HEDI DABOUSSI

Quelques résultats sur les fonctions arithmétiques

Thèses d'Orsay, 1979

<http://www.numdam.org/item?id=BJHTUP11_1979__0077__P0_0>

UNIVERSITE PARIS-SUD

Centre D'Orsay

THESE

De Doctorat D'Etat Es Sciences Mathematiques

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-SCIENCES

par

Hédi DABOUSSI

Sujet de la Thèse : QUELQUES RÉSULTATS SUR LES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES.

Soutenue le 26 juin 1979 *devant le Jury composé de* :

H. DELANGE	Président
J.C. BERMOND	
J.M. DESHOUILLERS	
M. MENDES-FRANCE	
G. POITOU	
G. RAUZY	

Il m'est agréable de remercier ici tous ceux qui ont contribué au développement de ce travail.

Les enseignants d'Orsay m'ont donné goût aux mathématiques et à l'enseignement.

Les Universités de Reims, Bruxelles et Orsay m'ont employé.

Monsieur H. Delange m'a introduit à la théorie des nombres. J'ai beaucoup apprécié la clarté de ses exposés : il sait rendre "faciles" des théorèmes compliqués. Ses grandes qualités pédagogiques, sa modestie naturelle sont pour moi exemplaires. Je tiens aussi à louer son attachement à ses élèves, l'amour de son métier et son humanisme.

Monsieur J.C. Bermond m'a proposé un intéressant second sujet.

Messieurs J.M. Deshouillers, M. Mendès France, G. Poitou et G. Rauzy m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Le personnel de la bibliothèque m'a toujours accueilli amicalement.

Madame Parvan a beaucoup fait pour améliorer la présentation de ce travail ; elle a fait preuve de beaucoup de patience, de gentillesse et de compétence.

Mesdames Launay et Zielinski ont donné à ce travail sa forme définitive.

COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. XXVIII 1973 FASC. 2

FONCTIONS ARITHMÉTIQUES MULTIPLICATIVES ET MULTIPLICATEURS DES COEFFICIENTS DE FOURIER DES FONCTIONS DE PUISSANCE p-IÈME SOMMABLE

PAR

HEDI DABOUSSI ET JACQUES PEYRIÈRE (ORSAY)

On désigne par f une fonction définie sur $\boldsymbol{Z}$, paire, à valeurs réelles, multiplicative (c'est-à-dire telle que $f(mn) = f(m)f(n)$ lorsque m et n sont premiers entre eux) et telle que $\sup\{|f(n)|;\, n \in \boldsymbol{Z}\} = 1$. Une telle fonction est déterminée par les nombres $f(0)$ et $f(p^j)$ lorsque p parcourt l'ensemble P des nombres premiers et j l'ensemble des entiers positifs.

Pour chaque nombre premier p on désigne par $\boldsymbol{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, par $|\ |_p$ la valeur absolue p-adique et par F_p la fonction ainsi définie sur $\boldsymbol{Z}_p \setminus \{0\}$: $F_p(x) = f(|x|_p^{-1})$. Il est clair que pour tout entier n, non nul, on a

$$f(n) = \prod_{p \in P} F_p(n).$$

Soit G le groupe compact $\prod_{p \in P} \boldsymbol{Z}_p$; on appelle h l'*homomorphisme naturel* de $\boldsymbol{Z}$ dans G, h est continu injectif et d'image dense. Le groupe dual de $\prod_{p \in P} \boldsymbol{Z}_p$ est canoniquement isomorphe à $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ et l'homomorphisme dual de h est l'injection canonique de $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ dans $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \cong \boldsymbol{T}$. La fonction $F = \bigotimes_{p \in P} F_p$ est définie sur G auquel on a enlevé l'ensemble E de mesure nulle constitué des points dont une au moins des coordonnées est nulle. Remarquons que $h^{-1}(E) \cap \boldsymbol{Z} = \{0\}$ et que $F \circ h(n) = f(n)$ pour tout entier rationnel non nul.

