XAVIER GUYON

Semi-martingales à indice dans $\mathbb{R}^2$

Thèses d'Orsay, 1980

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1980__0091__P0_0>

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Xavier GUYON

en collaboration avec Bernard PRUM

Sujet de la Thèse : *SEMI-MARTINGALES A INDICE DANS* $\mathbb{R}^2$.

Soutenue le 11 juin 1980 devant le Jury composé de :

D. DACUNHA-CASTELLE Président
J. BRETAGNOLLE
J.M. BONY
M. DUFLO
P.A. MEYER
J.B. WALSH

Nous remercions très vivement Didier Dacunha-Castelle qui a dirigé, depuis des années, notre travail de chercheur et d'enseignant, s'intéressant à son développement, et qui nous a donné de nombreuses idées et des conditions de recherche très favorables.

Nous tenons également à remercier chaleureusement P.A. Meyer pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et pour les conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de nous prodiguer.

Notre reconnaissance va aussi à J.B. Walsh qui nous a conseillé de façon déterminante quand nous avons commencé à travailler "en double indice".

Nous remercions aussi grandement Marie Duflo, Jean Bretagnolle et Marc Yor d'avoir accepté de faire partie de notre jury.

Jean-Claude Bermond et Jean-Michel Bony nous ont donné nos sujets de secondes thèses et ont suivi avec attention le travail qu'elles ont demandé. Qu'ils en soient remerciés ici.

Nous tenons aussi à remercier Patrice Assouad, qui s'est montré toujours disponible pour répondre aux questions que nous pouvions lui poser.

Mesdames A.M. Baillet, N. Parvan et C. Simon ont tapé notre texte avec un soin, une diligence, mais aussi une amabilité dont nous les remercions le plus sincèrement possible. Enfin tous nos remerciements vont à Mesdames Zielinski et Launay qui ont achevé avec compétence la réalisation matérielle de ce travail.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

LES PROCESSUS SPATIAUX EN STATISTIQUE.

Le point de départ et le but de ce travail sont constitués de problèmes statistiques sur les champs aléatoires dans le domaine particulier de l'agronomie : des mesures sont faites sur un champ, soit ponctuellement (mesure relative à un plant, par exemple), soit de façon intégrée (rendement sur une parcelle) et il s'agit d'en retirer des conclusions quant au phénomène biologique observé.

L'idée qui consiste à modéliser le champ par un processus à indice dans $\mathbb{R}^2$ est très naturelle et très ancienne ([1,2,3]). Dans l'esprit des premiers auteurs, il s'agissait, dans le cas d'une mesure intégrée sur une parcelle, d'apprécier la variabilité de cette mesure en fonction de la taille et de la forme de la parcelle (loi de F. SMITH) ([2,3,4]) et non de modéliser les corrélations entre les réponses sur les différentes parcelles. De même, pour estimer les effets des traitements appliqués aux différentes parcelles, on procède à la randomisation (cf. [8]) dans la répartition de ces traitements sur les parcelles dans le but de faire disparaître les effets du 1er ordre associés à chaque parcelle , et non de faire disparaître les corrélations entre les mesures sur les différentes parcelles.

C'est donc d'abord dans un but de choix optimum de plan d'expérience en agronomie que nous avons abordé l'étude des processus à indice double ([15,18,19,22,23]). Mais il est clair que l'étude statistique de tels processus (élaboration de modèles, choix d'un modèle parmi plusieurs, estimations des paramètres, etc...) se rencontre dans de nombreuses branches : cartographie, épidémiologie, usinage des surfaces en métallurgie, etc...

Il est intéressant de remarquer que la démarche consistant à prendre en compte la structure des corrélations spatiales d'un champ agricole est en fait très ancienne. MERCER et HALL [1] (1911) avaient essayé d'appréhender de façon quantitative ce phénomène et avaient mesuré les corrélations entre parcelles d'un champ de blé en fonction des écarts horizontaux s et verticaux t entre ces parcelles. Le tableau ci-dessous donne leurs résultats :

Rendement en grain de 50 x 25 parcelles.

Autocorrélation pour les données de grain de blé.

t	s = 0	s = 1	s = 2	s = 3	s = 4
- 3	0.1880	0.1602	0.1509	0.1276	0.1352
- 2	0.1510	0.0234	0.0020	- 0.0137	- 0.1039
- 1	0.2923	0.1853	0.1349	0.0788	0.0878
0	1.0000	0.5252	0.4055	0.3639	0.3561
1	0.2923	0.2354	0.1799	0.1205	0.1399
2	0.1510	0.1285	0.0999	0.0749	0.0859
3	0.1880	0.1935	0.2483	0.2415	0.2284

Cette démarche a cependant été rapidement délaissée avant d'être reprise beaucoup plus tard : il faut attendre les travaux de WHITTLE ([6,10]), de MATERN ([9,15]) et de MATHERON ([13]) pour que la dépendance spatiale soit effectivement prise en compte.

On peut penser que les idées de FISHER (1930, [11]) (en particulier ses travaux sur l'analyse de la variance et la théorie des plans d'expérience) qui ont eu une influence décisive sur l'école statistique en général et sur la pratique de l'expérimentation agricole en particulier, on détourné le courant principal de recherche dans ce domaine de la conception en terme de processus. On peut analyser cette cristallisation des plans d'expériences agricoles autour de l'analyse de la variance à partir de deux éléments : d'une part l'efficacité des résultats obtenus, d'autre part la taille raisonnable des calculs demandés à une période où on ne disposait pas des moyens de calculs d'aujourd'hui.

La conceptualisation de modèles de processus spatiaux est, dans le cas discret, l'analogue à deux indices de l'outil des séries chronologiques sur la droite : ces modèles de processus à un indice ont connu un large développement et ont fait preuve d'une grande efficacité dans de nombreux domaines (économétrie, automatique, biologie, etc...).

Dans l'extension de la théorie de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z}^2$ on constate déjà un grand nombre de différences dont on peut situer les racines, outre dans le fait que $\mathbb{Z}^2$ est dépourvu d'ordre total naturel, dans la carence de certains théorèmes vrais à une dimension et non à plusieurs : citons par exemple le théorème de D'ALEMBERT, donc la factorisation des polynômes, le théorème de FEJER affirmant que tout polynôme trigonométrique positif est le carré d'un autre polynôme trigonométrique. ([20])

Tout en utilisant certaines méthodes de l'analyse de la variance, nous montrons ([18,22] comment la connaissance de la structure au second ordre du processus sous-jacent permet d'accroître de façon notable la précision de l'estimation de certains effets traitements en choisissant un plan, à la fois bien adapté à l'analyse de la variance, mais aussi au modèle de champ. Cette démarche conduit donc de façon directe à la modélisation du champ par un modèle de processus et à l'estimation de ce modèle.

Nous avons abordé ce problème d'abord de façon non paramétrique : estimation des covariances en fonction de la distance ([21]), puis de façon paramétrique ([25]) (estimation des paramètres d'un processus stationnaire sur $\mathbb{Z}^d$). Nous avons ensuite étudié des modèles, d'abord à indice discret ([18,19,20,21,22,24,25]) , puis à indice continu ([26,46]).

Une classe de processus à indice réel a connu un développement particulièrement important ces dernières années : c'est celle des processus ARMA (cf. par exemple [27]). Aux modèles AR et MA du cas unidimensionnel, il convient d'ajouter une classe plus riche (du fait de la carence du théorème de FEJER sur $\mathbb{R}^n$ si $n > 1$) : les modèles aux lois conditionnelles ELC ([12,14,16 ,17,20]). Dans [25] nous montrons par exemple comment le modèle ELC de dépendance des quatre voisins les plus proches s'ajuste particulièrement bien aux données de MERCER et HALL. Il s'avère donc que la modélisation d'un processus plan continu par de tels modèles sur $\mathbb{Z}^d$ (ici $d = 2$) est un outil statistique très satisfaisant, mais on a discrétisé une situation spatiale en réalité continue.

En fait, cette discrétisation n'est pas la seule voie possible pour l'étude des processus spatiaux. En particulier, elle ne rend pas compte de l'intégration faite sur les parcelles, et d'autre part, cette intégration peut masquer le modèle continu sous-jacent du processus. Il se peut par exemple que le modèle continu soit plus simple et plus explicatif que le modèle discret ; dans certains cas, la théorie des processus continus mettra à notre disposition des outils dont on ne dispose pas pour les processus discrets ; un exemple en est le théorème de GIRSANOV qui nous donne une expression exacte de la vraisemblance d'un processus, alors que sur Z^d, on fera appel en général à des vraisemblances approchées du processus.

On est donc amené à se tourner vers une théorie plus riche , mais aussi plus délicate à manipuler : celle des processus à indice dans $\mathbb{R}^2$.

SEMI-MARTINGALE A DOUBLE INDICE.

La théorie des processus à indice continu réel s'est développée depuis les années 30, à partir essentiellement des travaux de KOLMOGOROV et de DOOB. La théorie générale des processus constitue à l'heure actuelle une branche en plein développement. Ce n'est que plus récemment, essentiellement depuis les travaux de WONG et ZAKAI (1974), et de CAIROLI et WALSH (1975), que la théorie des processus à plusieurs indices a connu un important développement, et l'on peut augurer qu'elle est loin d'être "achevée".

L'extension à $\mathbb{R}^2$ d'une théorie développée sur $\mathbb{R}$ ne se limite nullement à étendre des résultats au moyen d'un formalisme nouveau : certaines propriétés vraies sur $\mathbb{R}$ ne le sont plus sur $\mathbb{R}^2$, et par contre des notions nouvelles existent sur $\mathbb{R}^2$. Nous tâcherons de souligner par la suite de telles différences.

Par contre, la théorie des processus sur $\mathbb{R}^2$ contient en substance celle des processus sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; le passage de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{R}^n$ se limitant en grande partie à la recherche d'un bon formalisme.

Par ailleurs c'est essentiellement pour des raisons de commodité que l'on se limitera souvent à travailler sur $\mathbb{R}_+^2$, comme c'est l'habitude en la matière dans la littérature, de même que l'on étudie communément les martingales sur $\mathbb{R}_+$. Nous signalerons comment certaines propriétés se généralisent à $\mathbb{R}^2$.

Les deux grands axes de développement de la théorie, que ce soit sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^2$, sont celui de la <u>théorie des processus markoviens</u> et celui de la <u>théorie des martingales</u>. L'une permet de résumer le passé à un présent, qui peut par exemple sur $\mathbb{R}$, être réduit à la valeur en un point, en plusieurs points, ou en le germe en un point. Nous n'aborderons pas dans ce travail cet aspect markovien de la théorie des processus sur $\mathbb{R}^2$. Signalons cependant un type de propriété intermédiaire entre les propriétés markoviennes et les propriétés martingales : la propriété de Markov au sens de Hida ([26]).

Nous développerons ici la théorie dans l'axe des martingales à deux indices, et même plus généralement des semi-martingales à deux indices. Nous étudierons en particulier très en détail le cas où la filtration de base de l'espace de probabilité est la filtration brownienne.

Martingales sur un ensemble partiellement ordonné général.

La théorie générale des martingales à indice dans un ensemble ordonné filtrant (directed set) général s'est développée autour des travaux de KRICKEBERG ([55]), CHOW ([39]), HELMS ([53]) dans les années 60. Elle fait apparaître les problèmes nouveaux et les difficultés liés au fait que l'ordre est partiel.

Soit T un tel ensemble muni d'un ordre noté $\leq$. Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espace de probabilité complet. Soit $\{\mathfrak{F}_z\}_{z\in T}$ une famille de sous-tribus de $\mathfrak{F}$ vérifiant

(F1) La famille $\mathfrak{F}$ est croissante : $z \leq z' \Rightarrow \mathfrak{F}_z \subseteq \mathfrak{F}_{z'}$

(F2) Chaque $\mathfrak{F}_z$ est complète

(F3) La famille $\mathfrak{F}_z$ est "continue à droite", ce qui signifie :

$$\forall z \qquad \mathfrak{F}_z = \bigcap_{\substack{z\leq z' \\ z\neq z'}} \mathfrak{F}_{z'}$$

Une telle famille de tribus s'appellera une filtration.

Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ à valeurs réelles. On dira que X est adapté si pour tout z, X_z est $\mathfrak{F}_z$-mesurable, que X est mesurable s'il est mesurable pour la tribu produit $\mathfrak{F}\times\mathfrak{B}$ où $\mathfrak{B}$ est la tribu des boréliens (pour l'ordre) de T.

Définition 1 : $\{X_z\}_{z\in T}$ est une sous-martingale si X_z est adapté, intégrable pour chaque z et tel que si :

$$z \le z' \Rightarrow X_z \le E(X_{z'} | \mathfrak{F}_z)$$

X_z est une martingale si X_z et $-X_z$ sont des sous-martingales, c'est-à-dire

$$z \le z' \Rightarrow X_z = E(X_{z'} | \mathfrak{F}_z)$$

Signalons quelques aspects de la théorie générale (l'ordre n'est pas nécessairement total).

La décomposition de KRICKEBERG d'une sous-martingale X bornée dans L^1 en $X = Y - Z$, où Y et Z sont deux sous-martingales positives, existe.

Il en est de même des théorèmes de convergence métrique quand $z \to z_o$, $z < z_o$ des sous-martingales (convergence en probabilité, convergence dans L^p, $p \ge 1$) : pour assurer une telle convergence, il suffit de vérifier la convergence d'une suite $\{X_{z_n}\}$ où $\{z_n\}$ est une suite croissante tendant vers z_o , et donc d'avoir un critère de Cauchy.

Par contre si l'ordre n'est que partiel, on n'a plus de théorème de convergence presque sûre, et l'on n'a plus de résultat sur l'existence de versions régulières d'une martingale. En effet ces propriétés sont liées à l'existence d'inégalités maximales pour les martingales que l'on n'obtiendra qu'au prix d'une hypothèse supplémentaire sur la filtration .

Deux jeux d'hypothèses ont été envisagés.

Condition de VITALI.

On ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur T, mais l'on suppose que $\{\mathfrak{F}_z\}$ est telle que pour toute famille $\{A_z\}_{z\in T}$, telle que $A_z \in \mathfrak{F}_z$, pour tout ϵ positif, il existe un sous-ensemble fini d'indices $z_1, z_2, \dots, z_n$ de T et des événements $B_{z_i} \in \mathfrak{F}_{z_i}$

incompatibles vérifiant $B_{z_i} \subseteq A_{z_i}$, $i = 1,n$ et

$$P[\lim \operatorname{ess} \sup_T A_z - \bigcup_{i=1,n} B_{z_i}] \le \varepsilon$$

Cette condition ([55], [77]), difficile à vérifier, permet d'obtenir l'inégalité maximale comme sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall \lambda > 0 \qquad \lambda P[\lim \operatorname{ess} \sup_T X_z \ge \lambda] \le \sup_T E(X_z)$$

pour toute sous-martingale positive X_t. Utilisant la décomposition de KRICKEBERG, on en déduit la convergence p.s. des sous-martingales bornées dans L^1 .

Martingale à indice dans un ensemble produit : la condition F4.

C'est une condition liée au fait que T est muni d'une structure produit : $T = T_1 \times \ldots \times T_n$ et que l'ordre sur T est défini à partir d'ordres totaux sur les T_i.

Donnons cette condition dans le cadre qui sera celui où nous travaillerons par la suite : $T = \mathbb{R}^2_+$, muni de l'ordre partiel (si l'élément générique est noté $z = (s,t')$) :

$$(s_1,t_1) \le (s_2,t_2) \Leftrightarrow (s_1 \le s_2 \text{ et } t_1 \le t_2)$$

Cet ordre est filtrant à gauche et à droite. On notera $z \vee z'$ et $z \wedge z'$ le sup et l'inf de z et z'.

Posons

$$\forall s \in \mathbb{R}_+ , \qquad \mathfrak{F}^1_s = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_{st}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ , \qquad \mathfrak{F}^2_t = \bigvee_{s \in \mathbb{R}_+} \mathfrak{F}_{st}$$

On a là deux familles de tribus à un paramètre croissantes, complètes, continues à droite.

Condition F4 : Pour tout (s,t), $\mathcal{F}^1_s$ et $\mathcal{F}^2_t$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_{st}$.

Cette condition a été clairement dégagée dans le travail de CAIROLI et WALSH ([31]); elle peut encore s'écrire

(F4') Pour tout couple z,z' d'éléments de $\mathbb{R}^2_+$, $\mathcal{F}_z$ et $\mathcal{F}_{z'}$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{F}_{z \wedge z'}$,
ou encore

(F4") Pour toute variable X, $\mathcal{F}$-mesurable bornée,

$$E(X| \mathcal{F}_{st}) = E(X| \mathcal{F}^1_s | \mathcal{F}^2_t) = E(X| \mathcal{F}^2_t | \mathcal{F}^1_s)$$

En particulier, sous F4,

$$\mathcal{F}_z \cap \mathcal{F}_{z'} = \mathcal{F}_{z \wedge z'}$$

Une très grande partie de la théorie des martingales à 2 indices va être fondée sur cette condition, que nous supposerons désormais vérifiée. (A partir du chapitre III, nous nous placerons dans le cas de la filtration brownienne qui vérifie F1-F4).

Passés et futur sur $\mathbb{R}^2_+$

Il n'y a pas sur $\mathbb{R}^2$ d'ordre total compatible avec la topologie de la métrique de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire tel que si $d(.,.)$ est la distance, $\forall z,z'$, $[z,z'] = \{\xi,\ z \leq \xi \leq z'\}$ soit contenu dans la boule de centre $\frac{z+z'}{2}$ et de rayon $k.d(z,z')$.

L'ordre lexicographique :

$$z \prec z' \Leftrightarrow t \leq t' \quad \text{ou} \quad (t = t' \text{ et } s \leq s')$$

(si $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$) est total, mais essentiellement unidimensionnel.

L'ordre le plus simple compatible avec la topologie est celui par rapport auquel on a défini la propriété F4 ; on lui associe l'ordre strict :

$$z < z' \Leftrightarrow (z \leq z' \text{ et } z \neq z')$$

et l'ordre renforcé

$$z \ll z' \Leftrightarrow (s < s' \text{ et } t < t')$$

Pour pouvoir comparer tout couple de points, il faut définir un autre ordre, que nous utiliserons ici que sous sa forme renforcée

$$z \curlywedge z' \Leftrightarrow (s < s' \text{ et } t' < t)$$

Différentes notions de passé et de futur d'un point peuvent être définies sur $\mathbb{R}_+^2$: soit le passé :

$$R_z = [0,z] = \{\xi, \xi \in \mathbb{R}_+^2, \xi \leq z\}$$

soit un passé relatif à un seul sens :

$$R_z^1 = \{\xi = (u,v), \xi \in \mathbb{R}_+^2, u \leq s\}$$

(symétriquement R_z^2) , soit le passé large :

$$Q_z = \{\xi = (u,v), \xi \in \mathbb{R}_+^2, u \leq s \text{ ou } v \leq t\} .$$

Symétriquement, on dispose de quatre futurs naturels d'un point, mais on utilisera uniquement :

$$P_z = \{\xi, \xi \in \mathbb{R}_+^2, z \leq \xi\}$$

Conjointement, si l'on associe $\mathfrak{F}_z$ au passé R_z, $\mathfrak{F}_s^1$ est associé à $R_{st}^1 = R_s^1$ et $\mathfrak{F}_t^2$ à R_t^2 . On notera

$$\mathfrak{F}_{st}^* = \mathfrak{F}_s^1 \vee \mathfrak{F}_t^2$$

la tribu associée au passé Q_z .

On dira qu'un processus est i-adapté, $i = 1,2$, si X_{st} est $\mathfrak{F}_{st}^i$-mesurable.

De même sur $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$ on définira la tribu des <u>prévisibles</u> comme étant celle engendrée par les ensembles $]z,z'] \times A$ où $A \in \mathfrak{F}_z$ et les tribus des <u>i-prévisibles</u> $(i = 1,2)$ comme celles engendrées par $]z,z'] \times A$ où $A \in \mathfrak{F}_z^i$. On parlera de processus prévisible, i-prévisible.

Dans le cas de la filtration brownienne, un processus est prévisible si et seulement si il est mesurable etadapté par rapport à la filtration correspondante.

Alors que sur $\mathbb{R}$, il n'y a qu'une façon naturelle de définir l'accroissement d'un processus entre deux instants t et t' : $X(\Delta t) = X(t') - X(t)$, sur $\mathbb{R}^2$, il y en a deux de types .

La première consiste à considérer $X(z') - X(z)$ et il lui correspond l'extension immédiate de la notion de martingale sur $\mathbb{R}_+$ (cf. définition 1).

La deuxième,utilisant la structure produit de $\mathbb{R}_+^2$, associe au borélien de "base" :

$$\Delta =]z,z'] = \{\xi,\ \xi \in \mathbb{R}_+^2\ ,\quad z < \xi \leq z'\}$$

l'accroissement de X sur Δ :

$$X(\Delta) = X(s',t') - X(s',t) - X(s,t') + X(s,t)$$

Il lui correspond la notion de processus croissant (processus auquel on peut associer une mesure de DOLEANS qui permettra de développer la théorie de l'intégrale stochastique), et les notions de <u>martingale faible</u> et de <u>martingale forte</u>.

<u>Définition 2</u> : Soit X un processus adapté, tel que X_z soit intégrable pour tout z

2a) X est une martingale faible si

$$\forall z \leq z' \qquad E\,(X([z,z']) \mid \mathfrak{F}_z) = 0$$

2b) X est une martingable forte si

$$\forall z \leq z' \qquad E\,(X\,([z,z'])\mid \mathcal{F}_z^{\star}) = 0$$

Aux accroissements unidimensionnels en s et en t

$$X\,(\Delta_s,t) = X\,(s',t) - X(s,t) \qquad s \leq t'$$

$$X\,(s,\Delta_t) = X\,(s,t') - X(s,t) \qquad t \leq t'$$

correspondent les notions de martingales à 1 indice.

Définition 3 : X_{st} est une 1-sous-martingale (martingale) si X est $\mathcal{F}^1$-adapté, $\{X_{st}, \mathcal{F}_s^1\}_{s \in \mathbb{R}_+}$ étant, pour tout t une sous-martingale (martingale).

Grâce à (F4) on a alors la propriété

Propriété : X est une sous-martingale si et seulement si c'est à la fois une 1- et une 2- sous-martingale.

Certaines propriétés des martingales à deux indices seront obtenues par l'utilisation successive de propriétés pour des martingales à un indice dans un sens puis dans l'autre.

Inegalité maximale ([29],[31]).

Si X est une sous-martingale positive sur $\mathbb{R}_+^n$

. $\lambda P\,(\sup\limits_z X_z \geq \lambda) \leq A_n + B_n \sup\limits_z E\,[X_z\,(\mathrm{Log}^+ X_z)^{n-1}]$

. Si $p > 1$, $E\,(\sup\limits_z X_z^p) \leq (\frac{p}{p-1})^{np} \sup\limits_z E\,(X_z^p)$

Ces inégalités s'obtiennent par récurrence sur n. Par exemple si n = 2, il suffit d'observer que

$$\sup_z X_z = \sup_s X_s^{\star} \qquad \text{avec} \qquad X_s^{\star} = \sup_t X_{st}$$

où $X_s^{\star}$ est une sous-martingale positive.

Remarquons que, pour $p > 1$, l'inégalité maximale garde la même forme quel que soit n (à la constante multiplicative près), alors que, pour $p = 1$, l'inégalité s'affaiblit lorsque n croît ; aussi sur $\mathbb{R}_+^n$ les théorèmes de convergence p.s. nécessitent-ils des hypothèses de type $L\,(\mathrm{Log}^+ L)^{n-1}$, par exemple

Propriété : Si X_z, $z \in \mathbb{R}_+^2$ est une martingale bornée dans L Log L, alors X_z converge presque sûrement quand $z \to \infty$.

De même, alors que sur $\mathbb{R}_+$ il suffit qu'une martingale soit bornée dans L^1 pour admettre une version cadlag, on a le résultat sur $\mathbb{R}_+^2$:

Propriété [28] : Si X_z, $z \in \mathbb{R}_+^2$ est une martingale bornée dans $L\,\mathrm{Log}^+ L$, alors X admet une version cadlag.

Cadlag signifiant ici

cad : $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z \le z'}} X_{z'} = X_z$ lag : $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z' \ll z}} X_{z'}$ existe

(il y a d'autre part des martingales bornées dans L^1 n'admettant de limites en aucun point).

Les martingales fortes.

Certaines propriétés des martingales sur $\mathbb{R}_+$ se transposent bien à $\mathbb{R}_+^2$ pour les martingales fortes, et non pour les martingales en général :

* Pour elles, on a d'abord une inégalité maximale, comme sur $\mathbb{R}_+$

$$\lambda P\,[\sup_z |M_z| \geq \lambda] \leq 36 \sup_z E(|M_z|) \qquad [78]$$

et donc une martingale forte bornée dans L^1 admet une limite p.s. et une version c a d. Dans le cas de la filtration brownienne, une telle martingale admet une version continue ([38]).

* Un deuxième bon comportement des martingales fortes concerne une

propriété de martingale arrêtée le long d'une ligne d'arrêt ([59, 78, 80]). Si λ est une telle ligne, X_λ et $\mathfrak{F}_\lambda$ le processus et la tribu arrêtés en λ, alors les martingales fortes (nulles sur les axes) sont les seules martingales telles que $\{X_\lambda, \mathfrak{F}_\lambda\}_\lambda$ soit une martingale. Cette propriété utilise les conditionnements intermédiaires par les tribus $\mathfrak{F}^*$ peut être vue comme une propriété markovienne :

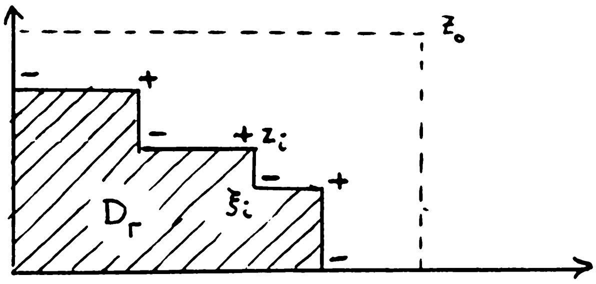
M est une martingale forte si et seulement si

$$E(X_{z_o} \mid \mathfrak{F}_\Gamma) = X_\Gamma$$

pour tout point z_o et toute courbe en escalier,continue, décroissante touchant les deux axes et contenue dans R_{z_o}, où l'on a noté

$$X_\Gamma = X(D_\Gamma) = \sum_i X(z_i) - X(\xi_i)$$

$$\mathfrak{F}_\Gamma = \bigvee_{z \in D_\Gamma} \mathfrak{F}_z$$

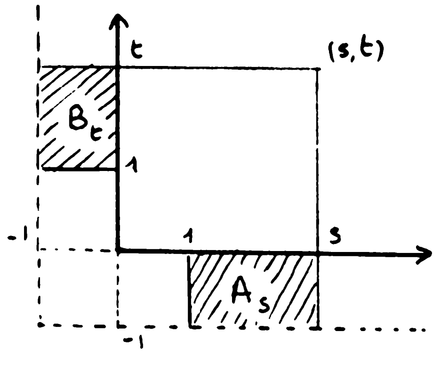


Si alors on approche toute courbe "séparante" Γ de $\mathbb{R}_+^2$ par une suite de telles courbes en escalier on en déduit une propriété markovienne pour les martingales fortes au sens du germe de X le long de Γ. Les martingales non fortes ne vérifieront pas en général une telle propriété : par exemple, si W est le drap brownien la martingale :

$$X_{st} = W(A_s).W(B_t),\ (s,t) \geq (1,1)$$

$$A_s = [1,s] \times [-1,1]$$

$$B_t = [-1,1] \times [1,t]$$



n'est pas markovien relativement à Γ constitué par les deux demi-axes positifs (X_{st} est $\mathfrak{F}_\Gamma$ mesurable, et nul au voisinage de Γ).

Processus croissant associé à une martingale.

M est une martingale sur $\mathbb{R}_+^2$ si et seulement si c'est une martingale sur tout chemin croissant. Soit Γ un tel chemin issu de l'origine, z un point de Γ. Il existe alors, dès que M est dans L^2, un unique processus simplement croissant A^Γ (c'est-à-dire un processus vérifiant $A(z) \leq A(z')$ si $z \leq z'$) et tel $M_z^2 - A_z^\Gamma$ soit une martingale sur Γ. Cependant, en général A^Γ dépend de Γ joignant 0 à z et il n'est pas possible de trouver un processus A simplement croissant tel que M^2-A soit une martingale.

Pour une martingale M de L^2, la décomposition de DOOB-MEYER fait intervenir un processus croissant : il existe un unique processus croissant prévisible A tel que M^2-A soit une martingale faible ([31,62,63]). A travers une telle décomposition, il y a donc une certaine dégradation:passage de martingale à martingale faible. Dans le cas de la filtration brownienne si M est forte, est une martingale forte, le processus M^2 - A sera une martingale, mais $M^2 - \langle A\rangle$ ne pourra jamais être martingale forte. Nous montrons (cf. chapitre IV, § 2.2, Chapitre VI) qu'une telle dégradation n'existe plus si nous travaillons dans la classe des martingales faibles représentables, A étant choisi dans la classe de processus à variation (rectangulaire) bornée : si X est une martingale faible représentable, il existe $\langle\langle X\rangle\rangle$ à variation bornée tel que $X^2 - \langle\langle X\rangle\rangle$ soit une martingale faible.

Deux autres processus croissants (en 1 indice) jouent un rôle important dans cette théorie : si X est une 1-martingale, pour tout t on sait définir un unique processus prévisible (pour la filtration $\mathfrak{F}_s^1$) croissant en s $\langle X_{.t}\rangle_s^{(1)}$ tel que $X^2 - \langle X\rangle^{(1)}$ soit une 1-martingale.

En général on ne sait pas raccorder les processus définis à chaque niveau t de façon à obtenir une bonne version en (s,t) de $\langle X\rangle^{(1)}$. Cependant, dans deux situations, on saura définir une version continue à droite de ce processus :

★ Définition 4 : 1-martingale a.o.1 : (cf. Chapitre I, § 2 et § 4)

Soit X une 1-martingale. On dit qu'elle est à accroissement orthogonaux dans le sens 1 (a.o.1) si pour tout Δt , $\Delta t'$ tels que $\Delta t \cap \Delta t' = \emptyset$, $\{X(s,\Delta t)\, X(s,\Delta t'), \mathcal{F}^1_s\}_s$ est une martingale .

Nous montrons qu'alors pour tout rectangle Δ , $\langle X\rangle^{(1)}(\Delta)$ est positif, et donc que

$$\inf_{t'} \{ \langle X\rangle^{(1)}_{st'} \quad , \quad t < t', \quad t' \in \mathbb{Q} \}$$

est p.s. continue à droite (cf. [31] pour le cas où M est une martingale forte).

★ Dans le cas de la filtration brownienne, si X est une 1-martingale représentable (cf. Chapitre III, § 5), nous montrons qu'il existe une version continue de $\langle X\rangle^{(1)}$ qui est une semi-martingale représentable.

Les deux intégrales stochastiques

Pour la définition du mouvement brownien à indice dans $\mathbb{R}^2$, nous renvoyons à [56].

Alors que sur $\mathbb{R}_+$ le théorème de représentation de martingales de L^2 pour la filtration du brownien ne fait apparaître qu'une intégrale stochastique, le théorème analogue sur $\mathbb{R}^2_+$ (théorème de WONG et ZAKAI, donné ci-dessous et Chapitre III, § 3) dit que toute martingale de L^2 pour la filtration du brownien est la somme d'une martingale forte, intégrale simple en W, et d'une martingale non forte, orthogonale à la première, intégrale double par rapport à ce même W.

La théorie de l'intégrale stochastique sur $\mathbb{R}^2_+$ a été systématisée par CAIROLI et WALSH ([31]).

Si M est une martingale de L^2 et si φ est prévisible et tel que $E\int_{R_z} \varphi^2(\xi)\, \langle M\rangle\, (d\xi)$ soit fini, l'intégrale simple

$$(\varphi.M)_z = \int_{R_z} \varphi(\xi)\, M\,(d\xi)$$

est définie (Chapitre II, § 1.1) comme l'intégrale de ITO sur la droite. C'est une martingale , continue si M l'est, forte si M est forte.

Nous définissons également intégrale simple $\varphi.M$ pour laquelle on ne demande à φ que d'être 1-prévisible et à M d'être une 1-martingale a.o.1 : on peut en effet alors arguer du fait que $\langle M\rangle^{(1)}$ est croissant (Chapitre II, § 1.2).

L'<u>intégrale double</u> est tout à fait nouvelle par rapport à la théorie sur $\mathbb{R}_+$. Nous la définissons dans deux cadres :

★ Soit ψ (z,z') un processus sur $(\mathbb{R}_+^2)^2$ ne chargeant que les (z,z') tels que $z \,\hat{\curlywedge}\, z'$. On dira qu'il est prévisible s'il est mesurable par rapport à la tribu de $\Omega \times \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$ engendrée par les ensembles $]z_1,z'_1] \times]z_2,z'_2] \times A$ où $z_1 \,\hat{\curlywedge}\, z_2$ et $A \in \mathcal{F}_{z_1 \vee z_2}$.

Si M est une 2-martingale a.o.2 de L^4 et N une martingale a.o.1 de L^4 ,

$$\mu\,(X) = E\int_{R_{z_o}} X\,(\xi,\xi')\,\langle M\rangle^{(2)}\,(d\xi)\,\langle N\rangle^{(1)}\,(d\xi')$$

définit une mesure sur les processus bornés, mesurables, ne chargeant que $\xi \,\hat{\curlywedge}\, \xi'$. Si $\mu(\psi^2)$ est fini, ou définira l'intégrale $\psi.MN$ en approchant ψ par une suite de processus (ψ_n), simples, bornés pour lesquels l'intégrale $\psi_n.MN$ est définie comme somme stochastique finie.

★ Soit ψ est une fonction de coin prévisible (cf. chapitre II, § 2.2). $\langle M\rangle^{(2)}$ et $\langle N\rangle^{(1)}$ n'interviennent plus alors que par leurs accroissements $\langle M\rangle^{(2)}\,(s,\Delta t)$, $\langle N\rangle^{(1)}\,(\Delta s,t)$ et il n'est plus nécessaire de supposer ces i-martingales à accroissements orthogonaux.

Dans le cas particulier où $\psi\,(z,z') = \chi\,(z \vee z')\,1_{z \,\hat{\curlywedge}\, z'}$, et de la filtration brownienne, nous étudions plus en détail (cf. Chapitre III, § 5.1 et Chapitre IV, § 3) l'intégrale $\psi.MN = \chi.J_{MN}$, où formellement :

$J_{MN}(ds,dt) = M(s,dt)\, N(ds,t)$

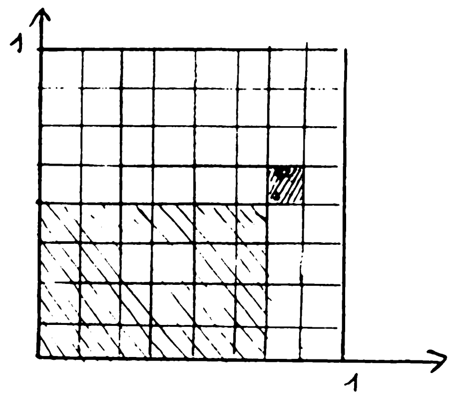
On dispose d'un théorème de FUBINI stochastique pour cette intégrale double ([31]) : Si $\langle N\rangle^{(1)}$ est déterministe, alors $\psi.MN = (\psi.M).N$; cette décomposition permettra de définir la 1-dérivée de la 1-martingale $\psi.MN$ ainsi qu'une représentation de $\langle\psi.MN\rangle^{(1)}$.

Le théorème de WONG et ZAKAI.

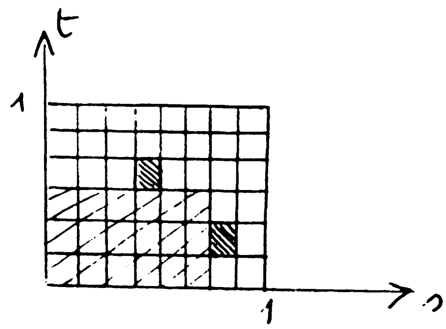
> Si M est une martingale de L^2 pour la filtration brownienne, alors $M = \theta.W + \psi.WW$ (θ et ψ vérifient les conditions permettant de définir ces intégrales) .

Nous donnons (Chapitre III, § 3) une démonstration de cette propriété très différente de celles apparaissant dans ([31, 79, 85]). Elle est fondée d'une part sur la densité dans $L^2(\mathcal{F}_{11})$ des polynômes en $W(\Delta_{ij})$ où Δ_{ij} sont des rectangles de R_{11} , d'autre part sur le fait que W est à accroissements orthogonaux. Cette démonstration peut donc être étendue à toute filtration définie par un processus à accroissements orthogonaux vérifiant cette propriété de densité (par exemple la tribu du Poisson).

L'idée est alors de découper R_{11} en une partition $\{\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta_j\}$ et de trier les monômes $\prod_k W(\Delta_{i_k j_k})$ selon le critère suivant



1er type : L'un des (i_k,j_k) domine tous les autres. Son coefficient est $\mathcal{F}_{i_k j_k}$-mesurable. Le regroupement de ces monômes fournit l'intégrale simple.



2ème type : Sinon, il y a un Δ_{ij} "plus haut" que tous les autres et un $\Delta_{i'j'}$ "plus à droite" que tous les autres. Le regroupement de ces monômes fournira l'intégrale double.

(La seule difficulté technique consistera à montrer que les cas d'ex-aequo sont négligeables).

On déduit de la représentation de toute variable de $L^2(\mathcal{F}_{11})$ le théorème de WONG et ZAKAI, mais aussi la représentation de toute 1-martingale adaptée mesurable de L^2 sous la forme

$$X_{st} = \int_{R_{st}} L_1(t\,;\,z)\, W(dz)$$

Pour obtenir une dépendance en t de L_1 mesurable, il suffirait d'adapter la méthode de densité des polynômes dans $L^2(\mathcal{F}_{1t})$ afin d'obtenir de cet espace une base dépendant mesurablement de t ([32]).

Les martingales faibles sur $\mathbb{R}_+^2$

Une des difficultés rencontrées dans l'utilisation des i-martingales, et a fortiori des martingales faibles, est que l'on ne dispose pas en général d'inégalité maximale L^p, $p \geq 1$, pour celles-ci. C'est pourquoi nous nous intéresserons dans tout ce travail à une sous-classe, celle des martingales faibles régulières [80], pour laquelle nous démontrerons une telle inégalité (Cf. chapitre I, § 3).

Si $x(t)$ est un processus à un paramètre, on définit sa variation par

$$[\mathrm{var}\; x(.)]_t = \sup \Sigma \left| x(t_{i+1}) - x(t_i) \right|$$

le sup étant pris sur toutes les suites finies croissantes de 0 à t.

Définition 5 : X_{st} , $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ est une 1-martingale propre si c'est une 1-martingale dont la variation dans le sens 2, $[\text{var } X_{s.}]_t$ est intégrable pour tout (s,t).

X_{st} a donc une propriété mixte : c'est une martingale en s, un processus à variation bornée en t.

La richesse de cette définition tient au fait que $[\text{var } X_{s.}]_t$ est une sous-martingale en s pour la filtratin $\mathcal{F}_s^1$; on peut alors déduire de la majoration

$$|X_{st}| \leq |X_{so}| + [\text{var } X_{s.}]_t$$

une inégalité maximale. Se donnant $z_o \in \mathbb{R}_+^2$, l'espace $\mathcal{L}_{1p}^2(z_o)$ des 1-martingales propres centrées muni de la norme $\|X\|^2 = E\{X_{s_o,o}^2 + (\text{var } X_{s_o.})_{t_o}\}$ est alors un espace de Banach.

On notera en abrégé 1-m.p. pour 1-martingale propre, et l'on définit de façon symétrique les 2-m.p. A partir des 1-m.p. et des 2-m.p., on engendre les "martingales faibles régulières" (cf. Chapître I, § 3).

Définition 6 : X_{st} est une martingale faible régulière sur R_{z_o} si c'est une martingale faible vérifiant :

(1) . $(X_{st})_{t \leq t_o}$ est une semi-martingale pour tout $s \leq s_o$

. $X_{s_o t} = m_t + b_t$, $(m_t, \mathcal{F}_{st})_t$ étant une martingale, b_t étant un processus à variation, sur $[0, t_o]$, intégrable.

(2) La condition symétrique en s.

Propriété : Si X est une m.f. régulière, alors $X = M + P_1 + P_2$ où M est une martingale, P_i une i-martingale propre, $i = 1,2$.

Nous développons les inégalités maximales L^p, $p \geq 1$, pour cette classe de processus, d'abord dans le cadre d'une filtration générale (Chapitre I, § 3 ; Chapitre II, § 3), puis dans le cadre de la filtration brownienne (Chapitre

III, § 5.2 et Chapitre IV).

Intégrales stochastiques mixtes.

Une nouvelle intégrale, $\psi.\mu M$, stochastique mixte, va permettre de décrire en partie la classe des 1-m.p. Ces intégrales apparaissent dans [80]. Nous étudions de manière approfondie ces intégrales au chapitre II, § 3.

Nous les définissons sous de nouvelles conditions : d'une part dans L^1 si $E\,|\mu|\,(R_{z_o})$ est fini, dans L^2 sous une condition différente de celle apparaissant dans [80] pour une 1-martingale a.o.1 de L^2

Nous établissons alors des théorèmes de FUBINI stochastiques mixtes (l'un définissant la 1-dérivée en s, l'autre la dérivée en t), étudions la représentation $\beta.\nu M$ où ν est une mesure sur $[0, t_o]$, la réduction de $\psi.\mu M$ à une telle intégrale lorsque μ factorise, et enfin, l'intégrale simple par rapport à une 1-m.p.

Donnons rapidement ici la définition de cette intégrale : dans le cas le plus simple ([80]).

Soit $\mu : \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \to \mathbb{R}$ une mesure aléatoire, adaptée, à variation $|\mu|$ bornée sur R_{z_o} : $|\mu|\,(R_{z_o}) \leq \mu_o$ ($\mu_o \in \mathbb{R}_+$) .

Soit M une 1-martingale a.o.1 de L^2 ,

Soit $\psi\,(z,z')$ un processus $\mathcal{F}^1_{z'}$-prévisible, ne chargeant que $z \hat{\wedge} z'$ et tel que :

$$\|\psi\|^2 = E \int_{R^2_{z_o}} \psi^2\,(\xi,\xi')\,|\mu|\,(d\xi)\,\langle M\rangle^{(1)}\,(d\xi') < \infty$$

Si ψ est simple, alors $(\psi.\mu M)_z$ est défini comme somme stochastique mixte finie : c'est une 1-martingale propre de L^2 et on a :

$$E \sup_{s,t} (\psi.\mu M)^2_{st} \leq E \left(\sup_{s \leq s_o} \mathrm{Var}\, (\psi.\mu M)^2_{s.} \right) \leq 4\, \mu_o\, \|\psi\|^2$$

On dispose alors de la norme permettant d'étendre cette intégrale mixte aux fonctions ψ en général.

Dans le cas particulier où μ factorise :

$$\mu\,(ds,dt;\omega) = \tilde{\mu}\,(ds,\omega)\;\nu\,(dt)$$

où ν est non aléatoire à variation bornée, et si $\langle M\rangle^{(1)}$ est déterministe, cette intégrale se réduit à une nouvelle intégrale mixte $\beta.\nu M$ (avec $\beta = \psi.\tilde{\mu}$). L'avantage d'une telle représentation d'une 1-m.p. est qu'elle est unique $P \times \nu \times \langle M\rangle^{(1)}$ presque sûrement, ce qui justifie l'usage que l'on en fait dans ce travail.

Dans le cas de la filtration brownienne, et en s'appuyant sur le théorème de représentation des variables de $\mathcal{L}^2\,(\mathcal{F}_{1t})$, $t \leq t_o$, on montre que, sous une bonne condition de régularité, toute 1-m.p.X, adaptée mesurable telle que $X_{s_o t} = \int_o^t \rho\,(v)\,dv$ admet une représentation $\beta.VW$ (où V symbolise l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue dv, $v \in \mathbb{R}$). Dans toute la suite on se limitera à une telle mesure V .

Pour compléter ce jeu d'intégrales (2 intégrales stochastiques $\theta.W$ et $\psi.WW$, 2 intégrales mixtes $\beta_1.VW$ et $\beta_2.WU$ (définie de façon symétrique)), adjoignons l'intégrale non stochastique par rapport à la mesure de Lebesgue Z (Z=UV) sur $\mathbb{R}^2_+$

$$B_z = (\varphi.Z)_z = \int_{R_z} \varphi\,(\xi)\,d\xi$$

pour φ prévisible vérifiant : $E \int_{R_z} \varphi^2\,(\xi)\,d\xi < \infty$.

B_z est un processus à variation (rectangulaire) bornée (on dira également processus absolument continu, ou signal (cf. Chapitre VIII)).

Semi-martingales représentables (s.m.r.) (Chapitre III).

L'objet principal de ce travail est d'étudier, dans le cas de la filtration brownienne une classe de semi-martingales : les semi-martingales représentables.

Définition 7 (cf. Chapitre III, § 5, [51])

a) On dira que X est une 1-martingale propre représentable (1-m.p.) si X est dans L^2 et admet la représentation $X = \beta_1.\nabla W$. De même on définit la notion de 2-martingale propre représentable (2-m.p.).

b) On dira que X est une martingale faible représentable (m.f.r.) si elle s'écrit $X = M + P_1 + P_2$, où M est une martingale de L^2 (donc représentable), P_1 est la 1-m.p. $\beta_1.\nabla W$ et P_2 la 2-m.p. $\beta_2.WU$

c) On dira que X est une semi-martingale représentable si elle s'écrit $X = Y + B$ où Y est une m.f.r. et $B = (\varphi.Z)$ est un processus à variation bornée de L^2 .

L'intérêt principal de cette classe de processus est qu'elle est stable par transformation par fonctions régulières : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ et X une s.m.r. vérifiant certaines conditions d'intégrabilité (Chapitre VI, § 2), alors $Y_z = f(X_z)$ est encore une s.m.r.. En particulier si M est une martingale de L^2, sous ces conditions d'intégrabilité, $f(M)$ est une s.m.r.

Par exemple si X est une s.m.r. de L^4, X^2 est une s.m.r. La partie à v.b. $\langle\langle X\rangle\rangle$ de cette s.m.r. sera l'unique processus à v.b. tel que $X^2 - \langle\langle X\rangle\rangle$ soit une martingale faible.

Si M est une martingale assez régulière, $X = \text{Log}\, M$ sera une s.m.r. Cette représentation $M = \exp X$ sera fondamentale dans l'étude des martingales de changement de probabilité et dans l'étude du théorème de GIRSANOV (cf. Chapitre VIII).

Le chapitre III (§ 5) est consacré à l'étude des propriétés de base des s.m.r. : intégrale semi-stochastique d'un processus mesurable adapté par rapport à une s.m.r., existence d'une version continue du processus $\langle X\rangle^{(1)}$ si X est une s.m.r. de L^4 (cette version est elle-même une s.m.r.), la s.m.r. J_{YX} associée aux s.m.r. X et Y de L^4. Nous établissons enfin les inégalités maximales pour les s.m.r. Nous donnons ces inégalités sous deux formes :

★ l'une majore $E\left(\sup_z X(\Delta)_z^{2n}\right)$ si Δ est un rectangle et $\Delta_z = \Delta \cap R_z$, pour $n \geq 1$. En particulier si $\Delta = R_{z_o}$, on obtient l'inégalité maximale pour X_z, $z \in R_{z_o}$.

★ l'autre majore $E \sup_z \left(\sum_{ij} X(\Delta_{ij})_z^{2n}\right)$ où $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition réseau de R_{11} : si $\Delta_{ij} =](s_i,t_j), (s_{i+1},t_{j+1})]$ notant

$$|\pi|_1 = \inf_i (s_{i+1} - s_i) \qquad |\pi|_2 = \inf_j (t_{j+1} - t_j)$$

$$|\pi| = \inf(|\pi|_1 , |\pi|_2)$$

La contribution de la partie martingale est en $|\pi|^{n-1}$, celle de la partie 1-m.p. en $|\pi|_1^{n-1} \ |\pi|_2^n$, celle de la partie 2-m.p. en $|\pi|_1^n \ |\pi|_2^{n-1}$, et celle de la partie à v.b. en $|\pi|_1^n \ |\pi|_2^n$.

Ces inégalités résultent entre autres de la majoration

$$E\left[\int_\Delta \varphi(\xi)\, W(d\xi)\right]^{2n} \leq C\, |\Delta|^{n-1} \int_\Delta E\, \varphi^{2n}(\xi)\, d\xi$$

(où $|\Delta|$ est la mesure de Lebesgue du rectangle Δ) démontrée au chapitre III, § 4, pour un intégrande φ i-adapté mesurable.

Variations produit (Cf. chapitre IV , [47, 50])

Sur $[0,1]$, si $\pi_n = \{\Delta_i^n\}$ est une suite de partitions dont le pas tend vers zéro, $(\Delta_i^n)_t = \Delta_i^n \cap [0,t]$, f_n une suite de fonctions π_n-simples mesurables adaptées valant $f_n(i)$ sur Δ_i^n , X une semi-martingale continue de L^2, si f_n a une limite f pour une bonne semi-norme, alors

$$S_n(\alpha)_t = \sum_i f_n(i)\, X(\Delta_i^n)_t^\alpha$$

converge pour $\alpha = 1$ vers l'intégrale semi-stochastique $\int_t^t f(v)\, X(dv)$, pour $\alpha = 2$ vers $\int_o f(v) \langle X \rangle (dv)$, et vers zéro pour $\alpha \geq 3$.

De ces résultats découle une démonstration de la formule de ITO sur $\mathbb{R}$ fondée sur la formule de TAYLOR.

Sur $\mathbb{R}_+^2$, la situation est plus riche et plus complexe en même temps :

A - Variations produit bidirectionnelle (Chapitre IV, partie B).

A un élément $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta_j'$ (où $\Delta_i =]s_i, s_{i+1}]$ et $\Delta_j' =]t_j, t_{j+1}]$) d'une partition π de R_{11}, on peut associer trois variations :

deux variations linéaires :

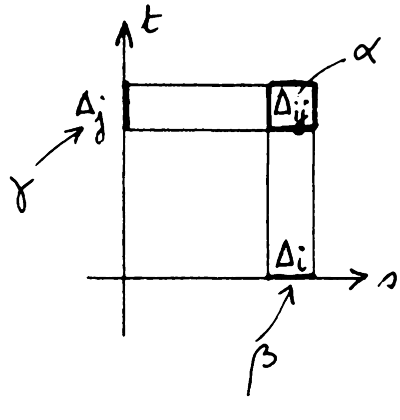
$$X(\Delta_i, j) = X(s_{i+1}, t_j) - X(s_i, t_j)$$

$$X(i, \Delta_j) = X(s_i, t_{j+1}) - X(s_i, t_j)$$

et une variation superficielle

$$X(\Delta_{ij}) = X(s_{i+1}, t_{j+1}) - X(s_{i+1}, t_j) - X(s_i, t_{j+1}) + X(s_i, t_j)$$

A ces trois éléments et à une fonction π-simple f, on peut associer pour α, β, γ positifs les sommes pondérées



$$S\,(\alpha,\beta,\gamma)_{st} = \sum_{ij} f(i,j)\ X\,(\Delta_{ij})^{\alpha}_{st}\ X\,(\Delta_i,j)^{\beta}_{s}\ X\,(i,\Delta_j)^{\gamma}_{t}$$

Le chapitre IV, partie B est consacré à l'étude systématique des convergences de telles variations pondérées, quand le pas de π tend vers zéro, de ces processus, appelés variations produit de type (α,β,γ). Nous nous limitons d'abord aux cas $\alpha + \beta\gamma > 0$ afin d'avoir des variations effectivement bidimensionnelles.

Nous nous limitons ensuite aux cas où $\alpha + \beta + \gamma \leq 4$: sous des hypothèses raisonnables, les sommes "d'ordre supérieur" tendent vers zéro (on dit qu'elles sont non contribuantes). Même alors, parmi les 33 variations étudiées (se réduisant à 21 par symétrie), seules 9 se révèlent contibuantes:

★ les variations (1,0,0) et (0,1,1) qui convergent dans L^2 vers des intégrales semi-stochastiques en X et en J_X

★ les variations (2,0,0), (0,2,2) et (1,1,1), dites variations quadratiques, qui convergent dans L^1 vers des intégrales non stochastiques en $< X >$, en $< J_X >$ et en $< X,J_X >$

★ les variations (1,0,1) et (0,1,2), qui convergent vers des intégrales mixtes en $< X >^{(1)} - < X >$ et en $J_{\dot{<X>}^{(2)},X}$

★ les variations (1,1,0) et (0,2,1), symétriques des précédentes.

Pour chaque type de variation, nous établissons d'abord une inégalité maximale sur la base de laquelle est démontrée un résultat de convergence uniforme sur R_{11}.

Les <u>variations conditionnelles</u>, c'est à dire celles obtenues en conditionnant par $\mathcal{F}_{s_i t_j}$ le terme d'indice (i,j) de la somme S, sont moins intéressantes: d'une part du point de vue statistique, seules les variations inconditionnelles peuvent être accessibles; d'autre part, un tel conditionnement annule S sauf pour les variations (2,0,0) et (0,2,2).

L'étude est faite pour la variation (2,0,0) au chapitre IV, partie A, §1. Si l'on pose

$$\ll X \gg_{\pi_{st}} = \sum_{ij} E\,(X^2(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{F}_{ij})$$

on sait (comme sur la droite) que si X est une martingale,

$$E\,(X^2(\Delta_{ij}) \,|\, \mathcal{F}_{ij}) = E\,(X(\Delta_{ij})^2 \,|\, \mathcal{F}_{ij})$$

Dans ce cas, la variation conditionnelle du carré tend vers le processus croissant $< X >$ de la martingale. Si X est une m.f.r., cette égalité n'a plus lieu en général. Cependant, nous démontrons (ch. IV,A,§ 2-2) que $\ll X \gg_{\pi_{st}}$ tend uniformément dans L^1 vers le processus à v.b. $\ll X \gg_{st}$ de la m.f.r., c'est à dire le processus tel que $X^2 - \ll X \gg$ soit une m.f.r.

B - Variations produit unidirectionnelles (ch.III, partie A)

Si l'on se fixe deux niveaux t et t' tels que $t \leqq t'$, et si $\sigma = \{\Delta_i\}$ est une partition de $[0,1]$, on considerera la variation de X aux niveaux t et t' pour σ

$$< X >^{(1)}_{\sigma;t,t'} = \sum_i X(\Delta_i,t)_s \, X(\Delta_i,t')_s$$

Nous montrons dans la partie A du chapitre IV que cette variation tend, quand le pas de σ tend vers zéro, uniformément en s dans $[0,1]$, vers $< X_{.t},X_{.t'} >^{(1)}_s$. Nous montrons la même convergence lorsque l'on conditionne le terme d'indice i de cette somme par $\mathcal{F}^1_{s_i}$.

Ces résultats sont assez proches de r sultats unidimensionnels, mais le fait de pouvoir disposer d'une infinité de couples de niveaux (t,t') sera d'une grande utilité dans le problème de l'identification des s.m.r. (ch. VII).

Remarquons que si l'on fixe t = t', la 1-variation quadratique obtenue peut être reliée aux variations de types (2,0,0) et (1,1,0) par l'identité

$$\sum_i X(\Delta_i,t)^2_s = \sum_{ij} X(\Delta_{ij})^2_{st} + 2 \sum_{ij} X(\Delta_{ij})_{st} \, X(\Delta_i,t)_s$$

Puisque nous avons montré l'uniformité en (s,t) des convergences pour les variations (1,1,0) et (2,0,0), nous pouvons en déduire l'uniformité en s,t,t' de la convergence de $< X >^{(1)}_{\sigma;t,t'}(s)$.

Signalons enfin qu'au chapitre IV, §2, nous étudions une variation hybride entre variation linéaire et variation superficielle.

Trace d'une s.m.r. sur un chemin, s.m.r. indépendante du chemin, intégrales curviligne et formule de GREEN.

Un nouvel aspect de la théorie des martingales sur $\mathbb{R}_+^2$ est issu de la notion de trace d'un processus sur une courbe: les principales notions qui lui sont liées sont la notion de martingale indépendante du chemin, que l'on notera i.d.c., intr duite dans [79], la notion d'intégrale curviligne et la formule de GREEN stochastique.

Définition 8: On dira qu'un processus X de L^2 est i.d.c., si pour tout z de $\mathbb{R}_+^2$ et tout chemin Γ continu croissant joignant l'origine à z, la variation quadratique de X sur Γ existe et est indépendante de Γ.

Toute martingale forte, soit de L^2 pour la filtration brownienne, soit de L^4, est i.d.c. [31]. Dans le cas de la filtration brownienne, le problème réciproque est ouvert, résolu sous des conditions particulières dans [71].

Les définitions et propriétés de base des traces sur une courbe et des intégrales curvilignes sont données dans [31] relativement à une martingale (et pour certaines propriétés relativement à une martingale forte). La formule de GREEN est donnée lorsque l'intégration se fait par rapport à une martingale forte dont le processus croissant est déterministe. Dans le cas de la filtration brownienne, la formule de GREEN de [32] donne la décomposition de WONG et ZAKAI de $\int_{\partial R_z} M\,\partial^1 W$, où M est une 2-martingale de L^2.

Au chapitre V, nous étudions ces questions pour la classe des s.m.r. L'approche que nous avons de ces problèmes (p.ex. pour la formule de GREEN) est différente de celle de [32] et se fonde essentiellement sur les représentations; en particulier, nous utilisons systématiquement le lemme de calcul stochastique suivant:

Lemme: Si $\Phi(u)$ est un processus à indice réel mesurable et 1-adapté, et si X est une 1-martingale mesurable adaptée de L^2, alors

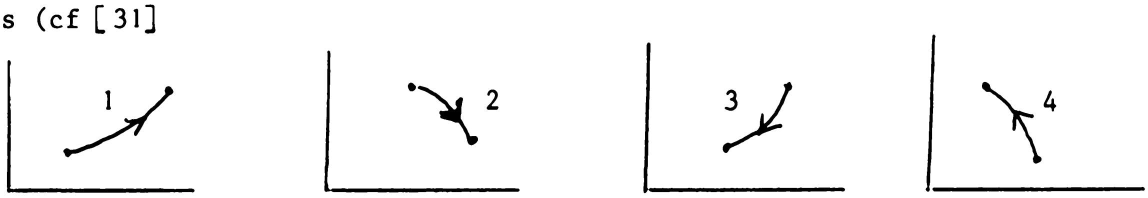
$$\int_0^s \Phi(u)\, X(du,t) = \int_0^s \Phi(u)\, L_{1X}(t;u,v)\, W(du,dv)$$

Si Γ est un chemin croissant continu, nous montrons que la trace sur Γ d'une s.m.r. X est une semi-martingale à un indice, dont nous donnons une représentation (ch.III,§1,th.1).

Nous montrons par ailleurs que X est i.d.c. si et seulement si $< X >^{(1)} = < X >^{(2)}$, et nous donnons une expression analytique traduisant cette égalité. Par exemple, le processus de ORNSTEIN-UHLENBECK sur $\mathbb{R}^2$ (cf. ch. VII, §3) est une s.m.r. i.d.c.

La notion de martingale i.d.c. est très liée à la notion de martingale à accroissements orthogonaux [87]: dans le cas de la filtration brownienne, une martingale a.o. est une martingale forte. Nous généralisons ce résultat, par une toute autre méthode, aux 1-martingales a.o.1.

Nous définissons ensuite les diverses intégrales semi-stochastiques curvilignes $\int_\Gamma \Phi\, \partial_i X$, i=1,2 et $\int_\Gamma \Phi\, \partial X$, relativement à un intégrande respectivement i-adapté et adapté, et à la s.m.r. X, où Γ est une courbe monotone continue d'un des quatre types purs (cf [31]



Nous démontrons le théorème d'approximation suivant: si Γ_n est une suite de courbes tendant vers Γ et du même type que Γ, et si Φ_n tend vers Φ au sens de la semi-norme $\|\Phi_n - \Phi\|_{X^2}$ (cf ch. III, §5-1), alors

$$\int_{\Gamma_n} \Phi_n\, \partial X \xrightarrow{L^2} \int_\Gamma \Phi\, \partial X$$

Enfin, sur la base du lemme de calcul stochastique énoncé ci dessus, nous démontrons la formule de GREEN pour les contours rectangulaires, et cette formule s'étend grace au théorème d'approximation précédent aux contours réguliers de type fini.

Une des applications de la formule de GREEN est l'application à la formule de ITO: si f est de classe $\mathcal{C}^4$ et si X est une s.m.r., on aura à t fixé:

$$f(X_{st}) = f(X_{ot}) + \int_o^s f'(X_{ut})\, X(du,t) \quad + \frac{1}{2} \int_o^s f''(X_{ut}) < X > (du,t)$$

dès que ces intégrales ont un sens, et l'on écrit alors

$$\int_o^s f'(X_{ut})\, X(du,t) = \int_{\partial R_{st}} f'(X)\, \partial_1 X \quad .$$

<u>Formule de ITO pour une fonction de s.m.r.</u>

Nous donnons au chapitre VI une approche totalement différente de la formule de ITO pour les s.m.r. Cette approche est fondée sur une <u>formule de TAYLOR pour accroissements rectangulaires</u> et sur les résultats du chapitre IV concernant les variations produit pondérées. Cette approche semble plus facilement généralisable au cas de filtrations pour lesquelles on n'a pas de théorème de représentation des semi-martingales.

Comme sur la droite, la formule de ITO dans le plan permet d'abord de fabriquer à partir de semi-martingales représentables de nouvelles semi-martingales représentables. La stabilité de la classe des semi-martingales représentables par transformation par des fonctions assez régulières est un élément fondamental de l'intérêt que l'on est amené à porter à cette classe.

La formule de ITO que nous proposons permet en outre de décrire explicitement les parties martingale forte, martingale non forte, 1- et 2-martingale propre, ainsi que la partie à variation bornée de la s.m.r. obtenue. En particulier, elle servira lors du calcul de ses diverses variations produit.

Elle permettra aussi de déterminer quelles sont les fonctions de m.f.r. (resp. i-martingales, martingales) qui sont encore m.f.r. (resp. i-martingale, martingale): on appelera une telle fonction une fonction harmonique faible (resp. i-harmonique, harmonique). En particulier si Λ est une martingale de changement de probabilité $\frac{dP}{dP_o}$, et Z une s.m.r., l'étude de Z sous P se ramènera à celle du produit Λ Z sous P_o et donc aux propriétés d'harmonicité de ce produit.

<u>Formule de TAYLOR</u>: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^4$, nous donnons une formule de TAYLOR (à l'ordre 4) donnant l'accroissement

$$\Delta f = f(v') - f(v) - f(u') + f(u)$$

où u,u',v,v' sont quatre réel (ch VI, th.)

Si X est une fonction $\mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ (sans aucune régularité), et si $\Delta =]z,z']$ est un rectangle, on en déduit une expression de

$$f{\circ}X(\Delta) = f(X_{s't'}) - f(X_{s't}) - f(X_{st'}) + f(X_{st})$$

en fonction de variations produit où interviennent $X(\Delta)$, $X_{s't}-X_{st}$ et $X_{st'}-X_{st}$. Les variations qui apparaissent sont celles du type (α,β,γ) avec $\alpha + \beta + \gamma \leqq 4$ et $\alpha + \beta\gamma > 0$, et en outre $(0,4,0)$ et $(0,0,4)$.

Nous généralisons ensuite cette formule de TAYLOR aux fonctions

$$F(z) = f(X_1(z), \ldots, X_n(z))$$

réduisant l'accroissement $F(\Delta)$ à des accroissements séparés de chaque X_i, ce qui revient à réduire un accroissement sur un hypercube de $\mathbb{R}^{2n}$ aux accroissements sur certaines de ses faces.

Formule de ITO: Utilisant ces formules de TAYLOR et les résultats du chapitre IV, nous en déduisons aisément la formule de ITO bidimensionnelle:

Si π est une partition de R_{z_0} en rectangles Δ_{ij}, si X est une s.m.r. et f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$, il suffit d'écrire

$$Y_{st} = f{\circ}X(R_{st}) = \sum_{ij} f{\circ}X(\Delta_{ij})_{st}$$

et de prendre la limite du second membre quand le pas de la partition π tend vers zéro pour obtenir la décomposition de la s.m.r. Y. Il en est de même si f est fonction de plusieurs s.m.r., et les conditions de dérivabilité peuvent être affaiblies lorsque l'une de ces s.m.r. est soit $X_{st} \equiv s$, soit $X_{st} \equiv t$

Identification d'une s.m.r.

Une s.m.r. est caractérisée par les processus $(\theta,\psi,\beta_1,\beta_2,\varphi)$ de sa représentation

$$Y = \theta.W + \psi.WW + \beta_1.VW + \beta_2.WU + \varphi.Z$$

On dira que ces processus constituent le modèle de la s.m.r., et la partie $\varphi.Z$ sera appelée ici le signal.

Le problème auquel nous nous interessons dans les deux derniers chapitres est celui de l'estimation du modèle d'une s.m.r. Ce problème présente deux aspects : le premier concerne l'identification de la partie martingale faible de Y à partir de certains processus, type variations produit, construits sur Y (cf chapitre VII); le deuxième concerne l'estimation du signal de Y. Ce dernier problème est étroitement lié à celui du changement de probabilité pour les s.m.r.

Rappelons rapidement comment ces problèmes se résolvent sur $\mathbb{R}$. Soit Y la semi-martingale de L^2 relativement à la filtration d'un brownien unidimensionnel W:

$$Y_t = \int_o^t \theta(u)\, W(du) - \int_o^t \varphi(u)\, du$$

La variation quadratique de Y ne fera intervenir que la partie martingale M de Y, qui vaut

$$< Y >_t = < M >_t = \int_o^t \theta^2(u)\, du$$

En ce sens elle est donc caractéristique de θ^2. Si par exemple on dispose d'un modèle paramétrique $\theta(u) = f(Y_u;\alpha)$, où f est connue, α est un paramètre inconnu de $\mathbb{R}^p$, la réalisation de Y nous permettra en général (du moins théoriquement) d'obtenir une estimation presque sûre de α.

Pour estimer φ, il faut revenir à des méthodes statistiques classiques, par exemple à l'estimation par le maximum de vraisemblance, qui s'avère remarquablement adapté au modèle de semi-martingale proposé ci dessus: le théorème de GIRSANOV donne en effet, une fois θ^2 connu, la vraisemblance de Y, d'où l'on déduira une estimation de φ, que l'on saura être de bonne qualité.

Pour les s.m.r. sur $\mathbb{R}_+^2$, ces problèmes restent en grande partie ouverts, la situation étant simultanément plus riche et plus complexe. Nous apportons ici un certain nombre de réponses générales et nous soulevons en même temps les problèmes non résolus.

Sur $\mathbb{R}_+^2$, la variation quadratique, même pour une martingale, ne caractérise par le processus. Cependant, nous disposons d'outils nouveaux: les diverses variations produit (cf ch. IV) et les variations sur les chemins (cf ch. V). Parmi ces variations, la 1-variation produit à des niveaux t et t', $t \leqq t'$, se révèle très informative:

$$H_s(t,t') = \langle X\rangle^{(1)}_{s;t,t'} = \int_{R_{st}} L_1(t;z)\, L_1(t';z)\, dz$$

(cf ch. IV,A,§1, [50]).

Le fait de disposer de ce processus à trois indices s, t t' (qui, à t fixé, est une s.m.r. en (s,t')) nous permet par identification de retirer un certain nombre de relations vérifiées par le modèle (ch VII,§1).

En particulier, nous montrons que les trois variations $< X >$, $< X >^{(1)}$ et $< X >^{(2)}$ caractérisent le modèle d'une martingale de L^2, $M = \theta.W + \psi.WW$ telle que ψ soit déterministe continue, θ et ψ ne s'annulant pas: θ et ψ sont alors connus au signe global près, ce qui, pour une classe particulière de martingales est donc un résultat plus fin que celui sur $\mathbb{R}$.

Il est clair que si les difficultés dans la résolution générale du problème viennent de la partie $\psi.WW$, c'est cette partie qui en échange permet d'obtenir de tels résultats.

Nous montrons l'intérêt de cette même variation $H_s(t,t')$ sous un éclairage nouveau au §2 de ce même chapitre: nous appuyant sur un lemme fonctionnel assurant l'injectivité de la transformation $h \to H$ avec

$$H(t,t') = \int_0^t h(t,v)h(t',v)\, dv \qquad t \leq t'$$

si h est dérivable en t, ne s'annule pas au voisinage de la diagonale. Nous montrons que $< X >^{(1)}$ et $< X >^{(2)}$ caractérisent les modèles de s.m.r. du type

$$Y = \theta.W + \beta_1.VW + \beta_2.\ WU$$

En particulier, si l'on a un modèle paramétrique de θ, β_1, β_2, on en déduira une estimation presque sûre de ces paramètres.

Nous étudions alors en détail (ch. VII, §3) le processus de ORNSTEIN-UHLENBECK sur $\mathbb{R}^2_+$. Nous donnons sa décomposition comme s.m.r. non nulle sur les axes. Cette s.m.r. est i.d.c. et satisfait la propriété remarquable suivante: la connaissance d'une réalisation de ce processus sur un arc de courbe non linéaire permet d'identifier presque sûrement les paramètres du processus. (Rappelons que sur $\mathbb{R}$. on ne dispose que de la variation quadratique et que l'on ne peut identifier qu'un seul des deux paramètres du modèle.)

Changement de probabilité et théorème de GIRSANOV

Soit $Y = \mathcal{M} + B$ une s.m.r. sous une densité de probabilité P_o, où $\mathcal{M}$ est la partie martingale faible de Y et B le signal. Le chapitre VIII est consacré àu problème de l'estimation du signal.

Le point de départ des techniques utilisées est l'étude du comportement de Y sous un changement de probabilité P. Les articles de base sur ce problème sont l'article [83] de WONG et ZAKAI, qui donne une représentation exponentielle d'une martingale de changement de probabilité, et l'article [52] de HAJEK et WONG, qui, simultanément avec notre travail donne certains résultats sur les changements de probabilité. Sur ces deux points, notre façon d'aborder les problèmes (de façon directement bidimensionnelle) diffère substanciellement de la leur (unidimensionnelle, successivement par rapport à chaque indice) et donne un éclairage nouveaux aux résultats correspondants.

Dans un premier temps (§1), nous lions de façon générale (c'est à dire sans utiliser de représentation de la densité de changement de probabilité $\Lambda = \frac{dP}{dP_o}$) les propriétés de martingale sous P et sous P_o: transformation de Y en une martingale faible, une i-martingale, une martingale ou une martingale forte. Nous nous plaçons alors dans le cas où P_o est la mesure d'un brownien de réference W. Nous donnons des conditions sous lesquelles une martingale faible régulière sous P est une s.m.r. (sous P_o).

<u>Représentation exponentielle du changement de probabilité.</u>

Si Z est une s.m.r. positive, égale à 1 sur les axes, alors Log Z = X est (par la formule de ITO) une s.m.r. En particulier la martingale $\Lambda = \frac{dP}{dP_o}$ associée au changement de probabilité admet une représentation exponentielle

$$\Lambda = \exp X$$

où X est une s.m.r. remarquable, caractérisée par sa partie martingale ([83]):

On dispose pour un tel changement de probabilité de deux degrés de liberté, que ce soit sur Λ ou sur X.

Nous étudions au § 2 les liaisons entre les représentations bidimensionnelles de Λ et de X. Ce lien sera un outil fondamental par la suite; en particulier, il nous servira à interpréter les différents facteurs de représentation de X

Changements de probabilité orthogonaux (ch VIII, §3)

Définition 9 : Un changement de probabilité défini par la densité $\Lambda = \frac{dP}{dP_o}$ sera dit orthogonal si la filtration $\{\mathcal{F}_z\}$ vérifie la condition (F4) sous P.

Nous démontrons (th 3-1) que Λ = exp X définit un changement de probabilé orthogonal si et seulement si la partie martingale de X est forte. X s'écrit alors

$$X = M - \frac{1}{2} <M> \qquad \text{où} \qquad M = \theta_X . W$$

La démonstration de ce résultat est fondée sur les deux remarques suivantes:

(r1): si X est de ce type, X(A) est une fonction d'ensemble additive, et donc Λ(A) est multiplicative.

(r2): Si F4 est vérifiée sous P, la condition

$$E_P(Y | \mathcal{F}_t^2 | \mathcal{F}_s^1) = E_P(Y | \mathcal{F}_{st})$$

appliquée à la variable Y telle que $Y\Lambda_{1t'} = 1$, montre que $\{\frac{\Lambda_{st'}}{\Lambda_{st}}, \mathcal{F}_s^1\}$ est une martingale pour tous t,t' tels que $t \leqq t'$. On en déduit que la partie 1-martingale de X est a.o.1 et donc que X est du type annoncé.

De plus, dans ce cas, le processus

$$\widetilde{W}_{st} = W_{st} - \int_{R_{st}} \theta_X(z)\, dz$$

est un P-brownien, et toute s.m.r. Y sous P_o est sous P une s.m.r. relativement à W, dont nous donnons la décomposition (§3, th3-2 et 3-3).

En particulier, les parties martingales de Y sous P et sous P_o admettent la même représentation; de même si $\psi_Y = 0$, les parties martingales faibles de Y sous P et sous P_o admettent la même représentation.

S.m.r. et changement de probabilité:

Soit Λ = exp X un changement de probabilité général. Nous montrons au § 4 qu'une s.m.r. qui sous P est une martingale faible (resp. i-martingale, martingale) est caractérisée par sa partie P_o-martingale faible (resp. i-martingale, martingale)

En particulier, si Y est une P-martingale, (ΛY étant une P_o-martingale), $Y = \Lambda^{-1}(\Lambda Y)$ est une s.m.r.; cette correspondance met en bijection les martingales sous P_o et les martingales sous P.

Estimation du signal, théorème de GIRSANOV pour les s.m.r.

Nous étudions enfin le problème dual de celui étudié ci dessus: Y étant fixée, on cherche un changement de probabilité $\Lambda = \frac{dP}{dP_o}$ tel que sous P, Y ait une certaine propriété de martingale.

Ce problème est évidemment lié au théorème de GIRSANOV. Rappelons le résultat sur $\mathbb{R}_+$: soit W un P_o-brownien et

$$Y_t = \int_o^t \theta(u)\, W(du) - \int_o^t \varphi(u)\, du \qquad 0 \leqq t \leqq 1$$

Le changement de probabilité défini par

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dP_o} = \Lambda = \exp X \\ X = M_1 - \frac{1}{2}\langle M\rangle \qquad M = (\varphi\theta^{-1}).W \end{cases}$$

vérifie

(c-P-1) Y est une P-martingale

(C-P-2) $\tilde{W}_t = W_t - \int_o^t (\varphi\theta^{-1})(u)\, du$ est un P-brownien

(C-P-3) $Y = \theta.\tilde{W}$

(C-P-4) du fait de l'inversibilté en W de l'équation

$$Y(du) = \theta(u)\, W(du) - \varphi(u)\, du$$

Λ est calculable en fonction de l'observation Y:

$$\Lambda = \exp \{ \int_o^1 (\varphi\theta^{-2})\, Y(du) + \frac{1}{2}\int_o^1 (\varphi\theta^{-1})^2 du\}$$

(C-P-5) Conditionnellement à la connaissance de θ^2 Λ est la vraisemblance de Y.

En général, la transposition à $\mathbb{R}_+^2$ de ces propriétés pour le couple (Y, Λ) n'est pas possible. Nous renvoyons sur ce point à la discussion détaillée du début du §5 du chapitre VIII.

Nous répondons complètement à la question (C-P-1): sous de bonnes conditions de régularité, il existe une infinité de changements de probabilité transformant Y en martingale faible (une condition sur Λ, deux degré de liberté pour Λ), parmi lesquels un changement de probabilité orthogonal; par contre, il existera au plus un changement de probabilité transformant Y en i-martingale, et il n'en existera pas en général transformant Y en martingale.

Cependant, si Y est du type

$$Y_{st} = \int_{R_{st}} \theta(z)\, W(dz) - \int_{R_{st}} \varphi(z)\, dz$$

il existe un unique changement de probabilité, nécessairement orthogonal, tel que sous P, Y soit une martingale. C'est même alors une martingale forte, et dans cette situation, toutes les bonnes propriétés de $\mathbb{R}$ sont maintenues.

Nous pouvons conjecturer que pour les changements de probabilité orthogonaux ransformant Y en martingale faible, ces propriétés sont également maintenues si $\psi_Y=0$.

Nousterminons ce chapitre en donnant une toute autre approche du théorème de GIRSANOV pour les martingales fortes: associant à Y le processus

$$Y^*_{st} = \int_{Q_{st}} \theta(z)\, W(dz) - \int_{Q_{st}} \varphi(z)\, dz$$

(où $Q_{st} = R_{1s} \cup R_{s1}$), nous montrons en appliquant la formule de ITO sur les chemins croissants aux $\mathcal{F}^*$-martingales i.d.c. que Λ Y étant une $\mathcal{F}^*$-martingale, Y est une P-martingale forte.

BIBLIOGRAPHIE INTRODUCTION

1ère partie : (Les processus spatiaux en statistique)

[1] MERCER , HALL : The experimental error of field trials.
J. Agr. Sci. 4 (1911)

[2] CHRISTIDIS : The importance of shape of plots in field experimentation.
J. Agr . Sci. 21 (1931)

[3] SMITH H.F. : An empirical law describing heterogeneity in the yields of agricultural crops.
J. Agr. Sci. 28 (1938)

[4] COCHRAN W.G. : A survet of experimental design.
Mimeo USDA (1940)

[5] YATES F. : Systematic sampling.
Phil. Trans. R. Soc. A 241, p. 345-77 (1948)

[6] WHITTLE P. : On stationary processes in the plane.
Biometrika 41, p. 434-439 (1954)

[7] HEINE V. : Models for two dimensional stationary stochastic processes

[8] SCHEFFE H. : The analysis of variance, Wiley (1959)

[9] MATERN B. : Spatial variation,
Meddelauden fran Skogsforskninginstitud, Band 49-5 (1960)

[10] WHITTLE P. : Topographic correlation, power law covariance functions and diffusions.
Biometrika 49, p. 305-314 (1962)

[11] FISHER R.A. : The design of experiments, Oliver and Boyd (1966)

[12] ROZANOV Yu. : On gaussian fields with given conditional distributions
Th. Prob. Appl. 12, p. 381-391 (1967)

[13] MATHERON G. : La théorie des variables régionalisées et ses applications. Ec. Mines, Fontainebleau (1970)

[14] BESAG J. : On correlation structure of some two-dimensional stationary processes.
Biometrika 59, p. 43-48 (1971)

[15] MATERN B. : Performance of various designs of field experiments when applied in random fields.
3° Conf. Stat. Forestier INRA, p. 119-129 (1972)

[16] CHAY : On quasi-markov random field
J. Mult. Anal. 2, p. 14-76 (1972)

[17] MORAN P.J. : A gaussian markovian process on a square lattice.
J. Appl. Prob. 10, p. 54-62 (1973)

[18] DUBY C., GUYON X., PRUM B. : Précision des plans d'expérience sur un champ aléatoire.
Publication, Orsay (1974)

[19] DUBY C., GUYON X., PRUM B. : Qu'est-ce qu'un processus dans le plan ?
Lien avec l'expérimentation agricole, Orsay, (1975)

[20] DUBY C., GUYON X., PRUM B. : Typologie des processus gaussiens sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^n$.
Publication Orsay n° 171 (1976)

[21] GUYON X., PRUM B. : Sur l'estimation quadratique de la covariance d'un prócessus dans le plan.
Public. Orsay n° 144 (1975)

[22] DUBY C., GUYON X., PRUM B. : The precision of different experimental designs for a random field.
Biometrika 64-1, p. 59-66 (1977)

[23] MONESTIER P. : Optimisation d'un dispositif expérimental dans le plan.
Document 77/6, Laboratoire de Biométrie, INRA (1977)

[24] PRUM B. : Trois modèles mathématiques de processus dans le plan. Oecol Plant 14.3, p. 313-317 (1979)

[25] GUYON X. : Maximum likelihood estimation for lattice processes, Proposé à publication (1979)

[26] PRUM B. : Propriété de Hida sur $\mathbb{R}^2$: 1ère partie : Processus N-Hida ; 2ème partie : Problème de prédiction et d'interpolation pour les processus sur $\mathbb{R}^2$.
Proposé à publication (1979)

[27] BOX, JENKINS G.M. : Time series analysis, forecasting and control. Holden Day (1970).

2ème partie : (Théorie des martingales à deux indices)

[28] BAKRY D. : Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices.
Z. für W., 50, p. 149-157 (1979)

[29] CAIROLI R. : Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications.
Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, p. 1-27 (1970)

[30] CAIROLI R. : Sur une équation différentielle stochastique.
C.R. Ac. Sc. Paris, 274, p. 1739-1742 (1972)

[31] CAIROLI R., WALSH J.B. : Stochastic integrals in the plane.
Acta Math. 134, 111-183 (1975)

[32] CAIROLI R., WALSH J.B. : Martingale representations and holomorphic processes.
Ann. Prob. 5, (1977)

[33] CAIROLI R., WALSH J.B. : Prolongements de processus holomorphes. Cas "carré intégrable".
Séminaire de probabilités XI. Lecture notes. Springer Verlag, 327-339 (1977)

[34] CAIROLI R., WALSH J.B. : Some examples of holomorphic processes.
Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes. Springer Verlag, 340-348 (1977).

[35] CAIROLI R., WALSH J.B. : On changing time.
Séminaire de probabilités XI. Lecture Notes. Springer Verlag, 349-355 (1977).

[36] CAIROLI R., WALSH J.B. : Régions d'arrêt, localisation et prolongements de martingales.
Z. für W., 44, p. 279-306 (1978)

[37] CAIROLI R. : Sur l'extension de la définition d'intégrale stochastique.
Séminaire de probabilités XIII, Université de Strasbourg, (1979)

[38] CAIROLI R. : Une représentation intégrale pour les martingales fortes. Sem. Prob. de Strasbourg, Vol. XII (1977)

[39] CHOW Y.S. : Convergence theorems of martingales. Z. fur W., 1, p. 340-342 (1962)

[40] DOLEANS C. : Variation quadratique des martingales continues à droite. Ann. Math. Statist. 40, 284-289 (1969)

[41] DOLEANS C., MEYER P.A. : Un petit théorème de projection pour les processus à deux indices. Sem. de Probabilités, vol. XIII, (1979)

[42] DOZZI M. : Ueber stochastische integrale mit mehrdimensionalem Parameter Thèse présentée à l'Université de Bern (1979)

[43] DOZZI M. : Intégrales stochastiques pour processus à paramètre multi-dimensionnel : Formule de Stokes et indépendance du chemin. C.R. Ac. Sc. Paris (1979)

[44] GUYON X., PRUM B. : Le théorème de Girsanov pour une classe de processus à paramètre multidimensionnel. C.R. Ac. Sc. de Paris, t. 285, p. 565-567 (1977).

[45] GUYON X., PRUM B. : Formule de Ito pour les martingales faibles sur $\mathbb{R}^2$; fonctions harmoniques faibles ; applications. C.R. Ac. Sc., t. 286, p. 281-284 (1978)

[46] GUYON X., PRUM B. : Processus à indice dans $[0,1]^2$. Publication Univ. d'Orsay, n° 293 (1978)

[47] GUYON X., PRUM B. : Différents types de variations produits pour une semi-martingale représentable de $[0,1]^2$. C.R. Ac. Sc., t. 287, p. 255-287 (1978)

[48] GUYON X., PRUM B. : Martingales faibles sur $[0,1]^2$: trace sur un chemin et applications de la formule de Ito. C.R.Ac. Sc., t. 287, p. 543-546 (1978)

[49] GUYON X., PRUM B. : Propriétés markoviennes de martingales fortes gaussiennes sur $\mathbb{R}^2$.
C.R. Ac. Sc., t. 288, p. 221-224 (1979)

[50] GUYON X., PRUM B. : Différents types de variations produit pour une semi-martingale représentable à deux paramètres.
Ann. Inst. Fourier, Tome XXIX, Fasc. 3, p. 295-317 (1979)

[51] GUYON X., PRUM B. : Variations-produit et formule de Ito pour les semi-martingales représentables à deux paramètres.
Soumis à publication (1979)

[52] HAJEK B., WONG E. : Representation and transformation of two parameter martingales under a change of measure.
Memorandum No. UCB /ERL, M 79/23 , Univ. Berkeley (1979)

[53] HELMS L.L. : Mean convergence of martingales.
Trans. Amer. Math. Soc., p. 439-446 (1958)

[54] KOREZLIOGLU H., MAZZIOTTO G., SZPIRGLAS J. : Filtering equations for two-parameter processes.
Publication D-78018, E.N.S.T. (1978)

[55] KRICKEBERG K. : Convergence of martingales with a directed index set.
TAMS 83, p. 313-337 (1956)

[56] Mac KEAN H.P. : Brownian motion with a serveral dimensional time.
Th. Prob. Appl. 8-4, p. 335-354 (1963)

[57] MAZZIOTO G., SZPIRGLAS J. : Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées.
C.R. Ac. Sc. , t. 286, p. 1076-1079 (1978)

[58] MAZZIOTO G., SZPIRGLAS J. : Equation du filtrage non linéaire pour un processus de Poisson mélangé à deux paramètres.
C.R. Ac. Sc., t. 289, p. 229-232.

[59] MERZBACH E. : Stopping for two-dimensional stochastic processes.
Technical Report, Ben Gurion Univ. of the Negev (1976)

[60] MERZBACH E. : Predictability and extension of the stochastic integral in the plane.
Technical Report, Ben Gurion Univ. of the Negev (1976)

[61] MERZBACH E. : Extension and continuity of the stochastic integral in the plane.
Ben Gurion Univ. (1977)

[62] MERZBACH E., ZAKAI M. : Predictable an dual predictable projection of two parameter stochastic processes. Preprint (1979)

[63] MERZBACH E. : Thèse présentée à l'Université Ben Gurion (en hébreux) (1979)

[64] METRAUX C. : Quelques inégalités pour martingales à paramètre bidimensionnel.
Sém. Prob. Strasbourg, vol. XIII, p. 170-179 (1978)

[65] MEYER P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques.
Sem. de Prob. Strasbourg, vol. X (1976)

[66] MEYER P.A. : Un petit théorème de projection pour processus à deux indices.
Sém. de Prob. Strasbourg, vol. XIII (1978)

[67] MEYER P.A. : Sur la théorie des processus à deux indices.
Sem. Prob. Strasbourg, vol. XIII (1978)

[68] MICHEL D. : Sur le calcul intégral stochastique à deux paramètres.
C.R. Ac. Sc., t. 286, p. 601-604

[69] MICHEL D. : Formule de Stokes stochastique.
C.R. Ac. Sc., t.286, p. 627-630

[70] NUALART D., SANZ M. : Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres.
A.S. Univ. Clermont, n° 61, St Flour (1976)

[71] NUALART D., SANZ S. : Caractérisation des martingales à deux indices indépendantes du chemin.
Preprint, Univ. Politenica de Barcelona (1978)

[72] NUALART D., SANZ S. : A markov property for two dimensional gaussian processes.
Stochastica, vol. III, n° 1 (1979)

[73] NUALART D., SANZ S. : Changing time for two parameter strong martingales.
Preprint (1979)

[74] SZPIRGLAS J. : Un processus à deux indices sans propriété (F4).
Preprint (1979)

[75] SANZ S. : Calcul diferencial estocastic per a process amb parametre n-dimensional.
Thèse présentée à l'Université de Barcelone (1977) (en catalan)

[76] WALSH J.B. : A property of conformal martingales.
Séminaire probabilités XI. Lecture Notes. Springer Verlag, 490-492 (1977)

[77] WALSH J.B. : Martingales with a multi-dimensional parameter and stochastic integrals in the plane.
Cours de 3ème cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris (1977)

[78] WALSH J.B. : Convergence and regularity of multiparameter strong martingales.
Z. fur W. 46, p. 177-192 (1979)

[79] WONG E., ZAKAI M. : Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter.
Z. fur W. 29, 109-122 (1974)

[80] WONG E., ZAKAI M. : Weak martingales and stochastic integrals in the plane.
Ann. Prob. 4, 570-586 (1976)

[81] WONG E., ZAKAI M. : An extension of stochastic integrals in the plane.
Ann. Prob. 5, p. 770-778 (1977)

[82] WONG E., ZAKAI M. : The sample function continuity of stochastic integrals in the plane.
Ann. Prob. 5 , p. 1024-1027 (1977)

[83] WONG E., ZAKAI M. : Likelihood ratios and transformation of probability associated with two parameter Wiener processes.
Z. fur W., 40, p. 283-308 (1977)

[84] WONG E., ZAKAI M. : Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane.
Stoch. Proc. Appl. 6, p. 339-349 (1978)

[85] YOR M. : Représentation des martingales de carré intégrable relative aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètre.
Z. fur W., 35, p. 121-129 (1976)

[86] YOR M. : Etude de certains processus (stochastiquement) différentiables ou holomorphes.
Pub. Univ. Paris VI, n° 224 (1976)

[87] ZAKAI M. : Some classes of two parameter martingales.
A paraître dans Ann. Prob. (1979)

CHAPITRE I

DIFFERENTS TYPES DE MARTINGALES A INDICE DANS $\mathbb{R}_+^2$.

Nous exposons dans ce chapitre les définitions et propriétés de base des divers types de martingales à indice dans $\mathbb{R}_+^2$. Ces définitions et propriétés ont été étudiées dans [1,2,3,4,5] *.

Les propriétés de martingale seront soit des propriétés relatives aux deux indices (s,t) : notion de martingale, de martingale faible, de martingale forte, soit des propriétés relatives à seul indice : notion de i-martingale (cf. § 2 et 4).

On étudiera également les processus qui ont une propriété de martingale relativement à un indice et qui sont à variation bornée relativement à l'autre : c'est la notion de i-martingale propre (§ 3).

Dans [4], Cairoli et Walsh donnent une approche très claire et très complète des différentes notions de martingales en (s,t), ou par rapport à un seul des deux indices. Les § 2 et § 4 de ce chapitre se réfèrent explicitement à ce travail.

Au § 2, nous introduisons une notion nouvelle, qui s'avèrera très utile par la suite, celle de i-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens i, généralisant la notion de martingale à accroissements orthogonaux introduite dans [16] par Zakai. Nous montrerons au Chapitre II que c'est la notion naturelle de processus par rapport auxquels on peut définir les intégrales doubles, stochastiques ou stochastiques mixtes : en effet, pour de tels processus, il existe une version cad croissante de $< M >^{(1)}$ (§ 4).

Au § 3, nous étudions les i-martingales propres, notion introduite dans [5] par Wong et Zakai : si $(\mathrm{Var}\, X_{s.})_t$, la variation totale de $\{(X_{sv}),\ v \le t\}$, est intégrable, alors $\{\mathrm{Var}(X_{s.})_t\ ,\ \mathcal{F}_s^1\}$ est une sous-martingale. On en déduit les inégalités maximales pour les 1-martingales propres :

---

* La bibliographie commune aux chapitres I et II se trouve en fin du chapitre II.

$$\begin{cases} E(\sup\limits_{z} |X_z|^p) \ (\frac{p}{p-1})^p \ \sup\limits_{s,t} E(|X_{s,o}|^p + \mathrm{Var}(X_{s,.})_t^p) \\ \lambda P(\sup\limits_{z} |X_z| \geq \lambda) \leq \sup\limits_{s,t} E(|X_{s,o}| + \mathrm{Var}(X_{s,.})_t) . \end{cases}$$

De la première inégalité, il résulte que l'espace $\mathcal{M}^2_{1,p}(z_o)$ des 1-martingales propres de L^2 sur $\mathbf{R}_{z_o}$ est un espace de Banach, ce qui nous permettra de définir les intégrales stochastiques mixtes dans L^2. La seconde inégalité nous permettra quant à elle de définir ces mêmes intégrales dans L^1 (cf. Ch. II, § 3).

Le paragraphe § 4 est consacré à l'étude des processus croissants ; l'unicité du processus croissant, prévisible, $< M >$ d'une martingale de L^2, résulte de la régularité des martingales de $L \log L$ bornées ([11]) et des résultats sur la projection prévisible d'un processus à deux indices ([12], [15]).

Nous avons limité l'étude aux processus définis sur $\mathbf{R}^2_+$ comme cela est l'habitude. Cependant, beaucoup de définitions et de propriétés de base s'étendent pour des processus définis sur le plan $\mathbf{R}^2$ tout entier. Dans ce cas, la trace sur les deux demi-axes positifs de la filtration de base résume le passé de cette filtration sur $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}^2_+$, pour l'ordre partiel.

§ 1 - Définitions et notions préliminaires.

Dans tout ce travail nous considèrerons des processus à indice dans $\mathbb{R}_+^2$ (parfois dans $\mathbb{R}^2$). Nous noterons les points du plan par z, ξ ou η, leurs coordonnées par (s,t), (u,v), (x,y), (σ,τ).

On notera, si $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$

l'ordre partiel : $z \leq z' \Leftrightarrow s \leq s'$ et $t \leq t'$.

l'ordre partiel strict $\ll$: $z \ll z' \Leftrightarrow s < s'$ et $t < t'$.

l'ordre partiel strict $\curlywedge$: $z \curlywedge z' \Leftrightarrow s < s'$ et $t' < t$.

$$z \wedge z' = \inf(z,z') = (\inf(s,s'), \inf(t,t'))$$

$$z \vee z' = \sup(z,z') = (\sup(s,s'), \sup(t,t'))$$

inf et sup étant pris en s, t, s', t' pour l'ordre habituel de la droite.

Le rectangle $]z,z'] = \{\xi \in \mathbb{R}_+^2,\ z \ll \xi \leq z'\}$.

En particulier on notera

$$R_z =]0,z]$$

où $0 = (0,0)$ est l'origine de $\mathbb{R}_+^2$. Si $z = (s,t)$ on note

$$R_z^1 = R_s^1 = \{\xi = (u,v),\ 0 < u \leq s\}$$

et symétriquement

$$R_z^2 = R_t^2 = \{\xi = (u,v),\ 0 < v \leq t\}$$

$Q_z = R_z^1 \cup R_z^2$ sera l'équerre construite à partir de z.

Si $A \subset \mathbb{R}_+^2$, on notera

$z \leq A$ pour $\{z \leq z'$, pour tout z' de $A\}$

$z \ll A$ $\{z \ll z'$, pour tout z' de $A\}$

$A \leq z$ $\{z' \leq z$, pour tout z' de $A\}$

les définitions : $A < B$, $A \ll B$, $A \curlywedge B$ s'en déduisant.

Espace de probabilité et famille de tribus.

La base du processus est

. la donnée d'un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

. la donnée d'une famille $\{\mathcal{F}_z\ ,\ z \in \mathbf{R}_+^2\}$ de sous tribus de $\mathcal{F}$.

Si $z = (s,t)$, on définit les deux familles de tribus à un paramètre :

$$\{\mathcal{F}_s^1\}_{s \in \mathbf{R}_+}\ ,\qquad \mathcal{F}_s^1 = \bigvee_{v \in \mathbf{R}_+} \mathcal{F}_{sv} \quad \text{(on notera aussi } \mathcal{F}_s^1 = \mathcal{F}_z^1\text{)}$$

$$\{\mathcal{F}_t^2\}_{t \in \mathbf{R}_+}\ ,\qquad \mathcal{F}_t^2 = \bigvee_{u \in \mathbf{R}_+} \mathcal{F}_{ut} \quad \text{(on notera aussi } \mathcal{F}_t^2 = \mathcal{F}_z^2\text{)}$$

qui permettent de définir la nouvelle tribu à double indice

$$\{\mathcal{F}_z^*\}_{z \in \mathbf{R}_+^2}\ ,\ \mathcal{F}_{st}^* = \mathcal{F}_s^1 \vee \mathcal{F}_t^2 .$$

<u>Processus mesurable</u>, <u>processus adapté</u>, <u>processus prévisible</u>.

* $X = \{X_z,\ z \in \mathbf{R}_+^2\}$ sera dit <u>mesurable</u> si

$$(z,\omega) \longrightarrow X(z,\omega)$$

est $\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2) \otimes \mathcal{F}$-mesurable ($\mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$ est la tribu des boréliens sur $\mathbf{R}_+^2$).

* X sera dit <u>adapté</u> si pour tout $z \in \mathbf{R}_+^2$, X_z est $\mathcal{F}_z$-mesurable, <u>i-adapté</u> si X_z est $\mathcal{F}_z^i$-mesurable.

* On appelle <u>tribu des prévisibles</u> la tribu sur $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega$ engendrée par les ensembles

$$\{\ ]z,z']\times H \quad \text{où } H \in \mathcal{F}_z\}$$

la tribu des 1-prévisibles, la tribu engendrée par les ensembles

$$\{\ ]z,z'] \times H \quad \text{où } H \in \mathcal{F}_z^1\}$$

et symétriquement la tribu des 2-prévisibles. X sera dit <u>prévisible</u> (i-prévisible) s'il est mesurable pour la tribu des prévisibles (i-prévisibles).

<u>Hypothèse</u> (F).

On fera alors les hypothèses suivantes sur $\{\mathcal{F}_z\}$.

(F)

(F1) La famille de tribus est croissante :

$$z \leq z' \Rightarrow \mathfrak{F}_z \subseteq \mathfrak{F}_{z'}$$

(F2) La famille est continue à droite, c'est-à-dire

$$\text{si } z \in R^2_+ , \qquad \mathfrak{F}_z = \bigcap_{z \ll z'} \mathfrak{F}_{z'}$$

(F3) $\mathfrak{F}_o$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$.

(F4) Hypothèse d'orthogonalité conditionnelle de $\mathfrak{F}^1$ et $\mathfrak{F}^2$:

Pour tout z, $\mathfrak{F}^1_z$ et $\mathfrak{F}^2_z$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathfrak{F}_z$.

Remarque.- Si la famille considérée est définie sur tout $\mathbf{R}^2$, on fera les hypothèses suivantes, en notant :

$$\mathfrak{F}_{-\infty} = \bigcap_{z \in \mathbf{R}^2} \mathfrak{F}_z$$

(F') : (F1), (F2), (F4) et (F3) est remplacé par

(F3') : $\mathfrak{F}_{-\infty}$ contient tous les ensembles négligeables de $\mathfrak{F}$.

Cependant, en général, on se limitera à l'étude des processus sur $\mathbb{R}^2_+$: dans ce cas, la trace des tribus $\mathfrak{F}_z$ sur les deux axes, $\{\mathfrak{F}_{oo}, (\mathfrak{F}_{so})_s, (\mathfrak{F}_{ot})_t\}$ résume le passé de $\mathfrak{F}$ (pour l'ordre $\leq$) sur $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}^2_+$.

Les hypothèses (F1), (F2) se résument en disant que $\{\mathfrak{F}_z\}$ est une filtration.

(F2) implique en particulier la continuité à droite des familles de tribus à un indice :

$$\{\mathfrak{F}_{st}\}_s \quad \{\mathfrak{F}_{st}\}_t \quad \{\mathfrak{F}^1_s\}_s \quad \{\mathfrak{F}^2{}_t\}_t .$$

L'hypothèse (F4) est équivalente à :

(F4)' Pour toute variable X, bornée, mesurable et tout z de $\mathbf{R}^2_+$:

$$E(X \mid \mathfrak{F}_z) = E(E(X \mid \mathfrak{F}^1_z) \mid \mathfrak{F}^2_z).$$

En particulier, si $X = 1_A$ où $A \in \mathfrak{F}^1_z \cap \mathfrak{F}^2_z$

$$E(1_A \mid \mathfrak{F}_z) = 1_A \text{ et donc } \mathfrak{F}^1_z \cap \mathfrak{F}^2_z \subset \mathfrak{F}_z .$$

L'hypothèse (F1) permet alors de conclure :

$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}^1_z \cap \mathfrak{F}^2_z .$$

Exemples.-

1. Filtration brownienne (cf. Chapitre III).

Si $\{X(A),\ A$ rectangle de $\mathbf{R}^2$, borné$\}$ est un processus sur $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tel que, pour toute famille $A_1, A_2, \ldots A_n$ de rectangles disjoints, $X(A_1), \ldots, X(A_n)$ sont n variables indépendantes, alors

$$\mathfrak{F}_z = \sigma\{X(A),\ A \leq z\}$$

vérifie (F4).

Dans le cas particulier où $X(A)$ est gaussienne, centrée, de variance la mesure de Lebesgue de A (X est le bruit blanc sur $\mathbf{R}^2$) et où les tribus $\mathfrak{F}_z$ sont complètées, alors $\{\mathfrak{F}_z\}_{z\in\mathbf{R}^2}$ vérifie (F') et $\{\mathfrak{F}_z\}_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ vérifie (F).

Au processus X, on associe, sur chacun des quatre quadrants de $\mathbf{R}^2$ les processus :

sur $\mathbf{R}_+^2$: $\qquad W_z = X(R_z) \qquad (z \in \mathbf{R}_+^2)$

et de même trois autres processus sur les trois autres quadrants. W_z est appelé drap brownien à deux dimensions.

2. Filtration produit de deux filtrations indépendantes.

Si X_1 et X_2 sont deux bruits blancs gaussiens sur $\mathbf{R}$, indépendants, on peut leur associer deux familles $\mathfrak{F}_{1,s}$ et $\mathfrak{F}_{2,t}$ ainsi que la famille $\mathfrak{F}_{st} = \mathfrak{F}_{1,s} \otimes \mathfrak{F}_{2,t}$. La famille $\{\mathfrak{F}_{s,t}\}$ vérifie (F) : c'est la filtration brownienne produit associée au processus à accroissements orthogonaux, non gaussien :

$$\widetilde{W}_{st} = X_1(]0,s])\, X_2(]0,t]).$$

Dans la suite, nous identifierons de façon biunivoque les fonctions additives d'unions finies de rectangles à côtés parallèles aux axes et les processus nuls sur les axes par :

$$X_z = X(R_z).$$

D'autre part, si X est un processus quelconque, on notera :

$$X(]z,z']) = X(s',t') - X(s',t) - X(s,t') + X(s,t).$$

§ 2 - Divers types de martingales.

$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_z)_{z \in R_+^2}, P)$ sera une base de processus, la filtration vérifiant (F).

Définition 1.- Martingale.

Un processus $M = \{M_z, z \in \mathbf{R}_+^2\}$ est une martingale si

1. M est adaptée.
2. Pour tout z, M_z est intégrable.
3. Si $z \leq z'$: $E(M_{z'} | \mathcal{F}_z) = M_z$.

Définissons alors de nouvelles notions, relatives à l'accroissement rectangulaire d'un processus.

Définitions 2.- i-martingale, martingale faible, forte, accroissements orthogonaux.

Soit $\{X_z, z \in R_+^2\} = X$ un processus tel que chaque X_z soit intègrable .

(a) X est une martingale faible si,

1. X est adaptée.
2. Si $z \leq z'$, $E(X(]z,z']) | \mathcal{F}_z) = 0$.

(b) X est une 1-martingale si

1. X est $\mathcal{F}^1$-adaptée.
2. Si $z \leq z'$ $E(X(]z,z']) | \mathcal{F}_z^1) = 0$.
3. $\{X_{s,0} , \mathcal{F}_s^1\}$ est une martingale.

(On définit symétriquement la notion de 2-martingale).

(c) X est une martingale forte, si

1. X est adaptée.
2. $E(X(]z,z']) | \mathcal{F}_z^*) = 0$ pour $z \leq z'$.

(d) X est une 1-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1 (on écrira 1-martingale a.o.1).

1. X est une 1-martingale.

2. Si $D_1 =]z_1, z_1'], D_2' =]z_2, z_2'], \; z = z_1 \wedge z_2$,

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset \Rightarrow E[X(D_1)\, X(D_2) \mid \mathcal{F}_z^1] = 0$$

(on définit symétriquement les 2-martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 2 : 2-martingale a.o.2).

(e) X est une martingale à accroissements orthogonaux (a.o) si c'est une martingale à accroissements orthogonaux dans l'un et l'autre sens.

La notion de martingale a.o. est introduite dans [16] par Zakai (il l'appelle aussi martingale à variation indépendante de la direction, cf. Ch. V).

Remarque.- Si on considère une filtration $\{\mathcal{F}_z\}$ sur tout $\mathbf{R}^2$, on peut donner, pour des processus sur $\mathbf{R}^2$, des définitions analogues pour martingale, martingale faible, martingale forte, martingale à accroissements orthogonaux.

La notion de i-martingales $(i = 1,2)$ peut être alors de deux types : soit celui donné dans la définition précédente (b), c'est-à-dire $\{(X_{st})_s, (\mathcal{F}_{st}^1)_s, \; s \in \mathbf{R}\}$ est une martingale $(i = 1)$, soit celle ne faisant intervenir que (b-1) et (b-2) de la définition précédente. C'est la définition donnée par Cairoli et Walsh. Si la 1-martingale est nulle en $(s, -\infty)$, les deux notions coïncident.

Propriété 2-1.-

(a) M est une 1-martingale si et seulement si, pour tout t, $\{M_{st}, \mathcal{F}_s^1\}_{s \geq 0}$ est une martingale.

(b) M est une martingale si et seulement si c'est à la fois une 1 et une 2-martingale.

(c) Une martingale forte est à a.o.

Démonstration : (a) est immédiat.

(b) est une conséquence de (F4) :

Si M est une martingale, M_z est $\mathcal{F}_z^1$-adaptée et, d'après (F4)

$$E(M_{s't} - M_{st} \mid \mathcal{F}_s^1) = E(M_{s't} - M_{st} \mid \mathcal{F}_{st}) = 0 \quad (s \leq s').$$

Réciproquement, si M est une 1 et 2-martingale, M_z est adapté d'après (F4) ; d'autre part :

Si $z = (s,t) \leq z' = (s',t')$ on a :

$$E(M_{z'} - M_z \mid \mathcal{F}_z) = E(M_{s't'} - M_{s't} \mid \mathcal{F}_z) + E(M_{s't} - M_{st} \mid \mathcal{F}_z).$$

Or : $$E(M_{s't'} - M_{s't} \mid \mathcal{F}_{st}) = E(M_{s't'} - M_{s't} \mid \mathcal{F}_t^2 \mid \mathcal{F}_{st}) = 0$$

et de même

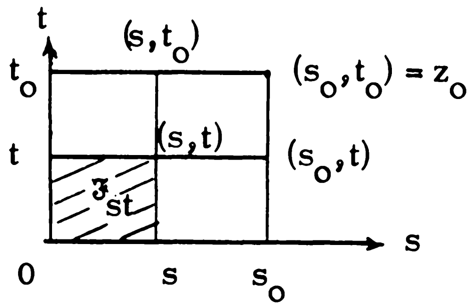
$$E(M_{s't} - M_{st} \mid \mathcal{F}_z) = 0$$

(c) est immédiat. □

Propriété 2-2.-

> $M = \{M_z, z \in R_{z_o}\}$ est une martingale faible si et seulement si $M = M_1 + M_2$ où M_1 est une 1-martingale adaptée et M_2 une 2-martingale adaptée.

Démonstration :



Définissons les processus (adaptés) :

$$M_{st}^1 = E(M_{s_o t} \mid \mathcal{F}_{st})$$

$$M_{st}^2 = E(M_{st_o} \mid \mathcal{F}_{st})$$

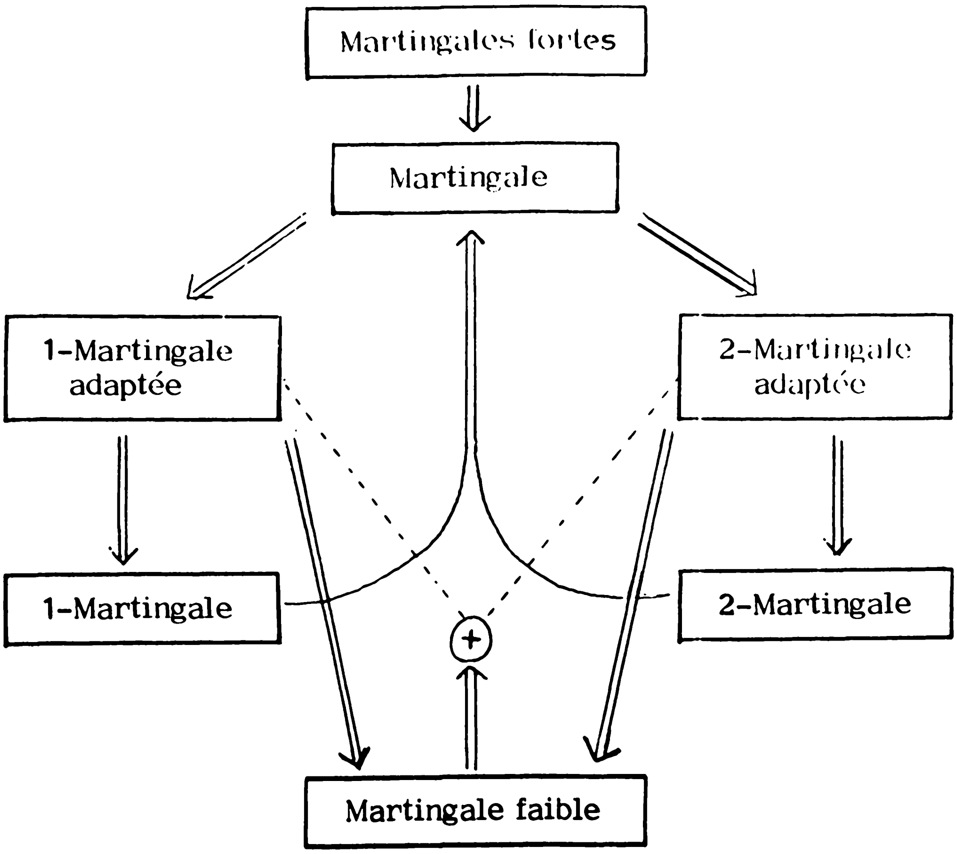
$$\mathcal{M}_{st} = E(M_{s_o t_o} \mid \mathcal{F}_{st}).$$

Puisque M est une martingale faible, on a :

$$E(M(](s,t), (s_o,t_o)]) \mid \mathcal{F}_{st}) = 0 \text{ ; soit encore :}$$

$$M_{st} = M_{st}^1 + M_{st}^2 - \mathcal{M}_{st} .$$

Or M^1_{st} est une 1-martingale adaptée, M^2_{st} une 2-martingale adaptée, $\mathcal{m}$ une martingale, d'où le résultat . ■



On définira les notions de limite à gauche, à droite, d'un processus $\{X_z, z\in\mathbf{R}^2_+\}$ relativement à la relation d'ordre strict $<<$ (à gauche), $\leq$ (à droite) . $\{X_z, z\in\mathbf{R}^2_+\}$ est continu à droite si

$$P\{\omega \mid \exists \ z\in\mathbf{R}^2_+ \ \text{tel que} \lim_{\substack{z'\to z\\ z'\geq z}} X_{z'} \neq X_z\} = 0$$

$\{X_z, z\in\mathbf{R}^2_+\}$ admet une limite à gauche si

$$P\{\omega \mid \exists z\in\mathbf{R}^2_+ \ \text{tel que} \lim_{\substack{z'\to z\\ z'<<z}} X_{z'} \ \text{n'existe pas}\} = 0.$$

<u>Propriété 2-3</u>.- <u>Inégalité maximale de Doob-Cairoli</u>.

Soit $\{M_z, z\in\mathbf{R}^2_+\}$ une martingale continue à droite, alors pour $\lambda > 0$

(a) $E\{\sup_z |M_z|^p\} \leq (\frac{p}{p-1})^{2p} \sup_z E\{|M_z|^p\}$, $p > 1$.

(a') En particulier $E\{\sup_{z \leq z_o} |M_z|^p\} \leq (\frac{p}{p-1})^{2p} E|M_{z_o}|^p$, $p > 1$.

(b) $\lambda P\{\sup_z |M_z| \geq \lambda\} \leq \frac{e}{e-1}(1 + \sup_z E\{|M_z| \mathrm{Log}^+ |M_z|\})$

(avec la même remarque (b') si le sup est pris sur R_{z_o}).

Démonstration :

(a) A s fixé, M_{st} est une 2-martingale, $|M_{st}|$ une sous-martingale positive en t. Posons :

$$Y_t = \sup_s |M_{st}|.$$

C'est une $\mathcal{F}^2$ sous-martingale en t. Appliquant deux fois l'inégalité de Doob :

$$E(\sup_z |M_z|^p) \leq E(\sup_t Y_t^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p \sup_t E|Y_t|^p$$

$$E(|Y_t|^p) = E(\sup_s |M_{st}|^p) \leq (\frac{p}{p-1}) \sup_s E|M_{st}|^p$$

on obtient l'inégalité désirée :

(b) $$\lambda P(\sup_z |M_z| \geq \lambda) = \lambda P(\sup_t Y_t \geq \lambda)$$

$$\leq \sup_t E(Y_t) \leq \frac{e}{e-1}(1 + \sup_{s,t} E(|M_{st}| \log^+ |M_{st}|)$$

d'après l'inégalité $L \log^+ L$ de Doob ; d'où la deuxième inégalité. ■

Une conséquence de cette inégalité est qu'une martingale $L \log L$ bornée converge presque surement si $z \to \infty$ vers M_∞ et donc :

$$M_z = E(M_\infty | \mathcal{F}_z).$$

La deuxième conséquence, fondamentale, est la convergence uniforme en z, des suites de Cauchy de martingales de carré intégrable.

Propriété 2-4.-

Soit $\{M_n\}$ une suite de martingales de carré intégrable, continues à droite et vérifiant :

$$\sup_z E(M_{n+1}(z) - M_n(z))^2 \leq 2^{-n} .$$

Alors, avec la probabilité 1, la suite $M_n(z)$ converge uniformément en z.

Démonstration :

Elle est identique à celle en dimension 1. D'après l'inégalité de Doob-Cairoli

$$E(\sup_z |M_{n+1}(z) - M_n(z)|^2 \leq 2^{-n+4} \quad \text{et donc,}$$

$$P\{\sup_z |M_{n+1}(z) - M_n(z)| > \epsilon_n\} \leq \eta_n = 2^{-n+4} \epsilon_n .$$

Choisir alors ϵ_n tel que ϵ_n soit sommable. Alors :

$$A = \limsup \{\sup_z |M_{n+1}(z) - M_n(z)| > \epsilon_n\}$$

est négligeable et si $\omega \notin A$, il existe $N(\omega)$ tel que

$$\forall\, z, \ \forall\, m > N(\omega) : \qquad |M(z) - M_m(z)|(\omega) \leq \sum_{n \geq m} \eta_n$$

(où $M(z)$ est la limite de $M_n(z)$) ; d'où l'uniformité de la convergence en z. ■

Dans le cas où les processus M_n sont cad, lag, il en sera de même de leur limite.

On a le résultat fondamental suivant :

Théorème 2-4 : régularité des martingales (Bakry, [11]).-

Toute martingale de $\mathbf{R}_+^2$ L log L-bornée admet une version cadlag.

Par la suite nous ne considèrerons pour de telles martingales que leurs versions cadlag.

Soit $z_o \in \mathbf{R}_+^2$.

Espace $\mathcal{M}^p(z_o)$, $p > 1$; c'est l'espace (de Banach) des martingales, centrées, cadlag, bornées dans L^p, avec $\|M\|_p = (E|M_{z_o}|^p)^{1/p}$. $\mathcal{M}^2(z_o)$ est muni du produit scalaire : M $(M,N) = E(M_{z_o} N_{z_o})$.

Espace $\mathcal{M}_c^p(z_o)$: C'est le sous-espace des martingales continues.

Espace $\mathcal{M}_s^p(z_o)$: (s comme fort) : C'est le sous-espace des martingales fortes.

Espace $\mathcal{M}_{a.o.}^p(z_o)$: C'est le sous-espace des martingales a.o.

Propriété 2-5.-

$\mathcal{M}^2(z_o)$ est un espace de Hilbert admettant $\mathcal{M}_c^2(z_o)$, $\mathcal{M}_s^2(z_o)$ et $\mathcal{M}_{a.o.}^2(z_o)$ comme sous-espaces fermés.

Démonstration :

$\mathcal{M}^2(z_o)$ est complet : Soit (M_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{M}^2(z_o)$. D'après la propriété 2-4, M_n converge p.s. uniformément vers un processus M. Vérifions que M est une martingale de L^2.

Si $z \leq z'$ et $A \in \mathcal{F}_z$,

$$\int_A M(z')dP = \lim \int_A M_n(z')\, dP = \lim \int_A M_n(z)\, dP = \int_A M(z)\, dP$$

puisque les suites $(M_n(z))$ et $(M_n(z'))$ convergent dans L^2 et sont uniformément intégrables.

Par ailleurs, M est dans L^2.

$\mathcal{M}_c^2(z_o)$ est fermé : C'est une conséquence de la proposition 2-4.

On démontre enfin que $\mathcal{M}_{a.o.}^2(z_o)$ et $\mathcal{M}_s^2(z_o)$ sont des sous-espaces fermés comme on a montré que $\mathcal{M}^2(z_o)$ est complet. ■

Remarque.- Si t par t, il y a convergence uniforme en s d'une suite $M_n(s,t)$ de 1-martingale vers $M(s,t)$, alors $M(s,t)$ est une 1-martingale, continue (resp. a.o.1) si M_n sont continues (resp. a.o.1).

§ 3 - 1-martingale propre ; martingales faibles régulières.

Tout processus (M_{st}) peut être considéré, à s fixé, comme processus à un paramètre. On notera alors :

$$\mathrm{Var}(M_{s,\cdot})$$

la variation totale de $(M_{st})_t$, soit

$$\mathrm{Var}(M_{s,\cdot}) = \sup_{\pi} \sum_{\pi} |M(s,\Delta_{t_i})|$$

sur les partitions π de l'ensemble décrit par t.

Propriété 3-1.-

Si M est une 1-martingale telle que $\mathrm{Var}(M_{s,\cdot})$ est intégrable pour tout s, alors $\{\mathrm{Var}(M_{s,\cdot}), \mathcal{F}_s^1\}_s$ est une sous-martingale.

