dépend que du compact K et des coefficients de L . On a donc terminé la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE DE DEUXIEME PARTIE

[1] J.M. BONY :

Calcul symbolique et propagations des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ,

Ann. Scient. Ec. Sup., 4ème série, 1981, 209-246.

[2] G.B. FOLLAND :

Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups ,

Arkiv. f. Mat., 13 (1975), 161-207.

[3] G.B. FOLLAND and E.M. STEIN :

Estimates for the $\bar{\partial}_b$ *complex and analysis on the Heisenberg group* ,

Comm. P. A. Math. 27 (1974), 429-522.

[4] B. HELFFER et J. NOURRIGAT :

Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nolpotent gradué ,

Comm. in P.D.E., 4 (8), (1979), 899-958.

[5] G. METIVIER :

Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'opérateurs non-elliptiques ,

Comm. in P.D.E., 1 (5), (1976), 467-519.

[6] L.P. ROTSCHILD :

A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields ,

Comm. in P.D.E., 4 (6), (1979), 645-699.

[7] L.P. ROTSCHILD and E.M. STEIN :

Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups ,

Acta Math., 137, (1976), 247-320.