Soit H un groupe abélien localement compact, soit Λ le groupe dual de H et $\mathscr{F}: L^2(\Lambda) \mapsto L^2(H)$ la transformée de Fourier. Soit r un nombre réel supérieur à 1. La sous-algèbre $\mathscr{M}_r(H)$ de $L^\infty(H)$ est définie comme suit: $m \in \mathscr{M}_r(H)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout élément g de $L^2(\Lambda)$ et tout élément h de $L^2(\Lambda)$ la relation $\mathscr{F}h = m\mathscr{F}g$ entraîne $\|h\|_r \leqslant C\|g\|_r$. La norme de m dans $\mathscr{M}_r(H)$ est le infimum des constantes C possibles.

On démontre, d'après une idée d'Yves Meyer, le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Si* $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ *est paire, multiplicative et vérifie* $|f| \leqslant 1$ *et*

$$\sum_{p \in P} \frac{1-f(p)}{p} < +\infty,$$

alors, pour tout $r \geqslant 1$, *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) $f \in \mathscr{M}_r(\mathbf{Z})$,

(b) $\mathscr{M}_r\left(\prod_{p \in P} \mathbf{Z}_p\right)$

(*F est définie à l'aide de f comme il est précisé dans l'introduction*).

De plus, si l'on modifie convenablement $f(0)$, *on a*

$$\|f\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})} = \|F\|_{\mathscr{M}_r(G)}.$$

La démonstration repose sur le théorème suivant de Lohoué [3]:

THÉORÈME 2. *Soient* G_1 *et* G_2 *deux groupes abéliens localement compacts et* $h: G_1 \to G_2$ *un homomorphisme continu, injectif et d'image dense.*

(a) *Pour toute fonction continue* $F: G_2 \to \mathbf{C}$ *et tout* $r > 1$, $F \in \mathscr{M}_r(G_2)$ *et* $F \circ h \in \mathscr{M}_r(G_1)$ *sont équivalents et de plus les normes de F et* $F \circ h$ *dans ces espaces sont égales.*

(b) *Plus généralement, soit* $(\varphi_a)_{a \in A}$ *une approximation de l'identité sur le groupe* G_2 *et soit* $F: G_2 \to \mathbf{C}$ *une fonction borélienne bornée telle que* $(F * \varphi_a)(x) \to F(x)$ *suivant A pour tout x dans* $h(G_1)$. *Alors* $F \in \mathscr{M}_r(G_2)$ *entraîne* $F \circ h \in \mathscr{M}_r(G_1)$ *et* $\|F \circ h\|_{\mathscr{M}_r(G_1)} \leqslant \|F\|_{\mathscr{M}_r(G_2)}$.

Remarquons que la fonction F vérifie les hypothèses du théorème 2(b). En effet, le produit

$$\prod_{p \in P} \int_{\mathbf{Z}_p} F_p(t)\,dt$$

est convergent, donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie, P_1, de P telle que

$$\left| \prod_{p \notin P_1} \int_{\mathbf{Z}_p} F_p(t)\,dt - 1 \right| < \varepsilon.$$

D'autre part, pour chaque $p \in P_1$ et pour $x \neq 0$,

$$p^j \int_{p^j \mathbf{Z}_p} F_p(x+t)\,dt$$

tend vers $F_p(x)$ lorsque j tend vers $+\infty$. C'est dire qu'il existe une suite de nombres entiers, N_k, tels que χ_k/N_k désignant la fonction caractéristique de $\overline{h(N_k\mathbf{Z})}$, on ait

$$\lim_{k\to\infty} F*\chi_k(x) = F(x)$$

pour tout x dont aucune des projections n'est nulle. Quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $F*\chi_k(0)$, lorsque k tend vers $+\infty$, a une limite que nous prenons pour nouvelle définition de $f(0)$.

On en déduit que si F est multiplicateur, f l'est aussi, et que $\|f\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})} \leqslant \|F\|_{\mathscr{M}_r(G)}$.