Démonstration :

Soient $s \leq s'$ et π une partition de l'ensemble des t.

$$\begin{aligned} E(\mathrm{Var}(M_{s',\cdot}) \mid \mathcal{F}_s^1) &\geq E(\sum_{\pi} |M(s',\Delta_{t_i})| \mid \mathcal{F}_s^1) \\ &\geq \sum_{\pi} |E(M(s',\Delta_{t_i}) \mid \mathcal{F}_s^1)| \\ &= \sum_{\pi} |M(s,\Delta_{t_i})| \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Définition 3-1.- 1-martingale propre.-

On dira que le processus M_z, $z \in R_{z_o}$ est une 1-martingale propre sur R_{z_o} si c'est une 1-martingale et si de plus

$$E[\mathrm{Var}(M_{s_o\cdot})] \quad \text{est fini.}$$

On dira que M est une 1-martingale propre sur $\mathbb{R}_+^2$ si c'est une 1-martingale vérifiant

$$\sup_s E(\mathrm{Var}(M_{s,\cdot})) \quad \text{est fini.}$$

Propriété 3-2.- Inégalité maximale de Doob, Wong et Zakai.

Si $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une 1-martingale propre continue à droite nulle sur l'axe des s, alors :

(a) $E(\sup_z |M_z|^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p \sup_s E(\mathrm{Var}(M_{s,.}))^p, \quad p > 1.$

(a') En particulier si $z_o = (s_o, t_o)$

$$E(\sup_{z\leq z_o} |M_z|^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p E(\mathrm{Var}(M_{s_o,.}))^p .$$

(b) pour tout $\lambda \geq 0$

$$\lambda P(\sup_{s,t} |M_{st}| \geq \lambda) \leq \sup_s E(\mathrm{Var}(M_{s,.}))$$

(b') $$\lambda P(\sup_{z\leq z_o} |M_{st}| \geq \lambda) \leq E(\mathrm{Var}(M_{s_o,.}))$$

Démonstration :

(a) On a, pour tout s (puisque $X_{s,o} = 0$)

$$\sup_t |M_{st}| \leq \mathrm{Var}(M_{s,.})$$

et donc, d'après l'inégalité maximale de Doob

$$E(\sup_z |M_{st}|^p) \leq E(\sup_s (\mathrm{Var}(M_{s,.}))^p \leq \sup_s E(\mathrm{Var}(X_{s,.}))^p.$$

(b) Puisque :

$$\{\sup_t |M_{st}| \geq \lambda\} \subset \{\mathrm{Var}\, M_{s,.} \geq \lambda\}.$$

On a :

$$\lambda P(\sup_z |M_z| \geq \lambda) \leq \lambda P(\sup_s (\mathrm{Var}(M_{s,.})) \geq \lambda)$$

$\mathrm{Var}(M_{s,.})$ étant une sous-martingale, on déduit le résultat. ■

Corollaire 3-2.- Inégalité maximale pour les 1-martingales propres.

Si M est une 1-martingale propre continue à droite, alors, posant

$$N_s^{(1)} = \mathrm{Var}(M_{s,.}) + |M_{s,o}|$$

on a encore les inégalités maximales de la proposition 3-2, ou dans le

second membre, $\mathrm{Var}(M_{s,\cdot})$ est remplacé par la sous-martingale $N_s^{(1)}$.
En particulier, on a :

$$E \sup_z |M_z|^p \leq 2^{p-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_z E\left[(\mathrm{Var}(M_{s,\cdot}))^p + |M_{s,o}|^p\right].$$

Démonstration : découle immédiatement des deux inégalités :

$$|M_{st}| \leq |M_{st} - M_{s,o}| + |M_{s,o}| \leq N_s^{(1)}$$

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)^p \leq k^{p-1}(a_1^p + \ldots + a_k^p)$ pour tout k-uple $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de réels positifs.

Propriété 3-3.-

Soit $\{M_n\}$ une suite de 1-martingales propres de L^2, continues à droite et vérifiant :

$$\sup_s E\left[(\mathrm{Var}(M_n - M_{n+1})(s,.))^2 + ((M_n - M_{n+1})(s,o))^2\right] \leq 2^{n+1}.$$

Alors, avec la probabilité 1, la suite $M_n(z)$ converge uniformément en z.
La limite $M = \{M_z, z \in \mathbf{R}_+^2\}$ est une 1-martingale propre de L^2, continue à droite.

Démonstration :

Pour démontrer la convergence uniforme en z, il suffit de remarquer que :

$$\sup_z |M_n(z) - M_{n+1}(z)| \leq \sup_s \mathrm{Var}(M_n(s,.) - M_{n+1}(s,.))$$

et d'appliquer (a) de la proposition précédente. La démonstration suit comme pour la propriété 2-4.

La limite M est dans L^2 et on montre que M est une 1-martingale (cf. prop. 2-5).

Reste à voir que M est une 1-martingale propre. Or :

$$M = M_1 + \sum_{n \geq 1} (M_{n+1} - M_n)$$

et donc :

$$\mathrm{Var}\, M(s,.) \leq \mathrm{Var}\, M_1(s,.) + \sum_n \mathrm{Var}(M_{n+1} - M_n)(s,.)$$

$$E \operatorname{Var} M(s,.) \leq E \operatorname{Var} M_1(s,.) + \sum_n E \operatorname{Var}(M_{n+1} - M_n)(s,.)$$

$$\leq E \operatorname{Var} M_1(s,.) + \sum_n \{E[\operatorname{Var}(M_{n+1}-M_n)(s,.)]^2\}^{1/2}$$

$$\sup_s E \operatorname{Var} M(s,.) \leq \sup_s E \operatorname{Var} M_1(s,.) + \sum_n \{\sup_s E[\operatorname{Var}(M_{n+1}-M_n)(s,.)]^2\}^{1/2}$$

$$\leq \sup E \operatorname{Var} M_1(s,.) + 2$$

quantité finie puisque M_1 est une 1-martingale propre.

Cette propriété se traduit ainsi :

Soit $\mathcal{M}^2_{1,P}$ l'espace de 1-martingale propre de L^2, muni de la norme :

$$\|M\|^2 = \sup_s E[(\operatorname{Var} M(s,.))^2 + M(s,o)^2].$$

Alors $\mathcal{M}^2_{1,P}$ <u>est un espace de Banach</u>.

<u>Définition 3-2</u>.- <u>Martingale faible régulière sur</u> R_{z_o}.-

(a) Une martingale faible X est dite 1-régulière sur R_{z_o} si

- Pour tout s, $\{X_{st}, \mathcal{F}_{st}\}_{t \leq t_o}$ est une semi-martingale en t.

- En s_o : $X_{s_o t} = m(t) + b(t)$ où m est une martingale et $b(t)$ est à variation bornée telle que

$$E(\operatorname{Var} b(.)) < \infty .$$

On définit symétriquement les martingales faibles 2-régulières.

(b) Une martingale faible sera dite régulière si elle est 1 et 2-régulière.

On a alors le théorème de décomposition suivant d'une martingale faible régulière.

<u>Propriété 3-4</u>.-

Toute martingale faible régulière est la somme d'une martingale, d'une 1-martingale propre et d'une 2-martingale propre. Si on impose aux parties i-martingale propre d'être continues, alors il y a unicité de la décomposition.

<u>Démonstration</u> :

Définissons, comme dans la propriété 2-2, la décomposition de la martingale faible M :

$$M_{st} = m_{st} + M^1_{st} + M^2_{st}$$

où

$$M^1_{st} = E(M_{s_o t} \mid \mathfrak{F}_{st}) \quad \text{(1-martingale)}$$

$$M^2_{st} = E(M_{st_o} \mid \mathfrak{F}_{st}) \quad \text{(2-martingale)}$$

$$m_{st} = E(M_{s_o t_o} \mid \mathfrak{F}_{st}) \quad \text{(martingale).}$$

On peut encore écrire, puisque $M_{s_o t} = n(t) + b(t)$ où n est une martingale et b est à variation bornée

$$M^1_{st} = m_1(s,t) + b_1(s,t)$$

avec

$$m_1(s,t) = E(n(t) \mid \mathfrak{F}_{st})$$

$$b_1(s,t) = E(b(t) \mid \mathfrak{F}_{st}).$$

Vérifions que m_1 est une martingale : si $(s,t) \leq (s',t')$

$$E(m_1(s',t') \mid \mathfrak{F}_{st}) = E(E(n(t') \mid \mathfrak{F}_{s't'}) \mid \mathfrak{F}_{st}) = E(n(t') \mid \mathfrak{F}_{st}) = E(n(t') \mid \mathfrak{F}_{s_o t}) \mid \mathfrak{F}_{st})$$
$$= E(n(t) \mid \mathfrak{F}_{st}) = m_1(s,t).$$

Vérifions que b_1 est une 1-martingale propre :

. C'est une 1-martingale : si $s \leq s'$

$$E(b_1(s',t) \mid \mathfrak{F}_{st}) = E(E(b(t) \mid \mathfrak{F}_{s't}) \mid \mathfrak{F}_{st}) = b_1(s,t).$$

. C'est une 1-martingale propre :

$$\operatorname{Var} b_1(s,.) \leq \sup_{\pi} \sum_{\pi} |b_1(s,t_{i+1}) - b_1(s,t_i)|$$

$$|b_1(s,t_{i+1}) - b_1(s,t_i)| = |E(b(t_{i+1}) \mid \mathfrak{F}_{st_{i+1}}) - E(b(t_i) \mid \mathfrak{F}_{st_i})|$$
$$= |E(b_{t_{i+1}} \mid \mathfrak{F}^1_s) - E(b_{t_i} \mid \mathfrak{F}^1_s)| \quad \text{(cond. (F4))}$$
$$\leq E(|b_{t_{i+1}} - b_{t_i}| \mid \mathfrak{F}^1_s)$$

et donc :

$$E \operatorname{Var} b_1(s,.) \le E \operatorname{Var} b(.).$$

Décomposant de même M^2, on en déduit la décomposition annoncée.

Supposons que l'on ait deux décompositions, avec parties 1-martingales propres continues :

$$M_{st} = m_{st} + b^1_{st} + b^2_{st} = m'_{st} + b^{1'}_{st} + b^{2'}_{st}$$

$\{b^1_{st} - b^{1'}_{st}, \mathcal{F}_{st}\}_{t\in\mathbf{R}_+}$ est alors une martingale à variation bornée continue donc nulle ; de même $b^2 = b^{2'}$, d'où le résultat. ∎

Théorème 3-4.- (Inégalité maximale pour les martingales faibles régulières).

Si M est une martingale faible régulière de partie martingale m, de parties 1-martingale propre (2-m.p.) M^1 (M^2), alors on a les ingéalités maximales :

(a) $E \sup\limits_z |M_z|^p \le 3^{p-1}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup\limits_z E\{\left(\frac{p}{p-1}\right)^p |m_z|^p + N_s^{(1)p} + N_t^{(2)p}\}$

où on a posé

$$N_s^{(1)} = \operatorname{Var}(M^1_{s,.}) + |M^1_{s,o}|$$

$$N_t^{(2)} = \operatorname{Var}(M^2_{.,t}) + |M^2_{o,t}|, \text{ et } z = (s,t)$$

(b) $\lambda P\{\sup\limits_z |M_z| \ge \lambda\} \le \frac{3e}{e-1}(1 + \sup\limits_z E\{|m_z| \log^+ |m_z| + N_s^{(1)} + N_t^{(2)}\})$.

Démonstration :

Ces inégalités résultent, des propositions 2-3 et du corollaire 3-2, d'une part, et des inégalités :

$$(a+b+c)^p \le 3^{p-1}(a^p + b^p + c^p)$$

$$\{\sup_z |M_z| \ge \lambda\} \subset (\sup_z |m_z| \ge \tfrac{\lambda}{3}) \cup (\sup_s N_s^{(1)} \ge \tfrac{\lambda}{3}) \cup (\sup_t N_t^{(2)} \ge \tfrac{\lambda}{3}). \quad ∎$$

§ 4 - Processus croissants.

Définition 4-1.-

Un processus $A = \{A_z, z \in \mathbf{R}_+^2\}$ est croissant si

1°) il est adapté, continu à droite.

2°) il est nul sur les axes.

3°) pour tout rectangle D à bords parallèles aux axes,

$$0 \leq A(D).$$

Remarques.-

1°) Un processus tel que

$$z \leq z' \Rightarrow A(z) \leq A(z')$$

sera dit faiblement croissant.

2°) Cas des processus sur $\mathbf{R}^2$: Un processus A défini sur $\mathbf{R}^2$ sera dit croissant s'il est adapté, continu à droite et tel que $A(D) \geq 0$ pour tout rectangle borné parallèle aux axes. Le processus $\widetilde{A}_z = A(R_z)$ est alors croissant au sens de la définition 4-1.

En tout état de cause, on constatera qu'un processus croissant intervient essentiellement par ses accroissements.

Mesure de DOLEANS.

Au processus croissant A on associe la mesure sur $(\Omega \times R_{z_0}, \mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}_{z_0})$ définie par : si $F \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathcal{B}_{z_0}$

$$\mu_A(F \times B) = E[1_F \times A(B)]$$

que l'on étend aux processus X mesurables bornés.

$$\mu_A(X) = E \int_{R_{z_0}} X(z)\, A(dz).$$

Notons $L^2 = L^2(\Omega \times R_{z_0}, \mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}_{z_0}, \mu_A)$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées limite dans L^2 de fonctions simples prévisibles bornées.

Si $E[A(R_{z_o})]$ est fini, $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel de fonctions bornées qui contient les constantes. Si $f_n \in \mathcal{H}$ a une limite f pour la convergence uniforme, f appartient à $\mathcal{H}$. De même si f_n est une suite croissante de fonctions bornées par N_o, alors $f = \lim f_n$ est encore dans $\mathcal{H}$. Ceci se montre en approchant f_n par une suite $\{f_{nm}\}$ de fonctions simples prévisibles bornées et en construisant une suite diagonale tendant vers f dans L^2.

On déduit alors d'un <u>théorème de classe monotone</u> (cf. p. ex. [20], page 28) que $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions prévisibles, bornées, dans L^2. On a donc :

<u>Théorème 4-1</u>.-

Si A est un processus croissant tel que $E[A(R_{z_o})]$ soit fini, l'ensemble des fonctions simples prévisibles bornées est dense dans $L^2(\Omega \times R_{z_o}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_{z_o}, \mu_A)$, où μ_A est la mesure de Doléans associée à A.

4-1. <u>Processus croissant associé à une martingale de L^2.</u>

On a alors la version bidimensionnelle du théorème de Meyer de décomposition d'une sous-martingale.

<u>Théorème 4-2</u>.-

Si $M \in \mathcal{M}^2(z_o)$, il existe un unique processus croissant prévisible, noté $<M>$, tel que $M^2 - <M>$ soit une martingale faible.

L'existence d'un processus croissant A tel que M^2-A soit une martingale faible est démontrée dans [4], page 117.

On conclut à l'existence du processus croissant prévisible en s'appuyant sur les résultats de Bakry [11] et de Merzbach-Zakai [15], qui permettent de définir la projection prévisible ${}^pA$ de A. Posons

$$<M> = {}^pA$$

$<M>$ est un processus croissant, et, ${}^pA-A$ étant une martingale faible, il en est de même de

$$M^2 - < M > = (M^2 - A) - ({}^pA - A).$$

On montre alors l'unicité : si B est un autre processus croissant prévisible,

$$B - < M > = (M^2 - < M >) - (M^2 - B),$$

induit une mesure de Doléans nulle sur les prévisibles. Donc

$$< M > = B. \qquad \blacksquare$$

<u>Remarque</u>.-

Le théorème 4-2 justifie l'utilisation de l'accroissement rectangulaire, et donc de la notion associée de martingale faible.

Dans le cas de la filtration brownienne, si X est une martingale <u>faible</u> représentable de L^2, on montrera qu'il existe un (unique) processus $<< X >>$ à variation bornée, adapté, nul sur les axes, et tel que $X^2 - << X >>$ soit une martingale faible, et l'on donnera sa forme (cf. Chapitre VII, §6 et Chapitre III, § 2-2).

<u>Processus</u> $< M,N >$.

Si M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}^2(z_0)$, on définit $< M,N >$ par

$$< M,N >_z = \frac{1}{2} [< M+N >_z - < M >_z - < N >_z]$$

$< M,N >_z$ est l'unique processus à variation bornée prévisible tel que

$$\{M_z N_z - < M,N >_z , \ z \in R_{z_0} \}$$

soit une martingale faible.

On dira que deux martingales M et N de $\mathcal{M}^2(z_0)$ sont <u>orthogonales</u> si MN est une martingale faible, c'est-à-dire si et seulement si

$$< M,N > = 0 .$$

<u>Propriété 4-3</u>.-

Si M et N sont des martingales de $\mathcal{M}^2(z_0)$ et si $D_{z'} =]z,z']$, on a :

* $E[MN(D_{z'}) \mid \mathcal{F}_z] = E[M(D_{z'})\, N(D_{z'}) \mid \mathcal{F}_z] = E[< M,N > (D_{z'}) \mid \mathcal{F}_z]$.
* En particulier, $M(D_{z'})^2 - < M > (D_{z'})$ est une martingale faible.

Démonstration :

L'une des égalités étant conséquence immédiate de la définition de $< M,N >$, l'autre découle de la formule

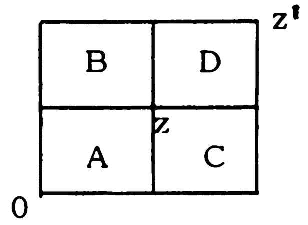
$$MN(D) = M(D)N(D) + M(A)N(D) + M(D)N(A) + M(D)N(B) + M(B)N(D)$$
$$+ M(C)N(D) + M(D)N(C) + M(C)N(B) + M(B)N(C)$$

où, si $z = (s,t)$ et $z' = (s',t')$

$A =]0,z]$

$B =](0,t), (s,t')]$

$C =](s,0), (s',t)]$.



4-2. Processus croissant associé à une 1-martingale de L^2.

Soit M une 1-martingale de L^2 ; pour chaque t fixé, M_{st} est une martingale en s pour la filtration $\mathcal{F}^1_s$. Il existe donc un unique processus croissant 1-prévisible, que l'on notera $< M >^{(1)}_{st}$ tel que $M^2_{st} - < M >^{(1)}_{st}$ soit une martingale en s.

Cette définition du processus croissant dans le sens 1 est donnée t par t et l'on ne peut pas espérer en général de bonnes propriétés de ce processus en (s,t). (mesurabilité, version continue).

Dans le cas où M est une 1-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1, on a :

Propriété 4-4.-

Si M et N sont deux 1-martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 1 de L^2, si $D =]z,z']$, alors

a) $E[M(D)N(D) \mid \mathcal{F}^1_z] = E[MN(D) \mid \mathcal{F}^1_z]$

b) $< M >^{(1)}(D) \geq 0$.

Démonstration :

a) Dans la décomposition de $MN(D)$ donnée ci-dessus, tous les termes autres que

$M(D)N(D)$ sont du type

$*M(E)N(F)$ ou $M(F)N(E)$, avec $F = A$ ou B et $E = C$ ou D.

L'espérance conditionnellement à $\mathcal{F}_z^1$ d'un tel type est nulle dès que M est une 1-martingale.

$*M(D)N(C)$ ou $M(C)N(D)$ dont l'espérance conditionnellement à $\mathcal{F}_z^1$ est nulle (cf. déf. 2 d).

b) Si s et $t \leq t'$ sont fixés

$$m(s') = M_{s't}^2 - M_{s't'}^2$$

est une sous-martingale en s' le point a entraîne que

$$m(s') - m(s) = M^2(D_{s't'})$$

est d'espérance positive,

$$< m > (s') = < M >_{s't'}^{(1)} - < M >_{st'}^{(1)}$$

est son processus croissant prévisible pour la filtration $\mathcal{F}_s^1$. Et l'on a bien

$$0 \leq < m >(s') = < M >^{(1)} (D_{s',t'}). \blacksquare$$

On peut alors régulariser $< M >^{(1)}$ en posant ([4]) :

$$< M >_c^{(1)} (s,t) = \inf\{< M >^{(1)}(s,t'),\ t \leq t',\ t' \text{ rationnel}\}.$$

$< M >_c^{(1)}(s,t)$ est un processus en (s,t), continu à droite.

Par la suite, si M est une 1-martingale a.o.1 de L^2, c'est ce processus que l'on choisira comme processus croissant en s.

Théorème 4-5.-

Si M est une 1-martingale a.o.1 de L^2, $< M >^{(1)}$ est l'unique processus croissant (rectangulairement) 1-prévisible vérifiant pour tout rectangle $D =]z,z']$:

$$E[M(D)^2 | \mathcal{F}_z^1] = E[M^2(D) | \mathcal{F}_z^1] = E[< M >^{(1)} (D) | \mathcal{F}_z^1].$$

On a les résultats analogues relatifs aux 2-martingales.

CHAPITRE II

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET STOCHASTIQUES MIXTES SUR $\mathbb{R}_+^2$.

Les intégrales stochastiques simple, et double, sur $\mathbb{R}_+^2$ ont été introduites par Wong et Zakai [3] dans le cas du mouvement brownien afin d'obtenir le théorème de représentation (de Wong et Zakai) des martingales relatives à la filtration brownienne : une telle martingale de L^2 est la somme d'une intégrale stochastique simple et d'une intégrale stochastique double (nous reviendrons sur ce théorème de représentation au chapitre III).

L'étude systématique de ces deux intégrales est faite dans [4] : l'intégrale simple est définie dans L^2 relativement à une martingale de L^2. L'intégrale double est définie dans L^2 relativement à une martingale forte de L^4. Cependant, la définition de cette intégrale double $\psi.MN$, si elle utilise le fait que M et N sont dans L^4, n'utilise de M que la propriété d'être une 2-martingale a.o.2, N une 1-martingale a.o.1 (en particulier, $<M>^{(2)}$ et $<N>^{(1)}$ sont des processus croissants). Nous définirons l'intégrale stochastique double dans ce cadre (§ 2).

La définition de l'intégrale stochastique mixte $\psi.\mu M$, dans L^2, relativement à M martingale forte de L^2 et à μ mesure aléatoire à variation totale $|\mu|(R_{z_0})$ bornée par une constante est donnée dans [5]. Nous définissons au § 3 cette intégrale relativement à M, 1-martingale a.o.1 de L^2, d'abord dans L^1 si μ est à variation totale intégrable (§ 3), puis dans L^2, reprenant la condition sur μ de [5], mais également sous une autre condition, d'absolue continuité de μ (§ 3). On établira pour de telles intégrales définies dans L^2, deux théorèmes de Fubini : l'un donnant la 1-dérivée de la 1-martingale (si $<M>^{(1)}$ est déterministe), l'autre la dérivée du processus à variation bornée dans le sens 2 (si μ est déterministe).

La représentation $\psi.\mu M = X$ de la 1-martingale propre X n'est pas unique.

Ceci nous conduit à étudier des intégrales mixtes $\beta.\nu M$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^2$, relativement à une mesure ν non aléatoire sur $\mathbf{R}_+$. Pour de telles intégrales, définies dans L^2, on aura les deux théorèmes de Fubini dès que $< M >^{(1)}$ est déterministe. D'autre part, si $\beta.\nu M = \beta'.\nu M$, alors $\beta = \beta'$ $P \times \nu \times < M >^{(1)}$ p.s.

Les intégrales $\psi.\mu M$ se réduisent à de telles intégrales si $\mu(ds,dt,\omega) = \tilde{\mu}(ds,\omega)\,\nu(dt)$ (ν non aléatoire) et $< M >^{(1)}$ déterministe. On a alors :

$$\psi.\mu M = \beta.\nu M$$

avec

$$(\beta.\nu M)_{st} = \int_{[0,t]\times R_{st}} \beta(v\,;\,\xi')\,\nu(dv)\,M(d\xi')$$

$$\beta(v\,;\,\xi') = \int_{[0,s]} \psi(u,v\,;\,\xi')\,\tilde{\mu}(du).$$

Cette représentation d'une 1-martingale propre sera très utile pour l'identification des semi-martingales représentables (cf. Ch. III et Ch. VII).

Disposant d'une inégalité maximale pour les 1-martingales propres de L^2, nous pouvons définir l'intégrale simple par rapport à elles : c'est ce que nous étudions au § 3 lorsque cette 1-martingale propre admet la représentation $N = \psi.\mu M$.

Enfin les intégrales doubles, stochastiques (§ 3) ou stochastiques mixtes (§ 3 peuvent être définies relativement à des i-martingales (sans condition d'accroissements orthogonaux) pour des fonctions ψ de coin prévisible.

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sera un espace de probabilité complet muni d'une filtration $\{\mathcal{F}_z\ ,\ z \in \mathbf{R}_+^2\}$ vérifiant les propriétés (F) données au chapitre précédent.

§ 1 - Intégrales stochastiques simples.

Soit z_o un point (éventuellement à l'infini) de $\mathbb{R}_+^2$. Nous définirons deux types d'intégrales stochastiques simples.

1°) Soit M une martingale de $\mathcal{M}^2(z_o)$, $< M >$ son processus croissant prévisible et $\varphi(z)$ un processus prévisible vérifiant :

$$E \int_{R_{z_o}} \varphi^2(z) < M > (dz) < \infty .$$

On notera

$$(\varphi.M)_z = \int_{R_z} \varphi(\xi) \; M(d\xi)$$

cette intégrale. Elle sera définie (grâce à l'inégalité maximale de Doob-Cairoli) uniformément en $z \in R_{z_o}$. Le processus $\{(\varphi.M)_z , z \in R_{z_o}\}$ est alors une martingale de L^2 dont le processus croissant prévisible est

$$< \varphi.M >_z = \int_{R_z} \varphi^2(\xi) < M >(d\xi).$$

Cette intégrale simple généralise exactement l'intégrale de Ito sur la droite.

2°) Soit M une 1-martingale a.o.1 et $\varphi(z)$ un processus 1-prévisible vérifiant :

$$E \int_{R_{z_o}} \varphi^2(z) < M >^{(1)} (dz) < \infty$$

où $< M >^{(1)}$ est la version continue à droite du processus croissant dans le sens 1 de M.

L'intégrale sera définie t par t, uniformément en s ; elle représentera une 1-martingale a.o.1.

Partition de R_{z_o}.

Une partition de R_{z_o}, où $z_o = (s_o,t_o)$ est la donnée de deux suites :

$$0 = s_1 < s_2 < \dots < s_i < \dots < s_n = s_o$$

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_j < \dots < t_m = t_o$$

$$z_{ij} = (s_i, t_j)$$

$$\Delta_{ij} =]z_{ij}, z_{i+1,j+1}].$$

La partition π associée à ces deux suites est alors

$$\pi = \{ \Delta_{ij}, i = 1, n-1, j = 1, m-1\} .$$

Une telle partition étant donnée, on notera $\mathcal{F}_{ij}$ pour $\mathcal{F}_{z_{ij}}$ et $\mathcal{F}_i^1$ pour $\mathcal{F}^1_{z_{ij}} = \mathcal{F}^1_{s_i}$.

Fonctions simples.

φ est une fonction simple sur R_{z_o}, s'il existe une partition π telle que φ soit constante sur chaque élément Δ_{ij} de π.

On notera φ_{ij} cette valeur.

Remarquons que φ sera simple adaptée si φ_{ij} est $\mathcal{F}_{ij}$-mesurable.

1-1. Intégrande prévisible, M martingale de L^2.

Espace $\mathcal{L}^2_M(z_o)$.

C'est la classe des processus $\{\varphi(z,\omega), z \in R_{z_o}\}$ tels que

$$\text{(H)} \qquad \begin{cases} \varphi \text{ est } \mathcal{F}_z\text{-prévisible} \\ \|\varphi\|^2 = E \int_{R_{z_o}} \varphi^2(z) < M > (dz) \text{ est fini.} \end{cases}$$

$\mathcal{L}^2_M(z_o)$ est un espace de Hilbert. Les fonctions prévisibles simples bornées forment un sous-ensemble dense dans cet espace (Ch. I, th. 4-1).

Si φ est une fonction simple de $\mathcal{L}^2_M(z_o)$ on posera par définition pour tout $z \leq z_o$

$$(\varphi.M)_z = \int_{R_z} \varphi(\xi)\, M(d\xi) = \Sigma\, \varphi_{ij}\, M(\Delta_{ij})_z$$

où l'on a noté

$$M(\Delta_{ij})_z = M(\Delta_{ij} \cap R_z).$$

Propriété 1-1.-

Si M est une martingale de $\mathcal{M}^2(z_o)$ et φ une fonction simple bornée de $\mathcal{L}^2_M(z_o)$, alors $(\varphi.M)$ est une martingale sur R_{z_o} de processus croissant

$$< \varphi.M >_z = \int_{R_z} \varphi^2(\xi) < M > (d\xi).$$

En particulier

$$E[(\varphi.M)^2_{z_o}] = \|\varphi\|^2 .$$

Démonstration :

$(\varphi.M)_z$ est une martingale ; vérifions qu'elle est dans L^2.

$$\begin{aligned} E[(\varphi.M)^2_z] &= E[\Sigma\, \varphi_{ij}\, M(\Delta_{ij})_z]^2 \\ &= E\, \Sigma\, \varphi^2_{ij}\, M(\Delta_{ij})^2_z \quad (\varphi \text{ adapté, } M \text{ martingale}) \\ &= E\, \Sigma\, \varphi^2_{ij} < M >(\Delta_{ij})_z \\ &= E \int_{R_z} \varphi^2(\xi) < M > (d\xi) \le \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

puisque $< M >$ est croissant.

Reste à vérifier que

$$(\varphi.M)^2_z - \Sigma\, \varphi^2_{ij} < M > (\Delta_{ij})_z$$

est une martingale faible.

* $\varphi^2_{ij}[M(\Delta_{ij})^2_z - < M > (\Delta_{ij})_z]$ est une martingale faible (Ch. I, th. 4-3).

* $\varphi_{ij}\, \varphi_{i'j'}\, M(\Delta_{ij})_z\, M(\Delta_{i',j'})_z$ est une 1-martingale si $i \neq i'$, une 2-martingale si $j \neq j'$. ■

Soit alors $\varphi \in \mathcal{L}^2_M(z_o)$ et (φ_n) une suite de fonctions simples adaptées bornées tendant vers φ dans $\mathcal{L}^2_M(z_o)$, et telle que

$$\|\varphi_n - \varphi_{n+1}\| \le 2^{-n} .$$

L'inégalité de Doob permet d'écrire

$$\|(\varphi_n.M)_z - (\varphi_{n+1}.M)_z\| \le 16.2^{-n}.$$

D'après la propriété 2-4 du chapitre I, $(\varphi_n.M)_z$ converge uniformément en z vers une martingale que l'on notera

$$(\varphi.M)_z = \int_{R_z} \varphi(\xi)\, M(d\xi).$$

Si M est continue, $\varphi_n.M$ est continue, et donc $\varphi.M$ est continue.

La proposition suivante résume les principales propriétés de l'intégrale stochastique simple.

Proposition 1-2.-

Soient $M \in \mathcal{M}^2(z_o)$, φ et θ dans $\mathcal{L}^2_M(z_o)$.

a) $\varphi.M \in \mathcal{M}^2(z_o)$.

Si $M \in \mathcal{M}^2_c(z_o)$, alors $\varphi.M \in \mathcal{M}^2_c(z_o)$.

Si $M \in \mathcal{M}^2_{a.o}(z_o)$, alors $\varphi.M \in \mathcal{M}^2_{a.o}(z_o)$.

Si $M \in \mathcal{M}^2_s(z_o)$, alors $\varphi.M \in \mathcal{M}^2_s(z_o)$.

b) $\varphi \mapsto \varphi.M$ est une application linéaire de $\mathcal{L}^2_M(z_o)$ dans $\mathcal{M}^2(z_o)$ conservant la norme.

c) $$< \varphi.M,\ \theta.M >_z = \int_{R_z} \varphi\,\theta(\xi) < M > (d\xi).$$

1-2. Intégrande 1-prévisible, M 1-martingale a.o.1 de L^2.

Soit M une 1-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1 de L^2.

Espace $\mathcal{L}^2_{1M}(z_o)$.

C'est la classe des processus φ tels que

$$\text{(H1)} \qquad \begin{cases} \varphi \text{ est } \mathcal{F}^1\text{-prévisible} \\ \|\varphi\|^2 = E\int_{R_{z_o}} \varphi^2(\xi) < M >^{(1)} (d\xi) \quad \text{est fini.} \end{cases}$$

Si $\varphi \in \mathcal{L}^2_{1M}(z_o)$ est simple, on posera, avec les mêmes notations que précédemment,

$$(\varphi.M)_z = \sum \varphi_{ij}\, M(\Delta_{ij})_z \,.$$

Lemme 1-3.-

Si M est une 1-martingale a.o.1 de L^2, φ est une fonction simple bornée de $\mathcal{L}^2_{1,M}(z_o)$, alors $(\varphi.M)_z$ est une 1-martingale a.o.1 de L^2 de processus croissant

$$< \varphi.M >_z^{(1)} = \int_{R_z} \varphi^2(\xi) < M >^{(1)}(d\xi).$$

Démonstration :

Montrons d'abord que $\varphi.M$ est dans L^2. On a

$$E[(\varphi.M)_z^2] = E[\Sigma\, \varphi_{ij}^2\, M(\Delta_{ij})_z^2].$$

En effet, si $(i,j) \neq (i',j')$

$$E[\varphi_{ij}\varphi_{i'j'}\, M(\Delta_{ij})_z M(\Delta_{i'j'})_z] = 0$$

(si $i \neq i'$, utiliser le fait que φ est $\mathcal{F}^1$-adaptée et M une 1-martingale ; si $i = i'$ et $j \neq j'$, utiliser le fait que M est à a.o. dans le sens 1). Donc

$$E[(\varphi.M)_z^2] = E\int_{R_z} \varphi^2(\xi) <M>^{(1)} (d\xi)$$

$$\leq \|\varphi\|^2$$

puisque $< M >^{(1)}$ est croissant (Ch. I, propriété 4-4).

Il est aisé de vérifier que $\varphi.M$ est une 1-martingale, a.o.1, et que

$$(\varphi.M)_z^2 - \Sigma\, \varphi_{ij}^2 < M >^{(1)}(\Delta_{ij})_z$$

est aussi une 1-martingale. ■

On définit alors pour chaque t fixé l'intégrale

$$(\varphi.M)_{st} = \int_{R_{st}} \varphi(\xi)\, M(d\xi)$$

comme processus en s, comme on l'a fait dans le cas d'intégrande φ prévisible. Ne disposant que de l'inégalité de Doob pour la 1-martingale, on n'aura de définition uniforme qu'en s.

A t fixé, on a alors l'analogue de la proposition 1-2 :

Proposition 1-3.-

Soit M une 1-martingale a.o.1 de L^2, φ et $\theta \in \mathcal{L}^2_{1M}(z_o)$; alors $\{(\varphi.M)_{st}\}_s$ et définit pour tout t, uniformément en s ; c'est une 1-martingale a.o.1 de L^2, continue en s si M l'est, et on a :

$$< \varphi.M, \theta.M >^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} \varphi.\theta(\xi) < M >^{(1)} (d\xi).$$

§ 2 - Intégrales stochastiques doubles.

Nous allons définir deux intégrales doubles :

* l'intégrale double $\psi.MN$ d'une fonction $\psi(z,z')$ de $\mathbf{R}_+^2$ dans $\mathbf{R}$ relativement au couple (M,N) où, M est une 2-martingale a.o.2 et N une 1-martingale a.o.1, M et N étant dans L^4. Si $M = N$ est une martingale forte, cette intégrale a été introduite dans [3] pour $M = W$, dans [4] sous forme générale.

* l'intégrale double d'une "fonction de coin" $\psi(z,z') = \chi(z \vee z')$ par rapport au couple (M,N) où M est une 2-martingale et N une 1-martingale, toutes deux de L^4. Cette intégrale a été introduite en remarque dans [5] dans le cas où $M = N$ est une martingale de L^4. Lorsque $\chi = 1$, cette intégrale sera notée J_{MN} (notation introduite dans [4]). J_{MN} est une martingale ; on notera alors le deuxième type d'intégrale $\chi.J_{MN}$.

2-1. Intégrale $\psi.MN$.

Soit M (resp. N) une martingale a.o.2 (une 1-martingale a.o.1), M et N étant dans L^4.

Fonctions simples sur $R_{z_o}^2$:

Soit $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ la partition de R_{z_o} définie au paragraphe précédent.

On dira que $\psi : R_{z_o}^2 \to R$ est simple si

- $\psi(z,z') = 0$ sauf si $z \curlywedge z'$.
- $\psi(z,z') = \psi_{\ell jik}$ si $z \in \Delta_{\ell j}$, $z' \in \Delta_{ik}$.

On dira que ψ est adaptée si $\psi_{\ell jik}$ est $\mathcal{F}_{ij}$- mesurable.

Tribu des prévisibles sur $(\mathbf{R}_+^2)^2 \times \Omega$.

C'est la tribu engendrée par

$$\Delta_1 \times \Delta_2 \times H$$

où $\Delta_1 =]z_1, z_1']$, $\Delta_2 =]z_2, z_2']$, $\Delta_1 \curlywedge \Delta_2$, $H \in \mathcal{F}_{z_1 \vee z_2}$.

Un processus ψ sur $(\mathbb{R}_+^2)^2$ sera dit prévisible s'il est mesurable pour cette tribu. En particulier, une fonction simple adaptée est prévisible.

Espace $\mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$.

C'est la classe des processus réels définis sur $(\mathbb{R}_+^2)^2$ tels que

$$(\mathrm{HH}) \begin{cases} \psi(z,z') = 0 \quad \text{sauf si } z \curlywedge z' \\ \psi \text{ est prévisible} \\ \|\psi\|^2 = E \int_{R^2_{z_o}} \psi(z,z')^2 < M >^{(2)}(dz) < N >^{(1)}(dz) \text{ est fini.} \end{cases}$$

A une fonction simple adaptée bornée ψ, on associe la somme stochastique double

$$(\psi . MN)_z = \Sigma\, \psi_{\ell jik}\, M(\Delta_{\ell j})_z\, N(\Delta_{ik})_z$$

(la sommation étant prise sur les 4 indices i, j, k, ℓ).

Propriété 2-1.-

Si M est une 2-martingale a.o.2, N une 1-martingale a.o.1, M et N étant dans L^4, si ψ est simple adaptée bornée, $\psi.MN$ est une martingale de $\mathcal{M}^2(z_o)$, continue si M et N sont continues, de processus croissant

$$< \psi.MN >_z = \int_{R^2_z} \psi^2(\xi,\xi') < M >^{(2)}(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi').$$

En particulier

$$E[(\psi.MN)^2_{z_o}] = \|\psi\|^2 .$$

Démonstration :

* $\psi.MN$ est une martingale : en effet chaque quantité $\psi_{\ell ijk}\, M(\Delta_{\ell j})_z N(\Delta_{ik})_z$ est une 1-martingale comme N et une 2-martingale comme M ($\psi_{\ell jik}$ étant nul si l'on n'a pas $z_{\ell j} \curlywedge z_{ik}$).

* $\psi.MN$ est dans L^2 : en effet, si $(\ell,j,i,k) \neq (\ell',j',i',k')$,

$\psi_{\ell jik} M(\Delta_{\ell j})_z N(\Delta_{ik})_z$ est orthogonal à $\psi_{\ell' j' i' k'} M(\Delta_{\ell' j'})_z N(\Delta_{i'k'})_z$ (ψ étant adapté, ceci résulte soit du caractère a.o.1 de N, soit du caractère a.o.2 de M).

Donc

$$E[(\psi.MN)_z^2] = E\sum \psi^2_{\ell jik} M(\Delta_{\ell j})_z^2 N(\Delta_{ik})_z^2$$

qui est fini puisque ψ est borné et M et N dans $\mathcal{M}^4$.

Utilisant pour le terme d'indice ℓjik un conditionnement intermédiaire par $\mathcal{F}^1_i$ puis $\mathcal{F}^2_j$, et appliquant le théorème 4-5 du chapitre I, on conclut

$$E[(\psi.MN)_z^2] = E\int_{R_z^2} \psi^2(\xi,\xi') <M>^{(2)}(d\xi) <N>^{(1)}(d\xi')$$

$<M>^{(2)}$ et $<N>^{(1)}$ étant croissants (ch. I, propriété 4-4)

$$E[(\psi.MN)_z^2] \leq \|\psi\|^2.$$

* Reste à montrer que $\sum \psi^2_{\ell jik} <M>^{(2)}(\Delta_{\ell j})_z <N>^{(1)}(\Delta_{ik})_z$ est bien le processus croissant. Or

D'une part $M(\Delta_{\ell j})_z N(\Delta_{ik})_z M(\Delta_{\ell' j'})_z N(\Delta_{i'k'})_z$ est une 1-martingale si $(i,k) \neq (i',k')$ (propriété de 1-martingale si $i \neq i'$, propriété de a.o.1 si $i = i'$ et $k \neq k'$) ; c'est une 2-martingale si $(\ell,j) \neq (\ell',j')$.

D'autre part $M(\Delta_{\ell j})_z^2 N(\Delta_{ik})_z^2 - <M>^{(2)}(\Delta_{\ell j})_z <N>^{(1)}(\Delta_{ik})_z$ est une martingale faible : ce terme est la somme de $M(\Delta_{\ell j})_z^2 [N(\Delta_{ik})_z^2 - <N>^{(1)}(\Delta_{ik})_z]$ qui est une 1-martingale (ch. I, th. 4-5) et de $<N>^{(1)}(\Delta_{ik})_z [M(\Delta_{\ell j})_z^2 - <M>^{(2)}(\Delta_{\ell j})_z]$ qui est une 2-martingale. ■

Les processus simples adaptés bornés étant denses dans $\mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$, si $\psi \in \mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$, définissons une suite (ψ_n) de processus simples adaptés bornés, convergeant vers ψ et telle que

$$\|\psi_n - \psi_{n+1}\| \leq 2^{-n}.$$

La suite des martingales $(\psi_n.MN)$ converge alors uniformément dans L^2 ; on notera $\psi.MN$ sa limite, et l'on a

Proposition 2-2.-

Si M est une 2-martingale a.o.2 de L^4, si N est une 1-martingale a.o.1 de L^4, si $\psi \in \mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$, alors :

a) $\psi.MN \in \mathcal{M}^2(z_o)$.

Si M et N sont continues, $\psi.MN \in \mathcal{M}^2_c(z_o)$.

b) $\psi \longmapsto \psi.MN$ est une application linéaire isométrique de $\mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$ dans $\mathcal{M}^2(z_o)$.

c) Si $\tilde{\psi} \in \mathcal{L}^2_{MN}(z_o)$,

$$< \psi.MN, \tilde{\psi}.MN >_z = \int_{R_z} \psi\, \tilde{\psi}(\xi,\xi') < M >^{(2)} (d\xi) < N >^{(1)} (d\xi')$$

d) Si $P \in \mathcal{M}^2(z_o)$ et $\theta \in \mathcal{L}^2_p(z_o)$, $\theta.P$ et $\psi.MN$ sont orthogonales.

Théorème 2-3.- Théorème de Fubini.

Sous les conditions de la proposition 2-2, et si $< N >^{(1)}$ induit une mesure déterministe, alors

1°) $\psi(z,z')$ est $\mathcal{F}^2_z$-prévisible et $< N >^{(1)}$ presque surement en z',

$$E \int_{R_{z_o}} \psi^2(z,z') < M >^{(2)} (dz) < \infty.$$

2°) Il existe un processus $I(z')$ tel que

a) $< N >^{(1)}$ p.s. $\quad I(z') = \int_{R_{z_o}} \psi(z,z')\, M(dz).$

b) $I(z')$ est $\mathcal{F}^1_{z'}$-prévisible

c) $$E \int_{R_{z_o}} I^2(z') < N >^{(1)} (dz') = \|\psi\|^2.$$

d) On a égalité des processus en $s \leq s_o$

$$(I.N)_{st_o} = (\psi.MN)_{st_o}.$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans [4] p. 132 dans le cas où

$M = N$ est une martingale forte. La démonstration dans le cas que nous présentons est analogue.

Seul (d) diffère de l'énoncé donné dans [4]. Ce point est une conséquence immédiate de la définition, uniforme en s, de $(I.N)_{st_o}$ (I est 1-prévisible, N est à a.o.1, cf. Proposition 1-3).

1 - représentation.

Sous les hypothèses du théorème 2-3, il est facile de voir que $I(z')$ ne dépend de $z_o = (s_o, t_o)$ que par t_o.

On le notera $L_1(t_o, z')$ et on l'appellera la 1-dérivée de $\psi.MN$ par rapport à N. $L_1(t_o; s', t')$ est défini t_o par t_o.

Corollaire 2-3.-

Sous les hypothèses du théorème 2-3,

$$(\psi.MN)_{st} = \int_{R_{st}} L_1(t; z')\, N(dz')$$

a pour processus croissant dans le sens 1

$$<\psi.MN>^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} L_1^2(t; z') <N>^{(1)}(dz').$$

Symétriquement, si $<M>^{(2)}$ induit une mesure déterministe, on a un théorème de Fubini stochastique qui permet de définir s_o par s_o la 2-dérivée $L_2(z; s_o)$ de la martingale $\psi.MN$; on exprime comme au corollaire 2-3 le processus $<\psi.MN>^{(2)}$ en fonction de L_2.

2-2. Intégrale double d'une fonction de coin.

Si $\psi(z, z')$ est une fonction simple bornée sur $(\mathbb{R}_+^2)^2 \times \Omega$ et si M et N sont deux processus dans L^2

$$(\psi.MN)_z = \Sigma\, \psi_{\ell jik}\, M(\Delta_{\ell j})_z\, N(\Delta_{ik})_z$$

est dans L^1. Si ψ est adaptée, si M est une 2-martingale et N une 1-martingale, $\psi.MN$ est une martingale.

Cependant l'extension de cette intégrale aux fonctions prévisibles ne peut pas se faire en général : on ne dispose pas de norme L^2 permettant de définir $\psi.MN$ par passage à la limite.

Cependant si M et N sont dans L^4 et si ψ est une fonction "prévisible de coin", on saura définir une telle intégrale.

Tribu prévisible de coin.

C'est la tribu engendrée par les ensembles

$$(\Delta_s\ ,\ t)\times(s\ ,\ \Delta_t)\times A$$

de $(\mathbf{R}_+^2)^2\times\Omega$, où $(\Delta_s,t) =]s,s']\times[o,t]$

$$(s,\Delta_t) = [o,s]\times]t,t']$$

$$A\in\mathcal{F}_{st}\ .$$

On dira qu'une fonction $\psi(z,z')$ est prévisible de coin si elle est mesurable par rapport à cette tribu.

Fonctions de coin simples.

C'est une fonction du type

$$\psi(z,z') = \sum X_{ij}\ 1_{o_{ij}}(z,z')$$

où $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition de R_{z_o} et où o_{ij} est la petite ombre de Δ_{ij}

$$o_{ij} =]\,o,s_i]\times\Delta_j\times\Delta_i\times]o,t_j]$$

La tribu engendrée par les fonctions de coin simples adaptées bornées est exactement la tribu prévisible de coin.

Remarquons qu'une fonction de coin simple ne vérifie pas en général

$$\psi(z,z')\ \text{ ne dépend que de }\ z\vee z'.$$

(Si $X_{ij}\neq 0$, $\psi(z,z')$ est nul si z et z' sont dans Δ_{ij}, non nul si $z\in\Delta_{\ell j}$, $\ell<i$, $z'\in\Delta_{ik}$, $k<j$).

Notant $(i,\Delta_j) =]o,s_i] \times \Delta_j$, $(\Delta_i,j) = \Delta_i \times]o,t_j]$ ..., on a alors la propriété suivante

Propriété 2-4.-

Si ψ est une fonction simple de coin, bornée adaptée, si M est une 2-martingale de L^4, N une 1-martingale de L^4, alors $\psi.MN$ est une martingale de L^2, de processus croissant

$$< \psi.MN >_{st} = \sum X_{ij}^2 < M >^{(2)} (i,\Delta_j)_t < N >^{(1)} (\Delta_i,j)_s .$$

Démonstration :

Il est aisé de vérifier que

$$\begin{aligned} E(\psi.MN)_{st}^2 &= E \sum X_{ij}^2 \; M(i,\Delta_j)_t^2 \; N(\Delta_i,j)_s^2 \\ &= E \sum X_{ij}^2 < M >^{(2)} (i,\Delta_j)_t < N >^{(1)} (\Delta_i,j)_s \\ &\leq E \sum X_{ij}^2 < M >^{(2)} (i,\Delta_j) < N >^{(1)} (\Delta_i,j) \end{aligned}$$

puisque, pour tout i, j, $< M >^{(2)}(i,.)$, $< N >^{(1)}(.,j)$ sont croissants.

$\psi.MN$ est une martingale et on vérifie sans difficulté que son processus croissant est bien celui donné dans l'énoncé de la propriété. ∎

Posons alors, pour une telle fonction simple :

$$\|\psi\|^2 = E \sum X_{ij}^2 < M >^{(2)} (i,\Delta_j) < N >^{(1)} (\Delta_i,j) .$$

Soit alors $\mathcal{H}$ la fermeture pour cette norme de l'espace des fonctions simples, de coin, bornées,adaptées. $\mathcal{H}$ contient l'ensemble des fonctions prévisibles de coin bornées.

Soit alors ψ prévisible de coin, bornée. Il existe une suite $\{\psi_n\}$, de Cauchy, de fonctions de coin simples tendant vers ψ et telles que

$$\|\psi_{n+1} - \psi_n\| \leq 2^{-n}.$$

Il s'ensuit que la suite de martingales $(\psi_n.MN)$ converge uniformément dans L^2 vers une martingale que l'on notera $\psi.MN$.

Soulignons certaines questions d'intérêt liées au problème de la définition de l'intégrale double pour des fonctions de coin.

1. Si $\varphi : \Omega \times \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ est une fonction prévisible bornée, la fonction définie par :

$$\psi(u,y\,;\,x,v) = \varphi(x,y) \quad \text{si } u < x \text{ et } v < y$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$

est-elle prévisible de coin ?

2. (Ω, P) étant donnée, à quelle condition $< M >^{(2)}$ et $< N >^{(1)}$ induisent-ils une mesure sur $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega$, "définie" par

$$\mu(\varphi) = E \int_{R_{z_o}} \varphi(x,y) < M >^{(2)}(x,dy) < N >^{(1)}(dx,y)$$

où φ est mesurable bornée.

3. Si la fonction ψ définie au 1. est prévisible de coin, et si $J_{MN} = 1_{(z \hat{\wedge} z')}.MN$, a-t-on

$$\psi\,.MN = \varphi.J_{MN} \ ?$$

Nous reprendrons plus en détail la définition de l'intégrale double de fonctions de coin et nous répondrons aux questions précédentes dans le cas de processus relatifs à la filtration brownienne (cf. Chapitre III).

§ 3 - Intégrales stochastiques mixtes.

Dans tout ce paragraphe

* μ est une mesure aléatoire, c'est-à-dire un processus à variation bornée (en z) : $\mathbf{R}_+^2 \times \Omega \to \mathbf{R}$, intégrable, adapté. $|\mu|$ désignera la variation de μ.

* M est une 1-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1, de carré sommable.

* $\psi(z,z')$ est une processus nul si l'on n'a pas $z \curlywedge z'$ et $\mathcal{F}^1_{z'}$-prévisible.

Dans le cas où ψ est simple, on définira le processus :

$$X_z = (\psi . \mu M)_z = \sum \psi_{\ell jik}\, \mu(\Delta_{\ell j})_z\, M(\Delta_{ik})_z .$$

Si $\mathrm{Var}(X_{s_o,.})$ représente la variation totale du processus $(X_{s_o,t})_t$ sur $[o,t_o]$, on a alors la propriété :

Propriété 3-1.-

$$\mathrm{Var}(X_{s_o,.}) \le \sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j}) \Big|\sum_{ik} \psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik})\Big|$$

$$\le |\mu|(R_{z_o})^{1/2} \{ \sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})(\sum_{ik} \psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik}))^2 \}^{1/2}.$$

Démonstration :

$$\mathrm{Var}(X_{s_o,.}) = \sup_{\nu} \sum |X(s_o,\Delta_t)|$$

où ν sont les partitions de $[o,t_o]$ plus fines que la trace sur l'axe des t de la partition π (fixe) définissant ψ . Si $\Delta_t \subset \Delta_j$, (Δ_j $j^{\text{ième}}$ élément de la trace de π sur l'axe des t), on a :

$$X(s_o,\Delta_t) = \sum_{\ell ik} \psi_{\ell jik}\, \mu(\Delta_\ell \times \Delta_t)\, M(\Delta_{ik})|$$

$$|X(s_o,\Delta_t)| \le \sum_{\ell} |\mu|(\Delta_\ell \times \Delta_t) \Big|\sum_{ik} \psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik})\Big|.$$

Sommant alors sur tous les Δ_t contenues dans Δ_j , puis sur tous les j, on obtient :

$$\mathrm{Var}(X_{s_o,.}) \leq \sum_{j\ell} |\mu|(\Delta_{\ell j})| \sum_{ik} \psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik})|$$

ce qui est la première majoration proposée. La seconde majoration s'obtient en écrivant $|\mu| = |\mu|^{1/2}\,|\mu|^{1/2}$ et en utilisant l'inégalité de Schwartz. ∎

Nous allons définir, pour des fonctions ψ, non nécessairement simples, l'intégrale $\psi.\mu M$, d'abord dans L^1, puis dans L^2 sous diverses hypothèses sur μ, dont celle apparaissant dans [5].

3-1. Définition de $\psi.\mu M$ dans L^1.

Propriété 3-2.-

Si $\psi(z,z')$ est une fonction simple, adaptée, $\mathcal{F}^1_{z'}$-mesurable, bornée et si $\mu_o = E(|\mu|(R_{z_o}))$, alors le processus X_z défini par :

$$X_z = (\psi.\mu M)_z$$

vérifie

a) $$E|X_{st}| \leq E \sup_{t\leq t_o} |X_{st}| \leq E\,\mathrm{Var}(X_{s,.}) \leq \mu_o^{1/2}\, \|\psi\|$$

où

$$\|\psi\|^2 = E\int_{R^2_{z_o}} \psi(\xi,\xi')^2 |\mu|(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi').$$

b) $\{X_{st},(s,t)\in R_{z_o}\}$ est une 1-martingale propre de L^1 si $\mu_o < \infty$.

Démonstration :

Utilisant le résultat de la propriété précédente, on a :

$$E\,\mathrm{Var}(X_{s,.}) \leq \{E|\mu|(R_{st_o})\}^{1/2} \{E\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})(\sum_{ik}\psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik})_s)^2\}^{1/2}.$$

Or, puisque M est à accroissements orthogonaux dans le sens 1 et vu l'adaptation de ψ

$$E\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})(\sum_{ik}\psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik})_s)^2 = E\sum_{\ell j}|\mu|(\Delta_{\ell j})\sum_{ik}\psi^2_{\ell jik} <M>^{(1)}(\Delta_{ik})_s$$

$$= E\int_{R_{st_o}} \psi^2(\xi,\xi')|\mu|(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi') \leq \|\psi\|^2 ,$$

ce qui démontre le point a). Le point b) est alors une conséquence immédiate de a). ∎

L'extension dans L^1 de cette intégrale aux fonctions ψ générales de normes $\|\psi\|$ finies peut alors se faire par l'intermédiaire de l'inégalité maximale L^1 pour les 1-martingales propres (Propriété 3-2, b', Chapitre I).

<u>Cas où</u> ψ <u>factorise</u> : Si

$$\psi(\xi,\xi') = h(\xi)\,\widetilde{\psi}(\xi,\xi') \qquad (h,\ \widetilde{\psi} \text{ simples})$$

partant de la proposition 3-1 et regroupant h et μ, on obtient :

$$\mathrm{Var}(X_{s_o,\cdot}) \leq \{\int_{R_{z_o}} |h|(\xi)\,|\mu|(d\xi)\}^{1/2} \times \{\sum_{\ell j} |h_{\ell j}|\,|\mu|(\Delta_{\ell j})[\sum_{ik} \widetilde{\psi}_{\ell jik} M(\Delta_{ik})]^2\}^{1/2}.$$

Soit

$$E\,\mathrm{Var}(X_{s_o,\cdot}) \leq \{E\int_{R_{z_o}} |h|(\xi)\,|\mu|(d\xi)\}^{1/2} \times \{E\int_{R^2_{z_o}} |h|(\xi)\widetilde{\psi}(\xi,\xi')\,|\mu|(d\xi)\langle M\rangle^{(1)}(d\xi')\}^{1/2}.$$

En particulier si ψ factorise $(\widetilde{\psi}(z,z') = k(z'))$, $E(\mathrm{Var}(X_{s_o,\cdot}))$ sera fini dès que

$$E\int_{R_{z_o}} |h|(\xi)\ |\mu|\ (d\xi) < \infty$$

$$E\int_{R_{z_o}} |h|(\xi)\ k^2(\xi')\ |\mu|(d\xi)\langle M\rangle^{(1)}(d\xi') < \infty .$$

Cette condition de type $L^1_\mu\ L^2_{\langle M\rangle^{(1)}}$ sur $\psi = h.k$ est assez raisonnable dans la mesure où h étant liée à μ vérifie une condition L^1, alors que k liée à M vérifie comme cela est normal, une condition L^2.

3-2. <u>Définition de l'intégrale</u> $\psi.\mu M$ <u>dans</u> L^2.

On dénotera par $(\mu 1)$, $(\mu 2)$ les deux hypothèses suivantes que l'on pourra faire sur μ :

$(\mu 1)$ $\quad |\mu|(R_{z_o})$ est bornée par une constante μ_o ([5]).

$(\mu 2)$ $\quad |\mu|$ est absolument continue par rapport à une mesure positive, non aléatoire, bornée sur R_{z_o}, ν.

Sous $(\mu 2)$, on notera :

$$\nu_o = \nu(R_{z_o})$$

$$f = \frac{d|\mu|}{d\nu}$$

et $|\mu|^2$ la mesure telle que : $\frac{d|\mu|^2}{d\nu} = f^2$.

On définira alors les deux semi-normes :

$$\|\psi\|^2 = E\int_{R^2_{z_o}} \psi^2(\xi,\xi')\,|\mu|(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi') \qquad \text{(sous } (\mu 1))$$

$$|||\psi|||^2 = E\int_{R^2_{z_o}} \psi^2(\xi,\xi')\,|\mu|^2(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi') \qquad \text{(sous } (\mu 2)).$$

M sera une 1-martingale à accroissements orthogonaux dans le sens 1 de L^2.

Propriété 3-4.-

Si $\psi(z,z')$ est simple bornée $\mathfrak{F}^1_z$-adaptée, alors le processus $X = \psi.\mu M$ vérifie :

a)
$$E\,X^2_{st} \le E\sup_t X^2_{st} \le E\,(\operatorname{Var} X_{s,.})^2$$
$$\le \mu_o\,\|\psi\|^2 \qquad \text{sous } (\mu 1)$$
$$\le \nu_o\,|||\psi|||^2 \qquad \text{sous } (\mu 2)$$

b) Sous $(\mu 1)$ ou sous $(\mu 2)$, X est une 1-martingale propre de L^2 de 1-processus croissant :

$$< X >^{(1)}_z = \int_{R_z}\left(\int_{R_z}\psi(\xi,\xi')\,\mu(d\xi)\right)^2 < M >^{(1)}(d\xi').$$

Démonstration :

(a) Sous $(\mu 1)$, il suffit de reprendre l'inégalité donnée par la propriété 3-3-7 et d'en prendre l'espérance au carré [5].

Sous $(\mu 2)$, on a :

$$(\operatorname{Var} X_{s,.})^2 \le \left[\int_{R_{s,t_o}} f(z)\left(\sum_{\ell j} 1_{\Delta_{\ell j}}(z)\,a_{\ell j}\right)\nu(dz)\right]^2 \le \nu(R_{s,t_o})\int_{R_{s,t_o}} f^2(z)\left(\sum_{\ell j} 1_{\Delta_{\ell j}}(z)a^2_{\ell j}\right)\nu(dz)$$
$$\le \sum_{\ell j} |\mu|^2(\Delta_{\ell j})\,a^2_{\ell j}$$

où on a noté :

$$a_{\ell j} = \sum_{ik} \psi_{\ell jik} M(\Delta_{ik}).$$

On en déduit alors (a).

(b) Il est aisé de vérifier que X_z est une 1-martingale, propre. Reste à vérifier que le processus croissant en s est celui annoncé, c'est-à-dire que

$$X_z^2 - \sum_{ik} [\sum_{\ell j} \psi_{\ell jik} \mu(\Delta_{\ell j})_z]^2 < M >^{(1)} (\Delta_{ik})_z$$

est une 1-martingale.

Ecrivant :

$$X_z = \sum_{ik} [\sum_{\ell j} \psi_{\ell jik} \mu(\Delta_{\ell j})_z] M(\Delta_{ik})_z$$

et remarquant que $\sum_{\ell j} \psi_{\ell jik} \mu(\Delta_{\ell j})_z$ est $\mathcal{F}_i^1$ -adaptée, on obtient bien ce résultat. □

Espace $\mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$.

C'est l'espace des processus $\psi(z,z')$, $\mathcal{F}^1_{z'}$ prévisibles, ne chargeant que $z \curlywedge z'$, de norme $\|\psi\|$ finie sous $(\mu 1)$, $|||\psi|||$ finie sous $(\mu 2)$.

Soit ψ une fonction de $\mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$. Choisissons alors une suite de fonctions simples (ψ_n) convergeant vers ψ dans $\mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$ et tel que

$$\|\psi_n - \psi_{n+1}\| \leq 2^{-n}$$
$$(\text{resp. } |||\psi_n - \psi_{n+1}||| \leq 2^{-n}).$$

La suite des processus $(\psi_n.\mu M)$ converge alors uniformément vers un processus noté $(\psi.\mu M)$ vérifiant.

Proposition 3-5. -

Si M est une 1-martingale a.o.1 de L^2, si μ vérifie $(\mu 1)$ (resp. $(\mu 2)$) et si $\psi \in \mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$, alors le processus $\{(\psi.\mu M)_z\ ,\ z \leq z_o\}$ est une 1-martingale propre de L^2, continue si μ et M le sont, vérifiant :

$$E \sup_{st} (\psi.\mu M)^2_{st} \leq 4 \, E \, \mathrm{Var}(\psi.\mu M)_{s_o,\cdot}$$
$$\leq 4 \, \mu_o \, \|\psi\|^2$$
$$(\text{resp.} \quad \leq 4 \, \nu_o \, |||\psi|||^2)$$

Pour une intégrale double mixte $\psi.\mu M$, on a deux théorèmes de Fubini. L'un, donnant l'égalité : $(\psi.\mu M)_{st} = ((\psi.\mu).M)_{st}$, t par t, permettra de définir la 1-dérivée de $((\psi.M)_{st})_s$. Le second, donnant l'égalité : $(\psi.\mu M)_{st} = ((\psi.M).\mu)_{st}$, s par s, permettra de définir la dérivée en t du processus à variation bornée $((\psi.\mu M)_{st})_t$.

Nous ne démontrerons ces théorèmes que sous $(\mu 1)$. Ils restent cependant exacts sous $(\mu 2)$.

<u>Proposition 3-6</u>.- <u>Théorème de Fubini</u> $\psi.\mu M = (\psi.\mu).M$.

Sous les conditions de la proposition 3-5, si de plus $<M>^{(1)}$ induit une mesure déterministe, alors,

1°) $<M>^{(1)}$ presque surement en z',

$$E \int_{R_{z_o}} \psi^2(z,z') \, |\mu|(dz) < \infty .$$

2°) Il existe un processus $I(z')$ tel que

a) $<M>^{(1)}$ presque surement en z',

$$I(z') = \int_{R_{z_o}} \psi(z,z') \, \mu(dz).$$

b) $I(z')$ est $\mathcal{F}^1_{z'}$-prévisible.

c) $$E \int_{R_{z_o}} I(z')^2 <M>^{(1)}(dz') \leq \|\psi\|^2 \mu_o .$$

d) On a égalité des processus en $s \leq s_o$

$$(I.M)_{st_o} = (\psi.\mu \, M)_{st_o} .$$

<u>Démonstration</u> :

Elle est construite de la même façon que celle donnée dans [4] pour l'intégrale $\psi.MM$.

* Supposons dans un premier temps $\psi(z,z')$ simple, bornée, $\mathcal{F}^1_{z'}$-mesurable. Définissons I par le (a).

$$I(z') = \sum \psi_{\ell jik}\,\mu(\Delta_{\ell j})\, 1_{\Delta_{ik}}(z') = \sum_{ik} [\sum_{\ell j} \psi_{\ell jik}\,\mu(\Delta_{\ell j})]\, 1_{\Delta_{ik}}(z').$$

$I(z')$ est simple, bornée et $\mathcal{F}^1_{z'}$-mesurable : (b) est vérifié.

Il est clair par ailleurs que (d) est vérifiée. Montrons (c) :

$$E\int_{R_{z_o}} I(z')^2 <M>^{(1)}(dz') = E\sum_{ik}[\sum_{\ell j} \psi_{\ell jik}\,\mu(\Delta_{\ell j})]^2 <M>^{(1)}(\Delta_{ik})$$

$$= E\int_{R_{z_o}} [\int_{R_{z_o}} \psi(z,z')\,\mu(dz)]^2 <M>^{(1)}(dz')$$

$$\leq \|\psi\|^2\,\mu_o$$

(en écrivant $|\mu|(dz) = |\mu|^{1/2}(dz).|\mu|^{1/2}(dz)$ et en majorant par l'inégalité de Schwarz, en tenant compte des mesurabilités).

* Si $\psi \in \mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$, il existe une suite de fonctions ψ_n simples bornées, $\mathcal{F}^1_{z'}$-mesurables telle que

$$E\int_{R^2_{z_o}} (\psi_n-\psi)^2(z,z')\,|\mu|(dz) <M>^{(1)}(dz') \xrightarrow[n]{} 0 .$$

Puisque $<M>^{(1)}$ est déterministe, prenant si nécessaire une sous-suite, on a $<M>^{(1)}$ p.s. en z'

$$E\int_{R^2_{z_o}} (\psi_n - \psi)^2\,(z,z')\ |\mu|(dz) \leq 2^{-n} .$$

Posons

$$I_n(z') = \int_{R_{z_o}} \psi_n(z,z')\,\mu(dz)$$

$$I(z') = \lim I_n(z') \quad \text{si la limite existe}$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

Pour ce processus I, (a) et (b) sont vérifiés. D'autre part

$$E \int_{R_{z_o}} (I_n - I_m)^2(z') < M >^{(1)}(dz') \leq \|\psi_n - \psi_m\|^2_{\mu_o}$$

(I_n) est donc une suite de Cauchy convergeant vers I dans $L^2(< M >^{(1)} \times P)$.
I vérifie donc (c).

Par ailleurs, pour tout n

$$(I_n . M)_{st_o} = (\psi_n . \mu M)_{st_o}$$

pour tout $s \leq s_o$. Puisque $(\psi_n . \mu M)_{st}$ converge uniformément en (s,t) vers $(\psi . \mu M)_{st}$ et que $(I_1 . M)_{st_o}$ converge uniformément en s vers $(I.M)_{st_o}$ (cf. Prop. 1-4), d) est vérifié.

Corollaire.-

Sous les conditions de la proposition 3-6, la 1-martingale $\psi . \mu M$ admet comme processus croissant

$$< \psi . \mu M >^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} [\int_{R_{st}} \psi(z,z')\mu(dz)]^2 < M >^{(1)}(dz').$$

Proposition 3-7.- Théorème de Fubini $\psi . \mu M = (\psi . M) . \mu$.

Sous les conditions de la proposition 3-5, si de plus $|\mu|$ est déterministe, alors :

1°) $\psi(z,z')$ est $\mathcal{F}^1_{z'}$ - prévisible et $|\mu|$ p.s.,

$$E \int_{R_{z_o}} \psi^2(z,z') < M >^{(1)} (dz) < \infty .$$

2°) Il existe un processus K(z) tel que

a) $|\mu|$-presque sûrement en z,

$$K(z) = \int_{R_{z_o}} \psi(z,z') M(dz')$$

b) $$E \int_{R_{z_o}} K(z)^2 \, |\mu|(dz) = \|\psi\|^2.$$

c) Les processus (à variations bornées) suivants sont égaux pour $t \leq t_o$:

$$(K.\mu)_{s_o t} = (\psi.\mu M)_{s_o t}\ .$$

Démonstration :

* Si ψ est simple, on définit K par a) et l'on vérifie aisément b) et c).

* Si $\psi \in \mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$, soit ψ_n une suite simple telle que

$$\|\psi_n - \psi\| \to 0\ .$$

Puisque μ est déterministe, il existe une sous-suite telle que $|\mu|$ ps en z

$$E \int_{R_{z_o}} (\psi_n - \psi)^2\,(z,z') < M >^{(1)}(dz') \leq 2^{-n}.$$

Soit

$$K_n(z) = \int_{R_{z_o}} \psi_n(z,z')\, M(dz')$$

et

$$K(z) = \lim K_n(z) \quad \text{si la limite existe}$$
$$= 0 \quad \text{sinon.}$$

$K(z)$ vérifie bien a). D'autre part, K_n étant de Cauchy dans $L^2(dP \times d|\mu|)$, K_n converge dans L^2 vers K et b) est vérifiée. Enfin, puisque pour $t \leq t_o$

$$(K_n.\mu)_{s_o t} = (\psi_n.\mu M)_{s_o t}$$

on déduit c) du fait que

$$(K_n.\mu)_{s_o t} \to (K.\mu)_{s_o t}$$

uniformément en t. ■

Remarque. On peut définir les intégrales $\psi.\mu M$ pour μ d'un type précédent et M 1-martingale de L^2 lorsque $\psi(z,z')$ est $\mathcal{F}^1_{z'}$-prévisible de coin bornée (c'est-à-dire mesurable pour la tribu engendrée par $(\Delta_s,t) \times (s,\Delta_t) \times A$, A étant $\mathcal{F}^1_s$-adapté). La définition de $\psi.\mu M$ s'obtiendra par prolongement de l'intégrale $\psi_n.\mu M$ lorsque

ψ_n est simple, de coin, bornée. Pour une telle fonction simple, on a :

Proposition 3-8.-

Si ψ est de coin, simple, bornée, $\psi(z,z')$ étant $\mathcal{F}^1_{z'}$-adaptée, μ vérifiant $(\mu 1)$ et si M une 1-martingale de L^2, alors $\psi.\mu M$ est une 1-martingale propre de L^2.

Démonstration : On a

$$A=E\{\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})_z \,(\sum_{ik} \psi_{\ell j ik}\, M(\Delta_{ik})_z)^2\} = E\{\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})_z \sum_i (\sum_k \psi_{\ell j ik} M(\Delta_{ik})_z)^2\}.$$

Posant alors : $X_{ij} = \psi_{\ell j ik}$ si $\ell < i$ et $k < j$

$$A = E\{\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})_z \sum_i X^2_{ij}\, M(\Delta_i,j)^2_z\} = E\{\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j})_z \sum_i X^2_{ij} <M>^{(1)}(\Delta_i,j)_z\}$$

$$\leq E\{\sum_{\ell j} |\mu|(\Delta_{\ell j}) \sum_i X^2_{ij} <M>^{(1)}(\Delta_i,j)\}$$

puisque $<M>^{(1)}(.,j)$ est croissant.

Utilisant alors l'inégalité de la proposition 3-1 et le fait que $|\mu|(R_{z_o}) \leq \mu_o$, on en déduit le résultat de la proposition. ■

L'extension de cette intégrale aux fonctions de coin prévisible, bornée s'obtient par la technique habituelle.

Les propriétés de Fubini restent valables pour de telles intégrales.

3-4. Intégrales $\beta.\nu M$ sur $[0,t_o] \times R_{z_o}$.

Soit ν une mesure non aléatoire sur $[0,t_o]$. On supposera ici que $|\nu|([0,t_o]) = \nu_o < \infty$. Si $z_o = (s_o,t_o)$, M sera ici encore une 1-martingale a.o.1 de L^2 sur R_{z_o}.

Espace $\mathcal{L}^2_{\nu M}(t_o;z_o)$: C'est la classe des fonctions $\beta(v\,;x,y)$ définies sur $[0,t_o]\times R_{z_o}$ qui vérifient :

. $\beta = 0$ sauf si $v > y$

. β est $\mathfrak{F}_x^1$-prévisible.

. $E \int_{[0,t_o]\times R_{z_o}} \beta^2(v\ ;\ \xi)\,|\nu|(dv) < M >^{(1)}(d\xi) = \|\beta\|^2 < \infty$

où β $\mathfrak{F}_x^1$-prévisible signifie que β est mesurable par rapport à la tribu sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^2 \times \Omega$ engendrée par les ensembles :

$$\begin{cases}]v,v'] \times]z,z'] \times A \\ \text{avec : } v > t' \text{ si } z' = (s',t') \\ \text{et} \quad A \in \mathfrak{F}_z^1. \end{cases}$$

Soit alors $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ une partition de R_{z_o} .

Soit β une fonction simple associée à $\pi_2 \times \pi$:

$$\begin{aligned} \beta(v\ ;\ z) &= \beta_{j\,;\,ik} \quad \text{si} \quad v \in \Delta_j\ ;\ z \in \Delta_{ik}\ ,\ j > k \\ &= 0 \qquad\quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si β est de plus bornée, $\mathfrak{F}_z^1$-adaptée, le processus $X = \beta.\nu M$

$$X_{st} = \sum_{jik} \beta_{j\,;\,ik}\ \nu(\Delta_j)_t\ M(\Delta_{ik})_{st}$$

vérifie :

$$\operatorname{Var} X_{s_o,.} \le \nu_o^{1/2} \{ \sum_j |\nu|(\Delta_j) (\sum_{ik} \beta_{j\,;ik}\, M(\Delta_{ik}))^2 \}^{1/2}$$

et puisque M est une 1-martingale a.o.1

$$E(\operatorname{Var} X_{s_o,.})^2 \le \nu_o \|\beta\|^2$$

$(\beta.\nu M)$ est donc une 1-martingale propre de L^2. Par la technique habituelle, on étend cette définition à toute fonction de $\mathscr{L}^2_{\nu M}(z_o)$.

En particulier, si $< M >^{(1)}$ est déterministe, on a les deux théorèmes de Fubini (propriété 3-6 et 3-7). Le premier permet d'écrire :

$$< \beta.\nu M >_{st} = \int_{R_{st}} \left(\int_0^t \beta(v\ ;\ \xi)\ \nu(dv) \right)^2 < M >^{(1)} (\xi)$$

et le second :

$$\frac{d(\beta.\nu M)}{d\nu} = \int_{R_{st}} \beta(t\ ;\ \xi)\ M(d\xi)\ .$$

Cette dernière formule montre en particulier que la représentation de la 1-martingale propre $\beta.\nu M$ est unique, contrairement à la représentation $\psi.\mu M$ étudiée au paragraphe précédent. Examinons alors une situation ou l'intégrale $\psi.\mu M$ se ramène à une représentation (alors uniquement définie) $\beta.\nu M$.

Propriété 3-9.-

Soit M une 1-martingale a.o.1 de L^2, $<M>^{(1)}$ étant déterministe, μ vérifiant (μ1) (cf. § 3-2) et factorisant de la façon suivante :

$$\mu(ds,dt\,;\,\omega) = \tilde{\mu}(ds,\omega)\,\nu(dt)$$

où ν est non aléatoire, de variation sur $[0,t_o]$, ν_o finie.

Il existe alors une fonction $\beta(t\,;\,\xi)$ de $\mathcal{L}^2_{\nu M}(t_o\,;\,z_o)$ telle que

(a) $\nu \times <M>^{(1)}$ p.s., $\beta(t\,;\,\xi) = \int_0^{s_o} \psi(u,t\,;\,\xi)\,\tilde{\mu}(du)$.

(b) Les deux processus ci-dessous coïncident sur R_{z_o}

$$\psi.\mu M = \beta.\nu M.$$

Démonstration :

Si ψ est simple, définissons β par (a). On a donc :

$$X_{st} = \sum_j \Big(\sum_\ell \sum_{ik} \psi_{\ell j ik}\, \tilde{\mu}(\Delta_\ell)_s\, \nu(\Delta_j)_t\, M(\Delta_{ik})_{st}\Big)$$

mais puisque $\ell < i$, $(\Delta_\ell)_s = \Delta_\ell$ si $s \geq s_i$

$$X_{st} = \sum_j \nu(\Delta_j)_t \sum_{ik} \beta(j\,;\,ik)\, M(\Delta_{ik})_{st}$$

avec

$$\beta(j\,;\,ik) = \sum_\ell \psi_{\ell j ik}\, \tilde{\mu}(\Delta_\ell)$$

$$\beta(t\,;\,\xi) = \beta(j\,;\,ik) \quad \text{si } t \in \Delta_j \;,\; \xi \in \Delta_{ik}\,.$$

Les propriétés $\beta \in \mathcal{L}^2_{\nu M}(t_o\,;\,z_o)$ et (b) sont alors vérifiées.

Si $\psi \in \mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$, on peut alors choisir une suite $\{\psi_n\}$ de fonctions simples bornées convergeant vers ψ dans $\mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$, et puisque $<M>^{(1)}$ et ν sont non aléatoires on a, quitte à choisir une sous-suite :

$$E \int_0^{s_o} (\psi_n - \psi)^2 (u,t\,;\,\xi)\,\tilde{\mu}(du) \leq 2^{-n}, \quad \nu \times \langle M \rangle^{(1)} \text{ p.s.}$$

Définissant alors le processus

$$\beta_n(t\,;\,\xi) = \int_0^{s_o} \psi_n(u,t\,;\,\xi)\,\tilde{\mu}(du)$$

comme on vient de le voir pour ψ simple, et

$$\beta(t\,;\,\xi) = \begin{cases} \lim\limits_n \beta_n(t\,;\,\xi) & \text{si la limite existe} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

on définit bien de la sorte un processus $\mathfrak{F}^1_\xi$-prévisible, de $\mathcal{L}^2_{\nu M}(t_o\,;\,z_o)$.

D'autre part, puisque :

$$E \int_{[0,t_o]\times R_{z_o}} (\beta_n - \beta_m)^2 (t\,;\,\xi)\,|\nu|(dt) \langle M \rangle^{(1)}(d\xi) = \|\psi_n - \psi_m\|^2$$

il s'ensuit que (β_n) est de Cauchy dans $L^2(\nu \times \langle M \rangle^{(1)} \times P)$ et donc que l'on a (a).

Il est clair d'autre part, que les convergences des processus $(\beta_n.\nu M)_z$ vers $(\beta.\nu M)_z$ et $(\psi_n.\mu M)_z$ vers $(\psi.\mu M)$ étant uniformes en z (1-martingale propre), on a (b). ■

<u>Remarque</u> : Dans [4] sont introduites les intégrales mixtes curvilignes :

$$X_{st} = \int_{R_{st}} \varphi(u,v)\, W(du,v)dv,$$

où φ est adaptée. Ces intégrales s'écrivent encore

$$\int_{[0,t]\times R_{st}} 1_{\{y<v\}}\, \varphi(u,v)\, W(du,dy)\, dv.$$

Ce sont des intégrales du type $\beta.\nu M$ avec :

$$\beta(v\,;\,x,y) = 1_{\{y<v\}}\, \varphi(x)$$

$$\nu(dv) = dv$$

$$M = W.$$

La prévisibilité de β se déduit alors de l'adaptation de φ puisque la filtration considérée est la filtration brownienne.

3-5. Intégrale simple $\varphi.N$ si φ est $\mathcal{F}^1$-prévisible et si N est une 1-martingale propre : $N = (\psi.\mu M)$.

Supposons que N soit la 1-martingale propre de L^2 définie par $\psi.\mu M$ avec :

- μ vérifie $(\mu 1)$
- M est une 1-martingale a.o.1 de L^2.
- $\psi \in \mathcal{L}^2_{\mu M}(z_o)$.

Définissons alors l'espace suivant :

Espace $\mathcal{L}^2_{1,N}(z_o ; \psi, \mu, M)$.

C'est l'espace des processus $\varphi(z)$, $\mathcal{F}^1_z$-prévisibles et qui vérifient :

$$\|\varphi\|^2 = E \int \varphi^2(\xi \vee \xi')\psi(\xi,\xi')^2 \; |\mu|(d\xi) < M >^{(1)}(d\xi') < \infty .$$

Soit alors $\varphi(z)$ une fonction simple bornée, $\mathcal{F}^1_z$-adaptée. On peut lui associer le processus :

$$(\varphi.N)_z = \sum_{ij} \varphi_{ij} N(\Delta_{ij})_z .$$

Alors, sous les conditions précisées au début de ce paragraphe,

Proposition 3-10.-

Si φ est simple de $\mathcal{L}^2_{1,N}(z_o ; \psi, \mu, M)$, alors le processus $\{(\varphi.N)_z, z \leq z_o\}$ est une 1-martingale propre de L^2, et on a la majoration :

$$E(\text{Var } X_{s,.})^2 \leq \mu_o \; \|\varphi\|^2 .$$

Démonstration :

Elle est immédiate. En effet :

$$(\varphi.N)_{st} = \sum \varphi_{ij} \; N(\Delta_{ij})_{st} = \sum \varphi_{ij} \int_{[0,1]\times(\Delta_j)_t \times (\Delta_i)_t \times [0,1]} \psi(\xi,\xi')\mu(d\xi)M(d\xi').$$

Remarquant alors que si $\xi \hat{\wedge} \xi'$:

$$\varphi(\xi \vee \xi') = \varphi_{ij} \quad \text{si } \xi \in [0,1] \times \Delta_j , \; \xi' \in \Delta_i \times [0,1]$$

on en déduit que :

$$(\varphi.N)_{st} = \int_{R^2_{st}} \varphi(\xi \vee \xi')\psi(\xi,\xi')\ \mu(d\xi)\ M(d\xi').$$

Donc d'après la proposition 3-3-2

$$E(\mathrm{Var}(\varphi.N)(s,.))^2 \leq \mu_o \|\varphi\|^2.$$

$(\varphi.N)_z$ est donc un processus de L^2. C'est une 1-martingale propre représentable. ∎

On en déduit la construction du processus $(\varphi.N)$ pour un φ général par la technique habituelle. On déduit également, de façon immédiate, de la proposition précédente :

Proposition 3-11.-

Si $k(z,z') = \varphi(z \vee z')\ \psi(z,z')$, si φ est dans $\mathscr{L}^2_{1,N}(z_o\ ;\ \psi,\mu,M)$ et ψ, μ, M vérifient les conditions précisées au début du paragraphe, alors, on a égalité des deux processus :

$$(k.\mu M)_z = (\varphi.N)_z\ ,\quad z \leq z_o\ .$$

3-6. Une inégalité.

Proposition 3-12.-

Soit μ une mesure aléatoire adaptée, dont la variation $|\mu|$ est absolument continue par rapport à une mesure positive, non aléatoire ν :

$$|\mu|(dz) = \rho(z)\ \nu(dz).$$

Si M est une 1-martingale a.o.1 de L^2, si $\psi \in \mathscr{L}^2_{\mu M}(z_o)$, et si

$$X_{st} = \int_{R^2_{st}} \psi(z,z')\ 1_{\{z\in\Delta\}}\ \mu(dz)\ M(dz')$$

où Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2_+$, on a :

$$E \sup_s (\mathrm{Var}\ X_{s,.}) \leq 4\nu(\Delta)\int_{\Delta\times R_{z_o}} \rho^2(z)\psi^2(z,z')\ \nu(dz) < M >^{(1)} (dz')\ .$$

Démonstration :

On a, si $z = (u,v)$

$$X_{st} = \int_{R_{st}} 1_{\{z\in\Delta\}}\,\nu(dz) \int_{R_{sv}} \psi(z,z')\,\rho(z)\,M(dz')$$

donc

$$\mathrm{Var}(X_{s.})_t \leq \int_{R_{st}} 1_{\{z\in\Delta\}}\,\nu(dz)\, \left|\int_{R_{sv}} \psi(z,z')\,\rho(z)\,M(dz')\right|$$

et

$$\left[\mathrm{Var}(X_{s.})_t\right]^2 \leq \nu(\Delta) \int_\Delta \left[\int_{R_{sv}} \psi(z,z')\,\rho(z)\,M(dz')\right]^2 \nu(dz)\ .$$

L'intégrale sur R_{sv} intervenant est, à v fixé, une martingale en s :

$$E \sup_s \left[\int_{R_{sv}} \psi(z,z')\,\rho(z)\,M(dz')\right] \leq 4 \int_{R_{1v}} E\,\psi^2(z,z')\,\rho^2(z) < M >^{(1)}(dz')$$

d'où l'on déduit le résultat. ■

RESUME DU CHAPITRE II

(conditions de définitions d'intégrales)

Intégrale simple $\varphi.M$.

M martingale de L^2 .

$\varphi(z)$ $\mathcal{F}_z$-prévisible $E\int \varphi^2 < M >$ fini.

M 1-m a.o.1 de L^2.

$\varphi(z)$ $\mathcal{F}_z^1$-prévisible $E\int \varphi^2 < M >^{(1)}$ fini.

Intégrale double $\psi.MN$.

M 2-m a.o.2 de L^4; N 1-m a.o.1 de L^4 .

$\psi(z,z')$ $\mathcal{F}_{z \vee z'}$-prévisible $E\int \psi^2 < M >^{(2)}(dz) < N >^{(1)} (dz')$ fini.

M 2-m de L^4 ; N 1-m de L^4

ψ prévisible de coin $E\int \psi^2 < M >^{(2)} (dz) < N >^{(1)} (dz')$ fini.

Intégrale mixte $\psi.\mu M$.

Dans L^1

μ adaptée, $E|\mu|(R_{z_o})$ finie

M 1-m a.o.1 de L^2

$\psi(z,z')$ $\mathcal{F}_{z'}^1$-mesurable, $E\int\psi^2 |\mu|(dz) < M >^{(1)}(dz')$ fini.

Dans L^2

$|\mu|(R_{z_o}) \leq \mu_o$ constante

M 1-m a.o.1 de L^2

$\psi(z,z')$ $\mathcal{F}_{z'}^1$ -prévisible $E\int \psi^2 |\mu|(dz) < M >^{(1)}(dz')$ fini

---

Dans L^2

$|\mu| << \nu$ non aléatoire bornée, avec $|\mu|^2$ défini par $\frac{d|\mu|^2}{d\nu} = f^2$ si $\frac{d|\mu|}{d\nu} = f$

M 1-m a.o.1 de L^2

$\psi(z,z')$ $\mathcal{F}_{z'}^1$-prévisible $E\int \psi^2 |\mu|^2(dz) < M >^{(1)} (dz')$ fini.

BIBLIOGRAPHIE DES CHAPITRES I & II

[1] CAIROLI R. : Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications, Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, Springer, Berlin, 1970,p.1-27.

[2] CAIROLI R. : Martingale à deux paramètres de carré intégrable, C.R. Acad. Sc. Paris, Série A-B, 272 (1971) p.1731-1734.

[3] WONG E. et ZAKAI M. : Martingale and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter, Z. für W. 29, (1974), p. 109-122.

[4] CAIROLI R. et WALSH J.B. : Stochastic integral in the plane, Acta Matematica, 134, (1975) p. 111-183.

[5] WONG E. et ZAKAI M. : Weak martingales and stochastic integrals in the plane, An. of Proba. (1976), vol. 4, p. 570-586.

[6] NUALART D. et SANZ M. : Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, Ann. Sci. Univ. Clermont, (1976) p. 89-99.

[7] CAIROLI R. et WALSH J.B. : Martingale representation and holomorphic processes, Ann. of Proba. (1977), vol. 5, n° 4, p. 511-521.

[8] YOR M. : Representation des martingales de carré intégrable relative aux processus de Wiener et de Poisson à n paramètres. Z. für W. 35, (1976), p. 121-129.

[9] WALSH J.B. : Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integral in the plane, cours de 3ème cycle, Université P. et M. Curie, 1976-1977.

[10] SANZ M. : Calcul diferencial estocastic per a processos amb parametre n-dimensional, Thèse à l'Université de Barcelone, (1977).

[11] BAKRY D. : Sur la régularité des trajectoires des martingales à deux indices, à paraître Z. für W., (1979).

[12] MEYER P.A. : "Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre", Sem. Strasbourg, Vol. XIII, Lectures notes in Math., Springer-Verlag.

[13] DOLEANS-DADE C., MEYER P.A. : "Un petit théorème de projection pour les processus à deux indices", Sem. Strasbourg, Vol. XIII, Lectures notes in Math., Springer-Verlag.

[14] MERZBACH E. : Processus stochastiques à paramètre multiple, Thèse à l'Université Ben Gourion (1979).

[15] MERZBACH E. et ZAKAI M. : Predictable and dual predictable projections of two parameter processes (1979) preprint.

[16] ZAKAI M. : Some class of two parameter martingale (1979) preprint.

[17] WONG E. et ZAKAI M. : An extension of stochastic integrals in the plane, Ann. Prob., 5 (1977) p. 770-778.

[18] CAIROLI R. : Sur l'extension de la définition d'intégrale stochastique, Sem. Prob. Strasbourg XIII, Springer-Verlag.

[19] MEYER P.A. : Sur la théorie des processus à deux indices. Exposé 1, Sem. Strasbourg XIII, Springer-Verlag.

[20] MEYER P.A. : Probabilités et Potentiel. Publication de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.

CHAPITRE III

CAS DE LA FILTRATION BROWNIENNE

Dans ce chapitre, nous spécifions certains résultats des chapitres I et II et développons des notions et des résultats nouveaux dans le cas où la filtration $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_z , z \in \mathbb{R}_+^2\}$ de base est celle du mouvement brownien.

Dans les chapitres qui suivent, sauf mention explicite du contraire (p.ex chapitre V, §2 ou chapitre VIII,§1), $\mathcal{F}$ sera cette filtration.

Cette filtration joue un rôle très particulier dans la mesure où elle permet pour différents types de martingales d'avoir des théorèmes de représentations, qui se révèlent être un outil très efficace. Nous verrons que la démonstration de ces théorèmes de représentation est fondée sur les deux propriétés suivantes du mouvement brownien: il est à accroissements orthogonaux et les polynômes en $W(\Delta)$, Δ rectangles de R_{11} sont denses dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_{11})$. On peut donc escompter de bonnes propriétés pour toute filtration engendrée par un processus vérifiant ces deux propriétés.

Nous définissons en premier lieu (§1) le mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+^2$, associé au bruit blanc de $\mathbb{R}^2$. Pour une étude plus systématique du drap brownien, on pourra se référer à [8].

Nous donnons ensuite (§2) un certain nombre de résultats sur la densité de processus simples, bornées, mesurables dans certains espaces $\mathcal{L}^2$.

Ce résultat peut s'obtenir de différentes façons: en s'appuyant sur un résultat général pour les processus prévisibles (puisque, pour la filtration brownienne, les processus prévisibles coincident avec les processus adaptés); de façon existencielle (cf [8]); de façon constructive, et c'est la méthode que nous développons ici.

Au § 3, nous redonnons les différents théorèmes de représentation des variables de $L^2(\mathcal{F}_{11})$ et des martingales, 1-martingales, 1-martingales propres, martingales faibles régulières ([4,5,6,7,9]). La méthode que nous utilisons est assez différente de celles que l'on peut trouver dans les références précédentes. Elle est également généralisable aux cas de filtrations de "type brownien" (comme on l'a décrit plus haut). Les résultats de base sont les lemmes 3-2 et 3-3, qui donnent la densité dans $L^2(\mathcal{F}_{11})$ de polynômes "d'ordre dominant" 1. On en déduit alors le théorème de WONG et ZAKAI et les théorèmes de représentations de 1-martingales de L^2 à t fixé. Dans le cas d'une 1-martingale mesurable adaptée, la mesurabilité en t de cette représentation est obtenue dans [9], et une adaptation du lemme 1-2 permettrait d'obtenir cette mesurabilité, en exhibant, comme dans [9] une famille $\mathcal{E}_t$ de bases de $L^2(\mathcal{F}_{1t})$ mesurable en t.

Nous appuyant sur ce résultat, nous démontrons un théorème de représentation des 1-martingales propres mesurables adaptées dans le cas où $\{X_{s_o t}\}_t$ définit une mesure régulière.

Nous terminons le § 3 en donnant un lemme de calcul stochastique (lemme 3-5), qui se révèlera fondamental pour la suite: ce lemme établit l'égalité entre l'intégrale $\int_o^s \Theta(u)\, X(du,t)$ et l'intégrale double $\int_{R_{st}} \Theta(u)\, L_1(t;u,v)\, W(du,dv)$, pour un intégrande Θ 1-adapté et une 1-martingale X de 1-dérivée L_1.

Au § 4, nous établissons des majorations dans L^p, $p > 1$, d'intégrales stochastiques h.W, h étant 1-adaptée et mesurable; ces inégalités seront utilisées pour établir les inégalités maximales qui suivent.

Le paragraphe §5 est consacré aux définitions et propriétés de bases des semi-martingales représentables (s.m.r.). Pour une s.m.r. X, on saura définir une version continue en (s,t) de $\langle X\rangle^{(1)}_{st}$, qui sera elle même une s.m.r. si X est dans L^4 (on ne sait en général définit $\langle X\rangle^{(1)}_{st}$ en (s,t) que si X est une 1-martingale a.°.1 (cf. chapitre I, §4). On pourra également définir l'intégrale semi-stochastique par rapport à une s.m.r. . On définira la s.m.r. $J_{X,Y}$ associée à deux s.m.r. de L^4 , X et Y : J s'avérera par la suite d'un usage fondamental et nous reviendrons au chapitre IV sur cette s.m.r. . On établit ensuite des inégalités maximales de deux types : l'une majore $E \sup_z X(\Delta)_z^{2n}$ si Δ est un rectangle de R_{11} (donnant en particulier l'inégalité maximale pour X_z^{2n} si $\Delta = R_{11}$) , l'autre majore, à partition π de R_{11} fixée, $E \sup_z \sum_\pi X(\Delta_{ij})_z^{2n}$; on obtiendra une forme maximale en π de cette dernière inégalité, forme qui nous sera particulièrement utile pour l'étude des variations quadratiques au chapitre IV (n=1). Enfin, on démontre que les s.m.r. sont uniformément continues en moyenne quadratique.

Au §6, nous regroupons dans un formulaire les règles principales du calcul stochastique relatif au s.m.r. .

§1 - Le mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$

Définissons d'abord le bruit blanc sur $\mathbb{R}^2$; c'est une fonction d'ensemble, définie sur les boréliens $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, de mesure de Lebesgue finie, à valeur dans un espace $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$,

$$W : \mathcal{B} \longrightarrow L^2$$

telle que :

(a) $W(A)$ est une normale $\mathcal{N}(0 , |A|)$ ($|A|$ est la mesure de Lebesgue de A)

(b) si $A \cap B = \emptyset$, $W(A)$ et $W(B)$ sont indépendants .

L'existence d'un tel processus gaussien est assurée par un théorème général d'existence : si C est une fonction $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie positive, il existe un espace $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et un processus gaussien de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ sur E de covariance C (cf. par exemple Neveu [3] , prop. 3-4). Dans le cas présent, $E = \mathcal{B}$ la fonction :

$$\begin{aligned} C : \mathcal{B} \times \mathcal{B} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A \times B &\longmapsto C(A,B) = |A \cap B| \end{aligned}$$

définit une covariance. On notera alors W le processus correspondant. W est une fonction additive d'ensemble :

$$E(W(A) + W(B) - W(A \cap B))^2 = 0$$

d'après les propriétés de la covariance.

On définira alors le mouvement brownien sur $\mathbb{R}_+^2$ par :

$$W_z = W(R_z) , \quad z \in \mathbb{R}_+^2$$

La covariance de W est :

$$C(z,z') = E\, W_z\, W_{z'} = |R_{z \wedge z'}|$$

On peut, à partir du mouvement brownien W_z reconstituer le bruit blanc sur $\mathbb{R}_+^2$. Pour un rectangle $A =](s,t), (s',t')]$ en posant :

$$W(A) = W_{s't'} - W_{st'} - W_{s't} + W_{st}$$

et pour un borélien A de $\mathbb{R}_+^2$ en l'approchant par une suite d'union finie de rectangles.

W est un processus nul sur les axes. D'autres part, $\{W_{st}\}_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien (non normalisé) à un paramètre et de même $\{W_{st}\}_{t \geq 0}$.

<u>Filtration brownienne</u>

Si A est un borélien de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}_A$ désignera la tribu engendrée par les W(B), où $B \subset A$ est un borélien de mesure de Lebesgue finie. Si $z \in \mathbb{R}_+^2$, on notera $\mathcal{F}_z$ pour la tribu complétée de $\mathcal{F}_{R_z}$.

La filtration $(\mathcal{F}_z)_{z \in \mathbb{R}_+^2}$ vérifie alors la condition (F) donnée dans le chapitre I (cf. par exemple [8]). En particulier, la propriété de continuité à droite de $\mathcal{F}_z$ (et même la continuité de $\mathcal{F}_z$), c'est à dire le point F-2 de (F) résulte de la loi de 0-1 suivante :

<u>Propriété 1-1</u>

> Si A_n est une suite décroissante de boréliens telle que $\bigcap A_n = \emptyset$,
> alors $\bigcap_n \mathcal{F}_{A_n}$ est la tributriviale.

On a alors la propriété suivante ([8]).

Théorème 1-1

$\{W_z\ ,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale forte admettant une version continue.

Remarque : On définirait de même sur les trois autres quadrants de $\mathbb{R}^2$ trois autres mouvements browniens indépendants entre eux et indépendants de W sur $\mathbb{R}_+^2$.

Dans toute la suite de ce travail (chapitre III et suivants), l'espace de base $(\Omega, \mathfrak{F}\ , P)$ et la filtration $(\mathfrak{F}_z)_{z \in \mathbb{R}_+^2}$ seront ceux que nous venons de définir.

§2 - Densité des fonctions simples adaptées bornées dans certains espaces L^2

Pour définir les différents types d'intégrales stochastiques, simple, double, miste, on a défini certains espaces $\mathcal{L}^2$ de fonctions prévisibles sur $\mathbb{R}_+^2 \times \Omega$, $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega$.

Dans le cas présent de la filtration brownienne la notion de processus prévisible est équivalente à la notion de processus mesurable, adapté. Par exemple :

$$\varphi\ :\ \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est prévisible}$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \varphi\ :\ \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est mesurable.} \\ \text{(ii)} & \text{pour tout } z \in \mathbb{R}_+^2\ ,\ \varphi(z) \text{ est adaptée.} \end{cases}$$

Ceci résulte de la continuité de la famille $(\mathfrak{F}_z)$. En particulier, d'après un théorème de classe monotone, l'ensemble des limites dans L^2 de fonctions simples adaptées contient les processus mesurables, adaptées de L^2 . On pourra trouver dans [8] une démonstration existentielle de ce fait pour les espaces $\mathcal{L}^2_M(z_o)$, $\mathcal{L}^2_{MM}(z_o)$. On donnera ici une démonstration constructive de ce résultat.

2-1 - Densité des fonctions simples, mesurables adaptées, bornées dans $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+)$

Soit μ la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^2_+$ définie par la densité ρ de $L^1(dP \times dz)$ (dz est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2_+$)

$$\mu(dz,w) = \rho(z,w)dz$$

Supposons que ρ soit adapté. On dira que μ est adaptée. On peut alors définir, P - p.s. :

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} F(z,w)\ \mu(dz,w)$$

dès que F est un processus mesurable adapté. On définira l'espace $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+)$ comme étant l'espace des processus F sur $\Omega \times \mathbb{R}^2_+$, mesurables, adaptés, tels que :

$$||F||^2 = E \int_{\mathbb{R}^2_+} F^2(z)\ \mu(dz) < \infty$$

Si z_o est fixé, on définira de façon analogue $\mathcal{L}^2_\mu(R_{z_o})$.

Propriété 2-1

L'ensemble des fonctions simples, mesurables, adaptées et bornées est dense dans $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+)$.

Démonstration

Soit $f \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+)$. Il faut montrer que pour tout $\alpha > 0$, il existe

f_n simple, adaptée-mesurable, bornée de $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+)$ telle que :

$$||f - f_n|| < \alpha \ .$$

<u>1ère étape</u> :

Posons $f^*_N = (f \wedge N) \vee (-N)$ pour $N \in \mathbb{R}_+$

f_N est mesurable adaptée.

Puisque $f \in \mathcal{L}^2_\mu$, il existe $N_o > 0$ tel que :

$$||f - f^*_{N_o}|| \leqslant \frac{\alpha}{4} \ .$$

<u>2ème étape</u> :

Puisque ρ est dans $L^1(dP \times dz)$, il existe $z_o \in \mathbb{R}^2_+$ tel que :

$$E(\mu(\mathbb{R}^2_+ \setminus R_{z_o})) \leqslant \frac{\alpha}{4N}$$

et donc la fonction $f^{**}_{N_o,z_o} = f^*_{N_o} \cdot 1_{R_{z_o}}$ vérifie

$$||f^{**}_{N_o,z_o} - f^*_{N_o}|| \leqslant \frac{\alpha}{4} \ .$$

<u>3ème étape</u>

Régularisation de $f^{**}_{N_o,z_o} = f^{**}$.

Posons, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$f^{**}_\varepsilon(s,t \ ; \ \omega) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{s-\varepsilon}^{s} \int_{t-\varepsilon}^{t} f^{**}(z)dz$$

f^{**}_ε est une fonction mesurable, adaptée, bornée par N_o, et continue pour tout ω.

On déduit du théorème de Lebesgue que :

pour tout ω : $\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon^{**}(z) = f^{**}(z)$ z - p.s.

Donc : $[f_\varepsilon^{**}(z) - f^{**}(z)]^2$ tend $(z \times \omega)$-p.s., donc $\mu \times P$- presque sûrement vers 0, puisque μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. D'autre part $(f_\varepsilon^{**} - f^{**})^2$ est dominée par $4N_o^2$.

Donc :
$$||f_\varepsilon^{**} - f^{**}|| \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

et donc on peut trouver ε tel que :

$$||f_\varepsilon^{**} - f^{**}|| \leqslant \frac{\alpha}{4}$$

4ème étape

Obtention de la fonction simple.

Soit alors $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ partition de R_{z_o} . Définisssons

$$f_{\pi,\varepsilon}^{**}(z) = f_\varepsilon^{**}(z_{ij}) \quad \text{si} \quad z \in \Delta_{ij} =]z_{ij}, z_{i+1,j+1}]$$

$f_{\varepsilon,\pi}^{**}$ est une fonction mesurable, adaptée, bornée.

D'autre part, $f_\varepsilon^{**}(z)$ étant continue pour tout ω

$$f_{\varepsilon,\pi}^{**} \xrightarrow[|\pi| \to 0]{} f_\varepsilon^{**} \quad \text{partout} \quad .$$

On peut donc trouver une partition π , de pas $|\pi|$ suffisament petit telle que :

$$||f_{\varepsilon,\pi}^{**} - f_\varepsilon^{**}|| \leqslant \frac{\alpha}{4}$$

On conclut donc que : $||f_{\varepsilon,\pi}^{**} - f|| \leqslant \alpha$, ce qui est le résultat recherché. ∎

Corollaire 2-1

Soit M une martingale de L^2 relative à la filtration brownienne, $\langle M \rangle$ son processus croissant (mesurable adapté), f une fonction mesurable adaptée de semi-norme

$$||f||^2 = E \int_{\mathbb{R}_+^2} f^2(z) \langle M \rangle (dz)$$

finie. Il existe alors une suite de fonctions simples mesurables adaptées convergeant vers f au sens de cette semi-norme.

Il suffit de remarquer que la mesure induite par $\langle M \rangle$ sur $\mathbb{R}_+^2$ est bien, adaptée, absolument continue :

$$\frac{d\langle M \rangle_z}{dz} = \Theta^2(z) + \int_{R_z} \Psi^2(u,y\ ;\ x,v)du\, dv \quad , \quad z = (x,y)$$

(si $M = \Theta \cdot W + \Psi \cdot WW$) , vérifiant :

$$E \langle M \rangle_{z_o} < \infty \ .$$

On a un résultat analogue pour l'espace $\mathcal{L}^2_{1,\mu}(\mathbb{R}_+^2)$ des processus mesurables, 1-adaptés, de L^2 .

2-2 - Densités des fonctions simples dans $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2)$

Soit μ une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2$, positive, définie par la densité :

$$\mu(dz, dz', \omega) = \rho(z, z', \omega) dz\, dz'$$

où $\rho \in L^1(dz \times dz' \times dP)$, $\rho(z,z')$ $\mathcal{F}_{z \vee z'}$ adapté .

Espace $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$

C'est l'espace des processus Ψ

$$\Psi : \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

(a) mesurables

(b) $\Psi(z,z')$ est $\mathcal{F}_{z \vee z'}$-mesurable (on dira : Ψ adapté)

(c) $\Psi(z,z') = 0$ sauf si $z \hat{\wedge} z'$

(d) $||\Psi||^2 = E \int_{\mathbb{R}^2_+} \Psi(z,z')^2 \mu(dz,dz') < \infty$

Si π est une partition de $\mathbb{R}^2_+$, Ψ est simple si :

$$\begin{aligned} \Psi(z,z') &= \Psi_{\ell j,ik} \quad \text{si} \quad z \in \Delta_{\ell j} \ , \ z' \in \Delta_{ik} \ , \ \Delta_{\ell j} \hat{\wedge} \Delta_{ik} \\ &= 0 \quad \text{sinon} \ . \end{aligned}$$

Propriété 2-2

L'ensemble des fonctions simples mesurables, bornées, adaptées est dense dans $\mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$.

Démonstration

Soit $\Psi \in \mathcal{L}^2_\mu(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$. Comme dans la démonstration de la propriété 2-1, on peut se ramener au cas où d'une part, Ψ est bornée par N_o , d'autre part Ψ , ne charge que $R^2_{z_o}$. Soit Ψ^{**} la fonction alors obtenue. Régularisons la :

si $\varepsilon > 0$:

$$\Psi^{**}_\varepsilon(z,z') = 1_{\{z \hat{\wedge} z'\}} \frac{1}{\varepsilon^4} \int \Psi^{**}(\xi,\xi')d\xi \, d\xi'$$

où l'intégrale est prise sur $]z - (\varepsilon,\varepsilon),z] \times]z'-(\varepsilon,\varepsilon),z']$

Ψ_ε^{**} est continue en z, z' sur son domaine de définition (qui ne contient pas la diagonale).

Le théorème de Lebesgue permet de conclure :

$$\text{si} \quad z \curlywedge z' \qquad \Psi_\varepsilon^{**}(z,z') \longrightarrow \Psi^{**}(z,z') \quad , \text{ pour tout } \omega \ .$$

On termine alors la démonstration comme pour la propriété 2-1.

Le même résultat peut être obtenu pour l'espace $\mathcal{L}^2_{1,\mu}(\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{R}^2_+)$ des processus $\Psi(z,z')$ $\mathcal{F}^1_{z'}$-mesurables.

On déduira alors de ces deux résultats une méthode de construction des intégrales stochastiques doubles par rapport à des martingales fortes, des intégrales stochastiques mixtes par rapport à une mesure $\mu(dz,\omega)$ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et par rapport à une martingale forte.

§3 - Théorèmes de représentation

3-1 - Représentation des variables $\mathcal{F}_{11}$-mesurables

On dira qu'une variable $\Theta : \Omega \times R_{11} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$ si Θ est mesurable adaptée, vérifiant :

$$E \int_{R_{11}} \Theta^2(z)dz < \infty$$

On dira que $\Psi \quad \Omega \times R_{11} \times R_{11} \longrightarrow R$ est dans $\mathcal{L}^2_{WW}(R_{11})$ si Ψ est mesurable , $\Psi(z,z')$ ne chargeant que $z \hat{\wedge} z'$, étant $\mathcal{F}_{z \vee z'}$-adaptée et vérifiant :

$$E \int_{R^2_{11}} \Psi^2(z,z')dz\, dz' < \infty .$$

C'est deux espaces coïncident avec les espaces $\mathcal{L}^2_M(z_o)$ et $\mathcal{L}^2_{MM}(z_o)$ définis au chapitre II, avec pour M la martingale forte de $(L^2$, de $L^4)$ W et $z_o = (1,1)$.

Soit M_{11} une variable $\mathcal{F}_{11}$- adaptée, de L^2 . Nous allons donner de M_{11} trois représentations sous forme d'intégrales stochastiques : la 1-représentation exprimant M_{11} comme intégrale simple en W pour un intégrande $\mathcal{F}^1$-adapté ; symétriquement la 2-représentation ; et la représentation de WONG et ZAKAI comme somme d'une intégrale simple et d'une intégrale double, ce dernier point se traduisant ainsi :

<u>Théorème 3-1</u> (WONG et ZAKAI , [4, 5, 6, 9])

Toute variable M_{11} de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{11}, P)$, centrée s'écrit :

$$M_{11} = \int_{R_{11}} \Theta(z)W(dz) + \int_{R^2_{11}} \Psi(z,z')W(dz)W(dz')$$

pour une fonction Θ de $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$, et Ψ de $\mathcal{L}^2_{WW}(R_{11})$.

La démonstration originale (Wong et Zakai), [4]) se fonde sur :

1°) La représentation sous forme $\Theta\cdot W + \Psi\cdot WW$ des "fonctionnelles d'Hermite de W" , c'est-à-dire des variables de la forme

$$H_p\left[\int_{R_{11}} \Phi(z)W(dz)\right]$$

où H_p est un polynôme d'Hermite. Cette représentation se déduit de la formule de Ito montrée par Wong et Zakai dans le même article dans le cas de fonctions "harmoniques" de martingales fortes, cas auquel on ramène les polynômes d'Hermite.

2°) La densité des fonctionnelles d'Hermite dans l'espace des variables de carré intégrale et la complétion en moyenne quadratique des intégrales stochastiques.

Dans [5,9] , Carioli et Walsh donnent une démonstration plus concise fondée dans [5] encore sur les polynômes d'Hermite et, cette fois-ci , sur leur 1ère formule de Green, dans [9] , sur un théorème de 1-représentation des processus de $\mathcal{L}^2$.

Dans [6] , Yor donne une démonstration, qui a l'avantage de se généraliser d'une part à toute dimension finie de l'espace d'indice, d'autre part à des martingales relatives à des tribus engendrées par le processus de Poisson. Cette démonstration se fonde sur :

1°) La représentation $\Theta\cdot W + \Psi\cdot WW$ des variables exponentielles,

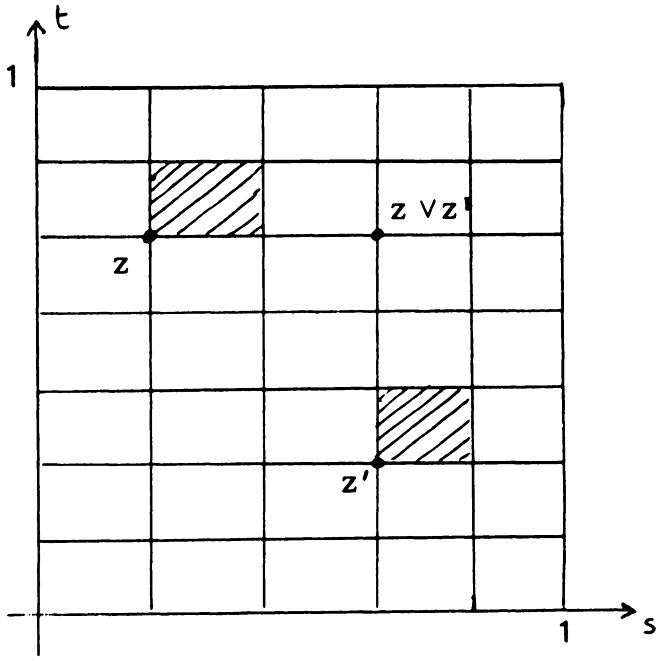
$M^f = \exp\left[\int_{R_{11}} f(z)W(dz) - \frac{1}{2}\int_{R_{11}} f^2(z)dz\right]$, représentation obtenue par double application de la formule de Ito à un paramètre.

2°) Sur le théorème de classe monotone : l'espace des variables représentables est un sous espace vectoriel fermé de L^2 , contenant les variables M^f , qui sont totales dans L^2.

Remarquons que les fonctions exponentielles utilisées dans cette dernière démonstration peuvent être directement reliées aux polynômes d'Hermite selon lesquelles elles se décomposent.

Nous donnerons ici une autre démonstration fondée sur une toute autre approche.

L'idée est que toute variable aléatoire de $L^2(\mathcal{F}_{11})$ peut être approchée par des polynômes en $W(\Delta_{ij})$ associés à des partitions de plus en plus fines de R_{11} .



* Si l'on réordonne ces polynômes en fonction du $W(\Delta_{ij})$ le "plus haut" de chaque monôme, ils s'écriront

$$\Sigma\, P_{ij}(W(\Delta_{k\ell}))W(\Delta_{ij})$$

où P_{ij} est $\mathfrak{F}^2_{z_{ij}}$ -mesurable, ce qui conduira à la 2-représentation :

$$M_{11} = \int_{R_{11}} h_2(z)W(dz) \quad \text{où} \quad h_2(z) \quad \text{est} \quad \mathfrak{F}^2_z\text{-mesurable.}$$

* De même si on ordonne en fonction du $W(\Delta_{ij})$ le "plus à droite" on aboutira à :

$$M_{11} = \int_{R_{11}} h_1(z')W(dz') \quad \text{où} \quad h_1(z') \quad \text{est} \quad \mathfrak{F}^1_z\text{-mesurable .}$$

* Soit en ordonnant à la fois par rapport au Δ_{ij} "la plus haut" , et au $\Delta_{k\ell}$ "le plus à droite" , on obtiendra la représentation :

$$M_{11} = \int_{R_{11}} \Theta(z)W(dz) + \int_{R_{11}^2} \Psi(z,z')W(dz)W(dz')$$

l'intégrale simple correspondant au cas où le Δ_{ij} le plus haut est en même temps le plus à droite.

Etablissons d'abord le résultat :

<u>Lemme 3-1</u>

Soit $\mathfrak{F}$ la tribu engendrée par une famille $\{Y_i , i \in I\}$ de variables de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, P une probabilité sur $(\Omega, \mathfrak{F})$ telle que pour tout $p \geqslant 1$, Y_i soit dans $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{F} , P)$. Alors , l'ensemble des polynômes (à coefficients constants) en Y_i est dense dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{F} , P)$.

Démonstration

Soit n un entier positif, $\mathcal{H}_n$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de Ω dans $\mathbb{R}$, limite dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de polynômes en $\{Y_i \wedge n\ , i \in I\}$. $\mathcal{H}_n$ contient les constantes, est stable pour la limite uniforme, ainsi que pour la limite d'une suite croissante uniformément bornée. D'autre part $\mathcal{H}_n$ contient l'algèbre $\mathcal{C}_n$ des polynômes en $\{Y_i \wedge n\ , i \in I\}$; il s'en suit que $\mathcal{H}_n$ contient toutes les variables bornées mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_i \wedge n\ , i \in I\}$ ([2])

$$\mathcal{L}_2^\infty(\Omega, \mathcal{F}_n, P) \subset \mathcal{H}_n \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad .$$

Soit alors :

$$\mathcal{H} = \bigcup_n \mathcal{H}_n \quad .$$

On a :

$$\mathcal{F} = \bigvee_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$$

et donc :

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \quad .$$

Or, tout polynôme de variables $\{Y_i, i \in I\}$ est limite dans $\mathcal{L}^2$ d'éléments de $\mathcal{H}$:

$$P(Y_i\ , i \in I_o) = \lim_{L^2} P(Y_i \wedge n\ , i \in I_o)$$

D'autre part, $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on en déduit le résultat. ■

Soit alors $\pi = \pi_1 \times \pi_2$ une partition de R_{11} en un nombre fini de rectangles : $\pi = (\Delta_{ij})$, $i = 1,I$, $j = 1,J$. On a le corollaire :

Corollaire 3-1

Si $\mathfrak{F}_{11}$ est la tribu engendrée par le brownien W sur R_{11}, alors l'ensemble des polynômes en $\{W(\Delta_{ij}),\ \Delta_{ij} \in \pi,\ \pi$ partition de $R_{11}\}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathfrak{F}_{11}, P)$.

A Δ_{ij} associons la variable indéterminée X_{ij}. Soit m un monôme en $X_{11},\dots,X_{IJ}$. Notons $j(m)$ le plus grand des indices j tels qu'il existe i tel que X_{ij} intervient dans le monôme m avec un exposant strictement positif. On appellera ordre dominant du monôme la somme des exposants de $X_{1j(m)}, X_{2j(m)}, \dots, X_{Ij(m)}$. Un monôme sera donc d'ordre dominant 1 si un seul $X_{ij(m)}$ intervient, et s'il intervient avec l'exposant 1. On appellera ordre dominant d'un polynôme le plus grand des ordres dominants de ses monômes.

Lemme 3-2

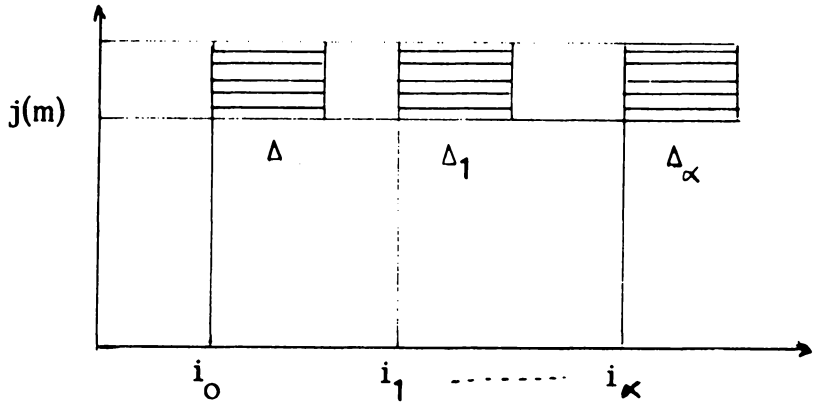
L'ensemble des polynômes d'ordre dominant 1 associés à toutes les partitions finies du type précédent dans lesquels on remplace X_{ij} par $W(\Delta_{ij})$ est dense dans $L^2(\mathfrak{F}_{11})$.

L'ensemble des polynômes en $W(\Delta_{ij})$ associés à toutes les partitions finies étant dense dans $L^2(\mathfrak{F}_{11})$, pour montrer le lemme, il suffit de montrer que l'ensemble des polynômes d'ordre dominant 1 est dense dans l'ensemble des polynômes.