Supposons maintenant que f appartienne à $\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})$. Posons $G_n = \overline{h(N_n\mathbf{Z})}$; nous savons que

$$G_n = \prod_{p\in P} G_{n,p}$$

où $G_{n,p}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p$ et l'on a

$$F*\chi_n\big(h(j)\big) = \prod_{p\in P} \frac{1}{|G_{n,p}|} \int_{G_{n,p}} F_p\big(h(j)-t\big)\,dt.$$

Or d'après un théorème de Delange [1] la fonction f a une moyenne sur toute progression arithmétique et le produit précédent n'est autre que la moyenne de f sur la progression $N_n\mathbf{Z}+j$,

$$F*\chi_n\big(h(j)\big) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(j+kN_n),$$

ce qui montre que $(F*\chi_n)\circ h$ est dans l'ensemble convexe fermé de $\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})$ engendré par f et ses translatées, par suite

$$\|(F*\chi_n)\circ h\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})} \leqslant \|f\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})}.$$

Nous pouvons appliquer le théorème 2(a) à la fonction $F*\chi_n$:

$$\|F*\chi_n\|_{\mathscr{M}_r(G)} \leqslant \|(F*\chi_n)\circ h\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})} \leqslant \|f\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})}.$$

On en conclut que $\|F\|_{\mathscr{M}_r(G)} \leqslant \|f\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z})}$ car $F*\chi_n$ converge vers F pour la topologie $\sigma\big(L^\infty(G), L^1(G)\big)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Le même théorème, avec la même démonstration, est valable à plusieurs dimensions: suivant Delange [2], une fonction de deux variables est multiplicative si $f(m_1, n_1)f(m_2, n_2) = f(m_1m_2, n_1n_2)$ lorsque m_1n_1 et m_2n_2 sont premiers entre eux; le groupe G est alors $\prod_{p\in P} (\mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p)$.

Nous donnerons deux applications:

COROLLAIRE 1. *f étant une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème* 1, *nous supposerons que, pour chaque nombre premier p, il existe une valeur $f(p^j)$, $j = 1, 2, \ldots$, différente de* 1. *Soit a_p la première de ces valeurs. Si* $\sup(a_p) < 1$, *la fonction f n'est multiplicateur des coefficients de Fourier des fonction de $L^r(\boldsymbol{T})$ que lorsque r est égal à* 2.

On va montrer que, lorsque $r \neq 2$, le produit $\prod_{p \in P} \|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p)}$ diverge vers $+\infty$, ce qui prouvera que F n'est pas multiplicateur des transformées de Fourier des éléments de $l^r(\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z})$.

Evaluons $\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p)}$ quand $1 < r < 2$, cas auquel on peut toujours se restreindre. Pour tout ensemble E, 1_E désignera la fonction caractéristique de E. On a

$$F_p = 1_{\mathbf{Z}_p \setminus p^n \mathbf{Z}_p} + a_p 1_{p^n \mathbf{Z}_p \setminus p^{n+1} \mathbf{Z}_p} + \Phi_p$$

pour un entier n convenable et une fonction Φ_p à support dans $p^{n+1}\boldsymbol{Z}_p$. La norme de F_p dans $\mathscr{M}_r(\boldsymbol{Z}_p)$ peut être minorée de la façon suivante: soit φ la fonction $1_{p^{n-1}\mathbf{Z}_p \setminus p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$; alors

$$\varphi F_p = 1_{p^{n-1}\mathbf{Z}_p \setminus p^n \mathbf{Z}_p} + a_p 1_{p^n \mathbf{Z}_p \setminus p^{n+1}\mathbf{Z}_p}.$$