La démonstration se fera par récurrence, montrant que les polynômes d'ordre dominant $K-1$ sont denses dans l'ensemble de ceux d'ordre K si $K > 1$.

Soit donc un m monôme d'ordre dominant K. Découpons l'intervalle $j(m)$, $j(m) + 1$ en n intervalles égaux.

monôme m



1° pas :

Supposons que $X_{i_o j(m)}$ apparaisse dans m avec un exposant $p > 1$.

La partition précédente découpe le rectangle $\Delta = \Delta_{i_o j(m)}$ en n rectangles égaux parallèles à l'axe des x : δ_k, $k = 1, \ldots, n$. On a :

$$W(\delta)^p = (\sum_k W(\delta_k))^p$$

Notons q_n la somme des monômes d'ordre dominant au plus p-1 obtenus en développant cette expression.

$$W(\Delta)^p - q_n = \sum_k W(\delta_k)^p$$

Donc :

$$\begin{aligned} ||W(\Delta)^p - q_n|| &\leqslant n||W(\delta)^p|| \\ &\leqslant n(2p)!!\ Z(\delta)^p \\ &\leqslant n(2p)!!\ (\frac{Z(\Delta)}{n})^p = \frac{c}{n^{p-1}} \end{aligned}$$

et, si $\qquad m = Y\, X_{i_o j(m)}{}^p$

Y étant indépendant de $W(\Delta)$,

$$||m - Y\, q_n|| \leqslant \frac{c||Y||}{n^{p-1}}$$

qui tend vers zéro si n est assez grand. Ecrivant les éventuels termes de Y situés sur la ligne $j(m)$ en fonction du redécoupage de $j(m)$, $j(m)+1$, on approche ainsi m par un polynôme de même type où l'on a abaissé le degré de $W(\Delta)$ de p à $p-1$.

Procédant ainsi pour tous les rectangles (en nombre fini) situés sur la ligne supérieure et procédant par récurrence, on approche m par un polynôme dont tous les monômes s'écrivent :

$$Y X_{i_1 j(m)} \cdots X_{i_\alpha j(m)}$$

avec $i_1, \ldots, i_\alpha$ distincts et Y $\mathcal{F}^2_{j(m)}$-mesurable.

<u>2° pas</u> :

Soit donc :

$$m = Y X_{i_1 j(m)} X_{i_2 j(m)}$$

avec Y indépendant de $W(\Delta_1)$ et de $W(\Delta_2)$, où $\Delta_1 = \Delta_{i_1 j(m)}$ et $\Delta_2 = \Delta_{i_2 j(m)}$.

La partition de $j(m)$, $j(m)+1$ découpe Δ_1 et Δ_2 en n rectangles égaux δ_k et δ'_k, $k, k' = 1, \ldots, n$.

On a :

$$W(\Delta_1) W(\Delta_2) = \sum_{k,k'} W(\delta_k) W(\delta'_{k'})$$

Posons :

$$p_n = \sum_{k' \neq k} W(\delta_k)\, W(\delta'_{k'})$$

p_n est d'ordre dominant 1, $Y p_n$ d'ordre dominant d'ordre strictement inférieur à celui de m

$$||W(\Delta_1)W(\Delta_2) - p_n|| \leq || \sum_k W(\delta_k)W(\delta'_k)||$$

$$\leq n||W(\delta)\ W(\delta')||$$

$$\leq n \frac{Z(\Delta_1)^2}{n^2} = \frac{c}{n}$$

et

$$||m - Y\ p_n|| < \frac{c}{n}\ ||Y||$$

Il suffit de généraliser aux polynômes et de conclure la récurrence pour montrer le lemme. ■

Théorème 3-2

Toute variable M_{11} de carré sommable $\mathcal{F}_{11}$-mesurable s'écrit de façon unique :

$$M_{11} = E(M_{11}) + \int_{R_{11}} h_2(z)\ W(dz)$$

où $h_2(z)$ est mesurable, $\mathcal{F}^2$-adaptée, vérifiant :

$$E \int_{R_{11}} h_2(z)^2\ dz < \infty$$

Démonstration

Supposons M_{11} centrée. Fixons $\varepsilon > 0$.

Soit (π_n) une suite de partitions dont le pas $|\pi_n|$ tend vers 0. On omettra l'indice n quand il n'y aura pas ambiguité. (Si $\pi = (\Delta_{ij})$, $\Delta_{ij} =]s_i, s_{i+1}] \times]t_j, t_{j+1}]$, alors $|\pi| = \max_{i,j} \{(s_{i+1}-s_i),(t_{j+1}-t_j)\})$.

D'après le lemme 3-2, il existe n_o tel que si $n \geqslant n_o$, on peut trouver un polynôme P_n, d'ordre dominant 1, tel que :

$$||M_{11} - P_n(W(\Delta_{ij}),\ \Delta_{ij} \in \pi_n)||_2 \leqslant \varepsilon$$

Ordonnons P_n suivant les variables déterminant l'ordre dominant :

$$P_n(W(\Delta_{ij})) = \sum_{i,j} a_{n,ij}\ W(\Delta_{ij})$$

où $a_{n,ij}$ est un polynôme en $W(\Delta_{k\ell})$, $\ell < j$. Posons pour tout $z \in R_{11}$:

$$h_n(z) = a_{n,ij}\ , \quad \text{si} \quad z \in \Delta_{ij}\ .$$

On a alors :

$$P_n(W(\Delta_{ij})) = \int_{R_{11}} h_n(z)\ W(dz)$$

D'autre part, $h_n : \Omega \times R_{11} \longrightarrow R$ est mesurable, $\mathcal{F}^2$-adaptée.
(h_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$; en effet, si $n, m \geqslant n_o$:

$$||h_n - h_m||_{\mathcal{L}^2_W} = ||P_n - P_m||_2 \leqslant ||P_n - M_{11}||_2 + ||P_m - M_{11}||_2 \leqslant 2\varepsilon$$

Quitte à choisir une sous-suite de (h_n), h_n converge presque sûrement dans L^2 vers une fonction $h_{(2)}$. Cette limite est dans $\mathcal{L}^2_W$. En effet :

$$h_{(2)} = \lim_n h_n \quad \text{est mesurable ,} \quad \mathcal{F}^2\text{-adaptée}$$

évidemment de norme L^2 finie. Enfin, on a bien :

$$M_{11} = \int_{R_{11}} h_{(2)}(z)\ W(dz)\ . \qquad \blacksquare$$

De façon analogue, on démontre un résultat sur le 1-représentation de M_{11} .

Venons en au résultat du théorème 3-1. Deux possibilités s'offrent à nous : soit une approche directe basée sur un lemme du type lemme 3-2 annonçant la densité dans $L^2(\mathfrak{F}_{11})$ des polynômes constitués de monômes dont l'ordre dominant dans le sens 1 est un <u>et</u> dont l'ordre dominant dans le sens 2 est aussi un ; soit une approche utilisant les deux résultats sur la 1 et la 2-représentation d'une variable de $L^2(\mathfrak{F}_{11})$. L'inconvénient de cette seconde approche est qu'elle ne fait pas apparaître de façon immédiate les mesurabilités des processus Θ, Ψ intervenant dans la représentation de WONG et ZAKAI . Aussi opterons nous pour la première méthode.

<u>Lemme 3-3</u>

L'ensemble des polynômes d'ordre dominant 1 dans le sens <u>et</u> d'ordre dominant 1 dans le sens 2 , associés à toutes les partitions rectangulaires finies de R_{11} est dense dans $L^2(\mathfrak{F}_{11})$.

<u>Démonstration</u>

Soit $X \in \mathcal{L}^2(\mathfrak{F}_{11})$, $\varepsilon > 0$ fixé. D'après le lemme 3-2, il existe une partition π_o finie et un polynôme P_o d'ordre dominant 1 (dans le sens 2) tel que :

$$||X - P_o||_2 \leqslant \varepsilon$$

avec :

$$P_o = \sum_{\ell j} a_{\ell j} W(\Delta_{\ell j})$$

$a_{\ell j}$ étant des polynômes en $W(\Delta_{mn})$ avec $n < j$, donc en particulier des variables de $L^2(\mathcal{F}_{1t_j})$, si on a noté :

$$\Delta_{ij} =](s_i,t_j),(s_{i+1},t_{j+1})]$$

Donc, pour chaque (ℓ,j), on peut trouver une partition $\pi^{(\ell,j)}$ (par exemple choisie plus fine que π_o) sur R_{1t_j}, et $Q_{\ell,j}$ un polynôme d'accroissements de W sur $\pi^{(\ell,j)}$, d'ordre dominant 1 dans le sens 1, tel que :

$$||a_{\ell j} - Q_{\ell j}||_2 \leq \varepsilon$$

Soit alors le polynôme :

$$P = \sum_{\pi_o} Q_{\ell j} W(\Delta_{\ell j})$$

On a :

$$\| P-P_o \|_2^2 = \sum_{\pi_o} E(a_{\ell j} - Q_{\ell j})^2 |\Delta_{\ell j}| \leq \varepsilon^2$$

puisque $a_{\ell j} - Q_{\ell j}$ est $\mathcal{F}_j^2$-mesurable.

Notons alors π la partition la plus fine obtenue à partir de π_o et des $(\pi^{(\ell,j)})$. P peut encore s'écrire :

$$P = \sum_{\substack{\ell jik \\ k<j}} b_{\ell jik} W(\Delta_{\ell j}) W(\Delta_{ik})$$

et $b_{\ell j,ik}$ est un polynôme en $W(\Delta_{nm})$ pour $(n,m) < (i,j)$.

On a d'autre part :

$$||X-P||_2 \leq ||X-P_o||_2 + ||P_o-P||_2 \leq 2\varepsilon$$

On a presque le résultat désiré. Reste une difficulté :

Il peut apparaître dans P des accroissements du type :

$$W(\Delta_{ij}) W(\Delta_{ik}) \qquad k < j$$

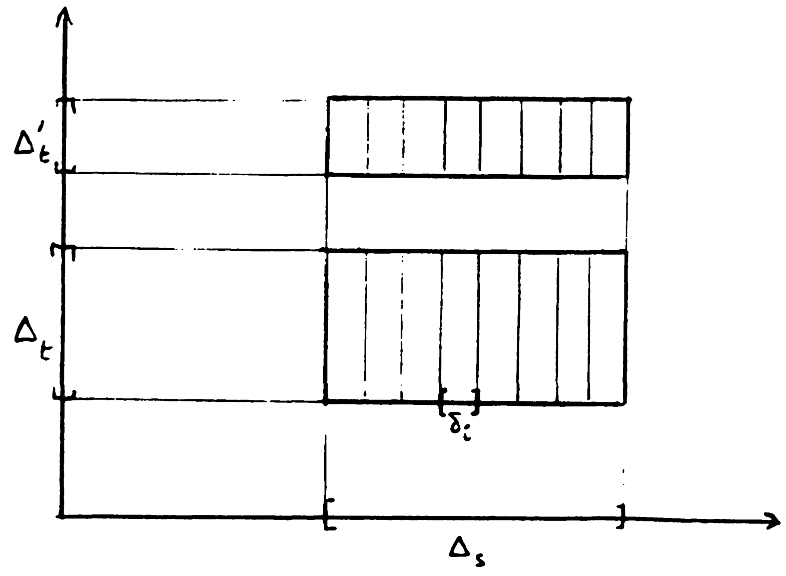
Nous allons nous débarrasser de tels termes en nous appuyant sur le lemme suivant :

Lemme 3-4

Soient $\Delta = \Delta_s \times \Delta_t$, $\Delta' = \Delta_s \times \Delta'_t$ deux rectangles disjoints, et $\delta = (\delta_i)$ une partition en intervalles adjacents de Δ_s. Alors :

$$||W(\Delta)\,W(\Delta') - \sum_{\substack{ii' \\ i\neq i'}} W(\delta_i\times\Delta_t)W(\delta_{i'}\times\Delta'_t)||_2^2 \leqslant |\delta|_1\,|\Delta_s|\,|\Delta_t|\,|\Delta_{t'}|$$

où $|\delta|_1 = \max_i |\delta_i|$.



Il suffit de vérifier que la différence dont on majore la norme L^2 n'est autre que :

$$D_\delta = \sum_i W(\delta_i\times\Delta_t)W(\delta_{i'}\times\Delta'_t) . \qquad \blacksquare$$

Raffinons alors la partition π en une partition π^* en raffinant sa trace sur le premier axe de sorte que :

$$|\pi^*|_1 = \max_i \{|s^*_{i+1} - s^*_i|\} \leqslant \frac{|\pi|_1 \, \varepsilon^2}{4 \, ||X||_2^2}$$

où $|\pi|_1 = \max_i \{|s_{i+1} - s_i|\}$. Notons alors :

$$P^* = \sum_{\substack{\ell j i k \\ \ell \neq i, j>k}} b^*_{\ell j\, ik} \; W(\Delta^*_{\ell j}) \; W(\Delta^*_{ik})$$

où : $b^*_{\ell j\, ik} = b_{\ell' j\, i' k}$ si $\Delta^*_{\ell j} \times \Delta^*_{ik} \subset \Delta_{\ell' j} \times \Delta_{i' k}$.

Il est alors immédiat de vérifier que :

$$||P-P^*||_2^2 < E \, \{ \sum_{\substack{ijk \\ k<j}} b_{ij\, ik} \left[W(\Delta_{ij})W(\Delta_{ik}) - \Sigma \, W(\Delta^*_{i_1 j})W(\Delta^*_{i_2 k})\right]\}^2$$

où la sommation dans le crochet **est prise en** i_1, i_2 pour les $\Delta^*_{i_1 j} \times \Delta^*_{i_2 j}$ inclus dans $\Delta_{ij} \times \Delta_{ik}$ avec $i_1 \neq i_2$.

On obtient la majoration :

$$||P-P^*||_2^2 < \sum_{\substack{ijk \\ k<j}} E(b_{ij\, ik}^{\;2}) \; ||W(\Delta_{ij})W(\Delta_{ik}) - \Sigma \, W(\Delta^*_{i_1 j})W(\Delta^*_{i_2 k})||_2^2$$

puisque W est à accroissements orthogonaux et que $b_{ik\, ik}$ est $\mathcal{F}^1_i$ - mesurable, soit :

$$||P-P^*||_2^2 \leqslant \delta \sum_{\substack{ijk \\ k<j}} E(b^2_{ij\, ik}) \quad |\Delta_i| \; |\Delta_j| \; |\Delta_k|$$

$$= \delta \, K_1(P)$$

Reste à obtenir une majoration de $K_1(P)$. P se décompose en :

$$P = P_1 + P_2$$

où $$P_1 = \sum_{\substack{ijk\\k<j}} b_{ij\,ik}\, W(\Delta_{ij})\, W(\Delta_{ik})$$

Il est facile de vérifier que P_1 et P_2 sont orthogonaux et donc que :

$$||P||^2 \geqslant ||P_1||^2 = \sum_{\substack{ijk\\k<j}} E(b^2_{ij\,ik})\, |\Delta\ |^2\, |\Delta_j|\ \ |\Delta_k|$$

$$\geqslant |\pi|_1\ K_1(P)$$

et donc, si on a choisi $\varepsilon \leqslant ||X||_2$ (auquel cas : $||P||^2 \leqslant 4||X||_2^2$)

$$||P-P^*||^2 \leqslant \delta\, K_1(P) \leqslant \varepsilon^2$$

Reste alors à écrire P^* de la façon suivante :

$$P^* = S^* + D^*$$

où

$$S^* = \sum_{\pi^*} \Theta_{\ell j}\, W(\Delta^*_{\ell j})$$

$$\Theta_{\ell j} = \sum_{(i,k)<(\ell,j)} b^*_{\ell j\,ik}\, W(\Delta^*_{ik}) \quad \text{est} \quad \mathcal{F}_{\ell j}\text{-mesurable}$$

$$D^* = \sum_{(\ell,j)\ (i,k)} b^*_{\ell j\,ik}\, W(\Delta^*_{\ell j})\, W(\Delta^*_{ik})$$

ce qui est bien la décomposition recherchée, vérifiant :

$$||P^* - X||_2 < 3\varepsilon . \qquad \blacksquare$$

La démonstration du théorème 3-1 découle alors de ce lemme : si P^*_n est une suite de tels polynômes associés à une suite ε_n tendant vers 0 , posons :

$$\Theta_n(z) = \Theta^n_{\ell j} \quad \text{si} \quad z \in \Delta^*_{\ell j}(n)$$

$$\Psi_n(z,z') = b^{*n}_{\ell j\, ik} \quad \text{si } z \in \Delta^*_{\ell j}(n),\ z' \in \Delta^*_{ik}(n), (\ell,j) \curlywedge (i,k)$$

Il est facile de vérifier, vue l'orthogonalité de S^*_n et D^*_n que Θ_n et Ψ_n sont des suites de Cauchy dans L^2, qui, quitte à en extraire une sous suite, convergent p.s. vers deux fonctions Θ, Ψ . On vérifie alors que :

- $\Theta \in \mathcal{L}^2_W(R_{11})$
- $\Psi \in \mathcal{L}^2_{WW}(R_{11})$
- $X = \int_{R_{11}} \Theta(z)\, W(dz) + \int_{R^2_{11}} \Psi(z,z')\, W(dz)\, W(dz')$

3-2 - Théorèmes de représentation de martingales

Au chapitre II, on a défini des martingales, 1-martingales, 1-martingales propres à partir d'intégrales stochastiques, simples, doubles ou mixtes . Dans le cas de la filtration brownienne, toute martingale de L^2 est la somme d'une intégrale stochastique simple et d'une intégrale stochastique double ; toute 1-martingale est l'intégrale stochastique simple, d'un intégrande 1-adapté, cette propriété étant raffinée si la 1-martingale est mesurable et adaptée [9] ; enfin, pour une 1-martingale propre X_{st} , mesurable et adaptée, on obtiendra une représentation sous forme d'intégrale mixte dès que le processus à variation bornée $(X_{1t})_t$ est régulier.

Théorème de WONG et ZAKAI , 3-3

Si $\{M_z , z \in R_{11}\}$ est une martingale de L^2 , alors il existe une fonction Θ de $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$ et Ψ de $\mathcal{L}^2_{WW}(R_{11})$ telles que :

$$M_z = M_o + \int_{R_z} \Theta(\xi)W(d\xi) + \int_{R^2_z} \Psi(\xi,\xi')W(d\xi)W(d\xi')$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de remarquer que $M_{11} \in L^2(\mathfrak{F}_{11})$, d'utiliser la représentation de M_{11} donnée par le théorème 3-2 et d'écrire :

$$M_z = E(M_{11} \mid \mathfrak{F}_z) \quad .$$

Soit $\{M_z , z \in R_{11}\}$ une 1-martingale de L^2 , on a alors le résultat suivant :

<u>Proposition 3-4 : Représentation d'une 1-martingale de L^2</u>

Soit M une 1-martingale de L^2 définie sur R_{11} .
Il existe, pour tout $t \in [0,1]$, un processus $L_1(t\ ; z,\omega)$

$$L_1(t\ ;\cdot,\cdot) \ : \ R_{11} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

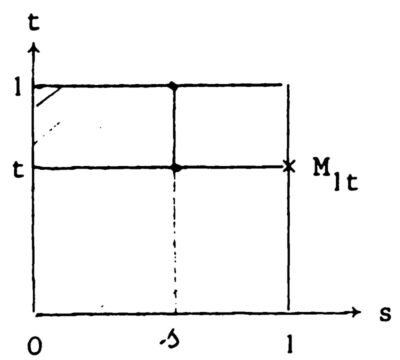
mesurable , $\mathfrak{F}_{ut}$-adapté, nul si $v > t$ (pour $z = (u,v)$)
tel que :

$$E \int_{R_{11}} L_1^2(t;z)\, dz < \infty$$

et avec :

$$M_{st} = M_{ot} + \int_{R_{st}} L_1(t;z) W(dz)$$

<u>Démonstration</u>



M_{1t} est dans $L^2(\mathcal{F}_{11})$ et donc, il existe $L_1(t;z)$ donnant la 1-représentation de M_{1t}. $L_1(t,z)$ vérifie les propriétés annoncées. La variable centrée $M_{1t} - M_{ot}$ s'écrit :

$$M_{1t} - M_{ot} = \int_{R_{1t}} L_1(t;z)W(dz)$$

et donc, puisque M est une 1-martingale :

$$M_{st} = M_{ot} + \int_{R_{st}} L_1(t;z)W(dz) .$$

Ce résultat ne donne aucune propriété de mesurabilité de la 1-dérivée L_1 en t. Une adaptation du lemme 3-2 à la recherche de bases de $L^2(\mathcal{F}_{1t})$ permettrait d'obtenir une telle mesurabilité.

Dans le cas où M_{st} est une 1-martingale adaptée, mesurable, on a le résultat suivant obtenu dans [9] par CAIROLI et WALSH :

Théorème 3-4 : [9] représentation des 1-martingales adaptées, mesurables de L^2

Soit $\{M_z , z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une 1-martingale, adaptée, mesurable, de L^2.
Il existe un processus L_1 :

$$L_1 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^2 \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que :

a) $(t ; z,w) \longrightarrow L_1(t ; z,w)$ est mesurable

b) $L_1(t ; u,v)$ est $\mathcal{F}_{ut}$-adapté, nul si $v > t$

c) Pour tout (s,t) : $E \int_{R_{st}} L_1^2(t;z)dz < \infty$

d) $M_{st} = M_{ot} + \int_{R_{st}} L_1(t;z)\, W(dz)$

L_1 sera appelé la <u>1-dérivée</u> de M .

Ce résultat est basé sur le lemme suivant annonçant qu'il existe une famille de bases des espaces $L^2(\mathcal{F}^2_t)$ dépendant mesurablement de t :

<u>Lemme 3-4</u> [9]

Soit $L^2(\mathcal{F}^2_t) = L^2(\Omega, \mathcal{F}^2_t, P)$ la suite croissante d'espaces de Hilbert de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On peut trouver pour chaque t une base orthonormale $\{Z_n(t), t > 0\}$ de $L^2(\mathcal{F}^2_t)$, avec $Z_o(t) \equiv 1$, telle que :

1) $(t,\omega) \longrightarrow Z_n(t,\omega)$ est mesurable, pour tout n .

2) Il existe une suite de processus $\{\Psi_n(t,z), z \in \mathbb{R}^2_+ , t \in \mathbb{R}_+\}$ telle que, pour tout n :

a) $(t;z,\omega) \longrightarrow \Psi_n(t;z,\omega)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^2 \times \mathcal{F}$ mesurable

b) $\Psi_n(t;u,v)$ est $\mathcal{F}_{ut}$-mesurable, nul si $v > t$

c) $Z_n(t) = \int_{\mathbb{R}^2_+} \Psi_n(t;z)\, W(dz)$

Pour les 1-martingales propres de L^2 , mesurables, adaptées montrons le résultat suivant :

<u>Théorème 3-5</u> : <u>Représentation des 1-martingales propres, adaptées, mesurables, de L^2</u>

Soit $\{M_{st}, (s,t) \in R_{11}\}$ une 1-martingale propre, mesurable adaptée, de L^2 telle que, il existe une mesure non aléatoire finie ν sur $[0,1]$ et un processus $\rho(t,\omega)$ vérifiant :

(a) $M_{1t} = \int_0^t \rho(v)\ \nu(dv)$

(b) $(t,\omega) \longrightarrow \rho(t,\omega)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{F}_{11}$ mesurable

(c) $\rho(t)$ est $\mathcal{F}_{1t}$-mesurable

(d) $E \int_0^1 \rho^2(t)\ \nu(dt) < \infty$

Il existe alors un processus $\beta_1 : [0,1] \times R_1 \times \Omega \longrightarrow R$ tel que :

(a') $(t\ ;\ z,\omega) \longrightarrow \beta_1(t\ ;\ z,\omega)$ est $\mathcal{B} \times \mathcal{B}^2 \times \mathcal{F}_{11}$-mesurable

(b') $\beta_1(t\ ;\ u,v)$ est $\mathcal{F}_{ut}$-mesurable, nulle si $t < v$

(c') $E \int_{[0,1]\times R_{11}} \beta_1^2(t;z)\ \nu(dv)dz < \infty$

(d') $M_{st} = M_{ot} + \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v;z)\ \nu(dv)W(dz)$

Démonstration

D'après le lemme 3-4, on peut décomposer l'élément ρ_t de $L^2(\mathcal{F}_{1t})$ sur la base $\{Z_n(t),\ n \geq 0\}$

$$\rho_t = \sum_{n\geq o} \rho_{n,t}\ Z_n(t) = \int_{R_{1t}} \beta_1(t;z)W(dz)$$

avec :

$$\beta_1(t;z) = \sum_{n\geq o} \rho_{n,t}\ \Psi_n(t;z)$$

β_1 vérifie bien a') et b') puisque $\rho_{n,t} = E(\rho_t\ Z_n(t))$ est mesurable en t.

Puisque :

$$E\,\rho_t^2 = \int_{R_{st}} \beta_1^2(t;z)dz$$

le point c') est également vérifié d'après d).

Enfin, pour la 1-martingale propre centrée, $M_{st} - M_{ot}$, on a pour tout (s,t) :

$$M_{st} - M_{ot} = \int_o^t \left(\int_{R_{sv}} \beta_1(v;z)W(dz)\right) \nu(dv)$$

$$= \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v,z)\ \nu(dv)\ W(dz)$$

d'après le théorème de Fubini. ■

On notera $\mathcal{L}^2_{\nu W}(R_{11})$ l'espace des processus β_1 vérifiant les conditions a') b') c') précédentes, $\mathcal{L}^2_{tW}(R_{11})$ si ν est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Ces espaces coïncident avec les espaces $\mathcal{L}^2_{\nu M}(t_o,z_o)$ définis au chapitre II, §3.

3-3 - Un lemme fondamental de calcul stochastique

Le résultat suivant est essentiel et simple à démontrer : il traduit le fait qu'une intégrale (de bord) $\int_o^s \Phi(u)\ M(du,t)$ de Φ relativement à une 1-martingale M , au niveau t s'exprime également comme intégrale en $W(d\xi)$ sur R_{st} pour le même intégrande. Nous utiliserons à plusieurs reprises ce résultat : existence d'une version continue en (s,t) du processus $\langle X\rangle^{(1)}$ où X est une s.m.r. (§ 5 de ce même chapitre), formule de Green .... Ce résultat sera généralisé au chapitre V, §5, traitant de la formule de Green.

Lemme 3-5

Soit X une 1-martingale, adaptée, mesurable de L^2, de 1-dérivée L_1. Soit $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow R$ un processus mesurable, 1-adapté, vérifiant, à t fixé :

$$(1) \qquad ||\Phi||^2 = E \int_0^s \Phi(u) \, \langle X\rangle^{(1)} (du,t) < \infty$$

Soient les deux intégrales stochastiques, l'une par rapport à un processus à 1 indice :

$$I_{st} = \int_0^s \Phi(u) \, X(du,t)$$

l'autre par rapport à W :

$$J_{st} = \int_{R_{st}} \Phi(u) \, L_1(t\ ;\ u,v) \, W(du,dv)$$

Alors, sous (1), I_{st} et J_{st} existent et sont égales.

Démonstration

Puisque L_1 est la 1-dérivée de X, on a d'après le théorème 1 de [10] :

$$\langle X\rangle^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} L_1^2(t;z)\,dz$$

et donc (1) s'écrit :

$$E \int_{R_{st}} \Phi^2(u) \, L_1^2(t\ ;\ u,v) \, du\, dv < \infty$$

Cette condition, qui assure l'existence de I , assure aussi l'existence de J (cf. chapitre II, §1, intégrande 1-adapté et intégration par rapport à une martingale forte).

Soit $\Phi_n : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de processus simples, 1-adaptés, mesurables, tels que :

$$||\Phi - \Phi_n||^2 \longrightarrow 0$$

et :

$$\begin{aligned} I_n(s,t) &= \int_0^s \Phi_n(u)\ X(du,t) \\ &= \sum_i \Phi_n(i)\ X(\Delta_i^n) \\ &= \sum_i \Phi_n(i) \int_{\Delta_i^n \times [o,t]} L_1(t\ ;\ u,v)\ W(du,dv) \\ &= \int_{R_{st}} \Phi_n(n)\ L_1(t\ ;\ u,v)\ W(du,dv) \end{aligned}$$

et donc :

$$E(I_n(s,t) - J(s,t))^2 \leqslant ||\Phi_n - \Phi||^2 \xrightarrow[n]{} 0$$

§ 4 - Quelques inégalités.

Théorème 4-1.-

Si φ est un processus mesurable $\mathcal{F}_z^1$-adapté de L^{2N} $(N \geq 1)$, on a pour tout $a \leq b$, $c \leq d$

$$E\left(\int_{[a,b]\times[c,d]} \varphi(z)\, W(dz)\right)^{2N} \leq K(b-a)^{N-1}(d-c)^{N-1}\int_{[a,b]\times[c,d]} E\,\varphi^{2N}(z)dz$$

(avec $K = [N(2N-1)]^N$).

Remarque : Sur $\mathbb{R}$, si $\varphi(t)$ est un processus F_t-adapté et B le mouvement brownien, on a

$$E\left(\int_a^b \varphi(t)B(dt)\right)^{2N} \leq K(b-a)^{N-1}\int_a^b E\,\varphi^{2N}(t)\,dt$$

(pour $N=2$, cf. Gihman et Skohorod [1], p. 385).

Démonstration :

Posons $\Delta = [a,b] \times [c,d]$.

* Supposons d'abord que φ soit une fonction simple, et posons

$$I = \int_\Delta \varphi(z)\, W(dz).$$

Choisissons une partition π passant par les points exceptionnels de la fonction simple φ. Notons Δ_{ij} les éléments de π et φ_{ij} la valeur de φ sur Δ_{ij}

$$I = \sum_{i,j} \varphi_{ij}\, W(\Delta_{ij}).$$

Développons I^{2N} par la formule du binôme après avoir ordonné par rapport aux termes (i,j) maximum pour l'ordre du balayage vertical. Notons $\sum'$ pour la somme prise sur (i',j') tels que $(i' < i)$ ou $(i' = i$ et $j' < j)$. Les termes où $W(\Delta_{ij})$ apparait avec un ordre impair étant d'espérance nulle,

$$E(I^{2N}) = C_{2N}^{2}\, E \sum_{ij} \Big[\sum \varphi_{i'j'}\, W(\Delta_{i'j'}) \Big]^{2N-2} \varphi_{ij}^{2}\, W(\Delta_{ij})^{2}$$

$$+ C_{2N}^{4}\, E \sum_{ij} \Big[\sum \varphi_{i'j'}\, W(\Delta_{i'j'}) \Big]^{2N-4} \varphi_{ij}^{4}\, W(\Delta_{ij})^{4}$$

$$+ \ldots$$

$$+ C_{2N}^{2N-2}\, E \sum_{ij} \Big[\sum \varphi_{i'j'}\, W(\Delta_{i'j'}) \Big]^{2} \varphi_{ij}^{2N-2}\, W(\Delta_{ij})^{2N-2}$$

$$+ \quad E \sum_{ij} \varphi_{ij}^{2N}\, W(\Delta_{ij})^{2N} .$$

Quand le pas de la partition tend vers zéro, tous les termes tendent vers zéro sauf le premier. $E(I^{2N})$ est donc égal à la limite de ce terme ; si $k = C_{2N}^{2}$ et $R_{st} = [a,s]\times[c,t]$, on a

$$E(I^{2N}) = k E \int_{R_{bd}} \Big(\int_{R_{sd}} \varphi(\xi)\, W(d\xi)\Big)^{2N-2} \varphi^{2}(s,t)\,ds\,dt.$$

Remarquons déjà qu'il résulte de cette formule que $E(I^{2N})$ est fonction croissante de la borne b du domaine d'intégration

$$E(I^{2N}) = k E \int_a^b X(s,d)^{2N-2} \int_c^d \varphi^{2}(s,t)\,dt\,ds$$

où

$$X(s,d) = \int_{R_{sd}} \varphi(\xi)\, W(d\xi).$$

Appliquons alors l'inégalité de Hölder

$$E \int_a^b X^{2N-2}\, Y\, ds \leq \Big(E \int_a^b X^{(2N-2)q} ds\Big)^{1/q} \Big(E \int_a^b Y^{p}\Big)^{1/p}$$

en choisissant q de sorte que

$$(2N-2)q = 2N$$

soit $p = N$

$$E(I^{2N}) \leq k\Big(\int_a^b E\Big[\int_{R_{sd}} \varphi(\xi)\, W(d\xi)\Big]^{2N} ds\Big)^{1-\frac{1}{N}} \times \Big(\int_a^b E\Big[\int_c^d \varphi^{2}(s,t)\,dt\Big]^{N} ds\Big)^{1/N} .$$

Utilisant la remarque sur le fait que $E(I^{2N})$ croît avec la borne droite du rectangle d'intégration,

$$E(I^{2N})^N \leq K\left(\int_a^b E(I)ds\right)^{N-1} \left(\int_a^b E\left[\int_c^d \varphi^2(s,t)dt\right]^N ds\right)$$

$$E(I^{2N}) \leq K(b-a)^{N-1} \int_a^b E\left[\int_c^d \varphi^2(s,t)\,dt\right]^N ds\ .$$

Appliquons à nouveau l'inégalité de Hölder pour le même choix de p,q :

$$\int_c^d \varphi^2(s,t)\,dt \leq \left(\int_c^d 1^q\,dt\right)^{1/q} \left(\int_c^d \varphi^{2N}(s,t)\,dt\right)^{1/N}$$

$$\left[\int_c^d \varphi^2(s,t)\,dt\right]^N \leq (d-c)^{N-1} \int_c^d \varphi^{2N}(s,t)\,dt$$

et finalement

$$E(I^{2N}) \leq K(b-a)^{N-1}(d-c)^{N-1} \int_a^d \int_c^d E\,\varphi^{2N}(s,t)\,ds\,dt,$$

ce qui est le résultat du théorème 1 pour φ simple.

* La démonstration de cette inégalité pour une fonction φ vérifiant $E\int_\Delta \varphi^{2N}(z)dz < \infty$ s'obtient en approchant φ par une suite de fonctions simples φ_n telle que $E\int_\Delta (\varphi-\varphi_n)^{2N}(z)dz \to 0$.

Théorème 4-2.-

Si $\varphi(z)$ est une processus $\mathfrak{F}_z^1$-adapté de L^4, posons

$$D = \left[\int_a^b \int_c^d \varphi(z)\,W(dz)\right]^2 - \int_a^b\int_c^d \varphi^2(z)\,dz.$$

1°) On a

$$E(D^2) = \frac{2}{3} E\left[\int_a^b\int_c^d \varphi(z)\,W(dz)\right]^4.$$

2°) Si $\varphi(z)$ est dans L^8, on a

$$E(D^4) = \frac{4}{7} E\left[\int_a^b\int_c^d \varphi(z)\,W(dz)\right]^8.$$

Remarque : On déduit de ces deux théorèmes que

$$E(D^2) \leq 24(b-a)(d-c) \int_a^b \int_c^d E\,\varphi^4(z)\,dz$$

$$E(D^4) \leq C\,(b-a)^3(d-c)^3 \int_a^b\int_c^d E\,\varphi^8(z)\,dz$$

$(C = 341.232)$.

<u>Remarque</u> : D est la différence de deux termes du même ordre de grandeur. Contrairement à ce que l'on aurait pu penser, D est encore de ce même ordre de grandeur. Majorer un moment quelconque de D se fera donc toujours en majorant le moment correspondant de chaque terme de la différence et en utilisant l'inégalité

$$(X-Y)^{2k} \leq C_k\left[X^{2k}+Y^{2k}\right].$$

<u>Démonstration</u> :

Il suffit de la faire pour une fonction simple φ , le résultat s'étendant aux fonctions de L^4 ou de L^8 par passage à la limite dans ces espaces.

Nous reprendrons les notations du début de ce paragraphe. Pour une fonction simple φ et une partition π plus fine que celle définissant φ , on peut écrire

$$D = A+B$$

avec

$$A = 2\sum_{ij}\sum \varphi_{ij}\,\varphi_{i'j'}\,W(\Delta_{ij})\,W(\Delta_{i'j'})$$

$$B = \sum_{ij} \varphi_{ij}^2\,[W(\Delta_{ij})^2 - |\Delta|].$$

De sorte que

1°) $\quad E(D^2) = E(A^2) + E(B^2) + 2E(AB)$

<u>terme A^2</u> : Dans A^2 apparaissent des produits de $W(\Delta_{..})$ pris en 4 points. Un tel produit est d'espérance nulle sauf si les 2 points maximaux (au sens de l'ordre du balayage vertical) sont confondus

$$E(A^2) = 4\,E\sum_{ij}\Big[\sum\sum \varphi_{i'j'}\,W(\Delta_{i'j'})\Big]^2 \varphi_{ij}^2\,|\Delta_{ij}|$$

$$= 4\int_a^b\int_c^d\Big[\int_a^s\int_c^d \varphi(\xi)\,W(d\xi)\Big]^2 \varphi^2(s,t)\,ds\,dt$$

dont on a vu dans la démonstration du Th. 1 qu'il valait $E(I^4)/k$. Ici donc $(2N-2=2)$

$$E(A^2) = \frac{2}{3}\,E(I^4).$$

<u>termes B^2 et AB</u> :

$$E(B^2) = \sum_{ij} E\, \varphi_{ij}^4 \,[W(\Delta_{ij})^2 - |\Delta|]^2$$
$$= \sum_{ij} E\, \varphi_{ij}^4 \,[2\,|\Delta|^2]$$
$$\leq 2\,|\Delta| \int_{R_{11}} E\, \varphi^4(z)\,dz$$

$E(B^2)$ tend vers zéro.

$$|E(AB)| \leq (E(A^2))^{1/2}\,(E(B^2))^{1/2}$$

$E(AB)$ tend vers zéro.

On en conclut bien que

$$E(D^2) = \frac{2}{3} E\Big[\Big(\int_a^b\int_c^d \varphi(z)\,W(dz)\Big)^4\Big] \leq 24(b-a)(d-c)\int_a^b\int_c^d E\,\varphi^4(z)\,dz\,.$$

2°) $\quad E(D^4) = E(A^4) + 4E(A^3B) + 6E(A^2B^2) + 4E(AB^3) + E(B^4)$.

<u>terme $E(A^4)$</u> : Si l'on note

$$Q_{ij} = (\not\Sigma\, \varphi_{i'j'}\, W(\Delta_{i'j'}))\, \varphi_{ij}\, W(\Delta_{ij})$$

on a

$$A^4 = 16\Big[\not\sum_{ij} Q_{ij}\Big]^2 .$$

Donc

$$E(A^4) = 16\,E\sum_{ij}(\not\Sigma\, \varphi_{i'j'}\, W(\Delta_{i'j'}))^4\, \varphi_{ij}^4\, |\Delta_{ij}|^2 + 16\, C_4^2\, E\sum_{ij}(\not\Sigma\, \varphi_{i'j'} W(\Delta_{i'j'}))^2 (\not\Sigma\, Q_{i''j''})\varphi_{ij}^2\, |\Delta_{ij}|\,.$$

Le premier terme équivaut à

$$16\,|\Delta|\, E\int_a^b\int_c^d \Big[\int_a^s\int_c^d \varphi(\xi)\,W(d\xi)\Big]^4 \varphi^4(s,t)\,ds\,dt = \text{cste}\ |\Delta|\ E(I^4)$$

qui tend vers zéro. Le second vaut

$$\frac{16\times 6}{6}\, E\sum_{ij}(\not\Sigma\, \varphi_{ij}\, W(\Delta_{i'j'}))^6\, \varphi_{ij}^2\, |\Delta_{ij}|$$

qui tend vers

$$16\,E\int_a^b\int_c^d\Big[\int_a^s\int_c^d \varphi(\xi)\,W(d\xi)\Big]^6 \varphi^2(s,t)\,ds\,dt = \frac{16}{C_8^2}\, E\Big(\int_a^b\int_c^d \varphi(\xi)W(d\xi)\Big)^8 = \frac{4}{7}\, E(I^8)$$

$$E(A^4) \longrightarrow \frac{4}{7}\, E(I^8)$$

lorsque la partition π tend vers zéro.

Autres termes :

$$E(B^4) = \sum_{ij} E\varphi_{ij}^4\left[W(\Delta_{ij})^2 - |\Delta|\right]^4 + \sum_{ij} E\left[\sum\!\!\!\!/\ \varphi_{i'j'}\left[W(\Delta_{i'j'}) - |\Delta|\right]\right]^2 \varphi_{ij}^2\left[W(\Delta_{ij}) - |\Delta|\right]^2 .$$

Le premier terme est d'ordre $|\Delta|^3$, le second $|\Delta|$

$$E(B^4) \to 0,$$

quant aux autres termes, l'inégalité de Hölder permet de conclure :

$$|E(A^3 B)| \leq E(A^4)^{3/4} E(B^4)^{1/4}$$

$$E(A^2 B^2) \leq E(A^4)^{1/2} E(B^4)^{1/2}$$

$$|E(AB^3)| \leq E(A^4)^{1/4} E(B^4)^{3/4}.$$

Ils tendent donc vers zéro, ce qui achève de démontrer le théorème 4-2. ■

On notera dans la suite

$$\mathcal{O}_{ij} = [0,1] \times \Delta_j \times \Delta_i \times [0,1].$$

Corollaire 4-3.-

Si $M = \theta.W + \psi.WW$

$$EM(\Delta_{ij})^4 \leq c.\,|\Delta_{ij}|\left[\int_{\Delta_{ij}} E\,\theta^4(z)dz + \int_{\mathcal{O}_{ij}} E\,\psi^4(z,z')dz\,dz'\right]$$

$$EM(i,\Delta_j)^4 \leq c'|\Delta_j|\left[\int_{[0,1]\times\Delta_j} E\theta^4(z)dz + \int_{[0,1]\times\Delta_j\times[0,1]^2} E\,\psi^4(z,z')dz\,dz'\right]$$

$c=10.368$, $c'=288$.

Démonstration :

$$M(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_{ij}} \theta(z)W(dz) + \int_{\mathcal{O}_{ij}} \psi(z,z')\,W(dz)\,W(dz').$$

Utilisant $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$ et le théorème 4-1

$$E(M(\Delta_{ij})^4) \leq 8.36\left[|\Delta_{ij}|\int_{\Delta_{ij}} E\,\theta^4(z)dz + |\Delta_j|\int_{[0,1]\times\Delta_j} E\left\{\int_{\Delta_i\times[0,1]} \psi(z,z')W(dz)\right\}^4 dz'\right].$$

Réappliquant le théorème 4-1, on montre la première assertion du lemme, avec $c = 8\times 36^2$.

De même, partant de

$$M(i,\Delta_j) = \int_{[0,s_i]\times\Delta_j} \theta(z)W(dz) + \int_{[0,1]\times\Delta_j\times[0,s_i]\times[0,1]} \psi(z,z')W(dz)W(dz').$$

On montre par application du théorème 4-1 la seconde assertion, avec $c' = 288$. ■

On déduit immédiatement que si π est une partition de $[0,1]^2$ en rectangles Δ_{ij} ayant tous la même aire

$$\sum_{i,j} E\, M(\Delta_{ij})^4 \leq c\,|\Delta_{ij}|\left[\int_{R_{11}} E\,\theta^4(z)dz + \int_{R_{11}^2} E\,\psi^4(z,z')dz\,dz'\right]$$

étant régulière sur l'axe des t

$$\sum_{j} E\, M(i,\Delta_j)^4 \leq c\,|\Delta_j|\left[\int_{R_{11}} E\,\theta^4(z)dz + \int_{R_{11}^2} E\,\psi^4(z,z')dz\,dz'\right].$$

On démontre de même le corollaire suivant où c_1 et c_2 sont deux constantes aisément calculables :

Corollaire 4-4.-

Si $M = \theta\cdot W + \psi\cdot WW$

$$E\,M(\Delta_{ij})^8 \leq c_1\,|\Delta_{ij}|^3\left[\int_{\Delta_{ij}} E\,\theta^8(z)dz + \int_{\mathcal{O}_{ij}} E\,\psi^8(z,z')dz\,dz'\right]$$

$$E\,M(i,\Delta_j)^8 \leq c_2\,|\Delta_j|^3\left[\int_{[0,1]\times\Delta_j} E\,\theta^8(z)dz + \int_{[0,1]\times\Delta_j\times[0,1]^2} E\,\psi^8(z,z')dz\,dz'\right].$$

Corollaire 4-5.-

Si $M = \theta\cdot W + \psi\cdot WW$

$$E\left[\langle M\rangle(\Delta_{ij})^2\right] \leq |\Delta_{ij}|\left[\int_{\Delta_{ij}} E\,\theta^4(z)dz + \int_{\mathcal{O}_{ij}} E\,\psi^4(z,z')dz\right]$$

$$E\left[\langle M\rangle(i,\Delta_j)^2\right] \leq 2\,|\Delta_j|\left[\int_{[0,1]\times\Delta_j} E\,\theta^4(z)dz + \int_{[0,1]\times\Delta_j\times[0,1]^2} E\,\psi^4(z,z')dz\right].$$

<u>Démonstration</u> :

$$<M>(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_{ij}} \vartheta^2(z)dz + \int_{\mathcal{O}_{ij}} \psi^2(z,z')dz\,dz' .$$

Donc

$$E[<M>(\Delta_{ij})^2] \leq 2\left[E(\int_{\Delta_{ij}} \vartheta^2)^2 + E(\int_{\mathcal{O}_{ij}} \psi^2)^2\right]$$

$$(\int_{\Delta_{ij}} \vartheta^2(z)dz)^2 \leq (\int_{\Delta_{ij}} 1.dz) \times (\int_{\Delta_{ij}} \theta^4(z)dz) \leq |\Delta_{ij}| \int_{\Delta_{ij}} \theta^4(z)dz.$$

De même pour le terme en ψ, d'où la première assertion du corollaire 4-4 ; la deuxième inégalité s'obtient de la même façon. ■

§5 - Semi-martingale représentables (s.m.r.)

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à l'étude de processus sur $R_{11} = [0,1]^2$.

5-1 - Définitions et propriétés des s.m.r.

5-1-1 - Définitions

Soit X une martingale faible régulière sur R_{11}, de L^2 (cf. chapitre I, §3) . X s'écrit :

$$X = M + P^1 + P^2$$

où M est une martingale de L^2 , P^1 une 1-martingale propre de L^2 , P^2 une 2-martingale propre de L^2. (chapitre I, propriété 3-4).

Si (P^1_{1t}) (resp. $(P^2_{s1})_s$) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$P^1_{1t} = \int_0^t \rho_1(v)dv \qquad (\text{resp. } P^2_{s1} = \int_0^s \rho_2(u)du)$$

où ρ_1 (resp. ρ_2) vérifie les hypothèses du théorème 3-5 de ce même chapitre, alors, il existe $\beta_1 \in \mathcal{L}^2_{tW}(R_{11})$ tel que :

$$P^1_{st} = \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v,z)dv\, W(dz)$$

(resp. $\beta_2 \in \mathcal{L}^2_{Ws}(R_{11})$ tel que :

$$P^2_{st} = \int_{R_{st}\times[o,s]} \beta_2(z;u)\, W(dz)\, du)$$

Définition 1 : Martingale faible représentable de L^2

C'est une martingale faible de L^2, s'écrivant :

$$Y = M + P^1 + P^2$$

avec :

$$M = \Theta \cdot W + \Psi \cdot WW \quad , \quad \Theta \in \mathcal{L}^2_W(R_{11}) \quad , \quad \Psi \in \mathcal{L}^2_{W,W}(R_{11})$$

$$P^1 = \beta_1 \cdot VW \quad , \quad \beta_1 \in \mathcal{L}^2_{tW}(R_{11})$$

$$P^2 = \beta_2 \cdot WV \quad , \quad \beta_2 \in \mathcal{L}^2_{Ws}(R_{11})$$

On notera en abrégé : Y est une m.f.r. . Une m.f.r. est nulle sur les axes.

On notera :

$$M^* = \Theta \cdot W \quad , \quad M^{**} \quad \Psi \cdot WW$$

On dira que P^1 est une 1-martingale propre représentable (en abrégé 1-m.p.), P^2 une 2-m.p. , oubliant en général le r de représentable.

Définition 2 : Semi-martingale représentable

C'est un processus X s'écrivant :

$$X = Y + B$$

où Y est une m.f.r. de L^2 et B un processus absolument continu :

$$B_z = \int_{R_z} \varphi(\xi) d\xi = (\varphi \cdot Z)_z$$

où $\varphi \in \mathcal{L}^2_W(R_{11})$.

On notera <u>X est une s.m.r.</u> .

Une s.m.r. est donc <u>un processus de L^2,</u> admettant une version continue, s'écrivant :

$$X = M + P^1 + P^2 + B$$

On notera en abrégé "B est à v.b." , pour dire que B est à variation rectangulaire bornée .

<u>Proposition</u>

La représentation d'une s.m.r. en $(\theta, \Upsilon, \beta_1, \beta_2, \varphi)$ est unique.

<u>Démonstration</u>

Il suffit de démontrer que si

$$0 = \theta.W + \Upsilon.WW + \beta_1.VW + \beta_2.WU + \varphi.Z$$

les cinq intégrandes sont nuls dans leurs espaces L^2 respectifs.

<u>1° méthode</u>: La 1-représentation de X = 0 s'écrit

$$0 = \int_{R_{st}} L_1(t;z')\, W(dz') + \int_o^s \varphi_1(u,t)\, du$$

La partie 1-martingale, continue en s, est aussi à variation bornée. Donc pour tout t

$$L_1(t;z') = 0 \qquad z' \times \omega \text{ -p.s.}$$

D'autre part, $\{L_1(t;z'), \mathcal{F}_t^2\}$ est une semi-martingale à partie martingale continue; on en déduit donc que θ, Υ et β_1 sont nuls.

Le même raisonnement fait sur la 2-représentation conclut à $\beta_2 = 0$. Il s'en suit que φ est également nul.

<u>2° méthode</u>: Anticipons sur les résultats relatifs aux variations et i-variations quadratiques que nous développerons au chapitre IV (§ 2-1).

$$0 = \langle X \rangle_{11} = \int_{R_{11}} \theta^2(z)\, dz + \int_{R_{11}^2} \Upsilon^2\, (z,z')\, dz\, dz'$$

θ et Υ sont donc nuls. Par ailleurs, pour tout t compris entre 0 et 1

$$0 = \langle X \rangle_{1t}^{(1)} = \int_{R_{1t}} \{\int_o^t \beta_1(v,z')dv\}^2\, dz'$$

donc

$$\beta_1(t;z') = 0 \qquad t\times z'\times \omega \text{-p.s.}$$

On montre le résultat analogue $\beta_2=0$ en utilisant la 2-variation quadratique. Et l'on conclut que φ est également nul. ■

<u>1-représentation de la s.m.r. X</u>

On notera :

$$M^1 = M + P^1 \quad \text{et} \quad B^1 = P^2 + B$$

M^1 est une 1-martingale (en abrégé : 1-m), B^1 étant un processus à 1-variation bornée (1-v.b.)

$$X = M^1 + B^1$$

est la 1-décomposition de la s.m.r.

D'après les propriétés de Fubini, de l'intégrale stochastique double, de l'intégrale mixte (cf. chapitre II, §2 et §3), on sait définir la 1-dérivée L_1 de M^1, et la 1-dérivée (au sens ordinaire) de B^1

$$\begin{cases} M^1_{st} = \displaystyle\int_{R_{st}} L_1(t;z)\, W(dz) \\ L_1(t;z) = \Theta(z) + \displaystyle\int_{R_{1t}} \Psi(z',z)W(dz') + \int_0^t \beta_1(v;z)dv \end{cases}$$

(si $z = (x,y)$, l'intégrale sur R_{1t} est en fait prise sur R_{xt})

$$\begin{cases} B^1_{st} = \int_0^s \varphi_1(u,t)du \\ \varphi_1(u,t) = \int_{R_{1t}} \beta_2(z';u)W(dz') + \int_0^t \varphi(u,v)dv \end{cases}$$

Symétriquement, on a :

<u>2-représentation de la s.m.r. X</u>

$$X = M^2 + B^2$$

avec
$$M^2 = M + P^2$$

$$B^2 = P^1 + B$$

et les représentations

$$\begin{cases} M^2_{st} = \int_{R_{st}} L_2(z;s)\ W(dz) \\ L_2(z;s) = \Theta(z) + \int_{R_{s1}} \Psi(z,z')\ W(dz') + \int_0^s \beta_2(z;u)du \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^2_{st} = \int_0^t \varphi_2(s,v)dv \\ \varphi_2(s,v) = \int_{R_{s1}} \beta_1(v;z)\ W(dz) + \int_0^s \varphi(u,v)du\ . \end{cases}$$

Quand on fera intervenir plusieurs s.m.r. X, Y, ... , on distinguera les différentes parties de la décomposition et les fonctions intervenant dans leurs représentations par l'adjonction de X, Y, ... en indice, par exemple M_X, L_{1Y}, φ_X, ...

Norme $||X||_p$ et semi-norme $||f||_{X^p}$, $||f||_{i,X^p}$, $i = 1,2$.

On dira que la s.m.r. est dans L^p , $p \geqslant 2$ si les fonctions Θ, Ψ, β_1, β_2, φ associées à sa représentation vérifient les conditions de mesurabilité et de support déjà définies, les conditions L^2 étant remplacées par les conditions L^p correspondant à chaque type ; on notera :

$$||X||_p^p = ||\Theta||_p^p + ||\Psi||_p^p + ||\beta_1||_p^p + ||\beta_2||_p^p + ||\varphi||_p^p$$

Si f est un processus mesurable adapté, on définira la semi-norme $||f||_{X^p}$ par :

$$\begin{aligned} ||f||_{X^p}^p = & E \int_{R_{11}} |f|(z) \left[|\theta|^p(z) + |\varphi|^p(z)\right]dz \\ & + E \int_{[0,1]^3} |f|(x,y)\ |\beta_1|^p(y\ ;\ x,v)dy\ dx\ dv \\ & + E \int_{[0,1]^3} |f|(x,y)\ |\beta_2|^p(u,y\ ;\ x)du\ dy\ dx \\ & + E \int_{R_{11}^2} |f|(x,y)\ |\Psi|^p\ (u,y\ ;\ x,v)du\ dy\ dx\ dv \end{aligned}$$

(de sorte que $||X||_p = ||1||_{X^p}$)

Nous introduirons enfin deux autres semi-normes :

$$\begin{aligned} ||f||_{1,X^p}^p = E \int_{R_{11}} |f|(z) & \left[|\theta|^p(z) + |\varphi|^p(z) + \int_0^1 |\beta_1|^p(v;z)dv\right. \\ & \left. + \int_0^1 |\beta_2|^p\ (z;u)du + \int_{R_{11}} |\Psi|^p(z',z)dz'\right] dz \end{aligned}$$

et la semi-norme $||f||_{2,X^p}$ définie de façon symétrique.

5-1-2 - Les divers processus croissants associés à une s.m.r. X

Le processus $\langle X\rangle$

$$\langle X\rangle_{st} = \langle M_X\rangle_{st} = \int_{R_{st}} \Theta^2(z)dz + \int_{R^2_{st}} \Psi^2(z,z')dz\, dz'$$

est un processus croissant, mesurable, adapté continu vérifiant :

- $E\langle M\rangle_{11} \leqslant ||X||_2$
- $M^2_{st} - \langle M\rangle_{st}$ est une martingale faible
- $$\langle X\rangle_{st} = \lim_{u\cdot L^1} \sum_{\pi} X(\Delta_{ij})^2_{st} \qquad [10]$$
$$= \lim_{u\cdot L^1} \sum_{\pi} E(X(\Delta_{ij})^2_{st} \,|\mathcal{F}_{ij}) \qquad [10]$$

où les limites sont uniformes en $(s,t) \in R_{11}$, dans L^1 lorsque le pas de la partition $\pi = (\Delta_{ij})$, $\Delta_{ij} =](s_i,t_j), (s_{i+1}, t_{j+1})]$ tend vers 0, $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{s_i,t_j}$;

$\langle X\rangle_{st}$ est un processus à v.b. :

$$\langle X\rangle_{st} = \int_{R_{st}} \{\Theta^2(x,y) + \int_{R_{xy}} \Psi^2(u,y;x,v)du\, dv\}dx\, dy$$

Le processus croissant $\langle X\rangle^{(1)}$

En général, pour une 1-martingale, on ne sait définir le processus $\langle X\rangle^{(1)}_{st}$ que t par t. Cependant, si X est une 1-martingale à a.o.1, il existe une version continue à droite en (s,t) de $\langle X\rangle^{(1)}_{st}$ que l'on note encore $\langle X\rangle^{(1)}_{st}$.

Dans le cas où X est une s.m.r., on va définir une version de ce processus qui soit également une s.m.r. .

Théorème 5-1

Si X est une s.m.r. de L^4 , on notera $<X>_{st}^{(1)}$ ou $<M_X^1>_{st}^{(1)}$ la s.m.r. (continue) représentée par :

$$<X>_{st}^{(1)} = <X>_{st} + 2 \int_{R_{st}^2} L_1(v;z)\ \Psi(u,v\ ;\ z)\ W(du,dv)dz$$

$$+ 2 \int_{[o,t]\times R_{st}} L_1\ \beta_1(v\ ;\ z)\ dv\ dz$$

Alors $(M_X^1)^2 - <X>^{(1)}$ est une 1-martingale .

Si X et Y sont deux s.m.r. de L^4 ,

$$<X,Y>_{st}^{(1)} = <X,Y>_{st} + \int_{R_{st}^2} \left[L_{1X}(v;z)\ \Psi_Y(u,v\ ;\ z) + L_{1Y}(v;z)\Psi_X(u,v;z)\right] W(du,dv)dz$$

$$+ \int_{[o,t]\times R_{st}} (L_{1X}\beta_{1Y} + L_{1Y}\beta_{1X})(v;z)dv\ dz$$

est telle que $M_X^1 M_Y^1 - <X,Y>_{st}^{(1)}$ soit une 1-martingale .

Démonstration

$A_{st}^1 = \int_{R_{st}^2} L_1^2(t;z)dz$ est un processus qui vérifie bien : $M - A^1$ est une 1-martingale (cf. [10] , théorème 1). Reste à obtenir la représentation de A^1.

$\{L_1(t;z),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ est, à z fixé une semi-martingale représentable à un paramètre. La représentation en est donnée au §5-1-1. Puisque X est dans L^4 , on peut appliquer la formule de Ito en t à L_1^2 :

$$L_1^2(t;z) = \Theta^2(z) + 2\int_0^t L_1(y;z)L_1(dy;z) + \langle L_1(\cdot,z)\rangle_t$$

Appliquant alors le résultat du lemme 3-5 à l'intégrale en $L_1(dy;z)$, on obtient :

$$\int_0^t L_1(y;z)L_1(dy;z) = \int_{R_{1t}} L_1(y;z)\,\Psi(x,y;z)\,W(dx,dy) + \int_0^t L_1\cdot\beta_1(y;z)dy$$

et on a d'autre part :

$$\langle L_1(\cdot,z)\rangle_t = \int_{R_{1t}} \Psi^2(z',z)\,dz'$$

$L_1\Psi$ et $L_1\beta_1$ étant dans les bons espaces $\mathcal{L}^2$ correspondant aux intégrations en $W(dz)dz'$, $dv\,dz'$, on en déduit le résultat . ■

5-1-3 - Semi martingales non nulles sur les axes

Si $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_z\}$ est la tribu brownienne, les tribus $\mathcal{F}_o$, $\mathcal{F}_{so}$ et $\mathcal{F}_{ot}$ sont triviales. Tout ce qui a trait aux notions de martingales relatives à $\mathcal{F}$ ne fait pas intervenir le passé (au sens large) $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_+^2$ de $\mathbb{R}_+^2$.

Continuant à étudier des processus sur $\mathbb{R}_+^2$, cette situation se généralise naturellement de la façon suivante : soient $\{\mathcal{H}_s , s \geq o\}$, $\{\mathcal{V}_t , t \geq o\}$ deux familles de tribus vérifiant les propriétés suivantes :

($\mathcal{C}$-1) $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{V}_t$ sont croissantes, complètes

$(\mathcal{C}\text{-}2)$ $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{V}_t$ sont continues à droite

$(\mathcal{C}\text{-}3)$ $\mathcal{H}_o = \mathcal{V}_o$

$(\mathcal{C}\text{-}4)$ $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{V}_t$ sont orthogonales conditionnellement à $\mathcal{H}_o$

(L'espace de base est un certain $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ sur lequel est défini W, $\mathbb{F} = \{\mathbb{F}_z\}$).

Soit alors la famille : $\widetilde{\mathbb{F}} = \{\widetilde{\mathbb{F}}_{st}\}$ où

$$\widetilde{\mathbb{F}}_{st} = \mathbb{F}_{st} \vee \mathcal{H}_s \vee \mathcal{V}_t$$

$\widetilde{\mathbb{F}}$ vérifie les conditions (F-1 - F4) habituelles et on peut interpréter ainsi $\mathcal{H}_s$ et $\mathcal{V}_t$:

$\mathcal{H}_o = \mathcal{V}_o$ résume la passé (strict) de l'origine

$\mathcal{H}_s$ résume le passé de (s,o)

$\mathcal{V}_t$ résume le passé de (o,t)

Donnons deux exemples d'une telle situation :

<u>Exemple 1</u> : Soit $z_o \in \mathbb{R}^2$, $z_o < (0,0)$ (éventuellement $(-\infty, -\infty)$), W le bruit blanc sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\mathcal{H}_s = \overline{\sigma}\,\{W(\Delta)\ ,\ \ \Delta =]z,z']\ ,\ z_o \leqslant z \leqslant z' \leqslant (s,o)\}$$

$$\mathcal{V}_t = \overline{\sigma}\,\{W(\Delta)\ ,\ \ \Delta =]z,z']\ ,\ z_o \leqslant z \leqslant z' \leqslant (o,t)\}$$

($\overline{\sigma}$ pour complétée)

et $\mathbb{F}_z = \overline{\sigma}\{W_\xi = W(]0,\xi])\ ,\ 0 \leqslant \xi \leqslant z\}\ ,\ \ z \in \mathbb{R}^2_+$

alors :

$$\tilde{\mathcal{F}}_z = \sigma\{W(\Delta),\ \Delta =]z',z''] \ ,\ z_o \leq z' \leq z'' \leq z\}$$

dès que $z_o \leq z$.

Exemple 2 : Soit W le bruit blanc sur $\mathbb{R}^2_+$, b_1 , b_2 deux browniens à un indice, indépendant entre eux et indépendants de W , soient :

$$\mathcal{H}_s = \bar{\sigma}\{b_1(u) \ ,\ 0 \leq u \leq s\} \vee \mathcal{P}_o$$

$$\mathcal{V}_t = \bar{\sigma}\{b_2(v) \ ,\ 0 \leq v \leq t\} \vee \mathcal{P}_o$$

où $\mathcal{P}_o$ est une tribu orthogonale à b_1 , b_2 , W . Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ vérifie encore les propriétés (F).

Ces deux exemples se réduisent l'un à l'autre grâce à la proposition .

Proposition 5-1

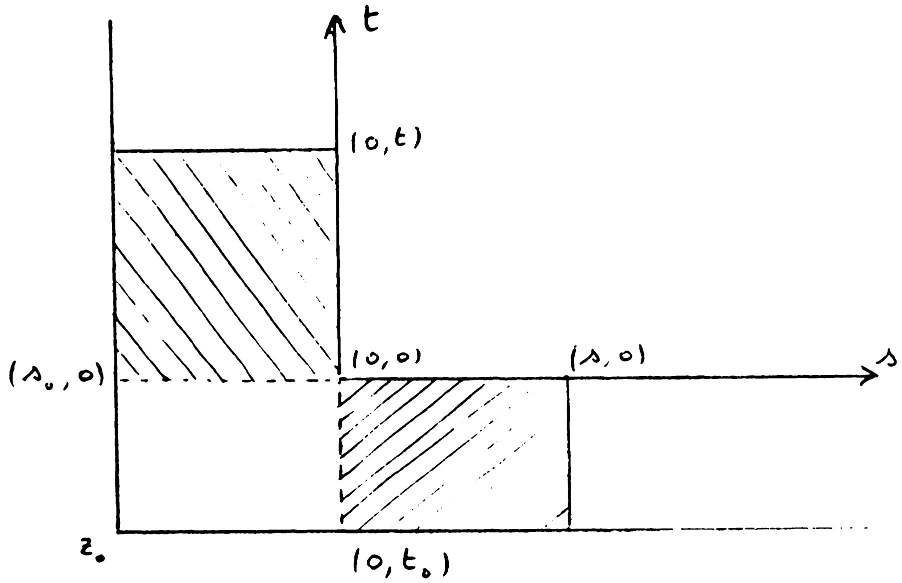
Soit $\{W_z \ ,\ z \in \mathbb{R}^2_+\}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, b_1, b_2, $\mathcal{P}_o$ vérifiant les propriétés de l'exemple 2 ci-dessus. Alors, pour tout $z_o < (0,0)$, il existe un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ et un brownien $\tilde{W} = \{\tilde{W}_z \ ,\ z > z_o\}$ sur ce nouvel espace tel que :

1°) $\mathcal{P}_o = \bar{\sigma}\{\tilde{W}(\Delta) \ ,\ \Delta \subset]z_o, (0,0)]\}$

2°) $b_1(s) = \tilde{W}(](o,t_o) \ ,\ (s,o)])$, $s \geq 0$

3°) $b_2(t) = \tilde{W}(](s_o,o) \ ,\ (o,t)])$, $t \geq 0$

4°) $\tilde{W}(\Delta) = W(\Delta)$ si $\Delta \subset \mathbb{R}^2_+$



Supposons alors que nous soyons dans la situation de l'exemple 2, on a la définition :

Définition 3 : Semi-martingale non nulle sur les axes

X est une semi-martingale représentable non nulle sur les axes si X se décompose en :

$$X_{st} = X_{oo} + X_s^{(1)} + X_t^{(2)} + Y_{st}$$

où :

1°) X_{oo} est une variable aléatoire $\tilde{\mathfrak{F}}_{oo}$-mesurable de L^2

2°) $\{X_s^{(1)}, \tilde{\mathfrak{F}}_{s,o}, s \geq o\}$ est une semi-martingale à 1-paramètre admettant la représentation :

$$X_s^{(1)} = \int_o^s \Theta_1(u) b_1(du) + \int_o^s \rho_1(u) du = m_1(s) + b_1(s)$$

où Θ_1, ρ_1 sont mesurables, adaptées, de $\mathcal{L}^2_{b_1}([0,1])$.

3°) Symétriquement, $X_t^{(2)}$ est une semi-martingale représentable

4°) Y est une s.m.r. (cf. déf. 2).

La proposition suivante établi qu'une telle semi-martingale n'est autre que la trace sur $\mathbb{R}_+^2$ d'une semi-martingale représentable (au sens de la définition 2. définie sur $[z_o , (+\infty,+\infty)[$ avec $z_o < (0,0)$.

Proposition 5-2

Si X est une s.m.r. non nulle sur les axes, alors, pour tout $z_o < (0,0)$, il existe $\tilde{W}$, brownien défini sur $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}} , \tilde{P})$, tel que X soit la restriction à $\mathbb{R}_+^2$ d'une s.m.r. $\tilde{X}$ relative à $\tilde{W}$ définie sur $[z_o, (+\infty,+\infty)[$.

Démonstration

a) D'après la proposition 5-1, et le théorème 3-1 de représentation d'une variable $\tilde{\mathcal{F}}_{oo}$-mesurable, on a :

$$X_{oo} \in L^2(\tilde{\mathcal{F}}_{oo}) \quad \text{et donc}$$

$$X_{oo} = \int_{[z_o,o]} \tilde{\Theta}(\xi)\, \tilde{W}(d\xi) + \int_{[z_o,o]^2} \tilde{\Psi}(\xi,\xi')\, \tilde{W}(d\xi)\, \tilde{W}(d\xi')$$

où $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Psi}$ sont dans les bons espaces associés à $\tilde{W}$ et à $[z_o,o]$

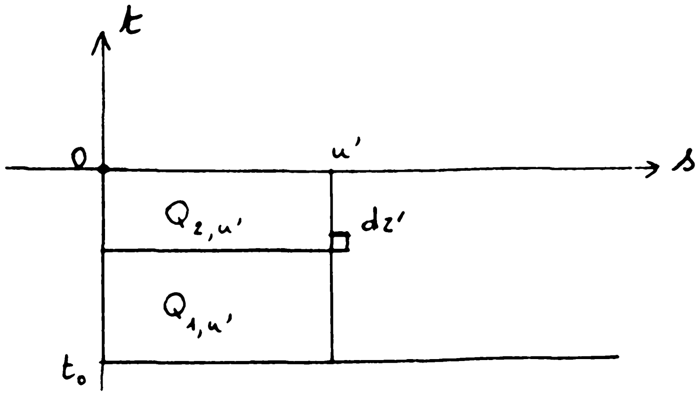
b) Θ_1 étant, mesurable, adaptée vérifie

$$E\, \Theta_1^2(u') < \infty \ , \quad u' - \text{p.s.}$$

Donc, d'après le théorème 3-2 (2-représentation d'une variable de $L^2(\tilde{\mathcal{F}}_{u',o})$), et utilisant également le lemme 3-4 (dépendance mesurable en u de base de $L^2(\tilde{\mathcal{F}}_{u'o})$) , on a :

$$\Theta_1(u') = \int_{Q_u} g_1(z;u')\tilde{W}(dz) \ , \quad Q_u = [(o,t_o), (u,o)]$$

où g_1 est mesurable , $\mathcal{F}_z^2$-adaptée et dans $\mathcal{L}^2_{2,W}$.



Posant alors pour $Q_{1,u'} = [(0,t_o), z']$

$$\tilde{\Theta}(z') = \int_{Q_{1,u'}} g_1(z;u')\, \tilde{W}(dz) \quad \text{si} \quad z'=(u',v') \in \mathbb{R}_+ \times [t_o,0]$$

$$\tilde{\Psi}(z,z') = g_1(z;u') \quad \text{si} \quad z' \curlywedge z \ , \quad z' \in \mathbb{R}_+ \times [t_o,0]$$

on obtient pour $m_1(s)$ la représentation :

$$m_1(s) = \int_{Q_s} \tilde{\Theta}(z')\, W(dz') + \int_{Q_s^2} \tilde{\Psi}(z,z')\, \tilde{W}(dz)\, \tilde{W}(dz')$$

où $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Psi}$ sont dans les espaces $\mathcal{L}^2$ associés au rectangle Q_1 et à $\tilde{W}$.

c) ρ_1 vérifiant les m^emes propriétés que Θ_1 , on obtient pour $b_1(s)$ la représentation

$$b_1(s) = \int_{Q_s} \tilde{\varphi}(z)dz + \int_{Q_s \times [t_o,o]} \tilde{\beta}_2(z;v')\, W(dz)dv'$$

(si $q_1(z;u')$ est la fonction qui donne la 2-représentation de ρ_1 , prendre :

$$\tilde{\varphi}(z) = \int_{Q_{1,u'}} q_1(z;u')\, \tilde{W}(dz') \quad \text{si} \quad z' = (u',v') \in \mathbb{R}_+ \times [t_o,0]$$

$$\tilde{\beta}_2(z;u') = q_1(z;u'))$$

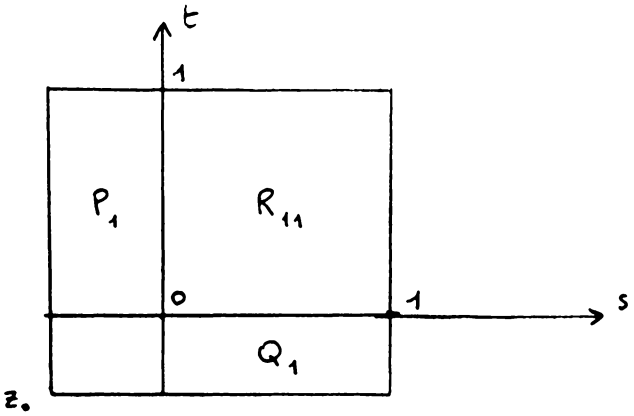
d) On obtient pour $X_t^{(2)}$ une représentation analogue.

e) Enfin, par hypothèse même Y admet une telle représentation sur $\mathbb{R}_+^2$, relativement à W , donc, d'après la proposition 5-1, relativement à $\tilde{W}$.
Pour conclure, il suffit alors de remarquer que :

$$\tilde{X} = \tilde{\Theta}\cdot\tilde{W} + \tilde{\Psi}\cdot\tilde{W}\tilde{W} + \tilde{\beta}_1\cdot V\tilde{W} + \tilde{\beta}_2\, \tilde{W}U + \tilde{\varphi}\cdot UV$$

(relativement à la nouvelle origine z_o) , avec

∘ $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Psi}$ définis séparemment sur les quatre zones , $(z_o,0]$, Q_1, P_1, R_{11} (avec $\tilde{\theta} = \theta$ et = sur R_{11})



$P_1 = \,](s_o,0),\ (0,1)]$

$Q_1 = \,](0,t_o),\ (1,0)]$

∘ $\tilde{\Psi}(z;z')$, $\tilde{\beta}_1(v;z')$ et $\tilde{\beta}_2(z;u')$ ont été définis si z et z' appartiennent tous deux à l'une de ces quatre zones. On les prendra nuls si z et z' ne sont pas dans la même zone.

Par construction même, on a $X = \tilde{X}$ sur $\mathbb{R}_+^2$.

<u>Remarque</u>

Le fait même que $\tilde{\Psi}$, β_1 et β_2 aient à être pris nuls sur certaines zones montre que tout passé $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}_+^2$ ne peut pas être résumé par une s.m.r. à un paramètre sur chaque axe.

Si par exemple $b_1(s)$ et $b_2(t)$ sont deux browniens unidimensionnels sur $\mathbb{R}_+$, $X(s,t) = b_1(s)b_2(t)$ se représente comme s.m.r. à partir d'axes issus de $z_o < (0,0)$ suivant $X = \tilde{\Psi}\cdot\tilde{W}\,\tilde{W}$ où $\tilde{\Psi}$ charge les (z,z') tels que $z \curlywedge 0 \curlywedge z'$.

5-1-4 - Intégrale simple par rapport à une s.m.r.

Soit X une s.m.r. (de L^2 , nulle sur les axes) :

$$X = M + P^1 + P^2 + B$$

Définissons alors l'espace $\mathcal{L}^2_X(R_{11})$ comme étant l'espace des processus $f : \Omega \times \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, mesurables adaptés et tels que :

$$||f^2||_{X^2} < \infty$$

(la norme étant définie relativement à R_{11})

On sait définir :

- $\int_{R_z} f(\xi)M(d\xi)$, puisque

$$E\int_{R_{11}} f^2(\xi)\ \langle M\rangle(d\xi) = ||f^2||_{M^2} \leqslant ||f^2||_{X^2}$$

- $\int_{R_z} f(\xi)P^1(d\xi)$, puisque d'une part P^1

est une 1-martingale propre représentable et que :

$$E\int_{R_{11}} f^2(x,y)\beta_1^2(y;x,v)dx\ dv\ dy < \infty$$

(pour la définition d'une telle intégrale, cf. chapitre II, §3).

Notons au passage que la définition d'une telle intégrale est possible parce que l'on dispose d'une inégalité maximale pour P^1 , donc également pour $\int_{R_z} f(\xi)P^1(d\xi)$ lorsque f est simple.

- on définit symétriquement $\int_{R_z} f(\xi)P^2(d\xi)$,
- l'intégrale par rapport à B est définie comme d'ordinaire.

Définition 4

Si X est une s.m.r. et f un processus de $\mathcal{L}^2_X(R_{11})$, on définit l'intégrale semi-stochastique de f en X par l'égalité :

$$(f\circ X)_z = \int_{R_z} f(\xi)X(d\xi) = (f\circ M + f\circ P^1 + f\circ P^2 + f\circ B)_z$$

$f\circ X$ est une s.m.r., admettant comme représentation :

$\Theta_f, \Psi_f, \beta_{1,f}, \beta_{2,f}, f$ avec :

$$\Theta_f = f\cdot\Theta , \quad \varphi_f = f\cdot\varphi$$

$$\Psi_f(u,y;x,v) = f(x,y)\ \Psi(u,y;x,v)$$

$$\beta_{1f}(y;x,v) = f(x,y)\ \beta_1(y;u,v)$$

$$\beta_{2f}(x;u,y) = f(x,y)\ \beta_2(x;u,y)$$

si $\Theta, \Psi, \beta_1, \beta_2, \varphi$ représentent X.

Remarque : Notons que les parties martingale, non fortes, 1-m.p., 2-m.p. et à v.b. de X et de $f\circ X$ se correspondent une à une.

Nous montrerons au chapitre IV que si f_n est une suite de fonction de $\mathcal{L}^2_X(R_{11})$ convergeant vers f , alors $\Sigma\, f_n(i,j)\, X(\Delta^n_{ij})_z$ tend uniformément dans L^2 vers $\int_{R_z} f(\xi)X(d\xi)$ (cf. ch. IV, § 3-1).

5-1-5 - La s.m.r. J_{ZY}

Soient Y, Z deux s.m.r. de L^4 ;

Définition 4

J_{ZY} est la s.m.r. (de L^2) admettant la représentation :

$$J_{ZY} = \Psi\cdot WW + B_1\cdot VW + B_2\cdot WU + \Phi\cdot UV$$

où

$$\Psi(u,y;x,v) = L_{1Y}(y;x,v)L_{2Z}(x;u,y) \quad \text{(est dans } \mathcal{L}^2_{WW})$$

$$B_1(y;x,v) = L_{1Y}(y;x,v)\,\varphi_{2Z}(x,y) \quad \text{(dans } \mathcal{L}^2_{t,W})$$

$$B_2(u,y;x) = \varphi_{1Y}(x,y)\, L_{2Z}(u,y;x) \quad \text{(dans } \mathcal{L}^2_{W,s})$$

$$\Phi(x,y) = \varphi_{1Y}(x,y)\ \varphi_{2Z}(x,y) \quad \text{(dans } \mathcal{L}^2_W)$$

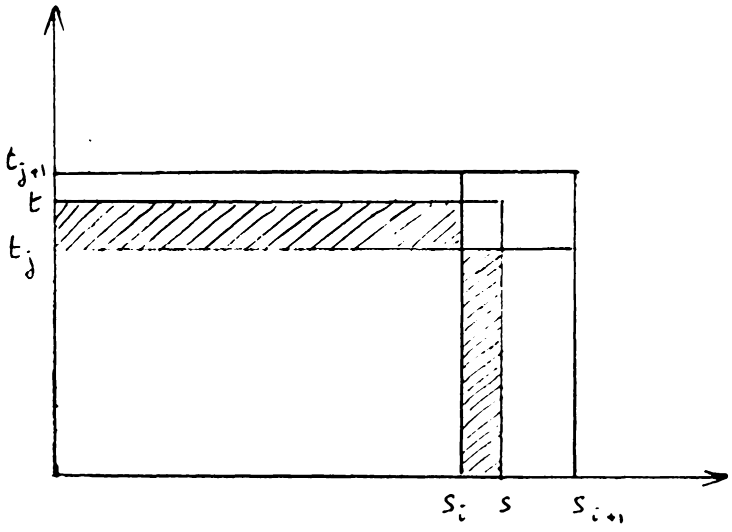
(Si $Y,Z \in \mathfrak{M}^4_S$, J_{ZY} est une intégrale double ordinaire , cf. [5])

Cette définition est justifiée par la proposition suivante :

Soit π une partition de R_{11}, $\Delta = (\Delta_{ij})$ et

$$(\Delta_i,j)_s = (\Delta_i \cap [0,s]) \times [0,t_j]$$

$$(i,\Delta_j)_t = [0,s_i] \times (\Delta_j \cap [0,t])$$



Proposition

La suite $J_\pi(s,t)$:

$$J_\pi(s,t) = \sum_{ij} Y(\Delta_i,j)_s \; Z(i,\Delta_j)_t$$

tend, uniformément, dans L^2 vers $J_{ZY}(s,t)$ lorsque le pas $|\pi|$ de la partition tend vers 0 .

Nous reviendrons au chapitre IV, § 3 sur cette propriété que nous démontrerons sous une forme plus générale (théorème 3-2-2).

Proposition 5-2

Pour tout entier positif p , on a :

$$||f||_{J^p_{X,Y}} < K_p(||f||_{X^{2p}} + ||f||_{Y^{2p}})$$

où K_p est une constante ne dépendant que de p .

Démonstration

Traitons par exemple la partie de la norme correspondant à la partie martingale de J_{XY}

$$||f||_{J^p_{M^2_X,M^1_Y}} = E\int_{R^2_{11}} |f|(x,y)L^p_{1Y}(y;x,v)L^p_{2X}(x;u,y)dx\,dv\,du\,dy$$

Utilisant $2ab \leqslant a^2 + b^2$, on se ramène à une intégrale en L_{1Y}^{2p} .
L_{1Y} est la somme de trois termes correspondant à M_Y^* , M_Y^{**} , P_Y^1 et donc on se ramène à l'étude de chacun d'eux utilisant :

$$(a + b + c)^{2p} \leqslant 3^{2p-1}(a^{2p} + b^{2p} + c^{2q})$$

Il suffit alors d'utiliser l'inégalité de majoration de la puissance 2p d'une intégrale stochastique (§ 4) pour conclure. ■

En général, il n'y a pas de majoration dans l'autre direction (J_{ZY} peut être nul sans que Z , Y le soient) .

5-2 - <u>Inégalités maximales pour une s.m.r.</u>

Si X est une s.m.r., nous allons étudier deux types d'inégalités maximales :

- l'une majorera $E \sup_z |X(\Delta)_z|^p$, $p > 1$ si Δ est un rectangle de R_{11} . Si $\Delta = R_{11}$, on obtient une inégalité maximale sur X .

- l'autre pour $\sum_\pi X(\Delta)_{st}^p$ si π est une partition fixée de R_{11}

On spécifiera ces inégalités dans le cas $p = 2$.
Ces inégalités seront d'une grande importance pour l'étude des diverses variations-produit d'une s.m.r. (chapitre IV).

Soient $z_o = (s_o,t_o) < z_1 = (s_1,t_1)$ deux points de R_{11} ,
$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 =]z_o,z_1]$ et

$$\mathcal{O} = [0,s_1] \times \Delta_2 \times \Delta_1 \times [0,t_1]$$

$$\mathcal{O}_1 = \Delta_2 \times \Delta_2 \times [0,t_1]$$

$$\mathcal{O}_2 = [0,s_1] \times \Delta_2 \times \Delta_1$$

les trois grandes ombres de Δ dans R_{11}^2 , $[0,1] \times R_{11}$, $R_{11} \times [0,1]$.
On a alors la représentation de $X(\Delta)$.

Lemme 5-1

Si $z \in \Delta$, $Y_z = X(\Delta)_z$ est une s.m.r. de facteurs de représentation

$$\Theta_Y(\xi) = 1_{\{\xi\varepsilon\Delta\}}\, \Theta_X(\xi) \; ; \quad \varphi_Y(\xi) = 1_{\{\xi\varepsilon\Delta\}}\, \varphi_X(\xi)$$

$$\Psi_Y(\xi,\xi') = 1_{\{(\varepsilon,\varepsilon')\varepsilon\, \mathcal{O}\}}\, \Psi_X(\xi,\xi')$$

$$\beta_{1Y}(v;\xi) = 1_{\{(v;\xi)\varepsilon\, \mathcal{O}_1\}}\, \beta_{1X}(v;\xi)$$

$$\beta_{2Y}(\xi;u) = 1_{\{(\xi,u)\varepsilon\, \mathcal{O}_2\}}\, \beta_{2X}(\xi;u)$$

La démonstration de ce résultat est immédiate.

Limiter l'étude de $X(\Delta)_{st}$ aux points $(s,t) \varepsilon \Delta$ est sans importance pour la suite ; en effet :

$$\sup_{s,t} |X(\Delta)_{st}| = \sup_{(s,t)\varepsilon\Delta} |X(\Delta)_{st}|$$

Lemme 5-2

Si $P^1 = \beta_1 \cdot VW$, si n est un entier positif ,

$$E(\sup_{s,t} P^n(\Delta)_{st}{}^{2n}) \leqslant K_n\, |\Delta_1|^{n-1}\, |\Delta_2|^{2n-1} \int_{\Delta_2\times\Delta_1\times[0,t_1]} E\, \beta_1^{2n}(v;z)dv\, dz$$

avec :

$$K_n = \frac{2^{2n}\, n^{3n}}{(2n-1)^n} \quad .$$

Démonstration

D'après l'inégalité maximale pour les 1-martingales propres, on a :

$$E(\sup_{s,t} |P^1(\Delta)_{st}|^{2n}) \leqslant (\frac{2n}{2n-1})^{2n} \; E(\mathrm{Var}\; P^1(\Delta)_{s_1,\cdot})^{2n}$$

Or :

$$\mathrm{Var}\; P^1(\Delta)_{s_1,\cdot} = \int_{\Delta_2} \left| \int_{\Delta_1 \times [0,t_1]} \beta_1(v;z)\; W(dz) \right| dv$$

et donc, d'après l'inégalité de Hölder

$$(\mathrm{Var}\; P^1(\Delta_{s_1,\cdot}))^{2n} \leqslant |\Delta_2|^{2n-1} \int_{\Delta_2} \left[\int_{\Delta_1 \times |0,t_1|} \beta_1(v;z) W(dz) \right]^{2n} dv$$

Utilisant alors la majoration de la puissance 2n de l'intégrale stochastique (théorème 4-1, § 4), on en déduit le résultat du lemme . ■

On utilisera principalement par la suite les inégalités maximales pour $p = 2$, $p = 4$.

Théorème 5-3 : Inégalité maximale pour $X(\Delta)^2_{st}$

Si X est la s.m.r. :

$$X = \Theta\cdot W + \Psi\cdot WW + \beta_1\cdot VW + \beta_2\cdot WU + \varphi\cdot UV$$

alors :

$$E(\sup_{s,t} X(\Delta)^2_{st}) \leqslant 4\; E\{16 \int_\Delta \Theta^2(z)dz + 16 \int_{\sigma} \Psi^2(z,z')dz\, dz'$$

$$+ 4\; |\Delta_2| \int_{\sigma_1} \beta_1^2(v;z)dv\, dz + 4\; |\Delta_1| \int_{\sigma_2} \beta_2^2(z;u)dz\, du$$

$$+ |\Delta| \int_\Delta \varphi^2(z)dz\}$$

Démonstration

Ce théorème se déduit immédiatement

∘ de l'inégalité

$$(a + b + c + d)^2 \leqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

∘ de l'inégalité de Doob-Cairoli

$$E(\sup_{s,t} M(\Delta)^2_{st}) \leqslant 16\ E\ M(\Delta)^2 \qquad \text{(et théorème 4-1)}$$

∘ du lemme 5-2 (et de son symétrique) pour $n = 1$

∘ de la majoration :

$$E(\sup_{s,t} B(\Delta)^2_{st}) \leqslant |\Delta|\ E \int_\Delta \varphi^2(z)dz$$

On déduit alors du théorème 5-3 les deux corollaires :

Corollaire 5-1

Si X est une s.m.r.

$$E \sup_{s,t} X^2_{st} < 64||X||^2_2$$

Démonstration

Prenant $\Delta = R_{11}$, on a :

$$E \sup_{s,t} X^2_{st} < 4\{16(||\Theta||^2_2 + ||\Psi||^2_2) + 4(||\beta_1||^2_2 + ||\beta_2||^2_2) + ||\varphi||^2_2\} \ .$$

Corollaire 5-2

Si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition produit de R_{11} , avec $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta'_j$, $|\pi|_1 = \sup |\Delta_i|$, $|\pi|_2 = \sup |\Delta'_j|$, si X est une s.m.r. admettant la représentation donnée dans le théorème 5-3 , on a :

a) $E \sup_{s,t} (\sum_{i,j} X(\Delta_{ij})^2_{st}) \leqslant 4 \{16(||\theta||_2^2 + ||\psi||_2^2)$

$+ 4 |\pi|_2 ||\beta_1||_2^2 + 4 |\pi|_1 ||\beta_2||_2^2 + |\pi|_1 |\pi|_2 ||\varphi||_2^2\}$

En particulier, on a :

$$E \sup_{\pi} \sup_{s,t} (\sum_{ij} X(\Delta_{ij})^2_{st}) \leqslant 64 ||X||_2^2$$

b) Si $M^2 + B^2$ est la 2-décomposition de X , on a :

$$E \sup_{s,t} (\sum_j X(s,\Delta_j)_t^2) \leqslant 4 \{4||M^2||_2^2 + |\pi|_2 ||B^2||_2^2\}$$

En particulier, posant : $\pi = \pi_1 \times \pi_2$

$$E \sup_{\pi_2} \sup_{s,t} (\sum_j X(s,\Delta_j)_t^2) \leqslant 16 ||X||^2$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit pour a) d'appliquer le théorème 5-3 à chaque élément Δ_{ij} de π , et , pour b) à chaque élément $[0,1] \times \Delta'_j$ de π_2 .

On démontre de même le théorème suivant :

Théorème 5-4 : Inégalité maximale pour $X(\Delta)^{2n}_{st}$, $n > 0$ entier

Soit X une s.m.r. de décomposition donnée dans le théorème 5-3.

Alors, il existe C_n , constante universelle finie telle que :

$$E \sup_{s,t} X(\Delta)_{st}^{2n} \leq C_n \, |\Delta|^{n-1} \, E \{ \int_{\Delta} \Theta^{2n}(z)dz + \int_{\mathcal{C}} \Psi^{2n}(z,z')dz\,dz'$$

$$+ |\Delta_2|^n \int_{\mathcal{C}_1} \beta_1^{2n}(v;z)dv\,dz + |\Delta_1|^n \int_{\mathcal{C}_2} \beta_2^{2n}(z;u)dz\,du$$

$$+ |\Delta|^n \int_{\Delta} \varphi^{2n}(z)dz \}$$

On en déduit les deux majorations :

<u>Corollaire 5-3</u>

Si X est une s.m.r.

$$E \sup_{s,t} (X_{st}^{2n}) \leq C_n \, ||X||_{2n}^{2n}$$

<u>Corollaire 5-4</u>

Si $\pi = (\Delta_{ij})$ est une partition de R_{11}, alors, avec les notations du corollaire 5-2 :

a) $$E \sup_{s,t} (\sum_{i,j} X(\Delta_{ij})_{st}^{2n}) \leq C_n \, |\pi|_1^{n-1} \, |\pi|_2^{n-1} \, \{ ||M||_{2n}^{2n}$$

$$+ |\pi|_2^n \, ||P^1||_{2n}^{2n} + |\pi|_1^n \, ||P^2||_n^{2n} + |\pi|_1^n \, |\pi|_2^n \, ||B||_{2n}^{2n} \}$$

En particulier,

$$E \sup_{\pi} \sup_{s,t} (\sum_{ij} X(\Delta_{ij})_{st}^{2n}) \leq C_n \, ||X||_{2n}^{2n}$$

b) $$E \sup_{s,t} \sum_j X(s,\Delta_j)_t^{2n} \leq C_n \, |\pi|_2^{n-1} \, \{ ||M^2||_{2n}^{2n} + |\pi|_2^n \, ||B^2||_{2n}^{2n} \}$$

5-3 - Fonctions $\mathcal{L}_1$ et Φ_1

Théorème 5-5

Si X est une s.m.r. de L^{2p} (p entier positif) si $L_1(t;z)$ et $\varphi_1(u,t)$ sont les intégrandes de sa 1-représentation, alors :

a) $\mathcal{L}_1(z) = \sup_t |L_1(t;z)|$ est dans L^{2p}

b) $\Phi_1(u) = \sup_t |\varphi_1(u,t)|$ est dans L^{2p}

Démonstration

a) $L_1(t;z)$ est une semi-martingale en t dont on a la représentation :

$$L_1(t;z) = \Theta(z) + \int_{R_{1t}} \Psi(z',z)W(dz') + \int_{[0,t]} \beta_1(v;z)dv$$

De l'inégalité $(a+b+c)^{2p} \leqslant 3^{2p-1}(a^{2p}+b^{2p}+c^{2p})$, on déduit :

$$\sup_t L_1(t;z)^{2p} \leqslant 3^{2p-1}\left[\Theta(z)^{2p} + \sup_t \left\{\int_{R_{1t}} \Psi(z',z)W(dz')\right\}^{2p} + \sup_t \left\{\int_{[0,t]} \beta_1(v;z)dv\right\}^{2p}\right]$$

Prenant l'espérance des deux membres et appliquant l'inégalité de Doob au terme en Ψ et l'inégalité de Hölder au terme en β_1

$$E\,\mathcal{L}_1(z)^{2p} \leqslant 3^{2p-1}\left[E\,\Theta(z)^{2p} + c_p\,E\left\{\int_{R_{11}} \Psi(z',z)W(dz')\right\}^{2p} + c'_p\,E\int_0^1 \beta_1(v;z)^{2p}dv\right]$$

$$\leqslant K_p\,E\left[\Theta(z)^{2p} + \int_{R_{11}} \Psi(z',z)^{2p}\,dz' + \int_{[0,1]} \beta_1(v;z)^{2p}\,dv\right]$$

par le théorème 4-1.

Il suffit d'intégrer en z sur R_{11} pour conclure

$$E \int_{R_{11}} \mathcal{L}_1^{2p}(z)dz \leqslant K_p \,||M^1||_{2p}^{2p}$$

b) De même

$$\varphi_1(u,t) = \int_{R_{1t}} \beta_2(z';u)\, W(dz') + \int_{[0,t]} \varphi(u,v)dv$$

$$\varphi_1^{2p}(u,t) \leqslant 2^{2p-1} \left[\{\int_{R_{1t}} \beta_2(z';u)W(dz')\}^{2p} + \{\int_{[0,t]} \varphi(u,v)dv\}^{2p}\right]$$

L'inégalité de Doob pour le terme en β_2 , l'inégalité de Hölder pour le terme en φ entraînent :

$$E\, \Phi_1(u)^{2p} \leqslant 2^{p-1}\, E \left[c_p \{\int_{R_{11}} \beta_2(z';u)W(dz')\}^{2p} + \int_{[0,1]} \varphi^{2p}(u,v)dv\right]$$

Appliquant à nouveau le théorème 4-1, puis intégrant en u de 0 à 1 ,

$$E \int_{[0,1]} \Phi_1^{2p}(u)du \leqslant K'_p \,||B^1||_{2p}^{2p} \; .$$

<u>Théorème 5-6</u>

Pour tout entier p , il existe une constante K_p telle que, pour tout processus g mesurable adapté

a) $$\int_{R_{11}} |g|(x,y)\, \mathcal{L}_1^{2p}(x,y)dx\, dy \leqslant K_p \,||g||_{1,(M^1)^{2p}}$$

b) $$\int_{R_{11}} |g|(x,y)\, \Phi_1^{2p}(x,y)dx\, dy \leqslant K_p \,||g||_{1,(B^1)^{2p}}$$

Démonstration

$y_t = |g|^{1/2p}(x,y)\ L_1(t;x,y)$ est une semi-martingale en $t \geqslant y$,

dont on a une représentation à partir de celle de L_1

$$\sup_t (y_t^{2p}) = |g|(x,y) \times \sup_{y\leqslant t\leqslant 1} L_1(t;x,y)^{2p}$$

Donc

$$E\left[\ |g|(x,y)\,\mathcal{L}_1^{2p}(x,y)\right] = E \sup_t (y_t^{2p})$$

$$\leqslant 3^{2p-1}\ E\left[\ |g|(x,y)\ E(U\ |\mathcal{F}_y^2)\right]$$

où (si $z = (x,y)$) :

$$U = \theta(z)^{2p} + \sup_t\{\int_{[(o,y),(x,t)]} \psi(z',z)W(dz')\}^{2p} + \sup_t\{\int_{[y,t]} \beta_1(v;z)dv\}^{2p}$$

et, comme précédemment,

$$E(U\ |\mathcal{F}_y^2) \leqslant k\ E\left[\theta(z)^{2p} + \int_{[(o,y),(1,1)]} \psi^{2p}(z',z)dz' + \int_{[y,1]} \beta_1^{2p}(v;z)dv\,|\mathcal{F}_y^2\right]$$

Il reste à intégrer

$$E\int_{R_{11}} |g|(z)\mathcal{L}_1^{2p}(z)dz \leqslant K\ E\int_{R_{11}} |g|(z)\left[\theta(z)^{2p} + \int_{R_{11}} \psi^{2p}(z',z)dz' + \int_{[0,1]} \beta_1^{2p}(v;z)dv\right]$$

$$= K\ ||g||_{1,(M^1)^{2p}}$$

Ce qui prouve le point a du théorème 5.6 On procède de même pour le point b .

On a les résultats analogues relatifs à :

$$\mathscr{L}_2(z) = \sup_s |L_2(z\ ;\ s)|$$

$$\Phi_2(v) = \sup_s |\varphi_2(s\ ;\ v)|$$

5-4 - Continuité uniforme en moyenne quadratique d'une s.m.r.

Théorème 5-7

Si X est une s.m.r. (de L^2) X est uniformément continue en moyenne quadratique sur R_{11} :

$$E\{\sup_{\substack{|z-z'|<h \\ z,z'\in R_{11}}} |X(z') - X(z)|^2\} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Démonstration

1°) si $z' = (s',t')$ et $z = (s,t)$, l'inégalité

$$[X(z')-X(z)]^2 \leqslant 2\{[X(z') - X(s',t)]^2+[X(s',t)-X(z)]^2\}$$

permet de ramener la démonstration au cas où z et z' sont, par exemple, de même ordonnée.

Soient alors M^1 et B^1 les parties 1-m. et à 1-v.b. de X. L'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ permet de démontrer le résultat séparemment sur M^1 et B^1

2°) Partie M^1 : Soit L_1 la 1-dérivée de M^1 . A t fixé, pour tout s_o , $Y(s) = M^1(s,t) - M^1(s_o,t)$ est une martingale pour $s \geqslant s_o$. L'inégalité de Doob permet d'écrire si $s_1 \geqslant s_o$

$$E\{\sup_{s_o\leq s\leq s_1} Y(s)^2\} \leq 4\,E\,\{Y(s_1)^2\}$$

$$\leq 4\int_{[s_o,s_1]\times[0,t]} E\,L_1^2(t;z)\,dz$$

$$\leq 4\int_{[s_o,s_1]\times[0,1]} E\,\mathcal{L}_1^2(z)\,dz$$

où $\mathcal{L}_1(z) = \sup_t |L_1(t;z)|$. L_1 étant dans L^2, il en est de même de $\mathcal{L}_1$ (théorème 5-5).

Quelque soit ε, il existe une suite croissante $s_o = 0, s_1, \ldots, s_n = 1$ telle que :

$$\forall k \qquad \int_{[s_k,s_{k+1}]\times[0,1]} E\,\mathcal{L}_1^2(z)\,dz \leq \varepsilon$$

Posons $h = \sup(s_{k+1} - s_k)$. Supposons $|s'-s| \leq h$. 2 cas sont possibles :

* ou bien s et s' appartiennent à un même intervalle $[s_k,s_{k+1}]$

$$[M^1(s',t) - M^1(s,t)]^2 \leq 2\{[M^1(s',t) - M^1(s_k,t)]^2+[M^1(s,t) - M^1(s_k,t)]^2\}$$

$$E\sup[M^1(s',t) - M^1(s,t)]^2 \leq 4\,E\{\sup[M^1(s,t) - M^1(s_k,t)]^2\} \leq 16\,\varepsilon$$

* ou bien s et s' appartiennnent à 2 intervalles adjacents, disons $s \in [s_{k-1},s_k]$, $s' \in [s_k, s_{k+1}]$

$$[M^1(s',t) - M^1(s,t)]^2 \leq 3\{[M^1(s',t) - M^1(s_k,t)]^2 + [M^1(s_k,t) - M^1(s_{k-1},t)]^2 + [M^1(s,t) - M^1(s_{k-1},t)]^2\}$$

$$E\sup_{s,s'}[M^1(s',t) - M^1(s,t)]^2 \leq 36\,\varepsilon$$

3°) Partie B^1 : De même

$$B^1_{st} = \int_{[0,s[} \varphi_1(u,t)du$$

avec

$$\varphi_1(u,t) = \int_{R_{1t}} \beta_2(z';u)W(dz') + \int_{[0,t]} \varphi(u,v)dv$$

de sorte que si $s_1 \leq s \leq s_2$

$$[B^1_{st} - B^1_{s_1 t}]^2 \leq (s-s_1) \int_{[s_1,s]} \varphi^2_1(u,t)\,du$$

$$\leq (s_2-s_1) \int_{[s_1,s_2]} \Phi^2_1(u)du$$

où $\Phi_1(u) = \sup_t \varphi_1(u,t)$ qui est dans L^2 , comme φ_1 (théorème 5-5).
Il existe donc une suite croissante $s'_o = 0, s'_1, \ldots, s'_m = 1$ telle que :

$$\forall k \quad (s'_{k+1} - s'_k) \int_{[s'_k,s'_{k+1}]} E\,\Phi^2_1(u)du \leq \varepsilon$$

Si $h' = \sup(s'_{k+1} - s'_k)$, par le même raisonnement que ci-dessus, on montre que :

$$|s'-s| \leq h' \Longrightarrow E \sup_{s,s'} [B^1_{st} - B^1_{s't}]^2 \leq 24\,\varepsilon\,. \quad \blacksquare$$

§6 - Récapitulatif et formulaire de base

Notations (éventuellement indicées par X)

$$X = M + P^1 + P^2 + B$$

où

$M = \Theta\cdot W + \psi\cdot WW$	partie m
$(M^* = \Theta\cdot W$	$M^{**} = \Psi\cdot WW)$
$P^1 = \beta_1\cdot VW$	partie 1-m.p.
$P^2 = \beta_2\cdot WU$	partie 2-m.p.
$B = \varphi\cdot Z$	partie v.b.

$M^1 = M + P^1$ (partie 1-m.)	$B^1 = P^2 + B$ (partie 1-v.b.)
$M^2 = M + P^2$ (partie 2-m.)	$B^2 = P^1 + B$ (partie 2-v.b.)
L_1 = 1-dérivée de M^1	φ_1 = dérivée en s de B^1
L_2 = 2-dérivée de M^2	φ_2 = dérivée en t de B^2

Dans ce formulaire, $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$, $\xi = (u,v)$, $\xi' = (u',v')$.

1 - représentation et 2 - représentation :

$$M^1_{st} = \int_{R_{st}} L_1(t\,;\,\xi')\,W(d\xi')$$

$$B^1_{st} = \int_0^s \varphi_1(u,t)\,du$$

avec :

$$\begin{cases} L_1(v;\xi') = \theta(\xi') + \int_{R_{u'v}} \psi(\eta,\xi')\ W(d\eta) + \int_{[0,v]} \beta_1(y;\xi')dy \\ \varphi_1(u,t) = \int_{R_{ut}} \beta_2(\eta;u)\ W(d\xi) + \int_{[0,t]} \varphi(u,v)dv \end{cases}$$

L_1 est nul ssi X est à 1-v.b. ; φ_1 est nul ssi X est une 1-m.

$$M^2_{st} = \int_{R_{st}} L_2(\xi;s)\ W(d\xi)$$

$$B^2_{st} = \int_0^t \varphi_2(s,v)dv$$

avec

$$\begin{cases} L_2(\xi;u') = \theta(\xi) + \int_{R_{u'v}} \psi(\xi;\eta')\ W(d\eta') + \int_{[0,u']} \beta_2(\xi;x)dx \\ \varphi_2(s,v) = \int_{R_{sv}} \beta_1(v;\eta')\ W(d\eta') + \int_{[0,s]} \varphi(u,v)du \end{cases}$$

L_2 est nul ssi X est à 2-v.b., φ_2 est nul ssi X est une 2-m.

<u>Accroissements</u> :

Si
$$\Delta =]s_o,s_1] \times]t_o,t_1]$$
$$\sigma =]0,\ s_1] \times]t_o,t_1] \times]s_o,s_1] \times]0,\ t_1]$$
$$\sigma_1 =]0,\ t_1] \times]s_o,s_1] \times]t_o,t_1]$$
$$\sigma_2 =]s_o,s_1] \times]t_o,t_1] \times]0,\ s_1]$$

Accroissement $X(\Delta)$

$$X(\Delta) = \int_\Delta \theta(\xi)\ W(d\xi) + \int_{\mathcal{O}} \psi(\xi,\xi')\ W(d\xi)\ W(d\xi')$$

$$+ \int_{\mathcal{O}_1} \beta_1(v;\xi')dv\ W(d\xi') + \int_{\mathcal{O}_2} \beta_2(\xi;u')W(d\xi)du'$$

$$+ \int_\Delta \varphi(\xi)d\xi$$

Interprétation différentielle :

$$X(ds,dt) = \theta(s,t)W(ds,dt) + \int_{R_{st}} \psi(u,t;s,v)W(du,dt)W(ds,dv)$$

$$+ dt \int_0^t \beta_1(t;s,v)W(ds,dv) + ds \int_0^s \beta_2(u,t;s)W(du,dt)$$

$$+ \varphi(s,t)ds\ dt$$

Processus croissant

$$<X>_{st} = \int_{R_{st}} \theta^2(\xi)d\xi + \int_{R^2_{st}} \psi^2(\xi;\xi')d\xi\ d\xi'$$

$$\varphi_{<X>}(s,t) = \theta(s,t) + \int_{R_{st}} \psi^2(u,t;s,v)du\ dv$$

$$<X,Y>_{st} = \int_{R_{st}} \theta_X\ \theta_Y(\xi)d\xi + \int_{R^2_{st}} \psi_X\ \psi_Y(\xi;\xi')d\xi\ d\xi'$$

Accroissement $X(\Delta_s,t)$

$$X(\Delta_s,t) = \int_{(\Delta_s,t)} L_1(t;\xi)W(d\xi) + \int_{\Delta_s} \varphi_1(u,t)du$$

Interprétation différentielle :

$$X(ds,t) = \int_{[0,t]} L_1(t;s,v)W(ds,dv) + \varphi_1(s,t)ds$$

Processus croissant dans le sens 1

$$<X>^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} L_1^2(t;\xi)d\xi$$

$$<X,Y>^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} L_{1X}\, L_{1Y}(t;\xi)d\xi$$

$$<X,Y>^{(1)}_{st} = <X,Y>_{st} + \int_{R^2_{st}} \left[L_{1X}(v;\xi')\psi_Y(\xi,\xi')+L_{1Y}(v;\xi')\psi_X(\xi,\xi')\right]W(d\xi)d\xi'$$

$$+ \int_{[0,t]\times R_{st}} \left[L_{1X}\beta_{1Y} + L_{1Y}\beta_{1X}\right](v;\xi')dv\, d\xi'$$

Variation dans le sens 1

Si $L_1 = 0$, $X = B^1$ et

$$(\text{var } B^1_{\cdot t})_s = \int_0^s |\varphi_1(u,t)|du$$

La s.m.r. J_{ZY}

Indiçant par J ses facteurs de représentation, on a :

$$\theta_J = 0$$

$$\Psi_J(u,v \,;\, u',v') = L_{1Y}(v;u',v')\, L_{2Z}(u,v;u')$$

$$\beta_{1J}(v;u',v') = L_{1Y}(v;u',v')\ \varphi_{2Z}(u',v)$$

$$\beta_{2J}(u,v;u') = \varphi_{1Y}(u',v)\ L_{2Z}(u,v;u')$$

$$\varphi_J(u',v) = \varphi_{1Y}(u',v)\ \varphi_{2Z}(u',v)$$

Interprétation différentielle :

$$J_{ZY}(dx,dy) = Y(dx,y)\ Z(x,dy)\ .$$

Bibliographie du chapitre III

[1] GIKHMAN I.I. et SKOROKHOD A.V. , Introduction the theory of random processes, W.B. Samders Company , (1969) .

[2] MEYER P.A. , Probabilités et Potentiel, publication de Inst. Math. de l'Université de Strasbourg .

[3] NEVEU J. , Processus aléatoires gaussiens, Presse de l'Université de Montréal (1968) .

[4] WONG E. et ZAKAI M. , (1974) , Martingales and stochastic integral for processes with multi-dimensional parameter, Z. für W.(29), p. 109-122 .

[5] CAIROLI R. et WALSH J.B. , (1975) , Stochastic integral in the plane , Acta Matematica, 134, p. 111-183 .

[6] YOR M. , (1976) , Représentation des martingales de carré intégrale relatives aux processus de Wiener et de Poisson à n-paramètres, Z für W., 35, p. 121-129 .

[7] WONG E. et ZAKAI M. , Weak martingales and stochastic integral in the plane, Ann. of Proba. (1976), Vol. 4, n° 4, p. 570-586 .

[8] WALSH J.B., Martingales with a multi-dimensional parameter and stochastic integral in the plane, Cours de 3ème cycle, Unv. de Paris VI, (1976-1977) .

[9] CAIROLI R. et WALSH J.B. , (1977), Martingales représentations and holomorphic processes, Ann. of Proba., Vol. 5, n° 4, p. 511-521 .

[10] GUYON X. et PRUM B., (1979), Différents types de variations-produit pour une semi-martingale représentable à deux paramètres, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29, 3, p. 295-317.

CHAPITRE IV

DIFFERENTS TYPES DE VARIATIONS-PRODUIT POUR UNE SEMI MARTINGALE REPRESENTABLE

§1 - Introduction

Sur $\mathbb{R}$, on a les résultats classiques suivants :

Soit X_t une semi-martingale continue de L^2 , admettant la représentation :

$$X_t = M_t + B_t \qquad 0 < t$$

$$M_t = \int_0^t \theta(u)\, W(du) \qquad B_t = \int_0^t b(u)\, du$$

Soit f un processus mesurable, adapté, (π_n) une suite de partitions de $[0,1]$, $\pi_n = (\Delta_i^n)$, $\Delta_i^n =]t_i^n, t_{i+1}^n]$ dont le pas tend vers 0 et (f_n) une suite de processus π_n-simples, mesurables, adaptés. Soit :

$$S_{f_n}(\pi_n,\alpha)_t = \sum_{\pi_n} f_n(t_i^n)\, X(\Delta_i)_t^\alpha , \qquad \alpha = 1, 2, \ldots$$

où on adopte la convention :

$$X(A)_t = X(A \cap]0,t])$$

Alors :

$\underline{\alpha = 1}$:
$$S_{f_n}(\pi_n,1)_t \xrightarrow{L^2} \int_0^t f(u)\, X(du)$$

uniformément en t si $f_n \longrightarrow f$ au sens de la semi-norme L^2 :

$$||f||_2^2 = E\int_0^1 f^2(u)(\theta^2(u) + b^2(u))du$$

$\underline{\alpha = 2}$: $\quad S_{f_n}(\pi_n, 1)_t \xrightarrow{L^1} \int_0^t f(u) \, \langle M \rangle \, (du)$

si $\langle M \rangle$ est le processus croissant de la martingale M, dès que $f_n \longrightarrow f$ au sens de la semi-norme L^1

$$||f||_1 = E \int_0^1 |f(u)| \, (\theta^2(u) + b^2(u)) du .$$

En fait, sur $\mathbb{R}$, ce sont les seules variations-produit utiles (en particulier pour la démonstration de la formule de Ito).

$\underline{\text{Sur } \mathbb{R}^2}$: Donnons nous deux partitions de $]0,1]$

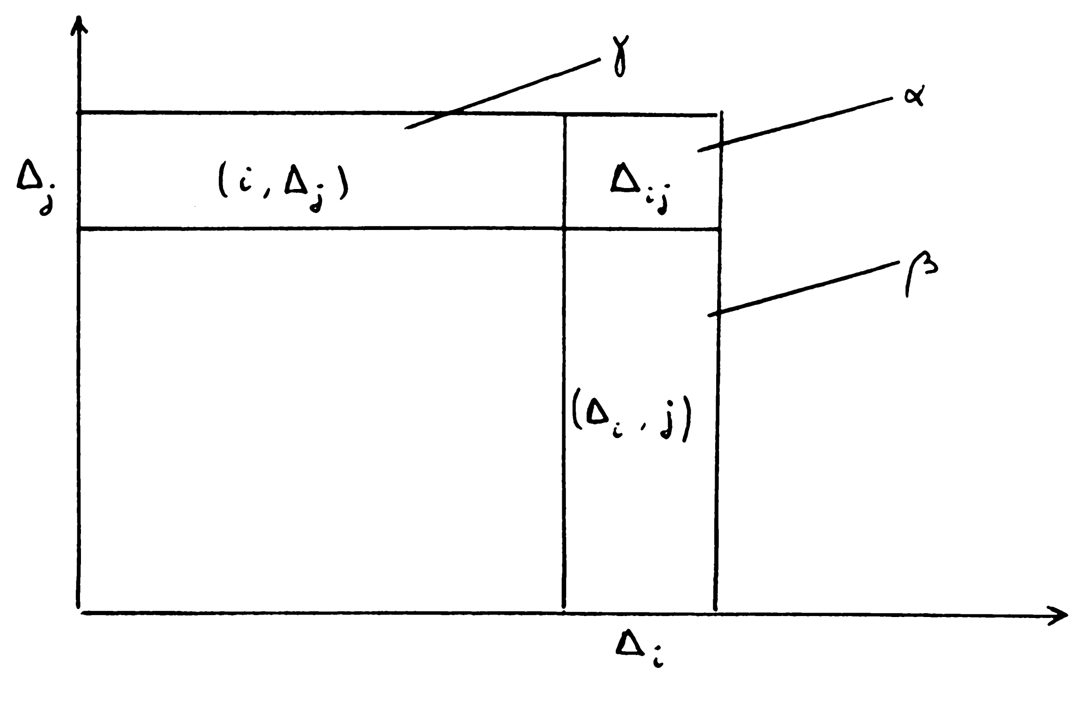
$$\sigma = \{\Delta_i \, , \, i = 1,N\} \quad \text{avec} \quad \Delta_i =]s_i \, , \, s_{i+1}]$$

$$\sigma' = \{\Delta_j \, , \, j = 1,N'\} \text{ avec } \Delta_j' = |t_j \, , \, t_{j+1}|$$

(on omettra les ' dès que possible). A la partition produit

$$\pi = \{\Delta_i \times \Delta_j'\}$$

de $]0,1]^2$, on peut associer trois "rectangles élémentaires" :



$$\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta'_j$$

$$(s, \Delta'_j) =]0,s] \ \Delta'_j \qquad \text{et} \qquad (i, \Delta'_j) = (s_i, \Delta'_j)$$

$$(\Delta_i, t) = \Delta_i \ ]0,t] \qquad \text{et} \qquad (\Delta_i, j) = (\Delta_i, t_j)$$

On notera $|\pi|_1$ et $|\pi|_2$ les pas de π dans l'un et l'autre sens :

$$|\pi|_1 = \sup_i (s_{i+1} - s_i)$$

$$|\pi|_2 = \sup_j (t_{j+1} - t_j)$$

et $|\pi|$ le pas de π :

$$|\pi| = \sup(|\pi|_1 , |\pi|_2) .$$

Soit (π_n) une suite de telles partitions.

Si X est une s.m.r. sur $[0,1]^2$ et f_n une suite de fonctions π_n-simples mesurables adaptées valant $f_n(i,j)$ sur Δ^n_{ij} convergeant, au sens d'une certaine semi-norme, vers une fonction f, on étudiera pour $\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,\ldots$ les limites quand $|\pi_n|$ tend vers zéro des processus

$$S_{f_n}(\pi_n;\alpha,\beta,\gamma)_{st} = \Sigma\, f_n(i,j)\left[X(\Delta^n_{ij})^\alpha\, X(\Delta^n_i,j)^\beta\, X(i,\Delta^n_j)^\gamma\right]_{st}$$

où l'on a adopté la notation :

$$X(A)_{st} = X(A \cap R_{st})$$

$$\left[X(A)^\alpha\, X(B)^\beta\, X(C)^\gamma\right]_{st} = X(A)^\alpha_{st}\, X(B)^\beta_{st}\, X(C)^\gamma_{st} .$$

Nous donnons dans ce chapitre deux approches différentes de l'étude de ces variations-produit.

(A) La première (Partie A, §2, [3]*) traite de trois types de variations pour une semi-martingale représentable, et pour chaque type de variations conditionnelles et variations inconditionnelles, étant étudiées.

Variation linéaire

$$\sum_i X(\Delta_i,t)_s \times (\Delta_i,t')_s \quad \text{et} \quad \sum_i E(X(\Delta_i,t)_s\, X(\Delta_i,t') \mid \mathfrak{F}_i^1)$$

Variation superficielle (ou quadratique)

$$\sum_{i,j} X(\Delta_{ij})^2_{st} \quad \text{et} \quad \sum_{ij} E(X(\Delta_{ij})^2_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij})$$

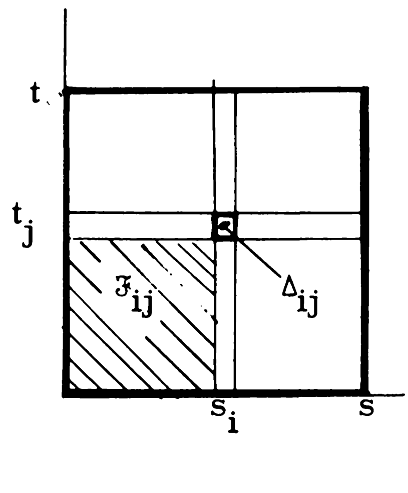
1-Variation mixte

$$\sum_{ij} X(\Delta_i,t)_s\, X(\Delta_{ij})_{s\times[t,t']} \quad \text{et} \quad \sum_{ij} E(X(\Delta_i,t)_s\, X(\Delta_{ij})_{s\times[t,t']} \mid \mathfrak{F}_{ij})$$

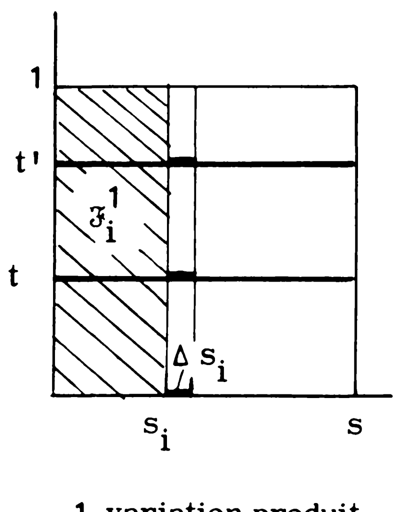
où

$$X(\Delta_{ij})_{s\times[t,t']} = X(\Delta_{ij} \cap (R_{st'} \setminus R_{st})) \quad \text{si} \quad t \leqslant t'$$

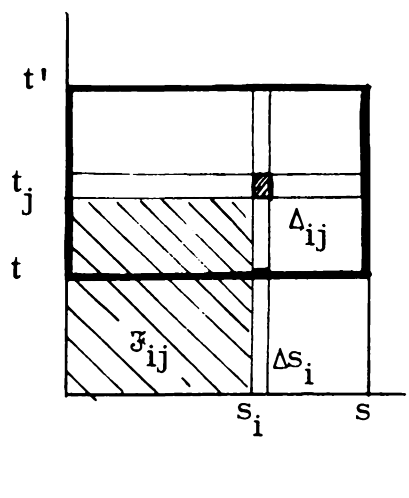
la sommation étant "prise" sur $R_{st'} \setminus R_{st}$, variations schématisées par les trois dessins ci-dessous :



Variation quadratique



1-variation produit



1-variation mixte

(*) La bibliographie est à la fin de ce §1.

Remarquons que la variation linéaire et la variation mixte ne sont pas du type $S_f(\pi,\alpha,\beta,\gamma)$.

Les résultats sur les convergences de ces six types de variations sont donnés dans L^1, pour une s.m.r. X (de L^2). On utilisera fondamentalement les inégalités maximales pour $X(\Delta)^2_{st}$ et $\sum_{\pi} X(\Delta_{ij})^2_{st}$, la deuxième inégalité ayant une version uniforme en π. Ce dernier point nous permettra de ramener l'étude de ces variations au cas où X est une s.m.r. simple.

Dans le cas où M est une martingale de L^2, l'étude de la variation quadratique $\Sigma\, M(\Delta_{ij})^2_{st}$ (conditionnellement et inconditionnellement) est faite dans [1], [2], les convergences étant démontrées en probabilités. Signalons dans [2] l'introduction de la notion de martingales à accroissements orthogonaux, notion liée au problème de variation produit et de variation indépendante du chemin (cf. chapitre V).

(B) La deuxième partie (partie B, §3 à 7) traite effectivement des sommes $S_f(\pi,\alpha,\beta,\gamma)$. Si $f = 1$ et $(\alpha,\beta,\gamma) = (2,0,0)$, on retrouve la variation quadratique $\sum_{\pi} X(\Delta_{ij})^2_{st}$. Toutes les autres variations sont d'un type nouveau.

On commencera l'étude de chaque variation par l'établissement d'une inégalité maximale. Pour ce faire, on utilisera la représentation des divers $X(A)_{st}$ intervenant, séparant ainsi dans $S_f(\pi,\alpha,\beta,\gamma)$ la partie martingale, la partie 1-martingale propre, 2-martingale propre, à variation bornée. On utilisera alors les inégalités maximales de base (pour une martingale, une 1-m.p., une 2-m.p., un processus à v.b.) ainsi que les majorations de puissances d'intégrales stochastiques (ch. III, §4).

Utilisant ces inégalités maximales, on sélectionne dans ces variations les parties "contribuantes" et les parties "non contribuantes". Reste alors à déterminer et à identifier la limite des parties contribuantes.

Au paragraphe 3, après avoir montré que la variation (1,0,0) correspond à l'intégrale semi-stochastique, nous étudions la variation (0,1,1) : si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4, on rapproche l'accroissement $Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j)$ de $J_{ZY}(\Delta_{ij})$. Sous des conditions sur f de type L^2 (relativement aux semi-normes $||\cdot||_{Y^4}$ et $||\cdot||_{Z^4}$, on montre que la variation pondérée (0,1,1) converge uniformément dans L^2 vers l'intégrale en $J_{ZY}(dz)$. La démonstration est donnée dans le cas f_n bornée et sous deux autres jeux de conditions.

Au paragraphe 4 nous étudions d'abord la variation quadratique pondérée (2,0,0). Si $f_n \longrightarrow f$ au sens de la semi-norme de type L^1 $||f||_{X^2}$, la variation converge uniformément dans L^1 vers un processus à variation bornée, l'intégrale de f en $<M_X>(dz)$. Les résultats pour la variation $X(\Delta_{ij})^2$ s'étendent immédiatement à la variation produit $X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_{ij})$.

Dans ce même paragraphe, nous étudions aussi les variations (0,2,2) et (1,1,1) : la même démarche que ci-dessus ramène l'étude de termes en $Y(\Delta_i,j)^2 Z(i,\Delta_j)^2$ à celle de termes en $J_{ZY}(\Delta_{ij})^2$, tandis que l'on rapproche $X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j)$ de $X(\Delta_{ij})\ J_{ZY}(\Delta_{ij})$.

Dans l'étude de toutes les autres variations, on se limitera au cas f_n borné (qui suffira au chapitre VI pour la démonstration de la formule de Ito).

Au paragraphe 5 nous étudions dans L^2 inégalités maximales et convergences relatives aux variations (0,1,2) et (1,0,1). Les limites des variations sont des processus faisant intervenir des 1-martingales propres, exprimées au moyen d'intégrales en ZW ; on supposera que f_n converge vers f au sens de certaines semi-normes L^2 relatives aux diverses s.m.r.

Nous avons regroupé aux paragraphes 6 et 7-1 les variations "non contribuantes", c'est à dire celles dont la limite est nulle. Nous avons limité l'étude de ces variations (α,β,γ) au cas $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 4$. Seules celles-ci interviendront au chapitre VI. Pour les variations (1,0,2) et (0,1,3) on montre (§ 6) des convergences dans L^2 , sous des hypothèses de type L^6 sur les s.m.r., pour les autres des absolues convergences dans L^1 , sous des hypothèses de type L^4 sur les s.m.r.

Enfin, au paragraphe 7-2, nous complètons l'étude en considérant les variations $(0,\beta,0)$ avec $\beta \leqslant 4$.

Le tableau de la page suivante résume les résultats de ce chapitre.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE IV

[1] CAIROLI R. et WALSH J.B., Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales, Z. für W, 44, 279-306 (1978).

[2] ZAKAI M., Some classes of two-parameter martingales (1979) (préprint communiqué).

[3] GUYON X. et PRUM B., Différents types de variations-produit pour une semi-martingale représentable à deux paramètre (1979), Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29-3.

[4] GUYON X. et PRUM B., Différents types de variations-produit pour une semi-martingale représentable de $[0,1]^2$. (1978) Note aux CRAS t. 287, p. 255-258.

TABLEAU RECAPITULATIF DES RESULTATS

Variation			Hypothèses sur			Convergence de la variation			cf
α	β	γ	XYZT	f	$f_n \to f$	dans	limite	intégrale en	§
1	0	0	L^2	L^2	L^2	L^2	s.m.r.	$X(dz)$	3
0	1	0	W	1	1		diverge		7
2	0	0	L^2	L^1	L^1	L^1	v.b.	$<M_X,M_Y>(dz)$	4
0	2	0	W	1	1		diverge		7
1	0	1	L^4	L^∞	L^2	L^2	1-mp.+v.b.	$<M^2_X(dx,\cdot),M^2_Y(x,\cdot)>^{(2)}(dy)$	5
0	1	1	L^4	L^∞	L^2	L^2	s.m.r.	$J_{YX}(dz)$	3
3	0	0	L^4	L^∞	L^∞	$\|L^1\|$	0		7
2	1	0							
0	3	0	W	1	1		diverge		7
1	0	2	L^6	L^∞	L^∞	L^2	0		6
0	1	2	L^6(*)	L^∞	L^2	L^2	1-mp.+v.b.	$X(dx,y)<M^2_Y,M^2_Z>^{(2)}(x,dy)$	5
1	1	1	L^2,L^4	L^∞	L^1	L^1	v.b.	$<M_X,J_{M^2_Z,M^2_Y}>(dz)$	4
4	0	0	L^4	L^∞	L^∞	$\|L^1\|$	0		7
3	1	0							
2	2	0							
2	1	1							
1	3	0							
1	2	1							
0	4	0	L^4	L^∞	L^∞	L^1	borné		7
0	2	2	L^4	L^∞	L^1	L^1	v.b.	$<M^1_X,M^1_Y>^{(1)}(dx,y)<M^2_Z,M^2_T>^{(2)}(x,dy)$	7
0	1	3	L^6(*)	L^∞	L^∞	L^2	0		6

Note : (*) ou L^4 et L^8 ; $|L^1|$ = absolue convergence dans L^1.

PARTIE A

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
29, 3 (1979), 295-317

DIFFERENTS TYPES DE VARIATIONS-PRODUIT POUR UNE SEMI-MARTINGALE REPRÉSENTABLE A DEUX PARAMÈTRES

par X. GUYON et B. PRUM

1. INTRODUCTION

Les processus que nous considérons dans ce travail sont à valeurs réelles, et indexés par l'ensemble de temps à deux paramètres $\mathbf{R}_+^2$ (en fait, pour éviter les difficultés à l'infini, nous nous restreindrons très vite à un rectangle borné : $[0,1]^2$ pour fixer les idées).

Notre but dans ce travail consiste à étendre aux processus à deux paramètres les résultats bien connus pour les semi-martingales X à un paramètre, suivant lesquels les sommes

$$\sum_i E[(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 | \mathcal{F}_{t_i}] \ , \ \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

convergent (dans L^1, si des conditions d'intégrabilité convenables sont imposées à X) vers les processus croissants $\langle X \rangle$ et $[X]$ associés à la semi-martingale X, lorsque le pas de la subdivision (t_i) tend vers 0. Si X est à trajectoires continues, on sait de plus que ces deux processus croissants sont égaux, et ne dépendent que de la partie martingale locale de X. Pour les processus à deux paramètres, on peut former trois types différents de sommes de ce genre : des sommes "linéaires", "superficielles" et "mixtes", admettant chacune une forme conditionnelle et inconditionnelle. Nous définissons ci-dessous une classe de semi-martingales, qui nous paraît raisonnablement générale pour les besoins courants, celle des *semi-martingales représentables* (s.m.r.). Si X est une s.m.r., nous savons établir la convergence dans L^1 de toutes ces sommes, avec l'identification de leurs limites, et nous savons établir l'égalité des limites des sommes conditionnelles et inconditionnelles pour les sommes des deux premiers types (pour le type mixte, il faut une condition supplémentaire sur X). Cette égalité est indispensable pour les applications à la statistique, car seules les sommes inconditionnelles sont accessibles à l'expérience.

Notations générales.

Les éléments de $\mathbf{R}_+^2$ sont désignés systématiquement par des lettres *grasses*, la notation standard étant $\mathbf{z} = (s, t)$. La relation $\mathbf{z} \leqq \mathbf{z}'$ signifie $s \leqq s', t \leqq t'$, tandis que $\mathbf{z} < \mathbf{z}'$ signifie $s < s'$ *et* $t < t'$, et $\mathbf{z} \wedge \mathbf{z}'$ signifie $s < s'$ et $t > t'$. Le rectangle $]\mathbf{z}, \mathbf{z}']$ est l'ensemble des $\mathbf{u}$ tels que $\mathbf{z} < \mathbf{u} \leqq \mathbf{z}'$. Nous posons $\mathbf{0} = (0,0)$, $\mathbf{1} = (1,1)$, $R_\mathbf{z} =]0, \mathbf{z}]$.

Tous les processus que nous considérons sont nuls sur les axes. Si $\Delta =]\mathbf{z}, \mathbf{z}']$ est un rectangle, et X un processus, nous posons $X(\Delta) = X_{s't'} - X_{s't} - X_{st'} + X_{st}$.

La mesure de Lebesgue de $A \subset \mathbf{R}_+^2$ est notée $Z(A)$ ou $\int_A d\mathbf{z}$ (ou toute autre lettre grasse). La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ est notée m.

Nous considérons un processus de Wiener $(W_\mathbf{z})$, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, à trajectoires continues. On désigne par $\mathfrak{F}_\mathbf{z}$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $W_\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \leqq \mathbf{z}$, et par tous les ensembles de mesure nulle de $\mathfrak{F}$; on sait que cette famille est continue à droite.

Les diverses notions de martingales (martingales faibles, i-martingales, martingales, martingales fortes) sont toutes relatives à cette filtration. Pour les définitions et les théorèmes classiques concernant ces processus, on consultera [1], [2], [3], [5].

Semi-martingales représentables.

Commençons par les *martingales faibles* représentables. Soit X une martingale faible (nulle sur les axes). La condition minimale de régularité que l'on puisse imposer à X consiste à exiger que pour s fixé, $(X_{st})_t$ soit une semi-martingale en t, et de même pour t fixé. On montre alors dans [3], sous des conditions faibles, que X admet une décomposition unique de la forme

$$X = M + N^1 + N^2 \tag{1}$$

sur $[0,1]^2$, où M est une martingale, et N^i est une i-martingale propre. Pour $i = 1$, par exemple, cela signifie que $(N^1_{st})_s$ est une martingale pour tout t, tandis que $(N^1_{st})_t$ est, pour tout s, un processus à variation finie prévisible. La notion de martingale faible représentable s'obtient en imposant encore quelques conditions aux processus M, N^1, N^2.

1) M *est une martingale de carré intégrable*. On sait alors que M admet une représentation

$$M_{\mathbf{z}} = \int_{R_{\mathbf{z}}} \theta_{\mathbf{u}} dW_{\mathbf{u}} + \int_{R_{\mathbf{z}} \times R_{\mathbf{z}}} \psi_{\mathbf{uv}} \, dW_{\mathbf{u}} dW_{\mathbf{v}} \tag{2}$$

(en abrégé, $M = \theta . W + \psi . WW$). Ici θ et ψ appartiennent à deux espaces de Hilbert que nous noterons $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$:

$\mathcal{H}_1$ est le sous-espace fermé de $L^2(\Omega \times [0,1]^2, P \times Z)$ formé des fonctions $\theta(\omega, \mathbf{u})$ qui sont adaptées (i.e. $\theta(., \mathbf{u})$ est $\mathcal{F}_{\mathbf{u}}$-mesurable pour tout $\mathbf{u}$ fixé).

$\mathcal{H}_2$ est le sous-espace fermé de

$$L^2(\Omega \times [0,1]^2 \times [0,1]^2, P \times Z \times Z)$$

formé des fonctions $\psi(\omega, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ telles que, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ fixé, $\psi(., \mathbf{u}, \mathbf{v})$ soit $\mathcal{F}_{\mathbf{u} \vee \mathbf{v}}$-mesurable, et que de plus, $\psi(\omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si l'on n'a pas $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Pour les détails, voir [2], [3], où l'on montre aussi que M est une martingale forte si et seulement si le terme $\psi . WW$ est nul.

2) *i-martingales*. Considérons par exemple la 1-martingale propre (N^1_{st}).

Il est naturel de supposer, non seulement que le processus $(N^1_{st})_t$ est à variation finie, mais encore qu'il est absolument continu par rapport à la mesure dt. On montre alors dans [3], sous des conditions d'intégrabilité assez faibles, que N^1 admet une représentation sous forme d'une "intégrale stochastique double mixte". En fait, dans le cas particulier qui nous occupe, cette représentation peut s'écrire

$$N^1_{st} = \int_{R_{st}} \left(\int_0^t \beta_1(v, \mathbf{x})\, dv\right) dW_{\mathbf{x}} \tag{3}$$

où $\beta_1(\omega, v, \mathbf{z})$ est une fonction sur $\Omega \times [0,1] \times [0,1]^2$, mesurable, nulle si $v \leqq t$ (la seconde coordonnée de $\mathbf{z}$), telle que si $v > t$ $\beta_1(.\,, v, \mathbf{z})$ soit $\mathcal{F}_{sv}$-mesurable (s est la première coordonnée de $\mathbf{z}$), et telle enfin que

$$E\left[\int_{[0,1]\times[0,1]^2} \beta_1^2(.\,, v, \mathbf{z})\, dv d\mathbf{z}\right] < \infty .$$

Ces fonctions forment un sous-espace fermé $\mathcal{K}_1$ de l'espace L^2 associé à la mesure $dPdvd\mathbf{z}$ sur $\Omega \times [0,1] \times [0,1]^2$. De la même manière, nous supposerons que N^2 admet une représentation

$$N^2_{st} = \int_{R_{st}} \left(\int_0^s \beta_2(u, \mathbf{x})\, du\right) dW_{\mathbf{x}} \tag{3'}$$

où β_2 parcourt l'espace de Hilbert $\mathcal{K}_2$ analogue.

3) *Terme à variation finie.* Enfin, nous superposerons à la martingale faible qui vient d'être considérée un terme à variation finie de la forme

$$\Sigma_{\mathbf{z}} = \int_{R_{\mathbf{z}}} \varphi_{\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \tag{4}$$

où $\varphi(\omega, \mathbf{z})$ est une fonction mesurable, adaptée à $(\mathcal{F}_{\mathbf{z}})$, telle que $E\left[\int_{R_1} \varphi^2_{\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}\right] < \infty$. Ces fonctions sont les éléments d'un sous espace fermé $\mathcal{J}$ de $L^2(\Omega \times R_1, P \times Z)$: on a $\mathcal{J} = \mathcal{H}_1$, mais il est commode de les distinguer dans la notation.

Toute s.m.r. admet une version à trajectoires continues, mais nous n'aurons pas vraiment besoin de ce résultat. Nous espérons que les explications ci-dessus montrent que la classe des s.m.r. est raisonnablement générale dans la classe des "semi-martingales à deux paramètres".

A partir de la représentation explicite ci-dessus, il est facile d'exprimer la *1-dérivée* de X, c'est-à-dire le processus $L_1(\omega, t, \mathbf{z})$ figurant dans la représentation de la partie 1-martingale $M + N^1$ de X

$$M_{uv} + N^1_{uv} = \int_{R_{uv}} L_1(v, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}} .$$

On a

$$L_1(v, \mathbf{x}) = \theta_{\mathbf{x}} + \int_0^v \beta_1(t, \mathbf{x})\, dt + \int_{\mathbf{z}\wedge\mathbf{x}, t<v} \psi(\mathbf{z}, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{z}} . \tag{5}$$

La représentation $X = M + N^1 + N^2 + \Sigma$ sera souvent notée $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, les cinq termes correspondant à θ, ψ, β_1, β_2, φ dans cet ordre. Les représentations étant uniques, nous poserons aussi

$$\|X\|_{smr} = (\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2)^{1/2}$$

les normes étant prises dans les espaces $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{J}$ correspondants.

Partitions et fonctions simples associées.

Nous désignons par σ une partition de l'intervalle $]0,1]$ en intervalles semi-ouverts $]s_i, s_{i+1}] = \Delta_i$, avec

$$0 \leqq i \leqq m, \quad 0 = s_0 \leqq s_1 \ldots \leqq s_m \leqq s_{m+1} = 1 .$$

De même pour τ, partition en intervalles $]t_j, t_{j+1}] = \Delta'_j$, avec $0 \leqq j \leqq n$. Nous désignons par π la partition produit $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta'_j$; nous posons $\mathbf{z}_{ij} = (s_i, t_j)$, $\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{\mathbf{z}_{ij}}$. Le *pas* de la subdivision σ vaut $\sup\limits_{i \leqq m} (s_{i+1} - s_i)$; on le note $|\sigma|$ et l'on pose $|\pi| = \sup(|\sigma|, |\tau|)$.

Soit $\mathbf{z} = (s, t) \in R_1$: nous désignerons par σ_s, τ_t, $\pi_{\mathbf{z}}$ les traces des partitions σ, τ, π sur $]0,s]$, $]0,t]$, $]0,\mathbf{z}]$ respectivement : nous gardons la même manière d'indexer les partitions, mais s_i devient simplement $s_i \wedge s$, t_j devient $t_j \wedge t$, sans autre changement de notation.

Si X_{st} est un processus à deux indices, nous posons comme d'habitude

$$X(\Delta_i, t) = X_{s_{i+1}t} - X_{s_i t} \ ; \ X(s, \Delta'_j) = X_{st_{j+1}} - X_{st_j}$$

$$X(\Delta_{ij}) \ = X_{s_{i+1}t_{j+1}} - X_{s_{i+1}t_j} - X_{s_i t_{j+1}} + X_{s_i t_j} .$$

Décrivons maintenant les *fonctions simples* associées à une partition π. Dans les représentations données plus haut, nous dirons que

θ est simple si $\theta(\omega, \mathbf{z}) = \sum\limits_{ij} \theta_{ij}(\omega) 1_{\Delta_{ij}}(\mathbf{z})$, où θ_{ij} est $\mathcal{F}_{ij}$-mesurable bornée. Définition analogue pour φ.

ψ est simple si $\psi(\omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum\limits_{ijk\ell}' \psi_{ijk\ell} \, 1_{\Delta_{ij}}(\mathbf{u}) 1_{\Delta_{k\ell}}(\mathbf{v})$, où le $'$ indique une sommation pour $i < j$ et $j > \ell$, et $\psi_{ijk\ell}$ est $\mathcal{F}_{s_k t_j}$-mesurable bornée.

β_1 est simple si $\beta_1(\omega, v, \mathbf{z}) = \sum_{ij\ell}' \beta^1_{ij\ell} \, 1_{\Delta_{ij}}(\mathbf{z}) 1_{\Delta'_\ell}(v)$, où la sommation Σ' est étendue aux $ij\ell$ tels que $j < \ell$, et $\beta^1_{ij\ell}$ est $\mathcal{F}_{s_i t_\ell}$-mesurable bornée. De même pour β_2 par échange des coordonnées.

Ecrivons alors l'expression complète de la s.m.r. X associée à un système de fonctions simples (nous dirons brièvement : s.m.r. simple)

$$X(\mathbf{z}) = \sum_{ij} \theta_{ij} W(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{ij}) + \sum_{ijk\ell}' \psi_{ijk\ell} \, W(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{ij}) \, W(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{k\ell})$$
$$+ \sum_{ij\ell}' \beta^1_{ij\ell} \, m(]0,t] \cap \Delta'_\ell) \, W(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{ij}) \tag{6}$$
$$+ \sum_{ijk}' \beta^2_{ijk} \, m(]0,s] \cap \Delta_k) \, W(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{ij}) + \sum_{ij} \varphi_{ij} Z(R_\mathbf{z} \cap \Delta_{ij}) .$$

Presque tous les raisonnements ci-dessous peuvent se faire par passage à la limite à partir des s.m.r. associées aux fonctions simples (relatives à des partitions arbitrairement fines) : dans le cas particulier du processus de Wiener, il n'est pas difficile de montrer que les fonctions simples sont denses dans les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{J}$ correspondants, *ou encore,* qu'en se restreignant à l'adhérence des fonctions simples, on représente la même classe de semi-martingales (cette dernière méthode, revenant à restreindre les intégrales stochastiques aux intégrands prévisibles, est celle qui convient dans les situations plus générales).

2. 1-VARIATION-PRODUIT

Dans cette partie, nous considérons les sommes

$$\left. \begin{aligned} \langle X \rangle_{\sigma_s, t} &= \sum_{\sigma_s} E[X(\Delta_i, t)^2 \,|\, \mathcal{F}^1_{s_i}] \\ [X]_{\sigma_s, t} &= \sum_{\sigma_s} X(\Delta_i, t)^2 \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

où $\sum_{\sigma_s}$ signifie que l'on somme sur l'indice i, mais les Δ_i sont ceux de la partition σ_s. Plus généralement, nous pouvons considérer les

les sommes correspondant à deux niveaux différents $t \leqq t'$:

$$\left.\begin{aligned} \langle X \rangle_{\sigma_s,t,t'} &= \sum_{\sigma_s} E[X(\Delta_i, t)\, X(\Delta_i, t') | \mathcal{F}^1_{s_i}] \\ [X]_{\sigma_s,t,t'} &= \sum_{\sigma_s} X(\Delta_i, t)\, X(\Delta_i, t). \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

Le résultat principal sur ces sommes est le suivant :

THEOREME 1. – *Lorsque* $|\sigma| \longrightarrow 0$, *les sommes (7) et (7') convergent dans* L^1, *uniformément en* s, t, t', *vers*

$$\langle X \rangle^{(1)}_{s,t,t'} = [X]^{(1)}_{s,t,t'} = \int_{R_{st}} L_1(t, \mathbf{z})\, L_1(t', \mathbf{z})\, d\mathbf{z} \quad (t \leqq t'). \qquad (8)$$

Démonstration. – Il serait facile de ramener ce théorème aux théorèmes analogues pour les semi-martingales à un paramètre [1], mais cela ne donnerait pas la propriété de convergence uniforme dans L^1. On va plutôt employer une méthode qui s'étendra aux autres problèmes de variation quadratique de cet article. Raisonnons par exemple sur $[X]_{\sigma_s,t,t'}$. Nous allons établir le résultat de convergence uniforme dans L^1 pour les s.m.r. associées aux fonctions simples. D'autre part, nous établirons une inégalité de la forme suivante, où C est une constante absolue : quels que soient s, t, σ

$$\|[X]_{\sigma_s,t}\|_{L^1} \leqq C(\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2) = C\,\|X\|^2_{smr} \qquad (9)$$

où les normes au second membre sont prises dans les espaces de Hilbert correspondants. Comme on a aussi

$$|[X]_{\sigma_s,t,t'} - [Y]_{\sigma_s,t,t'}| \leqq [X]^{1/2}_{\sigma_s,t}\,[X - Y]^{1/2}_{\sigma_s,t'} + [X - Y]^{1/2}_{\sigma_s,t}\,[Y]^{1/2}_{\sigma_s,t'} \qquad (9')$$

une application de (9) et de l'inégalité de Schwarz montrera que la convergence uniforme dans L^1 passe à la limite, et vaut pour toutes les s.m.r.. Il restera à identifier la limite, ce qui n'est pas difficile.

Pour établir (9), il suffit en fait de raisonner séparément sur chacun des cinq termes de la somme. Pour les trois premiers types, qui sont des 1-martingales, on a exactement $E[[X]_{\sigma_s,t}] = E[X^2_{st}] \leqq E[X^2_{1t}]$. Pour

(1) Voir la remarque suivant la démonstration.

les deux types de martingales, on majore encore cela par $E[X_{11}^2]$, qui vaut suivant le cas $\|\theta\|^2$ ou $\|\psi\|^2$. Pour le type 1-martingale propre, on écrit

$$E[(N_{1t}^1)^2] = E\left[\int_{R_{1t}} \left(\int_0^t \beta_1(v, \mathbf{z})\, dv\right)^2 d\mathbf{z}\right] \leqq E\left[\int_{[0,t]\times R_{1t}} \beta_1(v, \mathbf{z})^2\, dv d\mathbf{z}\right] \leqq \|\beta_1\|^2 .$$

Pour les deux derniers types, qui sont des processus à variation finie en s, on majore $E[[X]_{\sigma_s,t}]$ par $E\left[\left(\int_0^s |d_u X_{uv}|\right)^2\right]$, et l'on remplace s par 1. Pour $X = N^2$, nous avons

$$d_u N_{uv}^2 = \left(\int_{R_{uv}} \beta_2(u, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}}\right) du ,$$

d'où sans peine

$$E[[X]_{\sigma_s,t}] \leqq \int_0^1 du\, E\left[\left(\int_{R_{ut}} \beta_2(u, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}}\right)^2\right] = \int_0^1 du\, E\left[\int_{R_{ut}} \beta_2(u, \mathbf{x})^2\, d\mathbf{x}\right] \leqslant \|\beta_2\|^2 .$$

Enfin, le cas de $X = \Sigma$ est à peu près évident, et nous le laissons de côté (1).

Nous pouvons donc nous ramener au cas où les fonctions $\theta, \psi, \ldots$ sont des fonctions simples associées à une subdivision fixée $\pi_0 = \sigma_0 \times \tau_0$. *Nous supposerons aussi, pour simplifier, que la subdivision σ est plus fine que σ_0* (en pratique, on travaille souvent avec des subdivisions dyadiques). Si cette condition n'était pas satisfaite, il conviendrait de traiter séparément les intervalles de σ contenus dans un intervalle de σ_0, qui peuvent s'étudier comme ci-dessous, et les intervalles de σ qui contiennent un point de subdivision de σ_0 : leur longueur totale est au plus $m_0 |\sigma|$, qui tend vers 0, et il est facile de voir que leur contribution dans $[X]_{\sigma_s,t,t'}$ tend vers 0 dans L^1, uniformément en s, t, t'.

Revenons alors à la formule (6) (où l'on remarquera que les indices i, j, k, ℓ sont relatifs *à* π_0). Nous découpons la somme $[X]_{\sigma_s,t,t'}$ en un nombre fini de sommes partielles, correspondant aux intervalles de σ contenus dans un même intervalle $]s_i, s_{i+1}]$ de σ_0. Sur cet intervalle, on peut écrire pour tout t fixé, en regroupant

(1) Nous traitons en détail la situation analogue dans les théorèmes 2 et 3.

convenablement les termes de (6)

$$X_{st} = \sum_{ij} a_{ij} W(R_{st} \cap \Delta_{ij}) + b_i(s - s_i) + c_i$$

où les a_{ij}, b_i et c_i (qui dépendent aussi de t) sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{s_i t}$-mesurables bornées dans tout L^p (avec des normes indépendantes de t). On notera que les divers $W(R_{st} \cap \Delta_{ij})$ sont des mouvements browniens réels orthogonaux. Ecrivant la formule analogue pour $X_{s,t'}$, on voit que le comportement de la somme partielle de $[X]_{\sigma_s,t,t'}$ correspondant à l'intervalle $]s_i, s_{i+1}]$ se ramène à un problème tout à fait concret et classique concernant un système de mouvements browniens à un paramètre, que nous ne détaillerons pas davantage. La discussion des sommes $\langle X \rangle_{\sigma_s,t,t'}$ est plus simple.

Il reste à identifier la limite. Pour cela, nous appliquons le résultat sur les processus à un paramètre rappelé ci-dessous, suivant lequel la limite $\langle X \rangle_{s,t,t'} = [X]_{s,t,t'}$ ne dépend que de la partie 1-martingale $\mu_{st} = M_{st} + N^1_{st}$ de X, et est égale à $\langle \mu_{.t}, \mu_{.t'} \rangle_s$. Or ce crochet oblique est égal au second membre de (8), d'après la théorie de l'intégrale stochastique.

Remarque. – Soient $X = M + A$, $Y = N + B$ deux semi-martingales à un paramètre sur $[0,1]$, M et N sont deux martingales continues de carré intégrable, nulles en 0, et A et B deux processus continus à variation finie, tels que $\int_0^1 |dA_s|$ et $\int_0^1 |dB_s|$ appartiennent à L^2. Il est alors classique que les sommes

$$\sum_{\sigma_s} (X_{s_{i+1}} - X_{s_i})(Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma_s} E[(X_{s_{i+1}} - X_{s_i})(Y_{s_{i+1}} - Y_{s_i}) \,|\, \mathcal{F}_{s_i}]$$

convergent vers $\langle M, N \rangle_s$. Ce résultat a déjà été utilisé par Cairoli et Walsh pour établir l'existence du processus $\langle X \rangle^{(1)}_{st} = \langle X \rangle^{(1)}_{s,t,t'}$ lorsque X est une martingale de carré intégrable. Comme nous l'avons dit plus haut, la démonstration du théorème 1 au moyen des fonctions simples doit plutôt être considérée comme une préparation à la suite, car le raffinement d'uniformité en s, t, t' n'est pas particulièrement important.

3. VARIATIONS QUADRATIQUES

Dans cette section, nous étudions les sommes

$$\langle X \rangle_{\pi_z} = \sum_{\pi_z} E[X(\Delta_{ij})^2 \mid \mathcal{F}_{ij}] \qquad (10)$$

$$[X]_{\pi_z} = \sum_{\pi_z} X(\Delta_{ij})^2 \qquad (10')$$

lorsque X est une s.m.r.. Nous établirons pour ces sommes le théorème suivant.

THÉORÈME 2. – *Lorsque* $|\pi| \longrightarrow 0$, *les sommes* $\langle X \rangle_{\pi_z}$ *et* $[X]_{\pi_z}$ *convergent dans* L^1, *uniformément en* $z \in R_1$, *vers*

$$\langle X \rangle_z = [X]_z = \int_{R_z} \theta_x^2 \, dx + \int_{R_z \times R_z} \psi^2(x, y) \, dx dy .$$

Démonstration. – Comme dans la démonstration du théorème 1, la première étape consiste à établir une inégalité analogue à (9)

$$E[\langle X \rangle_{\pi_z}] = E[[X]_{\pi_z}]$$
$$\leqq C(\|\theta\|^2 + \|\psi\|^2 + \|\beta_1\|^2 + \|\beta_2\|^2 + \|\varphi\|^2) = C\,\|X\|^2_{smr} . \qquad (11)$$

Il suffit de le faire pour chacun des cinq types séparément, et nous prendrons $z = 1$ pour simplifier. Les deux types de martingales sont évidents (on a l'égalité pour toute partition). Pour le dernier, on écrit $\sum_{ij} \left(\int_{\Delta_{ij}} \varphi_z dz\right)^2 \leqq \sum_{ij} Z(\Delta_{ij}) \int_{\Delta_{ij}} \varphi_z^2 dz \leqq \int_{R_1} \varphi_z^2 dz$. Restent donc les types de i-martingales propres, le premier par exemple. Nous supposons X donné par la formule (3), et nous ommettons l'indice 1 de β_1.

Posons

$$L(t, z) = \int_0^t \beta(v, z) dv \;,\quad L(\Delta'_j, z) = L(t_{j+1}, z) - L(t_j, z) .$$

Alors

$$X_z = \int_{R_z} L(t, x) \, dW_x$$

$$X(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_{ij}} L(t_{j+1}, x) dW_x + \int_{\Delta_i \times]0, t_j]} L(\Delta'_j, x) dW_x \qquad (12)$$

puis sans difficulté

$$E[X(\Delta_{ij})^2] = E\left[\int_{\Delta_{ij}} L^2(t_{j+1}, \mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\Delta_i \times]0,t_j]} L^2(\Delta_j', \mathbf{x})d\mathbf{x}\right].$$

Majorons $L^2(t_{j+1}, \mathbf{x})$ par $\int_0^1 \beta^2(v, \mathbf{x})dv$, $L^2(\Delta_j', \mathbf{x})$ par $m(\Delta_j')\int_{\Delta_j'} \beta^2(v, \mathbf{x})dv$ après quoi nous remplaçons $]0, t_j]$ par $]0,1]$ et $m(\Delta_j')$ par 1, et il reste après sommation sur i, j

$$E[[X]_\pi] = E[\langle X\rangle_\pi] \leqq 2E\left[\int_{[0,1]\times R_1} \beta^2(v, \mathbf{x})d\mathbf{x}\right] = 2\|\beta\|^2$$

l'inégalité désirée.

Nous laissons désormais de côté tout ce qui concerne les variations conditionnelles, sauf une remarque tout à la fin ; nous traitons en détail les variations inconditionnelles, qui sont plus difficiles.

Comme dans la démonstration du théorème 1, nous approchons maintenant le système $(\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi)$ représentant X par des systèmes $(\theta^n, \psi^n, \beta_1^n, \beta_2^n, \varphi^n)$ de fonctions simples, définissant des s.m.r. simples X^n. L'inégalité (11) nous permet de majorer $E[|[X]_{\pi_\mathbf{z}} - [X^n]_{\pi_\mathbf{z}}|]$ *uniformément en* π ; il suffit donc d'établir la convergence dans L^1 pour les s.m.r. simples. D'autre part, l'identification de la limite dans le théorème 2 ne pose aucun problème quant à l'approximation par les fonctions simples : il est vraiment facile de voir que $[X^n]_\mathbf{z}$ converge vers $[X]_\mathbf{z}$ dans L^1, uniformément en $\mathbf{z}$. Le raisonnement pour $\langle X\rangle_\pi$ est analogue. En définitive, *la démonstration du théorème 2 est entièrement ramenée au cas des s.m.r. simples.*

Débarrassons-nous d'une autre difficulté : soit X une s.m.r. simple associée à une partition π_0, qui reste fixe dans toute la suite. Supposons le théorème établi lorsque la partition variable π est plus fine que π_0, et posons $\overline{\pi} = \pi \vee \pi_0$. Nous savons que, lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$, $[X]_{\overline{\pi}}$ converge dans L^1 vers la limite indiquée dans l'énoncé. Peut-on en déduire le même résultat pour $[X]_\pi$? Voici la démonstration sommaire de ce fait (nous ne donnons pas tous les détails, car en pratique on calcule les variations le long de suites de partitions emboîtées, les partitions dyadiques de pas 2^{-n} sur les deux axes par exemple, et π_0 étant elle-même dyadique ; on ne rencontre donc pas cette difficulté).

Rangeons en deux classes les rectangles de π, ceux qui sont entièrement contenus dans un rectangle de π_0 formant la première classe, et les autres la seconde. La somme des aires des rectangles de la seconde classe est majorée par $k|\pi|$, où k dépend seulement du nombre des lignes de subdivision de π_0. Considérons maintenant $\theta, \psi, \ldots$ comme des fonctions simples relatives à $\pi \vee \pi_0$, et partageons chacune d'elle en deux : θ^1 est le produit de θ par la somme des indicatrices de rectangles de la première classe, ψ^1 le produit de ψ par la somme des indicatrices de produits de deux rectangles de la première classe, etc., tandis que $\theta^2 = \theta - \theta^1$, etc. D'où une décomposition de X en deux s.m.r. $X^1 + X^2$. Il n'est pas difficile de voir que les normes de $\theta^{(2)}, \psi^{(2)} \ldots$ tendent vers 0 avec $|\pi|$. D'après (11), on en déduit que les normes dans L^1 de $[X^2]_\pi$, $[X^2]_{\bar{\pi}}$ tendent vers 0.

Ecrivons, avec des notations évidentes

$$[X]_\pi = [X^1]_\pi + [X^2]_\pi + 2[X^1, X^2]_\pi .$$

Or nous avons $|[X^1, X^2]_\pi| \leqq [X^1, X^1]_\pi^{1/2} [X^2, X^2]_\pi^{1/2}$, et l'inégalité de Schwarz montre que $[X^1, X^2]_\pi$ tend aussi vers 0 dans L^1 lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$, et de même pour $[X^1, X^2]_{\bar{\pi}}$. Ecrivons alors

$$|[X]_\pi - [X]_{\bar{\pi}}| \leqq |[X^1]_\pi - [X^1]_{\bar{\pi}}| + [X^2]_\pi + [X^2]_{\bar{\pi}} + 2(|[X^1, X^2]_\pi| + |[X^1, X^2]_{\bar{\pi}}|).$$

Il reste donc à voir que le premier terme au second membre est petit dans L^1 lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$: mais ce terme est nul. En effet, les termes correspondant aux rectangles de première classe s'éliminent de la différence, et il ne reste donc que des termes $X^1(\Delta)^2$ correspondant à des rectangles de seconde classe de π, ou à des subdivisions de tels rectangles dans $\bar{\pi}$. Mais d'après la construction des fonctions simples figurant dans X^1, tous ces accroissements sont nuls. On a le même raisonnement pour π_z.

Désormais, nous supposons donc que X est une s.m.r. associée à π_0, et que π est plus fine que π_0.

Décomposons X en une somme $X^1 + X^2 + X^3 + X^4 + X^5$, ces cinq termes correspondant respectivement aux cinq intégrands $\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi$; nous décomposons $[X]_\pi$ en une somme (nous laissons de côté π_z pour alléger)

$$\begin{aligned}[X]_\pi = [X^1]_\pi + 2[X^1, X^2]_\pi + [X^2]_\pi \\ + [X^3]_\pi + [X^4]_\pi + [X^5]_\pi + 2[X - X^3, X^3]_\pi \\ + 2[X - X^3 - X^4, X] + 2[X - X^3 - X^4 - X^5, X^5].\end{aligned}$$

Nous remettons à plus tard l'étude de la première ligne. Nous allons montrer que chacun des termes de la seconde ligne tend vers 0 dans L^1, et une application de l'inégalité de Schwarz comme ci-dessus prouvera que ceux de la troisième ligne font de même.

Cas de X^5.

On rappelle qu'une fonction simple φ est bornée en valeur absolue par une constante k. On majore $\Sigma\, X(\Delta_{ij})^2$ par $\Sigma\, |X(\Delta_{ij})| . \sup_{ij} |X(\Delta_{ij})|$. Le premier facteur est majoré par $\int_{R_1} |\varphi(\mathbf{z})|\, d\mathbf{z}$, le second par $k . \sup_{ij} Z(\Delta_{ij})$, et le résultat est immédiat.

Cas de X^3 (le cas de X^4 est identique).

Revenons à la formule (12) au début de la démonstration, en examinant le raisonnement d'un peu plus près : si $\mathbf{z} \in \Delta_{ij}$, nous avons $t \in \Delta'_j$; or $\beta(v, \mathbf{z}) = 0$ si $v < t$, donc $L(t_{j+1}, \mathbf{z}) = \int_0^{t_{j+1}} \beta(v, \mathbf{z})\, dv$ est égal en réalité à $\int_t^{t_{j+1}} \beta(v, \mathbf{z})\, dv$, d'où

$$L^2(t_{j+1}, \mathbf{z}) \leqq m(\Delta'_j) \int_0^1 \beta^2(v, \mathbf{z})\, d\mathbf{z}.$$

Rétablissant aussi le facteur $m(\Delta'_j)$ dans le second terme, on obtient $E[[X^3]_\pi] \leqq 2\, |\pi|\, \|\beta_1\|^2$ l'inégalité cherchée.

Pour achever la démonstration, il suffit donc d'étudier la première ligne, i.e. le cas des martingales. Signalons tout de suite que cette étude a été faite par Cairoli et Walsh [4] pour la variation conditionnelle, de sorte que (compte tenu de leur résultat) l'étude de celle-ci est entièrement achevée pour les s.m.r..

Avant de commencer la discussion proprement dite, nous aurons besoin de rappeler deux faits sur les processus de Wiener à une dimension. Soient X et Y deux mouvements browniens indépendants de paramètre 1 sur $[0,1]$. $\sigma = (\Delta_i)$ une partition de $]u, v]$, $0 \leqq u < v \leqq 1$. Alors

$$E\left[\left(\sum_i X(\Delta_i)^2 - (v-u)\right)^2\right] \leqq c\,|\sigma|\,(v-u) \tag{13}$$

$$E\left[\left(\sum_i X(\Delta_i)\,Y(\Delta_i)\right)^2\right] \leqq |\sigma|(v-u). \tag{14}$$

Les rectangles de la partition π_0 seront notés avec des lettres du début de l'alphabet : $\Delta_{ab}, \Delta_{cd} \ldots$ avec $\Delta_{ab} = \Delta_a \times \Delta'_b$. Les rectangles de la partition π (plus fine que π_0) seront notés $\Delta_{ij}, \Delta_{kl} \ldots$ Nous écrivons $i \in a$ pour exprimer que l'intervalle Δ_i de σ est contenu dans l'intervalle Δ_a de σ_0, et de même suivant l'autre axe.

Etude de $[X^1]_\pi$.

Le cas qui nous intéresse est celui des martingales fortes

$$X^1_z = \sum_{ab} \theta_{ab}\, W(R_z \cap \Delta_{ab}) \qquad \theta_{ab}\ \mathcal{F}_{ab}\text{-mesurable.}$$

Alors
$$\begin{aligned} X^1(\Delta_{ij}) &= \theta_{ab}\, W(\Delta_{ij}) \quad \text{si } i \in a,\ j \in b \\ &= 0 \quad \text{sinon}. \end{aligned}$$

Pour l'instant, travaillons sur les $i \in a$, $j \in b$, a et b restant fixes. La formule (13) nous donne pour chaque j

$$E\left[\left(\sum_i W(\Delta_{ij})^2 - m(\Delta'_j)\,m(\Delta_a)\right)^2\right] \leqq c\,|\sigma|\,m(\Delta_a)\,m(\Delta'_j)$$

(le mouvement brownien considéré est de paramètre $m(\Delta'_j)$ au lieu de 1). Les différents mouvements browniens, lorsqu'on fait varier j, étant indépendants, les variances s'ajoutent :

$$E\left[\left(\sum_{ij} W(\Delta_{ij})^2 - m(\Delta'_b)\,m(\Delta'_a)\right)^2\right] \leqq cm(\Delta_a)\,m(\Delta'_b).$$

Soit k une borne uniforme pour la fonction θ. Nous avons alors

$$E\left[\left(\sum_{ij} X^1(\Delta_{ij}) - \theta^2_{ab} Z(\Delta_{ab})\right)^2\right] \leqq k^2 c\,|\sigma|\,Z(\Delta_{ab}).$$

Ainsi la variable aléatoire $\sum\limits_{i\in a,\, j\in b} X^1(\Delta_{ij})^2$ converge dans L^2 vers

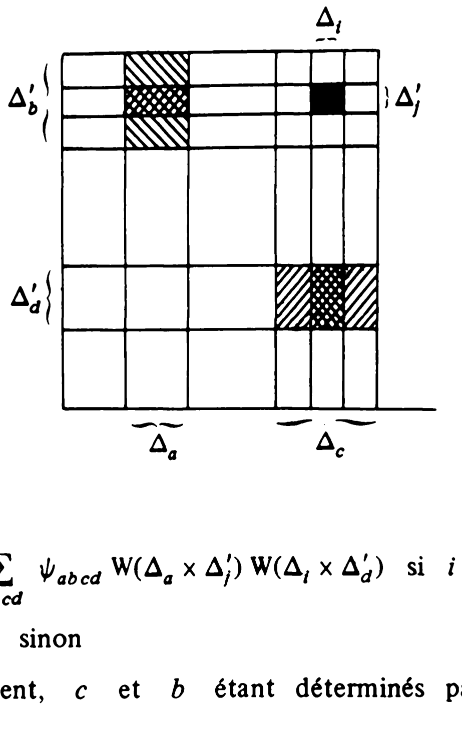
$\theta^2_{ab} Z(\Delta_{ab})$ lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de rectangles dans π_0, on peut sommer sur a, b, et on trouve que $[X^1]_\pi$ converge dans L^2 (ou L^1) vers $\int_{R_1} \theta^2_{\mathbf{x}} d\mathbf{x}$. Il resterait à remplacer π par π_z et à chercher des majorations uniformes : ce serait facile, et nous ne le détaillerons pas.

Etude de $[X^2]_\pi$.

Ici nous avons (en enlevant l'indice 2 pour éviter les confusions)

$$X_z = \sum_{abcd} \psi_{abcd} \, W(R_z \cap \Delta_{ab}) \, W(R_z \cap \Delta_{cd})$$

avec $a < c$, $b > d$, ψ_{abcd} $\mathcal{F}_{cb}$-mesurable (voir le dessin).



On en tire

$$X(\Delta_{ij}) = \sum_{abcd} \psi_{abcd} \, W(\Delta_a \times \Delta'_j) \, W(\Delta_i \times \Delta'_d) \quad \text{si} \quad i \in c, \; j \in b$$

$$= 0 \quad \text{sinon}$$

et par conséquent, c et b étant déterminés par $i \in c$, $j \in b$

$$X(\Delta_{ij})^2$$

$$= \sum_{a\bar{a}d\bar{d}} \psi_{abcd} \, \psi_{\bar{a}bc\bar{d}} \, W(\Delta_a \times \Delta'_j) \, W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta'_j) \, W(\Delta_i \times \Delta'_d) \, W(\Delta_i \times \Delta'_{\bar{d}}).$$

Nous sommons en i, j et voulons montrer que la somme converge dans L^1 vers

$$\int_{R_1 \times R_1} \psi^2(x, y)\, dx dy = \sum_{abcd} \psi^2_{abcd}\, Z(\Delta_{ab})\, Z(\Delta_{cd}).$$

Les fonctions ψ étant toutes bornées, il suffit de montrer que pour $a, b, c, d, \bar{a}, \bar{d}$ fixés, on a dans L^1

$$\lim \sum_{i \in c, j \in b} W(\Delta_a \times \Delta'_j)\, W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta'_j)\, W(\Delta_i \times \Delta'_d)\, W(\Delta_i \times \Delta'_{\bar{d}}) = 0$$
$$\text{si } a \neq \bar{a} \text{ ou } d \neq \bar{d} \qquad (*)$$

$$\lim \sum_{i \in c, j \in b} W(\Delta_a \times \Delta'_j)^2\, W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 = Z(\Delta_{ab})\, Z(\Delta_{cd}). \qquad (**)$$

Commençons par la somme (**) : nous écrivons l'inégalité (13) pour le mouvement brownien $W(]0,s] \times \Delta'_d)$, de paramètre $m(\Delta'_d)$, sur $]u, v] = \Delta_c$

$$E\left[\left(\sum_{i \in c} W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 - m(\Delta_c)\, m(\Delta'_d)\right)^2\right] \leqq c\,|\sigma|\, m(\Delta_c)\, m(\Delta'_d)$$

donc

$$\sum_i W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 \longrightarrow m(\Delta_c)\, m(\Delta'_d) \quad \text{dans } L^2$$

de même

$$\sum_j W(\Delta_a \times \Delta'_j)^2 \longrightarrow m(\Delta_a)\, m(\Delta'_b) \quad \text{dans } L^2.$$

Faisant le produit, nous trouvons

$$\sum_{ij} W(\Delta_c \times \Delta'_j)^2\, W(\Delta_i \times \Delta'_d)^2 \longrightarrow m(\Delta_c)\, m(\Delta'_d)\, m(\Delta_a)\, m(\Delta'_b) \quad \text{dans } L^1$$

le résultat cherché.

Passons à (*). Supposons par exemple $d \neq \bar{d}$; d'après (14) $E\left[\left(\sum_i W(\Delta_i \times \Delta'_d)\, W(\Delta_i \times \Delta'_{\bar{d}})\right)^2\right]$ tend vers zéro tandis que d'après (13) si $a = \bar{a}$ ou (14) si $a \neq \bar{a}$ $E\left[\left(\sum_j W(\Delta_a \times \Delta'_j)\, W(\Delta_{\bar{a}} \times \Delta'_j)\right)^2\right]$ reste borné. Nous avons donc deux variables aléatoires, dont la première tend vers 0 dans L^2, la seconde restant bornée ; leur produit tend vers 0 dans L^1, ce que nous désirions.

Etude de $[X^1, X^2]$.

Il s'agit ici de montrer que

$$\sum_{abcd} \theta_{cb}\, \psi_{abcd} \sum_{i\in c,\, j\in b} W(\Delta_{ij})\, W(\Delta_a \times \Delta'_j)\, W(\Delta_i \times \Delta'_d)$$

converge vers 0 dans L^1. Comme on l'a fait plus haut, on se ramène à montrer que pour a, b, c, d, fixés, on a

$$E\left[\left(\sum_{i\in c,\, j\in b} W(\Delta_{ij})\, W(\Delta_a \times \Delta'_j)\, W(\Delta_i \times \Delta'_d)\right)^2\right] \longrightarrow 0$$

lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$.

Or si l'on développe cette somme, les termes correspondant à des couples (i, j) (k, l) différents disparaissent, l'espérance correspondant aux carrés se calcule, et il reste simplement

$$\sum_{i\in c,\, j\in b} Z(\Delta_{ij})\, Z(\Delta_c \times \Delta'_j)\, Z(\Delta_i \times \Delta'_d) = Z(\Delta_a \times \Delta'_d) \sum_{i\in c,\, j\in b} Z(\Delta_{ij})^2$$

et la démonstration est achevée.

4. VARIATIONS MIXTES

Nous fixons deux niveaux t et t' $(t \leqq t')$ et désignons par $R_{s,tt'}$ le rectangle $R_{st'} \setminus R_{st}$. Désignons aussi par $\pi_{s,tt'}$ la trace de la partition π sur $R_{s,tt'}$ (comme d'habitude, nous continuons à désigner par Δ_{ij}, Δ_i, Δ'_j les rectangles ou intervalles correspondants). On est amené à étudier les 1-variations mixtes des deux types

$$\sum_{ij} X(\Delta_i, t)\, X(\Delta_{ij}) \quad \text{et} \quad \sum_{ij} E[X(\Delta_i, t)\, X(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}]$$

la sommation étant faite sur $\pi_{s,tt'}$.

Les sommes inconditionnelles ont déjà été étudiées au paragraphe II. En effet, en sommant sur j on voit qu'elles sont égales à $\sum_i X(\Delta_i, t)\, (X(\Delta_i, t') - X(\Delta_i, t))$ autrement dit, ce sont des différences de 1-variations produit. Nous nous intéresserons donc uniquement aux variations conditionnelles. Etant données deux s.m.r. X et Y, nous poserons

$$\{X, Y\}_\pi = \sum_{ij} E[X(\Delta_i, t)\, Y(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}]$$

et $\{X\}_\pi = \{X, X\}_\pi$ (une notation complète devrait rappeler s, t, t', et le fait qu'il s'agit de 1-variations mixtes, mais ce serait très lourd).

THEOREME 3. – *Lorsque* $|\pi| \longrightarrow 0$, *la 1-variation mixte conditionnelle* (1) *converge dans* L^1 *vers*

$$\{X\}_{s,tt'} = \int_{R_{st}} L^1(t, \mathbf{z}) \left(\int_t^{t'} \beta_1(v, \mathbf{z})\, dv\right) d\mathbf{z}. \tag{15}$$

On peut montrer que cette convergence a lieu uniformément en s, t, t'. On remarquera aussi que l'on ne peut affirmer l'égalité des 1-variations mixtes, conditionnelle et inconditionnelle, que pour une classe restreinte de s.m.r., contenant les s.m.r telles que $\psi = 0$ (on peut montrer que ce sont exactement les s.m.r. dont la partie martingale a une variation indépendante du chemin, au sens de Cairoli et Walsh).

Démonstration. – La méthode que nous avons suivie pour établir les théorèmes 1 et 2 doit ici être modifiée, car la fonction bilinéaire $\{X, Y\}$ n'est ni symétrique, ni positive. Rappelons que la représentation de X est notée $X = X^1 + \ldots + X^5$, avec un ordre bien défini sur les cinq types.

LEMME. – *Si* X *et* Y *sont deux s.m.r., on a*

$$\|\{X, Y\}_\pi\|_{L^1} \leqq C \|X\|_{smr} \|Y\|_{smr}. \tag{16}$$

Plus précisément, si Y *est du type 1, 2 ou 4 (types de 2-martingales) on a* $\{X, Y\}_\pi = 0$; *si* Y *est du type 5, ou si* $X = X^4 + X^5$ *(types à 1-variation finie) on a*

$$\|\{X, Y\}_\pi\|_{L^1} \leqq C |\pi|^{1/2} \|X\|_{smr} \|Y\|_{smr}. \tag{17}$$

Avant de démontrer le lemme, remarquons que c'est bien la forme nécessaire pour effectuer le passage à la limite à partir des fonctions simples : si X est une s.m.r., Y une s.m.r. simple telle

(1) En fait, notre démonstration donne un résultat un peu plus général, relatif à $\{X, Y\}_\pi$.

que $\|X - Y\|_{smr}$ soit petit, on a

$$\{X\}_\pi - \{Y\}_\pi = \{Y, X - Y\}_\pi + \{X - Y, X\}_\pi$$

et l'on sait majorer chacun des deux termes du second membre. D'autre part, pour étudier la convergence de $\{X\}_\pi$ lorsque $|\pi| \longrightarrow 0$, il suffira d'étudier $\{X^1 + X^2 + X^3, X^3\}$.

Démonstration du Lemme. – Remarquons d'abord que $\{X, Y\} = 0$ dès que Y est une 2-martingale. En effet, un conditionnement préalable par $\mathcal{F}_{\infty t_j}$ annule les termes $Y(\Delta_{ij})$.

Etude du terme $\{X, Y^5\}$.

Nous utilisons la majoration

$$E[|E[X(\Delta_i, t)\, Y(\Delta_{ij}) \,|\, \mathcal{F}_{ij}]|] \leqq E[|X(\Delta_i, t)|\,|Y(\Delta_{ij})|].$$

Puis nous remplaçons $|Y(\Delta_{ij})|$ par $\int_{\Delta_{ij}} |\varphi_z|\, dz$ et sommons en j :

$$E[|\{X, Y^5\}_\pi|] \leqq E\left[\sum_i |X(\Delta_i, t)| \int_{\Delta_i \times [0,1]} |\varphi_z|\, dz\right].$$

Nous appliquons alors l'inégalité de Schwarz ; d'après le théorème 1 $E\left[\sum_i X(\Delta_i, t)^2\right] \leqq C\|X\|^2_{smr}$ et il reste à majorer

$$E\left[\sum_i \left(\int_{\Delta_i \times [0,1]} |\varphi_z|\, dz\right)^2\right] \leqq E\left[\sum_i m(\Delta_i) \int_{\Delta_i \times [0,1]} \varphi_z^2\, dz\right]$$
$$\leqq |\pi|\, \|Y^5\|^2_{smr}.$$

Etude de $\{X, Y\}$ lorsque $X = X^4 + X^5$.

Nous pouvons nous ramener au cas où Y est du type 3, car les types 1, 2, 4 donnent 0, et 5 vient d'être étudié. Nous représentons Y de la manière habituelle $Y_w = \int_{R_w} L(v, x)\, dW_x \quad (w = (u, v))$ et par conséquent

$$Y(\Delta_{ij}) = \int_{\Delta_i \times]0, t_j]} L(\Delta'_j, x)\, dW_x + \int_{\Delta_{ij}} L(t_{j+1}, x)\, dW_x .$$

Le second terme disparaît dans le conditionnement, comme au début de la démonstration. Notons donc U_{ij} le premier terme, et majorons

$$E[\,|E[X(\Delta_i\,,\,t)\,Y(\Delta_{ij})\,|\,\mathcal{F}_{ij}]|\,] \leqq E[\,|X(\Delta_i\,,\,t)|\,|U_{ij}|\,]\,.$$

Puis

$$U_{ij} = \int_{\Delta_i \times]0,t_{j+1}]} L(\Delta_j', \mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} dv \int_{\Delta_i \times]0,t_{j+1}]} \beta(v\,,\mathbf{x})\,dW_{\mathbf{x}}$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer $]0, t_{j+1}]$ par $]0, v]$, d'après la forme de β. Alors

$$\sum_i |U_{ij}| \leqq \int_t^{t'} dv \left| \int_{\Delta_i \times]0,v]} \beta(v\,,\mathbf{x})\,dW_{\mathbf{x}} \right|.$$

Notons J_i le second membre ; l'inégalité de Schwarz nous donne

$$E[\,|\{X, Y\}_\pi|\,] \leqq E\left[\sum_i X(\Delta_i\,,\,t)^2\right]^{1/2} E\left[\sum_i J_i^2\right]^{1/2}.$$

Le premier facteur est majoré par $C\,\|X\|_{smr}$ d'après le théorème 1. En fait, une analyse un peu plus précise conduirait à une majoration du type $C\,|\pi|^{1/2}\,\|X\|_{smr}$ du fait que X se réduit à $X^4 + X^5$, mais nous n'avons pas vraiment besoin de ce résultat. Il nous suffit pour la suite de savoir que ce facteur tend vers 0 avec $|\pi|$, ce qui résulte du théorème 1.

Le second facteur se majore ainsi :

$$J_i^2 \leqq (t' - t) \int_t^{t'} dv \left(\int_{\Delta_i \times]0,v]} \beta(v\,,\mathbf{x})\,dW_{\mathbf{x}}\right)^2$$

d'où en supprimant le facteur $t' - t \leqq 1$ et en intégrant

$$E[J_i^2] \leqq E\left[\int_{[0,1]\times\Delta_i\times]0,1]} \beta^2(v\,,\mathbf{x})\,dv\,d\mathbf{x}\right]$$

et finalement, après sommation en i, le dernier facteur est majoré par $\|\beta\|_2 = \|Y\|_{smr}$.

Etude de $\{X, Y\}$ lorsque $X = X^1 + X^2 + X^3$.

Ici, d'après ce qui précède, nous pouvons supposer que $Y = Y^3$.

Nous écrirons les deux représentations

$$X_{\mathbf{w}} = \int_{R_{uv}} L(v\,,\mathbf{x})\,dW_{\mathbf{x}} \quad (\mathbf{w} = (u\,,v))$$

$$Y_{\mathbf{w}} = \int_{R_{uv}} \Lambda(v\,,\mathbf{x})\,dW_{\mathbf{x}}\,, \quad \text{avec} \quad \Lambda(v\,,\mathbf{x}) = \int_0^v \beta(r\,,\mathbf{x})\,dr. \qquad (18)$$

Introduisons les deux martingales à un paramètre suivantes, par rapport à la famille $(\mathcal{F}^1_s)$

$$U_s = X_{st} = \int_{R_{st}} L(t, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}}$$

$$V_s = X_{st_{j+1}} - X_{st_j} = \int_{]0,s]\times\Delta'_j} \Lambda(t_{j+1}, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}} + \int_{R_{st_j}} \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x})\, dW_{\mathbf{x}}\,.$$

Le crochet $\langle U, V\rangle$ par rapport à la famille $(\mathcal{F}^1_s)$ est donné par

$$\langle U, V\rangle_s = \int_{R_{st}} L(t, \mathbf{x})\, \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

et alors nous avons

$$\begin{aligned} E[X(\Delta_i, t)\, Y(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}] &= E[U(\Delta_i)\, V(\Delta_i) \mid \mathcal{F}_{ij}] \\ &= E[U(\Delta_i)\, V(\Delta_i) \mid \mathcal{F}^1_{s_i} \mid \mathcal{F}_{ij}] = E[\langle U, V\rangle_{s_{i+1}} - \langle U, V\rangle_{s_i} \mid \mathcal{F}^1_{s_i} \mid \mathcal{F}_{ij}] \end{aligned}$$

et par conséquent, en prenant une espérance

$$\begin{aligned} E[\,|E[X(\Delta_i, t)\, Y(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}]|\,] &\leqq E\left[\int_{\Delta_i\times]0,t]} |L(t, \mathbf{x})\, \Lambda(\Delta'_j, \mathbf{x})|\, d\mathbf{x}\right] \\ &\leqq E\left[\int_{\Delta_i\times]0,t]} |L(t, \mathbf{x})| \left(\int_{\Delta'_j} |\beta(v, \mathbf{x})|\, dv\right) d\mathbf{x}\right]. \end{aligned}$$

Sommant en j, puis en i,

$$E[\,|\{X, Y\}_\pi|\,] \leqq E\left[\int_{]0,1]\times]0,t]} |L(t, \mathbf{x})| \left(\int_t^{t'} |\beta(v, \mathbf{x})|\, dv\right) d\mathbf{x}\right].$$

Une nouvelle application de l'inégalité de Schwarz nous donne comme majorant du second membre

$$E\left[\int_{]0,1]\times]0,t]} L^2(t, \mathbf{x})\, d\mathbf{x}\right]^{1/2} E\left[\int_{]0,1]\times R_1} \beta(v, \mathbf{x})^2\, dv\, d\mathbf{x}\right]^{1/2} \leqq C\, \|X\|_{smr}\, \|Y\|_{smr}\,.$$

Le lemme est entièrement établi.

Nous passons maintenant à la convergence proprement dite. Bien que nous n'ayons pas donné d'énoncé formel, il est intéressant d'étudier, non seulement la convergence de $\{X\}_\pi$, mais celle de $\{X, Y\}_\pi$ pour tout couple de s.m.r.. D'autre part, d'après la discussion précédente, le seul terme qui ne converge pas vers 0 dans L^1 est $\{X^1 + X^2 + X^3, Y^3\}$. On peut donc supposer que X se réduit à $X^1 + X^2 + X^3$, Y à Y^3, et on supposera que X et Y sont donnés par les représentations (18). Nous voulons montrer que

$$\lim_{|\pi|\to 0} \{X, Y\}_\pi = \int_{R_{s,tt'}} L(t, \mathbf{x}) \left(\int_t^{t'} \beta(v, \mathbf{x})\, dv\right) d\mathbf{x}. \tag{19}$$

Comme nous l'avons fait pour les théorèmes précédents, il suffit d'établir cela lorsque X et Y sont des s.m.r. simples associées à une subdivision $\pi_0 = \sigma_0 \times \tau_0$, et nous pouvons supposer que t et t' sont deux niveaux t_p et t_q de π_0. On peut aussi se ramener au cas où la subdivision variable π est plus fine que π_0.

La s.m.r. $Y = Y^3$ est une somme de s.m.r. élémentaires de la forme suivante : si $\mathbf{w} = (u, v)$

$$Y_{\mathbf{w}} = \beta_{abc}\, m(\,]0, v] \cap \Delta'_c)\, W(R_{\mathbf{w}} \cap \Delta_{ab})$$

où Δ_{ab} est un rectangle de π_0, Δ'_c un intervalle de τ_0 avec $b < c$, et β_{abc} est $\mathcal{F}_{ac}$-mesurable bornée. On a alors si Δ_{ij} est un rectangle de π

$$\begin{aligned} Y(\Delta_{ij}) &= \beta_{abc}\, m(\Delta'_j)\, W(\Delta_i \times \Delta'_b) \quad \text{si} \quad i \in a,\ j \in c \\ &= 0 \ \text{sinon.} \end{aligned}$$

Pour établir la formule, il n'est pas nécessaire de sommer en a, b, c : nous pouvons la démontrer pour chaque terme, et sommer ensuite. Donc a, b, c sont des indices fixés dans la suite. D'autre part, nous ne nous intéressons qu'aux Δ_{ij} placés entre t et t', donc on a $p \leqq c < q$.

Passons à X. Il est facile de voir que X admet la représentation suivante sur un rectangle Δ_{ef} de π : si $\mathbf{w} = (u, v) \in \Delta_{ef}$,

$$X_{\mathbf{w}}(\omega) = \rho_{ef}(v, \omega)\, W(R_{uv} \cap \Delta_{ef}) + \sum_{g<f} \rho_{eg}(\omega)\, W(R_{uv} \cap \Delta_{eg}) + r_{ef}(v, \omega)$$

où les variables aléatoires $\rho_{ef}(v, .)$, $r_{ef}(v, .)$, $\rho_{eg}(.)$ sont $\mathcal{F}_{s_e v}$-mesurables et intégrables. Alors, toujours pour $v \in \Delta'_f$

$$\begin{aligned} L(v, \mathbf{z}) = \rho_{ef}(v, .) \ \text{si} \ \mathbf{z} \in \Delta_{ef},\ \rho_{eg} \ \text{si} \ \mathbf{z} \in \Delta_{eg},\ g < f, \\ 0 \ \text{si} \ \mathbf{z} \in \Delta_{eg},\ g > f. \end{aligned}$$

Calculons alors $E[X(\Delta_i, t)\, Y(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}]$, en rappelant que a, b, c, p, p' sont des constantes, que $b < c$, que $p \leqq c < p'$. Si $i \notin a$ ou $j \notin c$, le produit est nul. Si $i \in a$ et $j \in c$, le produit vaut

$$\sum_{g \leqq p} \beta_{abc}\, \rho_{ag}\, m(\Delta'_j)\, W(\Delta_i \times \Delta'_b)\, W(\Delta_i \times \Delta'_g).$$

Avant de conditionner par $\mathcal{F}_{ij}$, conditionnons par $\mathcal{F}_{s_i \infty}$: le produit des deux accroissements de W est remplacé par $Z(\Delta_i \times \Delta'_b)\, \delta_{bg}$, et le conditionnement par $\mathcal{F}_{ij}$ ne change plus rien. Ainsi

$$E[X(\Delta_i\,,\,t)\,Y(\Delta_{ij})\,|\,\mathcal{F}_{ij}] = \beta_{abc}\,\rho_{ab}\,m(\Delta_{ij})\,m(\Delta'_b) \text{ si } b \leqq p\,,\ i\in a\,,\ j\in c$$
$$= 0 \text{ sinon}$$

et la sommation sur $i\,,j$ donne

$$\{X\,,Y\}_\pi = \beta_{abc}\,\rho_{ab}\,m(\Delta_{ac})\,m(\Delta'_b)\,\mathbf{1}_{\{b\leqq p\}}\,.$$

Il est facile de voir que cette expression (qui ne dépend pas de π) est égale à l'intégrale (19). La démonstration est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. WONG et M. ZAKAI, Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter, *Z. Wahrscheinlichkeits theorie,* 29 (1974), 109-122.

[2] R. CAIROLI et J.B. WALSH, Stochastic integral in the plane, *Acta Mathematica,* 134 (1975), 111-183.

[3] E. WONG et M. ZAKAI, Weak martingales and stochastic integrals in the plane, *Annals of Prob.,* Vol. 4 (1976), 570-586.

[4] R. CAIROLI et J.B. WALSH, Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales, *Z. Wahrsch.,* 44 (1978), 279-306.

[5] X. GUYON et B. PRUM, Processus à indice dans $[0,1]^2$, Préprint Orsay (1978).

[6] Séminaire de Probabilités, Strasbourg 1, Springer-Verlag, (1967), 91-92.

Manuscrit reçu le 1er juin 1978
révisé le 2 avril 1979.

X. GUYON et B. PRUM,
Université Paris-Sud
Bât. Math. (425)
91405 Orsay (France).

§2-2 : Etude de la variation conditionnelle du carré d'une m.f.r. : le processus à variation bornée associé à une m.f.r.

Soit $X = M + P_1 + P_2$ une m.f.r. de L^4 $(M = M^* + M^{**})$.
Anticipons alors sur une conséquence de la formule de Ito donnée au chapitre VI. Cette formule appliquée à la fonction : $f(x) = x^2$ et à la m.f.r. X donne la décomposition de la s.m.r. X^2 :

$$X^2_{st} = 2\int_{R_{st}} X(\xi)X(d\xi) + 2\,J_{XX}(s,t) + \langle X\rangle^{(1)}_{st} + \langle X\rangle^{(2)}_{st} - \langle X\rangle_{st}$$

et donc la partie absolument continue de X^2_{st} est :

$$(1)\quad \langle\langle X\rangle\rangle_{st} = 2\,J_{P_1P_2}(s,t) + 2\int_{[0,t]\times R_{st}} L_1\,\beta_1(y;x,v)\,dy\,dx\,dv$$

$$+\,2\int_{R_{st}\times[0,s]} L_2\beta_2(u,y;x)\,du\,dy\,dx + \langle X\rangle_{st}$$

En particulier, si X est une m.f.r. de L^4 à partie martingale non forte M^{**} nulle, ce processus s'écrit encore :

$$(2)\qquad \langle\langle X\rangle\rangle_{st} = 2\,J_{P_1P_2}(s,t) + \langle X\rangle^{(1)}_{st} + \langle X\rangle^{(2)}_{st} - \langle X\rangle_{st}$$

Remarquons que $\langle\langle X\rangle\rangle_{st}$ est défini, dans L^1 , dès que X est dans L^2 .
On a la propriété :

Théorème 2-1 (cf. chapitre VI)

Si X est une m.f.r. de L^4 , il existe un unique processus absolument continu (on dira aussi à variations bornées) $\langle\langle X\rangle\rangle_{st}$ tel que $X^2 - \langle\langle X\rangle\rangle$ soit une m.f.r. $\langle\langle X\rangle\rangle$ est donnée par la formule (1), (2) si X est sans partie martingale non forte.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que ce processus est la limite des variations, conditionnelles de X^2 :

Si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition de R_{11} , $\Delta_{ij} =]z_{ij}, z_{i+1,j+1}]$, $z_{ij} = (s_i, t_j)$, et $\mathfrak{F}_{ij} = \mathfrak{F}_{z_{ij}}$, on posera :

$$<<X>>_{\pi_{st}} = \sum_{ij} E(X^2(\Delta_{ij})_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij}) , \quad (\Delta_{ij})_{st} = \Delta_{ij} \cap R_{st} .$$

Théorème 2-2

Si X est une m.f.r. de L^2 , alors

$$\lim_{|\pi|\to 0} <<X>>_{\pi_{st}} \overset{u\cdot L^1}{=} <<X>>_{st} \quad \text{(uniformément sur } R_{11} \text{ dans } L^1)$$

Démonstration

La démarche générale de la démonstration est la suivant :

- Développer par bilinéarité $X^2(\Delta)$

- Transformer les quantités $X\cdot Y(\Delta)$ en quantités du type $X(\Delta')Y(\Delta'')$ et examiner les termes subsistant après conditionnement.

- Montrer, au moyen d'inégalités maximales que l'on peut se ramener à l'étude de m.f.r. simples.

-Identifier les limites pour une m.f.r. lorsque la partition est suffisamment fine.

On a tout d'abord :

$$X^2(\Delta) = M^2(\Delta) + P_1^2(\Delta) + P_2^2(\Delta) + 2(MP_1 + MP_2 + P_1P_2)(\Delta)$$

On utilisera le lemme suivant :

si $\quad \Delta =]z,z'] \quad z = (s,t) \quad z' = (s',t')$

$$\Delta_1 =](s,0),(s',t)] \ , \quad \Delta_2 =](0,t),(s,t')]$$

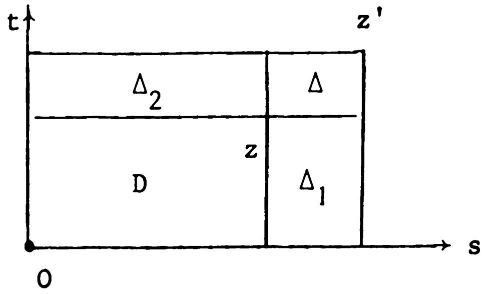
$$\text{et} \quad D = R_z$$

alors :

Lemme 2-1 (cf. chapitre I)

Si X et Y sont deux fonctions définies sur R_{11}, nulles sur les axes, alors on a :

$$XY(\Delta) = X(D)Y(\Delta) + X(\Delta)Y(D) + X(\Delta_1)Y(\Delta_2) + X(\Delta_2)Y(\Delta_1) + X(\Delta_1)Y(\Delta) + X(\Delta)Y(\Delta_1) + X(\Delta_2)Y(\Delta) + X(\Delta)Y(\Delta_2) + X(\Delta)Y(\Delta)$$



Remarquons que cette formule n'est autre que la formule de Taylor (cf. chapitre VI) appliquée ici dans le cas très particulier de l'accroissement rectangulaire sur de Δ de la fonction $X.Y(z)$ pour la partition $\{\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta\}$ de $R_{z'}$.

Etude de $M^2(\Delta)$

La première somme conditionnelle à étudier est

$$\sum_{ij} E(M^2(\Delta_{ij})_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij}) = \sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij})$$

La deuxième égalité résultant du fait que M est une martingale (cf. chapitre I, §4, propriété 4-3).

Lemme 2-2

Si M, N sont deux martingales de L^2, on a :

$$E \sup_{(s,t)\in R_{11}} \left| \sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} - N(\Delta_{ij})^2_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij})\right| \leq 64\, ||M-N||_2\, ||M+N||_2$$

<u>Démonstration</u>

On a de façon générale :

$$E \sup_{s,t} \left| \sum_{ij} E(Y_{ij}(s,t) \mid \mathfrak{F}_{ij}) \right| \leq E \sup_{st} \sum_{ij} \left| E\,(Y_{ij}(s,t) \mid \mathfrak{F}_{ij}) \right|$$

$$\leq E \sup_{st} \sum_{ij} E(|Y_{ij}(s,t)| \mid \mathfrak{F}_{ij})$$

$$\leq E \sum_{ij} E(\sup_{st} |Y_{ij}(s,t)| \mid \mathfrak{F}_{ij})$$

$$= E \sum_{ij} \sup_{st} |Y_{ij}(s,t)| \qquad \square$$

—

Utilisant cette majoration pour :

$$Y_{ij}(s,t) = M(\Delta_{ij})^2_{st} - N(\Delta_{ij})^2_{st}$$

on obtient :

$$E \sup_{(s,t)} \left| \sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} - N(\Delta_{ij})^2_{st} \mid \mathfrak{F}_{ij}) \right| \leq$$

$$\leq E \sum_{ij} \sup_{st} |(M-N)(\Delta_{ij})_{st}| \sup_{st} |(M+N)(\Delta_{ij})_{st}|$$

$$\leq \sum_{ij} \{E \sup_{st} (M-N)(\Delta_{ij})^2_{st}\}^{1/2} \{E \sup_{st} (M+N)(\Delta_{ij})^2_{st}\}$$

et puisque M et N sont des martingales

$$\leq 16 \sum_{ij} \{E(M-N)(\Delta_{ij})^2\}^{1/2} \{E(M+N)(\Delta_{ij})^2\}^{1/2}$$

$$\leq 16 \, ||M-N||_2 \, ||M+N||_2 \ . \qquad \blacksquare$$

Approchons alors à ϵ près M par une martingale simple M_n :

$$||M - M_n||_2 \leqslant \varepsilon$$

On peut dans un premier temps réduire l'étude à M_n ; en effet :

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} - M_n(\Delta_{ij})^2_{st} | \mathfrak{F}_{ij})| \leqslant 16\ \varepsilon\ ||M+M_n||$$

quantité inférieure à 32 ϵ si ϵ a été choisi inférieur à $||M||$, la majoration étant <u>uniforme</u> en π .

On a ramené l'étude au cas d'une martingale simple. Soit π_o la partition sur laquelle est définie M simple et π plus fine que π_o .

Si $\Delta_{ab} \in \pi_o$, $\Delta_{ij} \in \pi$ et $\Delta_{ij} \subset \Delta_{ab}$, on a :

$$M(\Delta_{ij}) = \theta_{ab}\ W(\Delta_{ij}) + \sum_{dc\ell k} \psi_{dbac}\ W(\Delta_{\ell j})\ W(\Delta_{ik})$$

où la sommation est étendue sur les c,d convenables de π_o , sur les ℓ tels que $\Delta_{\ell j} \subset \Delta_{db}$ et les k tels que $\Delta_{ij} \subset \Delta_{ac}$.

Il est alors aisé de vérifier que,

$$E(M(\Delta_{ij})^2_{st} | \mathfrak{F}_{ij}) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \Theta^2_M(\xi)d\xi + \int_{(\sigma_{ij})_{st}} \Psi^2_M(\xi,\xi')d\xi\ d\xi'$$

et donc, si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est plus fine que π_o , que :

$$\sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} | \mathfrak{F}_{ij}) = \langle M\rangle_{st}$$

On déduit donc de cette identification et de l'approximation maximale :

$$E \sup_{st} |\ \langle M\rangle_{st} - \langle M_n\rangle_{st}| \leqslant 2||M-M_n||_2\ ||M+M_n||_2$$

que :

$$\sum_{ij} E(M(\Delta_{ij})^2_{st} \mid \mathcal{F}_{ij}) \xrightarrow{u \cdot L^1} \langle M \rangle_{st} .$$

Etude de $P_1^2(\Delta) + 2\, P_1\, M(\Delta)$.- (resp. $P_2^2(\Delta) + 2\, P_2\, M(\Delta)$).-

Utilisant le lemme 2-1, on obtient, utilisant la propriété de 1-martingale de P_1 , de 1- et 2-martingale de M que :

$$E(P_1^2(\Delta_{ij}) + 2M\, P_1(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}) = 2\, E(P_1(\Delta_i,j)\; P_1(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij})$$

$$+ 2\, E(M(\Delta_i,j) P_1(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij}) + E(P_1(\Delta_{ij})^2 \mid \mathcal{F}_{ij})$$

$$+ E(M(\Delta_{ij})\; P_1(\Delta_{ij}) \mid \mathcal{F}_{ij})$$

et une même égalité si Δ_{ij} est remplacé par $(\Delta_{ij})_{st}$,

$(\Delta_i,j) = \Delta s_i \times \left]0,t_j\right]$ par $(\Delta_i,j)_s = \left[(\Delta s_i) \cap \left]0,s\right]\right] \times \left]0,t_j\right]$

cette égalité s'écrivant, si on pose :

$$M_1 = M + P_1 \qquad \text{(partie 1-martingale de } X)$$

$$E(P_1^2(\Delta_{ij})_{st} + 2MP_1(\Delta_{ij})_{st} \mid \mathcal{F}_{ij}) = 2E(M_1(\Delta_i,j)_s\; P_1(\Delta_{ij})_{st} \mid \mathcal{F}_{ij})$$

$$+ E(M_1(\Delta_{ij})_{st}\; P_1(\Delta_{ij})_{st} \mid \mathcal{F}_{ij})$$

On va montrer que dans la sommation sur π , seul le premier terme de cette somme est contribuant.

Lemme 2-3

Si M_1 est une 1-martingale représentable de L^2 , P_1 une 1-martingale propre représentable de L^2 , alors :

$$E \sup_{(s,t)} \left| \sum_{ij} E(M_1(\Delta_{ij})_{st} P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{F}_{ij}) \right| \leqslant 8 \, |\pi|_2^{1/2} \, ||M_1||_2 \, ||P_1||_2$$

$$E \sup_{(s,t)} \left| \sum_{ij} E(M_1(\Delta_i,j)_s P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{F}_{ij}) \right| \leqslant 8 \sqrt{3} \, ||M_1|| \quad ||P_1||_2$$

où $|\pi|_2 = \sup_j \{t_{j+1} - t_j\}$.

Démonstration

* D'après la première majoration du lemme précédent :

$$E \sup_{st} \left| \sum_{ij} E(M_1(\Delta_{ij})_{st} P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{F}_{ij} \right| \leqslant$$

$$\leqslant E \sum_{ij} \sup_{st} |M_1(\Delta_{ij})_{st}| \sup_{st} |P_1(\Delta_{ij})_{st}|$$

$$\leqslant \Sigma \; 4 \, \{E \, M_1(\Delta_{ij})^2\}^{1/2} \times 2 \, \{ \, |\pi|_2 \, E \, P_1(\Delta_{ij})^2\}^{1/2}$$

$$\leqslant 8 \, |\pi|_2^{1/2} \, ||M_1||_2 \, ||P_1||_2 \qquad \text{(cf. chapitre III, § 5-2)}$$

* $A = E \sup_{st} \left| \sum_{ij} E(M_1(\Delta_i,j)_s P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{F}_{ij} \right| \leqslant$

$$\leqslant E \sum_{ij} \sup_{s} |M_1(\Delta_i,j)_s| \sup_{st} |P_1(\Delta_{ij})_{st}|$$

$$\leqslant \sum_{ij} \{4 \, E \, (M_1(\Delta_i,j)^2\}^{1/2} \, \{4|\Delta_j| \, E \, P_1(\Delta_{ij})^2\}^{1/2}$$

toujours d'après les majorations maximales obtenues au chapitre III, § 5-2.

Mais :

$$E(M_1(\Delta_i,j)^2 = E\int_{(\Delta_i,j)} L_1^2(t_j,z)dz \leqslant E\int_{(\Delta_i,j)} \mathcal{L}_1^2(z)dz$$

$$\leqslant \int_{\Delta_i\times[0,1]} E\mathcal{L}_1^2(z)dz \qquad (\mathcal{L}_1(z) = \sup_t |L_1(t;z)|)$$

et donc :

$$A \leqslant 4 \sum_{ij} \{|\Delta_j| \int_{\Delta_i\times[0,1]} E\,\mathcal{L}_1^2(z)dz\}^{1/2} \{\int_{\Delta_j\times\Delta_i\times[0,1]} E\,\beta_1^2(v,z)dv\,dz\}^{1/2}$$

$$\leqslant 4\,||\mathcal{L}_1||_2\,||P_1||_2 \leqslant 8\sqrt{3}\,||M_1||_2\,||P_1||_2 \quad .$$

Utilisons ce lemme pour montrer que l'on peut réduire l'étude de la somme conditionnelle :

$$\sum_{ij} E(M_1(\Delta_i,j)_s\,P_1(\Delta_{ij})_{st}|\,\mathcal{F}_{ij})$$

au cas où M_1 et P_1 sont simples. En effet :

$$M_1P_1 - M_{1n}P_{1n} = M_1(P_1-P_{1n}) + (M_1-M_{1n})P_{1n}$$

le lemme précédent appliqué à cette différence donne donc :

$$E\sup_{st} |\sum_{ij} E(M_1(\Delta_i,j)_sP_1(\Delta_{ij})_{st} - M_{1n}(\Delta_i,j)_sP_{1n}(\Delta_{ij})_{st}|\,\mathcal{F}_{ij})| \leqslant$$

$$\leqslant 8\sqrt{3}\,\{||M_1||_2\,||P_1-P_{1n}||_2 + ||M_1-M_{1n}||_2\,||P_{1n}||\}$$

quantité que l'on peut rendre petite, uniformément en π , $(s,t) \in R_{11}$.

Examinons alors ces variations conditionnelles lorsque M_1, P_1 sont simples représentables. Si elles sont définies sur une partition π_o , et si π est une partition plus fine que π_o , on a :

$$E(M_1(\Delta_i,j)_s\, P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathfrak{F}_{ij}) =$$

$$= E\left(\int_{(\Delta_i,j)_s} L_1(t_j;z)W(dz) \times \int_{(\Delta_i,j)_s} \beta_1(t_j;z)W(dz) \times |(\Delta_j)_t| \; | \mathfrak{F}_{ij}\right)$$

Mais, puisque π est plus fine que π_o , $L_1(t_j,z)$ ainsi que $\beta_1(t_j;z)$ sont $\mathfrak{F}_{ij}$-mesurables si $z \in (\Delta_i,j)$ et la quantité précédente est encore égale à :

$$\int_{(\Delta_i,j)_s} L_1 \cdot \beta_1(t_j;z)dz \cdot |(\Delta_j)_t|$$

et par sommation sur π , on obtient :

$$\sum_{ij} E(M_1(\Delta_i,j)_s P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathfrak{F}_{ij}) = \int_{[0,t]\times R_{st}} L_1\; \beta_1(v;z)dv\, dz$$

Ce processus étant à variation bornée, il est aisé de vérifier que uniformément dans L^1 :

$$\int_{[0,t]\times R_{st}} L_{1n} \cdot \beta_{1n}(v;z)dv\, dz \longrightarrow \int_{[0,t]\times R_{st}} L_1 \cdot \beta_1(v;z)dv\, dz$$

d'où le résultat :

$$\Sigma\, E(M_1\; P_1(\Delta_{ij})_{st} | \mathfrak{F}_{ij}) \xrightarrow{u \cdot L^1} 2 \int_{[0,t]\times R_{st}} L_1 \cdot \beta_1(v;z)dv\, dz$$

<u>Etude de $\sum_{ij} E(P_1\; P_2(\Delta_{ij})_{st} | \mathfrak{F}_{ij})$</u>

Utilisant le lemme 2-1 et le fait que P_1 est une 1-martingale, P_2 une 2-martingale, on a :

$$E(P_1P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij}) = E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_i,j)_s|\mathcal{F}_{ij})$$

$$+ E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij})$$

$$+ E(P_1(\Delta_{ij})_{st}\ P_2(\Delta_i,j)_t|\mathcal{F}_{ij})$$

$$+ E(P_1(\Delta_{ij})_{st}\ P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij})$$

et dans la sommation en π , seul le premier terme sera contribuant. En effet :

<u>Lemme 2-4</u>

Si P_1 est une 1-martingale propre représentable de L^2 , P_2 une 2-martingale propre représentable de L^2 , alors :

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij})| \leq 2\ |\pi_2|_2^{1/2}\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2$$

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(\Delta_{ij})_{st}\ P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij})| \leq 4\ |\pi|_2^{1/2}\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2$$

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_i,j)_s|\mathcal{F}_{ij})| \leq\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2$$

(où $|\pi|_1 = \sup_i\{(s_{i+1} - s_i)\}$

<u>Démonstration</u>

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_{ij})_{st}|\mathcal{F}_{ij})| \leq$$

$$\leq \sum_{ij} \{E \sup_s P_1(i,\Delta_j)_t^2\}^{1/2} \{E \sup_{st} P_2(\Delta_{ij})_{st}^2\}$$

Or :

$$E \sup_{s} P_1(i,\Delta_j)_t^2 \leqslant |\Delta_j| \int_{\Delta_j\times[0,1]^2} E\, \beta_1^2(v;z)dv\, dz$$

et donc la suite d'inégalité précédente se pousuit ainsi :

$$\leqslant 2 \sum_{ij} \{|\Delta_j| \int_{\Delta_j\times[0,1]^2} E\, \beta_1^2(v;z)dv\, dz\}^{1/2}\{|\Delta_i| \int_{[0,1]\times\Delta_j\times\Delta_i} E\, \beta_2^2\,(z';u)dz'\, du\}^{1/2}$$

$$\leqslant 2\ |\pi|_2^{1/2}\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2$$

De même on trouve :

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(\Delta_{ij})_{st}\ P_2(\Delta_i,j)_s|\mathfrak{F}_{ij})| \leqslant 2\ |\pi|_1^{1/2}\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2$$

$$E \sup_{st} |\sum_{ij} E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_i,j)_s|\mathfrak{F}_{ij})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{ij} \{|\Delta_j| \int_{\Delta_j\times[0,1]^2} E\, \beta_1^2(v;z)dv\, dz'\}^{\frac{1}{2}}\{|\Delta_j|\int_{[0,1]^2\times\Delta_i} E\, \beta_2^2(z';u)dz'\, du\}^{\frac{1}{2}}$$

et intervertissant les valeurs $|\Delta_j|$ et $|\Delta_i|$,

$$\leqslant\ ||P_1||_2\ ||P_2||_2\ .$$

Utilisant alors la dernière inégalité du lemme, on constate qu'on peut réduire l'étude de cette dernière somme conditionnelle au cas où P_1 et P_2 sont simples. Si π_o est la partition (fixée) sur laquelle sont définies P_1 et P_2 et si π est plus fine que π_o , alors :

$$E(P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_i,j)_t|\mathfrak{F}_{ij}) = P_1(i,\Delta_j)_t\ P_2(\Delta_i,j)_s$$

ce qui, par sommation sur π donne $J_{P_1,P_2}(s,t)$.

Reste alors à constater que si $P_{1n}-P_1$ et $P_{2n}-P_2$ convergent vers 0 dans L^2, alors, J_{P_1,P_2} étant à variation bornée, $J_{P_{1n},P_{2n}}$ tend uniformément dans L^1, vers J_{P_1,P_2} :

$$E \sup_{s,t} |J_{P_1,P_2}(s,t) - J_{P_{1n},P_{2n}}(s,t)|$$

$$\leq E \sup_{s,t} |J_{P_1,P_2-P_{2n}}(s,t)| + E \sup_{s,t} |J_{P_1-P_{1n},P_{2n}}(s,t)|$$

$$\leq ||P_1||_2 \ ||P_2-P_{2n}||_2 + ||P_1-P_{1n}||_2 \ ||P_{2n}||_2 \ .$$

Ceci termine la démonstration du théorème. ■

Remarques

1) Les diverses inégalités maximales apparaissant dans les lemmes 2-1, 2,3 peuvent être généralisées au cas de s.m.r.

2) Le plus gros travail dans la démonstration de ce théorème (comme dans ceux du même type qui vont apparaître dans la partie B de ce chapitre) est dû à la démonstration de l'uniformité en (s,t).

3) La propriété 2-1 utilise l'hypothèse : X est dans L^4. Ici, seule l'hypothèse : X est dans L^2 est utilisée. Ceci est naturel : en effet, pour définir le processus à variations bornées $\langle\langle X\rangle\rangle_{st}$, il est suffisant de le définir dans L^1, ce qui ne nécessite qu'une hypothèse L^2 sur X .

<u>Exemple</u> : Soit la m.f.r.

$$X_{st} = W_{st} + P_1(s,t) + P_2(s,t) \ , \quad (s,t) \in \mathbb{R}_+^2$$

avec :

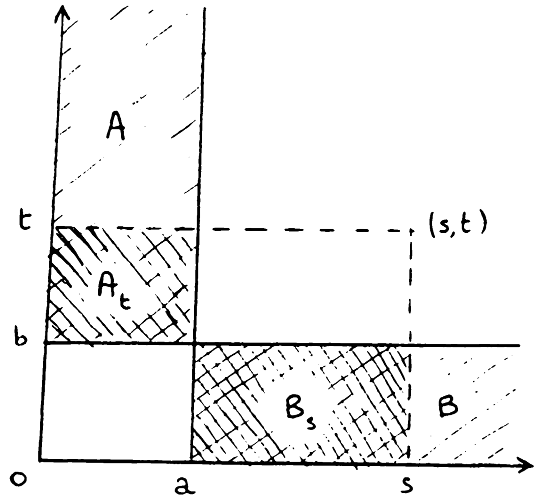
$$P_1(s,t) = |A_t| \ W(B_s)$$

$$P_2(s,t) = W(A_t) \ |B_s|$$

où :

$$A = [0,a] \times [b,+\infty[$$

$$B = [a,+\infty[\times [0,b]$$



$$\langle X\rangle_{st} = st$$

$$\langle X\rangle^{(1)}_{st} = \begin{cases} st & \text{si} \quad (s,t) \not\geq (a,b) \\ st + ab(s-a)(t-b) & \text{sinon} \end{cases}$$

$\langle X\rangle^{(2)}_{st} = \langle X\rangle^{(1)}_{st}$ (la m.f.r. est indépendante du chemin, cf. chapitre V)

$$J_{P_1P_2}(s,t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (s,t) \not\geq (a,b) \\ \int_{[a,s]\times[b,t]} W(B_u) \ W(A_v) du \ dv & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc

$$\langle\langle X\rangle\rangle_{st} = \begin{cases} s,t & \text{si} \quad (s,t) > (a,b) \\ st + 2 \ ab(s-a)(t-b) + \int_{[a,s]\times[b,t]} W(B_u) \ W(A_v) du \ dv \ , & \text{sinon.} \end{cases}$$

PARTIE B

Notations

Outre les notations déjà posées au chapitre III et dans le début de ce chapitre, nous adopterons les notations suivantes :

1) Si $\pi_n = \{\Delta^n_{ij}\}$, $i = 1, N_n$, $j = 1, N'_n$ on notera

$$\mathcal{O}^n_{ij} = [0, s^n_{i+1}] \times \Delta^n_j \times \Delta^n_i \times [0, t^n_{j+1}]$$

$$o^n_{ij} = [0, s^n_i] \times \Delta^n_j \times \Delta^n_i \times [0, t^n_j]$$

(ombre large et ombre réduite de Δ^n_{ij}) et

$$\mathcal{O}^n_{1ij} = \Delta^n_j \times \Delta^n_i \times [0, t^n_{j+1}]$$

$$o^n_{1ij} = \Delta^n_j \times \Delta^n_i \times [0, t^n_j]$$

(ombres dans le sens 1) ; on définit symétriquement $\mathcal{O}^n_{2ij}$ et o^n_{2ij} :

$$\mathcal{O}^n_{2ij} = [0, s^n_{i+1}] \times \Delta^n_j \times \Delta^n_i$$

$$o^n_{2ij} = [0, s^n_i] \times \Delta^n_j \times \Delta^n_i$$

On notera :

$$\sup \quad \text{pour} \quad \sup_{(s,t)\in R_{11}}$$

et

$$\Sigma \quad \text{pour} \quad \sum_{\substack{i=1,N_n \\ j=1,N_n}}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, on omettra les indices n .

2) On dira qu'<u>une convergence a lieu $u\cdot L^p$</u> pour dire qu'elle a lieu dans L^p, uniformément en $(s,t) \in R_{11}$.

3) On notera $\mathcal{S}$ la situation suivante :

<u>Situation ($\mathcal{S}$)</u> : f est une fonction mesurable adaptée, (π_n) une suite de partitions dont le pas tend vers zéro, $\pi_n = \{\Delta_{ij}^n\}$, (f_n) est une suite de fonctions mesurables adaptées π_n-simples, $f_n(i,j)$ note la valeur de f_n sur Δ_{ij} .

4) On adoptera la terminologie "T est non contribuant" pour indiquer que T tend vers zéro avec $|\pi|$.

§3 - Variation (1,0,0) et (0,1,1)

3-1 - Variation (1,0,0)

Théorème 3-1

Si X est une s.m.r. (de L^2), dans la situation ($\mathcal{S}$), si f_n converge vers f au sens de la semi-norme $||f^2||_{X^2}$, alors :

$$\Sigma\, f_n(i,j)\; X(\Delta^n_{ij})_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} \int f(z)\; X(dz)$$

Démonstration

$$D_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j)\; X(\Delta_{ij})_{st} - \int_{R_{st}} f(z)\; X(dz)$$

est une s.m.r.

Le corollaire 5-1 du théorème 5-3 (Chapitre III), donne pour cette s.m.r. :

$$E \sup_{s,t} D_n(s,t)^2 < 64\; ||D_n||_2^2$$

Or, la représentation de D_n s'obtient à partir de $f_n - f$; on obtient :

$$||D_n||^2 = ||(f_n-f)^2||_{X^2} \quad .$$

3-2 - Variation (0,1,1)

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4, renvoyons pour la définition de la s.m.r.

$$J_{ZY}(s,t) = \int_{R_{st}} Y(dx,y)\; Z(x,dy)$$

au chapitre III, § 5-1.3.

3-2-1 : Variation (0,1,1) non pondérée

Théorème 3-2-1

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4, quand $|\pi_n| \to 0$,

$$\Sigma\, Y(\Delta_i^n,j)_{st}\; Z(i,\Delta_j^n)_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} J_{ZY}(s,t)\ .$$

On a :

$$J_{ZY} = L_{1Y}\, L_{2Z}\cdot WW + L_{1Y}\, \varphi_{2Z}\cdot VW + \varphi_{1Y}\, L_{2Z}\cdot WU + \varphi_{1Y}\, \varphi_{2Z}\ .$$

de sorte que :

$$J_{ZY}(\Delta_{ij}) = \int_{\sigma_{ij}} L_{1Y}\, L_{2Z}\, W(dz)\, W(dz') + \int_{\sigma_{1ij}} L_{1Y}\, \varphi_{2Z}\, dv\, W(dz')$$

$$+ \int_{\sigma_{2ij}} \varphi_{1Y}\, L_{2Z}\, W(dz)du + \int_{\Delta_{ij}} \varphi_{1Y}\, \varphi_{1Z}\, du\, dv$$

Si z_{ij}^n est le point inférieur de Δ_{ij}^n, notons pour toute s.m.r. X

$$L_{1X,n}(y;z) = 1_{\{(y,z)\, \varepsilon\, \Delta_j^n \times (i,\Delta_j)^n\}}\, L_{1X}(t_j^n\, ;\, z)$$

$$L_{2X,n}(z;x) = 1_{\{(z,x)\, \varepsilon\, (\Delta_i,j)^n \times \Delta_i^n\}}\, L_{2X}(z\, ;\, s_i^n)$$

$$\varphi_{1X,n}(x,y) = 1_{\{y\, \varepsilon\, \Delta_j^n\}}\, \varphi_{1X}(x,t_j^n)$$

$$\varphi_{2X,n}(x,y) = 1_{\{x\, \varepsilon\, \Delta_i^n\}}\, \varphi_{2X}(s_i^n,y)$$

Ces fonctions interviennent dans la représentation de $Y(\Delta_i,j)_{st}\; Z(i,\Delta_j)_{st}$: omettant par la suite l'indice n quand il n'y a pas ambiguité, on a :

$$Y(\Delta_i,j)_{st} = \int_{(\Delta_i,j)_{st}} L_{1Y,n}(y\ ;\ z)\ W(dz) + \int_{(\Delta_i)_s} \varphi_{1Y,n}(u,v)dv$$

$$Z(i,\Delta_j)_{st} = \int_{(i,\Delta_j)_{st}} L_{2Z,n}(z',x)\ W(dz') + \int_{(\Delta_j)_t} \varphi_{2Z,n}(u,v)du$$

Nous nous appuierons alors le lemme suivant, conséquence immédiate des différents théorèmes de Fubini pour les intégrales en WW, VW, WU et UV.

<u>Lemme 3-2-1</u>

Soit $z_o = (s_o,t_o)$ et les deux processus à un paramètre définis par

$$x(s) = \int_{[s_o,s]\times[o,t_o]} \alpha_1(z')W(dz') + \int_{[s_o,s]} \rho_1(u)du$$

pour $s > s_o$, $\alpha_1(u,v)$ et $\rho_1(u)$ étant $\mathcal{F}_{ut_o}$-mesurables et dans L^4

$$y(t) = \int_{[o,s_o]\times[t_o,t]} \alpha_2(z)\ W(dz) + \int_{[t_o,t]} \rho_2(v)dv$$

pour $t > t_o$, $\alpha_2(u,v)$ et $\rho_2(v)$ étant $\mathcal{F}_{s_o v}$-mesurables et dans L^4.

Alors le processus $X_{st} = x(s)\ y(t)$ est une s.m.r. de L^2, avec $\theta_X=0$

$$\psi_X(z,z') = 1_{\{z\hat{}z_o\hat{}z'\}}\ \alpha_2(z)\ \alpha_1(z')$$

$$\beta_{1X}(v;z') = 1_{\{z_o\hat{}z'\}}\ 1_{\{t_o<v\}}\ \rho_2(v)\ \alpha_1(z')$$

$$\beta_{2X}(z;u) = 1_{\{z\hat{}z_o\}}\ 1_{\{s_o<u\}}\ \rho_1(u)\ \alpha_2(z)$$

$$\phi_X(u,v) = 1_{\{z_o<(u,v)\}}\ \rho_1(u)\ \rho_2(v)$$

Ce lemme donne la représentation de la s.m.r. $Y(\Delta_i,j)_s\ Z(i,\Delta_j)_t$ en

* la partie martingale $\int_{(o_{ij})_{st}} L_{1Y,n}\ L_{2Z,n}\ W(dz)\ W(dz')$ où o_{ij}

est "l'ombre étroite" de Δ_{ij} .

* la partie 1-m.p. $\int_{(\Delta_j)_t\times(\Delta_i,j)_s} L_{1Y,n}\ \varphi_{2Z,n}\ du\ W(dz)$

* la partie 2-m.p. symétrique

* la partie à v.b. $\int_{(\Delta_{ij})_{st}} \varphi_{1Y,n}\ \varphi_{2Y,n}\ du\ dv$

On en déduit donc que :

$$D_n(s,t) = \Sigma\ Y(\Delta_i,j)_s\ Z(i,\Delta_j)_t - J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st}$$

est une s.m.r. dont on notera la décomposition

$$D_n = m_n + p_n^1 + p_n^2 + b_n \quad .$$

Par le corollaire 5-1 du chapitre III ,

$$E\ \sup_{s,t} D_n(s,t)^2 < 64\Big[\,||m_n||^2 + |\pi_n|_2\ ||p_n^1||^2 + |\pi_n|_1\ ||p_n^2||^2$$
$$+ |\pi_n|_1\ |\pi_n|_2\ ||b_n||^2$$

où $||\cdot||$ note les normes L^2 respectives. Donnant la représentation de chaque partie de la décomposition, montrons que chacune de ces normes tend vers zéro (il suffit pour $||p_n^i||$ et $||b_n||$ de montrer qu'elles sont bornées.)

<u>Norme $||m_n||$</u>

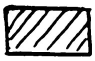
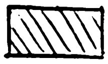
Pour chaque rectangle Δ_{ij} , on a donc introduit deux ombres :

la grande ombre $\quad \mathcal{O}_{ij} = [0,s_{i+1}] \times \Delta_j \times \Delta_i \times [0,t_{j+1}]$

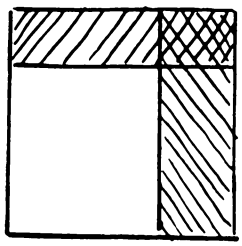
l'ombre restreinte $\quad o_{ij} = [0,s_i] \times \Delta_j \times \Delta_i \times [0,t_j]$

Notons :

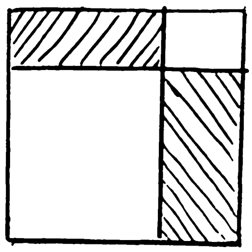
$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{O}_{ij} - o_{ij}$$

la différence des ombres. Sur les schémas suivants, on a représenté ces parties, ensemble des (z,z') où $z \in$  $z' \in$ 

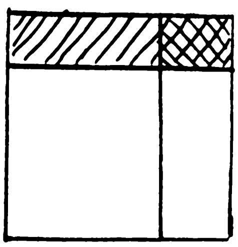
$\mathcal{O}_{ij}$:



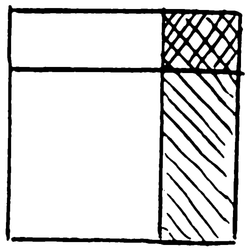
o_{ij} :



$\mathcal{E}_{ij}$:



<u>ou</u>



La mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}^4$) de $\mathcal{E}_{ij}$ vérifie donc :

$$|\mathcal{E}_{ij}| \leq |\Delta_{ij}| \left[|\Delta_i| + |\Delta_j| \right]$$

(alors que $|o_{ij}| \leq |\mathcal{O}_{ij}| \leq |\Delta_{ij}|$) . De sorte que si l'on note pour une partition π_n

$$\mathcal{E}^n = \cup \mathcal{E}_{ij}$$

on a :

$$|\mathcal{E}^n| < 2\,|\pi_n|$$

On peut alors écrire

$$m_n = \psi_n \cdot WW$$

avec

$$\psi_n = \Sigma \left[1_{\mathcal{O}_{ij}} \{L_{1Y,n}\, L_{2Z,n} - L_{1Y}\, L_{2Z}\} - 1_{\mathcal{O}_{ij}}\, L_{1Y}\, L_{2Z} \right]$$

$$= -1_{\mathcal{E}^n}\, L_{1Y}\, L_{2Z} + \Sigma\, 1_{\mathcal{O}_{ij}} \{L_{1Y,n}\, L_{2Z,n} - L_{1Y}\, L_{2Z}\}$$

$\mathcal{O}_{ij}$ et $\mathcal{E}^n$ étant disjoints (voir schéma)

$$||m_n||^2 = E \int_{\mathcal{E}^n} L_{1Y}^2\, L_{2Z}^2\, dz\, dz' + E \int_{R_{11}^2} \Sigma\, 1_{\mathcal{O}_{ij}} \{L_{1Y,n} L_{2Z,n} - L_{1Y} L_{2Z}\}^2\, dz\, dz'$$

* D'une part :

$$Q = E \int_{\mathcal{E}^n} L_{1Y}^2(y;x,v) L_{2Z}^2(u,y;x) du\, dy\, dx\, dv \leq E \int_{\mathcal{E}^n} \mathcal{L}_{1Y}^2(x,v) \mathcal{L}_{2Z}^2(u,y) du\, dy\, dx\, dv$$

(où $\mathcal{L}_1(z) = \sup L_1(y;z)$, et de même pour $\mathcal{L}_2$, comme au chapitre III , § 5-3)

$$Q < \{E \int_{\mathcal{E}^n} \mathcal{L}_{1Y}^4(z) dz\, dz'\}^{1/2} \{E \int_{\mathcal{E}^n} \mathcal{L}_{2Z}^4(z') dz\, dz'\}^{1/2}$$

quantités qui tendent vers zéro car d'une part $\mathcal{L}_{1Y}$ et $\mathcal{L}_{2Z}$ sont dans L^4 (chapitre III, th. 5-5) et d'autre par $|\mathcal{E}^n| < 2|\pi_n|$ qui tend vers zéro.

* D'autre part, la continuité en y de $L_{1Y}(y;z)$ et la continuité en x de $L_{2Z}(z';x)$ impliquent que $F = 1_{\mathcal{O}_{ij}} \{L_{1Y,n}\, L_{2Z,n} - L_{1Y}\, L_{2Z}\}$ tend simplement vers zéro lorsque $n \to \infty$. Par ailleurs :

$$E \int_{R_{11}^2} F_n(z,z')dz\,dz' < 2\,E \int_{R_{11}^2} \mathcal{L}^2_{1Y}(z)\,\mathcal{L}^2_{2Z}(z')\,dz\,dz'$$

dont on montre comme ci-dessus (à l'aide du théorème 5-5 du chapitre III), qu'il est fini. Le théorème de la convergence dominée permet de conclure

$$||m_n|| \longrightarrow 0 .$$

<u>Norme p_n^1</u>

La démarche est tout à fait analogue à la précédente : on a :

- l'ombre inférieure large $\mathcal{O}_{1_{ij}} = \Delta_j \times \Delta_i \times [0,t_{j+1}]$
- l'ombre inférieure restreinte $o_{1_{ij}} = \Delta_j \times \Delta_i \times [0,t_j]$

dont la différence $\mathcal{E}_{1_{ij}}$ est de mesure inférieure à $|\Delta_i| \cdot |\Delta_j|^2$, de sorte que $\mathcal{E}_1^n = \cup\, \mathcal{E}_{1_{ij}}$ a une mesure inférieure à $|\pi_n|_2$.

On a , comme précédemment :

$$||p_n^1||^2 < E \int_{\mathcal{E}_1^n} L^2_{1Y}(y;x,v)\,\varphi^2_{2Z}(x,z)\,dy\,dx\,dv + E \int_{R_{11}\times[0,1]} F_1(y;x,v)dy\,dx\,dv$$

où

$$F_1 = \Sigma\, 1_{o_{1_{ij}}} \{L_{1Y,n}\,\varphi_{2Z,n} - L_{1Y}\,\varphi_{2Z}\} .$$

Toutes les fonctions intervenant sont majorées par $k.\mathcal{L}_{1Y}(z)\Phi_{2Z}(y)$ qui est intégrable (ch. III, th. 5-5). Le premier terme tend vers zéro car $|\mathcal{E}_1^n| \longrightarrow 0$; le second tend vers zéro car F_1 tend simplement vers zéro

$$||p_n^1|| \longrightarrow 0 .$$

On procède de même pour $||p_n^2||$.

Norme $||b_n||$

$$b_n = (\varphi_{1Y,n}\,\varphi_{2Z,n} - \varphi_{1Y}\,\varphi_{2Z}) \cdot UV$$

L'intégrale tend simplement vers zéro, son carré est majoré par $2\,\Phi^2_{1Y}\,\Phi^2_{2Z}$ qui est intégrable (ch. III, th. 5-5)

$$||b_n|| \longrightarrow 0 .$$

Ce qui achève de démontrer le théorème 3-2-1 .

Comme $\Sigma\, J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st} = J_{ZY}(s,t)$, ce théorème peut s'énoncer :

Corollaire 3-2-1

Sous les hypothèses du théorème 3-2-1

$$\Sigma \left[Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\Delta_j) - J_{ZY}(\Delta_{ij})\right]_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} 0 .$$

On a alors le résultat de convergence des variations pondérées (0,1,1), dans le cas d'une pondération bornée:

Théorème 3-2-2

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4, dans la situation ($\mathcal{S}$) , s'il existe N_o tel que $|f|$ et $|f_n|$ soient majorés par N_o et si f_n converge vers f au sens des deux semi-normes $||f^2||_{Y^4}$ et $||f^2||_{Z^4}$, alors :

$$\Sigma\, f_n(i,j)Y(\Delta^n_i,j)_s Z(i,\Delta^n_j)_t \xrightarrow{u\cdot L^2} \int_{R_{st}} f(z)\, J_{ZY}(dz) .$$

<u>Démonstration</u>

La différence entre la variation produit et sa limite présumée s'écrit :

$$D_n(s,t) = B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

où

$$B_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j) \left[Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\Delta_j) - J_{ZY}(\Delta_{ij})\right]_{st}$$

$$C_n(s,t) = \int_{R_{st}} (f_n - f)\;(z)\; J_{ZY}(dz)$$

D' une part :

$$\begin{aligned} E \sup_{st} C_n^2(s,t) &\leqslant k\; \|(f_n - f)^2\|_{J_{ZY}^2} \\ &\leqslant K \left[\; \|f_n - f)^2\|_{Y^4} + \|(f_n - f)^2\|_{Z^4}\right] \end{aligned}$$

(th. 5-2 du chapitre III) : $C_n \xrightarrow{u\cdot L^2} 0$.

D'autre part, puisque f_n est bornée, le théorème 3-2-1 implique :

$$E \sup B_n^2(s,t) \longrightarrow 0\ .$$

<u>Discussion</u> : Le problème se pose alors d'étendre le théorème 3-2-3 au cas de fonctions f et f_n non bornées.

Dès que f est fini pour les semi-normes $\|\cdot\|_{Y^4}$ et $\|\cdot\|_{Z^4}$, il peut être approché au sens de ces semi-normes par une fonction π_{n_o}-simple bornée :

$$\forall\, \varepsilon,\ \exists n_o,\ N_o,\ \exists g\ \ \pi_{n_o}\text{-simple}\ ,\ |g| \leqslant N_o\ ,\ \begin{cases} \|(f-g)^2\|_{Y^4} \leqslant \varepsilon \\ \|(f-g)^2\|_{Z^4} < \varepsilon \end{cases}$$

Par ailleurs si $f_n \longrightarrow f$ pour ces semi-normes, il existe n_1 (choisi $\geqslant n_o$) tel que pour $n \geqslant n_1$

$$||(f_n-f)^2||_{Y^4} \leqslant \varepsilon \qquad ||(f_n-f)^2||_{Z^4} \leqslant \varepsilon$$

(donc pour ces deux semi-normes , $||(f_n-g)^2|| \leqslant 4\varepsilon$) et l'on peut écrire

$$D_n(s,t) = A_n(s,t) + B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

où

$$A_n(s,t) = \Sigma\ (f_n - g)(i,j)\ \left[Y(\Delta_i^n,j)\ Z(i,\Delta_j^n)\right]_{st}$$

$$B_n(s,t) = \Sigma\ g(i,j)\ \left[Y(\Delta_i^n,j)\ Z(i,\Delta_j^n) - J_{ZY}(\Delta_{ij}^n)\right]_{st}$$

$$C_n(s,t) = \int_{R_{st}} (g - f)(z)\ J_{ZY}(dz)$$

B_n et C_n se majorent dans $u\cdot L^2$ comme précédemment :

$$E \sup C_n^2(s,t) \leqslant K\ N_o^2\left[\ ||(f-f_n)^2||_{Y^4}\ ||(f-f_n)^2||_{Z^4}\right]^{1/2}$$

$$\leqslant K\ N_o^2\ \varepsilon$$

$$E \sup B_n^2(s,t) \leqslant N_o^2\ E \sup \Sigma\ \left[Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j) - J_{ZY}(\Delta_{ij})\right]_{st}^2$$

Le corollaire 3-2-1 permet de conclure que pour $n \geqslant n_2$ (choisi $\geqslant n_1$), ce terme est inférieur à ε .

Reste à majorer le terme A_n , tenant compte de la "proximité" des fonctions simples f_n et g .

Or , $A_n(s,t)$ est une s.m.r. dont on obtient la représentation à partir du lemme 3-2-1. Utilisant alors l'inégalité maximale pour une s.m.r., on obtient :

$$E \sup A_n(s,t)^2 < 64\, E \{ \int_{R^2_{11}} h(x,y)\, \mathcal{L}^2_{1Y}(x,v)\, \mathcal{L}^2_{2Z}(u,y)\,du\, dy\, dx\, dv$$

$$+ \int_{[0,1]^3} h(x,y)\, \mathcal{L}^2_{1Y}(x,v)\, \phi^2_{2Z}(y)\,dx\, dv\, dy$$

$$+ \int_{[0,1]^3} h(x,y)\, \phi^2_{1Y}(x)\, \mathcal{L}^2_{2Z}(u,y)\,dx\, du\, dy$$

$$+ \int_{R_{11}} h(x,y)\, \phi^2_{1Y}(x)\, \phi^2_{2Z}(y)\, dx\, dy \}$$

où $h = (f_n-g)^2$ et où $\mathcal{L}_{1Y}, \dots$ ont été définies au § 5-3 du chapitre III ($\mathcal{L}_1(z) = \sup_t L_1(t;z), \dots$) .

On peut alors donner deux majorations de cette quantité :

<u>1ère façon</u> : Elle consiste à utiliser les normes $||h||_{1,Y^4}$ et $||h||_{2,Z^4}$, définies au § 5-1 du chapitre III. On a alors :

$$E \sup_{st} A_n(s,t)^2 < K\, (||(f_n-g)^2||_{1,Y^4} + ||(f_n-g)^2||_{2,Z^4})$$

On en déduit

<u>Corollaire 3-2-2</u>

> Soient Y et Z deux s.m.r. de L^4 ; alors, dans la situation $(\mathcal{S})$, si f_n converge vers f au sens des quatres semi-normes :
>
> $$||f^2||_{Y^4} , \; ||f^2||_{Z^4} , \; ||f^2||_{1,Y^4} , \; ||f^2||_{2,Z^4} ,$$
>
> alors on a le résultat de convergence annoncée dans le théorème 3-2-3.

<u>2ème façon</u> : Elle consiste à isoler h du reste de l'intégrande par exemple en utilisant la majoration de Cauchy-Schwarz. On obtient, par exemple pour le premier terme :

$$E \int_{R^2_{11}} h(x,y)\mathcal{L}^2_{1Y}(x,v)\mathcal{L}^2_{2Z}(u,y)dx\,dv\,du\,dy$$

$$< ||h||_2 \left(E \int_{R^2_{11}} \mathcal{L}^4_{1Y}(x,v)\mathcal{L}^4_{2Z}(u,y)dx\,dv\,du\,dy\right)^{1/2}$$

On en déduit le corollaire :

<u>Corollaire 3-2-3</u>

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^8, dans la situation ($\mathcal{S}$), si f_n converge vers f au sens de la norme $||\cdot||_2$ ordinaire et des deux semi-normes $||f^2||_{Y^4}$ et $||f^2||_{Z^4}$, on a la convergence annoncée au théorème 3-2-3.

§4 - Variations quadratiques pondérées d'une s.m.r.

4-1 : Variation (2,0,0)

4-1-1 : Variation non pondérée

Théorème 4-1-1

Si X est une s.m.r. (de L^2), M sa partie martingale, (π_n) une suite de partitions dont le pas tend vers zéro, $\pi_n = \{\Delta^n_{ij}\}$, alors :

$$\Sigma\, X(\Delta^n_{ij})^2 \xrightarrow{u\cdot L^1} \langle M \rangle_{st}$$

Remarque : Nous avons déjà donné une démonstration de ce résultat dans [3] (cf. §2), sans prendre en compte l'uniformité en (s,t). Nous donnons ici la démonstration complète du résultat.

Démonstration

X admet la représentation

$$X = \theta\cdot W + \psi\cdot WW + \beta_1\cdot VW + \beta_2\cdot WU + \phi\cdot Z .$$

Soient θ^k, ψ^k, β_1^k, β_2^k, ϕ^k des fonctions simples (par exemple dyadiques) bornées, tendant vers θ, ψ, β_1, β_2, ϕ pour les normes L^2 correspondantes (cf. chapitre III), et notons X^k la s.m.r. associée.