Il suffit maintenant de calculer les normes γ et δ de $\mathscr{F}^{-1}(\varphi)$ et de $\mathscr{F}^{-1}(\varphi F_p)$ dans $L^r(\hat{\boldsymbol{Z}}_p)$ pour écrire $\delta \leqslant \gamma \|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p)}$, ce qui fournit la minoration cherchée. Plus précisément, désignant par Γ_j l'orthogonal dans $\hat{\boldsymbol{Z}}_p$ de $p^j \boldsymbol{Z}_p$, nous avons

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi) = \frac{1}{p^{n-1}} \left(1_{\Gamma_{n-1}} - \frac{1}{p^2} 1_{\Gamma_{n+1}} \right),$$

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi F_p) = \frac{1}{p^{n-1}} \left[1_{\Gamma_{n-1}} - \frac{1}{p} 1_{\Gamma_n} + a_p \left(\frac{1}{p} 1_{\Gamma_n} - \frac{1}{p^2} 1_{\Gamma_{n+1}} \right) \right],$$

donc

$$\gamma^r = \left(\frac{1}{p^{n-1}} \right)^r \left[\left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^r p^{n-1} + \frac{1}{p^{2r}} (p^{n+1} - p^{n-1}) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{p^{n-1}} \right)^{r-1} \left[\left(1 - \frac{1}{p^2} \right)^r + \frac{1}{p^{2(r-1)}} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) \right] = \left(\frac{1}{p^{n-1}} \right)^{r-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{p^{2(r-1)}} \right) \right]$$

et, tenant compte du fait que r est strictement compris entre 1 et 2,

$$\delta^r = \left(\frac{1}{p^{n-1}} \right)^r \times$$

$$\times \left[\left| 1 - \frac{1 - a_p}{p} - \frac{a_p}{p^2} \right|^r p^{n-1} + \left| \frac{1 - a_p}{p} + \frac{a_p}{p^2} \right|^r (p^n - p^{n-1}) + \left(\frac{a_p}{p^2} \right)^r (p^{n+1} - p^{n-1}) \right]$$

$$= \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[\left|1-\frac{1-a_p}{p}-\frac{a_p}{p^2}\right|^r+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}\left|1+\frac{a_p}{p(1-a_p)}\right|^r\left(1-\frac{1}{p}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{|a_p|^r}{p^{2(r-1)}}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[1-r\frac{1-a_p}{p}+o\left(\frac{1}{p}\right)+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{p^{n-1}}\right)^{r-1}\left[1+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)\right],$$

d'où

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p)} \geqslant \frac{\delta^r}{\gamma^r} \geqslant 1+\frac{(1-a_p)^r}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right)$$

et le produit infini $\prod_{p\in P}\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(F_p)}$ diverge vers $+\infty$.

Ceci prouve, par exemple, que la fonction caractéristique de l'ensemble des nombres quadratfrei n'est multiplicateur de $\mathscr{F}(L^r(T))$ que lorsque r égale 2.

COROLLAIRE 2. *La fonction caractéristique, dans $\mathbf{Z}^2$, de l'ensemble des couples de nombres premiers entre eux n'est un multiplicateur de $\mathscr{F}(L^r(T^2))$ que lorsque r égale 2.*

De la même façon, on montre que

$$\prod_{p\in P}\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)} = +\infty \quad \text{lorsque } 1<r<2.$$

Cette fois

$$F_p = 1-1_{p\mathbf{Z}_p\times p\mathbf{Z}_p}$$

et pour évaluer la norme de F_p il suffit de se placer sur le quotient $(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)/(p\mathbf{Z}_p\times p\mathbf{Z}_p)$. On a la situation suivante: si $D=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, on appelle Δ la diagonale de $D\times D$ et $\hat{D}$ le dual de D. Soit φ la fonction caractéristique de la diagonale, sa transformée de Fourier est $1_{\Delta^\perp}/p$, où $\Delta^\perp$ est l'orthogonal de Δ; appliquons à φ le multiplicateur $1-1_{\{0\}}$: par transformée de Fourier nous obtenons $1_{\Delta^\perp}/p-1/p^2$, par suite

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)} \geqslant \left[\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\right)^r p+\frac{1}{p^{2r}}(p^2-p)\right]\Big/p^{1-r},$$

d'où

$$\|F_p\|^r_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)} \geqslant \left(1-\frac{1}{p}\right)^r+\frac{1}{p^{r-1}}\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1+\frac{1}{p^{r-1}}+o\left(\frac{1}{p^{r-1}}\right),$$

ce qui assure

$$\prod_{p\in P}\|F_p\|_{\mathscr{M}_r(\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p)} = +\infty \quad \text{si } 1<r<2.$$

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Annales d'École Normale Supérieure, 3-ème série, 78 (1961), p. 273-304.

[2] — *On some sets of pairs of positive integers*, Journal of Number Theory 1 (1969), p. 261-279.

[3] N. Lohoué, *Algèbres A_p et convoluteurs de L^p*, Orsay 1972 (thèse), à paraître dans les Annales de l'Institut Fourier.

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1972

Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 9 (1974) 173—180.

SPECTRUM, ALMOST-PERIODICITY AND EQUIDISTRIBUTION MODULO 1

by

H. DABOUSSI and M. MENDES FRANCE

§. 1. Introduction

The object of this article is to relate the equidistribution (mod 1) of a sequence $\Lambda=(\lambda_n)$ to that of certain of its subsequences. Explicit applications will be discussed in the last paragraphs. Particular attention will be given to additive sequences.

§. 2. Almost-periodic functions and related sequences

Consider the complex vector space $\mathfrak{L}$ of arithmetic functions f such that

$$\|f\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\leqq n} |f(k)| < \infty \tag{1}$$

and let $\mathfrak{M}$ be the quotient space $\mathfrak{L}/(0)$ where (0) is the set of null functions (i.e. functions f such $\|f\|=0$). The space $\mathfrak{M}$ is known as the Marcinkiewicz space; it is a Banach space, the norm being induced by the semi-norm (1). From now on, we shall always identify any element $f\in\mathfrak{L}$ with its class $f+(0)\in\mathfrak{M}$.

A trigonometric polynomial P is a finite linear combination of imaginary exponentials:

$$P(x) = \sum_{\nu} c_\nu e(-\alpha_\nu x)$$

where the summation extends over a finite range, where $e(\xi)$ denotes $\exp(2i\pi\zeta)$ and where the c_ν's are complex numbers while the α_ν's are elements of the torus $\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Let A be a nonempty subset of $\mathbf{T}=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. It is obvious that the family of trigonometric polynomials, the exponents α_ν of which are to be taken in A, is a sub vector space of $\mathfrak{M}$. Its closure $\mathfrak{B}(A)$ is by definition *the vector space of almost-periodic functions with exponents in A*. $\mathfrak{B}(\mathbf{T})$ is the classical Besicovitch space of almost. periodic functions. (What we name "exponent" is usually known as elements of the "spectrum"; but as we shall later introduce a set which is convenient to be called "spectrum", and as we wish to avoid confusion, we prefer to describe A as the set of exponents.)

Let $M=(m_n)$ be a nondecreasing sequence of positive integers. For any integer $k\geqq 1$, put

$$\chi_M(k) = \text{card}\,\{n|m_n = k\}$$

so that if M is strictly increasing, χ_M is the characteristic function of M. If M is not strictly increasing we still call χ_M the characteristic function of M. *M is said to be*

an A-sequence if the characteristic function χ_M *belongs to* $\mathfrak{B}(A)$ *and if* $\|\chi_M\|>0$. Notice that if M is an A-sequence, it has positive density. Indeed

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m_n}\sum_{k\leqq n}\chi_M(k)=\|\chi_M\|>0.$$

Note also that $A_1\subset A_2$ implies $\mathfrak{B}(A_1)\subset\mathfrak{B}(A_2)$ so that an A_1-sequence is an A_2-sequence. In particular, any A-sequence is a **T**-sequence.

Explicit examples of A-sequences are easy to produce. We list below some important ones.