Pour toute partition $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ de R_{11} , on a

$$\sup_{st} |\Sigma\, X(\Delta_{ij})^2_{st} - \Sigma\, X^k(\Delta_{ij})^2_{st}|$$

$$= \sup_{st} |\Sigma (X+X^k)(\Delta_{ij})_{st}\cdot(X-X^k)(\Delta_{ij})_{st}|$$

$$\leqslant \Sigma |\sup_{st} (X+X^k)(\Delta_{ij})_{st}| \cdot \sup_{st} |(X-X^k)(\Delta_{ij})_{st}|$$

et donc

$$E \sup_{st} |\Sigma X(\Delta_{ij})^2_{st} - \Sigma X^k(\Delta_{ij})^2_{st}|$$

$$< \{E \Sigma \sup(X+X^k)(\Delta_{ij})^2_{st}\}^{1/2} \times \{E \Sigma \sup(X-X^k)(\Delta_{ij})^2_{st}\}^{1/2}$$

$$< 64 \; ||X+X^k|| \cdot ||X-X^k|| \quad (\text{normes } ||\cdot||_2)$$

d'après la majoration maximale, uniforme en π , donnée au corollaire 5-1 (chapitre III), appliqué ici aux s.m.r. $X + X^k$ et $X - X^k$.

$||X - X^k||$ tend vers zéro par construction de X^k , tandis que $||X + X^k||$, inférieur à $2||X|| + ||X-X_k||$, est borné.

Par ailleurs

$$<M^k> - <M> = \int |(\theta^k)^2-\theta^2|dz + \int |(\psi^k)^2-\psi^2|dz\,dz'$$

$<M^k> - <M>$ tend donc vers zéro dans $u\cdot L^1$.

Il suffit donc de démontrer que, à k fixé,

$$\Sigma X^k(\;{}^n_{ij})^2_{st} \xrightarrow[n]{} <M^k>_{st}$$

pour démontrer le résultat. Supposons donc X simple (on n'indiquera plus l'indice k).

Si π_o est la partition sur laquelle est définie X , on peut montrer (cf [3] , p. 123-124, ou § 2) que l'on peut se limiter aux partitions (π_n) plus fines que π_o sans restreindre en rien la généralité du résultat.

On a $M = \theta\cdot W + \psi\cdot WW$. Notons :

$$R = X - M = \beta_1\cdot VW + \beta_2\cdot WU + \phi\cdot Z$$

on a :

$$\Sigma X(\Delta_{ij})^2_{st} = \Sigma M(\Delta_{ij})^2_{st} + \Sigma R(\Delta_{ij})^2_{st} + 2 \Sigma M(\Delta_{ij})_{st} R(\Delta_{ij})_{st}$$

1°) Termes non contribuants

On a (ch. III, cor. 5-2)

$$E \sum \sup_{st} R(\Delta_{ij})^2_{st} < 4\{4\ |\pi|_1\ ||\beta_2||^2 + 4\ |\pi|_2\ ||\beta_1||^2 + |\pi|_1\ |\pi|_2\ ||\phi||^2\}$$

(où $|\pi|_1$ et $|\pi|_2$ désignent les pas de π sur l'un et l'autre axe). Donc

$$\Sigma\ R(\Delta_{ij})^2_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1} 0$$

D'autre part

$$E \sup_{st} |\Sigma\ M(\Delta_{ij})_{st}\ R(\Delta_{ij})_{st}| <$$

$$\{E\ \Sigma \sup_{st} M(\Delta_{ij})^2_{st}\}^{1/2}\ \{E\ \Sigma \sup_{st} R(\Delta_{ij})^2_{st}\}^{1/2}$$

Le premier crochet est borné (quelque soit π) par $64||M||_2^2$, on vient de voir que le second tend vers zéro

$$\Sigma\ M(\Delta_{ij})_{st}\ R(\Delta_{ij})_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1} 0$$

2°) Terme contribuant

Il suffit donc de faire l'étude pour une martingale simple M .

Notons les rectangles de la partition π_o (définissant M) avec des lettres du début de l'alphabet : Δ_{ab}, Δ_{cd}, ..., avec $\Delta_{ab} = \Delta_a \times \Delta'_b$. Les rectangles de la partition π plus fine que π_o seront notés Δ_{ij}, $\Delta_{k\ell}$, ..., avec $\Delta_{ij} = \Delta_i \times \Delta'_j$. On notera $\Delta_{aj} = \Delta_a \times \Delta'_j$ ou $\Delta_{id} = \Delta_i \times \Delta'_d$ des rectangles faisant intervenir les deux partitions.

$\boxed{\text{1er cas}}$ M forte

On a $M = \theta\cdot W$ où θ prend sur Δ_{ab} la valeur θ_{ab} qui est $\mathfrak{F}_{ab}$-mesurable et bornée par un certain K

$$M_{st} = \sum_{ab} \theta_{ab} W(\Delta_{ab})_{st}$$

Donc

$$M(\Delta_{ij})^2_{st} = \sum_{ab} \theta^2_{ab} W(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})^2_{st}$$

θ^2_{ab} étant inférieur à K^2 , il suffit alors de démontrer la convergence $u \cdot L^1$ pour chaque (a,b)

$$\sum_{ij} W(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})^2_{st} \longrightarrow Z(\Delta_{ab})_{st}$$

Montrons même cette convergence $u \cdot L^2$:

$$Y_{st} = \sum_{ij} \{W(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})^2_{st} - Z(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})_{st}\}$$

est une martingale. Donc :

$$\begin{aligned} E \sup_{st} Y^2_{st} &< 16\, E \sum_{ij} \{W(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})^2 - Z(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})\}^2 \\ &= 16 \sum_{ij} 2 \cdot Z(\Delta_{ab} \cap \Delta_{ij})^2 \\ &< 32\, |\pi|_1\, |\pi|_2\, Z(\Delta_{ab}) \end{aligned}$$

qui tend vers zéro avec le pas de π.

$\boxed{\text{2ème cas}}$ M sans partie forte .

On a $M = \psi \cdot WW$ où ψ prend sur $\Delta_{ab} \times \Delta_{cd}$ la valeur ψ_{abcd} qui est bornée par un certain K et $\mathcal{F}_{cb}$-mesurable

Fixer i et j fixe donc c et b (voir dessin). Donc

$$M(\Delta_{ij})_{st} = \sum_{ad} \psi_{abcd} W(\Delta_{aj})_{st} W(\Delta_{id})_{st}$$

de sorte que :

$$M(\Delta_{ij})^2_{st} = \sum_{\substack{aa' \\ dd'}} \psi_{abcd} \psi_{a'bcd'} \tilde{Y}_{st}(i,j \; ; a,a' , d,d')$$

avec

$$\tilde{Y}_{st}(i,j \; ; a,a',d,d') = W(\Delta_{aj})_{st} W(\Delta_{a'j})_{st} W(\Delta_{id})_{st} W(\Delta_{id'})_{st}$$

Pour montrer que :

$$\Sigma M(\Delta_{ij})^2_{st} \longrightarrow \sum_{abcd} \psi_{abcd} Z(\Delta_{ab})_{st} Z(\Delta_{cd})_{st}$$

les ψ_{abcd} étant tous bornés, il suffit de montrer que, pour a, b, c, d, a', d' fixés, on a :

$$Y_{st} = \sum_{ij} \tilde{Y}_{st}(i,j \; ; a,a',d,d') \longrightarrow \begin{cases} Z(\Delta_{ab})_{st} Z(\Delta_{cd})_{st} & \text{si } a = a' \text{ et } d = d' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous montrerons cette convergence dans $u\text{•}L^2$.

1) Si $a \neq a'$ et $d \neq d'$

$$Y_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s W(\Delta_{id'})_s\right] \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t W(\Delta_{a'j})_t\right]$$

est une martingale. L'inégalité de DOOB-CAIROLI s'écrit

$$E \sup_{st} Y^2_{st} \leqslant 16 \, E \left[\sum_i W(\Delta_{id}) W(\Delta_{id'})\right]^2 \left[\sum_j W(\Delta_{aj}) W(\Delta_{a'j})\right]$$

$$= 16 \left[\sum_i Z(\Delta_{id})\ Z(\Delta_{id'}) \right] \left[\sum_j Z(\Delta_{aj})\ Z(\Delta_{a'j}) \right]$$

$$< 16\ |\pi|_1\ |\pi|_2\ |\Delta'_d|\ |\Delta'_{d'}|\ |\Delta_a|\ |\Delta_{a'}|$$

qui tend vers zéro avec le pas de π.

2) Si $a = a'$ et $d \neq d'$

$$Y_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s\ W(\Delta_{id'})_s \right] \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t^2 \right]$$

$$= Y'_{st} + Y''_{st}$$

avec

$$Y'_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s\ W(\Delta_{id'})_s \right] \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t^2 - Z(\Delta_{aj})_t \right]$$

$$Y''_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s\ W(\Delta_{id'})_s \right] \left[\sum_j Z(\Delta_{aj})_t \right]$$

Y'_{st} est une martingale en (s,t)

$$E \sup_{st} Y'^2_{st} \leqslant 16\ E \left[\sum_i W(\Delta_{id})\ W(\Delta_{id'}) \right]^2 \left[\sum_j W(\Delta_{aj})^2 - Z(\Delta_{aj}) \right]^2$$

$$= 16 \left[\sum_i Z(\Delta_{id})\ Z(\Delta_{id'}) \right] \left[\sum_j 2\ Z(\Delta_{aj})^2 \right]$$

$$\leqslant 32\ |\pi|_1\ |\Delta_d|\ |\Delta_{d'}|\ |\pi|_2\ |\Delta_a|^2 \longrightarrow 0$$

et

$$E \sup_{st} Y''^2_{st} \leqslant E \sup_s Y''^2_{s1} \leqslant 4\ |\pi|_1\ |\Delta_d|\ |\Delta_{d'}|\ Z(\Delta_{ab})^2$$

et l'on conclut, du fait que :

$$\sup Y^2_{st} \leqslant 2(\sup Y'^2_{st} + \sup Y''^2_{st})$$

On conclut de même si $a \neq a'$ et $d = d'$.

3) Si $a = a'$ et $d = d'$

$$Y_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s^2\right] \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t^2\right]$$

de sorte que :

$$D_{st} = Y_{st} - Z(\Delta_{ab})_t \, Z(\Delta_{cd})_s$$

$$= Z_{st} - Z'_{st} - Z''_{st}$$

où

$$Z_{st} = \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s^2 - Z(\Delta_{id})_s\right] \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t^2 - Z(\Delta_{aj})_t\right]$$

$$Z'_{st} = Z(\Delta_{ab})_t \left[\sum_i W(\Delta_{id})_s^2 - Z(\Delta_{id})_s\right]$$

$$Z''_{st} = Z(\Delta_{cd})_s \left[\sum_j W(\Delta_{aj})_t^2 - Z(\Delta_{aj})_t\right]$$

Z_{st} est une martingale en (s,t), donc

$$E \sup_{st} Z_{st}^2 \leqslant 16 \left[\sum_i 2\, Z(\Delta_{id})^2\right] \left[\sum_j 2\, Z(\Delta_{aj})^2\right]$$

$$\leqslant 64\, |\pi|_1 \, |\pi|_2 \, Z(\Delta_{ad})^2$$

Z'_{st} est une martingale en s

$$E \sup_{st} Z'^2_{st} \leqslant \sup_s Z'^2_{s1} \leqslant 8\, Z(\Delta_{ab})^2 \, |\pi|_1 \, |\Delta'_d|$$

et de même pour le terme en Z''_{st} . On conclut du fait que :

$$\sup D_{st}^2 \leqslant 4 |\sup Z_{st}^2 + \sup Z'^2_{st} + \sup Z''^2_{st}|$$

$\boxed{\text{3ème cas}}$ M martingale quelconque (représentable)

Aux deux termes précédents vient s'ajouter le terme croisé

$$\sum_{ij} \sum_{abcd} \theta_{cd} \psi_{abcd} W(\Delta_{ij})_{st} W(\Delta_{aj})_{st} W(\Delta_{id})_{st}$$

dont nous allons montrer qu'il tend vers zéro dans $u{\cdot}L^2$; pour cela, il suffit, à a, b, c, d fixés de montrer que :

$$Y_{st} = \sum_{ij} W(\Delta_{ij})_{st} W(\Delta_{aj})_{st} W(\Delta_{id})_{st}$$

(où $(s,t) \in \Delta_{cb}$) tend dans $u{\cdot}L^2$ vers zéro. Or Y_{st} est une martingale

$$E \sup Y_{st}^2 < 16 E \sum_{ij} W(\Delta_{ij})^2 W(\Delta_{aj})^2 W(\Delta_{id})^2$$

$$< 16 Z (\Delta_{ad}) |\pi|_1 |\pi|_2 \longrightarrow 0$$

Ce qui achève de démontrer le théorème 4-1-1.

4-1-2 : <u>Variation (2,0,0) pondérée</u>

<u>Théorème 4-1-2</u>

Si X est une s.m.r. (de L^2) de partie martingale M , dans la situation ($\mathcal{S}$), si f_n converge vers f au sens de la semi-norme $||\cdot||_{X^2}$, alors :

$$\sum f_n(i,j) X(\Delta_{ij}^n)_{st}^2 \xrightarrow{u\cdot L^1} \int_{R_{st}} f(z) \langle M\rangle (dz)$$

<u>Démonstration</u>

Donnons nous un $\varepsilon > 0$. Il existe n_o et une fonction g π_{n_o}-simple bornée telle que :

$$||f-g||_{X^2} \leqslant \varepsilon$$

et il existe n_1 tel que :

$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow \|f - f_n\|_{X^2} \leqslant \varepsilon$$

(et donc $\|g - f_n\|_{X^2} \leqslant 2\varepsilon$) . Posons alors si $n \geqslant n_o$, n_1

$$D_n(s,t) = \Sigma f_n(i,j) X(\Delta^n_{ij})^2_{st} - \int_{R_{st}} f(z) \langle M\rangle (dz)$$

$$= A_n(s,t) + B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

avec

$$A_n(s,t) = \Sigma (f_n - g) (i,j) X(\Delta^n_{ij})^2_{st}$$

(g est constant sur Δ^n_{ij} , on a noté $g(i,j)$, sans que n apparaisse, sa valeur sur Δ^n_{ij})

$$B_n(s,t) = \Sigma g(i,j) \left[X(\Delta^n_{ij})^2_{st} - \langle M\rangle (\Delta^n_{ij})_{st}\right]$$

$$C_n(s,t) = \int_{R_{st}} (g - f) (z) \langle M\rangle (dz)$$

Par le choix de n_o ,

$$E \sup_{st} |C_n(s,t)| \leqslant \varepsilon$$

n étant supérieur à n_1 , le théorème 5-2 du chapitre III permet d'écrire

$$E \sup_{st} |A_n(s,t)| \leqslant 64 \|f_n - g\|_{X^2} \leqslant 128\, \varepsilon$$

Le théorème 3-1-1 va alors permettre de conclure : sur chaque $\Delta_o = \Delta^{n_o}_{i_o j_o}$ de π_{n_o} , il y a convergence $u\cdot L^1$

$$\sum_{\Delta^n_{ij} \subseteq \Delta_o} X(\Delta^n_{ij})^2_{st} \longrightarrow \langle M\rangle\,(\Delta_o)_{st}$$

π_{n_o} ne comprenant qu'un nombre fini d'éléments, g étant bornée, il existe $n_2 \geqslant \sup(n_o,n_1)$ tel que

$$n \geqslant n_2 \Longrightarrow E \sup_{st} |B_n(s,t)| \leqslant \varepsilon$$

Alors

$$n \geqslant n_2 \Longrightarrow E \sup_{st} |D_n(s,t)| \leqslant 130\ \varepsilon$$

4-1-3 : Variation produit

Théorème 4-1-3

Si X et Y sont deux s.m.r. de L^2, dans la situation ($\mathcal{S}$), si f_n converge vers f au sens des semi-normes $||\cdot||_{X^2}$ et $||\cdot||_{Y^2}$, alors :

$$\Sigma\, f_n(i,j)\ X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_{ij})_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1} \int_{R_{st}} f(z)\ \langle M_X,M_Y\rangle\ (dz)$$

Démonstration

D'une part, pour tout Δ

$$X(\Delta)\ Y(\Delta) = \frac{1}{2}\left[(X+Y)(\Delta)^2 - X(\Delta)^2 - Y(\Delta)^2\right]$$

et d'autre part pour tout g

$$||g||_{(X+Y)^2} \leqslant ||g||_{2(X^2+Y^2)} \leqslant 2\left[\,||g||_{X^2} + ||g||_{Y^2}\right]$$

de sorte que f_n tend aussi vers f au sens de la semi-norme $||\cdot||_{(X+Y)^2}$.

Le théorème 3-1-2 permet alors d'écrire :

$$\Sigma f_n(i,j)\ X(\Delta_{ij})_{st}\ Y(\Delta_{ij})_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1} \int_{R_{st}} f(z)\ \frac{1}{2}\left[<M_X+M_Y> - <M_X> - <M_Y>\right](dz)$$

$$= \int_{R_{st}} f(z)\ <M_X,M_Y>\ (dz)$$

<u>Remarque</u>

Il ne suffit pas pour aboutir à la conclusion du théorème 4-1-3 de supposer que f_n tend vers f au sens de la semi norme

$$||f||_{XY} = E \int_{R_{11}} |f(z)|\ |<M_X,M_Y>|\ (dz)$$

(voir pour exemple le cas où M et N sont orthogonalès).

Par contre, on montre comme au corollaire 3-2-3 que l'on peut remplacer le jeu d'hypothèses du théorème 4-1-3 par

X et Y s.m.r. de L^4

$f_n \longrightarrow f$ pour la semi-norme $||\cdot||_{XY}$

$f_n \longrightarrow f$ pour $||f||_2^2 = E \int_{R_{11}^2} f^2(z)\ dz$

4-2 : <u>Variation (0,2,2)</u>

La variation (0,2,2), faisant intervenir $Y(\Delta_i,j)^2\ Z(i,\Delta_j)^2$ est du type quadratique : en effet, elle est à rapprocher de la variation en $J_{YZ}(\Delta_{ij})^2$. De fait, nous allons montrer que sous de bonnes conditions on obtient une limite intégrale en $<J>(dz)$.

<u>Théorème 4-2-1</u> : Inégalité maximale

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4 , $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ une partition, g une fonction π-simple adaptée valant $g(i,j)$ sur Δ_{ij} , alors ,

$$E \sup_{st} \left|\Sigma\, g(i,j)\; Y(\Delta_i,j)_s^2\; Z(i,\Delta_j)_t^2\right| \leqslant 4\; T_{Y,Z;\pi}(g)$$

avec :

$$T_{Y,Z;\pi}(g) = E\,\{16 \int_{R_{11}^2} |g|(x,y)\,\mathcal{L}_{1Y}^2(x,v)\,\mathcal{L}_{2Z}^2(u,y)\,du\,dy\,dx\,dv$$

$$+ 4\;|\pi|_2 \int_{|0,1|^3} |g|(x,y)\,\mathcal{L}_{1Y}^2(x,v)\,\phi_{2Z}^2(y)\;dy\,dx\,dv$$

$$+ 4\;|\pi|_1 \int_{|0,1|^3} |g|(x,y)\,\phi_{1Y}^2(x)\,\mathcal{L}_{2Z}^2(u,y)\;dx\,du\,dy$$

$$+ |\pi|_1 |\pi|_2 \int_{|0,1|^2} |g|(x,y)\,\phi_{1Y}^2(x)\,\phi_{2Z}^2(y)\;dx\;dy\}\;.$$

Démonstration

Immédiate en utilisant la représentation de la semi-martingale.

Théorème 4-2-2

Si Y et Z sont deux s.m.r. de L^4 , dans la situation ($\mathcal{S}$) , s'il existe N_o majorant f et f_n , si f_n converge vers f au sens des semi normes $||\cdot||_{Y^4}$ et $||\cdot||_{Z^4}$, alors :

$$\Sigma\, f_n(i,j)\; Y(\Delta_i,j)_s^2\; Z(i,\Delta_j)_t^2 \xrightarrow{u\cdot L^1} \int_{R_{st}} f(z)\; \langle J_{M_Z^2\, M_Y^1}\rangle\;(dz)$$

Démonstration

On peut d'abord écrire

$$E \sup_{st} \left|\Sigma\left[Y(\Delta_i,j)_s^2\; Z(i,\Delta_j)_t^2 - J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st}^2\right]\right| < AB$$

avec

$$A^2 = E \sup_{st} \Sigma\left[Y(\Delta_i,j)_s\; Z(i,\Delta_j)_t - J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st}\right]^2$$

$$B^2 = E \sup_{st} \Sigma\left[Y(\Delta_i,j)_s\; Z(i,\Delta_j)_t + J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st}\right]^2$$

Par le corollaire 3-2-1, A tend vers zéro, tandis que par le corollaire 5-2 du chapitre III, le second est uniformément borné.

$|f|$ et $|f_n|$ étant bornés par N_o, on s'est donc ramené à l'étude de la variation quadratique (2,0,0) pour la s.m.r. de L^2 J_{ZY}. Il suffit de lui appliquer le théorème 3-1-2 en remarquant que la partie martingale de J_{ZY} est $J_{M_Z^2 M_Y^1}$.

Ce résultat s'étend sans difficulté au résultat suivant par l'utilisation de la simple égalité

$$4\,abcd = (a+b)^2(c+d)^2 - a^2(c+d)^2 - b^2(c+d)^2 - c^2(a+b)^2 - d^2(a+b)^2$$
$$+ a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \quad .$$

Corollaire 4-2

Si X, Y, Z, T sont quatre s.m.r. de L^4, dans la situation ($\mathcal{S}$), s'il existe N_o majorant $|f|$ et $|f_n|$ et si f_n converge vers f au sens des 4 semi-normes $||\cdot||_{X^4}$, $||\cdot||_{Y^4}$, $||\cdot||_{Z^4}$ et $||\cdot||_{T^4}$, alors :

$$\Sigma\, f_n(i,j)\left[X(\Delta_i,j)\; Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\Delta_j)\; T(i,\Delta_j)\right]_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1}$$

$$\int_{R_{st}} f(z) \langle J_{M_Z^2 M_X^1} , J_{M_T^2 M_Y^1}\rangle (dz)$$

$$= \int_{R_{st}} f(x,y) \langle M_X^1,M_Y^1\rangle^{(1)}(dx,y) \langle M_Z^2,M_T^2\rangle^{(2)}(x,dy) \quad .$$

(la seconde expression est plus intrinsèque, la première pouvant aussi s'écrire avec $J_{M_T^2 M_X^1}$ et $J_{M_Z^2 M_Y^1}$) .

4-3 : Variation (1,1,1)

Si X, Y, Z sont trois s.m.r., cette variation fait intervenir des sommes pondérées de termes en $X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j)$ que l'on va rapprocher de $X(\Delta_{ij})\ J_{ZY}(\Delta_{ij})$, ramenant cette étude à celle d'une variation produit du type de celles étudiées au §.4-1-3.

Lemme 4-3 : Inégalité maximale

Si X est une s.m.r. de L^2, Y et Z deux s.m.r. de L^4, $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ une partition, g une fonction π-simple adaptée valant $g(i,j)$ sur Δ_{ij}, alors :

$$E \sup_{st} \left|\Sigma\, g(i,j)\left[X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j)\right]_{st}\right| \leqslant$$

$$32\left(\|g\|_{M_X^2} + |\pi|_2\ \|g\|_{(P_X^1)^2} + |\pi|_1 \|g\|_{(P_X^2)^2} + |\pi|_1 |\pi|_2 \|g\|_{B_X^2}\right)$$

$$+\ 2\ T_{Y,Z;\pi}(g)$$

où T est donné au théorème 4-2-1

Démonstration

Il suffit d'écrire

$$|X(\Delta_{ij})\ Y(\Delta_i,j)\ Z(i,\Delta_j)|_{st}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\ |X(\Delta_{ij})^2 + Y(\Delta_i,j)^2\ Z(i,\Delta_j)^2|_{st}$$

d'appliquer au premier terme le théorème 5-3 du chapitre III et au second la théorème 4-2-1 pour conclure.

Théorème 4-3-1

Si X est une s.m.r. de L^2, Y et Z deux s.m.r. de L^4, dans la situation ($\mathcal{S}$), s'il existe N_o majorant $|f|$ et $|f_n|$ et si f_n converge vers f au sens des trois semi-normes $||\cdot||_{X^2}$, $||\cdot||_{Y^4}$ et $||\cdot||_{Z^4}$, alors :

$$\Sigma \; f_n(i,j)\left[X(\Delta_{ij})\; Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\Delta_j)\right]_{st} \xrightarrow{u\cdot L^1}$$

$$I_{st} = \int_{R_{st}} f(z) < M_X \,,\, J_{M_Z^2 \, M_Y^1} > (dz)$$

Démonstration

Si l'on pose :

$$D_n(s,t) = \Sigma \; f_n(i,j)\; X(\Delta_{ij})_{st} \left[Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\,\Delta_j) - J_{ZY}(\Delta_{ij})\right]_{st}$$

on peut écrire par l'inégalité de Schwarz

$$E \sup D_n^2(s,t) < N_o ||X||_2 \{E \sup \Sigma\left[Y(\Delta_i,j)\; Z(i,\Delta_j) - J_{ZY}(\Delta_{ij})\right]^2_{st}\}^{1/2}$$

(où $||X||_2$ est la norme L^2 ordinaire de X) ; cette quantité tend vers zéro par le corollaire 3-2-1.

On s'est donc ramené à l'étude de la variation produit en $X(\Delta_{ij})\; J_{ZY}(\Delta_{ij})$ et le théorème 4-1-3 permet de conclure à la convergence $u\cdot L^1$.

Remarque : Procédant pour les théorèmes 4-2-2 et 4-3-2 comme on l'a fait pour le théorème 3-2-3, il est aisé de dégager deux jeux d'hypothèses assurant la convergence sans que l'on ait à faire l'hypothèse f et f_n bornées.

§5 - Variations produit (0,1,2) et (1,0,1)

Dans ce paragraphe, nous étudions les variations,

$$\underline{\text{Variation }(0,1,2)} \ : \ \Sigma\, f_n(i,j)\ X(\Delta_i,j)_s\ Y(i,\Delta_j)_t^2$$

$$\underline{\text{Variation }(1,0,1)} \ : \ \Sigma\, f_n(i,j)\ X(\Delta_{ij})_{st}\ Y(i,\Delta_j)_t$$

Nous allons montrer que, sous de bonnes conditions, ces variations ont des limites, intégrales mixtes en $.Z\ W$, c'est à dire, 1-martingales propres.

Ces variations, contrairement à celles étudiées au §3 et §4, sont définies de façon asymétriques en X et en Y. Ceci impliquera en particulier que nous ne saurons pas établir d'inégalité maximale dans L^1. Aussi travaillerons nous dans tout ce paragraphe dans L^2, autant pour l'établissement d'inégalités maximales que pour les théorèmes limites. D'ailleurs, ceci est cohérent avec le fait que l'on ne sait définir l'intégrale mixte que dans L^2 (cf. chapitre II et III).

Travaillant dans L^2, il ne sera pas nécessaire (comme au § 3-1), de passer par des s.m.r. simples X, utilisant de façon plus systématiques les inégalités maximales directement sur la variation considérée.

Nous nous limiterons dans ce paragraphe au cas : <u>f et f_n sont bornées par une même quantité</u>.

Dans 5-1 et 5-2, on fera l'une ou l'autre des hypothèses :

<u>HYPOTHESE H.1</u> : X est dans L^4, Y dans L^8

<u>HYPOTHESE H.2</u> : X et Y sont dans L^6

5-1 - Inégalité maximale (0,1,2)

<u>Théorème 5-1</u>

Soit $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ une partition et soient X et Y deux s.m.r. vérifiant l'une des hypothèses suivantes :

H_1 : X est dans L^4 , Y est dans L^8

H_2 : X et Y sont dans L^6

alors il existe une constante universelle positive C telle que

$$C^{-1}\ E\{\sup_{st} \Sigma\ X(\Delta_i,j)_s\ Y(i,\Delta_j)^2_t\}^2 < ||X||^2\ ||M^2_Y||^4$$

$$+\ |\pi|_2\ ||X||^2\left[\ ||M^2_Y||^2\ ||B^2_Y||^2 + ||B^2_Y||^4\right]$$

où sous H_1 $||X|| = ||X||_4$ $||Y|| = ||Y||_8$

sous H_2 $||X|| = ||X||_6$ $||Y|| = ||Y||_6$

Corollaire 5-1

Sous les mêmes hypothèses ,

$$E\{\sup_{st} \Sigma\ X(\Delta_i,j)_s\ Y(i,\Delta_j)^2_t\}^2 < C||X||^2 \cdot ||Y||^4$$

Démonstration

Le développement de $X(\Delta_i,j)\ Y(i,\Delta_j)^2$ si l'on décompose X en $M^1_X + B^1_X$ et Y en $M^2_Y + B^2_Y$ fait apparaître 6 types de termes :

$M^1_X(B^2_Y)^2$; $M^1_X\ M^2_Y\ B^2_Y$; $M^1_X(M^2_Y)^2$

$B^1_X(B^2_Y)^2$; $B^1_X\ M^2_Y\ B^2_Y$; $B^1_X(M^2_Y)^2$

Du fait que $(a_1 + \dots + a_6)^2 \leq 6(a^2_1 + \dots + a^2_6)$, pour majorer

$$= E\ \sup_{st}\ |\Sigma\ X(\Delta_i,j)_s\ Y(i,\Delta_j)^2_t|^2$$

il suffit de majorer les 6 termes obtenus par bilinéarité.

Dans tout ce paragraphe, on adoptera la notation :

$$XYZ = E \sup_{st} |\Sigma\, X(\Delta_i,j)_s\, Y(i,\Delta_j)_t\, Z(i,\Delta_j)_t|^2$$

notant XY^2 si $Y = Z$.

1° Terme $M_X^1(B_Y^2)^2$

Montrons que ce terme est non contribuant sous l'une des hypothèses

H1 : M_X^1 est dans L^4 , B_Y^2 est dans L^8

H2 : M_X^1 et B_Y^2 sont dans L^6

On a :

$$M_X^1(\Delta_i,j)_s = \int_{(\Delta_i,j)_s} L_{1X}(t_j;z)\, W(dz)$$

$$B_Y^2(i,\Delta_j)_t = \int_{(\Delta_j)_t} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv$$

de sorte que, par différenciation ordinaire en t ,

$$B_Y^2(i,\Delta_j)_t^2 = \int_{(\Delta_j)_t} \bar{\varphi}_Y(s_i,v)dv$$

avec

$$\bar{\varphi}_Y(s_i,v) = 2\, \varphi_{2Y}(s_i,v) \int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'$$

Donc

$$T_{ij}(s,t) = M_X^1(\Delta_i,j)_s\, B_Y^2(i,\Delta_j)_t^2$$

est une 1-m.p. admettant, quand $(s,t) \in \Delta_{ij}$ la représentation (lemme 3-2-1) .

$$T_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t \times (\Delta_i, j)_s} \overline{\varphi}(s_i, v) L_{1X}(t_j; z) dv\ W(dz)$$

Donc, si

$$T(s,t) = \int_{[0,t]\times R_{st}} \Sigma\ 1_{(v\varepsilon\Delta_j)}\ 1_{(z\varepsilon(\Delta_i,j))} \overline{\varphi}_Y(s_i,v) L_{1X}(t_j;z) dv\ W(dz)$$

L'inégalité maximale pour une telle 1-martingale propre donne :

$$M_X^1(B_Y^2)^2 = \sup_{st} T(s,t)^2$$

$$\leqslant 4\ \Sigma\ E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i,j)} \varphi_{2Y}^2(s_i,v) \left[\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'\right]^2 L_{1X}^2(t_j;z) dv\, dz$$

Utilisons alors le lemme 4-2 (ch. III).

Sous l'hypothèse 1

$$M_X^1(B_Y^2)^2 \leqslant 4|\pi|_2\ \alpha^{1/4}\ \beta^{1/4}\ \gamma^{1/2}$$

où

$$\alpha = \Sigma\ E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i,j)} \varphi_{2Y}^8(s_i,v) dv\ dz$$

$$\leqslant \Sigma\ E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i,j)} \Phi_{2Y}^8(v) dv\ dz = ||\Phi_{2Y}||_8^8$$

qui est fini, par le théorème 5-5 du chapitre III

$$\beta = \Sigma\ E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i,j)} \left[\int_{(\Delta_j)_v} \phi_{2Y}(s_i,v')dv'\right]^8 dv\ dz$$

$$\leqslant \Sigma\ E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i,j)} k|\Delta_j|^3 \int_{\Delta_j} \Phi_{2Y}^8(v')dv'\ dv\, dz \quad \text{(ch.III,th.4-1)}$$

$$\leqslant k\ |\pi|_2^4\ ||\phi_{2Y}||_8^8$$

et

$$\gamma = \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} L^4_{1X}(t_j; z)\, dv\, dz$$

$$\leqslant \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} \mathcal{L}^4_{1X}(z)\, dv\, dz = \|\mathcal{L}_{1X}\|^4_4$$

qui est finie, par le même théorème 5-5 du chapitre III.

Sous H1 : $\boxed{M^1_X(B^2_Y)^2 \leqslant C\, |\pi|^2_2\, \|M^1_X\|^2_4\, \|B^2_Y\|^4_8}$

Sous l'hypothèse 2

$$M^1_X(B^2_Y)^2 \leqslant 4\, |\pi|_2\, \alpha^{1/3}\, \beta^{1/3}\, \gamma^{1/3}$$

où

$$\alpha = \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} \varphi^6_{2Y}(s_i, v)\, dv\, dz < \|\Phi_{2Y}\|^6_6$$

$$\beta = \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} \left(\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i, v')\, dv'\right)^6 dv\, dz$$

$$\leqslant \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} k\, |\Delta_j|^2 \int_{\Delta_j} \Phi^6_{2Y}(v')\, dv'\, dv\, dz$$

$$\leqslant k\, |\pi|^3_2\, \|\Phi_{2Y}\|^6_6$$

$$\gamma = \Sigma\, E \int_{\Delta_j \times (\Delta_i, j)} L^6_{1X}(t_j; z)\, dv\, dz \leqslant \|\mathcal{L}_{1X}\|^6_6$$

Sous H2 : $\boxed{M^1_X(B^2_Y)^2 \leqslant C\, |\pi|^2_2\, \|M^1_X\|^2_6\, \|B^2_Y\|^4_6}$

2° Terme $B_X^1(B_Y^2)^2$

Sous l'une des hypothèses

H1 : B_X^1 est dans L^4 , B_Y^2 est dans L^8

H2 : B_X^1 et B_Y^2 sont dans L^6

Montrons que ce terme est non contribuant. On a :

$$B_X^1(\Delta_i,j)_s = \int_{(\Delta_i)_s} \varphi_{1X}(u,t_j)du$$

de sorte que :

$$T_{ij}(s,t) = B_X^1(\Delta_i,j)_s \; B_Y^2(i,\Delta_j)_t^2$$

est un processus à v.b. admettant sur Δ_{ij} la représentation (lemme 3-2-1)

$$T_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \varphi_{1X}(u,t_j)\, \bar{\varphi}_Y(s_i,v)du\, dv$$

De sorte que :

$$B_X^1(B_Y^2)^2 = E\left[\sup \Sigma\, T_{ij}(s,t)\right]^2$$

$$\leq \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \varphi_{1X}^2(u,t_j)\, \varphi_{2Y}^2(s_i,v) \left[\int_{(\Delta_j)_v} \bar{\varphi}_{2Y}(s_i,v')dv'\right]^2 du\, dv$$

Sous l'hypothèse 1

$$B_X^1(B_Y^2)^2 < \alpha^{1/2}\, \beta^{1/4}\, \gamma^{1/4}$$

où

$$\alpha = \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \varphi^4_{1X}(u,t_j)\,du\,dv \leq ||\Phi_{1X}||^4_4$$

$$\beta = \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \Big[\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'\Big]^8 du\,dv \leq k\,|\pi|^4_2\,||\Phi_{2Y}||^8_8$$

$$\gamma = \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \varphi^8_{2Y}(s_i,v)\,du\,dv \leq ||\Phi_{2Y}||^8_8$$

(utilisant le théorème 4-1, chapitre III pour β , et le théorème 5-5 pour chaque terme)

Sous H1 : $\boxed{B^1_X(B^2_Y)^2 \leq C\,|\pi|_2\,||B^1_X||^2_4\ \ ||B^2_Y||^4_8}$

Sous l'hypothèse 2

$$B^1_X(B^2_Y)^2 \leq \alpha^{1/3}\,\beta^{1/3}\,\gamma^{1/3}$$

où

$$\alpha = \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \varphi^6_{1X}(u,t_j)\,du\,dv \leq ||\Phi_{1X}||^6_6$$

$$\beta = \Sigma\, E \int_{\Delta_{ij}} \varphi^6_{2Y}(s_i,v)\,du\,dv \leq ||\Phi_{2Y}||^6_6$$

$$\gamma = \Sigma\, E \int_{\Delta} \Big[\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'\Big]^6 du\,dv \leq k\,|\pi|^3_2\,||\Phi_{2Y}||^6_6$$

Sous H2 : $\boxed{B^1_X(B^2_Y)^2 \leq C\,|\pi|_2\,||B^1_X||^2_6\ \ ||B^2_Y||^4_6}$

3° Terme $M_X^1 M_Y^2 B_Y^2$

Montrons que ce terme n'est pas contribuant si :

H1 : M_X^1 est dans L^4 , Y est dans L^8

H2 : M_X^1 et Y sont dans L^6

On a :

$$M_Y^2(i,\Delta_j)_t = \int_{(i,\ \Delta_j)_t} L_{2Y}(z';s_i)\ W(dz')$$

La formule de Ito en t donne donc :

$$M_Y^2(i,\Delta_j)_t\ B_Y^2(i,\Delta_j)_t = \int_{(\Delta_j)_t} p_{ij}(v)dv + \int_{(i,\Delta_j)_t} q_{ij}(u,v)\ W(du,dv)$$

avec (omettant de faire figurer Y dans la notation)

$$p_{ij}(v) = \varphi_{2Y}(s_i,v) \int_{(i,\Delta_j)_v} L_{2Y}(z'\ ;\ s_i)\ W(dz')$$

$$q_{ij}(v) = L_{2Y}(u,v\ ;\ s_i) \int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} T_{ij}(s,t) &= M_X^1(\Delta_j,j)_s\ M_Y^2(i,\Delta_j)_t\ B_Y^2(i,\Delta_j)_t \\ &= P_{ij}(s,t) + Q_{ij}(s,t) \end{aligned}$$

P_{ij} et Q_{ij} admettant les représentations sur Δ_{ij}

$$P_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t\times(\Delta_i,j)_s} p_{ij}(v)\ L_{1X}(t_j\ ;\ z')dv\ W(dz')$$

$$Q_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{ij})_{st}} q_{ij}(z)\ L_{1X}(t_j\ ;\ z')\ W(dz)\ W(dz')$$

et

$$M_X^1\ M_Y^2\ B_Y^2 = E \sup_{s,t} (\Sigma\ T_{ij}(s,t))^2$$

$$\leqslant 2(P + Q)$$

où

$$P = E \sup_{s,t} (\Sigma\ P_{ij}(s,t))^2$$

$$Q = E \sup_{s,t} (\Sigma\ Q_{ij}(s,t))^2$$

$\Sigma\ P_{ij}(s,t)$ est une 1-m.p. . L'inégalité de Doob-Wong et Zakai implique étant donnée la représentation de $P_{i\ j}$:

$$E \sup_{st} (\Sigma\ P_{ij}(s,t))^2 \leqslant 4\ \Sigma \int_{(\Delta_j)\times(\Delta_i,j)} E\ p_{ij}^2(v)\ \mathcal{L}_{1X}^2(z)dv\ dz$$

$\Sigma\ Q_{ij}(s,t)$ est une martingale. Par l'inégalité de Doob-Cairoli, on a :

$$E \sup_{st} (\Sigma\ Q_{ij}(s,t))^2 \leqslant 4\ \Sigma \int_{\mathcal{O}_{ij}} E\ q_{ij}^2(z)\ \mathcal{L}_1^2(z')dz\ dz'$$

Sous l'hypothèse 1

$$p \leqslant 4\ \alpha^{1/2}\ \beta^{1/4}\ \gamma^{1/4}$$

où

$$\alpha = E\ \Sigma \int_{\Delta_j\times(\Delta_i,j)} \mathcal{L}_{1X}^4(z)dz = ||\mathcal{L}_{1X}||_4^4$$

$$\beta = E\ \Sigma \int_{\Delta_j\times(\Delta_i,j)} \varphi_{2Y}^8(s_i,v)dv\ dz < ||\Phi_{2Y}||_8^8$$

$$\gamma = E\ \Sigma \int_{\Delta_j\times(\Delta_i,v)} \left[\int_{(i,\Delta_j)_v} L_2(z'\ ;\ s_i)\ W(dz')\right]^8 dv\ dz$$

$$\gamma \leq k\ |\pi|_2^4\ ||\mathcal{L}_{2Y}||_8^8 \qquad \text{(appliquant th. 4-1, ch. III)}\ .$$

De même :

$$Q \leqslant 16\ \alpha^{1/2}\ \beta^{1/4}\ \gamma^{1/4}$$

où

$$\alpha = E\ \Sigma \int_{\mathcal{O}_{ij}} \mathcal{L}^4_{1X}(z')dz\ dz' = ||\mathcal{L}_{1X}||_4^4$$

$$\beta = E\ \Sigma \int_{\mathcal{O}_{ij}} L_2^8(z'\ ;\ s_i)dz\ dz' \leq ||\mathcal{L}_{2Y}||_8^8$$

$$\gamma = E\ \Sigma \int_{\mathcal{O}_{ij}} \left[\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v')dv'\right]^8 dz\ dz' \leqslant k\ |\pi|_2^4\ ||\Phi_{2Y}||_8^8$$

et l'on conclut :

Sous H1 : $\boxed{M_X^1\ M_Y^2\ B_Y^2 \leqslant C\ |\pi|_2\ ||M_X^1||_4^2\ \ ||M_Y^2||_8^2\ \ ||B_Y^2||_8^2}$

<u>Sous l'hypothèse 2</u>

Procédant de même les exposants $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ au lieu de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ dans l'inégalité de Hölder, on conclut :

Sous H2 : $\boxed{M_X^1\ M_Y^2\ B_Y^2 \leqslant C\ |\pi|_2\ ||M_X^1||_6^2\ \ ||M_Y^2||_6^2\ \ ||B_Y^2||_6^2}$

<u>4° Terme $B_X^1\ M_Y^2\ B_Y^2$</u>

Montrons que ce terme n'est pas contribuant si :

H1 : B_X^1 est dans L^4 , Y est dans L^8

H2 : B_X^1 et Y sont dans L^6

Comme pour le 3° terme, on peut écrire :

$$T_{ij}(s,t) = B_X^1(\Delta_i,j)_s \, M_Y^2(i,\Delta_j)_t \, B_Y^2(i,\Delta_j)_t$$

$$= P_{ij}(s,t) + Q_{ij}(s,t)$$

où P_{ij} et Q_{ij} admettent sur Δ_{ij} les représentations

$$P_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \varphi_{1X}(u,t_j) \, p_{ij}(v) \, du \, dv$$

$$Q_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_i)_s \times (i,\Delta_j)_t} \varphi_{1X}(u,t_j) q_{ij}(z) \, du \, W(dz)$$

(p_{ij} et q_{ij} étant les mêmes que pour le 3° terme), auxquels correspondent une somme P et une somme Q .

P étant un processus à v.b., on a :

$$P < E \, \Sigma \int_{\Delta_{ij}} \varphi_{1X}^2(u,t_j) \, p_{ij}^2(v) \, du \, dv$$

tandis que Q_{ij} étant une 1-m.p., par le lemme 5-2 du chapitre III

$$Q < 4 \, |\Delta_j| \, E \, \Sigma \int_{\Delta_i \times (i,\Delta_j)} \varphi_{1X}^2(u,t_j) \, q_{ij}^2(z) \, du \, dz$$

Majorant comme précédemment par l'inégalité de Hölder (d'exposants $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ sous H1 ; $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ sous H2) par le théorème 4-1 et 5-5 (ch. III), on obtient :

<u>Sous l'hypothèse 1</u>

$$\left.\begin{array}{lll} P \leq C & & |\pi|_2 \\ Q \leq C & |\pi|_1 & |\pi|_2 \end{array}\right\} \times \; ||B_X^1||_4^2 \; ||M_Y^2||_8^2 \; ||B_Y^2||_8^2$$

donc globalement

sous H1 : $\boxed{B_X^1 M_Y^2 B_Y^2 \leq C\, |\pi|_2 \quad ||B_X^1||_4^2 \quad ||M_Y^2||_8^2 \quad ||B_Y^2||_8^2}$

Sous l'hypothèse H2

On constate de même que P est d'ordre $|\pi|_2$ et Q d'ordre $|\pi|_1\ |\pi|_2$. Globalement ,

sous H2 : $\boxed{B_X^1 M_Y^2 B_Y^2 \leq C\, |\pi|_2 \quad ||B_X^1||_6^2 \quad ||M_Y^2||_6^2 \quad ||B_Y^2||_6^2}$

5° Terme $M_X^1(M_Y^2)^2$

Appliquant la formule de Ito à un paramètre t à $M_Y^2(i,\Delta_j)_t^2$, on trouve

$$M_Y^2(i,\Delta_j)_t^2 = 2\int_{(i,\Delta_j)_t} L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\ W(dx,dy) \int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)W(dz)$$

$$+ \int_{(i,\Delta_j)_t} L_{2Y}^2(z\ ;\ s_i)\ dz$$

Donc, sur Δ_{ij} ,

$$M_X^1(\Delta_i,j)_s\ M_Y^2(i,\Delta_j)_t^2 = 2\ p_{ij}(s,t) + q_{ij}(s,t)$$

où p_{ij} est la martingale

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\theta_{ij})_{st}} L_{1X}(t_j;z')L_{2Y}(x,y;s_i)\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i)\ W(dz)\right] W(dx,dy)\ W(dz')$$

et q_{ij} est la 1-m.p.

$$q_{ij}(s,t) = \int_{(\theta_{ij})_{st}} L_{1X}(t_j;z')\, L^2_{2Y}(z;s_i)dz\; W(dz')$$

où l'on déduit

$$M^1_X(M^2_Y)^2 \leqslant 8(P + Q)$$

où P et Q sont les espérances des sommes associées à p_{ij} et q_{ij}, et l'on obtient, comme ci-dessus

$$P < 16\; E\; \Sigma \int_{\theta_{ij}} L^2_{1X}(t_j;z)L^2_{2Y}(x,y;s_i)\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i)W(dz)\right]^2 dx\; dy\; dz'$$

$$\leqslant \begin{cases} k\; |\pi|_2\; \|\mathcal{L}_{1X}\|^2_4\; \|\mathcal{L}_{2Y}\|^4_8 & \text{sous H1} \\ k\; |\pi|_2\; \|\mathcal{L}_{1X}\|^2_6\; \|\mathcal{L}_{2Y}\|^4_6 & \text{sous H2} \end{cases}$$

tandis que

$$Q < 4\; E\; \Sigma \int_{\theta_{ij}} L^2_{1X}(t_j\; ;\; z')L^4_{2Y}(z\; ;\; s_i)dz\; dz'$$

$$\leqslant \begin{cases} k\; \|\mathcal{L}_{1X}\|^2_4\; \|\mathcal{L}_{2Y}\|^4_8 & \text{sous H1} \\ k\; \|\mathcal{L}_{1X}\|^2_6\; \|\mathcal{L}_{2Y}\|^4_6 & \text{sous H2} \end{cases}$$

globalement

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{sous H1} : & M^1_X(M^2_Y)^2 \leqslant C\; \|M^1_X\|^2_4\; \|M^2_Y\|^4_8 \\ \text{sous H2} : & \ldots\ldots\ldots\ldots\; \|M^1_X\|^2_6\; \|M^2_Y\|^4_6 \end{array}}$$

6° Terme $B^1_X(M^2_Y)^2$

De même ,

$$B^1_X(\Delta_i,j)_s \; M^2_Y(i,\Delta_j)^2_t = 2p_{ij}(s,t) + q_{ij}(s,t)$$

où p_{ij} est la 1-m.p.

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_i)_s\times(i,\Delta_j)_t} \varphi_{1X}(u,t_j)L_{2Y}(x,y;s_i)\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i)W(dz)\right]du\,W(dx,dy)$$

et q_{ij} est le processus à v.b.

$$q_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_i)_s\times(i,\Delta_j)_t} \varphi_{1X}(u,t_j)L^2_{2Y}(z;s_i)du\;dz$$

et donc, si P et Q sont les sommes associées

$$B^1_X(M^2_Y)^2 \leq 8(P+Q)$$

avec

$$P \leq 4\;E\;\Sigma\int_{\Delta_i\times(i,\Delta_j)} \varphi^2_{1X}(u,t_j)L^2_{2Y}(x,y;s_i)\left|\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i)W(dz')\right|^2 du\,dx\,dy$$

$$\leq\begin{cases} k\;|\pi|_2\;||\Phi_{1X}||^2_4\;||\mathcal{L}_{2Y}||^4_8 & \text{sous H1}\\ k\;|\pi|_2\;||\Phi_{1X}||^2_6\;||\mathcal{L}_{2Y}||^4_6 & \text{sous H2}\end{cases}$$

tandis que

$$Q \leq E\;\Sigma\int_{\Delta_i\times(i,\Delta_j)} \phi^2_{1X}(u,t_j)L^4_{2Y}(z;s_i)du\;dz$$

$$\leq\begin{cases} k\;|\pi|_2\;||\Phi_{1X}||^2_4\;||\mathcal{L}_{2Y}||^4_8 & \text{sous H1}\\ k\;|\pi|_2\;||\Phi_{1X}||^2_6\;||\mathcal{L}_{2Y}||^4_6 & \text{sous H2}\end{cases}$$

Il suffit de regrouper les résultats relatifs aux divers termes pour achever de démontrer le théorème 5-1.

5-2 - Théorème de convergence (0,1,2)

Théorème 5-2

Soient X et Y deux s.m.r. vérifiant l'hypothèse H1 ou l'hypothèse H2 du théorème 4-1. Dans la situation ($\mathcal{S}$), s'il existe N_o tel que f et f_n soient bornés par N_o, si f_n converge vers f au sens des deux semi normes

- $||f^2||_{X^4}$ et $||f^2||_{Y^8}$ sous H1
- $||f^2||_{X^6}$ et $||f^2||_{Y^6}$ sous H2

alors

$$\Sigma\, f_n(i,j)X(\Delta_i^n,j)_s\; Y(i,\Delta_j^n)_t^2 \xrightarrow{u\cdot L^2} \mathcal{P}_{st}^1 + \mathcal{B}_{st}$$

où $\mathcal{P}^1$ est la 1-martingale propre

$$\mathcal{P}_{st}^1 = \int_{R_{st}^2} f(x,y)L_{1X}(y;x,v)L_{2Y}^2(u,y;x)du\; dy\; W(dx,dv)$$

et $\mathcal{B}$ le processus à variation bornée

$$\mathcal{B}_{st} = \int_{R_{st}^2} f(x,y)\; \varphi_{1X}(x,v)L_{2Y}^2(u,y;x)du\; dy\; dx\; dv$$

Remarque : La limite est égale à

$$\int_{R_{st}} f(z)\; J_{\langle M_Y^2\rangle^{(2)}X}(dz) = \int_{R_{st}} f(x,y)X(dx,y)\langle M_Y^2\rangle^{(2)}(x,dy)$$

Démonstration

Il découle de l'inégalité maximale donnée au théorème 5-1 et du fait que $|f_n| < N_o$ que seuls peuvent être contribuants les termes en $M_X^1(M_Y^2)^2$ et $B_X^1(M_Y^2)^2$.

On omettra d'indiquer les indices n de Δ_{ij}^n .

1° Terme : $M_X^1(M_Y^2)^2$

$$D_n(s,t) = \Sigma\ f_n(i,j)M_X^1(\Delta_i,j)_s M_Y^2(i,\Delta_j)_t^2 - \mathcal{P}^1_{st}$$

$$= A_n(s,t) + B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

où

$$A_n(s,t) = \Sigma\ f_n(i,j)M_X^1(\Delta_i,j)_s (N_{ij})_t$$

avec

$$(N_{ij}) = M_Y^2(i,\Delta_j) - \langle M_Y^2\rangle^{(2)}\ (i,\Delta_j)$$

$$B_n(s,t) = \Sigma\ f_n(t,j)M_X^1(\Delta_i,j)_s\ \langle M_Y^2\rangle^{(2)}\ (i,\Delta_j)_t$$

$$- \int_{R^2_{st}} f_n(x,y)\ L_{1X}(y;x,v)\ L^2_{2Y}(u,y;x)du\ dy\ W(dx,dv)$$

$$C_n(s,t) = \int_{R^2_{st}} \big[f_n(x,y)-f(x,y)\big]L_{1X}(y;x,v)L^2_{2Y}(u,y;x)du\ dy\ W(dx,dv)$$

$C_n(s,t)$ est une 1-m.p. qui tend $u\cdot L^2$ vers zéro du fait que f_n tend vers f au sens de la semi norme associée à cette intégrale.

Majoration de $A_n(s,t)$

$A_n(s,t)$ est une martingale en (s,t) car $M_X^1(\Delta_i,j)_s$ est une 1-martingale $\mathcal{F}_{st_j}$-mesurable, alors que $(N_{ij})_t$ est une 2-martingale

$\mathcal{F}_{s_i t}$-mesurable. Donc :

$$E\left[\sup A_n^2(s,t)\right] \leqslant 16\ N_o^2\ \Sigma\ E\left[M_X^1(\Delta_i,j)^2\ N_{ij}^2\right]$$

$$\leqslant k\ \Sigma\ E\ \left[E\{M_X^1(\Delta_i,j)^2 |\ \mathcal{F}^1_{s_i}\}\ \ E\{N_{ij}^2\ |\ \mathcal{F}^2_{t_j}\}\right]$$

et, en utilisant le théorème 4-1 du chapitre III pour le second crochet { }

$$E\left[\sup A_n^2(s,t)\right] \leqslant k\ \Sigma\ E\left[\int_{(\Delta_i,j)} L_{1X}^2(t_j;z)dz\right]\left[k|\Delta_j|\int_{(i,\Delta_j)} L_{2Y}^4(z',s_i)dz'\right]$$

$$\leqslant k\ |\pi|_2\ E\int_{R_{11}^2} \mathcal{L}_{1X}^2(z)\ \mathcal{L}_{2Y}^4(z')dz\ dz'$$

$$\leqslant k\ |\pi|_2\ ||\mathcal{L}_{1X}||^2\ \ ||\mathcal{L}_{2Y}||^4$$

(normes 4 et 8 sous H1 ; 6 et 6 sous H2).

Mojoration de $B_n(s,t)$

Reprenant les notations o_{ij} , $\mathcal{E}_{ij}$, $L_{1X,n}$ et $L_{2Y,n}$ définies au § 3-2-1 , on a :

$$B_n(s,t) = \int_{R_{11}^2} \Sigma\ 1_{o_{ij}}\ f_n(i,j)\{L_{1X,n}\ L_{2Y,n}^2 - L_{1X}\ L_{2Y}^2\}dz\ W(dz')$$

$$- \int_{R_{11}^2} \Sigma\ 1_{\mathcal{E}_{ij}}\ f_n(i,j)\ L_{1X}\ L_{2Y}^2\ dz\ W(dz')$$

o_{ij} et $\mathcal{E}^n = \cup\ \mathcal{E}_{ij}$ étant disjoints,

$$E\left[\sup B_n^2(s,t)\right] \leqslant 8\ N_o^2\ E\left[\int_{R_{11}^2} \{L_{1X,n}L_{2Y,n}^2 - L_{1X}L_{2Y}^2\}^2 dz\,dz' + \int_{\mathcal{E}^n} L_{1X}^2 L_{2Y}^4 dz\ dz'\right]$$

Toutes les fonctions intervenant sont dominées et ont leurs intégrales dominées, par

$$k \int_{R_{11}^2} \mathcal{L}^2_{1X}(z)\, \mathcal{L}^4_{2Y}(z')\,dz\, dz' \leqslant k' \,||\mathcal{L}_{1X}||^2 \;\; ||\mathcal{L}_{1Y}||^4$$

(avec la même convention sur les normes).

Il suffit de remarquer que $L_{1X,n}\, L_{2Y,n}$ tend simplement vers $L_{1X}\, L_{2Y}$ pour conclure alors que le premier terme tend vers zéro et que $|\mathcal{E}^n| < 2|\pi_n|$ pour conclure que le second terme tend vers zéro.

Donc

$$D_n(s,t) - \rho^1_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} 0$$

<u>2° Terme : $B^1_X(M^2_Y)^2$</u>

Posons maintenant :

$$D_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j)\, B^1_X(\Delta_i,j)_s\, M^2_Y(i,\Delta_j)^2_t - \mathcal{B}_{st}$$

$$= A_n(s,t) + B_n(s,t)$$

où, reprenant les notations du § 3-2-1 (étude de p^1_n),

$$A_n(s,t) = \int_{R_{11}^2} \Sigma\, 1_{O_{1ij}}\, f_n(i,j)\{\varphi_{1X,n}\, L^2_{2Y,n} - \varphi_{1X}\, L^2_{2Y}\}dz\, dz'$$

$$- \int_{R_{11}^2} \Sigma\, 1_{\mathcal{E}_{1ij}}\, f_n(i,j)\, \varphi_{1X}\, L^2_{2Y}\, dz\, dz'$$

$$B_n(s,t) = \int_{R_{st}^2} (f_n - f)(x,y)\, \varphi_{1X}(x,y)\, L^2_{2Y}(u,y;x)\, du\, dy\, dx\, dv$$

$A_n(s,t)$ est une processus à v.b. Remarquant que toutes les fonctions intervenant dans A_n sont dominées et ont leurs intégrales dominées par

$$k \int_{R_{11}^2} \Phi_{1X}^2(z) \mathcal{L}_{2Y}^4(z')dz\,dz' < k' \, ||\Phi_{1X}||^2 \; ||\mathcal{L}_{1Y}||^4$$

et utilisant d'une part que $\varphi_{1X,n} L_{2Y,n}^2$ tend simplement vers $\varphi_{1X} L_{2Y}^2$, d'autre part $\mathcal{E}_1^n = \cup \mathcal{E}_{1ij}$ est de mesure inférieure à $|\pi_n|_2$, on conclut que $A_n(s,t)$ tend $u{\cdot}L^2$ vers zéro.

Quant à $B_n(s,t)$, processus à v.b. il tend vers zéro du fait de la convergence de f_n vers f.

On en déduit comme aux autres paragraphes :

<u>Corollaire 5-2</u>

Si X, Y, Z sont trois s.m.r. de (L^4, L^8, L^8) (Hypothèse 1), ou de (L^6, L^6, L^6) (Hypothèse 2), dans la situation $(\mathcal{S})$, si f et f_n sont bornées par N_o et si f_n converge vers f au sens des semi-normes

$$||f^2||_{X^4}, \quad ||f^2||_{Y^8} \quad \text{et} \quad ||f^2||_{Z^8} \qquad \text{(sous H1)}$$

$$||f^2||_{X^6}, \quad ||f^2||_{Y^6} \quad \text{et} \quad ||f^2||_{Z^6} \qquad \text{(sous H2)}$$

alors

$$\Sigma\, f_n(i,j)\left[X(\Delta_i,j)\; Y(i,\Delta_j)\; Z(i,\Delta_j)\right]_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} \mathcal{P}_{st}^1 + \mathcal{B}_{st}$$

où

$$\mathcal{P}_{st}^1 = \int_{R_{st}^2} f(x,y) L_{1X}(y;x,v) L_{2Y}\, L_{2Z}(u,y;x)du\,dy\,W(dx,dv)$$

$$\mathcal{B}_{st} = \int_{R_{st}^2} f(x,y)\, \varphi_{1X}(x,y)\; L_{2Y}\, L_{2Z}(u,y;x)du\,dy\,dx\,dv$$

La limite peut encore se noter

$$\mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{B}_{st} = \int_{R_{st}} f(x,y)\ X(dx,y)\ <M^2_Y,M^2_Z>^{(2)}(x,dy$$

5-3 - Inégalité maximale (1,0,1)

Nous établirons d'abord un lemme concernant l'application de la formule de Ito unidimensionnelle à une famille indexée par s de semi-martingales en t :

Lemme 5-1

Soit $(X^1_s(t), \ldots, X^n_s(t),\ t \in [0,1])_{s\in[0,1]}$ une famille de semi-martingales en t, continues à droite en s pour tout t. Soit $f(s,t\ ;\ x_1,\ldots,x_n)$ une fonction continue à droite en s, régulière en $(t\ ;\ x_1,\ldots,x_n)$ au sens où on peut lui appliquer la formule de Ito en t :

$$f(s,t\ ;\ X^1_s(t),\ldots,X^n_s(t)) - f(s,o\ ;\ X^1_s(o),\ \ldots,\ X^n_s(o)) = M_s(t) + B_s(t) \quad (1)$$

où M est une martingale en t, B une fonction à variation bornée en t, l'égalité étant, pour tout s, presque sûre en t.
Alors si M et B sont continues à droite en s, l'égalité précédente est p.s., uniformément en $(s,t) \in R_{11}$.

Démonstration

L'égalité (1) est uniforme en $(s,t) \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times [0,1]$.
La continuité à droite des différents processus en s permet donc de dire que l'égalité est p.s., uniformément en $(s,t) \in R_{11}$.

Théorème 5-3

Si X et Y sont deux s.m.r. de L^4, si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition, alors il existe une constante universelle positive C telle que :

$$C^{-1} E \sup \{\Sigma X(\Delta_{ij})_{st} Y(i,\Delta_j)_t\}^2 \leqslant \left[||M_X^{**}||_4^2 + ||P_X^2||_4^2 \right] ||M_Y^2||_4^2$$

$$+ |\pi|_2 \left[||M_X^*||_4^2 \; ||Y||_4^2 + ||B_X^2||_4^2 \; ||M_Y^2||_4^2 + (||M_X^{**}||_4^2 + ||P_X^2||_4^2) \; ||B_Y^2||_4^2 \right]$$

$$+ |\pi|_2^{3/2} \; ||B_X^2||_4^2 \; ||B_Y^2||_4^2$$

Corollaire 5-3

Sous les m^emes hypothèses, l'expression précédente est majorée par $||X||_4^2 \; ||Y||_4^2$.

Le principe de la démonstration est le même qu'au § 5-1. Il convient cependant de noter la mécessité ici de l'emploi du lemme 5-1 (alors qu'au § 5-1 on n'utilisait la formule de Ito que pour une s.m.r., ici on l'utilise pour une famille de s.m.).

Convention : Dans toute la suite de ce paragraphe, $||\cdot||$ désignera le norme $||\cdot||_4$.

π étant fixé, on notera :

$$\{X,Y\} = \Sigma X(\Delta_{ij})_{st} Y(i,\Delta_j)_t$$

Démonstration

Le développement par bilinéarité, écrivant

$$X = M_X^* + M_X^{**} + P_X^1 + P_X^2 + B_X$$

et

$$Y = M_Y^2 + B_Y^2$$

fait apparaître 10 termes, que nous étudierons dans l'ordre suivant :

	M_X^*	M_X^{**}	P_X^1	P_X^2	B_X
B_Y^2	1	2	3	4	5
M_Y^2	6	7	8	9	10

1° Terme : $\{M_X^* , B_Y^2\}$

L'utilisation du lemme 5-1 permet d'écrire

$$\{M_X^* , B_Y^2\}_{st} = m(s,t) + p(s,t)$$

où m est la martingale $\Sigma\, m_{ij}(s,t)$, avec

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right] \theta_X(x,y)\ W(dx,dy)$$

et p est la 1-m.p. $\Sigma\, p_{ij}(s,t)$, avec

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} \left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta(z)\ W(dz)\right] \varphi_{2Y}(s_i,y)\ dy$$

On déduit, par la méthode employée systématiquement au § 5-1 que u$\cdot L^2$, m est en $|\pi|_2^2$ et p en $|\pi|_2$. Globalement

$$E \sup \{M_X^* , B_Y^2\}^2 < C\ |\pi|_2\ ||\theta_X||^2\ ||\Phi_{2Y}||^2$$

2° Terme : $\{M_X^{**} , B_Y^2\}$

Par le lemme 5-1 ,

$$\{M_X^{**} , B_Y^2\}_{st} = m(s,t) + p(s,t)$$

où m est la martingale associée à

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{C}_{ij})_{st}} \left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right] \psi_X(x,y;z)\; W(dx,dy)\; W(dz)$$

et p la 1-m.p. associée à

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} \left[\int_{(\mathcal{C}_{ij})_{sy}} \psi_X(z',z)\; W(dz')\; W(dz)\right] \varphi_{2Y}(s_i,y)\,dy$$

On montre que, $u \cdot L^2$, m est en $|\pi|_2^{3/2}$ et p est en $|\pi|_2$. Globalement

$$E \sup \{M_X^{**} , B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\, |\pi|_2\, ||\psi_X||^2 \quad ||\phi_{2Y}||^2$$

<u>3° Terme : $\{P_X^1 , B_Y^2\}_{st}$</u>

En appliquant la formule ordinaire de différentiation en t , on écrit :

$$\{P_X^1 , B_Y^2\}_{st} = p_1(s,t) + p_2(s,t)$$

où p_1 et p_2 sont les 1-m.p. associées à

$$p_{1ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{C}_{1ij})_{st}} \left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right] \beta_{1X}(y\ ;\ z')\,dy\; W(dz')$$

$$p_{2ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} \left[\int_{(\mathcal{C}_{1ij})_{sv}} \beta_{1X}(v\ ;\ z')\,dv\; W(dz')\right] \varphi_{2Y}(s_i,y)\,dy$$

p_1 et p_2 sont en $|\pi|_2^{3/2}$. Donc

$$E \sup \{P_X^1 , B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\, |\pi|_2^{3/2}\, ||\beta_{1X}|| \quad ||\phi_{2Y}||^2$$

<u>4° Terme : $\{P_X^2 , B_Y^2\}$</u>

Par le lemme 5-1, on écrit :

$$\{P_X^2 , B_Y^2\}_{st} = p(s,t) + b(s,t)$$

où $p(s,t)$ est la 2-m.p. associée à

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{st}} \left[\int\!\!\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right] \beta_{2X}(x,y \; ; \; u) \; W(dx,dy)du$$

et $b(s,t)$ le processus à v.b. associé à

$$b_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} \left[\int\!\!\int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{sy}} \beta_{2X}(z \; ; \; u) \; W(dz)du\right] \varphi_{2Y}(s_i,y)dy$$

p est en $|\pi|_2^{3/2}$, b est en $|\pi|_2$; globalement

$$E \sup \{P_X^2 , B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C \; |\pi|_2 \; ||\beta_{2X}||^2 \; ||\phi_{2Y}||^2$$

<u>5° Terme : $\{B_X , B_Y^2\}$</u>

$$\{B_X , B_Y\}_{st} = b_1 + b_2$$

où b_1 est le processus à v.b. somme des

$$b_{1,ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \left[\int\!\!\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right] \varphi_X(x,y)dx \; dy$$

b_2 le processus à v.b. associé à

$$b_{2,ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} \left[\int\!\!\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \varphi_X(x,v)dx \; dv\right] \varphi_{2Y}(s_i,y) \; dy$$

qui sont tous deux, dans $u \cdot L^2$ en $|\pi|_2^{3/2}$

$$E \sup \{B_X , B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C \, |\pi|_2^{3/2} \, ||\phi_X||^2 \, ||\Phi_{2Y}||^2$$

<u>6° Terme : $\{M_X^* , M_Y^2\}$</u>

C'est une martingale en (s,t) : en effet c'est une martingale en s , et si $t \leqslant t'$,

$$E\left[M_X^*(\Delta_{ij})_{st'} \, M_Y^2(i,\Delta_j)_{t'} \middle| \mathcal{F}_t^2\right] = E\left[M_X^*(\Delta_{ij})_{st} M_Y^2(i,\Delta_j)_{t'} \middle| \mathcal{F}_t^2\right]$$

$$+ E\left[E\{M_X^*(\Delta_{ij})_{st'} - M_X^*(\Delta_{ij})_{st} | \mathcal{G}_{s_i t}\} \, M_Y^2(i,\Delta_j)_{t'} | \mathcal{F}_t^2 \right]$$

$$= M_X^*(\Delta_{ij})_{st} \, M_Y^2(i,\Delta_j)_t$$

puisque M_X^* est une martingale forte. On a donc :

$$E \sup \{M_X^* , M_Y^2\}_{st}^2 \leqslant 16 \, E \, \{M_X^* , M_Y^2\}_{11}$$

$$= \Sigma \, E\left[M_X^*(\Delta_{ij}) \, M_Y^2(i,\Delta_j)\right]^2$$

$$= \Sigma \, E\int_{\Delta_{ij}\times(i,\Delta_j)} \theta_X^2(z')L_{2Y}^2(z,s_i)dz \, dz'$$

$$\leqslant \Sigma \, E\int_{\Delta_{ij}\times[0,1]\times\Delta_j} \theta_X^2(z')\mathcal{L}_{2Y}^2(z)dz \, dz'$$

$$\leqslant C \, |\pi|_2 \, ||\theta_X||^2 \, ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

la dernière ligne étant obtenue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

7° Terme : $\{M_X^{**}, M_Y^2\}$

$\{M_X^{**}, M_Y^2\}_{st}$ est le produit de deux martingales en t (alors que dans tous les termes précédents, l'un au moins des 2 facteurs était à v.b. en t) ; le lemme 5-1 fournit donc, outre les deux termes de type précédent, un terme provenant du terme en dérivée seconde dans la formule de Ito.

$$\{M_X^{**}, M_Y^2\}_{st} = m + p$$

où m est la somme des deux martingales associées à

$$m_{1,ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{C}_{ij})_{st}} \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i)W(dz)\right]\psi_X(x,y;z')W(dx,dy)W(dz')$$

$$m_{2,ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} \left[\int_{(\mathcal{C}_{ij})_{sy}} \psi_X(z,z')W(dz)W(dz')\right]L_{2Y}(x,y;s_i)W(dx,dy)$$

et $p(s,t)$ la 1-m.p. associée à

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{C}_{ij})_{st}} \psi_X(z\ ;\ z')\ L_{2Y}(z\ ;\ s_i)dz\ W(dz')$$

m_1 et m_2 sont $u\cdot L^2$ en $|\pi|_2$, alors que p est seulement borné $u\cdot L^2$:

$$E\ \sup\{M_X^{**}, M_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\ ||\psi_X||^2\ \ ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

8° Terme : $\{P_X^1, M_Y^2\}$

$$\{P_X^1, M_Y^2\}_{st} = m + p$$

où m est la martingale associée à

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_{st}} \left[\int_{(\mathcal{C}_{1ij})_{sy}} \beta_{1X}(v;z')dv\ W(dz')\right]L_{2Y}(x,y;s_i)W(dx,dy)$$

et p la 1-m.p. associée à

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{1ij})_{st}} \left[\int_{(i,\Delta_j)_{sy}} L_{2Y}(z\ ;\ s_i) W(dz)\right] \beta_{1X}(y;z')dy\ W(dz')$$

m est en $|\pi|_2^{3/2}$, p est en $|\pi|_2$. Globalement,

$$E \sup \{P_X^1\ ,\ M_Y^2\}_{st}^2 < C\ |\pi|_2\ ||\beta_{1X}||^2\ ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

9° Terme : $\{P_X^2\ ,\ M_Y^2\}$

Comme pour le 7° terme, on a le produit de 2 martingales en t , et la formule de Ito du lemme 5-1 fournit trois termes :

$$\{P_X^2\ ,\ M_Y^2\}_{st} = p(s,t) + b(s,t)$$

où p est la somme des deux 2-m.p. associées à

$$p_{1,ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} \left[\int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{sy}} \beta_{2X}(z;u) W(dz)du\right] L_{2Y}(s,y;s_i) W(dx,dy)$$

$$p_{2,ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{st}} \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i) W(dz)\right] \beta_{2X}(x,y;u) W(dx,dy) du$$

et b le processus à v.b. associé à

$$b_{ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(z;u)\ L_{2Y}(z;s_i) dz\ du$$

p est en $|\pi|_2$, alors que b n'est que borné $u \cdot L^2$

$$E \sup \{P_X^2\ ,\ M_Y^2\}_{st}^2 < C\ ||\beta_{2X}||^2\ ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

10° Terme : $\{B_X , M_Y^2\}$

$$\{B_X , M_Y^2\}_{st} = (p + b)_{st}$$

où p est la 2-m.p. associée à

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_{st}} \left[\iint_{(\Delta_{ij})_{sy}} \varphi_X(u,v) du\, dv\right] L_{2Y}(x,y ; s_i) W(dx,dy)$$

et b le processus à v.b. associé à

$$b_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \left[\int_{(i,\Delta_j)_{sy}} L_{2Y}(z ; s_i) W(dz)\right] \varphi_X(x,y)\, dx\, dy$$

Dans $u{\cdot}L^2$, p est en $|\pi|_2^{3/2}$, b en $|\pi|_2$. Globalement,

$$E \sup \{B_X , M_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\, |\pi|_2\, ||\phi_X||^2\, ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

Il suffit de regarder les diverses majorations trouvées pour obtenir le théorème 5-3.

5-4 - Théorème de convergence (1,0,1)

Théorème 5-4

Soient X et Y deux s.m.r. de L^4 , dans la situation ($\mathcal{S}$) , s'il existe N_o majorant $|f|$ et $|f_n|$, si f_n converge vers f au sens des deux semi-normes $||\cdot||_{X^4}$ et $||\cdot||_{Y^4}$, alors :

$$\Sigma f_n(i,j)\, X(\Delta_{ij}^n)_{st}\, Y(i, {}_j^n)_t \longrightarrow \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{B}_{st}$$

où $\mathcal{P}^1$ est la 1-martingale propre

$$\mathcal{P}^1_{st} = \int_{R^2_{st}} f(x,y)\, \psi_X(u,y ; x,v)\, L_{2Y}(u,y ; x)\, du\, dy\, W(dx,dv)$$

et $\mathcal{B}_{st}$ le processus à variation bornée

$$\mathcal{B}_{st} = \int_{[0,s]\times R_{st}} f(x,y)\ \beta_{2X}(u,y\ ;\ x)\ L_{2Y}(u,y\ ;\ x)du\ dx\ dy$$

Remarque

∘ On notera $<M_X^{**}(dx,\cdot),\ M_Y^2(x,\cdot)>^{(2)}(dy)$ la forme différentielle stochastique mixte définie par :

$$\int_{R_{st}} f(x,y)\ <M_X^{**}(dx,\cdot),\ M_Y^2(x,\cdot)>^{(2)}(dy)$$

$$= \int_{R^2_{st}} f(x,y)\ \Psi_X(u,y\ ;\ x,v)L_{2Y}(u,y\ ;\ x)du\ dy\ W(dx,dv)$$

soit encore, formellement :

$$<M_X^{**}(dx,\cdot),M_Y^2(x,\cdot)>^{(2)}(dy) =$$

$$= \int_{R_{xy}} \Psi_X(u,y\ ;\ x,v)L_{2Y}(u,y\ ;\ x)du\ dy\ W(dx,dv)$$

∘ On notera encore $<P_X^2(dx,\cdot),\ M_Y^2(x,\cdot)>^{(2)}(dy)$ pour la mesure ordinaire définie pour les fonctions $f(x,y)$ par

$$\int_{R_{1t}\times[0,s]} f(x,y)\ \beta_{2X}\ L_{2Y}(u,y\ ;\ x)dx\ dy\ du$$

∘ Remarquant qu'il est normal de poser, si M^* est une martingale forte

$$<M^*(dx,\cdot),\ M_Y^2(x,\cdot)>^{(2)}(dy) = 0$$

(voir le terme numéro 6 dans la démonstration précédente).

La limite précédente pourra donc être notée :

$$\mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{B}_{st} = \int_{R_{st}} f(x,y) \langle M^2_X(dx,\bullet), M^2_Y(x,\bullet)\rangle^{(2)}(dy)$$

<u>Démonstration</u>

f_n étant borné par N_o , on déduit du théorème 5-4 que les seuls termes pouvant avoir une contribution non nulle sont le 7ème et le 9ème. Montrons donc séparément que $\{M^{**}_X, M^2_Y\}_{st}$ tend $u\cdot L^2$ vers $\mathcal{P}^1_{st}$ et que $\{P^2_X, M^2_Y\}_{st}$ tend $u\cdot L^2$ vers $\mathcal{B}_{st}$.

<u>Contribution de $\{M^{++}_X, M^2_Y\}_{st}$</u>

Constatons d'abord que $\mathcal{P}^1_{st}$ est bien une 1-m.p. de L^2 : en effet

$$E \sup(\mathcal{P}^1_{st})^2 < N_o^2 \,||\psi_X||^2\, ||\mathcal{L}_{2Y}||^2$$

On a vu dans la démonstration du théorème 5-3 (étude du 7ème terme) que

$$\{M^{**}_X, M^2_Y\}_{st} = m_n(s,t) + p_n(s,t)$$

où m est majoré $u\cdot L^2$ par un terme en $|\pi|$.

Montrons donc que :

$$D_n(s,t) = p_n(s,t) - \mathcal{P}^1(s,t) \xrightarrow{u\cdot L^2} 0$$

où

$$p_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j) \int_{(\sigma_{ij})_{st}} \Psi_X(z;z')L_{2Y}(z;s_i)dz\,W(dz')$$

$$= \Sigma\, f_n(i,j) \langle M^{**}((\Delta_i)_s,\bullet),\ M^2_Y(s_i,\bullet)\rangle^{(2)}(\Delta_j)_t$$

Donc

$$D_n(s,t) = B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

où

$$B_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j) \Big[\langle M^{**}((\Delta_i)_s,\cdot), M_Y^2(s_i,\cdot)\rangle^{(2)} (\Delta_j)_t$$

$$- \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \langle M^{**}(dx,\cdot), M_Y^2(x,\cdot)\rangle^{(2)} (dy) \Big]$$

et

$$C_n(s,t) = \int_{R_{st}} (f_n - f)(x,y) \langle M^{**}(dx,\cdot), M_Y^2(x,\cdot)\rangle^{(2)} (dy)$$

D'une part $C_n(s,t)$ est une 1-m.p. et l'on a :

$$E \sup C_n^2(s,t) \leqslant 4\, E \int_{R_{11}^2} (f_n - f)^2(x,y) L_{2Y}^2(u,y;x) \psi_X^2(u,y;x,v) du\, dy\, dx\, dv$$

$$\leqslant 8 \Big[\,||(f_n - f)^2||_{(M_Y^2)^4} + ||(f_n - f)^2||_{(M_X^{**})^4} \Big]$$

qui tend vers zéro. D'autre part, reprenant les notations du § 3-2 ,

$$B_n(s,t) = \Sigma\, f_n(i,j) \Big[\iint_{(o_{ij})_{st}} [L_{2Y,n} - L_{2Y}](z;x) \psi_X(z;x,y) dz\, W(dx,dy)$$

$$- \int_{\mathcal{E}_{ij}^n} L_{2Y}(z;x) \psi_X(z;x,y) dz\, W(dx,dy) \Big]$$

D'où l'on déduit

$$E \sup B_n^2(s,t) \leqslant 8\, N_o^2\, E \Big[\int_{R_{11}^2} [L_{2Y,n} - L_{2Y}]^2\, \psi_X^2\, dz\, dx\, dv$$

$$+ \int_{\mathcal{E}^n} L_{2Y}^2\, \psi_X^2\, dz\, dx\, dv \Big]$$

$L_{2Y,n}-L_{2Y}$ tend simplement vers zéro, tandis que L_{2Y} et ψ_X sont dans L^4 et que $|\mathcal{E}^n| < 2|\pi_n|$. On en déduit, comme dans la démonstration du théorème 3-2-1 que $B_n(s,t) \xrightarrow{u\cdot L^2} 0$.

Contribution de $\{P_X^2 , M_Y^2\}$

On a vu dans la démonstration du théorème 5-3 (9ème terme) que $\{P_X^2 , M_Y^2\}_{st} = p_n(s,t) + b_n(s,t)$, où p_n est une 2-m.p. qui est $u\cdot L^2$ en $|\pi|_2$. Montrons donc

$$D_n(s,t) = b_n(s,t) - \mathcal{B}_{st} \xrightarrow{u\cdot L^2} 0$$

avec

$$b_n(s,t) = \Sigma f_n(i,j) \int_{(\sigma_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(z;u)L_{2Y}(z;s_i)dz\, du$$

Donc

$$D_n(s,t) = B_n(s,t) + C_n(s,t)$$

avec

$$B_n(s,t) = \Sigma f_n(i,j) \left[\int_{(\sigma_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(z;u)\left[L_{2Y,n}-L_{2Y}\right](z;u)dz\, du - \int_{(\mathcal{E}^n_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(z;u)L_{2Y}(z;u)dz\, du\right]$$

$$C_n(s,t) = \int_{[o,s]\times R_{st}} (f_n-f)(x,y)\beta_{2X}\, L_{2Y}(u,y;x)du\, dx\, dy$$

D'une part :

$$E \sup C_n^2(s,t) \leqslant E \int_{[0,1]^3} (f_n-f)^2(x,y)\; \beta_{2X}^2\, L_{2Y}^2(u,y;x)du\, dx\, dy$$

$$\leqslant 2 \left[||(f_n-f)^2||_{(P_X^2)^4} + ||(f_n-f)^2||_{(M_Y^2)^4}\right]$$

D'autre part $(L_{2Y,n}-L_{2Y})\ \beta_{2X}$ tend simplement vers zéro, est dominé par $4\ \mathcal{L}_{2Y}\ \beta_{2X}$ qui est intégrable, tandis que $|\mathcal{E}^n_2| < |\pi|_2$. On conclut comme précédemment $\mathcal{B}_n(s,t) \xrightarrow{u \cdot L^2} 0$.

Ce qui achève de démontrer le théorème 5-4.

<u>Remarque</u>

Utilisant le résultat du théorème 5-4 (limite dans L^2 de la variation (1,0,1)), on montre facilement la convergence <u>dans L^1</u> de la variation (0,1,2) quand f_n est bornée (le théorème 5-2 donne la convergence dans L^2 de cette variation).

En effet, on peut rapprocher la variation (0,1,2)

$$\Sigma\ f_n(i,j)\ X(\Delta_i,j)_s\ Y(i,\Delta_j)^2_t$$

de la variation (1,0,1)

$$\Sigma\ f_n(i,j)\ J_{ZY}(\Delta_{ij})_{st}\ Y(i,\Delta_j)_t\ .$$

§6 - Variations produit (1,0,2) et (0,1,3)

Toutes les variations que nous rencontrons dans la fin de ce chapitre seront non contribuantes (exception faite de la variation (0,4,0) dont on verra qu'elle est bornée $u\cdot L^1$).

Au § 7-1, nous démontrerons l'absolue convergence dans L^1 des variations d'ordre supérieur à celles étudiées précédemment (§3 à §6). Nous avons regroupé dans ce §6 les variations (1,0,2) et (0,1,3) pour lesquelles on ne sait pas démontrer cette absolue convergence, ni même la convergence dans $u\cdot L^1$. Faisant des hypothèses un peu plus fortes (de type L^4, L^8 ou L^6, L^6) nous montrerons au moyen d'inégalités maximales la convergence $u\cdot L^2$ vers zéro.

Il est facile de déduire du fait qu'une telle variation est non contribuante pour $f_n = 1$ le fait qu'elle l'est aussi si f_n est bornée, adaptée (sans même de condition de convergence pour f_n).

6-1 : Variation (1,0,2)

Théorème 6-1 : Inégalité maximale (1,0,2)

Si X et Y sont deux s.m.r. de L^6 et $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ une partition,

$$E \sup\left[\Sigma\, X(\Delta_{ij})_{st}\; Y(i,\Delta_j)_t^2\right]^2 \leqslant C\, |\pi|_2\, ||X||_6^2\, ||Y||_6^4$$

Notons :

$$\{X,Y\}\}_{st} = \Sigma\, X(\Delta_{ij})_{st}\; Y(i,\Delta_j)_t^2$$

les décompositions

$$X = M_X^{*} + M_X^{**} + P_X^1 + P_X^2 + B_X$$

$$Y = M_Y^2 + B_Y^2$$

associées à l'inégalité $(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$ conduit par bilinéarité à 10 termes, comme au § 5-3 . L'application de la formule de Ito en t (permise par le lemme 5-1) conduit à décomposer chaque terme en 2, 3 ou 4 parties dont on a la représentation (comme martingale, 1-m.p., 2-m.p. ou à v.b.). L'inégalité maximale relative au carré d'une intégrale (cf. ch. III, § 4) fournit une majoration $u \cdot L^2$. On conclut par l'inégalité de Hölder du type :

$$E \Sigma \int X\,Y\,Z < (E \Sigma \int X^3)^{1/3} (E \Sigma \int Y^3)^{1/3} (E \Sigma \int Z^3)^{1/3}$$

On notera ici $||\cdot||$ pour $||\cdot||_6$.

<u>1er terme</u> : $\{M_X^*, M_Y^2\}$

C'est la somme de la martingale $m = m_1 + m_2$ et de la 1-m.p. associées à :

$$m_{1ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y;s_i)\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right] \times \left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta_X(z')\ W(dz')\right] dx\ dy$$

$$m_{2ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \theta_X(x,y)\left[\int_{(i,\Delta_j)_{sy}} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right]^2 W(dx,dy)$$

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} L_{2Y}^2(x,y\ ;\ s_i)\left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta_X(z)\ W(dz)\right] dx\ dy$$

(Il n'y a pas d'autre terme 1-m.p. car M^* étant une martingale forte, il y a orthogonalité entre $M^*(\Delta_{ij})_{st}$ et $M_Y^2(i,\Delta_j)_{st}$.)

A titre d'exemple, majorons p dans $u \cdot L^2$:

$$E \sup p^2(s,t) \leqslant E \, \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} \mathcal{L}^2_{2Y}(x,y) \left[\int\!\!\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta_X(z)\, W(dz)\right]^2 dx\, dy$$

$$\leqslant \alpha^{2/3} \beta^{1/3}$$

où

$$\alpha = E \, \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} \mathcal{L}^6_{2Y}(x,y) dx\, dy \leqslant \frac{1}{|\pi|_1} \; ||\mathcal{L}_{2Y}||^6$$

$$\beta = E \, \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} \left[\int\!\!\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta_X(z)\, W(dz)\right]^6 dx\, dy$$

$$\leqslant E \, \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} k|\Delta_{ij}|^2 \int_{\Delta} \theta^6_X(z) dz\, dx\, dy$$

$$\leqslant \frac{k}{|\pi|_1} \; |\pi|_1 \; |\pi|^2_1 \; |\pi|^2_2 \; ||\theta_X||^6$$

$$E \sup p^2(s,t) \leqslant C \; |\pi|_2 \; ||\theta_X||^2 \; ||\mathcal{L}_{2Y}||^4$$

On montre de même que :

$$E \sup m^2(s,t) \leqslant C \; |\pi|^2_2 \; ||\theta_X||^2 \; ||\mathcal{L}_{2Y}||^4$$

donc globalement

$$E \sup \{M^*_X \, , \, M^2_Y\}_{st} \leqslant C \; |\pi|_2 \; ||\theta_X||^2 \; ||\mathcal{L}_{2Y}||^4$$

<u>2ème terme : $\{M^{**}_X \, , \, M^2_Y\}$</u>

C'est la somme de la martingale $m = m_1 + m_2$ et de la 1-m.p. $p = p_1 + p_2$ associées à

$$m_{1ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{ij})_{st}} \left[\int\!\!\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z;s_i) W(dz)\right]^2 \psi_X(x,y;z') W(dx,dy) W(dz')$$

$$m_{2ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\left[\int\!\!\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(\xi\ ;\ s_i)\ W(d\xi)\right] \times$$

$$\left[\int\!\!\int_{(\mathcal{O}_{ij})_{sy}} \psi_X(z,z')\ W(dz)\ W(dz')\right] W(dx,dy)$$

$$p_{1ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} L^2_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\left[\int\!\!\int_{(\mathcal{O}_{ij})_{sy}} \psi_X(z,z')W(dz)W(dz')\right] dx\ dy$$

$$p_{2ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\left[\int\!\!\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(\xi\ ;\ s_i)W(d\xi)\right] \times$$

$$\left[\int\!\!\int_{(\Delta_i,j)_{sy}} \psi_X(x,y\ ;\ z')\ W(dz')\right] dx\ dy$$

A titre d'exemple, considérons le terme m_2

$$E \sup m_2^2(s,t) \leqslant c\ E\ \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} L^2_{2Y}\left[\int L_{2Y}\right]^2 \left[\int \psi_X\right]^2 dx\ dy$$

$$\leqslant c \quad \alpha\ \beta\ \gamma$$

où

$$\alpha^3 = E\ \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} L^6_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)dx\ dy \leqslant \frac{c}{|\pi|_1}\ ||\mathcal{L}_{2Y}||_6^6$$

$$\beta^3 = E\ \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} \left[\int\!\!\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}\cdot W\right]^6 dx\ dy$$

$$\leqslant \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} k\ |\Delta_j|^2 \int_{(i,\Delta_j)} \mathcal{L}^6_{2Y}(z)dz\ dx\ dy < k\ \frac{|\pi|_2^3}{|\pi|_1}\ ||\mathcal{L}_{2Y}||_6^6$$

$$\gamma^3 = E\ \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} \left[\int\!\!\int_{(\mathcal{O}_{ij})_{sy}} \psi_X\cdot WW\right]^6 dx\ dy$$

$$\leqslant k\ \Sigma \int_{(i,\Delta_j)} |\Delta_i|^2\ |\Delta_j|^2 \int_{\mathcal{O}_{ij}} \psi_X^6\ dz\ dz'\ dx\ dy$$

$$\leqslant k\ |\pi|_1^2\ \ |\pi|_2^3\ ||\psi_X||_6^6$$

donc

$$\alpha^3 \beta^3 \gamma^3 < C |\pi_2|^6 \quad ||\psi_X||_6^6 \quad ||\mathcal{L}_{2Y}||_6^{12}$$

$m_2(s,t)$ est donc en $|\pi_2|^2$ dans $u \cdot L^2$. On montre le même résultat sur m_1, tandis que p_1 et p_2 sont en $|\pi|_2$. Globalement,

$$E \sup \{M_X^{**} , M_Y^2\}_{st}^2 < C |\pi|_2 \; ||\psi_X||_6^2 \; ||\mathcal{L}_{2Y}||_6^4$$

<u>3ème terme : $\{P_X^2 , M_Y^2\}$</u>

C'est la somme de la 2-m.p. $p = p_1 + p_2$ et du processus à v.b. $b = b_1 + b_2$ associés à

$$p_{1ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(s,y \; ; \; s_i) \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(\xi ; \; s_i) \; W(d\xi)\right] \times \left[\int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{sy}} \beta_{2X}(z \; ; \; u) \; W(dz)du\right] W(dx,dy)$$

$$p_{2ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(x,y \; ; \; u) \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z \; ; \; s_i) W(dz)\right] du \; W(dx,dy)$$

$$b_{1ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} L_{2Y}^2(x,y \; ; \; s_i) \left[\int_{(\mathcal{O}_{2ij})_{sy}} \beta_{2X}(z \; ; \; u) W(dz)du\right] dx \; dy$$

$$b_{2ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y \; ; \; s_i) \left[\int_{(\Delta_j)_y} \beta_{2X}(x,y \; ; \; u)du\right] \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z \; ; \; s_i) \; W(dz)\right] dx \; dy$$

Dans $u\cdot L^2$, p est en $|\pi|_2^2$, b en $|\pi|_2$. Globalement,

$$E \sup \{P_X^2, M_Y^2\}\}_{st}^2 \leqslant C\ |\pi|_2\ \ ||\beta_{2X}||_6^2\ \ ||\mathcal{L}_{2Y}||_6^4$$

<u>4ème terme : $\{P_X^1 , M_Y^2\}\}$</u>

C'est la somme de la martingale m et de la 1-m.p. $p = p_1 + p_2$ associées à :

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right] \times \left[\int_{(\mathcal{O}_{1ij})_{sy}} \beta_{1X}(v\ ;\ z')\ dv\ W(dz')\right] W(dx,dy)$$

$$p_{1ij}(s,t) = \int_{(\mathcal{O}_{1ij})_{st}} \beta_{1X}(y\ ;\ z')\left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right]^2 dy\ W(dz')$$

$$p_{2ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_{st}} L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i)\left[\int_{(\mathcal{O}_{1ij})_{sy}} \beta_{1X}(v\ ;\ z')dv\ W(dz')\right]dx\ dy$$

Dans $u\cdot L^2$, m et p_1 sont en $|\pi|_2^{7/3}$, alors que p_2 est en $|\pi|_2^{4/3}$. Globalement,

$$E \sup\{P_X^1 , M_Y^2\}\}_{st}^2 \leqslant C\ |\pi|_2^{4/3}\ ||\beta_{1X}||^2\ \ ||\mathcal{L}_{2Y}||^4$$

<u>5ème terme : $\{B_X , M_Y^2\}\}$</u>

C'est la somme de la 2-m.p. p et du processus à v.b. associés à :

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} 2L_{2Y}(x,y\ ;\ s_i) \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right] \times \left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \varphi_X(z')dz'\right] W(dx,dy)$$

$$b_{1ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \varphi_X(s,y) \left[\int_{(i,\Delta_j)_y} L_{2Y}(z\ ;\ s_i)\ W(dz)\right]^2 dx\ dy$$

$$b_{2ij}(s,t) = \int_{(i,\Delta_j)_t} L^2_{2Y}(x,y\ ;\ s_i) \left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \varphi_X(z')dz'\right] dx\ dy$$

Dans $u{\cdot}L^2$, p est en $|\pi|_2^{7/3}$, b_1 est en $|\pi|_2^2$ et b_1 en $|\pi|_2^{4/3}$.
Globalement,

$$E \sup \{B_X\ ,\ M_Y^2\}\}^2_{st} \leqslant C\ |\pi|_2^{4/3}\ ||\varphi_X||^2\ ||\mathscr{L}_{2Y}||^4$$

<u>6ème terme : $\{M_X^* \ ,\ B_Y^2\}\}$</u>

C'est la somme de la martingale m et de la 1-m.p. p associées à :

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \theta_X(s,y) \left[\int_{(\Delta_j)_v} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right]^2 W(dx,dy)$$

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} 2\ \ {}_{2Y}(s_i,y) \left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right] \left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \theta_X(z)W(dz)\right] dy$$

Dans $u{\cdot}L^2$, m est en $|\pi|_2^{8/3}$ et p est en $|\pi|_2^{7/3}$.
Globalement,

$$E \sup \{M_X^*\ ,\ B_Y^2\}\}^2_{st} \leqslant C\ |\pi|_2\ ||\theta_X||^2\ ||\varphi_{2Y}||^4$$

7ème terme : $\{M_X^{**}\ ,\ B_Y^2\}$

C'est la somme de la martingale m et de la 1-m.p. associées à :

$$m_{ij}(s,t) = \int_{(\theta_{ij})_{st}} \psi_X(x,y\ ;\ z)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right]^2 W(dx,dy)\ W(dz)$$

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} 2\,\varphi_{2Y}(s_i,y)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right]\left[\int_{(\theta_{ij})_{sv}} \psi_X(z,z')W(dz)W(dz')\right]dy$$

Dans $u{\cdot}L^2$, m est en $|\pi|_2^{8/3}$, p en $|\pi|_2^{7/3}$

$$E\ \sup\ \{M_X^{**}\ ,\ B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\ |\pi|_2^{7/3}\ ||\psi_X||^2\ ||\varphi_{2Y}||^4$$

8ème terme : $\{P_X^2\ ,\ B_Y^2\}$

C'est la somme de la 2-m.p. p et du processus à v.b. b associées à :

$$p_{ij}(s,t) = \int_{(\sigma_{2ij})_{st}} \beta_{2X}(x,y\ ;\ u)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right]^2 W(dx,dy)\,du$$

$$b_{ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} 2\,\varphi_{2Y}(s_i,y)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)\,dv\right] \times \left[\int_{(\sigma_{2ij})_{sy}} \beta_{2X}(z;u)W(dz)\,du\right]dy$$

Dans $u{\cdot}L^2$, p est en $|\pi|_2^{8/3}$, b en $|\pi|_2^{7/3}$

$$E\ \sup\ \{P_X^2\ ,\ B_Y^2\}_{st}^2 \leqslant C\ |\pi|_2^{7/3}\ ||\beta_{2X}||^2\ ||\Phi_{2Y}||^4$$

8ème terme : $\{P_X^1 , B_Y^2\}\}$

C'est la 1-m.p. $p = p_1 + p_2$ associée à :

$$p_{1ij}(s,t) = \int_{(\sigma_{1ij})_{st}} \beta_{1X}(y;z)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right]^2 dy\ W(dz)$$

$$p_{2ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} 2\,\varphi_{2Y}(s_i,y)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right] \times$$

$$\left[\int_{(\sigma_{1ij})_{sy}} \beta_{1X}(v';z)\ dv'\ W(dz)\right]dy$$

p_1 et p_2 sont en $|\pi|_2^{8/3}$ dans $u{\bullet}L^2$

$$E \sup \{P_X^1 , B_Y^2\}\} \leqslant C\ |\pi|_2^{8/3}\ ||\beta_{1X}||^2\ ||\Phi_{2Y}||^4$$

10ème terme : $\{B_X , B_Y^2\}\}$

C'est le processus à v.b. $b = b_1 + b_2$ associé à :

$$b_{1ij}(s,t) = \int_{(\Delta_{ij})_{st}} \varphi_X(x,y)\left[\int_{(\Delta_j)_t} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right]^2 dx\ \ dy$$

$$b_{2ij}(s,t) = \int_{(\Delta_j)_t} 2\,\varphi_{2Y}(s_i,y)\left[\int_{(\Delta_j)_y} \varphi_{2Y}(s_i,v)dv\right]\left[\int_{(\Delta_{ij})_{sy}} \varphi_X(z)dz\right]dy$$

qunatités en $|\pi|_2^{8/3}$ dans $u{\bullet}L^2$

$$E \sup \{B_X , B_Y^2\}\}_{st}^2 < C\ |\pi|_2^{8/3}\ ||\varphi_X||^2\ \ ||\Phi_{2Y}||^4$$

D'où le résultat du théorème 6-1. On notera que les termes principaux viennent de :

$$\{M_X^* + M_X^{**} + P_X^2 \, , \, M_Y^2\}\} = \{M_X^2 \, , \, M_Y^2\}\} \, .$$

On démontre de même, en remplaçant les exposants $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ de l'inégalité de Hölder par $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, le théorème suivant :

<u>Théorème 6-1 bis</u>

Si X est une s.m.r. de L^4 et Y une s.m.r. de L^8,

$\pi = \{\Delta_{ij}\}$ une partition,

$$E \sup \{X,Y\}\}_{st}^2 < C \, |\pi|_2 \, ||X||_4^2 \, ||Y||_8^4$$

(la partie principale venant de $\{M_X^2 \, , \, M_Y^2\}\}$).

<u>Corollaire 6-1</u>

Si X, Y, Z sont trois s.m.r. de L^6, alors

$$E \sup_{st} \{\Sigma \, X(\Delta_{ij})_{st} \, Y(i,\Delta_j)_t \, Z(i,\Delta_j)_t\}^2 < C \, |\pi|_2 ||X||_6^2 ||Y||_6^2 ||Z||_6^2$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de remplacer $Y(i,\Delta_j) \, Z(i,\Delta_j)$ par

$$\frac{1}{2}\left[(Y+Z)(i,\Delta_j)^2 - Y(i,\Delta_j)^2 - Z(i,\Delta_j)^2\right]$$

<u>6-2 : Variation (0,1,3)</u>

On prendre ici encore $f_n \equiv 1$.

La variation produit la plus générale de ce type est :

$$\{X,Y,Z,T\}_{\pi_{st}} = \sum_{\pi} X(\Delta_i,j)_s Y(i,\Delta_j)_t Z(i,\Delta_j)_t T(i,\Delta_j)_t$$

On a alors le résultat :

Théorème 6-2

Soient X, Y, Z, T quatre s.m.r. de L^8 , on a alors l'inégalité :

$$E \sup_{s,t} \{X,Y,Z,T\}^2_{\pi_{st}} \leqslant C\, |\pi_2| \; ||X||_8^2 \; ||Y||_8^2 \; ||Z||_8^2 \; ||T||_8^2$$

où C est une constante finie indépendante de π, X, Y, Z, T.

Nous en donnerons pas ici la démonstration de ce théorème. Elle est analogue à celle du théorème précédent, plus simple d'ailleurs puisque ici on n'aura pas besoin d'utiliser le lemme 5-1, les processus élémentaires en (i,j) factorisant en $s \times t$.

Donnons une version L^1 de cette majoration, obtenue par une autre méthode, en remarquant d'abord que l'étude de la variation $\{X,Y,Z,T\}$ peut être réduite à celle de $\{X,Y,Z,Z\}$.

On dira qu'une partition π est équirégulière si pour tout i, j, on a : $|\pi| = |\Delta_i| = |\Delta_j|$.

Théorème 6-3

Si X, Y,Z sont trois s.m.r. de L^6 et si (π_n) est une suite de partitions équirégulières tendant vers 0, alors :

$$\sup_{s,t} |\{X,Y,Z,Z\}_{\pi^n_{st}}| \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$$

Démonstration

Evaluons la norme L^1 de :

$$A_n = \sup_{s,t} \Big| \sum_{\pi_n} \Big[X(\Delta_i,j)_s \, Y(i,\Delta_j)_t - J_{YX}(\Delta_{ij})_{st}\Big] \, Z(i,\Delta_j)^2_t \Big|$$

$$E\, A_n < \alpha_n\, \beta_n$$

avec

$$\alpha_n^2 = E \sum_{\pi_n} \sup_{st} \left[X(\Delta_i,j)_s\, Y(i,\Delta_j)_t - J_{YX}(\Delta_{ij})_{st}\right]^2$$

$$\beta_n^2 = E \sum_{\pi_n} \sup_{t} Z(i,\Delta_j)_t^4$$

Or, d'après le corollaire 3-2-1, $\alpha_n \longrightarrow 0$. D'autre part, puisque $|\Delta_i| = |\Delta_j|$ β_n^2 est bornée (Corollaire 5-4, partie b, ch. III).

Donc $A_n \xrightarrow[n]{L^1} 0$

Ainsi l'étude de la variation $\{X,Y,Z,Z\}$, se réduit, dans L^1 , à celle de $\{J_{YX},Z\}\}$. Or d'après le résultat du corollaire 6-1 , cette variation tend dans L^2 , donc dans L^1 , vers 0 avec $|\pi_n|$.

§7 - Autres variations produit

7-1 : Variations produit d'ordre supérieur

Nous étudierons là les variations produit (α,β,γ) d'un ordre supérieur aux variations étudiées dans les chapitres précédents. Ces variations seront non contribuantes et nous nous intéressons seulement à celles pour lesquelles $\alpha + \beta + \gamma \leq 4$. Ceci est principalement justifié par le fait que les variations apparaissant dans le reste de la formule de Taylor que nous utiliserons plus tard pour démontrer la formule de Ito sont de ce type.

On prendra ici encore comme pondération $f = 1$, les résultats s'étendant sans aucune difficulté au cas d'une pondération bornée.

On choisira des partitions équirégulières. D'une part ce résultat nous suffira dans la démonstration de la formule de Ito. D'autre part, sous cette hypothèse, les majorations sont beaucoup plus aisées. Signalons cependant que tous les résultats énoncés ci-dessous restent vrais sans cette hypothèse.

Théorème 7.1.

Soient X, Y, Z, T quatre s.m.r. de L^4 , et π une partition équirégulière de pas $|\pi|$; on a alors les différentes inégalités maximales suivantes sur les variations absolues :

(1) Variation (3,0,0)

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_{ij})_{st}| \leq C \, |\pi| \, ||X||_4 \, ||Y||_4 \, ||Z||_4$$

(2) Variation (2,1,0)

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_{ij})_{s}| \leq \quad |\pi|^{1/2} \, ||X||_4 \, ||Y||_4 \, ||Z||_4$$

(3) <u>Variation (4,0,0)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_{ij})_{st} T(\Delta_{ij})_{st}| \leqslant C\ |\pi|^2 (X,Y,Z,T)_4$$

où l'on a posé : $(X,Y,Z,T)_4 = ||X||_4\ ||Y||_4\ ||Z||_4\ ||T||_4$.

(4) <u>Variation (3,1,0)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_{ij})_{st} T(\Delta_i, j)_s| \leqslant C\ |\pi|^{3/2}\ (X,Y,Z,T)_4$$

(5) <u>Variation (1,3,0)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_i, j)_s Z(\Delta_i, j)_s T(\Delta_i, j)_s| \leqslant C\ |\pi|^{1/2}\ (X,Y,Z,T)_4$$

(6) <u>Variation (2,2,0)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_i, j)_s T(\Delta_i, j)_s| \leqslant C\ |\pi|\ (X,Y,Z,T)_4$$

(7) <u>Variation (2,1,1)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_i, j)_s T(i, \Delta_j)_t| \leqslant C\ |\pi|\ (X,Y,Z,T)_4$$

(8) <u>Variation (1,2,1)</u>

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_i, j)_s Z(\Delta_i, j)_s T(i, \Delta_j)_t| \leqslant C\ |\pi|^{1/2}\ (X,Y,Z,T)_4$$

<u>Démonstration</u>

Elle se fonde sur l'inégalité de Hölder et l'inégalité du théorème 5-4, chapitre III d'où l'on déduit :

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} X(\Delta_{ij})^4_{st} \leqslant C\ |\pi_1|\ \ |\pi_2|\ \ ||X||_4^4$$

$$E \sup \sum_j X(i,\Delta_j)_t^2 \leqslant C \,||X||_2^2$$

$$E \sup \sum_j X(i,\Delta_j)_t^4 \leqslant C \,|\pi_2| \quad ||X||_4^4$$

les deux dernières inégalités donnant en particulier :

Lemme 7-1

Si la partition π est équi-régulière, on a :

$$E \sup_{st} \sum_{i,j} X(i,\Delta_j)_t^2 < C \,|\pi|^{-1} \,||X||_2^2$$

$$E \sup_{st} \sum_{i,j} X(i,\Delta_j)_t^4 < C \,||X||_4^4$$

(1) Variation (3,0,0)

$$E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} \, Y(\Delta_{ij})_{st} \, Z(\Delta_{ij})_{st}| = D_1$$

$$\leqslant E \sum_{\pi} \sup_{st} |X(\Delta_{ij})_{st}| \sup_{st} |Y(\Delta_{ij})_{st}| \sup Z(\Delta_{ij})_{st}| \cdot 1$$

Appliquons l'inégalité de Hölder $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$,

$$D_1 \leqslant (E \sum_{\pi} \sup_{st} X(\Delta_{ij})_{st}^4 \,\ldots\ldots\, (E \sum_{\pi} 1)^{1/4}$$

$$\leqslant C \,(|\pi|^2 \,||X||_4^4)^{1/4} (|\pi|^2 \,||Y||_4^4)^{1/4} (|\pi|^2 ||Z||_4^4)^{1/4} \,|\pi|^{-1/2}$$

$$\leqslant C \,|\pi| \,||X||_4 \,||Y||_4 \,||Z||_4$$

(2) Variation (2,1,0)

$$D_2 = E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} \, Y(\Delta_{ij})_{st} \, Z(\Delta_i \quad)_s|$$

$$\leqslant C\ (|\pi|^2\ ||X||_4^4)^{1/4}\ (|\pi|^2\ ||Y||_4^4)^{1/4}\ ||Z||_4\ |\pi|^{-1/2}$$

$$\leqslant C\ |\pi|^{1/2}\ ||X||_4\ ||Y||_4\ ||Z||_4$$

(3) Variation (4,0,0)

$$D_3 = E \sup_{st} \sum_{\pi} |X(\Delta_{ij})_{st} Y(\Delta_{ij})_{st} Z(\Delta_{ij})_{st} T(\Delta_{ij})_{st}|$$

$$\leqslant C\ (|\pi|^2\ ||X||_4^4)^{1/4}\ \ldots\ (|\pi|^2\ ||T||_4^4)^{1/4}$$

$$\leqslant C\ |\pi|^2\ (X,Y,Z,T)_4$$

Les résultats sur les autres variations s'obtiennent exactement de la même manière, utilisant l'inégalité de Hölder $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et les résultats de majoration dans le cas de partition équi-régulière.

7-2 : Variations $(0, \beta, 0)$

Montrons que les variations du type

$$\sum f_n(i,j)\ M(i,\Delta_j)_t^{\beta}$$

divergent pour $\beta = 1, 2, 3,$ même dans le cas le plus simple où $f_n = 1$ et où $M = W$ est le mouvement brownien.

7-2-1 : Variation (0,1,0)

Soit

$$S_n = \sum W(i\ ,\ \Delta_j)$$

S_n est une variable normale centrée. Calculons sa variance :

$$S_n = \sum_{ij} \sum_{\ell=o}^{i-1} W(\Delta_{\ell j}) = \sum_{ij} (N-i)\, W(\Delta_{ij})$$

où N est l'ordre (sur chaque axe) de la partition (équi-régulière) considérée.

$$\text{Var } S_n = \sum_{ij} (N-i)^2 \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=o}^{N-1} k^2 = \frac{(N-1)(2N-1)}{6} \longrightarrow \infty$$

S_n diverge dans L^2 .

7-2-2 : Variation (0,2,0)

Si maintenant

$$S_n = \sum_{ij} W(i,\Delta_j)^2$$

on a :

$$E(S_n) = N \sum_i \frac{i}{N} \times \frac{1}{N} = \frac{N-1}{2}$$

qui tend vers l'infini ; il y a divergence dans L^1 .

Remarque : On sait (cf. §2 , partie A)

$$\sum_i M(\Delta_i,t)_s^2 \xrightarrow{u \cdot L^1} \langle M\rangle^{(1)}(s,t)$$

7-2-3 : Variation (0,3,0)

Soit maintenant

$$S_n = \sum_{ij} W(i,\Delta_j)^3$$

S_n est centrée ; calculons $E(S^2)$

$$E(S_n^2) = E(\sum_{ij} W(i,\Delta_j)^3)^2 = E \sum_j (\sum_i W(i,\Delta_j)^3)^2$$

posons alors ,

$$b_i = W(i\ ,\ \Delta_j)$$

omettant l'indice j pour la même raison

$$E(S^2) = N \cdot E(\sum_i b_i^3)^2$$

$$= N \cdot E(\sum_i b_i^6 + 2 \sum_{i<i'} b_i^3 b_{i'}^3)$$

et, si $i < i'$,

$$b_{i'} = b_i + c_{ii'}$$

où $c_{ii'}$ est une variable $\mathcal{N}(0\ ,\ \frac{i'-i}{N})$ indépendante de b_i . Donc :

$$E\, b_i^3 b_{i'}^3 = E\, b_i^3 \left[b_i^3 + 3 b_i\, c_{i'}^2\right]$$

Finalement

$$E(S_n^2) = N \left[\sum_{i=o}^{N-1} 2\, E\, b_i^6 + \sum_{i=o}^{N-1} E\, b_i^4 \left(\sum_{i'=i+1}^{N-1} E\, c_{ii'}^2\right)\right]$$

$$= N \left[\sum_{i=o}^{N-1} 2.15 \left(\frac{i}{N}\right)^3 + \sum_{i=o}^{N-1} 3\left(\frac{i}{N}\right)^2 \sum_{i'=i+1}^{N-1} \frac{i'-i}{N}\right]$$

$$= \frac{1}{N^2}\left[30 \sum_{i=o}^{N-1} i^3 + \frac{3}{2} \sum_{i=o}^{N-1} i^2 (N-1-i)(N-i)\right] \sim \frac{N^3}{20}$$

on en conclut que S n'est pas borné dans L^2 . Il ne peut y avoir convergence en moyenne quadratique.

7-2-4 : Variation (0,4,0)

Théorème 7-2

Si X est une s.m.r. de L^4 , si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition équi-régulière, alors :

$$\Sigma\, X(i\ ,\ \Delta_j)^4_{st}$$

est bornée dans L^1 .

Démonstration

C'est très exactement la deuxième inégalité du lemme 7-1.

La bibliographie de ce chapitre se trouve à la fin du premier paragraphe.

CHAPITRE V

TRACE D'UNE SEMI-MARTINGALE REPRESENTABLE SUR UN CHEMIN.

INTEGRALES CURVILIGNES ET FORMULE DE GREEN.

Dire que M est une martingale est équivalent à dire que la trace M^Γ de M sur tout chemin croissant est une martingale à 1 indice. Si Γ est un chemin croissant joignant l'origine à z et si M est dans L^2, on notera $A_z^\Gamma = \langle M^\Gamma \rangle_z$ la variation quadratique de M le long de Γ. Si pour tout z, A_z^Γ est indépendant de Γ, on dira que M est indépendante du chemin (i.d.c.). Cette notion a été introduite dans l'article original de Wong et Zakai [1] sous la terminologie "path independant variation". M est i.d.c. si et seulement si : $\langle M \rangle^{(1)} = \langle M \rangle^{(2)}$. Sous des conditions assez générales, cela sera le cas si M est forte. La question est posée dans [2] de savoir si seules les martingales fortes peuvent être indépendantes du chemin : Si $\mathfrak{F}$ est la fibration brownienne, une réponse partielle est donnée dans [2], généralisée dans [6].

Si X est une s.m.r. on s'intéressera à des questions analogues. On montrera d'abord que la trace de X sur un chemin croissant est une semi-martingale à un paramètre dont on donnera la représentation. On généralisera alors le résultat :

$$X \text{ est i.d.c.} \iff \langle X \rangle^{(1)} = \langle X \rangle^{(2)}.$$

On donnera également une condition vérifiée par X si X est i.d.c., condition faisant intervenir la représentation de X.

Nous énumérons au § 3 les définitions et propriétés des martingales à accroissements orthogonaux, notion introduite par Zakai [8]. De telles martingales, nulles sur les axes, sont i.d.c. et dans le cas de la filtration brownienne, elles se réduisent aux martingales fortes. Plus généralement, nous démontrons par une approche différente qu'une 1-martingale représentable à accroissements orthogonaux dans le sens 1 est une martingale forte.

Les deux derniers paragraphes sont consacrés respectivement à la notion d'intégrale curviligne et à la formule de Green. La notion d'intégrale curviligne $\int_\Gamma \Phi\, \partial X$, est introduite dans [2] dans le cas d'une filtration générale, X étant une martingale de L^2, et pour certaines propriétés une martingale forte. Dans le cas de la filtration brownienne, on peut définir cette intégrale dès que X est une s.m.r. L'intégrale curviligne tirera alors toutes ses bonnes propriétés du fait qu'elle se décomposera en une intégrale stochastique en W et en deux intégrales ordinaires en ds, dt.

Utilisant en particulier cette propriété (généralisant le lemme 3-5 du chapitre III), on établit une formule de Green pour l'intégrale $\int_\Gamma \Phi\, \partial Y$, où Γ est le bord d'un domaine régulier D, où $\Phi = \varphi(X)$, X et Y étant deux s.m.r. : cette intégrale curviligne s'exprime alors comme intégrale de surface sur D. Cette formule généralise celle proposée dans [9], établie pour l'étude des processus holomorphes. La formule de Green est également étudiée dans [2], [10] : dans [2], la formule est établie pour $\int_\Gamma \Phi\, \partial M$, pour un processus Φ dérivable en (M,s), (M,t), M étant une martingale forte, à processus croissant $\langle M \rangle$ déterministe, pour une filtration générale.

§ 1 - Trace d'une s.m.r. sur un chemin croissant.

Soit γ l'ensemble des chemins croissants, continus, issus de 0, de R_{11}. Un tel chemin Γ, classe d'équivalence de ses représentations, sera associé à

$$z^\Gamma : [0,1] \longrightarrow R_{11}$$
$$z^\Gamma(\lambda) = (s^\Gamma(\lambda), t^\Gamma(\lambda)).$$

Si Γ est fixé et z^Γ une représentation de Γ est choisie, on omettra les indices Γ.

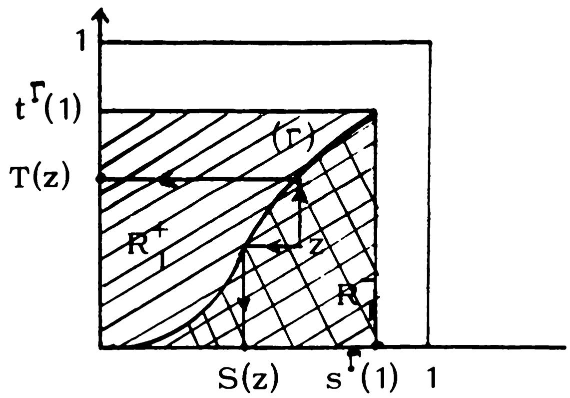
On notera : $R^\Gamma_\lambda = R_{z^\Gamma(\lambda)}$ ($= R_\lambda$ si Γ fixé ainsi que z^Γ)

$\mathfrak{F}^\Gamma_\lambda = \mathfrak{F}_{z^\Gamma(\lambda)}$ ($= \mathfrak{F}_\lambda$).

Si X est une fonction définie sur R_{11}, on notera :

$$X^\Gamma_\lambda = X_{z^\Gamma(\lambda)} \quad \text{(à } z^\Gamma \text{ fixé).}$$

Si $z \in R^\Gamma_1$, on notera $T(z)$ l'ordonnée du point de Γ de même abscisse que z, $S(z)$ l'abscisse du point de Γ de même ordonnée que z. $T(z)$ et $S(z)$ sont z p.s. définis.



Soit $X = M + P^1 + P^2 + B$ une s.m.r. (cf. notations Ch. III, § 5.1.1). A Γ, z^Γ fixé, on notera $x(\lambda) = X_{z^\Gamma(\lambda)}$.

Enfin, notons R^-_λ la partie de R_λ en dessous de Γ, R^+_λ la partie de R_λ au dessus de Γ.

1-1. Représentation de la trace.