(i) Arithmetic progressions $(an+b)$ where $a\geqq 1$ and $b\geqq 0$ are integers, are $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$-sequences.

(ii) Let $\alpha>0$ be a real number. The sequence $([\alpha n])$ is a **T**-sequence.

(iii) The ordered set of squarefree integers is a $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$-sequence, and more generally, so are the sequences of r-free integers. For a proof, see MENDÈS FRANCE [4] or NOVOSELOV [5] from which it follows that any increasing integer sequence whose characteristic function is bounded and multiplicative, is a $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$-sequence.

The following notion will be used in the next paragraph. Let A be, as before, a subset of **T**, possibly empty and recall that $\mathfrak{B}(A)$ is the set of almost-periodic functions with exponents in A. Consider the family of characteristic functions which belong to $\mathfrak{B}(A)$ and let $\mathfrak{B}'(A)$ denote the closure of the vector space spanned by these characteristic functions. Obviously $\mathfrak{B}'(A)\subset\mathfrak{B}(A)$. Let A^* be any subset of the torus **T** such that $\mathfrak{B}(A^*)\subset\mathfrak{B}'(A)$. We then define the two subsets of **T**

$$\hat{A}=\bigcup_{q=1}^{\infty}qA|$$

and

$$\check{A}=\mathbf{T}\setminus\bigcap_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}(\mathbf{T}\setminus A)^*.$$

Notice that $\hat{\mathbf{T}}=\check{\mathbf{T}}=\mathbf{T}$ and $\hat{\emptyset}=\check{\emptyset}=\emptyset$.

§. 3. The notion of spectrum

In the sequel, we shall often identify a real number with its class modulo 1.

Let $\Lambda=(\lambda_n)$ be a given infinite sequence of real numbers. By definition, the spectrum of Λ is the set

$$\mathrm{sp}\,(\Lambda)=\{\alpha\in\mathbf{T}|(\lambda_n-n\alpha)\text{ not equidistributed (mod 1)}\}.$$

(In a previous article [4], the spectrum had a slightly different definition.)

Metric properties of the spectrum will be discussed later. Observe however that the spectrum has Lebesgue measure 0 (see paragraph 4) so that in the following theorem the set S may be thought as having a 0 Lebesgue measure though in some cases it is convenient to choose S with positive measure.

THEOREM 1. *Let* S *be a proper subset of* **T**, *possibly empty.*

(i) *If* $\mathrm{sp}\,(\Lambda)\subset S$ *and if* $M=(m_n)$ *is any* $(\mathbf{T}\setminus\hat{S})$*-sequence, then* $\Lambda_M=(\lambda_{m_n})$ *is equidistributed* (mod 1).

(ii) *If all* $(\mathbf{T}\setminus S)$*-sequences* $M=(m_n)$ *are such that* $\Lambda_M=(\lambda_{m_n})$ *is equidistributed* (mod 1), *then* $\operatorname{sp}(\Lambda)\subset S$.

PROOF. (i) Assume $\operatorname{sp}(\Lambda)\subset S$ and let $M=(m_n)$ be any $(\mathbf{T}\setminus\hat{S})$-sequence. We wish to prove that Λ_M is equidistributed (mod 1). According to Weyl's criterion, it is enough to show that

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}e(q\lambda_{m_k}),\quad q\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

tends to zero when n goes to infinity. Let χ_M be the characteristic function of M. Then

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k\leqq m_n}\chi_M(k)e(q\lambda_k).$$

Let P be any trigonometric polynomial in $\mathfrak{B}(\mathbf{T}\setminus\hat{S})$. Decompose σ_n into two sums

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k\leqq m_n}\big(\chi_M(k)-P(k)\big)e(q\lambda_k)+\frac{1}{n}\sum_{k\leqq m_n}P(k)e(q\lambda_k)=\sigma_n^1+\sigma_n^2.$$