Théorème 1.-

Si X est une s.m.r., $\{x(\lambda), \mathfrak{F}_\lambda, \lambda \in [0,1]\}$ est une semi-martingale continue de L^2 admettant uniformément en λ la représentation :

$$x(\lambda) = m(\lambda) + b(\lambda)$$

où m est la martingale :

$$m(\lambda) = \int_{R_\lambda^-} L_1(T(z)\,;z)\,W(dz) + \int_{R_\lambda^+} L_2(z\,;S(z))\,W(dz)$$

et b le processus à variation bornée,

$$b(\lambda) = \int_0^\lambda \left(\int_{R_\mu} \beta_1(t(\mu)\,;\,z)\,W(dz)\right) t(d\mu) + \int_0^\lambda \left(\int_{R_\mu} \beta_2(z\,;s(\mu))\,W(dz)\right) s(d\mu)$$

$$+ \int_{R_\lambda} \varphi(z)\,dz\,.$$

En particulier, la variation quadratique de x sur $[0,\lambda]$ vaut, uniformément en λ :

$$< x >_\lambda = < m >_\lambda = \int_{R_\lambda^-} L_1^2(T(z)\,;\,z)dz + \int_{R_\lambda^+} L_2^2(z\,;S(z))\,dz.$$

Démonstration. :

a) Trace de M.

Si on pose : $M_\lambda = M_{z^\Gamma(\lambda)}$, M_λ est une martingale pour $\mathfrak{F}_\lambda$ qui se représente :

$$M_\lambda = M_\lambda^* + M_\lambda^{**}$$

. $$M_\lambda^* = \int_{R_\lambda^-} \theta(z)\,W(dz) + \int_{R_\lambda^+} \theta(z)\,W(dz),$$

$$\theta(z) = L_{1M^*}(t\,;z) = L_{2M^*}(z\,;s)$$

. $$M_\lambda^{**} = \int_{R_\lambda^2} \psi(z,z')\,W(dz)\,W(dz').$$

Or si $z, z' \in R_\lambda$, $z \curlywedge z'$, deux cas sont possibles.

(a) z est d'ordonnée inférieure à $T(z')$

(b) z' est d'abscisse inférieure à $S(z)$

ce qui s'écrit encore

(a) $z' \in R_\lambda^-$ et $z = (u,v)$ avec $v \leq T(z')$

(b) $z \in R_\lambda^+$ et $z' = (u',v')$ avec $u' \leq S(z)$.

On a donc :

$$\int_{R_\lambda^2} \psi(z,z')\, W(dz)\, W(dz')$$

$$= \int_{R_\lambda^-} \Big(\int_{R_{1,T(z')}} \psi(z,z')W(dz') + \int_{R_\lambda^+}\Big(\int_{R_{S(z),1}} \psi(z,z')W(dz')\Big)W(dz)$$

$$= \int_{R_\lambda^-} L_{1,M^{**}}(T(z')\ ;\ z')\, W(dz') + \int_{R_\lambda^+} L_{2,M^{**}}(z\ ;\ S(z))\, W(dz).$$

D'où le résultat si $X = M$.

<u>Trace de P^1 sur Γ</u>.- $P_1 = \beta_1.VW$.

On utilisera les deux accroissements suivants de P^1 :

$$P^1(\Delta_s, t) = \int_{(\Delta_s,t)} \Big(\int_0^t \beta_1(v\ ;\ z)dv\Big)\, W(dz)$$

$$P^1(s, \Delta_t) = \int_{\Delta_t} \Big(\int_{R_{sv}} \beta_1(v\ ;\ z)\, W(dz)\Big)dv.$$

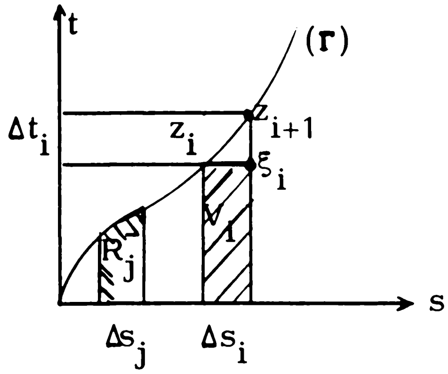
Γ et sa paramétrisation étant fixées posons :

$$p_1(\lambda) = P^1_{z^\Gamma(\lambda)}\ .$$

Soit alors $0 = \lambda_o < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$ une partition σ de $[0,1]$, et associés à σ :

$$\begin{cases} z_i = z^\Gamma(\lambda_i), \quad \Delta_i =]\lambda_i, \lambda_{i+1}], \quad z_i = (s_i,t_i) \\ \Delta s_i =]s_i, s_{i+1}], \quad \Delta t_j =]t_j, t_{j+1}], \\ V_i = \Delta s_i \times [0,t_i] \\ R_i^- = \{\xi = (u,v),\ u \in \Delta s_i,\ 0 \leq v \leq T(\xi)\} \\ \xi_i = (s_{i+1}, t_i). \end{cases}$$

Dans la suite de ce paragraphe, on notera Σ pour $\sum\limits_{i=1,n}$



Si $a \subset [0,1]$, notons : $a_\lambda = a \cap]0,\lambda]$.

Si $A \subset [0,1]^2$, notons : $A_\lambda = A \cap R_\lambda$.

Soit alors la décomposition suivante de $p_1(\lambda)$ associée à σ :

$$p_1(\lambda) = \Sigma\, p_1(\Delta_i)_\lambda .$$

On peut encore écrire :

$$p_1(\Delta_i)_\lambda = \tilde{m}_1(\Delta_i)_\lambda + \tilde{b}_1(\Delta_i)_\lambda$$

avec

$$\tilde{m}_1(\Delta_i) = P^1_{\xi_i} - P^1_{z_i} = \int_{V_i} \left(\int_0^{t_i} \beta_1(v\,;z)dv\right) W(dz)$$

$$\tilde{b}_1(\Delta_i) = P^1_{z_{i+1}} - P^1_{\xi} = \int_{\Delta t_i} \left(\int_{Rz_{i+1}} \beta_1(v;z)W(dz)\right)dv .$$

Définissons les deux processus de L^2 :

$$m_1(\lambda) = \int_{R_\lambda^-} \left(\int_{[0,T(z)]} \beta_1(v\,;z)dv\right) W(dz)$$

$$b_1(\lambda) = \int_0^\lambda \left(\int_{R\mu} \beta_1(t(\mu)\;;z)\, W(dz)\right) t(d\mu) .$$

On a alors le lemme :

<u>Lemme 1</u>.- Si le pas $|\sigma| = \sup_i(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ tend vers 0, alors, uniformément en $\lambda \in [0,1]$, dans L^2 :

$$\Sigma\; \tilde{m}_1(\Delta_i)_\lambda \xrightarrow{u.L^2} m_1(\lambda)$$

$$\Sigma\; \tilde{b}_1(\Delta_i)_\lambda \xrightarrow{u.L^2} b_1(\lambda) .$$

Démonstration :

Convergence vers m_1.-

$$m_1(\lambda) - \Sigma\, \widetilde{m}_1(\Delta_i)_\lambda = \mathcal{M}^1_\sigma(\lambda) + \mathcal{M}^2_\sigma(\lambda)$$

avec

$$\mathcal{M}^1_\sigma(\lambda) = \Sigma \int_{(V_i)_\lambda} \{\int_{t_i}^{T(z)} \beta_1(v\,;z)dv\}\ W(dz)$$

$$\mathcal{M}^2_\sigma(\lambda) = \Sigma \int_{(R_i^-\setminus V_i)} \{\int_0^{T(z)} \beta_1(v;z)dv\}W(dz).$$

$\mathcal{M}^1_\sigma$ et $\mathcal{M}^2_\sigma$ sont des $\mathfrak{F}^1_{s^\Gamma(\lambda)}$-martingales ; on a donc, d'après l'inégalité de Doob :

$$\cdot \qquad E \sup_\lambda \mathcal{M}^1_\sigma(\lambda)^2 \le 4\, E \sum_\sigma (\int_{V_i} (\int_{t_i}^{T(z)} \beta_1(v\,;z)dv)^2 dz) \le 4 \sup_i |\Delta t_i|\, \|\beta_1\|_2^2 \,.$$

Or $\lambda \to t^\Gamma(\lambda)$ est continue, donc uniformément continue sur $[0,1]$ et donc :

$$\mathcal{M}^1_\sigma \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{u.L^2} 0\,.$$

$$\cdot \qquad E \sup_\lambda \mathcal{M}^2_\sigma(\lambda)^2 \le 4\, E\, \Sigma\, (\int_{R_i^-\setminus V_i} (\int_0^{T(z)} \beta_1^2(v\,;z)dv)dz.$$

Or la mesure de Lebesgue (dans R_{11}) de :

$$\bigcup_\sigma (R_i^-\setminus V_i)$$

tend vers 0 si $|\sigma| \to 0$, donc :

$$\mathcal{M}^2_\sigma \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{u.L^2} 0$$

d'où le premier point du lemme.

Convergence vers $b_1(\lambda)$.-

Posons : $v = t(\mu)$, $R_v = R_\mu$, on a :

$$b_1(\lambda) = \int_0^{t(\lambda)} (\int_{R_v} \beta_1(v\,;z)\ W(dz))\ dv = \sum_\sigma \int_{(\Delta t_i)_\lambda} (\int_{R_v} \beta_1(v\,;z)W(dz))\ dv$$

et donc :

$$B^1_\sigma(\lambda) = b_1(\lambda) - \sum_\sigma \widetilde{b}_1\,(\Delta_i)_\lambda = \Sigma \int_{(\Delta t_i)_\lambda} \{\int_{R_{z_{i+1}}\setminus R_v} \beta_1(v\ ;\ z)\,W(dz)\}\,dv$$

et donc, puisque $\mathcal{B}^2_\sigma$ est un processus à v.b. :

$$E \sup_\lambda \mathcal{B}^1_\sigma(\lambda)^2 \leq E \sum \int_{\Delta t_i} \{ \int_{R_{z_{i+1}} \setminus R_v} \beta_1(v\,;z)\,W(dz)\}^2 dv \leq E \sum \int_{\Delta t_i} \{ \int_{R_{z_{i+1}} \setminus R_{z_i}} \beta_1^2(v\,;z)dz\}\,dv .$$

Puisque $\bigcup_\sigma (\Delta t_j \times Rz_{i+1} \; Rz_i)$ est un sous-ensemble de $[0,1] \times R_{11}$ dont la mesure de Lebesgue tend vers 0 avec $|\sigma|$, on en déduit :

$$\mathcal{B}^1_\sigma \xrightarrow{u.L^2} 0$$

et donc le résultat du lemme 1.

On a donc, uniformément en λ :

$$p_1(\lambda) = \int_{R_\lambda^-} L_{1,P^1}(T(z)\,;z)\,W(dz) + \int_0^\lambda (\int_{R_\mu} \beta_1(t(\mu)\,;z)\,W(dz))\,t(d\mu) .$$

On obtiendrait de la même façon une décomposition symétrique de $p_2(\lambda) = P^2_{z^\Gamma(\lambda)}$.

Enfin, $\int_{R_\lambda} \varphi(z)\,dz$ est évidemment la trace, à v.b. de B sur Γ.

<u>Variation quadratique de x</u>.

On a, pour la semi-martingale continue en x :

$$<x>_\lambda = \lim_\sigma \sum x(\Delta_i)^2_\lambda = <m>_\lambda .$$

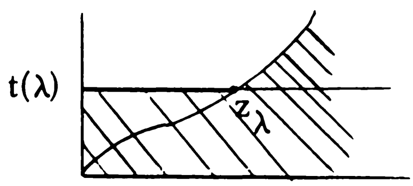
D'autre part : $m = m_1 + m_2$ avec :

$$m_1(\lambda) = \int_{R_\lambda^-} L_1(T(z)\;;z)\;W(dz)$$

$$m_2(\lambda) = \int_{R_\lambda^+} L_2(z\;;S(z))\;W(dz)$$

m_1 et m_2 sont orthogonales. En effet si on pose

$$\mathcal{F}^{2\,\Gamma}_\lambda = \sigma\{W_\xi,\; \xi \in R_\lambda^- \cup \{\xi = (u,v),\; v \leq t(\lambda)\}\}$$



et si $\lambda \leq \lambda'$:

$$E(m_1(\lambda')m_2(\lambda')\,|\,\mathfrak{F}_\lambda) = E(m_1(\lambda')E(m_2(\lambda')\,|\,\mathfrak{F}^{2\Gamma}_\lambda)|\mathfrak{F}_\lambda) = m_2(\lambda)E(m_1(\lambda')\,|\mathfrak{F}_\lambda) = m_1(\lambda)\, m_2(\lambda)$$

et donc : $< m >_\lambda = < m_1 >_\lambda + < m_2 >_\lambda$. Reste à calculer : $< m_1 >_\lambda$. Posons :

$$\ell_1(z) = 1_{\{z\in R_1^-\}}\; L_1(t(z)\ ;\ z)$$

ℓ est un processus mesurable, $\mathfrak{F}^1$-adapté de L^2

$$m_1(\lambda) = \int_{R_{s^\Gamma(\lambda),1}} \ell_1(z)W(dz)$$

$\{m_1(\lambda)\ ,\ \mathfrak{F}^1_{s^\Gamma(\lambda)}\ ,\ \lambda\in[0,1]\}$ est une 1-martingale et donc d'après le théorème 1, Chap. II, §2, on a :

$$< m_1 >_\lambda \overset{L^1}{=} \lim_{|\sigma|\to 0} \Sigma\, m_1(\Delta_i)^2_\lambda = \int_{R_{s^\Gamma(\lambda),1}} \ell_1^2(z)dz = \int_{R_\lambda^-} L_1^2(T(z)\ ;\ z)dz.$$

D'où le résultat du théorème 1. ■

Exemple.- Soit la s.m.r.

$$X = W + 1_{z\curlywedge z'}\ Z.W + 1_{z \curlywedge z'}\ W.Z = W + \beta_1.VW + \beta_2\ .\ WU$$

avec

$$\beta_1(v\ ;x,y) = x\ 1_{\{y\ <\ v\}}$$

$$\beta_2(x,y\ ;u) = y\ 1_{\{x\ <u\}}\ .$$

Alors

$$x(\lambda) = m(\lambda) + b(\lambda)$$

$$m(\lambda) = \int_{R_\lambda^-} [\,1 + x(T((x,y))-y)\,]W(dx,dy) + \int_{R_\lambda^+} [\,1+y(S((x,y)) - x)\,]\ W(dx,dy)$$

$$b(\lambda) = \int_0^\lambda (\int_0^{s(\mu)} x\,W(dx,t(\mu))\ t(d\mu) + \int_0^\lambda (\int_0^{t(\mu)} y(W(s(\mu),dy))\ s(d\mu).$$

On verra un peu plus loin que cette s.m.r. est à variation indépendante du chemin.

§ 2 - Semi-martingales indépendantes du chemin.-

Définition : Processus i.d.c.

Un processus X de L^2 est dit indépendant du chemin (i.d.c.), si pour tout z de $\mathbf{R}_+^2$, la variation quadratique de X le long de tout chemin Γ de γ joignant l'origine à z existe et est indépendante de Γ (en anglais, path independant, [1]).

2-1. Martingales i.d.c.-

Soit M une martingale relative à une filtration générale $\{\mathcal{F}_z\}_{z\in\mathbf{R}_+^2}$ vérifiant F1 - F4.

On dira que $A : \mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ est un processus simplement croissant si il est croissant pour l'ordre $\leq$ de $\mathbf{R}_+^2$ (cf. Ch. I).

Propriété 2-1.- M martingale continue de L^2 est i.d.c. si et seulement si il existe un processus de L^1, adapté A, simplement croissant tel que M^2-A soit une martingale.

Démonstration :

. Supposons qu'un tel processus existe.

Soit $z\in\mathbf{R}_+^2$, Γ un chemin (paramétrisé par $z^\Gamma : [0,1] \to \mathbf{R}_+^2$) de γ joignant l'origine à z. Si a et m sont les traces de A et M sur Γ, alors m^2-a est une martingale sur $[0,1]$ et donc :

$$< m >_1 = a(1) = A(z)$$

est bien indépendante de Γ se terminant en z.

. Réciproquement, si M est i.d.c., soit pour tout $\Gamma \in \gamma$ se terminant en z

$$A(z) = < M^\Gamma >_z .$$

A est simplement croissant : en effet si $z < z'$, soit Γ un chemin de γ joignant l'origine à z' en passant par z

$$A_{z'} = \langle M^{\Gamma} \rangle_{z'} \geq \langle M^{\Gamma} \rangle_z = A(z)$$

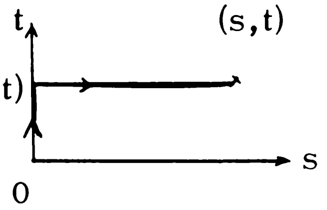
puisque $\langle M^{\Gamma} \rangle$ est croissant sur Γ. $\square$

Corollaire 2.1.- Si M est une martingale de L^2, continue, nulle sur les axes, alors M est i.d.c. si et seulement si : $\langle M \rangle^{(1)} = \langle M \rangle^{(2)}$.

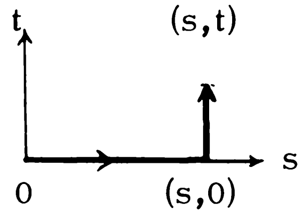
Démonstration :

. Si M est i.d.c., M étant nulle sur les axes, considérant les deux chemins particuliers joignant l'origine à $z = (s,t)$

Γ^1 :



Γ^2 :



Γ^1 étant formé des segments $[(0,0), (0,t)]$ et $[(0,t), (s,t)]$

Γ^2 des segments : $[(0,0), (s,0)]$ et $[(s,0), (s,t)]$ on obtient :

$$\langle M \rangle^{(1)}_{st} = \langle M^{\Gamma^1} \rangle_{st} = \langle M^{\Gamma^2} \rangle_{st} = \langle M \rangle^{(2)}_{st} .$$

. Réciproquement, soit $A = \langle M \rangle^{(1)} = \langle M \rangle^{(2)}$. A est croissant en s ($A = \langle M \rangle^{(1)}$) et en t ($A = \langle M \rangle^{(2)}$) et donc A est simplement croissant.

D'autre part $M^2 - A$ est une 1-martingale ($A = \langle M \rangle^{(1)}$) mais aussi une 2-martingale ($A = \langle M \rangle^{(2)}$). M étant constante sur les axes, $M^2 - A$ est une martingale en (s,t) et donc M est i.d.c. $\blacksquare$

Propriété 2-2 .- [8]. Si M est une martingale continue de L^2 telle que $\langle M \rangle^{(1)}_{1t}$ soit une semi-martingale régulière en t (cf. Définition 3-2, Chapitre I), alors $\langle M \rangle - \langle M \rangle^{(1)}$ est une 2-martingale propre.

Démonstration :

$$m = \langle M \rangle - \langle M \rangle^{(1)} = M^2 - \langle M \rangle^{(1)} + \langle M \rangle - M^2$$

est une martingale faible, m_{s1} étant un processus à variation bornée intégrable,

$$m_{1t} = \langle M \rangle_{1t} - \langle M \rangle^{(1)}_{1t}$$

étant la différence d'un processus à v.b. intégrable et d'une semi-martingale régulière.

On a donc la décomposition

$$< M > - < M >^{(1)} = N^1 + P^2 \quad \text{(propriété 3-4 Ch. I)}$$

où N^1 est une 1-martingale continue, P^2 une 2-martingale propre.

$$N^1 = < M > - < M >^{(1)} - P^2$$

est une 1-martingale continue à variation bornée en s, donc $N^1 \equiv 0$.

Corollaire 2-2. - Si M est une martingale continue de L^2 i.d.c., alors :

$< M >^{(1)} = < M >^{(2)} = < M >$ et $M^2 - < M >$ est une martingale.

Démonstration :

$< M >^{(1)}_{1t} = < M >^{(2)}_{1t}$ est un processus à variation bornée continu intégrable, donc, d'après la propriété 2-2, $< M > - < M >^{(1)}$ est une 2-martingale propre, alors que $< M > - < M >^{(2)}$ est une 1-martingale propre. Ces deux processus étant continus et vérifiant :

$$< M > - < M >^{(1)} = < M > - < M >^{(2)}$$

ils sont donc nuls et on en conclut :

$$< M > = < M >^{(1)} = < M >^{(2)}. \quad \blacksquare$$

Donc, si $M \in \mathcal{M}^2_c(z_o)$, M est i.d.c. si et seulement si il existe un processus croissant, adapté, intégrable, A tel que $M^2 - A$ soit une martingale qui est alors $< M >$.

On a d'autre part, le résultat.

Théorème 2-3.- ([2], théorème 1.9, page 122).

Soit M un élément de $\mathcal{M}^2_s(z_o)$, alors sous l'une des conditions suivantes on a :

$$< M >^{(1)} = < M >^{(2)}$$

(a) $\mathfrak{F}$ est la tribu du brownien.

(b) M est continue et $E\, M^4_{z_o} < \infty$.

(c) M est continue et $< M >^{(1)}$ et $< M >^{(2)}$ sont déterministes.

Démonstration :

a) Par la propriété 4-3 du Chapitre I, $< M >^{(1)}$ est croissant. Il est adapté ; c'est donc le processus croissant prévisible $< M >$.

b) cf. [2].

c) Si $<M>^{(1)}$ est déterministe, il est prévisible. M étant une martingale forte on a $<M> = <M>^{(1)}$. ■

Corollaire 2-3.- Si $M \in \mathcal{M}_s^2(z_o)$, sous l'une des hypothèses a, b, c du théorème précédent, M est i.d.c..

Dans le cas où $\mathcal{F}$ est la filtration brownienne, le problème de la réciproque est non résolu : une martingale i.d.c. est-elle une martingale forte ? Dans [2], il est démontré que si $M = \theta.W + \chi J_{WW}$ est i.d.c., alors $\chi \equiv 0$. Dans [6], Nualart et Sanz généralisent ce résultat :

Théorème 2-4.- [6]

Soit $M = \theta.W + \psi.WW$ une martingale de L^2, i.d.c.. Chacune des conditions suivantes implique que $\psi \equiv 0$ (donc que M est forte).

(1) $\psi(u,t;s,v)$ est constante en u sur $[0,s]$ (ou est constante en v sur $[0,t]$).

(2) $\psi(u,t;s,v)$ est constante en s sur $[u,1]$ (ou en t sur $[v,1]$).

(3) $\theta \equiv 0$ et $\psi(z,z')$ est $\mathcal{F}_z$-mesurable (ou $\mathcal{F}_{z'}$ mesurable), auquel cas $M \equiv 0$.

(4) Pour toute $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dans L^2, $\int_{R_z} f(u)\, M(du,dv)$ est i.d.c..

Signalons que si $\mathcal{F}$ est une filtration produit vérifiant F1-F4, alors il n'y a pas de martingale forte, ni de martingale i.d.c. [7].

Signalons que les martingales i.d.c. sont stables pour la limite dans $\mathcal{M}^2(z_o)$, [8]. Donnons enfin une caractérisation trajectorielle de la propriété.

Théorème 2-5.- [8]

Supposons que l'une des conditions (a) ou (b) du théorème 2-3 soit réalisée, alors il y a équivalence entre les propositions :

(a) $<M>^{(1)} = <M>^{(2)}$.

(b) Si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition produit de R_{11} dont le pas tend vers 0, alors, pour tout $z \in R_{11}$ on a :

$$S_1 = \sum_{\substack{i,j,j' \\ j \neq j'}} M(\Delta_{ij})_z \, M(\Delta_{ij'})_z \xrightarrow[|\pi| \to 0]{P} 0$$

$$S_2 = \sum_{\substack{i,i',j \\ i \neq i'}} M(\Delta_{ij})_z M(\Delta'_{ij})_z \xrightarrow[|\pi| \to 0]{P} 0.$$

Démonstration :

Si $< M >^{(1)} = < M >^{(2)}$, alors $< M > - < M >^{(1)} = 0$.

Or S_1 est exactement la différence des variations produits, superficielles et linéaires : $S_1 = a-b$ où, si $z = (s,t)$,

$$a = \sum_{ij} M(\Delta_{ij})_z^2 \xrightarrow{P} < M >_z$$

$$b = \sum_{i} M(\Delta_i,t)_s^2 \xrightarrow{P} < M >_z^{(1)}.$$

Il suffit alors de rédécomposer :

$$M(\Delta_i,t)_s = \sum_j M(\Delta_{ij})_{st}$$

pour obtenir le résultat.

Remarquons que sous l'hypothèse (a) de la filtration brownienne, les limites ont lieu dans L^1 (cf. Chapitre II, § 2). ■

2-2. Semi-martingales représentables i.d.c..-

Nous supposerons à nouveau dans ce paragraphe que $\mathfrak{F}$ est la filtration brownienne. Nous nous limiterons à l'étude de processus X qui sont des s.m.r.. Pour un tel processus, on notera $< X >$ le processus variation quadratique rectangulaire, $< X >^{(1)}$ la 1-variation quadratique et $< X >^{(2)}$ la 2-variation quadratique. Si

$$X = M + P^1 + P^2 + B$$

$$< X > = < M >, \quad < X >^{(1)} = < M+P^1 >^{(1)}, \quad < X >^{(2)} = < M+P^2 >^{(2)}.$$

Pour une s.m.r. X, en général, les propriétés étudiées au § 2-1 tombent.

On a cependant encore :

Théorème 2-6.-

La s.m.r. X est i.d.c. si et seulement si

$$< X >^{(1)} = < X >^{(2)}.$$

Démonstration :

Si X est une s.m.r., i.d.c., X étant nulle sur les axes, alors $< X >^{(1)}_{st}$ variation de X sur Γ^1 (cf. Corollaire 2-1) est égale à $< X >^{(2)}_{st}$ variation de X sur Γ^2.

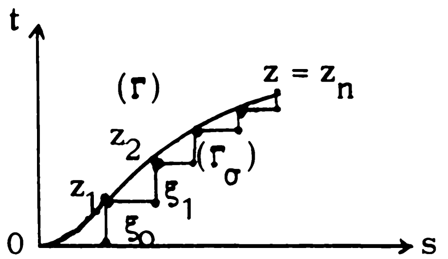
Réciproquement : Supposons que $< X >^{(1)} = < X >^{(2)}$.

Soit $\Gamma \in \gamma$ un chemin joignant l'origine à z fixé.

Soit $z^\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2_+$ une paramétrisation de ce chemin ;

adoptons alors les notations développées dans le théorème 1. Si σ est une partition de $[0,1]$, on définira le "chemin croissant en escalier" joignant 0 à z_o comme étant la ligne p brisée joignant 0 à z_o en passant successivement par

$\xi_o, z_1, \xi_1, \ldots, \xi_i, z_{i+1}, \ldots, \xi_{n-1}, z_n = z$



.

On notera Γ_σ ce chemin. La démonstration de la réciproque sera alors une conséquence immédiate des deux lemmes suivants

Lemme 2-1.- Si Γ_1 et Γ_2 sont deux chemins croissants en escaliers joignant 0 à z, alors $< X >^{\Gamma_1}_z = < X >^{\Gamma_2}_z$.

Lemme 2-2. - On a :

$$< X >^{\Gamma}_z \overset{L^1}{=} \lim_{|\sigma| \to 0} < X >^{\Gamma_\sigma}_z$$

(la limite est d'ailleurs uniforme sur Γ).

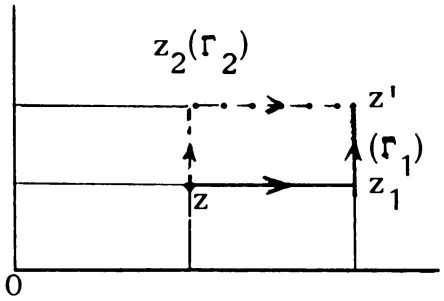
Démonstration du lemme 2-1. :

Il est suffisant de démontrer le résultat pour Γ_1 et Γ_2 du type :

Γ_1 joint z à z_1 et z_1 à z'

Γ_2 joint z à z_2 et z_2 à z'

avec $z = (s,t)$, $z' = (s',t') > z$, $z_1 = (s',t)$, $z_2 = (s,t')$



Notons $<X>^{\Gamma_1}$, $<X>^{\Gamma_2}$ pour les variations quadratiques de X le long de Γ_1, Γ_2, on a :

$$<X>^{\Gamma_1} = <X>^{(1)}_{z_1} - <X>^{(1)}_{z} + <X>^{(2)}_{z'} - <X>^{(2)}_{z_1} = <X>^{(2)}_{z'} - <X>^{(1)}_{z} = <X>^{(1)}_{z'} - <X>^{(2)}_{z}$$

$$= <X>^{(2)}_{z_2} - <X>^{(2)}_{z} + <X>^{(1)}_{z'} - <X>^{(1)}_{z_2} = <X>^{\Gamma_2} . \qquad \square$$

Démonstration du lemme 2-2 :

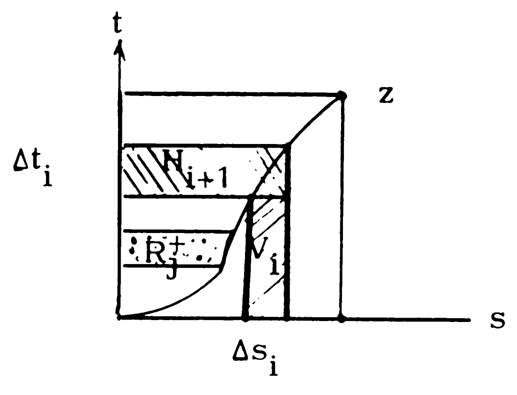
$$<X>^{\Gamma}_{z} = \int_{R_1^-} L_1^2(T(\xi)\, ;\, \xi)\, d\xi + \int_{R_1^+} L_2^2(\xi\, ;\, S(\xi))d\xi$$

$$<X>^{\Gamma_\sigma}_{z} = \sum_{i=0,n-1} \int_{V_i} L_1^2(t_i, \xi)d\xi + \sum_{i=1,n} \int_{H_i} L_2^2(\xi\, ;\, s_i)d\xi$$

où on a noté :

$$H_i = [0,s_i] \times \Delta t_{i-1}$$

$$V_i = \Delta s_i \times [0,t_i]$$



Notons enfin : R_i^+ la partie de R_1^+ d'ordonnée comprise entre t_i, t_{i+1}. On a alors :

$$<X>_z^{\Gamma} - <X>_z^{\Gamma_\sigma} = R_{1\sigma} + R_{2\sigma}$$

avec

$$R_{1\sigma} = \int_{R_1^-} L_1^2(T(\xi)\ ;\ \xi)d\xi - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{V_i} L_1^2(t_i\ ;\ \xi)d\xi$$

$$R_{2\sigma} = \int_{R_1^+} L_2^2(\xi\ ;\ S(\xi))d\xi - \sum_{i=1}^{n} \int_{H_i} L_2^2(\xi\ ;\ s_i)\, d\xi .$$

Examinons par exemple $R_{1\sigma}$ et montrons qu'il converge dans L^1 vers 0. $R_{1\sigma}$ se décompose en deux termes :

. $$R_{1\sigma}^1 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{V_i} [L_1^2(T(\xi)\ ;\ \xi) - L_1^2(t_i\ ;\ \xi)]d\xi = \int_{R_Z} D_\sigma(\xi)\, d\xi$$

avec : $$D_\sigma(\xi) = 1_V(\xi)\ [L_1^2(T(\xi)\ ;\ \xi) - L_1^2(t_i\ ,\ \xi)]$$

où $V = \bigcup_{i=0,n-1} V_i$.

$L_1(t\ ;\ \xi)$ étant continue en t pour tout ω, on a :

$$\lim_{|\sigma|\to 0} D_\sigma(\xi) = 0.$$

D'autre part, $D_\sigma(\xi)$ est dominée par $4\,\mathcal{L}_1^2(\xi)$ où

$$\mathcal{L}_1(\xi) = \sup_t |L_1(t\ ;\ \xi)|$$

qui vérifie (cf. Chapitre V, § 5-3)

$$E \int_{R_{11}} \mathcal{L}_1^2(\xi)\, d\xi < \infty .$$

On en déduit donc que : $R_{1\sigma}^1 \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{L^1} 0$.

. $$R_{1\sigma}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{R_i^- \setminus V_i} L_1^2(T(\xi)\ ;\ \xi)d\xi \leq \int_{\bigcup_{i=0}^{n-1} (R_i^- \setminus V_i)} \mathcal{L}_1^2(\xi)d\xi \xrightarrow[|\sigma|\to 0]{L^1} 0$$

puisque la mesure de Lebesgue de la réunion : $\bigcup_{i=0}^{n-1} (R_i^- \setminus V_i)$ tend vers 0 avec $|\sigma|$.

On procèderait de même pour démontrer :

$$R_{2\sigma} \xrightarrow{L^1} 0 \, .$$

D'où le résultat du théorème 2.6. ■

Exemple : Reprenons l'exemple donné à la suite du théorème 1 :

$$X = W + 1_{z \hat{\wedge} z'}\, Z.W + 1_{z \hat{\wedge} z'}\, W.Z = W + \beta_1.VW + \beta_2.WU$$

$$L_1(t\,;x,y) = 1 + x(t-y)\, 1_{\{y<t\}} \, .$$

On a donc :

$$<X>^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}} L_1^2(t\,;x,y)dx\,dy = \int_{R_{st}} [1+x(t-y)]^2 dx\,dy = st + \frac{s^2t^2}{2} + \frac{s^3t^3}{9} = <X>^{(2)}_{st} \, .$$

X est donc une s.m.r. i.d.c..

Donnons alors une autre condition nécessaire et suffisante assurant que X est i.d.c..

Théorème 2-7.-

Soit X une s.m.r. de L^4. Alors X est i.d.c. si et seulement si X vérifie :

$$\int_0^t \psi(s,t\,;s',v)\, L_1(t\,;s',v)dv = 0 \quad \text{pour tout} \quad (s,t), \quad s' \geq s$$

$$\int_0^s \psi(u,t'\,;s,t)\, L_2(u,t'\,;s)du = 0 \quad \text{pour tout} \quad (s,t), \quad t' \geq t$$

$$\int_0^t L_1.\beta_1(t\,;s,v)dv = \int_0^s L_2.\beta_2(u,t\,;s)du, \quad \text{pour tout} \ (s,t).$$

Démonstration :

D'après la proposition précédente, X est i.d.c. si et seulement si $<X>^{(1)} = <X>^{(2)}$.

D'après le théorème 5-1 (Chapitre III), on a les représentations de s.m.r. $<X>^{(1)}$ et $<X>^{(2)}$

$$<X>^{(1)}_{st} = <X>_{st} + 2\int_{[0,t]\times R_{st}} L_1.\beta_1(y\,;\xi')dy\,d\xi' + 2\int_{R^2_{st}} L_1(y\,;\xi')\,\psi(u,y\,;\xi')W(du,dy)d\xi'$$

$$<X>^{(2)}_{st} = <X>_{st} + 2\int_{R_{st}\times[0,s]} L_2.\beta_2(\xi\,;\,x')d\xi\,dx' + 2\int_{R^2_{st}} L_2(\xi\,;\,x')\psi(\xi\,;\,x',v)d\xi\,W(dx',dv).$$

$<X>^{(1)}$ est à v.b. en s, et est une semi-martingale en t, les deux parties étant continues.

$<X>^{(2)}$ est à v.b. en t, et une semi-martingale en s. On en conclut :

$$\int_{R^2_{st}} L_1(y\,;\,\xi')\psi(u,y\,;\,\xi')\,W(du,dy)d\xi' = 0$$

$$\int_{R^2_{st}} L_2(\xi\,;\,x')\,\psi(\xi\,;\,x',v)\,d\xi\,W(dx',dv) = 0$$

$$\int_{[0,t]_1\times R_{st}} L_1.\beta_1(y\,;\,\xi')dy\,d\xi' = \int_{R_{st}\times[0,s]} L_2.\beta_2(\xi\,;\,x')d\xi\,dx'.$$

X étant dans L^4, on déduit de la propriété de Fubini pour la première intégrale mixte :

$$\forall\ (u,y) : \qquad \int_{R_{st}} L_1(y\,;\,\xi')\,\psi(u,y\,;\,\xi')\,d\xi' = 0 \qquad P\ p.s.$$

et par dérivation en s :

$$\int_0^t L_1(y\,;\,s,v)\,\psi(u,y\,;\,s,v)dv = 0.$$

On obtient de même la deuxième condition. Quant à la troisième équation, elle donne par dérivation en (s,t) la troisième condition. ∎

§ 3 - Martingales à accroissements orthogonaux.

Dans ce paragraphe, sauf mention explicite, la filtration $\mathfrak{F}$ est générale vérifiant F1 - F4.

Les notions de 1-martingales à accroissements orthogonaux dans le sens 1 (a.o.1), 2-martingales a.o.2 et martingale à accroissements orthogonaux (a.o) ont été définies au Chapitre I, § 2. La notion de martingale a.o. a été introduite dans [8] sous la forme suivante :

Soient $z_i = (s_i, t_i)$, $i = 1,2$, $z_1 \leq z_2$ et définissons les deux martingales à 1 indice

$$m_t = M_{s_2 t} - M_{s_1 t} \qquad (\mathfrak{F}_t^2)$$

$$n_s = M_{s t_2} - M_{s t_1} \qquad (\mathfrak{F}_s^1).$$

Définition.- [8]. Si M est une martingale de L^2, continue, on dira que M est à variation indépendante de la direction (v.i.d.) si elle vérifie :

$$< m >_{t_2} - < m >_{t_1} = < n >_{s_2} - < n >_{s_1} .$$

On a alors la propriété,

Théorème 3-1.- [8].

Supposons que l'une des conditions (a), (b) du théorème 2-3 soit réalisée, alors il y a équivalence entre les propriétés suivantes,

(1) M est v.i.d.

(2) M est a.o .

(3) $\{(M_{s_1t})_t, (M_{s_2t} - M_{s_1t}), \mathcal{F}^2_t\}$ sont deux martingales orthogonales ainsi que $\{(M_{st_1})_s, (M_{st_2} - M_{st_1})_s, \mathcal{F}^1_s\}$.

En particulier, si M est constante sur les axes, alors l'une des hypothèses précédentes implique que M est i.d.c.. Ainsi, par exemple, si $\mathcal{F}$ est la filtration brownienne, on a la suite d'inclusions :

{Martingales fortes} ⊂ {Martingales a.o.} ⊂ {Martingales i.d.c.}.

On a les deux propriétés suivantes

Propriétés 3-2.- [8]

Sous l'une des hypothèses (a) ou (b) du théorème 2-3, on a :

L'ensemble des martingales de L^2 à a.o. est stable pour la limite dans $\mathcal{M}^2(z_o)$.

Si M est à a.o., continue, dans L^2, et si $\varphi \in \mathcal{L}^2_M(z_o)$, alors $(\varphi.M)$ est à a.o..

Théorème 3-3.- [8]

Si M est une martingale de L^2 à a.o. sur la filtration du brownien, alors M est une martingale forte.

La démonstration de ce théorème est basée sur les deux lemmes :

Lemme 3-1.-

Si M est une 1-martingale a.o. de L^2, continue, telle que $M^2_{st}-st$ soit une martingale, alors M est un drap brownien [4], [8]. Si M est une 1-martingale a.o.1, continue en s, telle que $M^2_{st}-st$ soit une 1-martingale, alors M est le drap brownien.

Lemme 3-2.- [8].

Sous l'une des hypothèses (a), (b) du théorème 2-3, si M est une martingale à a.o. telle que $<M>_z$ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la densité étant prévisible, alors, il existe un brownien

W sur l'espace de base de M tel que :

$$M_z = \int_{R_z} f(\xi)\ W(d\xi).$$

On trouve une autre version de cette propriété dans [5] :

Proposition 3-4.- ([5], proposition 1.1).

Si X_z est un processus gaussien, nul sur les axes, de variance $\Gamma(z)$, on a alors les équivalences :

(1) X_z est une martingale.

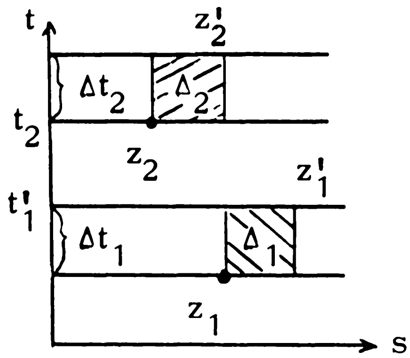
(2) X_z est à accroissements orthogonaux.

(3) Il existe un brownien W sur l'espace de base et φ déterministe tel que : $X_z = \int_{R_z} \varphi(\xi)\ W(d\xi)$.

Démonstration du lemme 3-1 : [4]

a) Soit $\Delta_1 =]z_1,z'_1]$, $\Delta_2 =]z_2,z'_2]$ deux rectangles de R_{11} d'intersection vide, et supposons, par exemple que :

$$t'_1 \leq t_2 \qquad (z_i = (s_i,t_i),\ z'_i = (s'_i,t'_i),\quad i = 1,2)$$



$M_{s,\Delta t_1} = M_{st'_1} - M_{st_1}$ et $M_{s,\Delta t_2} = M_{st'_2} - M_{st_2}$ sont deux martingales en s, orthogonales (relativement à $\mathcal{F}^1_s$).

D'autre part, $M_{s,\Delta t_1}$ est une martingale de L^2, continue, de processus croissant $(t'_1-t_1)\,s$. $M_{s,\Delta t_1}$ est donc un brownien (non normalisé) de variance donnée ci-dessus ([11]). De même pour $M_{s,\Delta t_2}$. On en déduit en particulier que $M(\Delta_1)$ et $M(\Delta_2)$ sont deux variables gaussiennes centrées indépendantes de normes respectives $|\Delta_1|$ et $|\Delta_2|$. M est donc un drap brownien normalisé sur $\mathbb{R}^2$.

b) Supposons que M soit une 1-martingale a.o.1, de L^2, continue en s, telle que $M^2_{st}-st$ soit une 1-martingale. On peut tenir le même raisonnement que précédemment. : sur une même bande Δt_1, $M_{s,\Delta t_1}$ est un mouvement brownien, de norme $s \times |\Delta t_1|$ et donc les accroissements de $M_{s,\Delta t_1}$ sur cette bande sont donc orthogonaux (si $\Delta_1 \cap \Delta'_1 = \emptyset$).

Sur deux bandes Δt_1 et $\Delta t'_2$ disjointes, on a le même résultat que précédemment.

Toujours dans le cas de la filtration brownienne, on a le résultat suivant qui généralise la proposition 3-3 en même temps qu'il en donne une approche différente.

Théorème 3-5.-

Dans le cas de la filtration brownienne, toute 1-martingale de L^4, représentable, à accroissements orthogonaux dans le sens 1, est une martingale forte.

Démonstration :

Soit $M_{st} = (\theta.W + \psi.WW + \beta_1.VW)_{st}$ la 1-martingale représentable de L^2 à a.o.1. Alors :

$M_{st}(M_{st'}-M_{st})$ est une martingale en s, relativement à $\mathcal{F}^1_s$ pour tout $t \leq t'$.

$$M_{st} = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)\,W(dz)$$

$$M_{s,\Delta t} = M_{s,t'} - M_{s,t} = \int_{[0,s]\times\Delta t} L_1(t'\,;z)W(dz) + \int_{R_{st}} L_1(\Delta t\,;z)\,W(dz)$$

et donc :

$$<M_{.,t},M_{.,\Delta t}>^{(1)}(s) = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)\,L_1(\Delta t\,;z)dz = A+B = 0$$

avec :

$$A = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)\int_{[0,1]\times\Delta t} \psi(\xi,z)\,W(d\xi)\,dz \qquad \text{(2-m.p. de } L^2)$$

$$B = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z) \int_{\Delta t} \beta_1(v\,;z)\, dv\, dz \quad \text{(2-v.b. de } L^2).$$

A et B étant continues, on en déduit que A et B sont nulles.

A étant nulle, on en déduit que $z \times \xi \times t \times t' \times \omega$ p.s. (avec si $\xi = (u,v)$, $t \leq v \leq t'$)

$$L_1(t\,;z)\,\psi(\xi,z) = 0$$

et de même, $z \times v \times t \times t' \times \omega$ p.s. $(t \leq v \leq t')$

$$L_1(t\,;z)\,\beta_1(v\,;z) = 0$$

$N_t = L_1(t\,;z)\,\psi(\xi,z)$ est une semi-martingale (de L^2) en t de variation quadratique :

$$\psi^2(\xi,z) \int_{R_{1t}} \psi^2(z',z)\, dz'$$

et donc $\xi \times z \times z' \times t \times \omega$ p.s. :

$$\psi(\xi,z)\,\psi(z',z) = 0$$

avec si $\xi = (u,v)$, $z' = (u',v')$

$\xi \curlywedge z$, $z' \curlywedge z$, $v' \leq t \leq v$.

Donc $z \times \omega$ presque surement on a :

$$\psi(\xi,z)\,\psi(z',z) = 0 \qquad z \times z' \times t \quad \text{p.s.}$$

dans les mêmes conditions. Fixons z, ω, et posons :

$$g(\xi) = \psi(\xi,z).$$

Supposons qu'il existe un borélien Δ de R_{11}, de mesure strictement positive, telle que sur Δ

$$|g(\xi)| > 0.$$

Il existe alors un $t \in [0,1]$ tel que les deux ensembles

$$\Delta_t = \Delta \cap R_{1t}$$

$$\Delta'_t = \Delta \cap (R_{11} \setminus R_{1t})$$

soient de mesures strictement positives (en effet, la fonction $m_t = |\Delta_t|$ est croissante continue, valant 0 en $t = 0$ et $|\Delta|$ en $t = 1$).

Posons alors :

$$\tilde{\Delta}_t = \{(\xi, z'),\ \xi \in \Delta'_t \ \text{ et } \ z' \in \Delta_t\}.$$

$\tilde{\Delta}_t$ est de mesure strictement positive et donc sur $\tilde{\Delta}_t$,

$$|g(\xi)\, g(z')| = |\psi(\xi, z).\psi(z', z)| > 0,$$

ce qui est impossible. On a donc bien :

$$\psi = 0 \quad z \times z' \times \omega \ \text{ p.s.}$$

La seconde condition s'écrit :

$$(\theta(z) + \int_0^t \beta_1(v', z)\, dz)\ \ \beta_1(v, z) = 0 \qquad \text{si} \quad v \geq t$$

soit encore :

$$\beta_1(v', z)\ \ \beta_1(v, z) = 0, \qquad v \times v' \times z \ \text{ p.s. sur } \ v \geq v'$$

et par un raisonnement analogue on en déduit

$$\beta_1 = 0 \quad v \times z \times \omega \ \text{ p.s.} \qquad \blacksquare$$

§ 4 - Intégrales curvilignes.

Dans le cas de la filtration brownienne, nous allons définir des intégrales curvilignes de processus Φ relativement à une s.m.r. X . Nous étudierons ensuite une formule de Green associée à ces intégrales curvilignes le long d'un contour fermé régulier.

Nous avons d'abord besoin d'associer à la s.m.r. X et à une courbe Γ, continue, et "monotone" deux processus x_1^Γ et x_2^Γ par rapport auxquels seront définies les intégrales curvilignes.

Définition 4-1.- Processus x_1^Γ .

Soit Γ une courbe de $\mathbf{R}_+^2$, de paramétrisation

$$z : [s_o,s_1] \rightarrow \mathbf{R}_+^2$$

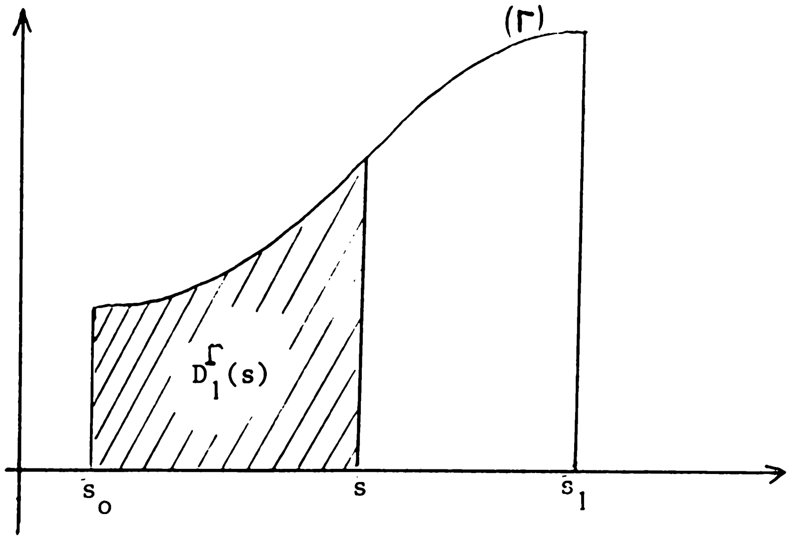
$$z(s) = (s,t(s))$$

où t est une application, monotone, continue.

On définit alors le processus :

$$x_1^\Gamma(s) = X(D_1^\Gamma(s)) = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(z)\, X(dz)$$

où $D_1^\Gamma(s)$ est la zone de $\mathbf{R}_+^2$ limitée par l'axe horizontal, les verticales d'abscisses s_o et s et la courbe Γ.



Proposition 4-1.-

$\{x_1^\Gamma(s),\ \mathcal{F}_s^1,\ s\in[s_o,s_1]\}$ est une semi-martingale admettant la représentation :

$$x_1^\Gamma(s) = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(z)\ L_1(T(z);z)W(dz) + \int_{s_o}^{s} \varphi_1(u,t(u))du$$

(où $T(u,v) = t(u)$ coïncide avec la fonction définie au § 1), L_1, φ_1 étant les intégrandes de la 1-représentation de X (cf. Chapitre III, § 5-1-1).

Démonstration :

L'intégrale semi-stochastique par rapport à une s.m.r.

$$\int_{R_{z_o}} f(z)\ X(dz)$$

est définie au chapitre III, § 5-1-4, dès que $\|f^2\|_{X^2}$ est fini et f est adaptée. Donc

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(z)\, X(dz)$$

est bien définie

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(z)\ X(dz) = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(z)\ \theta(z)\ W(dz)$$

$$+ \int_{\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\ \psi(u,y\,;\,x,v)\, W(du,dy)\, W(dx,dv)$$

$$+ \int_{\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\, \beta_1(y\,;\,x,v)\ dy\ W(dx,dv)$$

$$+ \int_{\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\ \beta_2(u,y\,;\,x)\ W(du,dy)\ dx$$

$$+ \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\ \varphi(x,y)\ dx\ dy\ .$$

Il suffit alors de constater que :

$$1_{D_1(s)}(x,y) = 0$$

sauf si

$$s_o \le x \le s_1 \quad \text{et} \quad 0 \le y \le t(x) = T(x,y).$$

On a alors, par exemple :

$$\int_{\mathbf{R}_+^2\times\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\,\psi(u,y\,;x,v)\,W(du,dy)\;W(dx,dv)$$

$$=\int_{\mathbf{R}_+^2}\Big(\int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\;\psi(u,y\,;x,v)\;W(du,dy)\Big)\;W(dx,dv)$$

$$=\int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\Big(\int_{R_{s_o,t(x)}}\psi(u,y\,;x,v)\;W(du,dy)\Big)\;W(dx,dv).$$

Traitant de la même manière le terme en β_1, on trouve alors la représentation proposée pour la partie martingale de x_1. Un raisonnement analogue sur les intégrales en β_2 et φ donnent la représentation de la partie absolument continue de x_1. ■

<u>Remarque</u>.

Si Γ est croissante, alors $\{x_1^\Gamma(s),\ \mathfrak{F}_{s,t(s)}\}$ est une semi-martingale. On retrouve alors l'une des parties de la trace de X sur Γ donnée dans le théorème 1.

Symétriquement, pour une courbe Γ de paramétrisation :

$$z : [t_o,t_1] \to \mathbf{R}_+^2$$
$$z(t) = (s(t),t)$$

où s est monotone, continue, on définit le processus :

$$x_2^\Gamma(t) = X(D_2^\Gamma(t))$$

qui est une semi-martingale pour la filtration $\mathfrak{F}_t^2$, ($\mathfrak{F}_{s(t),t}$ si $t \to s(t)$ est croissante), admettant la représentation :

$$x_2^\Gamma(t) = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_2^\Gamma(t)}(z)\;L_2(z\,;\,S(z))\;W(dz) + \int_{t_o}^{t}\varphi_2(s(v),v)dv$$

où $S(u,v) = s(v)$, et L_2, φ_2 sont les intégrandes de la 2-représentation de X.

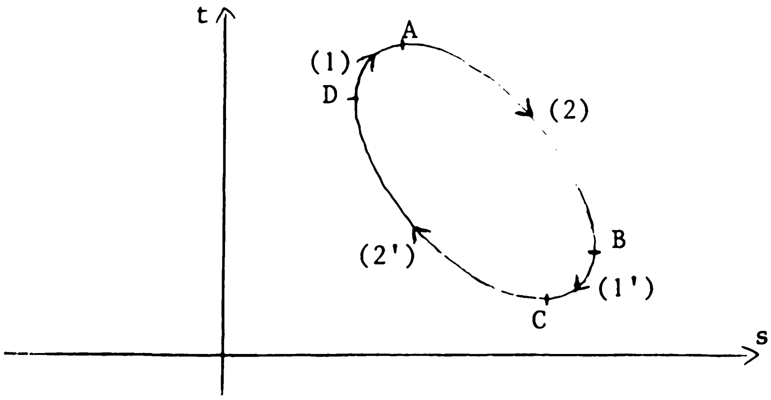
On considèrera alors, comme dans [2], 4 types de courbes Γ, orientées pour lesquelles on définira des intégrales curvilignes : si Γ est donnée par une paramétrisation $z : [0,1] \to \mathbf{R}_+^2$, $\lambda \mapsto z(\lambda)$, continue, on dira que :

Γ est de type (1) si : $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow z(\lambda) \leq z(\lambda')$

Γ est de type (2) si : $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow z(\lambda) \mathrel{\hat{\wedge}} z(\lambda')$

Γ est de type (1') si : $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow z(\lambda) \geq z(\lambda')$

Γ est de type (2') si : $\lambda \leq \lambda' \Rightarrow z(\lambda') \mathrel{\hat{\wedge}} z(\lambda)$



A la courbe Γ paramètrée par

$$z \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+^2 \\ \lambda \longmapsto z(\lambda) \end{cases}$$

on associe la courbe, que l'on notera $-\Gamma$ paramètrée par

$$z \begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+^2 \\ \lambda \longmapsto z(1-\lambda). \end{cases}$$

Remarquons que cette opération échange les types (1) et (1') d'une part, et les types (2) et (2') d'autre part.

On dira qu'une courbe est de type pur si elle est d'un de ces quatre types, qu'elle est de type fini régulier si elle est constituée par une réunion finie de courbes de types purs.

<u>Définition 4-2</u>.- <u>Intégrale curviligne par rapport à la s.m.r.</u> X.

1) <u>Intégrale</u> : $\int_\Gamma \Phi \, \partial_1 X$:

Soit $\Gamma = \{z : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}_+^2\}$ une courbe de <u>type 1</u>, ou de <u>type 2</u>. Soit Φ un processus $\mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}$ mesurable $\mathcal{F}^1$-adapté ; soit X une s.m.r., X_1^Γ le processus qui lui est associé par la définition 4-1, on notera la décomposition $x_1^\Gamma = m_1 + b_1$. Dès que

$$E \int_0^1 \Phi^2(s(\lambda)) <m_1> (d\lambda)$$

$$E \int_0^1 |\Phi(s(\lambda)|\ |b_1|\ (d\lambda)$$

sont finis, on posera par définition

$$\int_\Gamma \Phi\ \partial_1 X = \int_0^1 \Phi(s(\lambda))\ x_1(d\lambda).$$

Si Γ est de type (1') ou de type (2') (c.à.d. $-\Gamma$ est de type (1) ou (2)), on définira :

$$\int_\Gamma \Phi\ \partial_1 X = \int_{-\Gamma} \Phi\ \partial_1 X\ .$$

2) Intégrale : $\int_\Gamma \Phi\ \partial_2 X$.

Soit Γ une courbe de type (2') ou de type (1). Soit

$$\Phi : \mathbf{R}^+ \times \Omega \to \mathbf{R}$$

un processus mesurable, $\mathfrak{F}^2$-adapté ; on définit

$$\int_\Gamma \Phi\ \partial_2 X = \int_0^1 \Phi(t(\lambda))\ x_2(d\lambda)$$

(sous des conditions L^2 et L^1 symétriques des précédentes).

Si Γ est de type (2) ou de type (1'), on définira alors :

$$\int_\Gamma \Phi\ \partial_2 X = \int_{-\Gamma} \Phi\ \partial_2 X\ .$$

3) Si Φ est $\mathfrak{F}$-adapté et si la courbe Γ est de type régulier, alors on étend les intégrales curvilignes précédentes à Γ par additivité.

4) On notera

$$\int_\Gamma \Phi\ \partial X = \int_\Gamma \Phi\ \partial_1 X + \int_\Gamma \Phi\ \partial_2 X\ .$$

On a le lemme suivant :

Lemme 4-2.-

Si $A =]z,z']$, $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$ alors :

$$\int_{\partial A} \Phi \partial X = \int_{\partial R_{z'}} \Phi \partial X - \int_{\partial R_{st'}} \Phi \partial X - \int_{\partial R_{s't}} \Phi \partial X + \int_{\partial R_z} \Phi \partial X.$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire : $\partial X = \partial_1 X + \partial_2 X$, et de constater, d'une part que $\partial_2 X$ est nulle sur les horizontales, $\partial_1 X$ sur les verticales, et que :

$$A = (R_{z'} \setminus R_{st'}) \setminus (R_{s't} \setminus R_z). \quad \blacksquare$$

On a alors la proposition suivante généralisant le lemme 3-5 du chapitre III.

Théorème 4-2.-

Soit Γ une courbe de type (1) ou de type (2), de paramétrisation naturelle :

$$z : [s_0, s_1] \to \mathbf{R}^2_+$$
$$s \mapsto z(s) = (s, t(s)).$$

Soit X une 1-martingale représentable, et Φ un processus :

$$\Phi : [s_0, s_1] \times \Omega \to \mathbf{R}$$

mesurable, $\mathfrak{F}^1$-adapté tel que l'on puisse définir l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma \Phi\, \partial^1 X$. Alors, sous cette même condition, l'intégrale double :

$$J = \int_{\mathbf{R}^2_+} 1_{D_1^\Gamma(s_1)}(x,y)\, \Phi(x)\, L_1(t(x)\ ;\ x,y)\, W(dx,dy)$$

existe dans L^2 et est égale à I.

Démonstration :

La condition assurant l'existence de I est :

(1) $$\|\Phi\|^2 = E \int_{s_0}^{s_1} \Phi^2(x) < x_1 > (dx) < \infty.$$

Or, le processus $<x_1>$ admet la représentation :

$$<x_1>_s = \int_{\mathbf{R}^2_+} 1_{D_1^\Gamma(s)}(x,y)\, L_1^2(t(x)\ ;\ x,y)\, dx\, dy$$

et (1) s'écrit encore :

(2) $$E \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s_1)}(x,y)\, \Phi^2(x)\, L_1^2(t(x)\,;\, x,y)\, dx\, dy < \infty$$

(2) assure bien l'existence de l'intégrale double J. Reste à vérifier que $I = J$.

Soit Φ_n une suite de processus simples, bornés, mesurables $\mathfrak{F}^1$-adaptés, telle que : $$\|\Phi - \Phi_n\| \xrightarrow[n]{} 0 .$$

L'intégrale I_n associée à Φ_n s'écrit :

$$I_n = \int_\Gamma \Phi_n\, \partial^1 X = \int_{s_0}^{s_1} \Phi_n(x)\, x_1(dx) = \sum_{\pi_n} \Phi_n(i)\, x_1(\Delta_i)$$

où (π_n) est la partition sur laquelle est défini le processus simple Φ_n. D'après le résultat de la proposition 4-1 donnant la représentation de x_1, on a :

$$I_n = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s_1)}(x,y)\, \Phi_n(x)\, L_1(t(x)\,;\, x,y)\, W(dx,dy).$$

On en déduit donc :

$$\|I_n - J\|^2 \leq \|\Phi_n - \Phi\|^2 \xrightarrow[n]{} 0 . \quad \blacksquare$$

Corollaire 4-2.-

Sous les conditions du théorème 4-2, X étant une s.m.r. telle que l' intégrale $I = \int_\Gamma \Phi\, \partial^1 X$ soit définie dans L^2, alors on a :

$$I = J = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^\Gamma(s_1)}(x,y)\, \Phi(x)\, L_1(t(x);x,y) W(dx,dy) + \int_{s_0}^{s_1} \Phi(x)\, \varphi_1(x,t(x))\, dx.$$

On a des résultats analogues pour les autres types d'intégrales curvilignes.

Le résultat suivant indique alors sous quelle condition une intégrale curviligne $\int_\Gamma \Phi\, \partial^1 X$ sera approchée par une suite $\int_{\Gamma_n} \Phi_n\, \partial^1 X$, où Γ_n est une suite de courbes (Γ_n) du même type que Γ, approchant Γ et Φ_n étant une suite de processus tendant vers Φ. On utilisera ce résultat pour étendre la formule de Green obtenue pour les contours rectangulaires aux contours réguliers généraux : dans ce cas les courbes Γ_n approchant Γ seront des courbes en escalier.

Théorème 4-3.-

Soit Γ une courbe de type (1), ou de type (2), (Γ_n) une suite de courbes de même type que Γ, avec mêmes extrémités et telle que

. il existe $(a,b) \in \mathbf{R}_+^2$ tel que pour tout n, $\Gamma_n \subset R_{ab}$

. la mesure de l'aire comprise entre Γ et Γ_n tend vers 0 avec n.

Soit X une s.m.r., Φ, (Φ_n) des processus mesurables, 1-adaptés vérifiant :

. $\|\Phi^2\|_{X^2} < \infty$, $\|\Phi_n^2\|_{X^2} < \infty$ pour tout n.

. $\lim\limits_n \|(\Phi-\Phi_n)^2\|_{X^2} = 0$

où la norme $\| \ \|_{X^2}$ est définie sur R_{ab}.

Alors : $\int_{\Gamma_n} \Phi_n \, \partial^1 X \xrightarrow[n]{L^2} \int_{\Gamma} \Phi \, \partial^1 X$.

Démonstration :

* Tout d'abord, remarquons que les conditions de norme sur Φ, (Φ_n) impliquent l'existence des intégrales curvilignes correspondantes en X, sur Γ, (Γ_n).

Par exemple, la condition assurant l'existence de :

$$I = \int_{\Gamma} \Phi \, \partial^1 X$$

sera impliquée par les deux majorations :

$$E \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^{\Gamma}(s_1)}(x,y)\, \Phi^2(x) L_1^2(t(x)\,;x,y)\, dx\, dy \leq E \int_{R_{ab}} \Phi^2(x)\, \mathcal{L}_1^2(x,y) dx\, dy \leq C \|\Phi^2\|_{X^2}$$

(cf. Théorème 5-5, chapitre III, § 5-3),

et d'autre part,

$$E \int_{s_0}^{s_1} \Phi^2(x)\, \varphi_1(x,t(x))^2 dx \leq E \int_0^a \Phi^2(x)\, \Phi_1^2(x) dx \leq K' \|\Phi^2\|_{X^2} .$$

Remarquons au passage qu'une telle condition n'assure en rien l'existence de l'intégrale semi-stochastique $\int_{R_{ab}} \Phi(x)\, X(dx,dy)$; en effet, on ne peut pas définir une telle intégrale sous la seule condition : Φ est $\mathfrak{F}^1$-adaptée.

* Etudions alors la différence : $\int_{\Gamma} \Phi \partial^1 X - \int_{\Gamma_n} \Phi_n \partial^1 X = D_n$

$$D_n = D_{n\,1} + D_{n\,2}$$

avec

$$D_{n1} = \int_{\Gamma} \Phi \partial^1 X - \int_{\Gamma_n} \Phi \partial^1 X$$

$$D_{n2} = \int_{\Gamma_n} \Phi \partial^1 X - \int_{\Gamma_n} \Phi_n \partial^1 X .$$

Etude de D_{n1} :

D'après le corollaire 4-2, D_{n1} admet la représentation :

$$D_{n1} = \int_{\mathbb{R}_+^2} \{ 1_{D_1^{\Gamma}(s_1)}(x,y) L_1(t(x); x,y) - 1_{D_1^{\Gamma_n}(s_1)}(x,y) L_1(t_n(x); x,y) \} \Phi(x) W(dx,dy)$$
$$+ \int_{s_o}^{s_1} \Phi(x) \{ \varphi_1(x, t(x)) - \varphi_1(x, t_n(x)) \} dx$$

où $s \mapsto (s, t_n(s))$ est la paramétrisation naturelle de Γ_n .

Le premier terme de cette décomposition s'écrit encore $A_n + B_n$ avec :

$$A_n = \int_{\mathbb{R}_+^2} \{ 1_{D_1^{\Gamma}(s_1)}(x,y) - 1_{D_1^{\Gamma_n}(s_1)}(x,y) \} \; L_1(t(x) ; x,y) \Phi(x) \; W(dx,dy)$$

$$B_n = \int_{\mathbb{R}_+^2} 1_{D_1^{\Gamma_n}(s_1)}(x,y) \{ L_1(t(x) \; ; \; x,y) - L_1(t_n(x); x,y) \} \Phi(x) \; W(dx,dy) \; .$$

On a alors les majorations :

$$E\, A_n^2 \leq E \int_{R_{ab}} 1_{A_n}(x,y) \, \mathcal{L}_1^2(x,y) \; \Phi^2(x) \, dx \; dy$$

où $A_n = (D_1^{\Gamma}(s_1) \cap \overline{D_1^{\Gamma_n}(s_1)}) \cup (D_1^{\Gamma_n}(s_1) \cap \overline{D_1^{\Gamma}(s_1)})$ a sa mesure de Lebesgue qui tend vers 0, et donc puisque $\| \Phi^2 \|_{X^2}$ est finie $E\, A_n^2$ tend vers 0 si n tend vers l'infini.

$$E\, B_n^2 \leq E \int_{R_{ab}} \{ L_1(t(x) \, ; x,y) - L_1(t_n(x) \, ; x,y) \}^2 \, \Phi^2(x) dx \, dy$$

puisque Γ, (Γ_n) sont inclus dans R_{ab} . D'autre part :

$$\lim_n \; \{ L_1(t(x) \; ; \; x,y) - L_1(t_n(x) \; ; \; x,y) \}^2 = 0$$

et ce même carré est majoré par $4\mathcal{L}_1(x,y)^2$. On en déduit, par le théorème de convergence dominée que :

$$E\, B_n^2 \longrightarrow 0.$$

Le deuxième terme de la décomposition de D_{n1}, faisant intervenir la différence $\{\varphi_1(x,t(x)) - \varphi_1(x,t_n(x))\}$ se traite de façon analogue, et on en déduit donc :

$$E\, D_{n1}^2 \xrightarrow[n]{} 0.$$

<u>Etude de</u> D_{n2} :

$$D_{n2} = \int_{\mathbf{R}_+^2} 1_{D_1^{\Gamma_n}(s_1)}(x,y)\, L_1(t_n(x)\ ;\ x,y)\{\Phi-\Phi_n\}(x)\, W(dx,dy)$$

ce qui conduit à la majoration :

$$\begin{aligned} E\, D_{n2}^2 &\leq E \int_{R_{ab}} \mathcal{L}_1^2(x,y)\, (\Phi - \Phi_n)^2(x)\, dx\, dy \\ &\leq K \,\|\Phi - \Phi_n\|_{X^2}^2 . \end{aligned}$$

On en déduit le résultat du théorème. ■

Ce résultat s'étend immédiatement aux autres types d'intégrales curvilignes.

§ 5 - Formule de Green.

Nous démontrerons la formule de Green, d'abord pour les contours rectangulaires, puis pour les contours ∂D (bord d'un domaine D de $\mathbb{R}^2_+$) de type fini régulier.

Le but d'une formule de Green est de transformer une intégrale curviligne en intégrales de surface. Dans le cas présent, si Y est une s.m.r. et Φ un processus adapté au bord ∂D, on transformera l'intégrale $\int_{\partial D} \Phi \partial Y$ en intégrales de surfaces $\int_D$, stochastiques ou stochastiques mixtes. On spécifiera le processus Φ par la suite de la façon suivante : si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est déterministe, de classe C^2 et si X est une s.m.r., on prendra :

$$\Phi(\xi) = \varphi(X_\xi).$$

Les résultats qui suivent peuvent être étendus à une classe de processus Φ plus généraux par exemple des processus dérivables en (Y,t) au sens donné dans [2], dans le cas d'une intégrale sur un segment horizontal. Une telle condition remplace en fait la possibilité d'appliquer la formule de Ito en t au processus Φ, relativement à Y. Dans le cas où $\varphi(x) = x$, X_{st} étant une 2-martingale de L^2 et $Y = W$, on retrouve la formule proposée dans [9] et utilisée pour l'étude des processus holomorphes.

Signalons enfin que la formule de Green obtenue pour les intégrales $\int_{\partial R_{st}} \Phi \partial^1 Y$ permet d'obtenir la formule de Ito bidimensionnelle (cf. Ch. VI). Si X_{st} est une s.m.r., si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^4, alors, on a :

$$f(X_{st}) = f(0) + \int_0^s f'(X_{nt})\, X(du,t) + \frac{1}{2} \int_0^s f''(X_{nt}) < X >^{(1)} (du,t)$$

et il suffit alors de remarquer que

$$\begin{cases} \int_0^s f'(X_{ut})\, X(du,t) = \int_{\partial R_{st}} \Phi\, \partial^1 X \\ \text{où} \quad \Phi(\xi) = f'(X_\xi). \end{cases}$$

Dans toute la suite, on posera :

$$\Phi(\xi) = \varphi(X_\xi)$$

X s.m.r., φ de classe C^2.

On notera : $\Phi'(\xi) = \varphi'(X_\xi)$, $\Phi''(\xi) = \varphi''(X_\xi)$.

Lemme 5-1 : Formule de Green pour : $\int_{\partial R_{st}} \Phi\, \partial_1 Y$.-

Soient X, Y deux s.m.r. de L^4, si Φ^2 est de semi-norme $\|.\|_{Y^2}$ finie, et $(\Phi')^2$ et $(\Phi'')^2$ de semi-normes $\|.\|_{X^4}$ et $\|.\|_{Y^4}$ finies.

On a alors

$$\int_{\partial R_{st}} \Phi \partial^1 Y = \int_{R_{st}} \Phi(\xi)\, Y(d\xi) + \int_{R_{st}} \Phi'(\xi) J_{X,Y}(d\xi) + \int_{R_{st}} \Phi'(\xi) \langle X(x,.), Y(dx,.)\rangle^{(2)}(dy)$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{R_{st}} \Phi''(\xi)\; J_{\langle X\rangle^{(2)},Y}(d\xi).$$

Démonstration : $\|\Phi\|_{Y^2} < \infty$ assure l'existence de $\int_{\partial R_{st}} \Phi \partial_1 Y$.

D'après le théorème 4-2, on a, puisque le contour est le bord du rectangle R_{st} :

$$\int_{\partial R_{st}} \Phi \partial_1 Y = \int_{R_{st}} \Phi(u,t) L_{1Y}(t\,;u,v)\, W(du,dv) + \int_0^s \Phi(u,t)\varphi_{1Y}(u,t)du\ .$$

Etudions séparément les deux intégrales.

On a la 1-représentation de Y : $Y = M_Y^1 + B_Y^1$.

Etude de $\int_{\partial R_{st}} \Phi \partial_1 M_Y^1$.

* Fixons (u,v).

Le processus $t \to L_{1Y}(t\,;u,v)$ vaut $\theta_Y(u,v)$ si $t \leq v$.

Sous les hypothèses du lemme, on peut appliquer la formule de Ito en t au produit $\Phi.L_{1Y}$:

$$\Phi(u,t)\, L_1(t\,;u,v) = \sum_{k=1,5} T_k(u,v)$$

avec

$$T_1(u,v) = \Phi(u,v)\ \theta_Y(u,v)$$

$$T_2(u,v) = \int_0^t \Phi'(u,y)\ L_{1Y}(y\ ;\ u,v)\ X(u,dy)$$

$$T_3(u,v) = \int_0^t \Phi(u,y)\ L_{1Y}(dy\ ;\ u,v)$$

$$T_4(u,v) = \int_0^t \Phi'(u,y) < X(u,.),L_{1Y}(.;\ u,v) >^{(2)}(dy)$$

$$T_5(u,v) = \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(u,y)\ L_{1Y}(y\ ;\ u,v) < X >^{(2)} (u,dy).$$

* D'autre part, sous les hypothèses du lemme, les 5 processus $T_k(u,v)$ vérifient la condition L^2 permettant de les intégrer en W.

L'intégration des termes T_1 et T_3 donne exactement

$$\int_{R_{st}} \Phi(\xi)\ M_Y^1(d\xi).$$

En effet :

$$\int_{R_{st}} \Phi(u,v)\,\theta(u,v)\,W(du,dv) = \int_{R_{st}} \Phi(\xi)\ M_Y^*(d\xi)$$

et

$$\int_0^t \Phi(u,y)L_{1Y}(dy\ ;u,v)W(du,dv) = \int_{R_{ut}} \Phi(u,y)\psi_{1Y}(x,y\ ;u,v)W(dx,dy) + \int_0^t \Phi(u,y)\beta_1(y\ ;u,v)dy$$

d'après le lemme 3-5, Chap. III.

Pour des raisons analogues, on a pour le terme T_2

$$\int_{R_{st}} \left(\int_0^t \Phi(u,y)L_{1Y}(y\ ;u,v)X(u,dy)\right) W(du,dv) =$$

$$= \int_{R_{st}^2} \Phi(u,y)L_{1Y}(y\ ;u,v)L_{2X}(x,y\ ;u)W(dx,dy)W(du,dv)$$

$$+\int_{R_{st}}\int_0^t \Phi(u,y)\ \varphi_{2X}(u,y)\ L_1(y\ ;u,v)\,dy\,W(du,dv) = \int_{R_{st}} \Phi(\xi)\ J_{<X>^{(2)},M_Y^1}(d\xi).$$

En ce qui concerne le terme T_4, à u fixé, on a

$$< X(u,.),L_{1Y}(.;u,v) >^{(2)}(y) = \int_{R_{uy}} L_{2X}(\xi;u)\psi_Y(\xi;u,v)d\xi$$

et donc :

$$\int_{R_{st}} \left(\int_0^t \Phi'(u,y) < X(u,.), L_{1Y}(. ; u,v) >^{(2)}(dy)\right) W(du,dv)$$

$$= \int_{R^2_{st}} \Phi'(u,y)\, L_{2X}(x,y\ ;\ u)\, \psi_Y(x,y\ ; u,v)\, dx\, dy\ W(du,dv)$$

$$= \int_{R_{st}} \Phi'(u,y) < X(u,.),\ M^{**}_Y(du,\circ) >^{(2)} (dy).$$

(Pour la définition de cette intégrale, cf. Chap. IV, § 5-4). Enfin, pour le terme T_5

$$\int_{R_{st}} \left(\int_0^t \Phi'(u,y) L_{1Y}(y\ ; u,v) < X >^{(2)}(u,dy)\right) W(du,dv) = \int_{R_{st}} \Phi''(\xi) J_{<X>^{(2)}, M_{1Y}}(d\xi).$$

Etude de $\int_{\partial R_{st}} \Phi\, \partial_1 B^1_Y$.

* Fixons u ; l'application de la formule de Ito en t à $\Phi.\varphi_{1Y}$ (possible sous les conditions du lemme u-p.s.) donne :

$$\Phi(u,t)\varphi_{1Y}(u,t) = \int_0^t \Phi(u,y)\varphi_{1Y}(u,dy) + \int_0^t \Phi'(u,y)\, X(u,dy) + \int_0^t \Phi'(u,y) < X(u,.), \varphi_{1Y}(u,.) >^{(2)}(dy)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(u,y)\, \varphi_{1Y}(u,y) < X >^{(2)}(u,dy).$$

Ces processus peuvent être intégrés en W sur R_{st}, et les regroupements de ces intégrales avec les termes provenant de $\int_{\partial R_{st}} \Phi\, \partial_1 M^1_Y$ donnent la formule proposée dans le lemme. ■

Remarques. 1) Si $\varphi(x) = x$, si X est une 2-martingale de L^2 et si Y est une martingale forte :

$$Y = \theta_Y . W,$$

θ_Y borné dans L^∞ . On a alors

$$\int_{\partial R_{st}} X\, \partial_1 Y = \int_{R_{st}} X(\xi) Y(d\xi) + J_{XY}(R_{st}).$$

(C'est la formule de Green proposée dans [9]). En effet, dans ce cas, il est inutile de faire une hypothèse L^4 sur X, et seuls les deux premiers termes de la décomposition de

$\int_{\partial R_{st}} X\,\partial_1 Y$ subsistent.

2) Les conditions X, Y dans L^4 ainsi que les conditions sur Φ peuvent être affaiblies. Par exemple, pour définir l'intégrale :

$$\int_{R_{st}} \Phi''(\xi) J_{<X>^{(2)}, M_{1Y}}(d\xi)$$

il suffit que soit vérifiée la condition :

$$E \int_{R_{st}^2} \Phi''(x,y)^2\, L_2^2(u,y\ ;\ x) L_1(y\ ;\ x,v)\, du\, dy\, dx\, dv < \infty\ . \blacksquare$$

On déduit immédiatement du lemme 5-1 le corollaire :

Corollaire 5-1.-

Sous les conditions du lemme 5-1, on a :

$$\int_{\partial R_{st}} \Phi\,\partial Y = \int_{R_{st}} \Phi'(\xi)(J_{X,Y} - J_{Y,X})(d\xi)$$
$$+ \int_{R_{st}} \Phi'(u,v)\{ <X(u,.), Y(du,.)>^{(2)}(dv) + <X(.,v), Y(.,dv)>^{(1)}(du)\}$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{R_{st}} \Phi''(\xi)\,(J_{<X>^{(2)},Y} - J_{Y,<X>^{(1)}})(d\xi).$$

Soit Γ une courbe de type pure, Γ_n une suite de courbes en escalier de même type, tendant vers Γ, de mêmes extrémités que Γ ; soient $(u,t(u))$, $(u,t_n(u))$ les paramétrisations naturelles de Γ, Γ_n, et notons, toujours dans le cadre du lemme 5-1 :

$$\delta(u) = \Phi(u,t(u)) = \varphi(X_{u,t(u)})$$

$$\delta_n(u) = \Phi(u,t_n(u)) = \varphi(X_{u,t_n(u)}).$$

On a alors :

Lemme 5-2.-

$$\lim_n \|(\delta_n - \delta)^2\|_{Y^2} = 0\ .$$

Démonstration :

$$\delta(u)-\delta_n(u)=\int_{t_n(u)}^{t(u)}\Phi'(u,y)X(u,dy)+\frac{1}{2}\int_{t_n(u)}^{t(u)}\Phi''(u,y)<X>^{(2)}(u,dy).$$

Si Γ, Γ_n restent dans le domaine R_{z_o}, sous les conditions du lemme

$$E\left[\int_{R_{z_o}}\int_0^{t_o}\Phi'(u,y)X(u,dy)\ Y(du,dv)\right]^2\leq K(\|\Phi'^2\|_{X^4}+\|\Phi'^2\|_{Y^4})$$

$$E\left[\int_{R_{z_o}}\int_0^{t_o}\Phi''(u,y)<X>^{(2)}(u,dy)\,Y(du,dv)\right]^2\leq K'(\|\Phi''^2\|_{X^4}+\|\Phi''^2\|_{Y^4}).$$

On en déduit alors, puisque la surface comprise entre Γ et Γ_n tend vers 0 que :

$$\|(\delta(u)-\delta_n(u))^2\|_{Y^2}\leq E\{\int_{R_{st}}(\delta(u)-\delta_n(u))^2\ Y(du,dv)\}\xrightarrow[n]{}0\ . \qquad \blacksquare$$

Soit alors D un domaine de $\mathbb{R}^2$ de bord ∂D régulier de type fini. Approchons chaque partie pure Γ_i de ∂D par une suite de courbes Γ_i^n en escalier, du même type, de mêmes extrémités, les courbes Γ_i^n (à n fixé), ne se coupant éventuellement qu'en leurs extrémités. Utilisant le lemme précédent et la proposition 4-3, on en déduit :

$$\int_{\partial D}\Phi\ \partial Y\overset{L^2}{=}\lim_n\sum_i\int_{\Gamma_i^n}\Phi\,\partial Y.$$

A n fixé, la région D_n de bord $\bigcup_i\Gamma_i^n$ est constituée d'une union finie de rectangles, et d'après le lemme 5-1, $\sum_i\int_{\Gamma_i^n}\Phi\,\partial Y$ s'exprime comme intégrales de surface sur D_n.

Enfin D_n tendant vers D, au sens où la mesure de Lebesgue de $(D\setminus\bar{D}_n)\cup(D_n\setminus\bar{D})$ tend vers 0, on en déduit la formule de Green pour le domaine D.

Théorème 5-2.-

Sous les conditions du lemme 5-1, si D est un domaine de frontière ∂D régulière de type fini, alors :

$$\int_{\partial D} \Phi\, \partial Y = \int_D \varphi'(X_\xi)(J_{X,Y} - J_{Y,X})(d\xi)$$

$$+ \int_D \varphi'(X_{uv})\{<X(u,.), Y(du,.)>^{(2)}(dv) + <X(.,v), Y(.,dv)>^{(1)}(du)\}$$

$$+ \int_D \varphi''(X_\xi)\,(J_{<X>^{(2)},Y} - J_{Y,<X>^{(1)}})\,(d\xi).$$

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE V

[1] WONG E. et ZAKAI M. : Martingale and Stochastic Integral for Processes with a multidimensional Parameter, Z. für W. 19, (1974).

[2] CAIROLI R. et WALSH J.B. : Stochastic Integrals in the Plane, Acta Matematica, 134, p. 111-183 (1975).

[3] GUYON X. et PRUM B. : Martingales faibles sur $[0,1]^2$:trace sur un chemin et applications de la formule de Ito, C.R.A.S., t. 287, Série A, p. 543-546 (1978).

[4] GUYON X. et PRUM B. : Recherche de la densité de probabilité du théorème de Girsanov, publication Univ. Orsay, (1978).

[5] NUALART D. et SANZ M. : Random gaussian Markov field, preprint, Univ. politecnica de Barcelona, (1978).

[6] NUALART D. et SANZ M. : Caractérisation des martingales à deux paramètres indépendantes du chemin, preprint, Univ. Politecnica de Barcelona (1979).

[7] NUALART D. et SANZ M. : Martingales à variation indépendante du chemin dans une filtration produit, preprint, Univ. Politecnica de Barcelona (1979).

[8] ZAKAI M. : Some classes of two-parameters martingales, preprint (1979).

[9] CAIROLI R. et WALSH J.B. : Martingale representation and holomorphic processes, Ann. of Proba., Vol. 5, n° 4, p. 511-521 (1977).

[10] DOZZI M. : Uber Stochastische Integrale mit mehrdimensionalem Parameter, Thèse à l'Université de Bern (1979).

CHAPITRE VI

FORMULE DE ITO

§ 1 - Introduction.

Si $X_1,\ldots,X_n$ sont n semi-martingales représentables et $f(x,y\,;u_1,\ldots,u_n)$ une fonction suffisamment régulière, la formule de Ito étudiée dans ce chapitre permettra de dire que, sous des hypothèses convenables

$$\Delta_{st}\, g = g(s,t) - g(o,t) - g(s,o) + g(o,o)$$

avec

$$g(s,t) = f(s,t\ ;\ X_{1st},\ldots,\ X_{nst})$$

est une s.m.r. et de connaître précisément la représentation de cette semi-martingale.

Afin de clarifier l'exposition, nous donnons d'abord cette formule dans les cas particuliers suivants :

- $f(M_z)$ où M est une martingale (théorème 3-1)
- $f(z,M_z)$ " " (théorème 4-1).

La formule la plus générale que nous donnons est au théorème 5-1.

Le problème de l'extension aux martingales à indice double de l'outil fondamental qu'est la formule de Ito pour le calcul stochastique à une dimension a été abordé par plusieurs auteurs :

Dans [1], page 151 (repris dans [2], page VI, 14) Cairoli et Walsh donnent une formule de Ito pour $f(W_z)$, la démonstration s'appuyant sur leur première formule de Green stochastique et l'usage de la formule de Ito unidimensionnelle.

Dans [3], page 94, et de façon plus détaillée dans [4], page 35, Nualart et Sanz donnent la formule pour une fonction $f(z\,;W(z))$, l'exprimant au moyen des opérateurs de diffusions D_1 et D_2 associés aux deux familles de martingales à un paramètre $(M_1(s,t),\ldots,M_n(s,t))_s$, $(M_1(s,t),\ldots,M_n(s,t))_t$.

En particulier, si f est harmonique ($D_1f = D_2f = 0$), c'est-à-dire si $f(z\,;M_1(z),\ldots,M_n(z)))$ est une martingale, Wong et Zakai [5] donnent la formule pour des martingales fortes représentables : cette formule donne alors la décomposition de la martingale $f(z\ ;\ M_1(z),\dots,M_n(z))$.

Dans [6], ils proposent une formule générale, obtenue par application formelle de la formule de Ito unidimensionelle, dans un sens, puis dans l'autre sous un signe d'intégration ; dans [7] et dans [8], ils développent ce formalisme.

Nous donnons ici une approche directe bidimensionelle basée sur le principe suivant : Soit (π_n) une suite de partitions équirégulières tendant vers 0. L'accroissement de $f(X_z)$ sur R_{st} s'écrit alors :

$$\Delta_{st}\, f(X) = \sum f \circ X(\Delta_{ij}^u \cap R_{st})\,.$$

On traite alors chaque accroissement de $f \circ M$ sur Δ_{ij} au moyen d'une <u>formule de Taylor appropriée à un accroissement rectangulaire</u> (et non une formule de Taylor pour une fonction de deux variables), c'est-à-dire une formule traitant

$$f(v) - f(v') - f(u') + f(u)\,.$$

Regroupant en (i,j) les termes de même nature, on étudie les limites en n de ces sommes qui ne sont autres que des sommes du type

$$S(f_n^{(k)},\ \pi_n,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma) \qquad \text{(cf. Chapitre IV)}$$

où $f_n^{(k)}(i,j) = f^{(k)}(z_{ij}^n)$.

Utilisant alors les résultats sur les limites de variations produit, on obtiendra la formule désirée donnant la décomposition de la semi-martingale $\Delta_{st}\, f(X)$.

Il suffira alors de vérifier que les "restes" tendent en probabilité vers 0, ce résultat est également basé sur les convergences vers 0 de certaines variations produit. La décomposition donnée de $\Delta_{st}\, f(X)$ en semi-martingale <u>traduit une égalité de processus</u>, c.à.d. une égalité en Probabilité, uniformément en $(s,t) \in R_{11}$.

Notons qu'il apparaitra en général une condition de type L^6 sur X. Cette condition est en partie nécessaire si on veut définir les processus dans L^2. Par exemple si M est une martingale, la contribution des sommes du type :

$$\sum f_n^{(3)}(i,j)\, M(\Delta_i,j)^2\, M(i,\Delta_j)$$

tendant dans L^2 vers la 1-martingale propre :

$$\mathcal{P}^1_{st} = \int_{R_{st}} f^{(3)}(x,y) < M >^{(1)} (dx,y)\, M(x,dy)$$

requiert la condition :

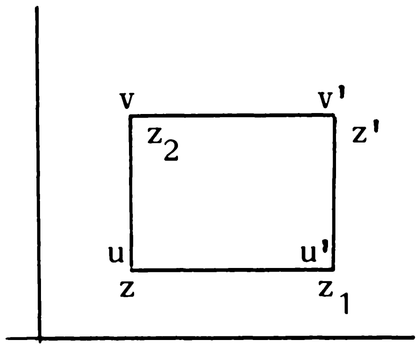
$$E \int_{R_n^2} (f^{(3)}(x,y))^2 \, L_1^4(y \; ; \; x,v) \, L_2^2(x \; ; \; u,y) \, du \, dv \, dx \, dy \; < \; \infty$$

ce qui, en puissance, est une condition L^6 sur M. La partie $\mathcal{P}^1_{st}$ de la décomposition de $\Delta_{st} f(M)$ sera dans L^2 sous cette condition.

§ 2 - Une formule de Taylor pour accroissements rectangulaires.

Soit f une fonction réelle de la variable réelle x, pour laquelle $f^{(4)}$ existe et est continue. Soient v, v', u, u' 4 valeurs de la variable. Intéressons nous à l'accroissement

$$\Delta f = f(v') - f(v) - [f(u')-f(u)].$$



Cet intérêt est justifié par le fait que si $X(z)$ est une fonction définie sur $\mathbf{R}^2$, l'accroissement rectangulaire de $f \circ X$ sur $]z,z']$ s'écrit

$$f \circ X(]z,z']) = f(X(z')) - f(X(z_2)) - [f(X(z_1)) - f(X(z))] = \Delta\, f \circ X$$

si

$$v' = X(z') \qquad v = X(z_1) \qquad u' = X(z_1) \qquad u = X(z).$$

Nous allons déduire de la formule de Taylor (pour les fonctions d'une variable) la formule de Taylor dont nous aurons besoin pour Δf ; formule qui n'a rien à voir avec la formule de Taylor classique donnant l'accroissement sur $]z,z']$ de la fonction de deux variables $g(x,y) = f(X(x,y))$ (X n'est d'ailleurs même pas supposée continue dans la formule proposée).

Plus généralement, si $f : R^n \to R$ est une fonction 4 fois continument différentiable, on s'intéressera à l'accroissement rectangulaire de la fonction :

$$F(s,t) = f(X_1(s,t), \ldots, X_n(s,t))$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont n fonctions de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$,

$$\Delta F = F(z') - F(z_2) - F(z_1) + F(z).$$

Cet accroissement ΔF sera donné par une formule de Taylor faisant intervenir les différentes variations (α, β, γ) de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $\alpha + \beta + \gamma \leq 4$ (en excluant toutefois $(0, \beta, 0)$ et $(0, 0, \beta)$ avec $\beta = 1, 2, 3$).

Nous démontrerons cette formule par récurrence sur n.

Si $z = (s,t) \leq z' = (s',t')$ sont fixés, on notera :

$$\Delta_{st} =]z, z']$$

$$X(\Delta_s, t) = X(s',t) - X(s,t)$$

$$X(s, \Delta_t) = X(s,t') - X(s,t).$$

2-1. <u>Cas $n = 1$</u> : <u>Formule de Taylor pour l'accroissement rectangulaire de</u> $f(X_{st})$.

On notera dans ce sous-paragraphe ((s,t), (s',t') étant fixés)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = X(\Delta_{st})^{\alpha} X(\Delta_s, t)^{\beta} X(s, \Delta_t)^{\gamma}.$$

On a alors le résultat suivant :

<u>Théorème 2-1</u>. <u>Formule de Taylor pour l'accroissement rectangulaire de</u> $f(X_{st})$.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction à dérivée $4^{\text{ème}}$ continue, X une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. Alors :

$$\Delta F = \Delta f(X) = f(X_{s't'}) - f(X_{st'}) - f(X_{s't}) + f(X_{st}) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

avec :

$$T_1 = f'(X_{st})\,(1,0,0)$$

$$T_2 = f''(X_{st})\,[(0,1,1) + (1,1,0) + (1,0,1) + \tfrac{1}{2}(2,0,0)]$$

$$T_3 = \tfrac{1}{2} f^{(3)}(X_{st})\,[(0,1,2) + (0,2,1) + (1,2,0) + (1,0,2) + (2,1,0) + (2,0,1) + 2(1,1,1) + \tfrac{1}{3}(3,0,0)]$$

$$\begin{aligned} T_4 \equiv f^{(4)}(P)\,[&\tfrac{1}{4}((2,2,0) + (2,0,2) + (0,2,2)) + \tfrac{1}{2}((2,1,1) + (1,2,1) + (1,1,2)) \\ &+ \tfrac{1}{6}((1,0,3) + (1,3,0) + (3,1,0) + (3,0,1) + (0,1,3) + (0,3,1)) + \tfrac{1}{24}(4,0,0)] \\ &+ \tfrac{1}{24}\,[f^{(4)}(P') - f^{(4)}(P'')]\,(0,4,0) \end{aligned}$$

où l'on a adopté la convention suivante ($T_4 \equiv$) pour le produit $f^{(4)}(P).(\alpha, \beta, \gamma)$: P est un point <u>dépendant</u> de la variation (α, β, γ), P étant le convexifié de l'image de Δ_{st} par X, P' et P'' sont également dans ce convexifié. En particulier, si X est continue, pour chaque P, il existe $\xi \in \Delta_{st}$ tel que $P = X(\xi)$.

Démonstration :

Il apparaît une petite dissymétrie dans cette formule au niveau du dernier terme ; on rompt en effet la symétrie en regroupant dans ΔF les deux premiers termes d'une part, les deux derniers d'autre part :

$$\Delta F = [F(z') - F(z_2)] - [F(z_1) - F(z)].$$

Développons chaque différence entre crochets par la formule de Taylor ordinaire :

$$\begin{aligned} f(X_{s't'}) - f(X_{st'}) &= f'(X_{st'})[X(\Delta_{st}) + X(\Delta_s,t)] + \tfrac{1}{2} f''(X_{st'})[X(\Delta_{st})+X(\Delta_s,t)]^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6} f^{(3)}(X_{st'})[X(\Delta_{st})+X(\Delta_s,t)]^3 + \tfrac{1}{24} f^{(4)}(P)[X(\Delta_{st})+X(\Delta_s,t)]^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X_{s',t}') - f(X_s,t) &= f'(X_{st})X(\Delta_s,t) + \tfrac{1}{2} f''(X_{st})X(\Delta_s,t)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6} f^{(3)}(X_{st})X(\Delta_s,t)^3 + \tfrac{1}{24} f^{(4)}(P')X(\Delta_s,t)^4. \end{aligned}$$

Il faut alors rapporter les dérivées f', f'', $f^{(3)}$ apparaissant dans le développement de la première différence à leurs valeurs en (s,t)

$$f'(X_{st'}) = f'(X_{st}) + f''(X_{st})X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{2} f^{(3)}(X_{st})X(s,\Delta_t)^2 + \tfrac{1}{6} f^{(4)}(P)\, X(s,\Delta_t)^3$$

$$f''(X_{st'}) = f''(X_{st}) + f^{(3)}(X_{st})\, X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{2} f^{(4)}(P)\, X(s,\Delta_t)$$

$$f^{(3)}(X_{st'}) = f^{(3)}(X_{st}) + f^{(4)}(P)\, X(s,\Delta_t).$$

Abrégeant $f^{(k)}(X_{st})$ en $f^{(k)}$, il apparaît dans la différence, d'une part (termes en $f^{(k)}(X_{st})$)

$$\begin{aligned} &[f' + f''.X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{2} f^{(3)}.X(s,\Delta_t)^2][X(\Delta_s,t)+X(\Delta_{st})] - f'.X(\Delta_s,t) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}[f'' + f^{(3)}.X(s,\Delta_t)][X(\Delta_s,t)^2 + 2X(\Delta_s,t)X(\Delta_{st}) + X(\Delta_{st})^2] - \tfrac{1}{2} f''.X(\Delta_s,t)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6} f^{(3)}[X(\Delta_s,t)^3 + 3X(\Delta_s,t)^2 X(\Delta_{st}) + 3X(\Delta_s,t)X(\Delta_{st})^2 + X(\Delta_{st})^3] - \tfrac{1}{6} f^{(3)} X(\Delta_s,t)^3 \end{aligned}$$

qui vaut $T_1 + T_2 + T_3$

d'autre part (termes en P'')

$$f^4(P)\Big[\tfrac{1}{6} X(\Delta_{st}) X(s,\Delta_t)^3 + \tfrac{1}{6}X(\Delta_s,t)X(s,\Delta_t)^3 + \tfrac{1}{4}X(\Delta_{st})^2X(s,\Delta_t)^2 + \tfrac{1}{2}X(\Delta_{st})X(\Delta_s,t)X(s,\Delta_t)^2$$
$$+ \tfrac{1}{4}X(\Delta_s,t)^2X(s,\Delta_t)^2 + \tfrac{1}{6}X(\Delta_{st})^3X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{2}X(\Delta_{st})^2X(\Delta_s,t)X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{2}X(\Delta_{st})X(\Delta_s,t)^2X(s,\Delta_t)$$
$$+ \tfrac{1}{6}X(\Delta_s,t)^3X(s,\Delta_t) + \tfrac{1}{24}X(\Delta_{st})^4 + \tfrac{1}{6}X(\Delta_{st})^3X(\Delta_s,t) + \tfrac{1}{4}X(\Delta_{st})^2X(\Delta_s,t)^2 + \tfrac{1}{6}X(\Delta_{st})X(\Delta_s,t)^3\Big]$$
$$+ \tfrac{1}{24}\,[f^{(4)}(P) - f^{(4)}(P')]\, X(\Delta_s,t)^4 .$$

Donnons une autre formule de Taylor relative à l'accroissement rectangulaire

$$\Delta f = f(v') - f(v) - f(u') + f(u)$$

d'une fonction $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^4. Nous n'utiliserons pas cette formule par la suite, mais il convient de la lier à la précédente (remplacer v' par $X(z')$, v par $X(z_2)$, u' par $X(z_1)$, u par $X(z)$.

Théorème 2-2. Si f est de classe C^4, alors

$$\Delta f = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \text{, avec :}$$
$$T_1 = f'(u)(v' - v - u' + u)$$
$$T_2 = f''(u)\left[(v'-v)(u'-u) + \tfrac{1}{2}(v'-v'-u'+u)(v'-v+u'-u)\right]$$
$$T_3 = \tfrac{1}{2} f^{(3)}(u)\left[(v'-v)^2(v-u) + (v'-v)(v-u)^2\right]$$
$$T_4 \equiv f^{(4)}(P)\Big[\tfrac{1}{4}(v'-v)^2(v-u)^2 + \tfrac{1}{6}(v'-v)(v-u)^3 + \tfrac{1}{6}((v'-v)^3-(u'-u)^3)$$
$$+ \tfrac{1}{6}(v'-v)^3(v-u)^3 + \tfrac{1}{24}(v'-v)^4 + \tfrac{1}{24}(u'-u)^4\Big]$$

(avec la même convention que dans le théorème 2-1 sur un produit $f^{(4)}(P) \times$ une variation), P tendant vers u si v', v, u' tendent vers u.

Démonstration :

Ecrivons la formule de Taylor à l'ordre 4 sur les segments $[v,v']$ et $[u,u']$

$$f(v') - f(v) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!}(v'-v)^k f^{(k)}(v) + \frac{1}{24}(v'-v)^4\left[f^{(4)}(v+\theta_1(v'-v)) - f^{(4)}(v)\right]$$

$$f(u') - f(u) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!}(u'-u)^k f^{(k)}(u) + \frac{1}{24}(u'-u)^4\left[f^{(4)}(u+\theta_2(u'-u)) - f^{(4)}(u)\right]$$

où $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

Soustrayant terme à terme les 2 formules ci-dessus, nous obtenons :

1

1^{er} terme.

$$(v'-v)f'(v)-(u'-u)f'(u) = (v'-v-u'+u)f'(u)+(v'-v)[f'(v)-f'(u)]$$
$$=(v'-v-u'+u)f'(u)+(v'-v)(v-u)f''(u)+\frac{1}{2}(v'-v)(v-u)^2f^{(3)}(u)$$
$$+\frac{1}{6}(v'-v)(v-u)^3\,f^{(4)}(u+\theta_3(v-u)).$$

$2^{\text{ème}}$ terme.

$$\frac{1}{2}(v'-v)^2f''(v)-\frac{1}{2}(u'-u)^2f''(u)=\frac{1}{2}[(v'-v)^2-(u'-u)^2]f''(u)+\frac{1}{2}(v'-v)^2[f''(v)-f''(u)]$$
$$=\frac{1}{2}(v'-v-u'+u)(v'-v+u'-u)f''(u)+\frac{1}{2}(v'-v)^2(v-u)f^{(3)}(u)$$
$$+\frac{1}{4}(v'-v)^2(v-u)^2f^{(4)}(u)+\frac{1}{4}(v'-v)^2(v-u)^2[f^{(4)}(u+\theta_4(v-u))-f^{(4)}(u)].$$

$3^{\text{ème}}$ terme.

$$\frac{1}{6}(v'-v)^3f^{(3)}(v)-\frac{1}{6}(u'-u)^3f^{(3)}(u)=\frac{1}{6}[(v'-v)^3-(u'-u)^3]f^{(3)}(u)+\frac{1}{6}(v'-v)^3(v-u)f^{(4)}(u+\theta_5(v-u)).$$

$4^{\text{ème}}$ terme.

$$\frac{1}{24}(v'-v)^4f^{(4)}(v)-\frac{1}{24}(u'-u)^4f^{(4)}(u)=\frac{1}{24}[(v'-v)^4-(u'-u)^4]f^{(4)}(u)+\frac{1}{24}(v'-v)^4[f^{(4)}(v)-f^{(4)}(u)]$$

où θ_3, θ_4 et θ_5 sont compris entre 0 et 1.

On en déduit la formule de Taylor annoncée.

2-2. Formule de Taylor pour un accroissement rectangulaire, cas général.

Soient $X_1,\ldots, X_n$ N fonctions $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et $f(x_1,\ldots, x_n)$ une fonction $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$. On notera

$$F(s,t) = f(X_1(s,t),\ldots, X_N(s,t))$$

et

$$F'_k(s,t) = f'_{x_k}(X_1(s,t),\ldots, X_N(s,t))$$

(et de même pour les dérivées d'ordre supérieur).

Si $(s,t) << (s',t')$, nous allons établir une formule de Taylor donnant une décomposition de

$$\Delta F = F(\Delta_{st}) = F(s',t') - F(s',t) - F(s,t') + F(s,t).$$

On notera

$$P_{st} = (X_1(s,t),\ldots, X_N(s,t)$$

$$P = (X_1(\xi_1), \ldots, X_N(\xi_N))$$

où $\xi_i \in \Delta_{st}$ pour $i = 1,N$.

On notera par ailleurs

$$(1,0,0)_k \qquad \text{pour} \qquad X_k(\Delta_{st})$$

$(\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell}$, où $\alpha+\beta+\gamma = 2$ pour la variation d'ordre 2 associée à X_k et X_ℓ, épuisant les exposants α, β, γ dans cet ordre.

$(\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell m}$ où $\alpha+\beta+\gamma = 3$ pour la variation associée à X_k, X_ℓ, X_m, dans l'ordre.

$(\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell m}$ où $\alpha+\beta+\gamma = 4$ pour la variation associée à X_k, X_ℓ, X_m, X_n dans l'ordre.

(α,β,γ) désignera donc le produit de α termes $X_{\cdot}(\Delta_{st})$ par β termes $X_{\cdot}(\Delta_s,t)$ par γ termes $X_{\cdot}(s,\Delta_t)$ et l'on mettra en indice $(\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell\ldots}$ les indices des X_k intervenant, dans l'ordre indiqué.

On pourra mettre de tels indices en commun pour plusieurs sommes

$$[(\alpha,\beta,\gamma)+(\alpha',\beta',\gamma')]_{k\ell} = (\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell} + (\alpha',\beta',\gamma')_{k\ell}.$$

Enfin, pour le "reste" T_4, on adopte la même convention que précédemment : dans la somme

$$T = \sum_{\alpha\beta\gamma} f^{(4)}_{k\ell mn}(P).(\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell mn}$$

bien que P dépende de la variation considérée, on se permettra de le noter en facteur

$$T \equiv f^{(4)}_{k\ell mn} \sum_{\alpha\beta\gamma} (\alpha,\beta,\gamma)_{k\ell mn}.$$

On a alors la formule de Taylor.

Théorème 2-3.

Si $f(x_1,\ldots,x_N)$ est une fonction quatre fois continument dérivable de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$, si $X_1,\ldots,X_N$ sont N fonctions continues de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$

$$\Delta F = F(s',t') - F(s',t) - F(s,t') + F(s,t)$$

s'écrit encore :

$$\Delta F = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$$

avec (les sommations étant prises de 1 à N) :

$$T_1 = \sum_k F'_k(s,t)\,(1,0,0)_k$$

$$T_2 = \sum_{k\ell} F''_{k\ell}(s,t)\left[(0,1,1)+(1,1,0)+(1,0,1)+\tfrac{1}{2}(2,0,0)\right]_{k\ell}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum_{k\ell m} F^{(3)}_{k\ell m}(s,t)\,\left[2(1,1,1)+(0,1,2)+(0,2,1)+(1,2,0)+(1,0,2)\right.$$
$$\left.+(2,1,0)+(2,0,1)+\tfrac{1}{3}(3,0,0)\right]_{k\ell m}$$

$$T_4 \equiv \sum_{k\ell mn} F^{(4)}_{k\ell mn}(s,t)\left[\tfrac{1}{4}\left[(0,2,2)+(2,0,2)+(2,2,0)\right]+\tfrac{1}{2}\left[(2,1,1)+(1,2,1)+(1,1,2)\right]\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{6}\left[(1,0,3)+(1,3,0)+(3,1,0)+(0,1,3)+(3,0,1)+(0,3,1)\right]+\tfrac{1}{24}(4,0,0)\right]_{k\ell mn}$$
$$+\frac{1}{24}\sum_k \left[f^{(4)}_{k^4}(P)-f^{(4)}_{k^4}(P')\right](0,4,0)_k+\frac{1}{24}\sum_{k=2,N}\left[f^{(4)}_{k^4}(\tilde{P})-f^{(4)}(\tilde{P}')\right](0,4,0)_k$$
$$+\frac{1}{24}\sum_{k=2,N}\left[f^{(4)}_{k^4}(P^*)-f^{(4)}_{k^4}(P^{*\prime})\right](0,0,4)_k.$$

<u>Démonstration</u> :

Notons $\overline{X}_{N-1}$ pour $(X_1,\dots,X_{N-1})$ on a, en posant $z_1=(s',t)$ et $z_2=(s,t')$

$$\Delta F = \delta^1+\delta^2+\delta^3+\delta^4$$

avec

$$\delta^1 = f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z))-f(\overline{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))-f(\overline{X}_{N-1}(z_2),X_N(z))+f(\overline{X}_{N-1}(z),X_N(z))$$

$$\delta^2 = f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z_1))-f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z))-f(\overline{X}_{N-1}(z_1),X_N(z_1))+f(\overline{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))$$

$$\delta^3 = f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z_2))-f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z))-f(\overline{X}_{N-1}(z_2),X_N(z_2))+f(\overline{X}_{N-1}(z_2),X_N(z))$$

$$\delta^4 = f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z'))-f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z_1))-f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z_2))+f(\overline{X}_{N-1}(z'),X_N(z)).$$

<u>Etude de δ^1</u>.

Dans δ^1, X_N est fixée à la valeur $X_N(z)$ δ_1 correspond donc très exactement à l'accroissement rectangulaire de f relativement aux N-1 fonctions $X_1,\dots,X_N$. On pourra donc utiliser l'hypothèse de récurrence. Donc δ^1 se décompose selon la formule de Taylor à l'ordre N-1. On retrouve alors exactement les termes de la formule de Taylor proposée dans le théorème, les indices, k, ℓ, m, n variant de 1 à N-1.

<u>Etude de δ^2 et δ^3</u>.

δ^2 et δ^3 jouent des rôles symétriques. Traitons pas exemple δ^2.

δ^2 est une différence de différences. Développons chacune d'elle par la formule de Taylor ordinaire.

$$f(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z_1))-f(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z))=f'_N(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z)).X_N(\Delta_s,t)$$
$$+\frac{1}{2}f''_{N^2}(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z)).X_N(\Delta_s,t)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}_{N^3}(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z)).X_N(\Delta_s,t)^3$$
$$+\frac{1}{24}f^{(4)}_{N^4}(P).X_N(\Delta_s,t)^4.$$

Traitant de façon analogue $f(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z_1))-f(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))$ on a

$$\delta^2 = [f'_N(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z)) - f'_N(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))].X_N(\Delta_s,t)$$
$$+\frac{1}{2}[f''_{N^2}(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z)) - f''_{N^2}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))].\ X_N(\Delta_s,t)^2$$
$$+\frac{1}{6}[f^{(3)}_{N^3}(\bar{X}_{N-1}(z'),\ X_N(z)) - f^{(3)}_{N^3}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))].\ X_N(\Delta_s,t)^3$$
$$+\frac{1}{24}[f^{(4)}_{N^4}(P) - f^{(4)}_{N^4}(P')].X_N(\Delta_s,t)^4.$$

Le dernier terme de cette décomposition est la variation (0,4,0) de X_N annoncée dans le théorème.

Redéveloppons alors les trois crochets pour ramener en $X(s,t)$ les dérivées $1^{\text{ères}}$, $2^{\text{èmes}}$ et $3^{\text{èmes}}$. Les sommations ci-dessous sont faites de 1 à N-1.

<u>$1^{\text{ère}}$ ligne</u>: $[f'_N(\ldots.) - f'_N(\ldots.)]\ X_N(\Delta_s,t)$

$$f'_N(\bar{X}_{N-1}(z'),X_N(z))-f'_N(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z)) = \sum_k f''_{kN}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))X_k(s',\Delta_t)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(3)}_{k\ell N}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z)X_k(s',\Delta_t)X_\ell(s',\Delta_t)$$
$$+\frac{1}{6}\sum_{k\ell m} f^{(4)}_{k\ell mN}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))\ X_k(s',\Delta_t)\ X_\ell(s',\Delta_t)\ X_m(s',\Delta_t)$$

où, en outre

$$f''_{kN}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z))=f''_{kN}(P_{st})+\sum_\ell f^{(3)}_{k\ell N}(P_{st})X_\ell(\Delta_s,t)+\frac{1}{2}\sum_{\ell m} f^{(4)}_{k\ell mN}(P)X_\ell(\Delta_s,t)\ X_m(\Delta_s,t)$$

et

$$f^{(3)}_{k\ell N}(\bar{X}_{N-1}(z_1),X_N(z)) = f^{(3)}_{k\ell N}(P_{st}) +\sum_m f^{(4)}_{k\ell mN}(P)\ X_m(\Delta_s,t).$$

La partie de la $1^{\text{ère}}$ ligne correspondant aux variations d'ordre au plus 3 est alors donnée par

$$\sum_k f''_{kN}(P_{st})\ [X_k(\Delta_{st})+X_k(s,\Delta_t)]\ X_N(\Delta_s,t)$$

$$+\sum_{k\ell} f^{(3)}_{k\ell N}(P_{st})X_\ell(\Delta_s,t)\ [X_k(\Delta_{st})+X_k(s,\Delta_t)]\ X_N(\Delta_s,t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(3)}_{k\ell N}(P_{st})\ [X_k(\Delta_{st})+X_k(s,\Delta_t)][X_\ell(\Delta_{st})+X_\ell(s,\Delta_t)]\ X_N(\Delta_s,t).$$

On constate que cette somme donnera très exactement toutes les variations d'ordre 2 et 3 annoncées dans le théorème, pour lesquelles X_N intervient uniquement par $X_N(\Delta_s,t)$ croisé avec celles en X_k, X_ℓ pour $k,\ \ell = 1, N-1$.

Analysant de la même façon la deuxième ligne de δ^2, on obtiendra toutes les variations d'ordre 3 faisant intervenir $X_N(\Delta_s,t)^2$ croisé avec les variations de X_k, $k = 1, N-1$.

Variations d'ordre 4.

Examinant dans δ^2 toutes les variations d'ordre 4 (provenant des 4 lignes) ; on verra alors apparaître, avec les bonnes pondérations, toutes les variations d'ordre 4, faisant intervenir $X_N(\Delta_s,t)$, à la puissance 1, 2 ou 3, croisé avec les autres types d'accroissements de X_k, X_ℓ, X_m pour $k,\ell,m = 1, N-1$.

Reste en plus, le terme $\frac{1}{24}\,[f^{(4)}_{N^4}(P) - f^{(4)}_{N^4}(P')]\ X_N(\Delta_s,t)^4$.

La quantité δ^3 se traitera de façon symétrique. Elle fera apparaître toutes les variations croisées de $X_N(s,\Delta_t)$, $X_N(s,\Delta_t)^2$, $X_N(s,\Delta_t)^3$ avec l'ensemble des variations de X_k, X_ℓ, X_m $(k,\ell,m = 1, N-1)$, et ceci avec les bonnes pondérations. Reste en supplément une quantité :

$$\frac{1}{24}\,(f^{(4)}_{N^4}(P^*) - f^{(4)}_{N^4}(P^{*\prime}))\ X_N(s,\Delta_t)^4.$$

Etude de δ^4.

Si on pose $g(X_N(z)) = f(\overline{X}_{N-1}(z')\ ;\ X_N(z))$, on constate que δ^4 est très exactement l'accroissement rectangulaire de g sur Δ_{st}. On utilisera alors la formule de Taylor pour accroissement rectangulaire pour $N = 1$, après quoi, on ramènera par la formule de Taylor ordinaire, toutes les variables de X en (s,t).

On a donc, d'après le théorème 2-1

$$\delta^4 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

avec :

$$G_1 = f'_N(\overline{X}_{N-1}(s',t'),\ X_N(s,t))\ X_N(\Delta_{st})$$

$$G_2 = f''_{N^2}(\overline{X}_{N-1}(s',t'), X_N(s,t))\,[(0,1,1)+(1,1,0)+(1,0,1)+\tfrac{1}{2}(2,0,0)]_{NN}$$

$$G_3 = \frac{1}{2} f^{(3)}_{N^3}(\overline{X}_{N-1}(s',t'), X_N(s,t))\,[(0,1,2)+(0,2,1)+(2,1,0)+(2,0,1)$$
$$+ (1,2,0)+(1,0,2)+2(1,1,1)+\tfrac{1}{3}(3,0,0)]_{NNN}\,.$$

Quant à G_4, c'est exactement la partie de T_4 (hormis les deux différences apparues précédemment dans l'étude de δ^2 et δ^3) qui fait intervenir les variations d'ordre 4 de X_N (avec la pondération $f^{(4)}_{N^4}(P)$) ; en particulier

$$\frac{1}{24}\,[f^{(4)}_{N^4}(P) - f^{(4)}_{N^4}(P')]\ X_N(\Delta_s,t)^4\ .$$

<u>terme</u> G_1.

Ramenons le terme en $X(s',t')$ à $X(s,t)$. Notant $[\ \ ]^{(p)}$ la puissance $p^{\text{ième}}$ formelle du crochet, on a

$$G_1 = f'_N(P_{st})X_N(\Delta_{st}) + \sum_k f''_{kN}(P_{st})[X(\Delta_{st})+X(\Delta_s,t) + X(s,\Delta_t)]_k\, X_N(\Delta_{st})$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(3)}_{k\ell N}(P_{st})[X(\Delta_{st}) + X(\Delta_s,t) + X(s,\Delta_t)]^{(2)}_{k\ell}\ X_N(\Delta_{st})$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{k\ell m} f^{(4)}_{k\ell mN}(P_{st})\,[X(\Delta_{st}) + X(\Delta_s,t) + X(s,\Delta_t)]^{(3)}_{k\ell m}\ X_N(\Delta_{st}).$$

Les 3 premières lignes font apparaître, avec les bonnes pondérations prises en P_{st}, toutes les variations d'ordre 3 de $X_N(\Delta_{st})$ croisées avec toutes les variations de X_k, X_ℓ, $k,\ell = 1,N-1$. La dernière ligne fait apparaître les termes de T_4 faisant intervenir seulement l'accroissement $X_N(\Delta_{st})$.

<u>terme</u> G_2.

Afin d'étudier la contribution de G_2, développons :

$$f''_{N^2}(\bar{X}_{N-1}(s',t'),X_N(s,t)) = f''_{N^2}(P(s,t)) + \sum_k f^{(3)}_{kNN}(P_{st})\,[X_k(\Delta_{st})+X_k(\Delta_s,t)+X_k(s,\Delta_t)]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(4)}_{k\ell NN}(P)\,[X(\Delta_{st})+X(\Delta_s,t)+X(s,\Delta_t)]^{2}_{k\ell}\ .$$

On remarquera alors que G_2 fera apparaître toutes les variations croisées de l'une des variations : $(0,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(2,0,0)$ de X_N avec les autres variations de X_k, X_ℓ, $k, \ell = 1, N-1$.

terme G_3.

$$f^{(3)}_{N^3}(\bar{X}_{N-1}(s',t'),\ X_N(s,t)) = f^{(3)}_{N^3}(P_{st}) + \sum_k f^{(4)}_{kN^3}(P)[X_k(\Delta_{st})+X_k(\Delta_s,t)+X_k(s,\Delta_t)].$$

On constate alors sans difficulté que G_3 fait intervenir tous les croisements : Variations d'ordre 3 de X_N croisées avec une variation quelconque de X_k , $k = 1, N-1$.

On obtient donc le résultat du théorème 2-3.

2-3. Formule de Taylor pour l'accroissement rectangulaire de $f(s,t\,;X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$.

Dans le cas particulier l'un des processus X vaut s, un autre valant t, on se trouve dans la situation particulière d'étudier une formule de Taylor pour accroissement rectangulaire pour :

$$F(s,t) = f(s,t\ ;\ X_1(s,t),\dots,\ X_N(s,t)).$$

On pourrait bien évidemment utiliser le résultat précédent avec : N+2, s et t étant des processus d'un type particulier, $Z_1(s,t) \equiv s$, $Z_2(s,t) \equiv t$. On va voir cependant que dans ce cas, on peut développer une formule de Taylor, en poussant moins loin l'ordre des dérivations relatives à s et à t. C'est cette formule de Taylor qui nous servira dans la démonstration de la formule de Ito générale relative à une telle fonction.

On a alors le théorème suivant

Théorème 2-4.