The sum σ_n^2 is a finite linear combination of expressions of the type

$$\sigma_n^3=\frac{1}{n}\sum_{k\leqq m_n}e(-\alpha k)e(q\lambda_k)$$

where $\alpha\in\mathbf{T}\setminus\hat{S}$. As $M=(m_n)$ is a $(\mathbf{T}\setminus\hat{S})$-sequence, the ratio $\frac{m_n}{n}$ tends to $\|\chi_M\|^{-1}$ so that

$$\sigma_n^3\sim\|\chi_M\|^{-1}\frac{1}{m_n}\sum_{k\leqq m_n}e\left(q\left(\lambda_k-\frac{\alpha}{q}k\right)\right).$$

The hypothesis $\operatorname{sp}(\Lambda)\subset S$ implies that the sequence $\Lambda-\frac{\alpha}{q}\mathbf{N}$ is equidistributed (mod 1). Hence σ_n^3 tends to 0, and so does σ_n^2. Thus

$$\limsup_{n\to\infty}|\sigma_n|=\limsup_{n\to\infty}|\sigma_n^1|\leqq\|\chi_M\|^{-1}\|\chi_M-P\|.$$

Choosing then the polynomial P such that $\|\chi_M-P\|<\varepsilon\|\chi_M\|$, we conclude that σ_n tends to zero.

(ii) It remains now to prove the "converse". Assume that for any $(\mathbf{T}\setminus S)$-sequence $M=(m_n)$

$$\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}e(q\lambda_{m_k})=o(1),\quad q\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}.$$

As before, we notice that m_n/n tends to a finite limit and therefore the hypothesis can be written

$$\frac{1}{m_n}\sum_{k\leqq m_n}\chi_M(k)e(q\lambda_k)=o(1).$$

Using usual techniques, it is easily shown that this relation implies

$$\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}\chi_M(k)e(q\lambda_k) = o(1). \tag{2}$$

Recall that the closure $\mathfrak{B}'(\mathbf{T}\setminus S)$ of the vector space spanned by the characteristic functions χ_M when M ranges over the family of all $(\mathbf{T}\setminus S)$-sequences contains $\mathfrak{B}((\mathbf{T}\setminus S)^*)$. Hence, if $\alpha\in(\mathbf{T}\setminus S)^*$ and if $\varepsilon>0$ is given, there exists a finite linear combination f of χ_M's such that

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}|e(-\alpha k)-f(k)| < \varepsilon.$$

Consider the mean

$$\tau_n = \frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}e(-\alpha k)e(q\lambda_k) = \frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}(e(-\alpha k)-f(k))e(q\lambda_k)+\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}f(k)e(q\lambda_k).$$

According to (2), the last expression tends to 0 as n goes to infinity, hence

$$\limsup_{n\to\infty}|\tau_n| \leqq \varepsilon.$$

We have thus proved that for all $\alpha\in(\mathbf{T}\setminus S)^*$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}e\left(q\left(\lambda_k-\frac{\alpha}{q}k\right)\right) = 0.$$

Consequently, if α belongs to the set $\bigcap_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q}(\mathbf{T}\setminus S)^* = \mathbf{T}\setminus\check{S}$, then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\leqq n}e(q(\lambda_k-\alpha k)) = 0.$$

The sequence $\Lambda-\alpha\mathbf{N}$ is thus equidistributed (mod 1) for all $\alpha\in\mathbf{T}\setminus\check{S}$. This proves that $\mathrm{sp}(\Lambda)\subset\check{S}$ and completes the proof of the theorem.

We now give some consequences of the theorem:

COROLLARY 1. *If* $\mathrm{sp}(\Lambda)$ *contains no rational numbers, then whatever the* $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$*-sequence* $M=(m_n)$ *be, the sequence* $\Lambda_M=(\lambda_{m_n})$ *is equidistributed* (mod 1). *In particular, for any integer* $a\geqq 1$ *and any integer* $b\geqq 0$, *the sequence* $\Lambda_{a,b}=(\lambda_{an+b})$ *is equidistributed* (mod 1).