Soient $X_1,\dots,X_N$ N fonctions continues $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(s,t\,;x_1,\dots,x_N)$ une fonction $\mathbf{R}^{N+2} \to \mathbf{R}$ de dérivées f''_{st}, f''_{s^2}, $f^{(3)}_{sk\ell}$, $f^{(3)}_{tk\ell}$, $f^{(4)}_{k\ell mn}$ $(k,\ell,m,n = 1,N)$, continues. Notant $z = (s,t)$, $z_1 = (s',t)$, $z_2 = (s,t')$, $z' = (s',t')$, $X(z)$ pour

$X_1(z),\dots,X_N(z)$, $F(s,t) = f(z\,;\,X(z))$ on obtient la formule de Taylor

$$\Delta_{st} F = F(z') - F(z_1) - F(z_2) + F(z) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4^*$$

avec

$$T_1 = \sum_k f'_k(s,t)\,(1,0,0)_k$$

$$T_2 = f''_{st}(s,t\,;\,X(z'))\,\Delta s\,\Delta t$$

$$+ \sum_{k\ell} f''_{k\ell}(s,t)\,[(0,1,1,)+(1,1,0)+(1,0,1)+\tfrac{1}{2}(2,0,0)]_{k\ell}$$

$$+ \sum_k f''_{sk}(s,t\,;\,X(z_1))\,\Delta s\,X_k(s',\Delta_t) + f''_{tk}(s,t\,;\,X(z_2))\,\Delta t\,X_k(\Delta_s,t')$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\sum_{k\ell m} f^{(3)}_{k\ell m}(s,t)\,[2(1,1,1)+(0,1,2)+(0,2,1)+(1,2,0)+(1,0,2)$$
$$+ (2,1,0)+(2,0,1)+\tfrac{1}{3}(3,0,0)]_{k\ell m}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(3)}_{sk\ell}(s,t\,;\,Xz_1)\,\Delta s\,X_k(s',\Delta_t)\,X_\ell(s',\Delta_t)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\ell} f^{(3)}_{tk\ell}(s,t\,;\,Xz_2)\,X_k(\Delta_s,t')\,X_\ell(\Delta_s,t')\,\Delta t\ .$$

T_4^* est la somme du terme T_4 donné dans le théorème 2-3 et de T'_4, où

$$T'_4 = \frac{1}{2}[f''_{s^2}(P) - f''_{s^2}(P')]\,\Delta s^2 + \frac{1}{2}\,[f''_{t^2}(\tilde P) - f''_{t^2}(\tilde P')]\,\Delta t^2$$

$$+ [f''_{st}(Q) - f''_{st}(Q')]\,\Delta s\,\Delta t + [f''_{t^2}(R) - f''_{t^2}(R')]\,\Delta t^2$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\ell} [f^{(3)}_{s\,k\ell}(S) - f^{(3)}_{s\,k\ell}(S')]\,\Delta s\,X_k(s',\Delta_t)\,X_\ell(s',\Delta_t)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\ell} [f^{(3)}_{t\,k\ell}(\tilde S) - f^{(3)}_{t\,k\ell}(\tilde S')]\,\Delta t\,\,X_k(\Delta_s,t')\,X_\ell(\Delta_s,t')$$

(les points P, P', $\tilde P$, $\tilde P' \dots$, $\tilde S, \tilde S'$ étant des points du type $(s,t\,;\,X_1(\xi_1),\dots,X_N(\xi_N))$ où $\xi_i \in \Delta_{st}$, $i = 1, N$).

<u>Démonstration</u> :

Notant encore

$$F(s,t) = f(s,t\,;\,X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$$

$$z = (s,t),\quad z_1 = (s',t),\quad z_2 = (s,t'),\quad z' = (s',t')$$

$$X(z) = X_1(z),\dots,X_N(z).$$

On a $$\Delta F = \delta^1,\ \delta^2,\ \delta^3,\ \delta^4$$

où

$$\delta^1 = f(z\ ;\ X(z')) - f(z\ ;\ X(z_1)) - f(z\ ;\ X(z_2)) + f(z\ ;\ X(z))$$

$$\delta^2 = f(z_1\ ; X(z')) - f(z\ ; X(z')) - f(z_1\ ; X(z_1)) + f(z\ ;\ X(z_1))$$

$$\delta^3 = f(z_2\ ; X(z')) - f(z\ ;\ X(z')) - f(z_2\ ; X(z_2)) + f(z\ ;\ X(z_2))$$

$$\delta^4 = f(z'\ ; X(z')) - f(z_1\ ;\ X(z')) - f(z_2\ ; X(z')) - f(z\ ;\ X(z')).$$

<u>Remarque</u> : à l'ordre d'écriture près, cette décomposition est à rapprocher de celle faite dans la démonstration du théorème 2-3.

<u>terme δ^1</u>. δ^1 ne faisant pas intervenir de dérivées en s et t, il n'y a rien de plus à dire sur δ^1 que ce qui a été dit au théorème 2-3.

<u>terme δ^2</u> (et symétriquement δ^3).

$$\delta^2 = f'_s(z\ ; X(z'))\ \Delta_s + \frac{1}{2} f''_{s^2}(P)\ \Delta_s^2 - [f'_s(z\ ;\ X(z_1))\ \Delta_s + \frac{1}{2}\ f''_{s^2}\ (P)\ \Delta_s^2\ ].$$

La différence des termes en f''_{s^2} figurant dans T'_4, examinons

$$[f'_s(z\ ;\ X(z')) - f'_s(z\ ; X(z_1))\,]\,\Delta_s = \sum_k f''_{sk}(z\ ;\ X(z_1))\ \Delta_s\ X_k(s', \Delta_t)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} f^{(3)}_{sk\ell}\ (z\ ;\ X(z_1))\ \Delta_s\ X_k(s', \Delta_t)\ X_\ell(s', \Delta_t)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} [\,f^{(3)}_{sk\ell}\,(P) - f^{(3)}_{sk\ell}\,(P')\,]\,\Delta_s\ X_k(s', \Delta_t)\ X_\ell(s', \Delta_t).$$

Il apparaît ainsi exactement les variations en Δs, croisées avec X_k, X_ℓ, annoncées dans le théorème. L'étude de δ^3 fera apparaître les variations symétriques les dérivées apparaissant étant en f''_{t^2}, $f''_{t,k}$, $f^{(3)}_{t,k\ell}$.

<u>Etude de δ^4</u>.

Laissons X fixé à sa valeur $X(z')$. Posons alors :

$$g(s,t) = f(s,t\ ;\ X(z')),$$

on a

$$\delta^4 = [g'_t(s',t) - g'_t(s,t)\,]\,\Delta t + [g'_t(s', t+\theta_1\,\Delta_t) - g'_t(s',t)\,]\,\Delta t - [g'_t(s, t+\theta_2\,\Delta_t) - g'_t(s,t)\,]\ \Delta t$$

$$= g''_{st}(s,t)\,\Delta s.\Delta t + [g''_{st}(s+\theta_3\,\Delta_s, t) - g''_{st}(s,t)\,]\,\Delta s\ \Delta t + [g''_{t^2}(s', t+\theta_4\,\Delta_t) - g''_{t^2}(s, t+\theta_5\,\Delta_t)\,]\,\Delta t^2$$

$(0 \leq \theta_i \leq 1,\ i = 1,5)$.

Il suffit alors de remarquer $g'_t = f'_t \dots$ et que les dérivées secondes sont prises en des points P. On obtient le théorème 2-4.

§ 3 - La formule de Ito pour $f(M_z)$ où M_z est une martingale.

Théorème 3-1.

Soit f une fonction réelle de la variable réelle, à dérivée $4^{\text{ème}}$ continue.

Soit $M = \theta.W + \psi.WW$ une martingale de L^6, admettant L_1, L_2 comme 1-dérivée, 2-dérivée. Si les intégrales suivantes sont d'espérances finies :

$$\int_{R_{11}} (f'(M_z)^2 + |f''(M_z)|) < M > (dz)$$

$$\int_{R_{11}} (f''(M_z)^2 + |f^{(4)}(M_z)|) < J_M > (dz)$$

$$\int_{R_{11}^2} f''(M_{xy})^2 \psi^2(u,y\,;x,v) L_2^2(u,y\,;x)\, du\, dy\, dx\, dv \quad \text{(et la symétrique)}$$

$$\int_{R_{11}^2} f^{(3)}(M_{xy})^2 L_1^4(y\,;x,v)\, L_2^2(u,y\,;x)\, du\, dy\, dx\, dv \quad \text{(et la symétrique)}$$

$$\int_{R_{11}} |f^{(3)}(M_z)|\, |< M,J_M >|(dz).$$

On a alors l'égalité entre processus sur R_{11}

$$\Delta_{st} f(M) = f(M_{st})-f(M_{s,o}) - f(M_{o,t}) + f(M_{oo}) = \mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}_{st}^1 + \mathcal{P}_{st}^2 + \mathcal{B}_{st}$$

. où $\mathcal{M}_{st}$ est la martingale

$$\mathcal{M}_{st} = \int_{R_{st}} f'(M_{xy})\, M(dx,dy) + \int_{R_{st}} f''(M_{xy})\, J_M(dx,dy)$$

.. $\mathcal{P}_{st}^1$ la 1-martingale propre :

$$\mathcal{P}_{st}^1 = \int_{R_{st}} f''(M_{xy}) < M(dx,.), M(x,.) >^{(2)} (dy) + \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f^{(3)}(M_{xy}) M(dx,y) < M >^{(2)}(x,dy).$$

... $\mathcal{P}_{st}^2$ la 2-martingale propre représentable admettant la décomposition symétrique.

.... $\mathcal{B}_{st}$ le processus à variation bornée

$$\mathcal{B}_{st} = \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f''(M_{xy}) < M > (dx,dy) + \int_{R_{st}} f^{(3)}(M_{xy}) < M, J_M > (dx,dy)$$

$$= \frac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{(4)}(M_{xy}) < J_M > (dx,dy).$$

Démonstration :

Soit π une partition équirégulière de R_{11}, c'est-à-dire que $\pi = (\Delta_{ij})_{ij}$ avec $|\Delta_i| = |\Delta_j|$ pour tout i, j. On a alors :

$$\Delta_{st} f(M) = \sum_{i,j} f \circ M(\Delta_{ij})_{st} .$$

Utilisons alors la formule de Taylor donnée dans le théorème 2-1 :

$$f \circ M(\Delta_{ij})_{st} = (P_{ij})_{st} + (R_{ij})_{st}$$

où,en notant $f^{(k)}(i,j)$ pour $f^{(k)}(M_{s_i,t_i})$:

$$P_{ij} = f'(i,j)\,M(\Delta_{ij}) + f''(i,j)\left[M(\Delta_i,j)\,M(i,\Delta_j) + M(\Delta_{ij})(M(\Delta_i,j) + M(i,\Delta_j)) + \frac{1}{2}M(\Delta_{ij})^2\right]$$

$$+ f^{(3)}(i,j)\left[M(\Delta_{ij})M(\Delta_i,j)M(i,\Delta_j) + \frac{1}{2}M(\Delta_i,j)M(i,\Delta_j)^2 + \frac{1}{2}M(\Delta_i,j)^2 M(i,\Delta_j)\right]$$

$$+ \frac{1}{4} f^{(4)}(i,j)\,M(\Delta_i,j)^2\,M(i,\Delta_j)^2.$$

. $(P_{ij})_{st}$ se déduisant de P_{ij} par troncage de tous les accroissements de M sur R_{st}.

. $(R_{ij})_{st}$ étant donnée par la partie complémentaire on remarquera que $(R_{ij})_{st}$ fait intervenir très exactement toutes les variations, d'ordre 3 ou 4, non contribuantes, alors que $(P_{ij})_{st}$ fait intervenir les variations contribuantes de M.

Ramenons nous, au cas où $f^{(k)}(M_z)$, $k = 1,2,3,4$, $z \in R_{11}$ est bornée.

M est une martingale de L^2. Donc $\sup_{z\in R_{11}} |M_z|$, est bornée en probabilité.

$f^{(k)}$ étant continue, il en est de même de $\sup_{z\in[0,1]^2} \sup_{k=0,1,2,3,4} |f^{(k)}(M_z)|$.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_o > 0$ et un ensemble Ω_{N_o} de probabilité ıs grande que $1-\varepsilon$ telle que :

$$\forall\ \omega \in \Omega_{N_o} \qquad |f^{(k)}(M_z)| \le N_o,\ z \in R_{11},\ k = 0,1,2,3,4.$$

Examen de la partie principale.

Formons la différence :

$$\mathcal{D}_\pi(s,t) = \sum_\pi (P_{ij})_{st} - (\mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st} + \mathcal{Q}_{st}).$$

On a, pour tout $\alpha > 0$

$$P(\sup_{st} |\mathcal{D}_\pi(s,t)| \geq \alpha) = P(\sup_{st} |\mathcal{D}_\pi(s,t)| \geq \alpha \text{ et } \omega \in \Omega_{N_o})$$

$$+ P(\sup |\mathcal{D}_\pi(s,t)| \geq \alpha \quad \text{et} \quad \omega \notin \Omega_{N_o})$$

$$\leq P(\Omega^c_{N_o}) + P(\sup_{st} |\mathcal{D}_\pi(s,t)| \geq \alpha / \omega \in \Omega_{N_o}) \, P(\Omega_{N_o})$$

$$\leq \epsilon + (1-\epsilon) \, P(\sup_{st} |\mathcal{D}_\pi(s,t)| \geq \alpha / \sup_k \sup_z |f^{(k)}(M_z)| \leq N_o).$$

On va alors utiliser les résultats du chapitre IV § 3-4-5 sur les convergences, dans L^1 ou L^2, donc en probabilité, des variations pondérées $(1,0,0)$, $(0,1,1)$, $(2,0,0)$ $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$ et $(0,2,2)$, dans le cas d'une pondération bornée f, et du lemme suivant (cf. Ch. III, densités des fonctions simples adaptées dans certains espaces $\mathcal{M}^2$).

Lemme 3-1.

Si $M(s,t)$ est une s.m.r. et $f(\omega,\mathcal{m})$ une fonction $(\Omega \times \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ mesurable bornée, continue en $\mathcal{m}$, telle que $f(\omega, M(s,t))$ soit adaptée et de semi-norme $\|f\|_{M^{2n}}$ finie, si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition, z_{ij} le point inférieur de Δ_{ij}, alors le processus π-simple f_π valant $f(M(z_{ij}))$ sur Δ_{ij} tend vers f au sens de cette semi-norme.

$\|f\|_{M^{2n}}$ est définie au chapitre III ; dans le cas considéré ici, elle vaut

$$\|f\|_{M^{2n}} = E \int_{R_{11}} |f|(z) \, \theta^{2n}(z) dz + E \int_{R^2_{11}} |f(x,y)| \, \psi^{2n}(u,y\,;\,x,v) du\, dy\, dx\, dv.$$

On en déduit alors que, pour $|\pi|$ suffisamment petit

$$P(\sup_{st} (\mathcal{D}_\pi(s,t)| \leq 2\epsilon$$

et donc :

$$\sum_{\pi} (P_{ij})_{st} \xrightarrow{P} \mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st} + \mathcal{B}_{st}$$

uniformément en (s,t).

Examen du reste.

Pour les mêmes raisons que celles exposées précédemment, nous pouvons nous ramener au cas où $f^{(k)}(M_z)$ est bornée en $z \in R_{11}$, $k = 0,1,2,3,4$.

Examinons alors le reste $R_{st} = \sum_{\pi} (R_{ij})_{st}$. Plusieurs types de termes apparaissent.

1^er^ type : Variations non contribuantes d'ordre 3.

Il s'agit des variations $(1,2,0)$, $(1,0,2)$, $(2,1,0)$, $(2,0,1)$ et $(3,0,0)$, c.à.d. pour ces valeurs de (α,β,γ) des sommes :

$$\sum_{\pi} f^{(3)}(i,j)\, M(\Delta_{ij})^{\alpha}_{st}\, M(\Delta_i,j)^{\beta}_{s}\, M(i,\Delta_j)^{\gamma}_{t} .$$

Puisque $f^{(3)}$ est adaptée, bornée, il résulte des théorèmes 6-1 et 7-1 du chapitre IV que toutes ces sommes tendent dans L^1 vers 0 avec $|\pi|$.

2^ème^ type : Variations d'ordre 4 non contribuantes, en module, dans L^1
(cf. théorème 7-1, Chapitre IV).

Il s'agit des variations $(2,0,2)$, $(2,2,0)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(1,0,3)$, $(1,3,0)$, $(3,1,0)$, $(3,0,1)$, $(4,0,0)$ c'est-à-dire pour ces valeurs de (α,β,γ), des sommes :

$$\sum_{\pi} f^{(4)}(M_{\xi_{ij}(s,t)})\, M(\Delta_{ij})^{\alpha}_{st}\, M(\Delta_i,j)^{\beta}_{s}\, M(i,\Delta_j)^{\gamma}_{t}$$

pour un point $\xi_{ij}(s,t)$ de $(\Delta_{ij})_{st}$. Puisque $f^{(4)}$ est bornée, on en déduit immédiatement la convergence vers 0 en probabilité de chacune de ces sommes.

3^ème^ type : Autres variations d'ordre 4 non contribuantes ; il s'agit des variations $(0,1,3)$, $(0,3,1)$. Par exemple, pour la première, il s'agit de la somme :

$$S = \sum_{\pi} f^{(4)}(M_{\xi_{ij}(s,t)})\, M(\Delta_i,j)_s\, M(i,\Delta_j)_t .$$

Cette somme se décompose alors en $S_1 + S_2$ avec :

$$\cdot \qquad S_1 = \sum_{\pi} f^{(4)}(i,j)\, M(\Delta_i, j)_s\, M(i, \Delta_j)_t$$

qui converge dans L^1 vers 0 (Théorème 6-2, Chapitre IV) dès que f est bornée, continue et que $|\pi|$ tend vers 0.

$$\cdot \qquad S_2 = \sum_{\pi} [f^{(4)}(i,j) - f^{(4)}(M_{\xi_{ij}(s,t)})]\, M(\Delta_i, j)_s\, M(i, \Delta_j)_t^3 \,.$$

Montrons alors que S_2 tend en probabilité vers 0 avec $|\pi|$, uniformément en (s,t).

$$S_2 = \sum_{\pi} \alpha_{i,j}(s,t)\, \beta_{i,j}(s,t)$$

avec $\begin{cases} \alpha_{i,j}(s,t) = f^{(4)}(i,j) - f^{(4)}(M_{\xi_{ij}(s,t)}) \\ \xi_{ij}(s,t) \in (\Delta_{ij})_{st} \,. \end{cases}$

On a alors :

$$\sup_{s,t} |S_2| \leq \alpha_\pi . \beta_\pi$$

avec :

$$\alpha_\pi = \sup_{\substack{z,z' \in R_{11} \\ |z-z'| \leq |\pi|}} |f^{(4)}(M_z) - f^{(4)}(M_{z'})|$$

$$\beta_\pi = \sup_{st} \sum_{\pi} |M(\Delta_i, j)_s M(i, \Delta_j)_t^3| \,.$$

Montrons d'abord que α_π tend en probabilité vers 0 avec $|\pi|$.

<u>Lemme 3-2</u>. Si f est une fonction de R dans R continue, si M est une martingale de L^2 continue, alors

$$\alpha_h = \sup_{\substack{z,z' \in R_{11} \\ |z-z'| < h}} |f(M_z) - f(M_{z'})|$$

tend en probabilité vers 0.

<u>Démonstration</u> :

Si Ω_{N_o}, M est bornée par N_o. f étant uniformément continue sur $[-N_o\ +N_o]$, on a :

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \eta\ \text{ tq : }\left\{\begin{array}{l}|x-x'|<\eta\\ x,x'\in[-N_o,+N_o]\end{array}\right.\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x')|\leq\varepsilon .$$

D'autre part, d'après le résultat du théorème 5-7 du chapitre III

$$\sup_{\substack{z,z'\in R_{11}\\ |z-z'|\leq h}} |M_z - M_{z'}| \xrightarrow[h\to 0]{L^2} 0 .$$

Donc, il existe $h>0$ tq :

$$\Omega^* = \{\omega \mid \sup_{|z-z'|<h} |M_{z'}-M_z| < \eta\}$$

soit de probabilité supérieure à $1-\varepsilon$.

Sur $\Omega_{N_o} \cap \Omega^*$ on a donc : $|f(M_z)-f(M_{z'})|\leq\varepsilon$ dès que $|z-z'|<h$.

On en déduit le résultat du lemme puisque

$$P(\Omega_{N_o} \cap \Omega^*) \geq 1-2\varepsilon .$$

Montrons alors que β_π est bornée dans L^1. En effet :

$$\begin{aligned}E \sup_{st} \sum_{\pi} |M(\Delta_i,j)_s|\ |M(i,\Delta_j)_t^3| &\leq E\sum_{\pi} \sup_{s}|M(\Delta_i,j)_s| \sup_{st}|M(i,\Delta_j)_t|^3\\ &\leq (\sum_{\pi} E\sup_{s}|M(\Delta_i,j)_s|^4)^{1/4} (\sum_{\pi} E\sup_{t}|M(i,\Delta_j)_t)^4)^{3/4} \leq C\|M\|^4\end{aligned}$$

où C est une constante indépendante de π (cf. corollaire 4-3, chapitre III).

On déduit donc de ces deux résultats que :

$$\sup_{st} |S_2| \xrightarrow[|\pi|\to 0]{P} 0 .$$

4ème type :

Il s'agit de la somme :

$$\sum_{\pi} (f^{(4)}(M_{\xi_{ij}(s,t)}) - f^{(4)}(M_{\xi'_{ij}(s,t)}))\ M(\Delta_i,j)_t^4$$

où $\xi_{ij}(s,t)$ et $\xi'_{ij}(s,t)$ sont des points de $(\Delta_{ij})_{st}$.

Un raisonnement analogue à celui développé pour S_2 montre que cette somme tend en probabilité vers 0 avec $|\pi|$.

Le théorème 3-1 est démontré.

§ 4 - La formule de Ito pour $f(z\,;M_z)$ où M_z est une martingale.

Si $f(s,t\,;m)$ est une fonction de $R^3 \to R$, on va énoncer le théorème donnant la formule de Ito pour $f(s,t\,;M_{st})$ si M est une martingale de L^6. Nous ne démontrerons pas ce théorème qui sera un cas particulier du théorème général énoncé dans le paragraphe suivant.

Théorème 4-1. Soit $f : R^3 \to R$ une fonction réelle des trois variables $(s,t\,;m)$ telle que

$f^{(4)}_{m^4}$ existe et est continue, ainsi que

$f''_{st}, f''_{s^2}, f''_{t^2}, f^{(3)}_{sm^2}, f^{(3)}_{tm^2}$.

Soit M une martingale de L^6, $M = \theta W + \psi WW$ de 1-dérivée L_1, 2-dérivée L_2.
Supposons que les dérivées f'_m, f''_{m^2}, $f^{(3)}_{m^3}$ et $f^{(4)}_{m^4}$ vérifient les conditions du théorème 3-1 énoncées respectivement pour f', f'', $f^{(3)}$ et $f^{(4)}$.

Supposons en outre que :

$$E\int_{R_{11}} [(f''_{sm})^2 + (f^{(3)}_{sm^2})^2]\, dx < M >^{(2)} (x,dy) < \infty$$

(et la condition symétrique en t, $< M >^{(1)}$)

$$E\int_{R_{11}} (|f''_{st}| + |f''_{s^2}| + |f''_{t^2}|)\, dx\, dy < \infty\,.$$

Alors, si $\Delta_{st}f$ représente l'accroissement de $f(x,y\,;\,M(x,y))$ sur le rectangle R_{st}, on a :

$$\Delta_{st} f = \mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st} + \mathcal{B}_{st}$$

où

$$\mathcal{M}_{st} = \int_{R_{st}} f'_m(x,y\,;M(x,y))M(dx,dy) + \int_{R_{st}} f''_{m^2} (x,y\,;M(x,y)J_M(dx,dy)$$

est la partie martingale de $\Delta_{st}f$

$$\mathcal{P}^1_{st} = \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f^{(3)}_{m^3}(x,y\,;M(x,y))M(dx,y)<M>^{(2)} (x,dy) + \int_{R_{st}} f''_{t,m}(x,y\,;M(x,y))M(dx,y)dy$$
$$+ \int_{R_{st}} f''_{m^2} (x,y\,;\,M(x,y)) < M(dx,.),\, M(x,.) >^{(2)} (dy)$$

est la partie 1-martingale propre de $\Delta_{st}f$, $\mathcal{P}^2_{st}$ est la partie 2-martingale propre s'obtenant de façon symétrique.

$$\begin{aligned}\text{Œ}_{st} = \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f''_{m^2}(x,y\,;M(x,y))<M>(dx,dy) + \int_{R_{st}} f^{(3)}_{m^3}(x,y\,;M(x,y))<M,J_M>(dx,dy)\\ + \frac{1}{4}\int_{R_{st}} f^{(4)}_{m^4}(x,y\,;M(x,y))<J_M>(dx,dy) + \int_{R_{st}} f''_{s,t}(x,y\,;M(x,y))dx\,dy\\ + \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f^{(3)}_{s,m^2}(x,y\,;M(x,y))dx<M>^{(2)}(x,dy)\\ + \frac{1}{2}\int_{R_{st}} f^{(3)}_{t,m^2}(x,y\,;M(x,y))<M>^{(1)}(dx,y)\,dy,\end{aligned}$$

est la partie à variation bornée de $\Delta_{st}f$.

§ 5 - Formule de Ito pour $f(s,t\,;X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$ où $X_1,X_2,\dots,X_N$ sont N s.m.r.

Faisons d'abord la remarque préliminaire suivante : si,

$$F(s,t) = f(s,t\ ;\ X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$$

F n'est autre que la valeur de f prises en Z_1, Z_2 ; $X_1,\dots,X_N$ où Z_1, Z_2 sont les s.m.r. particulières

$$Z_1(s,t) \equiv s, \qquad Z_2(s,t) \equiv t.$$

Pour établir la formule de Ito pour F, on utilisera principalement deux choses :

1°) La formule de Taylor proposée dans le théorème 4-2 qui tient compte de la spécificité des deux s.m.r. particulières Z_1 et Z_2.

2°) Des résultats généraux du chapitre IV pour les s.m.r. Z_1, Z_2 ; $X_1,X_2,\dots,X_N$ (sans faire de différence ici entre Z_1, Z_2 et les X).

Ceci étant, le principe de la démonstration est exactement le même que celui donné pour le théorème 3-1.

Nous nous efforcerons dans ce théorème, d'une part de dégager les conditions de validité sur f, d'autre part de faire un examen précis des variations contribuantes, examinant enfin de façon précise les variations non contribuantes ayant trait à Z_1 et Z_2.

Dans la décomposition et la représentation de X_k, on notera M_k, $P_k^1,\dots,L_{1k},\dots$ pour $M_{X_k}^{\ k}$, $P_{X_k}^1,\dots,L_{1X_k},\dots$. D'autre part, on dira que f est dans $L^1_{k\ell mn\,;\,2p}$ si $\|f\|_{X_k^{2p}} + \|f\|_{X_\ell^{2p}} + \|f\|_{X_m^{2p}} + \|f\|_{X_n^{2p}}$ est fini, que f est dans $L^2_{k\ell mn\,;\,2p}$ si f^2 est dans $L^1_{k\ell mn\,;\,2p}$, et on a des définitions analogues pour des triplets (k,ℓ,m), des paires (k,ℓ), des singletons k. On a alors le résultat "développé" suivant (que nous donnerons sous une forme condensée dans le théorème 5-2).

5-1. Formule de Ito : forme développée.

Théorème 5-1. Formule de Ito pour $f(s,t\,;X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$ où $X_1,X_2,\dots,X_N$ sont N s.m.r.

Soit $f(s,t\,;x_1,\dots,x_N)$ une fonction de R^{N+2} dans R, $X_1,\dots,X_N$, N s.m.r. de L^6, telles que pour tout k,ℓ,m,n de $\{1,2,\dots,N\}$:

$f^{(4)}_{k\ell mn}$ existe, est continue et dans $L^1_{k\ell mn\,;\,4}$.

$f^{(3)}_{k\ell m}$ est dans $L^2_{k\ell m\,;\,6}$

$f^{(3)}_{sk\ell}$, $f^{(3)}_{tk\ell}$ existent, sont continues dans $L^1_{k\ell\,;2}$.

f''_{st}, f''_{s^2}, f''_{t^2} existent, sont continues, f''_{st} étant dans $L^1(dz \times dP)$

$f''_{k\ell}$ est dans $L^2_{k\ell\,;4}$.

f'_k, f''_{sk}, f''_{tk} sont dans $L^2_{k\,;\,2}$.

Alors, sous cette hypothèse, toutes les intégrales définies ci-après existent et l'on a pour $F_{st} = f(s,t\,;X_1(s,t),\dots,X_N(s,t))$ la décomposition en s.m.r. suivante :

$$\Delta_{st} F = \mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st} + \mathcal{C}_{st}$$

avec :

Martingale $\mathcal{M}_{st}$.

$$\mathcal{M}_{st} = \sum_k \int_{R_{st}} F'_k(z)\, M_k(dz) + \sum_{k,\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y) M^1_k(dx,y)\, M^2_\ell(x,dy)$$

$\mathcal{P}^1_{st}$ est la 1-martingale propre.

$$\mathcal{P}^1_{st} = \sum_k \int_{R_{st}} F'_k(z)\, P^1_k(dz) + \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y)\, M^1_k(dx,y)(B^2_\ell)'_y(x,y)dy$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y) < M_k(dx,.),\ M^2_\ell(x,.) >^{(2)} (dy)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(x,y)\, M^1_k(dx,y) < M^2_\ell, M^2_m >^{(2)} (x,dy)$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} F''_{tk}(x,y)\, M^1_k(dx,y)\, dy\ .$$

$\mathcal{P}^2_{st}$ <u>est la 2-martingale propre s'obtenant de façon symétrique</u>.

$\mathcal{B}_{st}$ <u>est le processus à variation bornée</u>.

$$\mathcal{B}_{st} = \sum_k \int_{R_{st}} F'_k(z) B_k(dz) + \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y)(B^1_k)'_x (B^2_\ell)'_y\, dx\, dy \qquad (1,2)$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y) < (P^2_k)'_x\,,\, M^2_\ell >^{(2)} (x,dy)\, dx \qquad (3)$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y) < M^1_k\,,\, (P^1_\ell)'_y >^{(1)} (dx,y)dy \qquad (4)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(x,y) < M_k, M_\ell > (dx,dy) \qquad (5)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(x,y)(B^1_k)'_x\, dx < M^2_\ell, M^2_m > (x,dy) \qquad (6)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(x,y) < M^1_k, M^1_\ell >^{(1)} (dx,y)(B^2_m)'_y\, dy \qquad (7)$$

$$+ \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(z) < M_k, J_{M^2_\ell, M^1_m} > (dz) \qquad (8)$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{k\ell mn} \int_{R_{st}} F^{(4)}_{k\ell mn}(z) < J_{M^2_k, M^1_\ell}\,,\, J_{M^2_m, M^1_n} > (dz) \qquad (9)$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} (F''_{sk}(x,y)(B^2_k)'_y + F''_{tk}(x,y)(B^1_k)'_x)\, dx\, dy \qquad (10,11)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{tk\ell}(x,y) < M^1_k, M^1_\ell >^{(1)} (dx,y)dy \qquad (12)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{sk\ell}(x,y)\, dx < M^2_k, M^2_\ell >^{(2)} (x,dy) + \int_{R_{st}} F''_{st}(z)dz \qquad (13,14)$$

Sous les conditions du théorème, les intégrales définissant la partie martingale faible $\mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st}$ existent dans L^2, celles définissant $\mathcal{C}_{st}$ existent dans L^1.

Démonstration :

Nous adopterons exactement la même démarche que dans la démonstration du théorème 3-1.

On choisira une partition π équirégulière de R_{11} dont on fera tendre le pas $|\pi|$ vers 0. Donc :

$$\Delta_{st} F = \sum_{\pi} F(\Delta_{ij})_{st}$$

où l'accroissement de F sur $(\Delta_{ij})_{st}$ est donné par la formule de Taylor (théorème 2-4). On examinera alors terme à terme les différentes variations entrant dans cette formule.

On démontrera des convergences en probabilité. Puisque $X_1, \ldots, X_N$ sont des s.m.r. de L^2, continues, ainsi que les différentes dérivées considérées, on peut, à ε près, se ramener au cas où f et toutes les dérivées considérées sont bornées par une quantité fixe N_o.

(A) Examen des termes contribuants.

Variations (1,0,0).- Sous la condition $f'_k \in L^2_{k;2}$, cette variation converge en probabilité vers :

$$\sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, X_k(dz) = \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, M_k(dz) \qquad \text{(m)}$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, P^1_k(dz) \qquad \text{(1mp)}$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, P^2_k(dz) \qquad \text{(2-mp)}$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, B_k(dz) \qquad \text{(v.b)}$$

(Nous utilisons, pour f_k continue bornée, le lemme 3-1).

<u>Variations (0,1,1)</u>, (théorème 3-2-2, Ch. IV).- Sous la condition $f''_{k\ell} \in L^2_{k\ell;4}$, cette variation converge vers l'intégrale :

$$\sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)\, J_{X_\ell X_k}(dz) = \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)\, M^1_k(dx,y)\, M^2_\ell(x,dy) \qquad \text{(m)}$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)\, M^1_k(dx,y)(B^2_\ell)'_y\, dy \qquad \text{(1mp)}$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)\, (B^1_k)'_x\, dx\, M^2_\ell(x,dy) \qquad \text{(2mp)}$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)(B^1_k)'_x\, dx\, (B^2_\ell)'_y\, dy \qquad \text{(v.b)}$$

<u>Variations (1,0,1)</u>, (théorème 5-4, Ch. IV).- Sous la condition $f''_{k\ell} \in L^2_{k\ell;4}$, cette variation converge vers

$$\sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z) < X_k(dx,.),\, X_\ell(x,.) >^{(2)}(dy) = \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z) < M^2_k(dx,.), M^2_\ell(x,.) >^{(2)}(dy) \qquad \text{(1mp)}$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z)dx < (P^2_k)'_x, M^2_\ell >^{(2)}(dy) \qquad \text{(v.b)}$$

(et le terme symétrique, correspondant à une variation (1,1,0) faisant apparaître une 2-mp et une fonction à v.b).

<u>Variations (2,0,0)</u>, (théorème 4-1-2, Ch. IV).- Si $f''_{k\ell}$ est dans $L^1_{k\ell;2}$, on a la convergence de ces variations vers,

$$\frac{1}{2} \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z) < M_k, M_\ell > (dz) \qquad \text{(v.b)}$$

<u>Variations (0,1,2)</u>, (théorème 5-2, Ch. IV).- Si $f^{(3)}_{k\ell m}$ sont dans $L^2_{k\ell m;6}$, ces variations convergent vers

$$\frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} f^{(3)}_{k\ell m}(z)\, J_{<M^2_\ell, M^2_m>^{(2)}, M_k}(dz) = \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} f^{(3)}_{k\ell m}(z) M^1_k(dx,y) < M^2_\ell, M^2_m > (x,dy) \qquad \text{(1mp)}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} f^{(3)}_{k\ell m}(z)(B^1_k)'_x dx < M^2_\ell, M^2_m > (x,dy) \qquad \text{(v.b)}$$

(et le terme symétrique faisant apparaître une 2mp et une v.b pour la variation (0,2,1)).

<u>Variations (1,1,1)</u>, (théorème 4-3-1, Ch. IV).- Si $f^{(3)}_{k\ell m}$ sont dans $L^2_{k\ell m;6}$, ces

variations convergent vers

$$\sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} f^{(3)}_{k\ell m}(z) < M_k, J_{M^2_\ell M^1_m} > (dz) \qquad (v.b)$$

Variations (0,2,2), (théorème 4-2-2, Ch. IV).- Si $f^{(4)}_{k\ell mn}$ et dans $L^1_{k\ell mn\,;\,4}$, ces variations ont pour limite

$$\sum_{k\ell mn} \int_{R_{st}} f^{(4)}_{k\ell mn}(z) < J_{M^2_k M^1_\ell}, J_{M^2_m M^1_n} >(dz).$$

Reste à examiner les termes contribuants faisant intervenir l'une ou l'autre des s.m. Z_1, Z_2.

Variations en $Z_1(\Delta_s)\ X_k(s',\Delta)$ et $X(\Delta_s,t')\ Z_2(\Delta_t)$.- Ces variations d'écrivent

$$\sum_{\pi} f''_{sk}(i,j,X_{i+1,j})\ |(\Delta_i)_s|\ X_k(i+1,\Delta_j)_t\ .$$

Il existe une petite différence entre cette variation et celles étudiées jusqu'à maintenant : la valeur de f'' n'est pas prise au point $P_{ij} = (i,j\ ;\ X_{ij})$. Mais cela n'a pas d'importance au niveau du résultat. En effet $f''(i,j\ ;\ X_{i+1,j})$ est $\mathfrak{F}_{i+1,j}$-adapté, ce qui est la bonne adaptation pour l'accroissement associé $X_k(i+1,\Delta_j)_t$; d'autre part puisque f''_{sk} et $X_1,\ldots,X_N$ sont continues, on a un résultat généralisant le lemme 3-1 :

Lemme 5-2.

Si $f(s,t\,;X_1(s,t),\ldots,X_N(s,t))$ est mesurable adaptée continue bornée, si $\hat{\pi} = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition, z_{ij} le point inférieur de Δ_{ij}, alors quand $|\pi|$ tend vers zéro

$$f_\pi \to f.$$

La convergence ayant lieu dans L^1 si $f\in L^1$, dans $L^2_{k;2}$ si $f\in L^2_{k;2}$, dans $L^1_{k,\ell;2}$ si $f\in L^1_{k,\ell;2}$.

On a les résultats analogues pour les variations en Z_2. Par exemple, la variation en $X_k(\Delta_i,j+1)\ Z_2(\Delta_j)$ converge, si les $f''_{t,k}$ sont dans $L^2_{k,2}$ vers

$$\sum_k \int_{R_{st}} f''_{t,k}(x,y)X_k(dx,y)dy = \sum_k \int_{R_{st}} f''_{t,k}(x,y)\ M^1_k(dx,y)dy \qquad (1\text{-mp})$$

$$+ \sum_k \int_{R_{st}} f''_{t,k}(x,y)(B^1_k)'_x\ dx\,dy \qquad (v.b)$$

<u>Variations en</u> $X_k(\Delta_s,t')\,X_\ell(\Delta_s,t')\,Z_2(\Delta_t)$.- (Type 0,2,1)).

Sous la condition : $f^{(3)}_{t,k\ell} \in L^1_{k\ell\,;\,2}$, ces variations convergent vers

$$\frac{1}{2}\sum_{k\ell}\int_{R_{st}} f^{(3)}_{t,k\ell}(z) < M^1_k, M^1_\ell >^{(1)} (dx,y)dy \qquad \text{(v.b)}$$

<u>Variations en</u> $Z_1(\Delta_s)\,Z_2(\Delta_t)$.- Si $f''_{st} \in L^1(dz \times dP)$, cette variation converge vers :

$$\int_{R_{st}} f''_{st}(z)dz\ .$$

(B) <u>Examen du reste</u>.-

Le reste est constitué de deux types de variations : celles qui croisent les s.m.r. $X_1, X_2, \ldots, X_N$ entre elles et les autres.

Pour les premières, que ce soient des variations d'ordre 3 ou d'ordre 4, on démontrera qu'elles tendent vers 0 exactement de la même façon que cela a été fait dans le théorème 3-1, en nous appuyant sur le lemme 5-3 qui est la généralisation immédiate du lemme 3-2.

<u>Lemme 5-3</u>.

Soit $f : R^{n+2} \to R$ continue et $X_1, \ldots, X_N$, N s.m.r. de L^2 continues, alors, si $z = (s,t)$, $z' = (s',t')$

$$\alpha_h = \sup_{\substack{z,z' \\ |z-z'|<h}} |f(s,t\,;\,X_1(z),\ldots,X_N(z)) - f(s',t'\,;\,X_1(z'),\ldots,X_N(z'))|$$

tend en probabilité vers 0 si h tend vers 0.

Ce lemme sera une conséquence immédiate du théorème du chapitre III.

Reste alors à montrer que les contributions des variations du reste faisant intervenir les processuss Z_1 et Z_2 tendent en probabilité vers 0 avec $|\pi|$.

Pour cela, il suffit de voir que tous ces restes sont du type :

$$\sum_{\pi} [g(P_{i,j}(s,t)) - g(P'_{i,j}(s,t))]\ Y_{ij}(s,t)$$

où g est l'une des dérivées (continues) f''_{s^2}, f''_{t^2}, f''_{st}, $f^{(3)}_{s,k\ell}$, $f^{(3)}_{t,k\ell}$; $P_{ij}(s,t)$, $P'_{ij}(s,t)$

étant deux points de Δ_{ij}, et $Y_{ij}(s,t)$ certains processus.

D'après le lemme 5-2 :

$$\sup_{\substack{i,j \\ (s,t)\in R_{11}}} |g(P_{ij}(s,t)) - g(P'_{ij}(s,t))| \xrightarrow[|\pi|\to 0]{P} 0 .$$

Il suffit donc de vérifier que les sommes $\Sigma\, |Y_{ij}(s,t)|$ sont bornées, uniformément en (s,t), dans L^1. Ce résultat est évident pour $|(\Delta_i)_s|^2$, $|(\Delta_j)_t|^2$, $|(\Delta_{ij})_{st}|$; reste à examiner le cas :

$$Y_{ij}(s,t) = |(\Delta_i)_s|\, X_k(i+1, \Delta_j)_t\, X_\ell(i+1,\Delta_j)_t .$$

Il est aisé de vérifier alors le résultat annoncé. ■

Regroupant alors les divers facteurs provenant de $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{P}^1$, $\mathfrak{P}^2$, $\mathfrak{B}$ et faisant jouer à $Z_1 = s$, $Z_2 = t$ le même rôle que d'autres s.m.r., on en déduit :

Corollaire 5-1.- Si $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont N s.m.r. de L^6 et $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 5-1, alors, si $F(s,t) = f(X_1(s,t),\ldots,X_N(s,t))$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta_{st}F &= \sum_k \int_{R_{st}} F'_k(z)\, X_k(dz) + \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z)\, J_{X_kX_\ell}(dz) \\
&+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z) < X_k(dx,.),\, X_\ell(x,.) >^{(2)} (dy) \\
&+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z) < X_k(.,dy),\, X_\ell(.,y) >^{(1)} (dx) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z) < X_k, X_\ell > (dz) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(z)\, (J_{<X_k,X_\ell>^{(2)}X_m} + J_{X_k<X_\ell,X_m>^{(1)}})\, (dz) \\
&+ \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(z) < X_k, J_{X_\ell X_m} > (dz) \\
&+ \frac{1}{4} \sum_{k\ell mn} \int_{R_{st}} F^{(4)}_{k\ell mn}(z) < J_{X_kX_\ell},\, J_{X_mX_n} > (dz).
\end{aligned}$$

Corollaire 5-2.- Cette formule s'écrit encore

$$\begin{aligned}\Delta_{st}F = &\sum_k \int_{R_{st}} F'_k(z)\, X_k(dz) + \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z)\, J_{X_k X_\ell}(dz) \\ &+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} F''_{k\ell}(z)[<X_k,X_\ell>^{(1)} + <X_k,X_\ell>^{(2)} - <X_k,X_\ell>]\,(dz) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(z)(J_{<X_k,X_\ell>^{(2)} X_m} + J_{X_k <X_\ell,X_m>^{(1)}})\,(dz) \\ &+ \sum_{k\ell m} \int_{R_{st}} F^{(3)}_{k\ell m}(z) < X_k, J_{X_\ell X_m} > (dz) \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{k\ell mn} \int_{R_{st}} F^{(4)}_{k\ell mn}(z) < J_{X_k X_\ell}, J_{X_m X_n} > (dz).\end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser la décomposition des s.m.r. $< X >^{(1)}$ et $< X >^{(2)}$, donnée dans le théorème 5-1, Chapitre III, pour obtenir cette version. On retombe alors sur le formalisme donné dans [7].

5-2. Formulation au moyen des opérateurs D_1 et D_2.

Si $g(x\ ;\ m_1,\dots,m_n)$ est une fonction $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et si $M_1,\dots,M_n$ sont n martingales à un paramètre de L^2, on définit classiquement l'opérateur D opérant sur $g(x\ ;\ M_1(x),\dots, M_n(x))$ par

$$Dg = g'_x + \frac{1}{2} \sum_{ij} g''_{ij}\, (< M_i,M_j >)'_x \ .$$

Cet opérateur dépend fondamentalement des M_i, et il serait plus correct de le noter $D_{\{M_1,\dots,M_n\}}$.

Considérons alors la fonction

$$\begin{aligned}F(s,t) &= f(s,t\ ;\ X_1(s,t),\dots,X_n(s,t)) \\ &= G(s,t\ ;\ M_1(s,t),\dots,M_n(s,t)\ ;\ P^1_1(s,t),\dots,P^1_n(s,t)\ ;\ P^2_1(s,t),\dots,P^2_n(s,t)\ ;\ B_1(s,t),\dots,B_n(s,t))\end{aligned}$$

où les X_i sont des s.m.r. de parties m, 1mp, 2mp et v.b, M_i, P^1_i, P^2_i, B_i.

En remarquant que dans $F(s,t)$ la "partie dérivable en s " ne provient pas seulement de s par (G'_s), mais aussi de P^2_i (contribution, $G'_{(p^2_i)} \cdot (P^2_i)'_s$), de B_i $(G'_{b_i} \cdot (B_i)'_s)$, on définira l'opérateur D_1 comme l'opérateur D qui, à t fixé, agit sur les fonctions et martingales en s.

On définit symétriquement $D_2 f$.

Si f est de classe C^4, on pourra en particulier lui appliquer successivement D_1 et D_2 en ayant soin de prendre en compte pour D_2 des parties 2-m et 2.v.b des termes $(< M_i^1, M_j^1 >^{(1)})'_x$ issus de D_1.

Le théorème 5-1 peut alors se reformuler ainsi :

Théorème 5-2.

Sous les hypothèses du théorème 5-1,

$$\Delta_{st} F = \mathcal{M}_{st} + \mathcal{P}^1_{st} + \mathcal{P}^2_{st} + \mathcal{B}_{st},$$

où $\mathcal{M}_{st}$ est la martingale donnée au th. 5-1,

$\mathcal{P}^1_{st}$ est la 1-martingale propre :

$$\mathcal{P}^1_{st} = \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\, P^1_k(dz) + \sum_k \int_{R_{st}} (D_2 f'_k)\, M^1_k(dx,y)\, dy$$
$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}(z) < M_k(dx,.), M^2_\ell(x,.) >^{(2)} (dy),$$

tandis que $\mathcal{B}_{st}$ est le processus à v.b :

$$\mathcal{B}_{st} = \int_{R_{st}} D_2(D_1 f)(z)\, dz = \int_{R_{st}} D_1(D_2 f)(z)\, (dz).$$

Démonstration :

Il suffit de constater que

$$D_2 f'_k(x,y)dy = f'_{tk}(x,y)dy + \sum_\ell f''_{k\ell}(x,y)\, (B^2_\ell)'_y dy + \frac{1}{2} \sum_{\ell m} f^{(3)}_{k\ell m}(x,y) < M^2_\ell, M^2_m >^{(2)}(x,dy)$$

pour vérifier que l'on retrouve bien ici l'expression de $\mathcal{P}^1_{st}$ donnée au théorème 5-1.

Il suffit donc pour conclure de montrer que $\mathcal{B}_{st}$ est l'intégrale simple de $D_2 D_1 f$ (d'où l'on déduira immédiatement que les opérateurs D_1 et D_2 commutent). On a

$$D_1 f(x,y)dx = f'_s(x,y)dx + \sum_k f'_k(x,y)(B^1_k)'_x\, dx + \frac{1}{2} \sum_{k\ell} f''_{k\ell}\, (x,y) < M^1_k, M^1_\ell >^{(1)} (dx,y).$$

Il s'agit donc d'appliquer D_2 à trois groupes de termes.

<u>1^{er} groupe</u> : f'_s .

$D_2 f'_s \, dx\,dy$ donne immédiatement les termes numérotés 14, 11, 13 du théorème 5-1.

<u>$2^{ème}$ groupe</u> : $\sum_k f'_k . (B^1_k)'_x$:

$$D_2(f'_k . (B^1_k)'_x) = f''_{tk} . (B^1_k)'_x \, dy \qquad (10)$$

$$+ \sum_\ell f''_{k\ell} (B^2_\ell)'_y (B^1_k)'_x dy \qquad (2)$$

$$+ f'_k . (B_k)''_{xy} \qquad (1)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\ell m} f^{(3)}_{k\ell m} < M^2_\ell , M^2_m >^{(2)}(x,dy)\,(B^1_k)'_x \qquad (6)$$

$$+ \sum_\ell f''_{k\ell} < M^2_\ell , (P^2_k)'_x >^{(2)} (x,dy) \qquad (3)$$

<u>$3^{ème}$ groupe</u> : c'est le plus délicat à traiter puisque pour $< M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}$, on n'a pas a priori de décomposition en semi-martingale en t. Appliquant déjà l'opérateur à $f''_{k\ell}$, on obtient :

$$D_2(f''_{k\ell} < M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}(dx,y))dy = f^{(3)}_{tk\ell} < M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}(dx,y)dy \qquad (12)$$

$$+ \sum_m f^{(3)}_{k\ell m} . (B^2_m)'_y < M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}(dx,y)dy \qquad (7)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{mn} f^{(4)}_{k\ell mn} < M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}(dx,y) < M^2_m , M^2_n >^{(2)}(x,dy) \qquad (9)$$

$$+ T$$

où T fait intervenir la 2-représentation de $<M^1_k , M^1_\ell >^{(1)}$.

<u>Donnons cette 2 représentation</u> dans le cas $M^1_k = M^1_\ell = M^1$

$$M^1 = M + P^1 \quad \text{(représentation } \theta, \psi, \beta_1)$$

$$< M^1 >^{(1)}(s,t) = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)^2 dz.$$

$(L_1(t\,;z))_t$ est une semi-martingale en t, valant $\theta(z)$ si $t = 0$

$$L_1(t\,;z) = \theta(z) + N(t,z) + B(t,z)$$

avec

$$N(t,z) = \int_{R_{st}} \psi(\xi,z)\,W(d\xi)$$

$$B(t,z) = \int_0^t \beta_1(v,z)dv.$$

On a donc, uniformément en t et pour tout z :

$$L_1^2(t\,;z) = \theta^2(z) + 2\int_0^t L_1(u\,;z)\,B(du,z) + <N(.,z)>_t + 2\int_0^t L_1(u\,;z)N(du,z).$$

La partie à v.b de $<M>_{st}^{(1)}$ s'écrit donc :

$$2\int_{R_{st}} \left(\int_0^y L_1(y\,;x,v)\ \beta_1(y\,;x,v)dv\right) dx\,dy + <M>_{st}\,.$$

Quant à la partie martingale elle s'écrit (après une intervertion possible d'une intégrale en W et d'une intégrale en Z)

$$2\int_{R_{st}} \left(\int_{R_{1y}} L_1(y\,;x,v)\ \psi(u,y\,;x,v)\ dx\ dv\right)\ W(du\,,dy).$$

Dans le cas de deux 1-martingales M_k^1, M_ℓ^2, il suffit d'éclater chacun des termes en $L_{1k}\beta_{1\ell} + L_{1\ell}\beta_{1k}$, $L_{1k}\psi_\ell + L_{1\ell}\psi_k$, en supprimant le coefficient 2.

On a alors, en terminant l'application de D_2 au 3ème groupe de termes :

$T = T_1 + T_2$

$$T_1 = f''_{k\ell}\left[\int_0^y L_1.\beta_1(y\,;x,v)dv\ dx\ dy + <M_k,M_\ell>(dx,dy)\right]$$

$$= f''_{k\ell}\left[<M_k^1,(P_\ell^1)'_y>(dx,y)dy + <M_k,M_\ell>(dz)\right] \qquad (4,5)$$

$$T_2 = \sum_m f^{(3)}_{k\ell m}\int_{R_{1y}} L_{1k}(y\,;x,v)\ \psi_\ell(u,y\,;x,v)L_{2m}(u,y\,;x)du\,dy\,dx\,dv$$

$$= \sum_m f^{(3)}_{k\ell m} <M_\ell\,,J_{M_m^2 M_k^1}>(dx,dy) \qquad (8)$$

d'après un résultat du paragraphe 3 du Chapitre IV.

On a bien retrouvé tous les termes de $\mathcal{B}_{st}$. Le théorème 5-2 est démontré.

5-3. Formalisme et pratique pour l'obtention de la formule de Ito à deux dimensions.

Nous allons voir que, formellement, la formule de Ito s'obtient par application successive de la formule de Ito, d'abord en s, puis en t.

Montrons le par exemple dans le cas d'une fonction

$$f(s,t\,;X_{st})$$

où X_{st} est une martingale faible $M+P^1+P^2$. Soit :

$$F(s,t) = f(s,t\,;X_{st}).$$

On a

1^{er} pas : Ito en s.

$$F(s,t)-F(0,t)=\int_0^s f'_m(x,t)\,M^1(dx,t)+(D_1f)(x,t)dx,$$

$$F(0,t)-F(0,0)=\int_0^s f'_m(x,0)\,M^1(dx,0)+(D_1f)(x,0)dx$$

et donc :

$$\Delta_{st}F=\int_0^s [f'_m(x,t)M^1(dx,t)-f'_m(x,0)M^1(dx,0)]+\int_0^s [(D_1f)(x,t)-(D_1f)(x,0)]dx.$$

$2^{ème}$ pas : Ito en t.

Appliquons donc la formule de Ito en t, à l'intérieur de l'intégrale, aux deux intégrandes :

1^{er} Intégrande :

$$* \; f'_m(x,t)\,M^1(dx,t)-f'_m(x,0)M^1(dx,0)=\int_0^t f'_m(x,y)M(dx,dy)+\int_0^t f''_{m^2}(x,y)\,M^1(dx,y)M^2(x,dy)$$
$$+\int_0^t (D_2f'_m)(x,y)\,M^1(dx,y)dy+\int_0^t f'_m(x,y)P^1(dx,dy)+\int_0^t f''_{m^2}(x,y)<M(dx,.),M^2(x,.)>^{(2)}(dy).$$

On retrouve déjà exactement $\mathcal{m}_{st}+P^1_{st}$ (ce qui est normal puisque la première intégrale $\int_0^s$ dans la décomposition de $\Delta_{st}F$ est la partie 1-martingale de $\Delta_{st}F$).

$2^{ème}$ Intégrande :

$$* \qquad (D_1f)(x,t)=f'_s(x,t)+\frac{1}{2}f''_{m^2}(x,t)(<M^1>^{(1)})'_x(x,t)+f'_m(x,t)\,P^2(dx,t).$$

Examinons terme à terme la différence $D_1f(x,t)-D_1f(x,0)$.

$$. \qquad f'_s(x,t)-f'_s(x,0)=\int_0^t (D_2f'_s)(x,y)dy+f''_{s,m}(x,y)\,M^2(x,dy).$$

$$. \; f'_m(x,t)P^2(dx,t)-f'_m(x,0)P^2(dx,0)=\int_0^t (D_2f'_m)(x,y)P^2(dx,y)dy+f''_{m^2}(x,y)<P^2(dx,.),M^2(x,.)>^{(2)}(dy)$$
$$+f'_m(x,y)P^2(dx,dy)+f''_{m^2}(x,y)P^2(dx,y)\,M^2(x,dy).$$

$$. \qquad \frac{1}{2}[f''_{m^2}(x,t)(<M^1>^{(1)})'_x-f''_{m^2}(x,0)(<M^1>^{(1)})'_x(x,0)]=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^t (D_2f''_{m^2})(x,y)(<M^1>^{(1)})'_x(x,y)dy+f^{(3)}_{m^3}(x,y)<M^2,N>^{(2)}(x,dy)$$
$$f''_{m^2}(x,y)\,B(x,dy)+f''_{m^2}(x,y)\,N(x,dy)+f''_{m^3}(x,y)\,M^2(x,dy).$$

Si on a noté la décomposition en t-martingale et t-variation bornée de :

$$(< M^1 >^{(1)})'_x(x,y) = N(x,y) + B(x,y).$$

Regroupons les intégrales en $M^2(x,dy)dx$:

$$dx \int_0^t [f''_{s,m}(x,y) + f''_{m^2}(x,y)\ P^2(dx,y) + \frac{1}{2} f^{(3)}_{m^3}(x,y)]\ M^2(x,dy) = \int_0^t (D_1 f'_m)(x,y) M_2(x,dy)dx.$$

Cette quantité regroupée avec

$$\int_0^t f'_m(x,y)\ P^2(dx,dy)$$

et

$$\frac{1}{2}\int_0^t f''_{m^2}(x,y) N(x,dy)\, dx = \int_0^t f''_{m^2}(x,y)\ (< M^1(.,y),\ M(.,dy) >^{(1)})(dx)$$

donne par intégration en x sur $[0,s]$ la partie 2-mp $\mathbf{P}^2_{st}$.

Examinons alors les termes restants :

$$B(x,y)dx\,dy = (D_2 f'_s)(x,y)dx\,dy + (D_2 f'_m)(x,y)P^2(dx,y)dy + f''_{m^2}(x,y) < P^2(dx,.), M^2(x,.) >^{(2)}(dy)$$

$$+ \frac{1}{2}(D_2 f''_{m^2})(x,y) < M >^{(1)}(dx,y)dy + f^{(3)}_{m^3}(x,y) < M^2(x,.), N(dx,.) >^{(2)}(dy$$

$$+ f''_{m^2}(x,y)\ B(x,dy)dx.$$

Se reportant à l'écriture de $D_1 f$:

$$(D_1 f)(x,y) = f'_s(x,y) + f'_m(x,y)\ P^2(dx,y) + \frac{1}{2} f'_{m^2}(x,y)\ (N(x,y) + B(x,y))dx$$

on constate que :

$$B = D_2 D_1 f\ .$$

5-4. Quelques remarques.

5.4.1. Cas où les martingales M_k, $k = 1,N$, sont fortes.

Il y a alors un certain nombre de simplifications.

. Tout d'abord, les "mesures" $< M_k(.,dy),\ M^1_\ell(.,y)>^{(1)}(dx)$ sont nulles (Th. 5-2, chapitre IV). On a alors :

$$\mathbf{P}^1_{st} = \sum_k \int_{R_{st}} f'_k(z)\ P^1_k(dz) + \sum_k \int_{R_{st}} (D_2 f'_k)\ M^1_k(dx,y)\ dy\ .$$

. D'autre part, dans ce cas $< M_k, J_{M_\ell^2 M_m^1} > \equiv 0$, et donc le terme (8) (théorème 5-1) de $\mathfrak{E}_{st}$ est nul.

5.4.2. Cas d'une fonction quadratique de $X_1, \ldots, X_N$.

Dans ce cas il est suffisant de supposer que les s.m.r. sont dans L^4.

Théorème 5-5. Processus à v.b d'une s.m.r.

Si X est une s.m.r. de L^4, il existe un processus à variation bornée, noté $<< X >>$ tel que $X^2 - << X >>$ soit une martingale faible représentable.

Les représentations de $<< X >>$ et de $X^2 - << X >>$ sont données par la formule de Ito pour $f(X) = X^2$.

$$2 << X >>_{st} = \int_{R_{st}} M(z)B(dz) + \int_{R_{st}} \varphi_1(z)\varphi_2(z)dz + \int_{R_{st}} <(P^2)'_x, M^2>^{(2)}(x,dy)dx$$
$$+ \int_{R_{st}} <M^1, (P^1)'_y>^{(1)}(dx,y)dy + \int_{R_{st}} < M > (dx,dy)$$

soit

$$2 << X >>_{st} = \int_{R_{st}} U(z)dz$$

avec, si $z = (x,y)$

$$U(z) = M(z)\,\varphi(z) + \varphi_1(z)\,\varphi_2(z) + \int_0^x \beta_2 L_2(u,y\,;x)du + \int_0^y \beta_1 L_1(y\,;x,v)dv$$
$$+ \frac{1}{2}\,\theta^2(z) + \frac{1}{2}\int_{R_{xy}} \psi^2(u,y\,;x,v)\,du\,dv.$$

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE VI

[1] CAIROLI R., WALSH J.B. : Stochastic integral in the plane, Acta Matematica 134, p. 111-183 (1975).

[2] WALSH J.B. : Cours de 3ème cycle à l'Université Paris 6, (1976-77).

[3] NUALART D., SANZ M. : Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres, Ann. Stat. Univ. Clermont, 61, p. 89-99 (1976).

[4] SANZ M., Calcul diferencial estocastic per a processos amb parametre n-dimensional, Thèse Univ. Barcelona (1977).

[5] WONG E., ZAKAI M. : Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter, Z. für W., 29, p. 109-122 (1974).

[6] WONG E., ZAKAI M. : Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Stoch. Processes and Appl. 6, p. 339-349 (1978).

[7] WONG E., ZAKAI M. : An Intrinsic calculus for weak martingales in the plane, Mémorandum M 78/20, Univ. de Berkeley (1978).

[8] WONG E. : A calculus for multiparameter martingales and its applications (preprint communiqué), 1979 .

CHAPITRE VII

IDENTIFICATION D'UNE s.m.r. A PARTIR DE CERTAINES DE SES VARIATIONS.

Le problème sur $\mathbb{R}_+$.

Soit Y une semi-martingale de L^2 à un indice, relativement à la filtration du brownien W

$$Y_t = \int_0^t \theta(u)\, W(du) - \int_0^t \varphi(u)\, du \ .$$

Ses variations quadratiques, conditionnelles ou inconditionnelles sont égales au processus croissant de la partie martingale M de Y

$$<Y>_t = <M>_t = \int_0^t \theta^2(u)\, du \ .$$

En ce sens, la variation quadratique de Y est caractéristique du processus θ^2. On a même un résultat statistiquement très intéressant : au vu de la trajectoire ω, on peut estimer $\theta^2(u,\omega)$ à partir de la variation quadratique inconditionnelle qui est "mesurable" ; si par exemple, on dispose d'un modèle paramétrique sur θ :

$$\theta(u) = f(Y_u \ ; \ \alpha)$$

où f est une fonction connue et α un paramètre inconnu, on peut alors disposer d'une estimation presque sûre de α .

Par contre, d'une telle variation, on ne tirera évidemment aucune information sur φ . Pour estimer φ, il faudra revenir à des méthodes statistiques classiques, par exemple la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance (cf. Chapitre VIII).

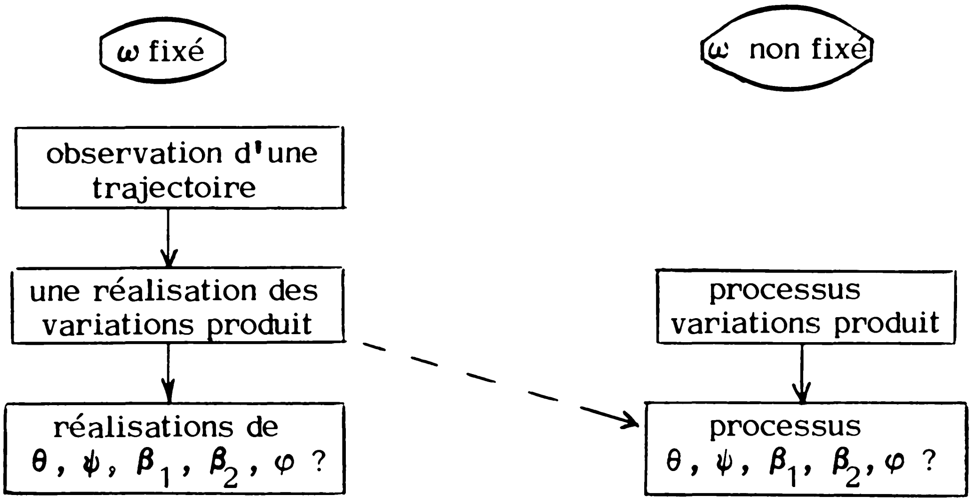
Le problème sur $\mathbb{R}_+^2$.

Nous allons nous poser les mêmes types de problèmes pour les s.m.r. sur $\mathbb{R}_+^2$: celui de l'identification dans ce chapitre VII, celui du changement de probabilité et du théorème de Girsanov au chapitre VIII. Comme nous allons le voir, ces problèmes restent en grande partie ouverts, la situation sur $\mathbb{R}_+^2$ étant simultanément plus riche et plus complexe.

Une s.m.r. est caractérisée par les cinq intégrandes, θ, ψ, β_1, β_2 et φ, qui constituent donc le modèle de la s.m.r.. Relativement à l'identification, nous nous poserons deux types de problèmes :

1) Si X est une s.m.r., étant donnée une certaine classe de processus obtenus à partir de X, cette classe de processus est-elle caractéristique de X ? , ou de certaines fonctions connues du modèle de X ? (Comme par exemple, la variation quadratique sur la droite est caractéristique de $f(\theta) = \theta^2$). Deux nouvelles classes de processus obtenus à partir de X apparaissent sur $\mathbb{R}_+^2$: celle des diverses variations produit (cf. Chapitre IV), et celle des variations quadratiques, ou même de certaines intégrales curvilignes, sur des chemins de $\mathbb{R}_+^2$ (cf. Chapitre V). Nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude des variations produit de X : de la connaissance de certains processus variations produit de X, qu'en déduire sur X .

2) On observe une trajectoire ω du processus X, par exemple sur R_{11} . Disposant alors d'une réalisation de chaque variation produit (et si l'on veut de variation produit de celle-ci, etc...), qu'en déduire quant aux réalisations correspondantes de θ, ψ, β_1, β_2, φ



Il va s'avérer que la 1-variation produit en s, à deux niveaux t, t', $t \leq t'$, $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ est extrêmement riche. Elle pourra être utilisée dans la forme 1-variation quadratique ($t = t'$), mais on l'utilisera principalement sous sa forme générale :

$$< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'} = \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)\,L_1(t'\,;z)\,dz.$$

L'identification des différentes parties de cette s.m.r., puis l'identification de ces parties elles-mêmes se révèleront très informatives : en particulier, nous obtiendrons que dans la classe des martingales :

$$M = \theta\,.W + \psi\,.WW$$

telles que ψ est déterministe continue, θ et ψ ne s'annulant pas, $< X >_{st}$, $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ sont caractéristiques de θ^2 et de ψ^2. Si de plus on connaît $<X>^{(2)}_{s,s'\,;t}$, alors θ et ψ seront connus, au signe global près.

La disposition de cette même variation comme fonction de t et de t', $t \leq t'$, permettra d'utiliser d'éventuels résultats fonctionnels liés au problème suivant
" l'application :

$$h \to H$$

où

$$H(t,t') = \int_0^t h(t,x)\,h(t',x)\,dx$$

est-elle injective ? " Il est clair, que dans une situation où $t \equiv t'$, une telle application n'est pas injective. On montrera ici (§ 2), que dans le cas où h est dérivable en t et ne s'annulant pas sur la diagonale, une telle application est injective. On en déduira en particulier que les variations $< X >^{(1)}_{s;t,t'}$ et $< X >^{(2)}_{s,s';t}$ sont caractéristiques des martingales faibles

$$X = \theta . W + \beta_1 . VW + \beta_2 . WU$$

dont la partie martingale est martingale forte.

Nous abordons enfin (§ 3) un dernier point qui est celui de l'identification paramétrique : on constatera alors que le fait de disposer de plusieurs variations produit nous permet de "mieux" connaître le processus que sur $\mathbf{R}_+$ et éventuellement d'estimer presque sûrement tous les paramètres de la s.m.r. . L'exemple, typique, que nous développons, est celui du processus de Ornstein Uhlenbeck :

. sur $\mathbf{R}$, ce processus s'écrit par exemple :

$$X_t = \sigma^2 \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(u-t)} W(du), \qquad \alpha > 0$$

et seule la variance σ^2 peut être estimée presque sûrement et il faut utiliser le théorème de Girsanov pour estimer α.

. sur $\mathbf{R}^2_+$, ce processus s'écrit, si $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$X_{st} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(u-s)+\beta(v-t)} W(du,dv).$$

Nous donnerons alors l'écriture de X_{st} comme semi-martingale (non nulle sur les axes) et constaterons que les variations $< X >_{st}$, $< X >^{(1)}_{st}$ et $< X >^{(2)}_{st}$ permettent d'identifier complètement les paramètres, σ^2, α, β. Mieux, X_{st} est i.d.c. et il suffit de connaître sa variation sur trois segments portés par trois droites formant un triangle pour l'identifier complètement.

§ 1 - Caractérisation d'une s.m.r. par certains processus variations produit.

Nous savons que pour une 1-martingale propre :

$$P_{st}^{(1)} = \int_{[0,t] \times R_{st}} \beta_1(v\,;z)\, dv\, W(dz)$$

une telle représentation en β_1 est unique (au sens $v \times z \times w$ presque sûrement). Une s.m.r. X représentée par ses intégrandes $(\theta, \psi, \beta_1, \beta_2, \varphi)$ est donc bien caractéristique de ces intégrandes qui donnent donc de X une représentation unique (Chapitre III, § 5).

La première variation envisageable est la variation (0,1,1), définissant le processus J_X : la connaissance du processus J_X permet-elle de caractériser X ? et sinon, quelle information sur X peut-on en déduire ?
Par exemple, il est facile de voir, que dans la classe des martingales fortes, J_X permet d'identifier complètement X, c'est-à-dire θ, au signe global près : en effet, dans ce cas, J_X est caractéristique du produit $\theta(\xi).\theta(\xi')$ avec $\xi \curlywedge \xi'$. Sous cette forme, J_X étant une variation de type intégrale stochastique ne sera guère utilisable dans la pratique pour l'identification trajectorielle : en effet, J_X étant non dérivable on ne pourra pas remonter, même partiellement, par dérivation à se représentation. Par contre, sa variation quadratique, c'est-à-dire la variation (0,2,2) ou sa variation produit avec X, c'est-à-dire la variation (1,1,1) permettront d'accèder aux processus dérivables $< J_X >_{st}$ et $< X, J_X >_{st}$, et donc par dérivation en s, t, aux intégrandes de représentation de ces deux processus absolument continus.

La deuxième variation envisageable est la variation quadratique rectangulaire de X.

1-1. La variation quadratique.

On sait que cette variation quadratique de X ne fait intervenir que la partie martingale M de X par l'intermédiaire de son processus croissant :

$$<X>_{st} = <M>_{st} = \int_{R_{st}} \theta^2(\xi)d\xi + \int_{R^2_{st}} \psi^2(\xi,\xi')d\xi d\xi'$$

de dérivée égale à

$$\frac{\partial}{\partial s\, \partial t} <X>_{st} = \theta^2(s,t) + \int_{R_{st}} \psi^2(u,t\,;\,s,v)\,du\,dv\ .$$

Il est clair que si M est une martingale forte, la connaissance de la variation quadratique permet de caractériser θ^2, comme sur la droite ; par contre :

Proposition 1-1.-

Sur $\mathbb{R}^2_+$, une martingale n'est pas caractérisée par sa variation quadratique (cette variation n'est caractéristique ni de θ^2, ni de ψ^2).

Démonstration :

Donnons deux contre-exemples :

. On sait que :

$$<W>_{st} = s.t$$

. Soit alors : $M = \psi.WW$, avec

$$\psi(\xi,\xi') = 1_{\xi \curlywedge \xi'}\ g(\xi)\, h(\xi')$$

$$g(u,v) = (4uv)^{-1/4}, \qquad h \equiv g\ .$$

Alors : $$<M>_{st} = s.t.$$

En effet :

$$\int_{R_{st}} \psi^2(u,t\,;\,s,v)du\,dv = \int_0^s g^2(u,t)du \int_0^t h^2(s,v)\,dv = \frac{1}{4\sqrt{st}} \int_0^s \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^t \frac{dv}{\sqrt{v}} = 1.$$

Vu l'orthogonalité de W et de M, tous les processus $\alpha W + \beta M$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, auront encore comme processus croissant $s.t$.

. Modifions un peu la définition de ψ afin de constater que, même dans la classe des martingales en $\psi.WW$, la variation quadratique n'est pas caractéristique de ψ^2. Prenons encore :

$$\psi(\xi,\xi') = C\, 1_{\xi \curlywedge \xi'}\ g(\xi)\, h(\xi')$$

avec :

$$g(u,v) = u^{\alpha} v^{\beta}, \qquad 2\alpha + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2\beta + 1 > 0$$

$$h(u',v') = u'^{\gamma} v'^{\delta}, \qquad 2\gamma + 1 > 0 \quad \text{et} \quad 2\delta + 1 > 0.$$

Une telle fonction ψ est dans L^2. D'autre part :

$$\int_{R_{st}} \psi^2(u,t\,;\,s,v)\,du\,dv = C\,\frac{s^{2\alpha+2\gamma+1}}{2\alpha+1}\;\frac{t^{2\beta+2\delta+1}}{2\delta+1}\;.$$

Et donc le choix

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\gamma + 1 = 2\beta + 2\delta + 1 = 0 \\ C = (2\alpha + 1)\,(2\delta + 1) \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \quad \text{négatifs} \end{cases}$$

assure bien que la martingale $M = \psi . WW$ a encore st pour processus croissant.

Venons-en aux 1-variations produit, qui vont s'avérer former une classe extrêmement riche.

1-2. Les 1-variations produit.

Nous supposerons désormais X dans L^4 ; la 1-variation produit aux niveaux t et t', $t \leq t'$ est définie au chapitre IV, A, § 2-1. Elle vaut

(1) $$< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'} = \int_{R_{st}} L_1(t\,;\,z)\, L_1(t',z)\,dz\,.$$

On définit en particulier la s.m.r. :

(2) $$< X >^{(1)}_{s,t} = \int_{R_{st}} L_1^2(t\,;\,z)dz\,.$$

La représentation de $< X >^{(1)}_{st}$ est donnée au Chapitre III, théorème 5-1 :

$$< X >^{(1)}_{st} = \int_{R_{st}\times[0,s]} \beta_{2,<X>^{(1)}}(\xi\,;u')W(d\xi)du' + \int_{R_{st}} \varphi_{<X>^{(1)}}(\xi)d\xi$$

avec :

(2-1) $$\begin{cases} \beta_{2,<X>^{(1)}}(u,t\,;\,s) = 2\displaystyle\int_0^t L_1(t\,;\,s,v)\,\psi(u,t\,;\,s,v)dv \\ \varphi_{< X >^{(1)}}(s,t) = (< X >)''_{st} + 2\displaystyle\int_0^t L_1\,\beta_1(t\,;\,s,v)\,dv \end{cases}$$

donc $< X >^{(1)}_{st}$ est caractéristique de $\beta_{2,<X>^{(1)}}$ et de $\varphi_{<X>^{(1)}}$. Cependant, en général, ces deux intégrandes n'ont pas de propriétés de semi-martingale en t, du fait que ψ, β_1 prises au point t, n'ont pas de propriété particulière de semi-martingale. Nous allons voir que la 1-variation produit à des niveaux différents est plus intéressante.

Proposition 1-2.-

La connaissance pour tout $t \leq t'$ des processus en (s,t') $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ caractérise les processus

$$A(u,t'\ ;\ s,t) = \int_0^t L_1(t\ ;\ s,v)\ \psi(u,t'\ ;\ s,v)\ dv,\quad u \leq s,\ t \leq t'$$

$$B(u,t'\ ;\ s,t) = \int_0^t L_1(t\ ;\ s,v)\ \beta_1(t'\ ;\ s,v)\ dv,\qquad t \leq t'\ .$$

Démonstration :

On a :

$$\begin{aligned} < X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'} - < X >^{(1)}_{s,t} &= \int_{R_{st}} L_1(t\ ;\ z')\ L_1(]t,t'];\ z')dz' \\ &= \int_{R_{st}} L_1(t\,;z)\Big[\int_{[0,1]\times[t,t']} \psi(z,z')W(dz)\Big]\ dz' \\ &+ \int_{R_{st}} L_1(t\ ;\ z')\Big[\int_t^{t'} \beta_1(v\ ;\ z')dv\Big]\ dz' \end{aligned}$$

et donc, l'identification de cette différence comme semi-martingale représentable en (s,t'), t étant un paramètre, conduit au résultat annoncé. ∎

Nous allons dans la suite faire l'hypothèse supplémentaire suivante sur ψ, β_1 :

$$\psi(z,z') \text{ et } \beta_1(v\ ;\ z') \text{ sont } \mathcal{F}_{z'}\text{-mesurables.}$$

Proposition 1-3.-

Si $\psi(z,z')$ et $\beta_1(v\ ;\ z')$ sont $\mathcal{F}_{z'}$-mesurables, alors les 1-variations produit $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ sont caractéristiques des processus suivants (pour $t \leq t'$) :

$$a(\xi,\xi';s) = \int_0^1 \psi(\xi\,;s,v)\,\psi(\xi'\,;s,v)\,dv$$

$$b(u,t'\,;s,t) = \theta(s,t)\,\psi(u,t'\,;\,s,t) + \int_0^t \psi(u\,,t'\,;s,v)\,\beta_1(t\,;\,s,v)\,dv$$

$$c(t'\,;s,t;x) = \int_0^t \beta_1(t'\,;s,v)\,\psi(x,t\,;s,v)\,dv$$

$$d(t'\,;s,t) = \theta(s,t)\,\beta_1(t'\,;s,t) + \int_0^t \beta_1(t'\,;s,v)\,\beta_1(t\,;s,v)\,dv\,.$$

Démonstration :

D'après la proposition précédente, la 1-variation produit est caractéristique du processus A

$$A(u,t'\,;s,t) = \int_0^t L_1(t\,;s,v)\,\psi(u,t'\,;s,v)\,dv$$

$$u \leq s,\ t \leq t'$$

$$= \int_0^t [\theta(s,v) + \int_0^t \beta_1(y\,;\,s,v)\,dy]\,\psi(u,t'\,;\,s,v)\,dv$$

$$+ \int_0^t [\int_{R_{1t}} \psi(\xi;s,v)\,W(d\xi)]\,\psi(u,t'\,;s,v)\,dv.$$

Montrons alors, que sous l'hypothèse : $\psi(z,z')$ est $\mathcal{F}_{z'}$-mesurable, ce processus en t, est une semi-martingale. La première partie de cette décomposition de A est à variation bornée en t puisque égale à :

$$\int_0^t \theta(s,v)\,\psi(u,t'\,;s,v)\,dv + \int_0^t (\int_0^v \beta_1(v\,;s,y)\,\psi(u,t'\,;s,y)\,dy)\,dv\ .$$

Montrons alors que la deuxième partie est une martingale en t .

Lemme.-

Soit $g : R_{11} \times [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$, un processus mesurable, tel que $g(x,y\,;u)$ ne charge que $y \geq v$, soit $\mathcal{F}^2_y$ adapté et vérifie en outre :

$$E \int_{R_{11}\times[0,1]} g^2(\xi\,;v)\,d\xi\ dv < \infty.$$

Alors, on a l'égalité des processus :

$$\int_0^t \left[\int_{R_{1t}} g(\xi ; v) W(d\xi)\right] dv = \int_{R_{1t}} \left[\int_0^y g(x,y ; v)\, dv\right] W(dx,dy) .$$

<u>Démonstration</u> :

Sous la condition L^2 sur g, les deux processus définis dans l'égalité ci-dessus existent en même temps dans L^2.

Il suffira alors, pour démontrer le résultat (qui est un théorème de Fubini) de le vérifier sur les fonctions simples, puis de l'étendre aux processus généraux g en approchant ceux-ci par une suite convenable de processus g_n .

Or l'identité du lemme est clairement vérifiée pour des processus simples. D'où le résultat.

Appliquons alors ce lemme au processus :

$$g(\xi ; v) = \psi(\xi ; s,v)\ \psi(u,t' ; s,v).$$

D'après l'hypothèse de mesurabilité de ψ (puisque t' est au dessus de ξ), $g(\xi,v)$ est bien $\mathcal{F}^2_\xi$-mesurable, la condition L^2 pour g étant vérifiée, $s \times u \times t'$ presque sûrement, puisque X est dans L^4, et l'on a bien :

$$\int_0^t \left[\int_{R_{1t}} \psi(u,t' ; s,v)\, \psi(\xi ;s,v) W(d\xi)\right] dv = \int_{R_{1t}} \left[\int_0^y \psi(u,t' ; s,v) \psi(x,y ; s,v) dv\right] W(dx,dy).$$

On en déduit donc que $s \times u \times t'$ p.s., $A(u,t',s,t)$ est une semi-martingale en t, dont les parties à variations bornées et martingales sont continues ; ceci permet d'identifier les processus a et b de la proposition 1-3.

Utilisant de la même façon le processus B de la proposition 1-2, et la mesurabilité de $\beta_1(v ; z')$ en z', on déduit que l'on peut identifier les deux autres processus, c et d de la proposition 1-3. ∎

On déduit de cette proposition le résultat suivant :

<u>Corollaire 1-3</u>.-

Soit $X = \theta . W + \psi . WW$ une martingale de L^4, telle que $\psi(z,z')$ soit

$\mathfrak{F}_{z'}$-mesurable et continue en z pour tout z' et tel que presque sûrement, θ ne s'annule pas.

a) Alors la variation quadratique $< X >^{(1)}_{s;t,t'}$ sont caractéristiques de θ^2 et ψ^2.

b) Plus précisément, si

$$Y = \tilde{\theta}.W + \tilde{\psi}.WW$$

est une martingale de L^4 telle que

$$< X > = < Y > , < X >^{(1)} = < Y >^{(1)}$$

il existe un processus adapté ϵ, à valeurs dans $\{-1,+1\}$ tel que

$$\tilde{\theta}(z) = \epsilon(z)\ \theta(z)$$

$$\tilde{\psi}(z',z) = \epsilon(z)\ \psi(z',z)$$

(et donc

$$L_{1Y}(t\ ;\ z) = \epsilon(z)\ L_{1X}(t\ ;\ z)\ ).$$

c) Si $\psi(z,z')$ est déterministe (ou seulement $\mathfrak{F}_{z \wedge z'}$-mesurable), continue en z, z' et si $\psi(z\,;(1,0))$ est $\omega \times z$-presque sûrement non nulle, alors la variation quadratique et les 1- et 2-variations produit caractérisent le modèle de X au signe global près.

<u>Démonstration</u> :

a) D'après la proposition 1-3, la 1-variation produit est caractéristique de :

$$\int_0^t \psi(x,t'\,;s,v)\ \psi(u,t\,;s,v)\ dv = a(x,t'\ ;\ u,t\ ;\ s)$$

$$t \leq t',\quad x \leq v,\ u \leq v$$

ce qui signifie que $(x,t'\ ;\ u,t,s,\omega)$-presque sûrement, a est déterminé. On ne peut cependant pas en déduire que (ξ,s,ω)-presque sûrement, le processus $a(\xi;\ \xi;\ s)$ est déterminé : en effet, $(\xi \times \xi,\ s,\ \omega)$ est un ensemble diagonal de mesure nulle.

Cependant, sous l'hypothèse de continuité en ξ, ξ' de $a(\xi,\xi'\ ;\ s)$, on aura l'identification de $a(\xi,\xi,s)$, $\xi \times s \times \omega$ presque-sûrement. Cette hypothèse sera en particulier vérifiée si $\psi(\xi ; z)$ est supposée continue en ξ. On en déduit en particulier que $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ permet d'identifier : $\int_0^t \psi^2(u,t\,;\,s,v)dv$ $s \times t \times \omega$ - presque sûrement.

Ceci implique alors que

$$\int_{R_{st}} \psi^2(u,t\,;\,s,v)\,du\,dv$$

et

$$\theta^2(s,t) = \frac{d^2}{ds\,dt} < X >_{st} - \int_{R_{st}} \psi^2(u,t\,;\,s,v)\,du\,dv$$

sont caractérisés par $< X >_{st}$ et $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$.

Utilisons alors le processus b (proposition 1-3) caractéristique de $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ valant, dans le cas particulier d'une martingale :

(3) $$b(z'\,;\,z) = \theta(z)\,\psi(z',z).$$

Donc, si θ ne s'annule pas, on en déduit bien que $< X >_{st}$ et $< X >^{(1)}_{s\,;\,t,t'}$ sont caractéristiques de θ^2 et de ψ^2.

b) Soit alors $Y = \widetilde{\theta}.W + \widetilde{\psi}.WW$ de même variation $< X >$ et $< X >^{(1)}$ que X. Puisque θ^2 ne s'annule pas, il en est de même de $\widetilde{\theta}^2$; posons alors :

$$\epsilon(z) = \theta(z)\,\widetilde{\theta}(z)^{-1}$$

ϵ est une variable à valeurs dans $\{-1,+1\}$, adaptée, et d'après la relation (3), on a :

$$\theta(z)\,\psi(z',z) = \widetilde{\theta}(z)\,\widetilde{\psi}(z',z)$$

soit

$$\widetilde{\psi}(z',z) = \epsilon(z)\,\psi(z',z)$$

et donc

$$\widetilde{L}_1(t\,;\,z) = \epsilon(z)\,L_1(t\,;\,z).$$

c) Sous l'hypothèse de mesurabilité en z et de continuité en z' de $\psi(z,z')$, on obtient :

$$\widetilde{\psi}(z',z) = \epsilon(z')\psi(z',z)$$

(pour la même fonction $\epsilon(z) = \theta(z)\,\widetilde{\theta}(z)^{-1}$) et donc :

$$\epsilon(z)\,\psi(z',z) = \epsilon(z')\,\psi(z',z).$$

En particulier

$$\epsilon((1,0))\,\psi(z'\,;(1,0)) = \epsilon(z')\,\psi(z'\,;(1,0))$$

et donc, $\epsilon(z')$ est constante, d'où c). ∎

Nous terminons cette partie en remarquant que les caractérisations de certains processus associés à une s.m.r. que nous avons obtenus dans cette première partie, ne peuvent pas être, dans la pratique, utilisables au vu d'une trajectoire : connaître un processus s.m.r. X, c'est connaître son modèle, alors que, W n'étant pas identifiable, connaître une réalisation de X, ne permet pas de connaître la réalisation correspondante de son modèle.

Nous développons au paragraphe suivant une toute autre méthode, qui permet d'identifier, au vu d'une trajectoire, les martingales faibles du type :

$$X = \theta.W + \beta_1.VW + \beta_2.WU\ .$$

On dira d'une telle identification qu'elle est trajectorielle.

§ 2 - Identification trajectorielle d'une s.m.r.-

On dispose maintenant d'une trajectoire de la s.m.r. X et donc des réalisations correspondantes des variations produit de X. En particulier sont accessibles :

$$\theta^2(s,t) + \int_{R_{st}} \psi^2(u,t\ ;\ s,v)\, du\, dv, \qquad \text{variation} \qquad (2,0,0)$$

$$\int_{R_{st}} \psi(u,t\ ;\ s,v)\, L_1(t\ ;\ s,v)\, L_2(u,t\ ;\ s)\, du\, dv, \qquad \text{variation} \qquad (1,1,1)$$

$$\int_{R_{st}} L_1^2(t\ ;\ s,v)\, L_2^2(u,t\ ;\ s)\, du\, dv, \qquad \text{variation} \qquad (0,2,2)$$

$$H_s(t,t') = \int_{R_{st}} L_1(t\ ;\ s,v)\, L_1(t'\ ;\ s,v)\, dv, \quad t \leq t' \qquad (1\text{-variation}).$$

De la dernière quantité,

si $t = t'$, on peut identifier

$$(< h_s(.) >)'_t = \int_0^s \left[\int_0^t L_1(t\ ;\ s,v)\, \psi(u,t\ ;\ s,v) dv\right]^2 du$$

où $h_s(t) = H_s(t,t)$.

si $t \leq t'$,

$$(<H_s(t,.)>)'_t = \int_0^s \left[\int_0^t L_1(t\ ;\ s,v)\, \psi(u,t'\ ;\ s,v) dv\right]^2 du.$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposerons que la partie $\psi.WW$ de X est nulle. Dans ce cas :

$$L_1(t\ ;\ z) = \theta(z) + \int_0^t \beta_1(v\ ;\ z)\, dv$$

est dérivable en t, valant $\theta(u,t)$ au point $z = (u,t)$. L'étude de la 1-variation produit aux niveaux t et t' nous permet d'identifier :

$$H_s(t,t') = \int_0^t L_1(t\ ;\ s,v)\, L_1(t'\ ;\ s,v)\, dv, \quad t \leq t' \tag{4}$$

pour tout s. Nous allons montrer que cette équation (4) permet de déterminer de façon unique (au signe $\epsilon(z)$ près pour $\theta(z)$, $\beta_1(t\ ;\ z)$ et $\beta_2(z\ ;\ s)$), les processus θ et β_1. Fixons l'indice s et la trajectoire ω et posons :

$$\ell(t,v) = L_1(t\ ;\ s,v)$$
$$\beta(t,v) = \frac{\partial}{\partial t}\ell(t,v) = \beta_1(t\ ;\ s,v).$$

L'équation (4) s'écrira encore :

(5) $$\int_0^t \ell(t,v)\ \ell(t',v)\,dv = H(t,t'), \qquad t \leq t'\ .$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.-

Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des fonctions $\ell(t,v)$ définies sur $[0,1]^2$, nulles si $v > t$, à valeurs réelles et vérifiant :

(ℓ 1) $\quad \frac{\partial}{\partial t}\ell(t,v) = \beta(t,v)$ existe et est dans $L^2([0,1]^2)$

(ℓ 2) $\quad \inf\limits_{t\in[0,1]} \theta(t) > 0$, où $\theta(t) = \ell(t,t)$

Alors l'application de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{U}$:

$$\ell \to H$$

(5) $$H(t',t) = \int_0^t \ell(t,v)\ \ell(t',v)dv, \qquad t \leq t'$$

est injective, θ et β étant déterminés par :

(5-1) $$\theta^2(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}H(t',t) - \frac{\partial}{\partial t'}H(t',t)\right]_{t'=t} \qquad (\theta(t) > 0)$$

(5-2) $$\theta(t)\ \beta(t',t) + \int_0^t \beta(t,v)\ \beta(t',v) = \frac{\partial^2}{\partial t\ \partial t'}H(t',t)\ .$$

En particulier, dès que $\frac{\partial^2 H}{\partial t\ \partial t'}$ est dans $L^2([0,1]^2)$, l'équation (5-2) a toujours une solution en β.

La démonstration de ce lemme nous a été communiquée par J.M. Bony.

Démonstration :

a) Unicité.

L'équation (5) se dérive en t, et en t', donnant les deux équations

(5-3) $$\theta(t)\,\ell(t',t) + \int_0^t \beta(t,v)\ \ell(t',v)\,dv = \frac{\partial}{\partial t}H(t',t)$$

(5-4) $$\int_0^t \ell(t,v)\ \beta(t',v)\,dv = \frac{\partial}{\partial t'}H(t',t)$$

puisque $\ell(t,v)$ est nul si $v > t$. Prenant les valeurs de ces deux équations en $t'=t$, on obtient par soustraction :

$$(5\text{-}1) \qquad \theta^2(t) = \left[\frac{\partial}{\partial t} H(t',t) - \frac{\partial}{\partial t'} H(t',t)\right]_{t'=t}$$

équation qui, sous la condition, $\theta(t) \geq 0$, détermine complètement θ.

Dérivant (5-3) en t', on obtient :

$$(5\text{-}2) \qquad \theta(t)\, \beta(t',t) + \int_0^t \beta(t,v)\, \beta(t',v)\, dv = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t'} H(t',t).$$

Soient alors $f(t,v)$, $g(t,v)$ deux solutions β de (5-2). Par différence de (5-2) prise en f et en g on obtient :

$$\theta(t)[f(t',t) - g(t',t)] + \int_0^t [f(t,v)\, f(t',v) - g(t,v)\, g(t',v)]dv = 0$$

soit encore, en posant :

$$r(t,v) = |f(t,v) - g(t,v)|$$

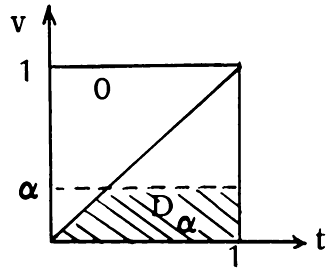
et si $\delta > 0$ est tel que :

$$\inf_{t \in [0,1]} \theta(t) \geq \delta$$

$$(5\text{-}5) \qquad r(t',t) \leq \frac{1}{\delta}\left[\int_0^t |f(t',v)|\, r(t,v)\, dv + \int_0^t |g(t,v)|\, r(t',v)\, dv\right].$$

Notons alors :

$$D_\alpha = \{(t,v),\ 0 \leq v \leq t \leq 1,\ v \leq \alpha\}$$



$$\|f\|_\alpha^2 = \int_{D_\alpha} f^2(t,v)\, dv\, dt\ .$$

Intégrant alors l'inégalité (5-5) sur D_α, on obtient :

$$\|r\|_\alpha^2 \leq \frac{2}{\delta^2}\, [\|f\|_\alpha^2 + \|g\|_\alpha^2]\ \|r\|_\alpha^2$$

et donc, puisque f et g sont dans $L^2([0,1]^2)$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{2}{\delta^2}\, [\|f\|_\alpha^2 + \|g\|_\alpha^2] < 1$$

ce qui implique que r est nulle sur D_α.

Soit α_o la plus grande valeur α de $[0,1]$ telle que r soit nulle sur D_{α_o}. Si $\alpha_o < 1$, il suffit alors d'étudier l'équation (5-2) sur le domaine Δ_{α_o}

$$\Delta_{\alpha_o} = \{(t,v),\ \alpha_o \leq v \leq t \leq 1\}$$

pour conclure à l'existence d'un α, $\alpha > \alpha_o$, proche de α_o tel que sur le domaine

$$D_{\alpha_o,\alpha} = \{(t,v),\ \alpha_o \leq v \leq t \leq 1,\ \ v \leq \alpha\}$$

(5-2) a une unique solution. D'où la contradiction et donc $\alpha = 1$. (5-2) a donc bien au plus une solution dans $L^2([0,1]^2)$.

b) Existence.

$\theta(t)$ est bien déterminée par (5-1) ; or

$$\ell(t,v) = \theta(t) + \int_0^t \beta(y,v)\,dy$$

il y aura donc existence de la solution pour l'équation (5) sous la condition :

$$c(t',t) = \frac{\partial^2 H}{\partial t\ \partial t'} \in L^2([0,1]^2)$$

dès que (5-2) admet une solution β sous cette même condition. Résolvons (5-2) en β :

$$\beta = T\beta$$

avec :

$$T\beta(t',t) = \frac{1}{\theta(t)}\left[c(t',t) + \int_0^t \beta(t,v)\ \beta(t',v)\,dv\right].$$

Choisissons alors :

δ, $0 < \delta < 1$, tel que : $\theta(t) \geq \delta$ pour tout t et $\alpha > 0$ tel que

$$\|c\|_\alpha \leq \frac{\delta^2}{4}$$

ce qui est possible puisque $c \in L^2([0,1]^2)$.

Soit alors

$$B_{\delta/2} = \{f \in L^2(D_\alpha),\ \ \|f\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2}\}.$$

a) T envoie $B_{\delta/2}$ sur $B_{\delta/2}$: en effet

$$\|Tf\|_\alpha \leq \frac{1}{\delta}\left[\frac{\delta^2}{4} + \|f\|_\alpha\ \|f\|_\alpha\right] \leq \frac{\delta}{2}.$$

b) T est contractante :

$$|Tf_1 - Tf_2|(t',t) \leq \int_0^t |f_1(t',s)|\, |f_1(t,s) - f_2(t,s)|\,ds + \int_0^t |f_2(t,s)|\, |f_1(t',s) - f_2(t',s)|\,ds$$

et donc :

$$\|Tf_1 - Tf_2\|_\alpha \leq \frac{\delta}{2}\|f_1 - f_2\|_\alpha + \frac{\delta}{2}\|f_1 - f_2\|_\alpha \leq \delta \|f_1 - f_2\|_\alpha .$$

Il y a donc un point fixe et un seul pour T dans $B_{\delta/2}$. Ceci démontre donc l'existence d'une solution dans D_α. Il suffit alors de recommencer sur le domaine Δ_α, et de constater que, pour la même valeur de α, (5-2) a de nouveau une solution sur $D_{\alpha,2\alpha}$ prolongeant la première. D'où le résultat du lemme 2. ■

Remarquons que dans la pratique cette méthode itérative prouvant l'existence de la solution β de (5-2) peut être utilisée afin d'obtenir β (méthode de Picard).

On en déduit le résultat :

<u>Théorème 2.</u>-

Si X est une martingale faible représentable

$$X = \theta.W + \beta_1.VW + \beta_2.WU$$

et si il existe $\delta > 0$ tel que pour tout (s,t) :

$$\theta(s,t) \geq \delta$$

alors, la connaissance d'une réalisation des variations $<X>^{(1)}_{s;t,t'}$ et $<X>^{(2)}_{s,s';t}$ détermine complètement les réalisations de θ, β_1, β_2.

Il suffit en effet de vérifier que, (s,ω) presque sûrement, les conditions du lemme 2 sont vérifiées pour

$$H_s(t',t) = \int_0^t L_1(t' ; s,v)\, L_1(t ; s,v)\,dv, \quad t \leq t'$$

et symétriquement, à (t,ω) fixé pour

$$K_t(s',s) = \int_0^s L_2(u,t ; s)\, L_2(u,t ; s')\,du, \quad s \leq s'.$$

En particulier, si θ, β_1, β_2 sont donnés sous forme d'un modèle paramétrique dépendant d'un paramètre α multidimensionel :

$$\theta(\xi) = \theta(X_\xi \ ; \alpha)$$

$$\beta_i(\xi) = \beta_i(X_\xi \ ; \alpha), \quad i = 1,2$$

l'estimation presque sûre des paramètres α pourra être faite par identification.

Nous allons développer dans le paragraphe suivant l'exemple du processus de Ornstein Uhlenbeck, donner sa représentation comme s.m.r. et constater que la connaissance de $< X >_{st}$ et $< X >_{st}^{(i)}$, $i = 1,2$ permet d'identifier complètement les trois paramètres du modèle.

§ 3 - Exemple : le processus de Ornstein Uhlenbeck.-

Nous définirons le processus de Ornstein Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^2$ comme étant le processus :

$$\begin{cases} Y_{st} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{s} \int_{-\infty}^{t} \exp\left[\alpha(u-s) + \beta(v-t)\right] W(du,dv) \\ \alpha > 0, \; \beta > 0 \end{cases}$$

où W est un bruit blanc de $\mathbb{R}^2$. Y_{st} est un processus, gaussien, stationnaire

$$\operatorname{cov}(Y_{st}, Y_{s't'}) = \frac{1}{4\alpha\beta} \exp\left[-\alpha|s-s'| - \beta|t-t'|\right].$$

D'autre part, c'est l'unique processus gaussien stationnaire possèdant la propriété markovienne suivante [1] :

$$E(Y_{s't'} \mid \mathcal{F}^*_{st}) = \lambda Y_{st} + \lambda_1 Y_{st'} + \lambda_2 Y_{s't} .$$

3-1. Le processus de Ornstein Uhlenbeck, s.m.r. sur $\mathbb{R}^2_+$.

Nous allons montrer que Y est une s.m.r., en donnant sa représentation, trace sur les axes comprises, sur $\mathbb{R}^2_+$:

$$Y_{st} = Y_{oo} + X_1(s) + X_2(t) + X_{st} , \quad (s,t) \geq (o,o)$$

où $X_i(.)$, est une semi-martingale à un indice sur l'axe i, nulle à l'origine, et X_{st} est une s.m.r. nulle sur les axes.

Posons :
$$H_t =]-\infty, 0] \times]0,t]$$
$$V_s =]0,s] \times]-\infty, 0]$$
$$R_0^{-\infty} =]-\infty,0] \times]-\infty,0].$$

On peut alors écrire, si $(s,t) \geq (0,0)$:

$$Y_{st} = e^{-(\alpha s+\beta t)}\left[\int_{R_{st}} + \int_{H_t} + \int_{V_s} + \int_{R_o^{-\infty}}\right] e^{\alpha u+\beta v}\, W(du,dv).$$

1ère intégrale.

Si on pose

$$M_{st} = \int_{R_{st}} e^{\alpha u+\beta v}\, W(du,dv)$$

la première intégrale s'écrit :

$$T_1(s,t) = e^{-(\alpha s+\beta t)}\, M_{st}$$

soit encore, appliquant la formule de Ito,

$$T_1(s,t) = W_{st} + \overline{P}_1(s,t) + \overline{P}_2(s,t) + \overline{B}(s,t)$$

où $\overline{P}_1$ est la 1-m.p.,

$$\begin{cases} \overline{P}_1(s,t) = \displaystyle\int_{[0,t]\times R_{st}} \beta_1(v\ ;\ z)\, dv\, W(dz) \\ \beta_1(v\ ;\ z) = -\beta\, e^{\beta(v-y)}, \quad \text{si } z=(x,y),\ y \le v \end{cases}$$

$\overline{P}_2$ la 2-m.p. obtenue de façon symétrique et $\overline{B}$ le processus absolument continu :

$$\overline{B}_{st} = \alpha\beta \int_{R_{st}} e^{-(\alpha u+\beta v)}\, M_{uv}\, du\, dv\ .$$

<u>2ème intégrale.</u>

Si on pose

$$N_1(s) = \int_{V_s} e^{\alpha u+\beta v}\, W(du,dv)$$

$N_1(s)$ est une martingale en s, et la deuxième intégrale s'écrit :

$$T_2(s,t) = e^{-(\alpha s+\beta t)}\, N_1(s)\ .$$

Par la formule de Ito en s appliquée à

$$x_1(s) = e^{-\alpha s}\, N_1(s)$$

on obtient :

$$x_1(s) = \frac{1}{2\beta}\, w_1(s) - \alpha \int_0^s e^{-\alpha u}\, N_1(u)\, du$$

où :

$$w_1(s) = 2\beta \int_{V_s} e^{\beta v}\, W(du,dv)$$

est un mouvement brownien normalisé à un indice indépendant des valeurs de W sur les trois premiers quadrants. On obtient donc :

$$T_2(s,t) = x_1(s) + (e^{-\beta t} - 1)\, e^{-\alpha s}\, N_1(s)$$

et, remarquant que :

$$e^{-\beta t} - 1 = -\beta \int_0^t e^{-\beta v}\, dv$$

on obtient :

$$T_2(s,t) = x_1(s) - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} e^{-\beta v}\, w_1(du)dv + \alpha\beta \int_{R_{st}} e^{-(\alpha u+\beta v)}\, N_1(u)\, du\, dv\ .$$

La troisième intégrale se traite de façon analogue.

Quant à la quatrième, elle vaut

$$T_4(s,t) = e^{-(\alpha s+\beta t)}\, Y_{oo}\ .$$

Examinons les termes à variation bornée en (s,t) de Y_{st}. Leur somme vaut :

$$\tilde{B}_{st} = e^{-(\alpha s+\beta t)} Y_{oo} + \alpha\beta\int_{R_{st}} e^{-(\alpha u+\beta v)}\, [M_{uv} + N_1(u) + N_2(v)]\, du\, dv\ .$$

Or :

$$X_{uv} = e^{-(\alpha u+\beta v)}\, [M_{uv} + N_1(u) + N_2(v) + Y_{oo}]$$

et donc, on a encore :

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{st} &= Y_{oo}[e^{-(\alpha s+\beta t)} - \alpha\beta \int_{R_{st}} e^{-(\alpha u+\beta v)}\, du\, dv] + \alpha\beta \int_{R_{st}} X_{uv}\, du\, dv \\ &= Y_{oo} + Y_{oo}(e^{-\alpha s} - 1) + Y_{oo}(e^{-\beta t} - 1) + \alpha\beta\int_{R_{st}} X_{uv}\, du\, dv\ .\end{aligned}$$

On en déduit alors :

Décomposition en s.m.r. du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

Le processus de Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^2$, de paramètres $\sigma^2 = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, admet la représentation :

$$Y_{st} = Y_{oo} + X_1(s) + X_2(t) + X_{st}\ , \qquad (s,t) \geq 0$$

où X_1, X_2 sont des semi-martingales à un indice, nulles à l'origine :

$$\begin{cases} X_1(s) = x_1(s) + Y_{oo}(e^{-\alpha s} - 1) \\ \text{avec} \\ x_1(s) = \frac{1}{2\beta}\, w_1(s) - \alpha \int_0^s x_1(u)\, du \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2(t) = x_2(t) + Y_{oo}(e^{-\beta t} - 1) \\ \text{avec} \\ x_2(t) = \frac{1}{2\alpha}\, w_2(t) - \beta\int_0^t x_2(v)\, dv \end{cases}$$

et X est la s.m.r. (nulle sur les axes)

$$X_{st} = W_{st} + P_1(s,t) + P_2(s,t) + B(s,t)$$

avec pour la 1-m.p. P_1 :

$$\begin{cases} P_1(s,t) = \int_{[0,t]\times R_{st}} \beta_1(v\ ;\ z)\, W(dz) - \frac{1}{2} \int_{R_{st}} e^{-\beta v}\, w_1(du)\, dv \\ \beta_1(v\ ;\ x,y) = -\beta\, 1_{\{y \le v\}} e^{\beta(v-y)} \end{cases}$$

la 2-m.p. P_2 s'obtenant de façon symétrique, et pour le processus absolument continu B :

$$B_{st} = \alpha\beta \int_{R_{st}} X_{uv}\, du\, dv$$

où

$$\begin{cases} W \text{ est un brownien bidimensionnel sur } \mathbf{R}_+^2 \\ w_i(.) \text{ sont deux browniens unidimensionnels sur } \mathbf{R}_+ \\ Y_{oo} \text{ est une gaussienne} \end{cases}$$

ces quatre processus étant orthogonaux entre eux.

On remarquera que x_1 et x_2 sont des processus de Ornstein Uhlenbeck unidimensionnels, orthogonaux, associés à w_1 et w_2.

Si Y_{st} est de paramètres $(\sigma^2, \alpha, \beta)$, alors, $\frac{Y_{st}}{\sigma}$ admet la représentation donnée ci-dessus.

3-2. Identification du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

La trace sur toute droite du processus de Ornstein-Uhlenbeck, en particulier sur toute horizontale et sur toute verticale est un processus de Ornstein-Uhlenbeck à un paramètre.

Sur l'horizontale de niveau t, si on note w_1^t le brownien normalisé :

$$w_1^t(s) = 2\beta \int_0^s \int_{-\infty}^t e^{\beta(v-t)}\, W(du,dv)$$

Y_{st}, $s \geq 0$, admet la représentation

$$Y_{st} = Y_{ot} + \frac{\sigma}{2\beta} w_1^t(s) - \alpha \int_0^s Y_{ut}\, du .$$

En particulier, on en déduit que la 1-variation quadratique de Y sur un segment horizontal de longueur s vaut

$$V_1(s) = \langle X \rangle^{(1)}_{s_o+s,t} - \langle X \rangle^{(1)}_{s_o,t} = \frac{\sigma^2}{4\beta^2}\, s , \quad s > 0$$

et de même

$$V_2(t) = \langle X \rangle^{(2)}_{s,t_o+t} - \langle X \rangle^{(2)}_{s,t_o} = \frac{\sigma^2}{4\alpha^2}\, t, \quad t > 0.$$

Une première conséquence de ces deux résultats est que la variation quadratique de X sur tout chemin en escalier, monotone, joignant $z = (s,t)$ à $z' = (s',t')$ vaut :

$$\frac{\sigma^2}{4} \left[\frac{|s-s'|}{\beta^2} + \frac{|t-t'|}{\alpha^2} \right]$$

et donc il en est de même de la variation sur tout chemin monotone joignant z à z' : <u>le processus de Ornstein-Uhlenbeck est donc une s.m.r. i.d.c.</u>.

D'autre part, d'après la décomposition de la s.m.r. X, on a :

$$V(s,t) = \langle X \rangle_{st} = \sigma^2 \langle W \rangle_{st} = \sigma^2 st .$$

On déduit alors des trois variations V_1, V_2, V les estimations presque sûres de σ^2, α, β :

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{\langle X \rangle_{st}}{4s \langle X \rangle^{(2)}_{st}} \right)^{1/2}$$

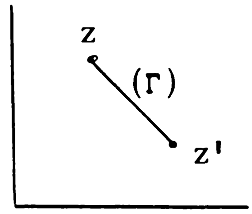
$$\hat{\beta} = \left(\frac{\langle X \rangle_{st}}{4t \langle X \rangle^{(1)}_{st}} \right)^{1/2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\langle X \rangle_{st}}{st} .$$

Comme nous le remarquions dans l'introduction, pour certains processus, le fait de disposer d'une unique trajectoire permet d'identifier complètement le modèle.

Remarquons que dans le cas présent, il suffit même d'observer le processus sur trois intervalles portés par des droites formant un vrai triangle, par exemple un segment horizontal, oblique, et vertical, pour identifier parfaitement le processus.

En effet, sur un segment oblique Γ de pente m, la variation entre deux points $z = (s,t)$, $z' = z + (s'-s)\,(1,m)$, vaut



$$< X >^{\Gamma} = \frac{\sigma^2}{4}\,|s-s'|\left[\frac{1}{\beta^2} + \frac{|m|}{\alpha^2}\right]$$

équation qui jointe à celles donnant V_1 et V_2 permet de déterminer σ^2, α, β.

CHAPITRE VIII

Changement de probabilité et théorème de GIRSANOV pour les s.m.r.

Si Z_{st} est la s.m.r.

$$Z_{st} = Y_{st} + B_{st}$$

où Y_{st} est la partie martingale faible et B_{st} la partie à variations bornées, les diverses variations produit peuvent donner des informations concernant la partie m.f. Y (cf. chapitre VII) , mais elles ne prennent pas en compte la partie à v.b. B .

Le but de ce chapitre est de donner des éléments permettant d'estimer B_{st}, que dans ce contexte nous appellerons un "signal". Comme au chapitre précédent, le problème sous sa forme générale reste très largement ouvert.

Le point de départ des techniques utilisées est l'étude du comportement des s.m.r. quand on effectue un changement de probabilité. Les articles de base sur ce problème sont l'article [5] de WONG et ZAKAI, qui fournit la représentation exponentielle d'une martingale positive et l'article [12] de HAJEK et WONG qui, à peu près simultanément avec notre travail, ont donné certains résultats concernant le problème de changement de probabilité pour une s.m.r. . Sur ces deux points, notre façon d'aborder les problèmes (de façon directement bidimensionnelle) diffère substanciellement de la leur et donne un éclairage nouveau aux résultats correspondants.

Dans toute la suite, $(\Omega , \mathfrak{F} , \mathbb{P}_o)$ sera un espace de probabilité de référence et $\{\mathfrak{F}_z\}$, $z \in R_{11}$ une filtration vérifiant les conditions F1-F4 du chapitre I. (On supposera $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{11}$). $\mathbb{P}$ sera une mesure de probabilité absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_o$, définie par sa densité de Radon Nikodym

$$\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o} \quad .$$

On dispose des diverses notions de martingales sous $\mathbb{P}_o$ et sous $\mathbb{P}$; on précisera toujours quand il s'agira de notion sous $\mathbb{P}$, parlant de $\mathbb{P}$-martingale, de $\mathbb{P}$-martingale faible, etc ... ; en général on n'apportera pas cette précision sous $\mathbb{P}_o$: on dira indifféremment 1-martingale ou $\mathbb{P}_o$-1-martingale.

En particulier, à partir du §2, W sera un $\mathbb{P}_o$-brownien, $\mathfrak{F}_z$ la filtration de ce brownien. On a sous $\mathbb{P}_o$ la notion de s.m.r., alors que à priori cette notion n'a aucun sens sous $\mathbb{P}$.

Au §1, nous lions, de façon générale, les propriétés de martingale sous $\mathbb{P}$ et de martingale sous $\mathbb{P}_o$, au moyen de la densité Λ , sans utiliser de représentation particulière de Λ .

Nous nous plaçons alors, et jusqu'à la fin du chapitre dans le cas où l'on a un $\mathbb{P}_o$-brownien W et où $\mathfrak{F}_z$ est la filtration associée. Nous donnons des conditions sous lesquelles une $\mathbb{P}$-martingale faible régulière est une s.m.r. (sous $\mathbb{P}_o$) .

Au §2, nous étudions en détail la représentation exponentielle d'un changement de probabilité, c'est à dire la représentation exponentielle d'une martingale positive d'espérance 1 : si Y_{st} est une s.m.r. positive valant 1 sur les axes, $X_{st} = \mathrm{Log}\, Y_{st}$ est, par la formule de Ito, une s.m.r. nulle sur les axes. On dira que $Y_{st} = \exp X_{st}$ est la représentation exponentielle de Y_{st} . Nous étudions les propriétés de X dans le cas particulier où $Y = \Lambda$ définit un changement de probabilité : en particulier X est caractérisée par sa partie martingale [5].

Nous donnons de la représentation une approche unidimensionnelle, appliquant par exemple à t fixé la formule de Ito en s. Nous donnons aussi une approche bidimensionnelle fondée sur la formule de Ito donnée au chapitre VI. Le lien entre les représentations de X et de Λ sera l'outil fondamental du reste de la théorie. En particulier, il nous servira à interpréter en terme d'espérances conditionnelles les facteurs de représentation de X.

Le §3 est consacré aux changements de probabilité orthogonaux, c'est à dire définissant une mesure $\mathbb{P}$ sous laquelle la filtration vérifie encore la condition F4 . Nous montrons (théorème 3-1) qu'un changement de probabilité est orthogonal si et seulement si la partie martingale de X est une martingale forte $\theta_X \cdot W$. Dans ce cas :

$$\tilde{W}_{st} = W_{st} - \int_{R_{st}} \theta_X(\xi)d\xi$$

est une $\mathbb{P}$-brownien (théorème 3-2) et toute s.m.r. sous $\mathbb{P}_o$ est encore une s.m.r. sous $\mathbb{P}$ relativement à $\tilde{W}$; nous donnons au théorème 3-3 sa représentation.

Le §4 étudie le comportement d'une s.m.r. pour un changement de probabilité fixé : quelles sont les s.m.r. qui ont sous $\mathbb{P}$ une certaine propriété de martingale ? Nous montrons (théorème 4-3) qu'une s.m.r. qui est une $\mathbb{P}$-martingale est caractérisée par sa partie $\mathbb{P}_o$-martingale. De même si elle est $\mathbb{P}$-martingale faible (resp. $\mathbb{P}$-1-martingale), elle est caractérisée par sa partie $\mathbb{P}_o$-martingale faible (resp. $\mathbb{P}_o$-1-martingale).

En particulier, puisque, si Z est une $\mathbb{P}$-martingale, ΛZ est une $\mathbb{P}_o$-martingale, donc $Z = \Lambda^{-1} \times (\Lambda Z)$ est une s.m.r., le théorème 4-3 met en bijection les $\mathbb{P}$-martingales et les $\mathbb{P}_o$-martingales.

Le §5 étudie le problème dual de celui étudié au §4 : si Z est une s.m.r. fixée, nous cherchons un changement de probabilité tel que sous $\mathbb{P}$ Z ait une certaine propriété de martingale.

Ce problème est évidemment très lié au théorème de Girsanov. Sur $\mathbb{R}$, tout processus somme d'un signal et d'une martingale peut-être transformé par changement de probabilité en une martingale, et il est remarquable que la densité de ce changement de probabilité, (la vraisemblance) peut s'exprimer au moyen de b'observation du processus, ce qui permet de faire de la statistique.

Les cinq conditions résumées ici (voir pour plus de détails la discussion que nous développons au début du §5) se transposent mal sur $\mathbb{R}^2$. On dispose pourtant de deux degrés de liberté dans la recherche de Λ (ou de X) : par exemple θ_X et ψ_X

Si l'on cherche à transformer une s.m.r. en une m.f. (1 condition), sous de bonnes conditions de régularité, on trouvera une infinité de changements de probabilité (dont un orthogonal) (cf. § 5-1) ; si l'on cherche à transformer Z en une 1-martingale, on aura à imposer 2 conditions (§ 5-2) et quand il y aura une solution elle sera unique. En général il ne sera pas possible de transformer une s.m.r. en martingale, et à plus forte raison en martingale forte.

Cependant dans le cas où :

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi)W(d\xi) - \int_{R_{st}} \varphi(\xi)d\xi$$

avec $\varphi\,\theta^{-1}$ dans $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$, il existe un unique changement de probabilité, nécessairement orthogonal, transformant Z en martingale, alors nécessairement martingale forte. Cette situation conduit au théorème de Girsanov pour les martingales fortes.

Nous donnons pour finir une toute autre approche de ce théorème, associant à Z

$$Z^*_{st} = \int_{Q_{st}} \theta(\xi)W(d\xi) - \int_{Q_{st}} \varphi(\xi)d\xi$$

où Q_{st} est l'équerre $\{(u,v)\ ,\ u \leq s \ \text{ ou } \ v \leq t\}$. Nous vérifions que Z^* est une $\mathbb{F}^*$- martingale sous $\mathbb{P}$, donc que $Z^*_z\, E(\Lambda\ |\mathbb{F}^*_z)$ est une $\mathbb{F}^*$-martingale sous $\mathbb{P}_o$. Ce résultat s'obtiendra en appliquant la formule de Ito sur les chemins croissants aux $\mathbb{F}^*$ martingales i.d.c.

§1 - Résultats préliminaires sur les changements de probabilité

Soit $(\Omega, \mathbb{F})$ un espace probabilisable, muni d'une filtration $= \{\mathcal{H}_z , z \in R_{11}\}$ avec $\mathcal{H}_{11} = \mathbb{F}$, et soient $\mathbb{P}_o$ et $\mathbb{P}$ deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathbb{F})$, $\mathbb{P}$ étant absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_o$, de densité $\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o}$. On notera dans tout ce chapitre $E_o(\cdot)$ pour désigner une espérance prise sous $\mathbb{P}_o$ et $E(\cdot)$ pour désigner une espérance prise sous $\mathbb{P}$.

La restriction de $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{H}_z$ est alors absolument continue par rapport à celle de $\mathbb{P}_o$ et a pour densité :

$$\Lambda_z^{\mathcal{H}} = E_o(\Lambda \mid \mathcal{H}_z)$$

$\{\Lambda_z^{\mathcal{H}} , \mathcal{H}_z\}$ est une martingale positive d'espérance 1 sur R_{11} .

Quand $\mathcal{H}_z$ sera la filtration $\mathbb{F}_z$, on notera Λ_z pour $\Lambda_z^{\mathcal{H}}$. Λ_z est une $\mathbb{F}_z$-martingale. Quand $\mathcal{H}_z$ sera la filtration $\mathbb{F}_z^1$, on notera $\Lambda_z^{(1)}$ ou $\Lambda_s^{(1)}$ pour $\Lambda_z^{\mathcal{H}}$. $\Lambda_s^{(1)}$ est une martingale à un paramètre pour la filtration $\mathbb{F}_s^1$. Quand $\mathcal{H}_z$ sera la filtration $\mathbb{F}_z^*$, on travaillera avec la $\mathbb{F}_z^*$-martingale Λ_z^* .

<u>Dans toute la suite, nous supposerons Λ dans $L^2 = L^2(\mathbb{P}_o)$.</u>

On a :

<u>Lemme 1-1</u>

Soit Y une variable $\mathcal{H}_{z'}$ mesurable de $L^2(\mathbb{P}_o)$.
Alors Y est dans $L^1(\mathbb{P})$ et vérifie si $z \leq z'$

$$E(Y \mid \mathcal{H}_z) = \frac{1}{\Lambda_z^{\mathcal{H}}} E_o(Y\,\Lambda_{z'}^{\mathcal{H}} \mid \mathcal{H}_z)$$

Démonstration

Puisque :

$$\int Y \, d\mathbb{P} = \int Y \Lambda \, d\mathbb{P}_o$$

et que Y et Λ sont dans $L^2(\mathbb{P}_o)$, Y est dans $L^1(\mathbb{P})$.

Si X est $\mathcal{H}_z$-adapté, omettant l'indice $\mathcal{H}$ de Λ , on a :

$$E(X) = E_o(X \Lambda_z) .$$

Or $Z = E(Y \mid \mathcal{H}_z)$ est caractérisé par $E(1_A Z) = E(1_A Y)$ quand A parcourt $\mathcal{H}_z$, et l'on a donc :

$$\begin{aligned} E(1_A Z) &= E(1_A Y) = E_o(1_A Y \Lambda_{z'}) \\ &= E_o(1_A E_o(Y \Lambda_{z'} \mid \mathcal{H}_z)) \\ &= E(1_A \Lambda_z^{-1} E_o(Y \Lambda_{z'} \mid \mathcal{H}_z)) \end{aligned}$$

et l'on a bien :

$$Z = \Lambda_z^{-1} E_o(Y \Lambda_{z'} \mid \mathcal{H}_z) \quad \blacksquare$$

On en déduit les différentes caractérisations des propriétés de martingale sous $\mathbb{P}$ pour une filtration vérifiant F1 - F2 - F3 .

Lemme 1-2

Soit Y_z un processus de $L^2(\mathbb{P}_o)$.

a) Y est une $\mathbb{P}$-martingale si et seulement si ΛY est une $\mathbb{P}_o$-martingale.

b) Y est une $\mathbb{P}$-1-martingale si et seulement si pour tout t $\{\Lambda_s^{(1)} Y_{st}, \mathfrak{F}_s^1\}$ est une martingale en s .

c) Y est une $\mathbb{P}$-1-martingale adaptée si et seulement si ΛY est une $\mathbb{P}_o$-1-martingale adaptée.

d) Y est une $\mathbb{P}$-martingale faible si et seulement si ΛY est une $\mathbb{P}_o$-martingale faible.

e) Y est une $\mathbb{P}$-martingale forte si et seulement si Y est $\mathfrak{F}_z$-adapté et tel que, si $z \leqslant z'$

$$E_o(\Lambda^* Y([z,z']) \mid \mathfrak{F}_z^*) = 0$$

En particulier Y sera une $\mathbb{P}$-martingale forte si il est $\mathfrak{F}_z$-adapté et si $\Lambda^* Y$ est une martingale pour la filtration $\mathfrak{F}^*$ sous $\mathbb{P}_o$.

Démonstration

Ces résultats découlent immédiatement du lemme 1-1.

Pour la deuxième partie du résultat e), il suffit de remarquer que si $\Lambda^* Y_z$ est une $\mathfrak{F}^*$-martingale, pour $z < z'$,

$$E_o(\Lambda^* Y([z,z']) \mid \mathfrak{F}_z^*) = 0$$

Remarquons que ceci n'exprime pas que $\Lambda^* Y$ est une martingale forte : en général Λ^* n'est pas $\mathfrak{F}$-adapté, donc $\Lambda^* Y$ n'est pas adapté. ∎

On a les résultats correspondants pour les notions de processus à variations bornées, de i-martingale propre et de martingale faible régulière :

<u>Lemme 1-3</u>

Soit Y_z un processus dans $L^2(\mathbb{P}_o)$

a) Y est à variations bornées (resp. à variation bornée dans le sens 1) sous $\mathbb{P}$ si et seulement si il est à variations bornées (resp. à 1-variation bornée) sous $\mathbb{P}_o$.

b) Y est une $\mathbb{P}$-1-martingale propre s'il est adapté, tel que var $Y_{s\bullet}$ est dans $L^2(\mathbb{P}_o)$ et $\{\Lambda_s^{(1)} Y_{st}\}$ est une 1-martingale.

c) Y est une $\mathbb{P}$-martingale faible régulière si il existe trois processus adaptés de $L^2(\mathbb{P}_o)$, M, P_1 et P_2 tels que ΛM soit une martingale, var $P_1(s,\bullet)$ et var $P_2(\bullet,t)$ soient dans $L^2(\mathbb{P}_o)$ et $\Lambda^{(i)}P_i$ des i-martingales.

Les différentes notions liées à des limites (dans $L^1(\mathbb{P}_o)$, donc en probabilité sous $\mathbb{P}_o$, donc en probabilité sous $\mathbb{P}$) de variations produit pourront être considérées comme éléments de $L^1(\mathbb{P})$ dès qu'elles sont dans $L^2(\mathbb{P}_o)$. En ce sens, on pourra parler sous $\mathbb{P}$ des processus $\langle Y\rangle$, $\langle Y\rangle^{(1)}$, J_Y, etc ... .

* *
*

<u>Nous supposerons dorénavant que</u> $(\mathfrak{F}_z)$ <u>est la filtration associée à un mouvement brownien W sous</u> $\mathbb{P}_o$.

La notion de s.m.r. n'est pas invariante par changement de probabilité : d'une part rien ne garantit en général l'existence d'un $\mathbb{P}$-brownien, et d'autre part, même si l'on disposait d'un tel $\mathbb{P}$-brownien $\tilde{W}$, rien ne garantit que le processus considéré admette une représentation au moyen de $\tilde{W}$. Inversement si Y est une $\mathbb{P}$-martingale faible, rien ne permet en général d'affirmer que c'est une s.m.r. (sous $\mathbb{P}_o$) .

Conditions de Ito

Si X, Y, ..., sont des s.m.r., f(x), g(x,y), ... des fonctions réelles, on notera I(f;X), I(g;X,Y), ..., les conditions assurant que l'on peut appliquer la formule de Ito bidimensionnelle à f(X), g(X,Y),... (cf. chapitre VI, théorème 3-1).

Nous n'expliciterons ces conditions que dans certains cas particuliers :

- si $f(x) = \text{Log } x$ on notera $\mathcal{L}(X) = I(\text{Log} ; X)$
- si $f(x) = \exp x$ on notera $\mathcal{E}(X) = I(\exp ; X)$

On peut alors donner des conditions sous lesquelles une $\mathbb{P}$-m.f. est une s.m.r. .

Lemme 1-4

a) Une $\mathbb{P}$-martingale M est une s.m.r. si $I(xy ; \Lambda^{-1} , \Lambda M)$ est vérifiée.

b) Une $\mathbb{P}$-1-martingale propre P_1 est une s.m.r. si elle vérifie les quatre conditions :

(b-1) P_1 est adaptée

(b-2) $E_o \int_0^1 P_1^2(1,v) \langle\Lambda\rangle^{(2)} dv$ est fini

(b-3) $P_1(1,t)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et si l'on pose :

$$\rho(t) = \Lambda_{1t} \frac{dP_1(1,t)}{dt}$$

$\rho(t)$ vérifie les conditions a, b, c, d du théorème 3-5 du chapitre III.

(b-4) $I(xy\ ;\ \Lambda^{-1}, \Lambda M)$ est vérifiée

c) Une $\mathbb{P}$-martingale faible régulière est une s.m.r. si sa partie $\mathbb{P}$-martingale vérifie (a), sa partie $\mathbb{P}$-1 - m.p. vérifie (b-1) - (b-4) et sa partie $\mathbb{P}$-2 - m.p. les conditions symétriques.

Démonstration

a) M est une $\mathbb{P}$-martingale, donc ΛM est une $\mathbb{P}_o$-martingale. Si l'on peut appliquer la formule de Ito à $\Lambda^{-1}(\Lambda M)$, M est une s.m.r. .

b) Les conditions b-2 et b-3 permettent d'appliquer la formule de Ito en t au processus $\Lambda(1,t)\ P_1(1,t)$ ce qui donne sa décomposition de semi-martingale en t :

$$\Lambda\ P_1(1,t) = P_1(1,0) + n(t) + b(t)$$

avec :

$$n(t) = \int_0^t P_1(1,v)\ \Lambda(1,dv)$$

$$b(t) = \int_0^t \rho(v)\ dv$$

avec :

$$\rho(v) = \Lambda(1,v) \frac{d}{dv} P_1(1,v)$$

P_1 étant une $\mathbb{P}$-1 - martingale adaptée (condition b-1), $\Lambda\ P_1$ est une $\mathbb{P}_o$-1 - martingale. On a donc :

$$\Lambda_{st}\, P_1(s,t) = E_o(\Lambda(1,t)P_1(1,t) \mid \mathfrak{F}_{st})$$

$$= P_1(0,0) + N(s,t) + B(s,t)$$

avec :

$$P_1(0,0) = E_o(P_1(1,0) \mid \mathfrak{F}_{st}) = E_o(P_1(1,0))$$

$$N(s,t) = E_o(n(t) \mid \mathfrak{F}_{st})$$

$$B(s,t) = E_o(b(t) \mid \mathfrak{F}_{st})$$

$n(t)$ étant une $\mathfrak{F}_{st}$-martingale de $L^2(P_o)$, $N(s,t)$ est une martingale de $L^2(P_o)$, représentable par le théorème de Wong et Zakai.

$B(s,t)$ est une 1-m.p. représentable (théorème 3-5, du chapitre III).

Reste à écrire $P_1 = \Lambda^{-1}\ (\Lambda\ P_1)$ et à utiliser l'hypothèse b-4 pour conclure.

c) Se déduit immédiatement de a) et b) ∎

<u>Lemme 1-5</u>

Si $\Lambda(\xi)$ est un processus tel que p.s. $\forall\, \xi \quad \Lambda(\xi) \neq 0$ et si Z est une s.m.r. telle que :

$$\forall\, z \qquad Y(z) = \int_{R_z} \Lambda(\xi)\ Z(d\xi) = 0$$

alors $Z = 0$.

<u>Démonstration</u>

Il y a unicité de la représentation d'une s.m.r.

$$\theta_Y(\xi) = \Lambda(\xi)\ \theta_Z(\xi) = 0 \qquad \text{donc} \quad \theta_Z = 0$$

$$\varphi_Y(\xi) = \Lambda(\xi)\ \varphi_Z(\xi) = 0 \qquad \text{donc} \quad {}_Z = 0$$

$$\psi_Y(u,y;x,v) = \Lambda(x,y)\ \psi_Z(u,y;x,v) = 0 \qquad \text{donc} \quad \psi_Z = 0$$

$$\beta_{1Y}(y;x,v) = \Lambda(x,y)\ \beta_{1Z}(y;x,v) = 0 \qquad \text{donc} \quad \beta_{1Z} = 0$$

et de même $\beta_{2Y} = 0$. ∎

* *
*

Fonctions harmoniques

Définition

On dira que la fonction $f(s,t\ ;\ x_1,\ \dots,\ x_n) : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique faible (resp. i-harmonique, harmonique) *relativement* aux semi-martingales $X_1,\dots,X_n$ si

$$F(s,t) = f(s,t\ ;\ X_1(s,t),\ \dots,\ X_n(s,t))$$

est une martingale faible (respectivement une i-martingale, une martingale).

Ainsi, si Y est une $\mathbb{P}_o$- m.f., dire que Y est une $\mathbb{P}$-m.f., (resp. $\mathbb{P}$-i-martingale, $\mathbb{P}$-martingale), c'est dire que $f(x,y) = xy$ est harmonique faible (resp. i-harmonique, harmonique) relativement à Λ et Y.

Dans le cas de la filtration brownienne, la formule de Ito permet de caractériser les différentes notions d'harmonicité :

* f est harmonique faible : il y a une condition à écrire : la nullité de la partie à v.b. et de la partie 2-m.p.

$$D_2\, D_1\, f = 0$$

* f est 1-harmonique si de plus elle vérifie

$$\sum_k \int_{R_{st}} (D_2\, f'_k)\, dx\, M_k^2(x,dy)$$

$$+ \sum_{k\ell} \int_{R_{st}} f''_{k\ell}\, \langle M_k^2(\cdot,dy), M_k^2(\cdot,y)\rangle^{(1)}(dx = 0$$

* f est harmonique : il y a trois conditions à écrire, exprimant la nullité des parties à v.b., 1-m.p. et 2-m.p.

Exemples

1°) En particulier si $I(xy\ ;\ \Lambda,Z)$ est vérifiée, on traduira les diverses propriétés de martingale de Z sous $\mathbb{P}$ à partir de :

$$\Lambda(z)Z(z) = \Lambda(0)Z(0) + \int_{R_z} \Lambda(\xi)Z(d\xi) + \int_{R_z} Z(\xi)\Lambda(d\xi)$$

$$+ J_{Z\Lambda}(z) + J_{\Lambda Z}(z) + \langle\Lambda,Z\rangle^{(1)}(z) + \langle\Lambda,Z\rangle^{(2)}(z) - \langle\Lambda,Z\rangle(z)$$

2°) On a défini (ch. VI, § 2-2) le processus à v.b. $\langle\langle X\rangle\rangle_{st}$ associé à une m.f.r. X de L^4 . Clairement :

$$f(s,t\ ;\ x) = x^2 - \langle\langle X\rangle\rangle_{st}$$

est harmonique faible relativement à X .

Si M est une 1-martingale de L^2 , alors

$$f(s,t\ ;\ x) \quad = \quad x^2 - \langle M\rangle^{(1)}_{st}$$

est 1-harmonique relativement à M .

Si M est une martingale de L^2 , en général :

$$f(s,t\ ;\ x) = x^2 - \langle M\rangle_{st}$$

n'est pas harmonique relativement à M ; elle le sera cependant si M est une martingale forte.

3°) Si M est une 1-martingale de L^2 , alors :

$$f(s,t\ ;\ x) \quad = \quad \exp\left[x - \frac{1}{2}\langle M\rangle^{(1)}_{st}\right]$$

est 1-harmonique relativement à M . La fonction $f(x) = \exp x$ sera donc harmonique relativement à la s.m.r. X si cette s.m.r. vérifie :

$$X = M_{1X} - \frac{1}{2}\langle X\rangle^{(1)} \quad = \quad M_{2X} - \frac{1}{2}\langle X\rangle^{(2)}$$

C'est l'étude de telles s.m.r. qui sera l'objet du paragraphe suivant .

§2 - Représentation exponentielle de Λ

L'idée de base est que toute s.m.r. Y_z p.s. positive admet sous la condition $\mathcal{L}(Y) = I(\mathrm{Log}\ ;\ Y)$ une représentation :

$$Y_z = \exp X_z$$

obtenue par application de la formule de Ito à

$$X_z = \mathrm{Log}\ Y_z$$

Nous allons étudier les propriétés de X dans le cas où Y est la martingale positive d'espérance 1 , densité de la probabilité $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{P}_o$.

2-1 : Représentation unidimensionnelle de X

* Fixant t_o , $\Lambda(s,t_o)$ est une martingale en s . Si :

$$E_o \int_o^1 \Lambda^{-2}(u,t_o)\ \langle\Lambda\rangle^{(1)}\ (du,t_o) < \infty \tag{2-1}$$

la formule de Ito en s permet d'écrire :

$$X_{st_o} = \int_o^s \Lambda^{-1}(u,t_o)\ \Lambda(du,t_o) - \frac{1}{2}\int_o^s \Lambda^{-2}\ (u,t_o)\ \langle\Lambda\rangle^{(1)}\ (du,t_o)$$

* Inversement, si :

$$E_o \int_o^1 \exp(2X(s,t_o))\ \langle X\rangle^{(1)}(du,t_o) < \infty \tag{2-2}$$

on peut appliquer la formule de Ito en s à

$$\Lambda(s,t_o) = \exp(X(s,t_o))$$

et l'on obtient :

$$\Lambda(s,t_o) = \int_o^s \Lambda(u,t_o)X(du,t_o) + \frac{1}{2}\int_o^s \Lambda(u,t_o) \langle X\rangle^{(1)} (du,t_o)$$

Or Λ est une martingale, donc une 1-martingale. On en déduit :

1°) D'une part que Λ est solution de l'équation :

$$\Lambda(s,t) = \int_o^s \Lambda(u,t)\, M_X^1(du,t)$$

soit, d'après le lemme 3-5 du chapitre III

$$\Lambda(s,t) = \int_o \Lambda(u,t)L_{1X}(t\ ;\ u,v)W(du,dv)$$

Donc :

$$\boxed{L_{1\Lambda}(t\ ;\ u,v) = \Lambda(u,t)L_{1X}(t\ ;\ u,v)} \qquad (2\text{-}3)$$

2°) D'autre part :

$$\int_o^s \Lambda(u,t)\left[B_X^1(du,t) + \frac{1}{2}\langle X\rangle^{(1)} (du,t)\right] = 0$$

et le lemme 1-5 permet de conclure :

$$B_X^1 + \frac{1}{2}\langle X\rangle^{(1)} = 0 \ .$$

On en conclut :

$$\boxed{X = M^1_X - \frac{1}{2} <M>^{(1)}} \qquad (2\text{-}4)$$

* Si X vérifie la condition (2-2') symétrique de la condition (2-2) on obtient de même :

$$L_{2\Lambda}(u,v\ ;\ s) = \Lambda(s,v)\ L_{2X}(u,v\ ;\ s) \qquad (2\text{-}3')$$

$$X = M^2_X - \frac{1}{2} <X>^{(2)} \qquad (2\text{-}4')$$

* Inversement si X vérifie (2-2), (2-4), les conditions symétriques (2-2') et (2-4'), et est nul sur les axes , $\Lambda_{st} = \exp X_{st}$ sera une martingale positive d'espérance 1 et définira bien un changement de probabilité.

Théorème 2-1

1°) Si Λ est une martingale positive d'espérance 1 vérifiant (2-1) et (2-1') , alors $\Lambda_z = \exp X_z$ où X est une s.m.r. (nulle sur les axes) vérifiant les équations (2-3), (2-3'), (2-4) et (2-4') .

2°) Si X est une s.m.r. vérifiant (2-2), (2-2'), (2-4) et (2-4'), alors $\Lambda_z = \exp X_z$ est une martingale positive d'espérance 1 définissant un changement de probabilité.

2-2 : Représentation bidimenstionnelle de X

Condition $\mathcal{L}$ (Λ)

Examinons plus en détail sous quelle condition sur la martingale positive Λ

on peut appliquer la formule de Ito à $\operatorname{Log} \Lambda$, c'est-à-dire écrire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} \Lambda(z) = & \int_{R_z} \frac{1}{\Lambda(\xi)} \Lambda(d\xi) - \int_{R_z} \frac{1}{\Lambda^2(\xi)} J_\Lambda(d\xi) \\
& - \frac{1}{2} \int_{R_z} \frac{1}{\Lambda^2(\xi)} \left[\langle\Lambda\rangle^{(1)} + \langle\Lambda\rangle^{(2)} - \langle\Lambda\rangle \right] (d\xi) \\
& + \int_{R_z} \frac{1}{\Lambda^3(\xi)} \left[J_{\Lambda,\langle\Lambda\rangle(1)} + J_{\langle\Lambda\rangle(2),\Lambda} + 2 \langle\Lambda,J_\Lambda\rangle \right] (d\xi) \\
& - \frac{3}{2} \int_{R_z} \frac{1}{\Lambda^4(\xi)} \langle J_\Lambda\rangle (d\xi)
\end{aligned} \tag{2-5}$$

Les conditions (cf. th. 3-1, chapitre VI) peuvent se résumer ainsi :

* $$\alpha_1 = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-3}(\xi) \langle\Lambda\rangle (d\xi) < \infty$$

Cette condition assure l'existence dans L^1 de l'intégrale en $\langle\Lambda\rangle$ et dans L^2 de l'intégrale en Λ , grâce à l'inégalité :

$$E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-2}(\xi) \langle\Lambda\rangle (d\xi) \leqslant \alpha_1^{2/3} \{E_o (\langle\Lambda\rangle_{11})\}^{1/3}$$

* $$\alpha_2 = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-4}(\xi) \langle J_\Lambda\rangle (d\xi) < \infty$$

Cette condition assure l'existence dans L^2 de l'intégrale en J_Λ et dans L^1 de celle en $\langle J_\Lambda\rangle$.

Les deux conditions sur α_1 et α_2 impliquent l'existence dans L^1 de l'intégrale en $\langle\Lambda,J_\Lambda\rangle$ grâce à la majoration :

$$|\langle\Lambda,J_\Lambda\rangle| \leqslant \langle\Lambda\rangle + \langle J_\Lambda\rangle$$

* Quant aux deux intégrales définissant des 1-m.p. , c'est à dire les intégrales en $<\Lambda>^{(2)} - <\Lambda>$ et en $J_{<\Lambda>^{(2)}\Lambda}$, elles existeront dans L^2 sous les conditions :

$$\alpha_3 = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-4}(x,y)\psi_\Lambda^2(u,y\ ;\ x,v)L_{1\Lambda}^2(y\ ;\ x,v)du\ dy\ dx\ dv < \infty$$

$$\alpha_4 = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-6}(x,y)L_{1\Lambda}^4(y\ ;\ x,v)L_{2\Lambda}^2(u,y\ ;\ x)du\ dy\ dx\ dv < \infty$$

* On aura les conditions α_3' et α_4' symétriques assurant l'existence dans L^2 des deux 2-m.p.

<u>Remarque</u> : Si l'on veut définir les trois processus à v.b. dans L^2 , il suffit de remplacer les conditions sur α_1 et α_2 par :

$$\alpha_1' = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-6}(\xi) <\Lambda> (d\xi) < \infty$$

$$\alpha_2' = E_o \int_{R_{11}} \Lambda^{-8}(\xi) <J_\Lambda> (d\xi) < \infty$$

<u>Représentation de X</u>

Identifiant dans (2-5) les cinq types d'intégrales, on obtient :

* partie martingale forte :

$$\boxed{\theta_X(\xi) = \frac{1}{\Lambda(\xi)}\,\theta_\Lambda(\xi)} \qquad (2\text{-}6)$$

* partie martingale non forte : si l'on pose $\xi = (u,v)$ et $\xi' = (u',v')$,

$$\psi_X(\xi;\xi') = \frac{1}{\Lambda(u',v)}\, \psi_\Lambda(\xi;\xi') - \frac{1}{\Lambda^2(u',v)}\, L_{1\Lambda}(v;\xi')L_{2\Lambda}(\xi;u')$$

donc, en utilisant (2-3) :

$$\boxed{\psi_X(\xi;\xi') = \frac{1}{\Lambda(u',v)}\, \psi_\Lambda(\xi,\xi') - L_{1X}(v;\xi')L_{2X}(\xi;u')} \qquad (2\text{-}7)$$

* partie 1-martingale propre :

$$\beta_{1X}(v;u',v') = \frac{-1}{\Lambda^2(u',v)} \int_0^{u'} \psi_\Lambda(u,v\ ;\ u',v')L_{2\Lambda}(u,v\ ;\ u')du$$

$$+ \frac{1}{\Lambda^3(u',v)} \int_0^{u'} L_{1\Lambda}(v\ ;\ u',v')L^2_{2\Lambda}(u,v\ ;\ v')du$$

soit encore, utilisant (2-3) :

$$\beta_{1X}(v\ ;\ u',v') = -\int_0^{u'} \psi_X(u,v\ ;\ u',v')L_{2X}(u,v\ ;\ u')du$$

$\psi_{1X}(u,v\ ;\ u',v')$ peut donc être choisi de sorte que :

$$\boxed{\psi_{1X}(\xi;\xi') = -\psi_X(\xi;\xi')L_{2X}(\xi;u')} \qquad (2\text{-}8)$$

(et la relation (2-8') symétrique) .

* Partie à variations bornées

$$\varphi_X(\xi) = -\frac{1}{2\Lambda^2(\xi)}\left[\theta_\Lambda^2(\xi) + \int_{R_\xi} \psi_\Lambda^2(x,u\ ;\ v,y)dx\ dy\right]$$

$$+ \frac{2}{\Lambda^3(\xi)}\int_{R_\xi} \psi_\Lambda(x,u\ ;\ v,y)\ L_{1\Lambda}(u\ ;\ v,y)\ L_{2\Lambda}(x,u\ ;\ v)dx\ dy$$

$$- \frac{3}{2\Lambda^4(\xi)}\int L_{1\Lambda}^2(u\ ;\ v,y)\ L_{2\Lambda}(x,u\ ;\ v)dx\ dy$$

Soit, tenant compte de (2-3), (2-6) et (2-7) :

$$\varphi_X(\xi) = -\frac{1}{2}\left[\theta_X^2(\xi) + \int_{R_\xi} \psi_X^2(x,v\ ;\ u,y)dx\ dy\right]$$

$$+ \int_{R_\xi} \psi_X(x,v\ ;\ u,y)\ L_{1X}(v\ ;\ u,y)\ L_{2X}(x,v\ ;\ u)dx\ dy$$

$$= (-\frac{1}{2} <X>_{st} + <X,J_X>_{st})''_{st} \qquad (2\text{-}9'')$$

Et l'on a donc :

$$\boxed{B_X = -\frac{1}{2} <X> + <X,J_X>} \qquad (2\text{-}9)$$

Remarque : Ce dernier résultat peut aussi se déduire de :

$$X = M_X^1 - \frac{1}{2} <X>^{(1)} \qquad (2\text{-}3)$$

B_{st} est la partie à v.b. de $-\frac{1}{2} <X>^{(1)}$ par le théorème 3-5 du chapitre III,

$$B_{st} = -\frac{1}{2} <X>_{st} - \int_{R_{st}^2} L_{2X}(\xi;u')\psi_{2X}(\xi;\xi')d\xi\ d\xi'$$

ce qui donne (2-9) si l'on remplace ψ_{2X} au moyen de la formule (2-8').

Remarquons qu'en regroupant les termes obtenus, on retrouve la formule (4-8) de [5] :

$$X(z) = \int_{R_z} \theta_X(\xi)W(d\xi) - \frac{1}{2}\int_{R_z} \theta_X^2(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_{R_z^2} \psi_X^2(\xi,\xi')d\xi\, d\xi' \\ + \int_{R_z^2} \psi_X(\xi,\xi')\left[W(d\xi) - L_{2X}(\xi;u')d\xi\right]\left[W(d\xi') - L_{1X}(v,\xi')d\xi'\right] \tag{2-10}$$

<u>Cas particulier</u> : Si $\psi_X = 0$, posant $M = \theta_X \cdot W$, on a :

$$X = M - \frac{1}{2}\langle M\rangle$$

De (2-7) et (2-8) , ou de (2-10) on déduit :

$$L_{1X}(v;\xi') = \theta_X(\xi') + \int_{R_{1v}} \psi_X(\xi,\xi')\left[W(d\xi) - L_{2X}(\xi;u')d\xi\right] \\ L_{2X}(\xi;u') = \theta_X(\xi) + \int_{R_{u'1}} \psi_X(\xi,\xi')\left[W(d\xi') - L_{1X}(v;\xi')d\xi'\right] \tag{2-11}$$

qui sont les équations (4-4) de [12] . Elles s'écrivent encore :

$$L_{1X}(v;\xi') = h_1(v;\xi') - \int_{R_{1v}} \psi_X(\xi,\xi')L_{2X}(\xi;u')d\xi \\ L_{2X}(\xi,u') = h_2(\xi;u') - \int_{R_{u'1}} \psi_X(\xi,\xi')L_{1X}(v;\xi')d\xi' \tag{2-12}$$

Il est remarqué dans [5] que si θ_X et ψ_X sont connus, un théorème de Picard assure l'unicité de la solution en L_{1X} et L_{2X} de ce système si ψ_X est p.s. borné.

Théorème 2-2

Sous la condition $\mathcal{L}(\Lambda)$, $\Lambda_z = \exp[X_z]$ et les intégrandes de la représentation de X sont donnés par (2-6), (2-7), (2-8), (2-8'), (2-9"). Si ψ_X est p.s. borné , X est caractérisé par sa partie martingale.

2-3 : Formules inverses

Le problème inverse consiste à savoir à quelle condition $\exp[X_z]$ définit un changement de probabilité.

Si $\Lambda_z = \exp[X_z]$ est une martingale, elle sera automatiquement positive, d'espérance 1 puisque X est nulle sur les axes.

Λ sera une martingale si X vérifie (2-4) et (2-4') :

$$X = M_X^1 - \frac{1}{2} \langle X\rangle^{(1)} = M_X^2 - \frac{1}{2} \langle X\rangle^{(2)}$$

Condition $\mathcal{E}$ (X)

La condition $\mathcal{E}$ (X) sous laquelle on peut appliquer la formule de Ito à $\exp[X_z]$ se réduit alors à l'existence dans L^2 des deux intégrales représentant Λ :

$$\mathcal{E}(X) \begin{cases} E_o \int_{R_{11}} \Lambda^2(\xi) \langle X\rangle (d\xi) < \infty \\ E_o \int_{R_{11}} \Lambda^2(\xi) \langle J_X\rangle (d\xi) < \infty \end{cases}$$

On obtient alors par la formule de Ito :

$$\boxed{\Lambda_z = 1 + \int_{R_z} \Lambda(\xi) \left[M_X + J_{M_X^2 M_X^1}\right] (d\xi)} \qquad (2\text{-}13)$$

et l'on constante aisément grâce aux formules (2-4), (2-4') la nullité des parties 1-m.p. et 2-m.p. fournies par la formule de Ito. L'annulation de la partie à v.b. redonne l'équation (2-9).

Proposition 2-3

Soit X une s.m.r. vérifiant les conditions (2-4) et (2-4'), $\Lambda_z = \exp X_z$, supposons vérifiée la condition $\mathcal{E}(X)$. Alors Λ_z est une martingale de L^2 définissant un changement de probabilité et la décomposition de WONG et ZAKAI de Λ découlera de (2-13).

2-4 : Interprétations de θ_X, L_{1X}, L_{2X}, ψ_X

L'interprétation de chacune de ces fonctions est donnée dans [5] en terme d'espérances conditionnelles sous $\mathbb{P}$ d'élements différentiels. Nous en donnerons ici d'une part une interprétation en terme de propriété de $\mathbb{P}$-martingales, d'autre part en terme d'espérance sous $\mathbb{P}$ d'accroissements non différentiels de W.

Nous supposerons ici vérifiée la condition $\mathcal{L}(\Lambda)$ et en outre nous supposerons que Λ est dans $L^4(\mathbb{P}_o)$.

2-4-1 : Interprétation de θ_X

Théorème 2-4

θ_X est l'unique processus de $\mathcal{L}^2_W(\mathbb{P}_o)$ tel que :

$$M_z = W_z - \int_{R_z} \theta_X(\xi)d\xi$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale faible : θ_X est caractérisé par :

$$E\left[W(\Delta) \mid \mathcal{F}_{z_o}\right] = E\left[\int_{\Delta} \theta_X(\xi)d\xi \mid \mathcal{F}_{z_o}\right] \tag{2-14}$$

pour tout rectangle $\Delta = [z_o, z]$.

Démonstration

Il est clair que (2-14) a au plus une solution en θ ; montrons que θ_X vérifie cette équation .

Pour disposer de la formule de Ito, faisons dépendre Δ de son point maximum z : fixons z_o et notons $\Delta_z = [z_o, z]$.

Par le lemme 1-1 ,

$$E\left[W(\Delta_z) \mid \mathcal{F}_{z_o}\right] = \frac{1}{\Lambda(z_o)} E_o\left[\Lambda(z)W(\Delta_z) \mid \mathcal{F}_{z_o}\right]$$

Λ étant dans L^4 , on a :

$$E_o \int_{\Delta_{11}} W^2(\Delta_{11}) <\Lambda> (d\xi) \leqslant ||\Lambda||_4^2$$

$$E_o \int_{\Delta_{11}} \Lambda^2(\xi)d\xi \leqslant \int_{\Delta_{11}} E_o \Lambda^2(1,1)d\xi \leqslant ||\Lambda||_2^2$$

On peut donc appliquer la formule de Ito au produit des martingales $\Lambda(z)$ et $W(\Delta_z)$, ce qui donne :

$$\Lambda(z)W(\Delta_z) = \int_{\Delta_z} W(\Delta_\xi)\Lambda(d\xi) + \int_{\Delta_z} \Lambda(\xi)W(d\xi)$$

$$+ J_{W(\Delta),\Lambda}(z) + J_{\Lambda,W(\Delta)}(z)$$

$$+ <W(\Delta),\Lambda>^{(1)}(z) + <W(\Delta),\Lambda>^{(2)}(z) - <W(\Delta),\Lambda>(z)$$

Les quatre premiers termes sont des martingales nulles en z_o , leurs espérances conditionnellement à $\mathfrak{F}_{z_o}$ sont nulles .

$\langle W(\Delta),\Lambda\rangle^{(1)} - \langle W(\Delta),\Lambda\rangle$ est une martingale faible (th. 5-1, chapitre III) nulle si z et z_o ont une coordonnée commune. Donc :

$$E_o\left[\Lambda(z)W(\Delta_z) \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right] = E_o\left[\langle W(\Delta),\Lambda\rangle(z) \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right]$$

Or :

$$\langle W(\Delta),\Lambda\rangle(z) = \int_{\Delta_z} 1\cdot\theta_\Lambda(\xi)d\xi = \int_{\Delta_z} \Lambda(\xi)\theta_X(\xi)d\xi$$

Si l'on remarque que $\theta_X(\xi)$ étant $\mathfrak{F}_z$-mesurable, on a :

$$E\left[\theta_X(\xi) \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right] = \frac{1}{\Lambda(z_o)}\, E_o\left[\Lambda(\xi)\theta_X(\xi) \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right]$$

on obtient :

$$E\left[W(\Delta_z) \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right] = \frac{1}{\Lambda(z_o)}\, E_o\left[\int_{\Delta_z} \Lambda(\xi)\theta_X(\xi)d\xi \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right]$$

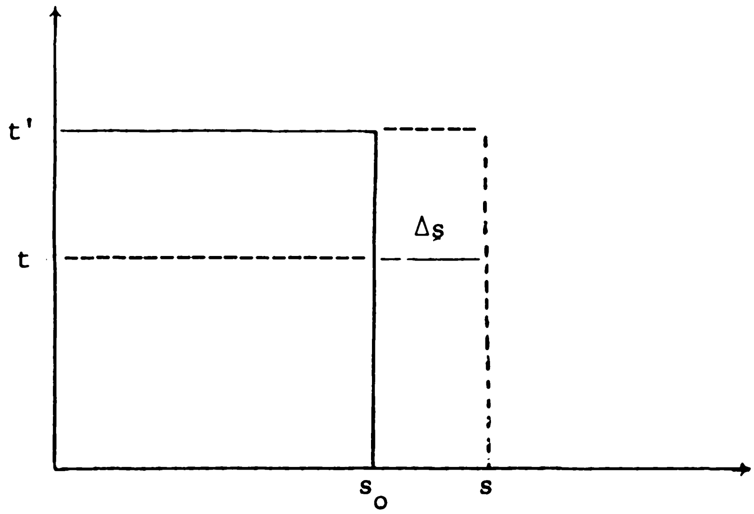
$$= E\left[\int_{\Delta_z} \theta_X(\xi)d\xi \mid \mathfrak{F}_{z_o}\right]$$

Formellement, on en déduit l'écriture différentielle :

$$E(W(dz) \mid \mathfrak{F}_z) = \theta_X(z)dz \quad \blacksquare$$

2-4-2 : Interprétation de L_{1X}

L_{1X} étant un facteur de 1-représentation , nous saurons l'interpréter en termes de 1-martingale



<u>Théorème 2-3</u>

$L_{1X}(t';z)$ est l'unique 1-dérivée (de 1-martingale adaptée de L^2) telle que :

$$m(s,t) = W(s,t) - \int_{R_{st}} L_{1X}(t';\xi)W(d\xi)$$

soit une $\mathbb{P}$-1-martingale adaptée : L_{1X} est caractérisée par :

$$E\left[W(\Delta s,t) \,|\, \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] = E\left[\int_{\Delta s\times[o,t]} L_{1X}(t';\xi)d\xi \,|\, \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] \qquad (2-15)$$

pour tout t et pour tout $\Delta s = [s_o,s]$.

Démonstration

Remarquons d'abord que les espérances considérées sont constantes en t si $t \geq t'$. Il suffit donc de s'intéresser au cas $t \leq t'$.

Il est clair que (2-15) a au plus une solution en L_1 ; montrons que L_{1X} vérifie cette équation. $W(\Delta s,t)$ est $\mathfrak{F}_{st}$-mesurable, mais si $t \leq t'$, on n'a pas $(s_o,t') \leq (s,t)$. Pour appliquer le lemme 1-1, nous n'utiliserons donc que la $\mathfrak{F}_{st'}$-mesurabilité de $W(\Delta s,t)$:

$$E\left[W(\Delta s,t) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] = \frac{1}{\Lambda(s_o,t')} E_o\left[\Lambda(s,t')W(\Delta s,t) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right]$$

On peut, vu les hypothèses faites sur Λ, appliquer la formule de Ito unidimensionnelle au produit $\Lambda(s,t')W(\Delta s,t)$:

$$\Lambda(s,t')W(\Delta s,t) = \int_{\Delta s} \Lambda(u,t')W(du,t) + \int_{\Delta s} W(\Delta u,t)\Lambda(du,t')$$

$$+ \langle W(\Delta\cdot,t),\Lambda(\cdot,t')\rangle(s)$$

et donc :

$$E_o\left[\Lambda(s,t')W(\Delta s,t) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] = E_o\left[\langle W(\Delta\cdot,t),\Lambda(\cdot,t')\rangle(s) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right].$$

Or :

$$\langle W(\Delta\cdot,t),\Lambda(\cdot,t')\rangle(s) = \int_{\Delta s\times[o,t]} L_{1\Lambda}(t' \,;\, u,v)\,du\,dv$$

$$= \int_{\Delta s\times[o,t]} \Lambda(u,t')L_{1X}(t' \,;\, u,v)\,du\,dv$$

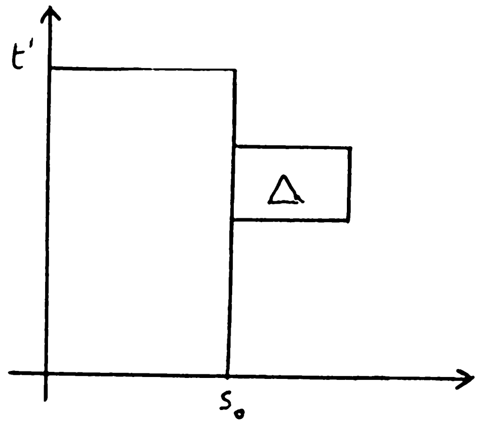
d'après l'égalité (2-3). Or $L_{1X}(t' \,;\, u,v)$ étant $\mathfrak{F}_{ut'}$-mesurable ,

$$E\left[L_{1X}(t' ; u,v) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] = \frac{1}{\Lambda(s_o,t')} E_o\left[\Lambda(u,t')L_{1X}(t' ; u,v) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right]$$

et l'on obtient bien

$$E\left[W(\Delta s,t) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] = E\left[\int_{\Delta s\times[o,t]} L_{1X}(t' ; u,v)du\, dv \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right] \qquad \blacksquare$$

<u>Remarque</u> : On en déduit par simple différence que, dans la situation schématisée ci-contre



$$E\left[W(\Delta) \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right]$$

$$= E\left[\int_\Delta L_{1X}(t';\xi)d\xi \mid \mathfrak{F}_{s_o t'}\right]$$

ce qui conduit au formalisme différentiel

$$E\left[W(ds,dt) \mid \mathfrak{F}_{st'}\right] = L_1(t' ; s,t)ds\, dt$$

<u>2-4-3 : Interprétation de ψ_X</u>

Montrons d'abord le lemme :

<u>Lemme 2</u>

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux rectangles , $\Delta_i = [z_i,z_i']$, avec $\Delta_1 * \Delta_2$, et si $z = z_1 \vee z_2$, alors :

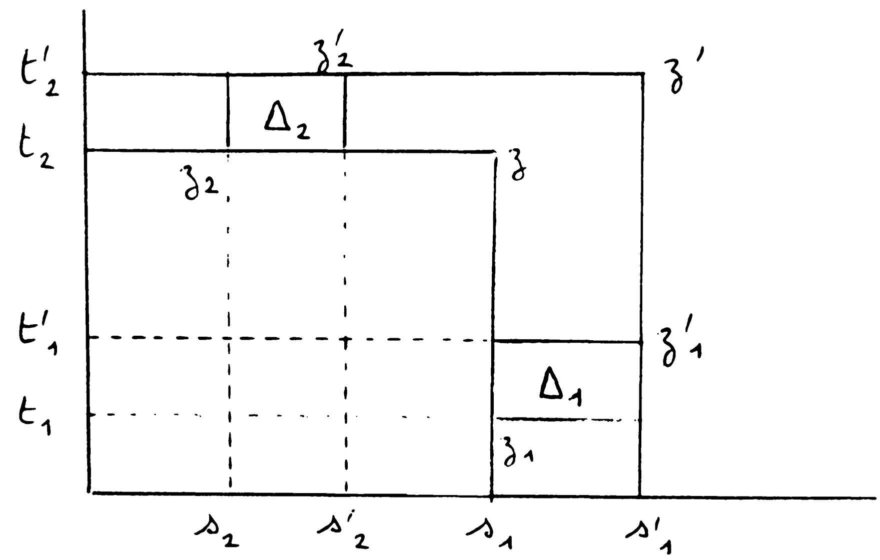
1°) $E\left[W(\Delta_1)W(\Delta_2) \mid \mathfrak{F}_z\right] = \frac{1}{\Lambda(z)} E_o\left[\int_{\Delta_2\times\Delta_1} \psi_\Lambda(\xi,\xi')d\xi\, d\xi' \mid \mathfrak{F}_z\right]$

$$2°) \quad E\left[W(\Delta_1)W(\Delta_2) - \int_{\Delta_2\times\Delta_1} L_{2X}(\xi;u')L_{1X}(v;\xi')d\xi\, d\xi' \mid \mathcal{F}_z\right]$$

$$= E\left[\int_{\Delta_2\times\Delta_1} \psi_X(\xi,\xi')d\xi\, d\xi' \mid \mathcal{F}_z\right]$$

Démonstration

Pour disposer de la formule de Ito, faisons dépendre Δ_1 et Δ_2 d'un même point $z' = z_1' \vee z_2'$: fixons z_1 , z_2 , t_1' , s_2' et considérons $z' = (s_1' , t_2') >> z$ comme variable



Notons

$$\Delta_{1z'} =]z_1 , z_1'] \qquad\qquad \Delta_{2z'} =]z_2 , z_2']$$

$m_1(z') = W(\Delta_{1z'})$ est une 1-martingale propre

$m_2(z') = W(\Delta_{2z'})$ est une 2-martingale propre

La formule de Ito appliquée au produit des trois s.m.r. $m_1(z')\, m_2(z')\, \Lambda(z')$ fournit sa décomposition . Le conditionnement par $\mathcal{F}_z$ annule la partie m.f. de cette décomposition.

Calculons le terme à v.b. . Il s'écrit $B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$ où :

* B_1 provient du terme n°5 de la formule donnée au théorème 5-1 du chapitre VI ; B_1 est nul car m_1, m_2 et Λ sont orthogonales deux à deux.

* B_2 qui provient du terme n°4 fait intervenir les parties 1-m.p. de m_1, m_2 et Λ . Celles-ci sont nulles pour m_2 et Λ et égale à m_1 pour m_1. Mais m_1 ne dépendant pas de t'_2 , B_2 est nul.

* On conclut de même à la nullité du terme symétrique B_3 .

* B_4 provient du terme n°8

$$B_4 = \frac{1}{2}\left[<m_1, J_{m_1\Lambda}> + <m_2, J_{\Lambda m_1}> + <\Lambda, J_{m_1 m_2}>\right]$$

m_1 et m_2 étant i-martingales propres, les deux premiers crochets sont nuls, le troisième donne :

$$B = \frac{1}{2}\int_{R^2_{z'}} \psi_\Lambda\, \psi_{J_{m_2 m_1}}(\xi;\xi')d\xi\, d\xi'$$

et le 1er résultat découle du fait que $\psi_{J_{WW}} = 1$.

Il suffit d'utiliser l'identité (2-7) et de revenir comme précédemment à une espérance sous $\mathbb{P}$ pour trouver le 2ème résultat du lemme . ∎

<u>Théorème 2-6</u>

ψ_X est l'unique processus de $\mathcal{L}^2_{WW}(\mathbb{P}_o)$ tel que

$$m(s,t) = \int_{R^2_{st}} \left[W(d\xi) - L_{2X}(\xi;u')d\xi\right]\left[W(d\xi')-L_{1X}(v;\xi')d\xi'\right]-\psi_X(\xi,\xi')d\xi\, d\xi'$$

soit une $\mathbb{P}$-martingale faible.

Démonstration

Montrons que Λm est une $\mathbb{P}_o$-martingale faible, donc vérifions que le terme à variations bornées $B_{\Lambda m}$ fourni par la formule de Ito appliquée au produit de Λ par m est nul.

Dans la fin de cette démonstration, ψ sera pris au point $(u,v\ ;\ u',v')$, L_1 et β_1 au point $(v\ ;\ u',v')$, L_2 et β_2 au point $(u,v\ ;\ u')$ et φ au point (u',v).

On a la représentation de m :

$$\theta_m = 0 \qquad\qquad \psi_m(\xi;\xi') = 1_{\xi \hat{\ } \xi'}$$

$$\beta_{1m} = -\int L_{2X}\, du \qquad\qquad \beta_{2m} = -\int L_{1X}\, dv'$$

$$\varphi_Y = \int (L_{1X}\, L_{2X} - \psi_X) du\, dv'$$

D'où, par la formule de Ito

$$\begin{aligned} B_{\Lambda m}(s,t) &= \int_{R_{st}} \Lambda(\xi)\, B_m(d\xi) + \langle \Lambda\, ,\, m \rangle_{st} \\ &+ \int_{[o,t]\times R_{st}} L_{1\Lambda}\, \beta_{1m}\, dv\, d\xi' + \int_{R_{st}\times[o,s]} L_{2\Lambda}\, \beta_{2m}\, d\xi\, du' \end{aligned}$$

Donc

$$B_{\Lambda m}(s,t) = \int_{R^2_{st}} A(\xi,\xi') d\xi\, d\xi'$$

avec

$$A(\xi,\xi') = \Lambda(\xi \vee \xi')\left[L_{1X}\, L_{2X} - \psi_X\right] + \psi_\Lambda - L_{1\Lambda}\, L_{2X} - L_{2\Lambda}\, L_{1X}$$

et l'application simple des identités (2-3) et (2-7) montre que ce coefficient est nul. ∎

§3 - Changements de probabilité orthogonaux

Rappelons que nous nous sommes placés dans le cas où la filtration est celle de $\mathbb{P}_o$-brownien W .

Définition

On dira qu'un changement de probabilité est orthogonal si la filtration $\mathfrak{F}$ vérifie encore la condition F4 (cf. ch. I) sous la nouvelle probabilité $\mathbb{P}$.

Nous étudions dans ce paragraphe les changements de probabilité orthogonaux définis par une densité $\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o}$ de $L^2(\mathbb{P}_o)$, puis les propriété des s.m.r. sous un tel changement de probabilité.

Nous supposerons que $X = \text{Log}\,\Lambda$ est une s.m.r. vérifiant (2-4), (2-4') et $\mathcal{E}(X)$.

Théorème 3-1

1°) Si $\psi_X = 0$, Λ définit un changement de probabilité orthogonal. Dans ce cas, X_z s'écrit :

$$X_z = M_z - \frac{1}{2} \langle M \rangle_z$$

M étant la martingale forte $M = \theta_X \cdot W$.

2°) Réciproquement, si Λ_{11}^{-1} est intégrable, les seuls changements de probabilité orthogonaux sont de ce type.

Démonstration

1°) Supposons que $\psi_X = 0$ (cf. [10])

Nous avons déjà noté au §2 que dans ce cas :

$$X = M - \frac{1}{2}\langle M\rangle \qquad \text{avec} \qquad M = \theta_X \cdot W$$

Il ne figure pas d'intégra-le double ou mixte dans la représentation de X .

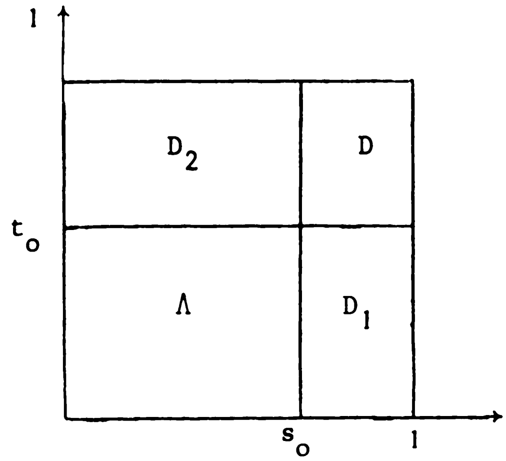
Pour montrer que la filtration $\mathcal{F}$ vérifie F4 , montrons que si Y est une variable $\mathcal{F}_{11}$-mesurable bornée, pour tout $z_o = (s_o,t_o)$

$$E\left[E(Y \mid \mathcal{F}^1_{s_o}) \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right] = E(Y \mid \mathcal{F}_{z_o}) .$$

Par le lemme 1-1, on a :

$$A = E\left[E(Y \mid \mathcal{F}^1_{s_o}) \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right] = \frac{1}{\Lambda(1,t_o)} E_o\left[\frac{\Lambda(1,1)}{\Lambda(s_o,1)} E_o(Y\Lambda(1,1) \mid \mathcal{F}^1_{s_o}) \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right] .$$

A la partition de R_{11} en quatre rectangles adjacents en z_o correspond la décomposition de $\Lambda(1,1)$ en produit de quatre termes :



$$\Lambda(1,1) = \Lambda(z_o)\ D_1\ D_2\ D(1,1)$$

où

$$D_1 = \exp\left[X([(s,o)\ ,\ (1,t)])\right]$$

$$D_2 = \exp\left[X([(o,t)\ ,\ (s,1)])\right]$$

$$D(z) = \exp\left[X([z_o,z])\right]$$

On a également :

$$\Lambda(1,t_o) = \Lambda(z_o)\ D_1$$

$$\Lambda(s_o,1) = \Lambda(z_o)\ D_2$$

Si l'on note :

$$Y_1 = E_o\left[Y\Lambda(1,1) \mid \mathcal{F}^1_{s_o}\right]$$

On peut donc écrire :

$$A = \frac{1}{\Lambda(z_o)D_1} E_o\left[D_1 \; D(1,1) \; Y_1 \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right]$$

$$= \frac{1}{\Lambda(z_o)} E_o\left[D(1,1) \; Y_1 \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right]$$

Pour achever cette démonstration, admettons un instant le lemme suivant :

<u>Lemme 3-1</u>

$$E_o\left[D(z) \mid \mathcal{F}^*_{z_o}\right] = 1$$

On peut alors préconditionner dans A par $\mathcal{F}^*_{z_o}$ pour laquelle Y_1 est mesurable et écrire :

$$A = \frac{1}{\Lambda(z_o)} E_o\left(Y_1 \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right)$$

$$= \frac{1}{\Lambda(z_o)} E_o\left[E_o(Y\Lambda(1,1) \mid \mathcal{F}^1_{s_o}) \mid \mathcal{F}^2_{t_o}\right]$$

Utilisant F4 sous $\mathbb{P}_o$, on a encore :

$$A = \frac{1}{\Lambda(z_o)} E_o\left(Y\Lambda(1,1) \mid \mathcal{F}_{z_o}\right) = E(Y \mid \mathcal{F}_{z_o}) \qquad \blacksquare$$

<u>Démonstration du lemme 3-1</u> :

Si Δ_z note le rectangle $[z_o,z]$, on a vu (ch. III, §5) que $Y_z = X(\Delta_z)$ est une s.m.r. . Compte tenu du fait que Λ est une martingale, la formule de Ito permet d'écrire :

$$D(z) = \exp\left[X(\Delta_z)\right] = \int_{\Delta_z} \Lambda(\xi)\left[\theta_X(\xi)\, W(d\xi) + J_Y(d\xi)\right]$$

Or :

$$J_Y(du,dv) = X(du,[t_o,v])\, X([s_o,u], dv)$$

On peut donc représenter $D(z)$ sous la forme :

$$D(z) = 1 + \int_{\Delta_z} \theta_D(\xi)W(d\xi) + \int_{\Delta_z^2} \psi_D(\xi,\xi')W(d\xi)W(d\xi')$$

qui permet de conclure. ■

<u>Remarques</u>

1°) C'est le fait que X s'exprime sans intégrale double qui a permis de conclure : s'il y avait dans la représentation de X_z une intégrale en $\psi\cdot WW$ ou, par exemple, en $\psi_1\cdot ZW$, la formule de Ito ferait apparaître dès le terme $J_Y(d\xi)$ des éléments différentiels $W(du,dv)$, avec $v < t_o$, donc $\mathfrak{F}^*_{z_o}$-mesurables ; $E_o(D(z)|\mathfrak{F}^*_{z_o})$ ne serait pas en général déterministe.

2°) On a pu conclure également grâce au fait que la fonction $\exp(x)$ est harmonique faible relativement à la s.m.r. $X(\Delta_z)$.

3°) On peut donner une autre démonstration de ce lemme : si $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ est une partition de $[z_o,(1,1)]$, et si θ_X est π-simple , alors $D(1,1) = \Pi\, d_{ij}$ où, avec des notations évidentes :

$$d_{ij} = \exp\left[\theta_X(i,j)\, W(\Delta_{ij}) - \frac{1}{2}\,\theta_X^2(i,j)\, |\Delta_{ij}|\,\right]$$

Balayant les (i,j) dans l'ordre lexicographique inversé, on écrit dans un raisonnement par récurrence $E_o(D(1,1)|\mathfrak{F}^*_{z_o})$ comme produit des $E_o(d_{ij}|\mathfrak{F}^*_{ij})$.
Or, conditionnellement à $\mathfrak{F}^*_{ij}$,

$$d_{ij} = \exp\left[U - \frac{1}{2}\sigma^2\right]$$

où U suit la loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Donc $E_o(d_{ij} \mid \mathfrak{F}^*_{ij}) = 1$. Il reste à faire tendre le pas de π vers zéro et à passer à la limite pour conclure.

2°) Supposons F4 vérifiée sous $\mathbb{P}$

Soient $t \leqslant t' \leqslant 1$ et Y une variable $\mathfrak{F}_{1t'}$-mesurable, la condition (F4) sous $\mathbb{P}$

$$E(Y \mid \mathfrak{F}_{st}) = E(E(Y \mid \mathfrak{F}^2_t) \mid \mathfrak{F}^1_s)$$

est transformée par le lemme 1-1 en

$$\frac{1}{\Lambda(s,t)} E_o(Y\Lambda(1,t') \mid \mathfrak{F}_{st}) = \frac{1}{\Lambda(s,t')} E_o\left[\frac{\Lambda(1,t')}{\Lambda(1,t)} E_o(Y\Lambda(1,t') \mid \mathfrak{F}^2_t) \mid \mathfrak{F}^1_s\right]$$

Si l'on choisit en particulier :

$$Y = \frac{1}{\Lambda(1,t')}$$

qui est bien $\mathfrak{F}_{1t'}$-mesurable et qui est intégrable car on a supposé $\Lambda^{-1}(1,1)$ intégrable et car $\frac{1}{x}$ est convexe, on obtient :

$$\frac{\Lambda(s,t')}{\Lambda(s,t)} = E_o\left[\frac{\Lambda(1,t')}{\Lambda(1,t)} \mid \mathfrak{F}^1_s\right]$$

Autrement dit à $t \leqslant t'$ fixés , $\frac{\Lambda(s,t')}{\Lambda(s,t)}$ est une martingale en s pour la filtration $(\mathfrak{F}^1_s)$. Si l'on note M pour M^1_X , on a (formule 2-4)

$$\frac{\Lambda(s,t')}{\Lambda(s,t)} = \exp\left[M_{st'} - M_{st} - \frac{1}{2}(\langle M\rangle^{(1)}_{st'} - \langle M\rangle^{(1)}_{st})\right]$$

qui est une martingale en s si :

$$-\frac{1}{2}(\langle M\rangle^{(1)}_{st'} - \langle M\rangle^{(1)}_{st}) + \frac{1}{2}\langle M_{\bullet t'} - M_{\bullet t}\rangle^{(1)}_{s} = 0$$

et, développant par bilinéarité ,

$$\langle M_{\bullet t'} - M_{\bullet t} , M_{\bullet t}\rangle^{(1)} = 0$$

M est donc une 1-martingale représentable a.o.1 ; le théorème 3-5 du chapitre V permet de conclure que M^1_X est une martingale forte. $\psi_X = 0$. ■

<u>Théorème 3-2</u>

Si X définit un changement de probabilité orthogonal, et si θ_X est dans L^4 ,

$$\tilde{W}_z = W_z - \int_{R_z} \theta_X(\xi)\, d\xi$$

est un $\mathbb{P}$-brownien .

<u>Démonstration</u> [10]

On avait montré au théorème 2-4 que $\tilde{W}$ était une $\mathbb{P}$-martingale faible. Montrons que c'est une $\mathbb{P}$-brownien .

$\tilde{W}$ est dans $L^2(\mathbb{P})$: en effet :

$$E(\tilde{W}_z^2) = E_o\left[\Lambda_{11}(W_z^2 - \int_{R_z} \theta_X(\xi)\, d\xi)^2\right]$$

$$\leqslant 2\left[E_o(\Lambda_{11}\, W_{11}^2) + E_o(\Lambda_{11}\int_{R_{11}} \theta_X^2(\xi)\, d\xi)\right]$$

qui est fini, quand θ_X est dans $L^4(\mathbb{P}_o)$.

D'autre part, les différents processus croissants de W et $\tilde{W}$, en tant que limite en probabilité sous $\mathbb{P}_o$, donc sous $\mathbb{P}$, de variations quadratiques, coïncident :

$$\langle\tilde{W}\rangle_{st} = \langle\tilde{W}\rangle^{(i)}_{st} = st$$

et plus généralement, si $\Delta t = [t_1, t_2]$ est fixé,

$$\langle\tilde{W}_{\bullet,\Delta t}\rangle^{(1)}_s = s \times |\Delta t|$$

$\tilde{W}(s,\Delta t)$ est donc une $\mathbb{P}$-martingale en s (par le théorème 2-5 où $L_{1X} = \theta_X$) continue, dans L^2, de processus croissant $s \times |\Delta t|$. C'est donc un $\mathbb{P}$-brownien à un paramètre s, de variance $s \times |\Delta t|$. En particulier

$$\text{var}\ \tilde{W}(\Delta s,\Delta t) = |\Delta s| \times |\Delta t| \tag{3-1}$$

Si $\Delta t'$ est un intervalle disjoint de Δt,

$$\langle\tilde{W}_{\bullet\Delta t}, \tilde{W}_{\bullet\Delta t'}\rangle^{(1)}_s = \langle W_{\bullet\Delta t}, W_{\bullet\Delta t'}\rangle^{(1)}_s = 0$$

($\tilde{W}$ est a.o.1). Donc sur deux rectangles disjoints Δ_1 et Δ_2, $\tilde{W}(\Delta_1)$ et $\tilde{W}(\Delta_2)$ sont deux gaussiennes indépendantes centrées, ce qui joint à (3-1) achève de démontrer le théorème.

Une autre démonstration de ce théorème est donnée dans [5].

* *

*

$\tilde{W}$ est clairement une $\mathbb{P}_o$ - s.m.r.

<u>Définition</u>

On dira qu'un processus de $L^2(\mathbb{P})$ est une $\mathbb{P}$-s.m.r. s'il est représentable relativement au $\mathbb{P}$-brownien $\tilde{W}$.

On a :

Théorème 3-3

Si θ_X est p.s. borné, et si Y est une $\mathbb{P}_o$-s.m.r. de L^4 , alors Y est une $\mathbb{P}$-s.m.r.

Si l'on note θ_Y , ψ_Y , ... les facteurs de représentation sous $\mathbb{P}_o$ et $\tilde{\theta}_Y$, $\tilde{\psi}_Y$, ... ses facteurs de représentation sous $\mathbb{P}$, on a :

$$* \qquad \theta_Y = \tilde{\theta}_Y \qquad\qquad \psi_Y = \tilde{\psi}_Y$$

La représentation de la partie martingale est conservée .

$$* \qquad \tilde{\psi}_{1Y}(\xi,\xi') = \psi_{1Y}(\xi,\xi') + \psi_Y(\xi,\xi')\theta_X(\xi')$$

et

$$\tilde{\psi}_{2Y}(\xi,\xi') = \psi_{2Y}(\xi,\xi') + \psi_Y(\xi,\xi')\theta_X(\xi)$$

$$\begin{aligned} * \quad \tilde{\varphi}_Y(s,t) = \varphi_Y(s,t) &+ \theta_Y\theta_X(s,t) + \int_{R_{st}} \psi_Y(u,t;s,v)\theta_X(u,t)\theta_X(s,v)du\, dv \\ &+ \int_{R_{st}} \psi_{1Y}(u,t;s,v)\theta_X(u,t)du\, dv \\ &+ \int_{R_{st}} \psi_{2Y}(u,t;s,v)\theta_X(s,v)du\, dv \end{aligned}$$

Démonstration

Y est dans $L^2(\mathbb{P})$ puisque Λ_{11} et Y^2 sont dans $L^2(\mathbb{P}_o)$. Dans $L^2(\mathbb{P}_o)$ c'est un simple calcul qui donne la représentation de Y en fonction de la s.m.r.

$$\tilde{W}_z = W_z - \int_{R_z} \theta_X(\xi)\, d\xi$$

et l'on trouve les facteurs de représentation $\tilde{\theta}_Y$, ... donnés dans le théorème ci-dessus.

Mais, Y étant dans $L^4(\mathbb{P}_o)$, les termes de cette représentation sont dans $L^2(\mathbb{P})$. Par exemple (terme $\tilde{\psi}_{1Y}$) :

$$E \int_{R^2_{11}} [\psi_{1Y}(\xi,\xi') + \psi_Y(\xi,\xi')\theta_X(\xi')]^2 \, d\xi \, d\xi'$$

$$\leq 2\, E_o\left[\Lambda_{11} \int_{R^2_{11}} (\psi^2_{1Y}(\xi,\xi') + \psi^2_Y(\xi,\xi')\theta^2_X(\xi'))\, d\xi\, d\xi'\right]$$

$$\leq ||\Lambda_{11}||_2 \, \{||\psi_{1Y}||^2_4 + ||\psi_Y||^2_4 \, ||\theta_X||^2_\infty\}$$

qui est fini . ∎

Dans le cas particulier suivant, nous n'aurons plus besoin d'une hypothèse aussi forte sur θ_X :

<u>Corollaire 3-3</u>

Si $Y = \theta_Y \cdot W + \varphi_Y \cdot Z$ est une s.m.r. et si θ_X définit un changement de probabilité orthogonal tel que :

$$E_o\left[\Lambda_{11} \int_{R_{11}} [\theta^2_Y(\xi) + \theta^2_X(\xi)]\, d\xi\right] < \infty$$

alors Y est une $\mathbb{P}$-s.m.r. admettant la représentation

$$Y = \theta_Y \cdot \tilde{W} + (\theta_X\theta_Y + \varphi_Y) \cdot Z$$

(le processus à v.b. étant défini dans $L^1(\mathbb{P})$).

En particulier si $\theta_X = - \varphi_Y \theta_Y^{-1}$, Y est une $\mathbb{P}$-martingale forte.

La dernière partie de ce corollaire n'est autre qu'une première approche du théorème de Girsonov pour une martingale forte à laquelle on a ajouté un signal* $\varphi_Y \cdot Z$. Nous reviendrons sur ce problème au §5 .

§4 - S.m.r. et changement de probabilité

Dans tout ce paragraphe , $\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o}$ définit un changement de probabilité (non nécessairement orthogonal) $\Lambda = \exp[X]$, on supposera que X vérifie la condition $\mathcal{E}(X) \bullet Z$ est une s.m.r. (sous $\mathbb{P}_o$) et l'on cherche à quelle condition Z est une $\mathbb{P}$-martingale faible, une $\mathbb{P}$-1-martingale ou une $\mathbb{P}$-martingale, donc à quelle condition ΛZ a la propriété de martingale correspondante sous $\mathbb{P}_o$.

Nous ferons dans tout ce paragraphe l'hypothèse I (z exp x ; Z,X) permettant d'écrire la formule de Ito dans $L^2(\mathbb{P}_o)$ pour $Z \exp X$.

4-1 : Martingale faible et changement de probabilité

Le lemme fondamental est le suivant :

Lemme 4-0

Si X est une s.m.r. définissant le changement de probabilité $\Lambda = \exp X$, si Z est une s.m.r. vérifiant I(z exp x ; Z, X) on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\Lambda Z(s,t) = Z\bullet\Lambda + \Lambda\bullet\Big[&J_{M_X^2,(Z+\langle X,Z\rangle^{(1)})} \\ &+ J_{(Z+\langle X,Z\rangle^{(2)}),M_X^1} + \langle X,Z\rangle^{(1)} + \langle X,Z\rangle^{(2)} \\ &+ \langle X,J_{XZ}+J_{ZX}\rangle + \langle Z,J_X - X\rangle\Big]\end{aligned}} \qquad (4\text{-}0)$$

Les différentes parties de la s.m.r. ΛZ sont données par

$$M_{\Lambda Z} = Z\bullet\Lambda + \Lambda\bullet\left[M_Z + J_{M_X^2 M_Z^1} + J_{M_Z^2 M_X^1}\right] \qquad (4\text{-}0\text{-}1)$$

$$P^1_{\Lambda Z} = \Lambda\bullet\left[P_Z^1 + J_{(B_Z^2+\langle X,Z\rangle^{(2)}),M_X^1} + P^1_{\langle X,Z\rangle^{(2)}}\right] \qquad (4\text{-}0\text{-}2)$$

avec

$$P^{1}_{<X,Z>^{(2)}}(z) = \int_{R^2_z} (L_{2X}\,\psi_Z + L_{2Z}\,\psi_X)d\xi\; W(d\xi')$$

$$B_{\Lambda Z} = \Lambda\cdot\Big[B_Z + B_{<X,Z>^{(1)}\,+\,<X,Z>^{(2)}} + <Z,\,J_X - X> + <X, J_{XZ} + J_{ZX}>\Big] \qquad (4\text{-}0\text{-}3)$$

$$= \Lambda\cdot\Big[B_Z + <Z, X + J_X> + \int_{R^2_{st}} (L_{1X}\,\psi_{1Z} + L_{2X}\,\psi_{2Z})d\xi\; d\xi'\Big] \qquad (4\text{-}0\text{-}4)$$

Démonstration

Dans l'application de la formule de Ito à $Z \exp[X]$, les termes où n'interviennent que des dérivées de $z\,e^x$ par rapport à X donnent (formule 2-13) $Z\cdot\Lambda$.

Les autres termes s'écrivent $\Lambda\cdot Y$, avec :

$$Y = Z + J_{ZX} + J_{XZ} + <X,Z>^{(1)} + <X,Z>^{(2)} - <X,Z>$$

$$+ \frac{1}{2}\{J_{<X>^{(2)},Z} + J_{Z,<X>^{(1)}} + 2J_{X,<X,Z>^{(1)}} + 2J_{<X,Z>^{(2)},X}\}$$

$$+ <X\,,\,J_{XZ}> + <X\,,\,J_{ZX}> + <Z\,,\,J_X>$$

$$+ \frac{1}{2}\{J_{<X,Z>^{(2)},<X>^{(1)}} + J_{<X>^{(2)}\,,\,<X,Z>^{(1)}}\}$$

Utilisant (2-4) et (2-4') :

$$<X>^{(1)} = 2(M^1_X - X)$$

$$<X>^{(2)} = 2(M^2_X - X)$$

on obtient (4-0) .

(4-0-1), (4-0-2), (4-0-3) s'en déduisent immédiatement. L'expression de $P^1_{<X,Z>^{(2)}}$ vient du théorème 5-1 du chapitre III. Ce même théorème donne :

$$B_{<X,Z>^{(1)}} = <X,Z>_{st} + \int_{R^2_{st}} (L_{1X}\, \psi_{1Z} + L_{1Z}\, \psi_{1X}) d\xi\, d\xi'$$

Utilisant (2-8) : $\psi_{1X} = -\psi_X\, L_{2X}$, on obtient :

$$B_{<X,Z>^{(1)}} = <X,Z>_{st} - <X,J_{XZ}>_{st} + \int_{R^2_{st}} L_{1X}\, \psi_{1Z}\, d\xi\, d\xi'$$

De cette expression et de son analogue pour $B_{<X,Z>^{(2)}}$, on déduit (4-0-4). ∎

<u>Remarque</u>

On peut obtenir ce résultat en développant le produit ΛZ par la formule de Ito et en tenant compte des relation (2-3), (2-6), (2-7), (2-8) :

$$\Lambda Z = \Lambda\cdot Z + Z\cdot\Lambda + J_{\Lambda Z} + J_{Z\Lambda} + <Z,\Lambda>^{(1)} + <Z,\Lambda>^{(2)} - <Z,\Lambda>$$

D'une part :

$$B_{\Lambda Z} = \Lambda\cdot B_Z + <\Lambda,Z> + \int (L_{1\Lambda}\, \psi_{1Z} + L_{2\Lambda}\, \psi_{2Z}) d\xi\, d\xi'$$

Or ,

$$\begin{aligned}\varphi_{<Z,\Lambda>}(s,t) &= \theta_Z\, \theta_\Lambda(s,t) + \int_{R_{st}} \psi_\Lambda\, \psi_Z(u,t\ ;\ s,v) du\, dv \\ &= \Lambda(s,t)\Big[\theta_Z\, \theta_X(s,t) + \int_{R_{st}} \psi_Z\, \psi_X(u,t\ ;\ s,v) du\, dv \\ &\qquad + \int_{R_{st}} \psi_Z(u,t\ ;\ s,v) L_{1X}(t\ ;\ s,v) L_{2X}(u,t\ ;\ s) du\, dv\Big]\end{aligned}$$

d'après (2-6) et (2-7). On a donc :

$$\langle Z,\Lambda\rangle = \Lambda \bullet \langle Z , X + J_X\rangle$$

Transformant $L_{1\Lambda}$ et $L_{2\Lambda}$ par (2-3) et (2-3') , on retrouve (4-0-4).

De même :

$$P^1_{\Lambda Z} = \Lambda \bullet P^1_Z + J_{B^2_Z,\Lambda} + \int (L_{2Z}\,\psi_\Lambda + L_{2\Lambda}\,\psi_Z)d\xi\; W(d\xi')$$

Or d'une part :

$$J_{B^2_Z,\Lambda} = \Lambda \bullet J_{B^2_Z\, M^1_X}$$

et d'autre part :

$$\int (L_{2Z}\,\psi_\Lambda + L_{2\Lambda}\,\psi_Z)d\xi\; W(d\xi') = \Lambda \bullet \int (L_{2Z}\,\psi_X + L_{2X}\,\psi_Z)d\xi\; W(d\xi')$$

$$= \Lambda \bullet \int L_{2Z}\, L_{1X}\, L_{2X}\; d\xi\; W(d\xi')$$

et cette dernière intégrale n'est autre que $J_{\langle X,Z\rangle^{(2)},M^1_X}$.

Regroupant les divers termes, on retrouve (4-0-2) . ∎

<u>Théorème 4-1</u>

Sous les conditions du lemme 4-1, la s.m.r. Z est une $\mathbb{P}$-martingale faible si et seulement si :

$$B_Z + \langle Z,X + J_X\rangle + \int (L_{1X}\,\psi_{1Z} + L_{2X}\,\psi_{2Z})d\xi\; d\xi' = 0 \qquad (4-1)$$

Z est donc caractérisé par sa partie $\mathbb{P}_o$-martingale faible : si Y est une $\mathbb{P}_o$-m.f., il existe une unique s.m.r. $Z = Y + B_Z$ qui soit une $\mathbb{P}$-m.f.

Démonstration

Z est une $\mathbb{P}$-m.f. ssi ΛZ est une $\mathbb{P}_o$-m.f. ; le théorème est alors une conséquence immédiate du lemme 4-0 et du lemme 1-5 . ■

Remarque

Dans [12] est donnée la représentation suivante de la $\mathbb{P}$-m.f. Z :

$$Z = \theta\cdot\left[W-\theta_X\xi\right] + \psi\cdot\left[(W-L_{2X}\xi)(W-L_{1X}\xi') - \psi\psi_X\ \xi\xi'\right]$$

$$+ \rho_1\cdot\left[\xi(W-L_{1X}\xi')\right] + \rho_2\cdot\left[(W-L_{2X}\xi)\xi'\right]$$

qui, compte tenu des proposition (2-4), (2-5) et (2-6) correspond à une intégrale simple, une intégrale double et deux intégrales mixtes par rapport à des $\mathbb{P}$-m.f. (En particulier dans le cas d'un changement de probabilité orthogonal, on retrouve le théorème 3-3).

Sous la condition (4-1), cette représentation est celle donnée au lemme 4-0 , avec :

$$\rho_1 = \psi_1 + L_{2X}\,\psi$$

$$\rho_2 = \psi_2 + L_{1X}\,\psi \qquad ■$$

4-2 : 1-martingale et changement de probabilité

Théorème 4-2

La s.m.r. Z est une $\mathbb{P}$-1-martingale si et seulement si $Z + \langle X,Z\rangle^{(1)}$ est une $\mathbb{P}_o$-1-martingale, soit

$$B_Z^1 + \langle X\ ,\ Z\rangle^{(1)} = 0 \qquad (4-2)$$

Si X et Z sont dans L^4 , (4-3) s'écrit :

$$(4\text{-}2') \begin{cases} (4\text{-}1) \\ \beta_{2Z}(\xi;u') + \displaystyle\int_0^v (L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X)(\xi;\xi')dv' = 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}2'\text{-}2)$$

Z est donc caractérisé par sa partie $\mathbb{P}_o$-1-martingale.

Démonstration

Ce résultat est de nature unidimensionnelle.

Z est une $\mathbb{P}$-1-m. ssi ΛZ est une $\mathbb{P}_o$-1-m. Appliquant la formule de Ito en s à ce produit, on en déduit, compte tenu de (2-4)

$$\Lambda Z(s,t) = \int_0^s \Lambda Z(u,t)\, M_X^1(du,t) + \int_0^s \Lambda(u,t)\left[Z + \langle X,Z\rangle^{(1)}\right](du,t)$$

D'après le lemme 1-5 , $Z + \langle X,Z\rangle^{(1)}$ est une $\mathbb{P}_o$-1-m. , d'où l'on déduit (4-2)

(4-2') s'obtient à partir du théorème 5-1 du chapitre III : d'une part la partie 2-m.p. de $B_Z^1 + \langle X,Z\rangle^{(1)}$ s'écrit :

$$\int_{R_{st}^2} (\psi_{2Z} + L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X)\; W(d\xi)d\xi'$$

qui n'est nulle que si :

$$\int_{R_{st}} (\psi_{2Z} + L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X)(\xi,\xi')d\xi' \;=\; 0$$

ce qui, dérivé par rapport à s donne (4-2'-2) .

D'autre part la partie à v.b. s'écrit :

$$B_Z(s,t) + \langle X,Z\rangle(s,t) + \int_{R_{st}^2} (L_{1X}\,\psi_{1Z} + L_{1Z}\,\psi_{1X})d\xi\; d\xi' \;=\; 0$$

Utilisant (2-8) pour remplacer ψ_{1X} par $-\psi_X L_{2X}$ et (4-2'-2) pour remplacer $\psi_X L_{1Z}$ par $-\psi_{2Z} - L_{1X}\psi_Z$, on retrouve (4-1) : il est satisfaisant que quand on exprime que Z est une 1-m. apparaisse la condition pour qu'elle soit m.f. ∎

Corollaire

La s.m.r. Z est une $\mathbb{P}_o$-1-martingale si et seulement si $Z - \langle X,Z\rangle^{(1)}$ est une $\mathbb{P}$-1-martingale .

Il suffit d'appliquer le théorème précédent à :

$$Y = Z - \langle X,Z\rangle^{(1)}$$

4-3 : Martingale et changement de probabilité

Théorème 4-3

Si la s.m.r. Z est une $\mathbb{P}$-martingale, elle vérifie

$$Z - M_Z = - \langle X,Z\rangle^{(1)} - \langle X,Z\rangle^{(2)} + \langle Z,X-J_X\rangle$$
$$- \langle X,J_{XZ} + J_{ZX}\rangle \tag{4-3}$$

(M_Z est la partie $\mathbb{P}_o$-martingale de Z), ce qui s'écrit encore :

$$(4\text{-}3')\quad \begin{cases} (4\text{-}1) \\ \beta_{2Z}(\xi;u') + \int_0^v (L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X)(\xi;\xi')dv' = 0 \\ \beta_{1Z}(v;\xi') + \int_0^{u'} (L_{2X}\,\psi_Z + L_{2Z}\,\psi_X)(\xi;\xi')du = 0 \end{cases}$$

En particulier si ψ_Z est borné, (4-3') admet une unique solution en β_{1Z} , β_{2Z} , et Z est caractérisé par sa partie $\mathbb{P}_o$-martingale M_Z .

Démonstration

Z est une $\mathbb{P}$-m. ssi ΛZ est une $\mathbb{P}_o$-m. ; dans (4-0), si l'on annule la partie non martingale, compte tenu de (4-2) et de la formule symétrique, on obtient :

$$\Lambda\cdot\left[(Z-M_Z) + \langle X,Z\rangle^{(1)} + \langle X,Z\rangle^{(2)} - \langle X,Z\rangle + \langle Z,J_X\rangle - \langle X,J_{XZ} + J_{ZX}\rangle\right] = 0$$

ce qui, par le lemme 1-5 donne (4-3) .

L'identification à zéro des parties à v.b., 1-m.p. et 2-m.p. donne (4-3'). Remarquons que ces équations traduisent que Z est une $\mathbb{P}$-1-m. et une $\mathbb{P}$-2-m.

X et M_Z étant donnés les deux dernières équations de (4-3') s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_{1Z}(v;\xi') = h_1(v;\xi') + \displaystyle\int_{[0,u']^2} \psi_X(u,v;\xi')\beta_{2Z}(u,v;x)du\,dx \\ \\ \beta_{2Z}(\xi;u') = h_2(\xi;u') + \displaystyle\int_{[0\,,\,v]^2} \psi_X(\xi;u',v')\beta_{1Z}(y;u',v')dv'\,dy \end{array}\right. \qquad (\mathcal{J})$$

Sous de bonnes conditions de régularité sur X et θ_Z, (cf. [5] , p. 299 , [12] , p. 8 et 20) , en particulier si ψ_X est borné p.s. , ($\mathcal{J}$) a une unique solution .

Remarques

1°) Correspondance entre $\mathbb{P}$-martingales et $\mathbb{P}_o$-martingales

Il ressort des théorèmes 4-1 à 4-3 que si la s.m.r. Z est une $\mathbb{P}$-martingale (resp. $\mathbb{P}$-i-m. , $\mathbb{P}$-m.f.), elle est caractérisée par sa partie $\mathbb{P}_o$-martingale (resp. $\mathbb{P}_o$-i-m. , $\mathbb{P}_o$-m.f.) .

D'autre part, si Z est une $\mathbb{P}$-martingale de L^2 , $Z = \Lambda^{-1}(\Lambda Z)$ est une s.m.r. ; en particulier sa partie martingale sera parfaitement déterminée.

On a donc établi une bijection entre les $\mathbb{P}_o$-martingales et les $\mathbb{P}$-martingales.

(Dans [12] , cette bijection est obtenue à partir de l'inversibilité de certains opérateurs).

2°) Changement de probabilité orthogonal

Si le changement de probabilité est orthogonal, on peut établir directement les résultats des théorèmes 4-1 à 4-3 en s'appuyant sur la représentation en $\tilde{W}$.

Avec les notations du théorème 3-3 :

* Y sera une $\mathbb{P}$-m.f. ssi $\varphi_Y = 0$, ce qui n'est autre que la condition (4-1) quand $\psi_X = 0$.

* Y sera une $\mathbb{P}$-l-m. si en outre :

$$\psi_{2Y} + \theta_X \psi_Y = 0$$

qui n'est autre que (4-2'-2) quand $\psi_X = 0$. ∎

§5 - Changement de probabilité et théorème de Girsanov

Le premier problème que nous nous poserons dans ce paragraphe est dual de celui traité au §4 : si Y est une s.m.r. fixée, trouver un changement de probabilité $\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o}$ tel que sous $\mathbb{P}$, Y ait une certaine propriété de martingale.

Pour dégager l'intérêt d'un tel changement de probabilité, examinons d'abord la situation sur la droite.

Le problème sur $\mathbb{R}$

Sur $[0,1]$, considérons la semi-martingale

$$Y_t = \int_o^t \theta(u)\; W(du) - \int_o^t \varphi(u)\; du$$

où W est un brownien sur l'espace de base $(\Omega\,,\,\mathcal{F}\,,\,\mathbb{P}_o)$. Le changement de probabilité défini par

(5-1) $$\Lambda = \exp\left[\int_o^1 (\varphi\theta^{-1})(u)W(du) - \frac{1}{2}\int_o^1 (\varphi\theta^{-1})^2(u)du\right]$$

a les <u>cinq</u> propriétés remarquables suivantes :

(C-P-1) Y est une $\mathbb{P}$-martingale

(C-P-2) $\tilde{W}_t = W_t - \int_o^t (\varphi\theta^{-1})(u)du$ est un $\mathbb{P}$-brownien

(C-P-3) Y admet sous $\mathbb{P}$ la représentation

$$Y_t = \int_o^t \theta(u)\; \tilde{W}(du)$$

(C-P-4) : La densité Λ se calcule en fonction du modèle (θ, φ) et de l'observation $\{Y_t, t \in [0,1]\}$ grâce à la formule permettant d'inverser l'équation linéaire en $W(du)$

$$(5\text{-}2) \qquad Y(du) = \theta(u)\, W(du) - \varphi(u)\, du$$

et l'on obtient :

$$(5\text{-}3) \quad \Lambda = \exp\left[\int_0^1 (\varphi\theta^{-2})(u) Y(du) + \frac{1}{2}\int_0^1 (\varphi\theta^{-1})^2(u) du\right]$$

(C-P-5) : Conditionnellement à la connaisance de θ^2, maximiser Λ (qui est la vraisemblance de $\tilde{W}$ relativement à $\mathbb{P}_o$) revient à maximiser la vraisemblance de Y relativement à $\mathbb{P}_o$.

L'intérêt statistique d'un tel changement de probabilité est donc très grand : si θ est connu ou a été atteint au moyen de la variation quadratique, on est à même d'estimer φ, ou les paramètres de φ en maximisant une vraisemblance calculable à partir de l'observation.

Le problème sur $\mathbb{R}^2$

La généralisation de ce problème lorsque Y est une s.m.r. à indice dans R_{11} est un problème ouvert et nous n'y répondrons ici que partiellement.

Dans la recherche de changement de probabilité du type étudié aux paragraphes précédents, on dispose de 2 "degrés de liberté" : les choix de θ_Λ et de ψ_Λ (ou si l'on préfère de θ_X et de ψ_X).

La condition (C-P-1)

Transformer Y en $\mathbb{P}$-m.f. implique une condition (4-1), et l'on trouvera en général une infinité de Λ transformant Y en $\mathbb{P}$-m.f.. Une telle transformation offre l'intérêt statistique de recentrer Y . Nous montrerons que sous de faibles conditions, on pourra trouver une solution telle que le changement de probabilité soit orthogonal.

Transformer Y en $\mathbb{P}$-l-m. implique deux conditions (4-2'-1) et (4-2'-2) et en général on ne pourra trouver qu'un changement de probabilité satisfaisant.

En général, on ne pourra pas trouver de changement de probabilité Λ transformant une s.m.r. Y en martingale (qui impose trois conditions) . Nous examinerons plus en détail ce problème si $Y = \theta \cdot W - \varphi \cdot Z$.

Les conditions (C-P-2) et (C-P-3)

Si pour le changement de probabilité défini par (θ_X, ψ_X) on pose :

$$\tilde{W}_z = W_z - \int_{R_z} \theta_X(\xi) d\xi$$

on sait (théorème 2-4) que $\tilde{W}$ est une $\mathbb{P}$-m.f., et (théorème 3-2) que $\tilde{W}$ est un $\mathbb{P}$-brownien si $\psi_X = 0$.

Pour un changement de probabilité orthogonal, on dispose donc naturellement d'un brownien et l'on sait représenter Y au moyen de celui-ci (th. 3-3).

En général, on peut se poser les questions : existe-t-il une $\mathbb{P}$-brownien $\hat{W}$; comment est-il lié à W ? Y est-elle une $\mathbb{P}$-s.m.r. relativement à $\hat{W}$? Quelle est sa représentation ?

La condition (C-P-4)

Satisfaire la condition (C-P-4) est primordial : W n'étant pas observable, l'expression de Λ (ou X) au moyen d'intégrales stochastiques ne permet pas de les calculer.

Sur la droite, cette difficulté est levée par l'inversion du système (5-2). Son analogue ici s'écrit :

$$(5\text{-}5)\quad \begin{cases} Y(ds,dt) = \theta(s,t)W(ds,dt) + \displaystyle\int_{R_{st}} \psi(u,t;s,v)W(du,dt)W(ds,dv) \\ \qquad + dt \displaystyle\int_0^t \beta_1(t;s,v)W(ds,dv) + ds \int_0^s \beta_2(u,t;s)W(du,dt) \\ \qquad + \varphi(s,t)ds\, dt \end{cases}$$

On conçoit assez bien, en utilisant par exemple des méthodes de discrétisation, puis des théorèmes limites qu'un tel système puisse être inversible lorsque le modèle $(\theta, \ldots, \varphi)$ est connu (et dépend de paramètre inconnus). Dans ce cas, n'importe quel Λ , la vraisemblance, comme sur la droite, pourra s'exprimer au moyen des fonctions θ_Λ, ψ_Λ (ou θ_X, ψ_X) , du modèle de Y et de l'observation.

La condition (C-P-5)

La condition (C-P-5) est fondamentale en pratique : en tant que fonction de certains paramètres (relatifs par exemple au signal φ), Λ atteint-elle son maximum en même temps que la vraisemblance de Y , ce qui permettrait de mettre en oeuvre la théorie des estimateurs du maximum de vraisemblance.

Examinons ce problème dans le cas où on a choisi pour Λ le changement de probabilité orthogonal qui transforme Y en une $\mathbb{P}$-m.f. . Alors (th. 3-3)

$$Y = \theta\cdot\tilde{W} + \psi\cdot\widetilde{\widetilde{WW}} + \tilde{\psi}_1\cdot Z\tilde{W} + \tilde{\psi}_2\cdot\tilde{W}Z$$

avec

$$\tilde{\psi}_i = \psi_i + \psi\,\theta_X \qquad\qquad i = 1, 2$$

Le gros inconvénient de cette écriture est, non pas que $\tilde{\psi}_i$ ait été modifié, mais que, dépendant de θ_X, il dépend de φ, le signal que l'on cherche à observer.

Si l'on disposait d'une représentation au moyen d'un $\mathbb{P}$-brownien $\hat{W}$

$$Y = \hat{\theta}\cdot\hat{W} + \hat{\psi}\cdot\hat{W}\hat{W} + \hat{\Psi}_1\cdot Z\hat{W} + \hat{\psi}_2\,\hat{W}Z$$

tel que $\hat{\theta}$, $\hat{\psi}$, $\hat{\psi}_i$ ne dépendent pas du signal φ, la vraisemblance Λ de $\hat{\psi}$ sera maximum en même temps que celle de Y.

Par exemple, si $\psi_Z = 0$, sous Λ orthogonal transformant Y en $\mathbb{P}$-m.f., on a :

$$Y = \theta\cdot\tilde{W} + \psi_1\cdot Z\tilde{W} + \psi_2\cdot\tilde{W}Z$$

et on peut, utilisant Λ, faire de bonnes statistiques sur le signal φ_Y.

5-1 : Transformation d'une s.m.r. en martingale faible

Un changement de probabilité $\Lambda = \exp X$ tranforme la s.m.r. Z en une m.f. si et seulement si la condition (4-1) est vérifiée. Dérivée en s et t, cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned}(\varphi_Z + \theta_X\theta_Z)(s,t) &+ \int_{R_{st}} [\psi_{1Z}L_{1X} + \psi_{2Z}L_{2X}](u,t;s,v)du\,dv \\ &+ \int_{R_{st}} \psi_Z[\psi_X + L_{1X}L_{2X}](u,t;s,v)du\,dv = 0 \qquad (5\text{-}6)\end{aligned}$$

(L_{1X} ne dépend que de $(t;s,v)$, L_{2X} de $(u,t;s)$).

A cette équation, il convient d'adjoindre les équations (2-8) et (2-8') liant entre eux les facteurs de représentation de X :

$$\begin{cases} \psi_{1X}(u,t;s,v) = - \psi_X \, L_{2X}(u,t;s,v) & (2\text{-}8) \\ \psi_{2X}(u,t;s,v) = - \psi_X \, L_{1X}(u,t;s,v) & (2\text{-}8') \end{cases}$$

On peut se proposer de résoudre le système constitué des équations (5-6), (2-8) et (2-8') de façon itérative : on choisit arbitrairement la fonction ψ_X . On sait que pour toute valeur de θ_X les équations (2-8) et (2-8') déterminent L_{1X} et L_{2X} , donc ψ_{1X} et ψ_{2X} . L'équation (5-6) permet alors, quand θ_Z n'est pas nul de déterminer θ_X . Nous allons montrer la convergence d'un tel procédé sous certaines hypothèses sur Z , lorsque, par exemple, ψ_X est choisi nul (changement de probabilité orthogonal) .

Proposition 5-1

Si Z est une s.m.r. telle que θ_Z^{-1} , φ_Z , ψ_Z , ψ_{1Z} et ψ_{2Z} soient bornés, il existe une infinité de changements de probabilité $\frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_0} = \exp\,[X]$ tels que Z soit une $\mathbb{P}$-martingale faible . Si l'on choisit ψ_X , le système (5-6), (2-8), (2-8') détermine X .
En particulier il existe un unique changement de probabilité orthogonal tel que Z soit une $\mathbb{P}$-m.f. . Ce changement de probabilité est caractérisé par l'équation :

$$(\varphi_Z + \theta_X\theta_Z)(s,t) + \int_{R_{st}} [\psi_{1Z}(u,t;s,v)\theta_X(s,v) + \psi_{2Z}(u,t;s,v)\theta_X(u,t)]du\,dv$$
$$+ \int_{R_{st}} \psi_Z(u,t,s,v)\theta_X(s,v)\theta_X(u,t)du\,dv = 0 \qquad (5\text{-}7)$$

Démonstration

Résolvons (5-7) trajectoire par trajectoire, et montrons qu'il existe une solution $\theta = \theta_X$ dans L^∞ .

<u>1er Point</u>

Montrons qu'il existe $z_o \in R_{11}$ tel que la suite de processus définie par $\theta_o(s,t) = 1$ et

$$\theta_Z\theta_{n+1}(s,t) = - \varphi_Z(s,t) - \int_{R_{st}} \Big[\psi_{1Z}(u,t;s,v)\theta_n(s,v) \qquad (5\text{-}8)$$

$$+ \psi_{1Z}(u,t;s,v)\theta_n(u,t) + \psi_Z(u,t;s,v)\theta_n(u,t)\theta_n(s,v)\Big]du\, dv$$

soit bornée sur R_z .

Notons K un majorant ≥ 1 commun de $|\varphi_Z^{-1}|$, $|\psi_Z|$, $|\psi_{1Z}|$ et $|\psi_{2Z}|$. Alors, sur R_{st} ,

$$||\theta_{n+1}||_\infty < K\Big[1 + K\ st\ (2||\theta_n||_\infty + ||\theta_n||_\infty^2\Big]$$

Posant $a = K$ et $b = K^2\ st$, on est amené à l'étude de la suite récurente :

$$u_{n+1} = f(u_n) \qquad u_o = 1$$

avec

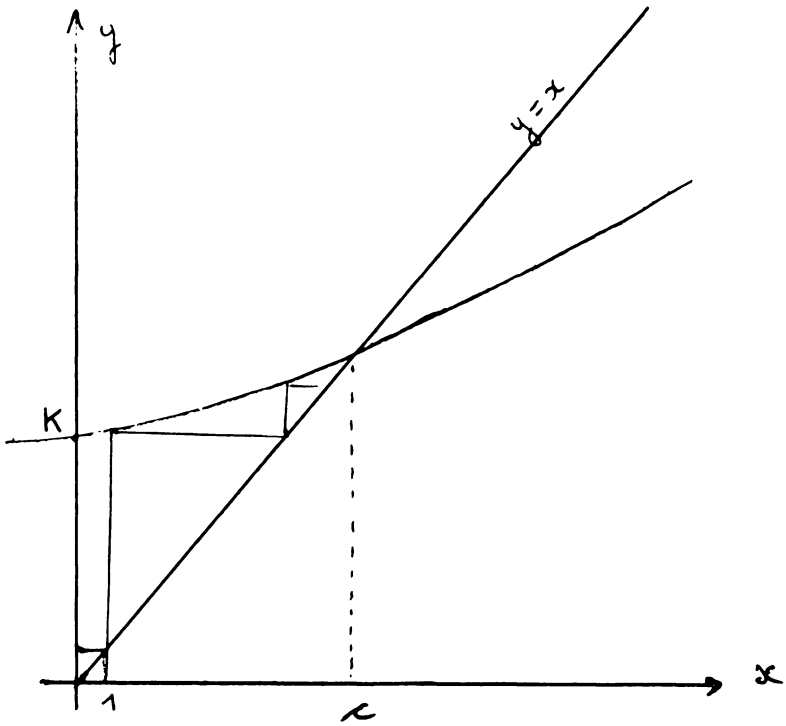
$$f(x) = a + 2bx + bx^2$$

L'équation $f(x) = x$ a des racines réelles si :

$$0 \leq (2b-1)^2 - 4ab = (2K^2\ st - 1)^2 - 4K^3 st$$

Le membre de droite tendant vers 1 quand st tend vers zéro, ceci est réalisé pour st assez petit. Fixons $z_o = (s_o,t_o)$ tel que cette condition soit réalisée. f' s'annulant en -1 et $f(1)$ valant $a + 3b$ qui est supérieur à 1 , les racines de $f(x) = x$ sont supérieures à 1 .

u_n converge donc vers la plus petite , c (que l'on majore facilement par $a + \frac{1}{4b}$) .



Donc pour tout n

$$||\theta_n||_\infty \leqslant c$$

<u>2ème Point</u>

Montrons qu'il existe $z_1 \leqslant z_o$ tel que la suite (θ_n) soit contractante dans L^∞ sur R_{z_1} .

En effet :

$$\theta_Z(\theta_{n+1}-\theta_n)(s,t) = - \int_{R_{st}} \left[\psi_{1Z}\ (\theta_n-\theta_{n-1}) + (\theta_n-\theta_{n-1})\psi_{2Z}\right] du\ dv$$

$$- \int_{R_{st}} \left[\theta_n\psi_Z\theta_n - \theta_{n-1}\psi_Z\theta_{n-1}\right] du\ dv$$

et, utilisant dans le dernier intégrande la décomposition :

$$\theta_n(u,t)\theta_n(s,v) - \theta_{n-1}(u,t)\theta_{n-1}(s,v) =$$

$$[\theta_n(u,t) - \theta_{n-1}(u,t)]\theta_n(s,v) + \theta_{n-1}(u,t)[\theta_n(s,v)-\theta_{n-1}(s,v)]$$

on obtient sur $R_{st} \subseteq R_{z_o}$

$$||\theta_{n+1} - \theta_n||_\infty \leq K[2K + 2K\ c]\, st$$

Choisissons alors $z_1 = (s_1,t_1)$ tel que :

$$2K^2(1 + c)\ s_1\ t_1 < 1$$

Alors sur $L^\infty(R_{z_1})$, (θ_n) est une suite de Cauchy . Sa limite vérifie l'équation (5-7) .

Reste à étendre par une technique analogue à celle employée au chapitre VII, θ défini sur R_{z_1} à R_{11} .

<u>Cas Particulier</u>

Si Z est la somme d'une martingale forte et d'un signal,

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta_Z(\xi)W(d\xi) + \int_{R_{st}} \varphi_Z(\xi)d\xi$$

L'équation (5-6) se réduit à :

$$\varphi_Z + \theta_X\,\theta_Z = 0 \ .$$

Elle fixe :

$$\theta_X = -\varphi_Z\,\theta_Z^{-1} \ .$$

Si l'on choisit arbitrairement ψ_X borné, les équations (2-8) et (2-8') déterminent X (cf. §2). On a donc le corollaire :

Corollaire 5-1

Si Z est la s.m.r.

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta_Z(\xi) + \int_{R_{st}} \varphi_Z(\xi)d\xi$$

tout changement de probabilité $\Lambda = \exp[X]$ avec :

$$\theta_X = - \varphi_Z \, \theta_Z^{-1}$$

transforme Z en une $\mathbb{P}$-m.f. .

Remarque

Si $\theta_Z = 0$, (5-6) ne permet plus de déterminer θ_X qui n'apparaît plus que par L_{1X} et L_{2X} et le problème se pose de savoir si l'on peut choisir ψ_X arbitraire de sorte que le système (5-6), (2-8), (2-8') détermine X. Ce n'est pas le cas dans le cas particulier traité ci-dessus : le choix de $\psi_X = 0$ conduit à une impossibilité.

5-2 : Transformation d'une s.m.r. en 1-martingale

Un changement de probabilité $\Lambda = \exp X$ transforme la s.m.r. Z en 1-m. si et seulement si la condition (4-2) est vérifiée :

$$B_Z^1 + \langle X , Z\rangle^{(1)} = 0$$

On a vu au théorème 4-2, qu'annuler les parties 2-m.p. et à v.b. de cette expression donnait :

$$\left.\begin{aligned} &(\varphi_Z + \theta_Z\theta_X)(s,t) + \int_{R_{st}} (L_{1X}\psi_{1Z} + L_{2X}\psi_{2Z})(u,t;s,v)du\,dv = 0 \\ &\beta_{2Z} + L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}9)$$

Associant es équations aux équations (2-8) et (2-8'), on obtient un système de 4 équations aux 4 fonctions inconnues θ_X, ψ_X, L_{1X}, L_{2X} . Si θ_Z, L_{1Z} et L_{2Z} ne s'annulent pas, on peut lui associer le système récurrent :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \varphi_Z\,\theta_Z^{-1} + \int L_{1,n}\,\psi_{1Z} + L_{2,n}\,\psi_{2Z} \\ \psi_{n+1} = \psi_{2Z}\,L_{1Z}^{-1} + \psi_Z\,L_{1Z}^{-1}\,L_{1,n} \\ \psi_{1,n} = -\psi_n\,L_{2,n} \\ \psi_{2,n} = -\psi_n\,L_{1n} \end{cases}$$

dont on peut, comme précédemment étudier la convergence. La présence d'intégrales stochastiques dans L_{1Z}, L_{1X} et L_{2X} ne nous permettra plus de travailler dans L^∞ , mais l'on devra travailler dans L^2 .

Examinons deux exemples pour lesquels nous saurons trouver une solution conduisant à un changement de probabilité orthogonal.

Exemple 1

$$Z_{st} = \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v;z)dv\,W(dz) + \int_{R_{st}} \varphi(\xi)d\xi$$

(5-9-1) s'écrit :

$$\varphi(s,t) + \int_0^t L_{1X}\,\beta_1(t;s,v)dv = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

Donc, si $\varphi(s,o)$ n'est pas p.s. nul, on ne trouvera pas de solution X : $\beta_1 \cdot \nabla W$ et Z seront étrangères .

Supposons donc que :

$$\text{p.s.} \qquad \varphi(s,o) = 0$$

et cherchons Λ orthogonal, quand :

$$\beta_1(t;s,v) = 1_{(v\leq t)}\ h\ (s,v)$$

Si φ'_t existe , (5-10) (qui est vérifiée pour $t = 0$) équivaut à :

$$\varphi'_t(s,t) + \theta_X(s,t)h\ (s,t) = 0$$

soit

$$\theta_X = - \varphi'^{-1}\ h$$

qui, lorsqu'il est dans L^2 , détermine un changement de probabilité orthogonal tel que Z soit une $\mathbb{P}$-1-martingale.

Il est alors facile de vérifier que relativement au $\mathbb{P}$-brownien

$$\tilde{W}_{st} = W_{st} + \int_{R_{st}} \theta_X(\xi)d\xi$$

Z admet la représentation

$$Z_{st} = \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v;\xi)dv\ \tilde{W}(d\xi)$$

<u>Expression de la vraisemblance Λ en fonction du modèle et de l'observation</u>

Z_{st} est dérivable par rapport à t et si l'on note :

$$\dot{Z}_{st} = \frac{d}{dt}\ Z_{st}$$

On a :

$$\dot{Z}_{st} = \int_{R_{st}} h(\xi)W(d\xi) + \int_0^s \varphi(u,t)du$$

et X_{st} peut s'exprimer au moyen de $\dot{Z}$:

$$X_{st} = -\int_{R_{st}} \varphi_t'(\xi)h^{-1}(\xi)W(d\xi) - \frac{1}{2}\int_{R_{st}} (\varphi_t' h^{-1})^2(\xi)d\xi$$

$$= -\int_{R_{st}} \varphi_t' h^{-2}(\xi)\,\dot{Z}(d\xi) + \frac{1}{2}\int_{R_{st}} (\varphi_t' h^{-1})^2(\xi)d\xi$$

Remarquons donc que l'on a ramené, par dérivation en t, ce modèle au cas de la somme d'une martingale forte et d'un signal.

On pourra de même traiter le modèle :

$$Y_{st} = Z_{st} + t\int_0^s \varphi(u,o)du$$

quand on n'aura plus la condition $\varphi(u,o)$ nul .

Exemple 2

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi)W(d\xi) + \int_{[o,t]\times R_{st}} \beta_1(v;\xi)dv\,W(d\xi) + \int_{R_{st}} \varphi(\xi)d\xi$$

Si l'on recherche un changement de probabilité orthogonal, (5-9) donne :

$$\varphi(s,t) + \theta_X\,\theta(s,t) + \int_0^t \theta_X(s,v)\,\beta_1(t;s,v)dv = 0$$

Si θ_X ne s'annule pas, il n'y a pas de condition restrictive sur φ, comme dans le premier exemple. Par exemple, si

$$\beta_1(t;s,v) = 1_{(v\leqslant t)}\ h(s,v)$$

θ_X sera solution de l'équation différentielle

$$(\theta_X\theta + \varphi)'_t + \theta_X h = 0$$

avec la condition initiale

$$(\theta_X\theta + \varphi)(s,o) = 0$$

Par exemple si :

$$Z_{st} = W_{st} + \int_{R_{st}} W(du,v)dv + \int_{R_{st}} \varphi(\xi)d\xi \tag{5-11}$$

on trouve

$$\theta_X(s,t) = \varphi(s,o) + \int_o^t e^v\, \varphi'_v(s,v)dv$$

Le problème de l'expression de Λ au moyen de l'observation Z est lié à la possibilité de résoudre en W l'équation :

$$Z(ds,dt) = \theta(s,t)W(ds,dt) + \int_o^t \beta_1(t;s,v)W(ds,dv)dt + \varphi(s,t)ds\ dt$$

Dans le cas où Z est donné par (5-11), ceci s'écrit :

$$Z(ds,dt) = W(ds,dt) + W(ds,t)dt + \varphi(s,t)ds\ dt$$

que l'on peut intégrer en s sur tout intervalle Δs :

$$W(\Delta s,dt) + W(\Delta s,t)dt = - Z(\Delta s,dt) + \Phi(\Delta s,t)dt$$

avec

$$\Phi(\Delta s,t) = \int_{\Delta s} \varphi(u,t)du$$

On est donc ramené à étudier l'inversibilité d'une équation de diffusion à un paramètre, puis à étudier la limite quand Δs tend vers zéro de la solution de cette équation.

5-3 : <u>Transformation d'une s.m.r. en martingale</u>

La s.m.r. Z est transformée en $\mathbb{P}$-martingale si

$$\begin{cases} (\varphi_X + \theta_X\theta_Z)(s,t) + \int_{R_{st}} (\psi_X\psi_Z + L_{1X}\psi_{1Z} + L_{2X}\psi_{2Z})du\,dv = 0 \\ \psi_{2Z} + L_{1X}\,\psi_Z + L_{1Z}\,\psi_X = 0 \\ \psi_{1Z} + L_{2X}\,\psi_Z + L_{2Z}\,\psi_X = 0 \end{cases}$$

ce qui, associé aux équations (2-8) et (2-8') donne un système de cinq équations aux quatre inconnues θ_X, ψ_X, ψ_{1X}, ψ_{2X}. Un tel système n'aura en général pas de solution.

Seules certaines s.m.r. d'un type particulier seront transformées en une martingale. Par exemple, Λ, changement de probabilité orthogonal, transforme la s.m.r. Z de modèle

$$(\theta_Z, \psi_Z, -\theta_X\,\psi_Z\,, -\psi_Z\,\theta_X\,, \varphi_Z)$$

en martingale dès que θ_X vérifie :

$$(\varphi_Z + \theta_X\theta_Z)(s,t) = \int_{R_{st}} \psi_Z(u,t;s,v)\left[\theta_X(s,v) + \theta_X(u,t)\right]du\,dv$$

D'un autre côté, si Z a pour partie martingale faible une martingale forte, alors, dès que θ_Z ne s'annule pas, les changements de probabilité qui transforment éventuellement Z en martingale sont à choisir parmi les changements de probabilité orthogonaux puisque, en effet :

$$\theta_Z(s,v)\ \psi_X(u,t;s,v) = 0 \ .$$

$$\theta_Z(u,t)\ \psi_X(u,t;s,v) = 0$$

5-4 : Transformation d'une s.m.r. en martingale forte

Une telle transformation sera en général bien sûr impossible. Cependant dans le cas où Z est la somme d'une martingale forte et d'un signal ,

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi) W(d\xi) - \int_{R_{st}} \varphi(\xi) d\xi$$

On a trouvé (§3) un changement de probabilité orthogonal faisant de Z une martingale forte. Comme en outre :

$$Z(d\xi) = \theta(\xi)\ W(d\xi) - \varphi(\xi) d\xi$$

se résoud en $W(d\xi)$ si θ^{-1} ne s'annule pas, on a :

Théorème 5 (théorème de Girsanov pour les martingales fortes)

Si

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi)\ W(d\xi) - \int_{R_{st}} \varphi(\xi) d\xi$$

où θ et φ vérifient :

$$E \int_{R_{11}} (\theta^{-1} \varphi)^2 (\xi) d\xi < \infty$$

Il existe un unique changement de probabilité $\Lambda = \frac{d\,\mathbb{P}}{d\,\mathbb{P}_o} = \exp X$ tel que Z soit une $\mathbb{P}$-martingale. Ce changement de probabilité est caractérisé par

$$\theta_X = \varphi \cdot \theta^{-1}$$

Z est même alors une $\mathbb{P}$-martingale forte, et si :

$$\tilde{W}_{st} = W_{st} - \int_{R_{st}} (\varphi\,\theta^{-1})(\xi)d\xi$$

Z admet la représentation

$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi)\ \tilde{W}(d\xi)$$

La log-vraisemblance X s'écrit alors :

$$X = \int_{R_{11}} \varphi(\xi)\theta^{-2}(\xi)Z(d\xi) + \frac{1}{2}\int_{R_{11}} \varphi^2(\xi)\ \theta^{-2}(\xi)d\xi$$

Dans ce cas les cinq conditions (C-P-1) à (C-P-5) décrites au début de ce paragraphe sont satisfaites.

* *
*

Nous terminerons ce chapitre en montrant par une toute autre méthode qu'il existe un changement de probabilité sous lequel la s.m.r.

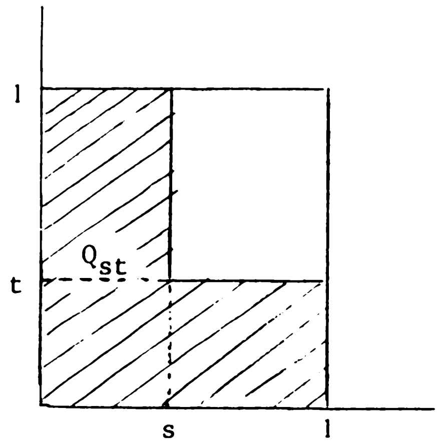
$$Z_{st} = \int_{R_{st}} \theta(\xi)\ W(d\xi) - \int_{R_{st}} \varphi(\xi)d\xi \qquad (5\text{-}12)$$

est une martingale forte [6,10].

Au processus Z , associons le processus Z^* ainsi défini :

Si

$$Q_{st} = R_{s1} \cup R_{1t}$$



Posons :

$$Z^*_{st} = \int_{Q_{st}} \theta(\xi)\; W(d\xi) - \int_{Q_{st}} \varphi(\xi) d\xi$$

Z et Z^* ne s'exprimant que par l'intermédiaire d'intégrales simples, on a la propriété remarquable

$$Z^*([z,z']) = - Z([z,z'])$$

D'où l'on déduit la suite de propriétés équivalentes :

- Z est une $\mathbb{P}$-martingale forte
- $E(Z([z,z']) \mid \mathfrak{F}^*_z) = 0$
- $E(Z^*([z,z']) \mid \mathfrak{F}^*_z) = 0$
- $E_o(\Lambda^* Z^*([z,z']) \mid \mathfrak{F}^*_z) = 0$

(par le point (e) du lemme 1-2 ; Λ^* note $E(\Lambda_{11} \mid \mathfrak{F}^*_z))$.

Et cette dernière condition est impliquée par :

$$\forall\; z < z' \qquad E_o(\Lambda^*\, Z^*(z') \mid \mathfrak{F}^*_z) = \Lambda^*\, Z^*(z)$$

c'est à dire par :

∘ $\Lambda_z^* Z_z^*$ est une $\mathbb{P}_o$-martingale pour la filtration $\mathfrak{F}_z^*$.

(Notons que $\Lambda_z^* Z_z^*$ n'est pas $\mathfrak{F}_z$-adaptée, et que l'on ne déduit pas là une propriété de martingale forte de propriété de martingale).

Enfin ce dernier point équivaut à :

∘ Le long de tout chemin croissant Γ, $\Lambda^* Z^*$ est une $\mathbb{P}_o$-martingale pour la filtration $\mathfrak{F}^*$.

La démonstration se fondera alors sur la formule de Ito et le lemme suivant :

<u>Lemme 5</u>

Si θ et $\tilde{\theta}$ sont dans $\mathcal{L}_W^2(R_{11})$, et si l'on pose :

$$M_{st} = \int_{Q_{st}} \theta(\xi) W(d\xi) \qquad \tilde{M}_{st} = \int_{Q_{st}} \tilde{\theta}(\xi)\, W(d\xi)$$

alors M_{st} et $\tilde{M}_{st}$ sont deux martingales pour la filtration $\mathfrak{F}_{st}^*$, i.d.c., de variation quadratique :

$$[M,\tilde{M}]_{st} = \int_{Q_{st}} \theta(\xi)\, \tilde{\theta}(\xi)\, d\xi$$

<u>Démonstration</u>

Il suffit de faire la démonstration pour $M = \tilde{M}$, le cas général s'en déduisant par bilinéarité.

Soit Γ un chemin continu croissant, joignant l'origine à z ; notons σ la suite croissante de points de Γ $(0 = z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_n = z)$ et

$$[M]_\sigma^\Gamma(z) = \sum_{k=1}^{n-1} E_o(\delta_k M \mid \mathfrak{F}_{z_k}^*)$$

où

$$\delta_k M = M(z_{k+1}) - M(z_k) .$$

Alors, quand $|\sigma| = \sup_k |z_{k+1} - z_k|$ tend vers zéro ,

$$[M]_\sigma^\Gamma(z) \xrightarrow{L_1} \langle M\rangle^\Gamma(z)$$

Soit alors (θ_n) une suite de fonctions simples bornées tendant vers θ dans $\mathcal{L}^2_W(R_{11})$ et

$$M_n(s,t) = \int_{Q_{st}} \theta_n(\xi)\, W(d\xi)$$

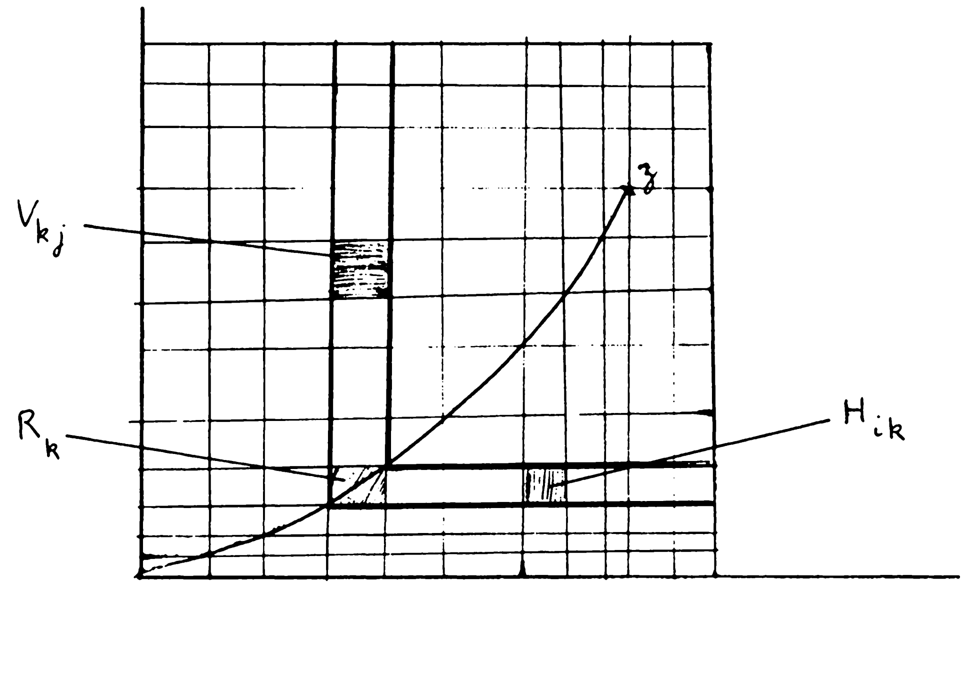
A σ fixé, il est clair que :

$$E|\,[M]_\sigma^\Gamma(s,t) - [M_n]_\sigma^\Gamma(s,t)| \leq ||\theta + \theta_n||_2\ ||\theta - \theta_n||_2$$

tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

On peut donc ramener l'étude au cas où M_n est une martingale définie à partir de θ_n simple . Notons $\pi = \{\Delta_{ij}\}$ la partition sur les éléments de laquelle θ_n est constant.

On peut, comme au chapitre IV, §2, se limiter aux suites σ telle que θ_n soit constant sur chaque $R_k = [z_k\ ,\ z_{k+1}]$



Si l'on fixe j , notons V_{kj} celui des ensembles $\Delta_{ij} \cap (Q_{k+1} \setminus Q_k)$ qui est non vide (s'il existe). Et notons H_{ik} celui des $\Delta_{ij} \cap (Q_{k+1} \setminus Q_k)$, qui à i fixé, est non vide, s'il existe.

Alors :

$$\delta_k M_n = \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} \theta(\xi) W(d\xi) = M_n(R_k) + \sum_j M_n(V_{kj}) + \sum_i M_n(H_{ij})$$

θ_n étant constant et adapté sur chaque R_k , V_{kj} et H_{ik} , W étant une martingale forte ,

$$E\left[(\delta_k M_n)^2 \mid \mathfrak{F}_k^*\right] = \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} \theta_n^2(\xi) d\xi$$

Donc pour une partition assez fine ,

$$[M_n]_\sigma^\Gamma(s,t) = \int_{Q_{st}} \theta_n^2(\xi) d\xi$$

qui est donc la valeur de sa limite quand $|\delta| \to 0$: $[M_n]^\Gamma(s,t)$.

Il suffit alors de constater que $[M_n]^\Gamma(s,t)$ tend vers $[M]^\Gamma(s,t)$ quand $n \longrightarrow \infty$ pour conclure . ■

Pour Z donné par (5-12), posons alors :

$$M^*(s,t) = \int_{Q_{st}} (\theta^{-1} \varphi)(\xi) \, W(d\xi) .$$

et

$$\Lambda(s,t) = \exp\left[M^*(s,t) - \frac{1}{2} \langle M^* \rangle (s,t)\right]$$

Sur tout chemin croissant Γ , l'application du théorème de Girsanov à une dimension permet de conclure que le changement de probabilité défini par Λ transforme la trace de Z^* le long de Γ en une martingale.

Ce qui fournit bien une autre démonstration de la première partie du théorème de Girsanov pour les martingales fortes. ■

Bibliographie du chapitre VIII

[1] GIRSANOV I.V. : On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution of measures. Th. of Prob. Appl. 5, p. 285-301 (1960) .

[2] VAN SCHUPPEN J.H., WONG E. : Transformation of local martingales under a change of law. Ann. of Prob., vol. 2, n° 5, p. 879-888 (1974).

[3] WONG E. : A likelihood ratio formula for two-dimensional random fields. I.E.E.E., vol. IT-20, n° 4, p. 418-422 (1974) .

[4] WONG E., ZAKAI M. : Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter. Z für W 29, p. 109-122 (1974).

[5] WONG E., ZAKAI M. : Likelihood ratios and transformation of probability associated with two-parameter Wierner processes, Z für W.40, p. 283-308 (1977) .

[6] GUYON X., PRUM B. : Le théorème de Girsanov pour une classe de processus à paramètre multidimensionnel. C.R.A.S. 285, p. 565-567 (1977).

[7] ETEMADI N., KALLIANPUR G. : Non anticipative transformations of the two-parameter Wiener process and a Girsanov theorem. J. Multi-variate, Anal. 7, p. 28-49 (1977) .

[8] GUYON X., PRUM B. : Formule de Ito pour des martingales faibles sur $\mathbb{R}^2$. Fonctions harmoniques faibles. Applications, C.R.A.S. t. 286, p. 281-284 (1978) .

[9] GUYON X., PRUM B. : Processus à indice dans $[0,1]^2$, prépublication Université d'Orsay (1978) .

[10] GUYON X., PRUM B. : Recherche de la densité de probabilité du théorème de Girsanov, prépublication Université d'Orsay (1978) .

[11] NUALART D., SANZ M. : T-eorema de Girsanov pel proces de Wiener amb dos parametres. Preprint (en catalan) communiqué (1979) .

[12] HAJEK B., WONG E. : Representation and transformation of two parameter martingales under a change of measure. Memorandum n° UCB/ERL M 79/23 , Univ. Berkeley (1979) .