Conversely, if all the sequences $\Lambda_{a,b}$ $(a\geqq 1, b\geqq 0)$ *are equidistributed* (mod 1), *then* $\mathrm{sp}(\Lambda)$ *contains no rational numbers.*

PROOF. Following BÉSINEAU, let $a\geqq 1$ and $b\geqq 0$ be two given integers and let $\chi_{a,b}$ denote the characteristic function of the arithmetical progression $(an+b)$. The two "reciprocical" identities (Fourier transforms on the additive group $\mathbf{Z}/(a\mathbf{Z})$)

$$\chi_{a,b}(k) = \frac{1}{a}\sum_{l=0}^{a-1}e\left(-\frac{bl}{a}\right)e\left(\frac{kl}{a}\right)$$

$$e\left(\frac{bk}{a}\right) = \sum_{l=0}^{a-1}e\left(\frac{bl}{a}\right)\chi_{a,l}(k)$$

valid for all integers $a \neq 0$, b and k imply the equality $\mathfrak{B}'(\mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathfrak{B}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ so that $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^* = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Actually, the closure of the vector space spanned by the $\chi_{a,b}$'s is $\mathfrak{B}(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Setting $S = \mathbf{T} \setminus (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ in theorem 1 and using the fact that $S = \hat{S} = \check{S}$, one then concludes that $\Lambda_{a,b}$ is equidistributed (mod 1) for all integers $a \geqq 1$, $b \geqq 0$ if and only if $\mathrm{sp}(\Lambda) \subset S$, or equivalently, Λ_M is equiditributed (mod 1) for all $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$-sequences M if and only if $\mathrm{sp}(\Lambda) \subset S$.

Remark. In the process of the proof, we have shown that if $\Lambda_{a,b}$ is equidistributed (mod 1) for all integers $a \geqq 1$, $b \geqq 0$ then Λ_M is equidistributed (mod 1) for all $(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$-sequences M.

COROLLARY 2. *The two following statements are equivalent:*

(i) $\mathrm{sp}(\Lambda) = \emptyset$,

(ii) *for all* $\mathbf{T}$*-sequences* $M = (m_n)$, *the sequence* $\Lambda_M = (\lambda_{m_n})$ *is equidistributed* (mod 1).

PROOF. Put $S = \emptyset$ in the theorem. (See [4].)

Actually, corollary 2 can be restated in a rather striking way. Define $B(\Lambda)$ as the set of real numbers x such that the sequence $x\Lambda$ is equidistributed (mod 1). Let $\mathfrak{C}$ be the class of $\mathbf{T}$-sequences.

COROLLARY 3. *For any sequence* Λ

$$\bigcap_{\alpha \in \mathbf{T}} B(\Lambda - \alpha\mathbf{N}) = \bigcap_{M \in \mathfrak{C}} B(\Lambda_M).$$

PROOF. The following implications are obvious:

$$x \in \bigcap_{\alpha \in \mathbf{T}} B(\Lambda - \alpha\mathbf{N}) \Leftrightarrow x\Lambda - x\alpha\mathbf{N} \text{ is equidistributed (mod 1) for all } \alpha,$$

$$\Leftrightarrow x\Lambda - \alpha\mathbf{N} \text{ is equidistributed (mod 1) for all } \alpha,$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{sp}(x\Lambda) = \emptyset,$$

and, according to corollary 2,

$$\Leftrightarrow \forall M \in \mathfrak{C},\ x\Lambda_M \text{ is equidistributed (mod 1)},$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{M \in \mathfrak{C}} B(\Lambda_M).$$

§. 4. Empty spectra

It is easy to prove that all sequences Λ have 0 Lebesgue measure spectra. The result can be improved upon: a trivial consequence of a theorem due to H. WALLIN [7] shows indeed that *whatever the sequence* Λ *may be,* $\mathrm{sp}(\Lambda)$ *has Hausdorff dimension* 0. One can furthermore establish that with respect to the Haar measure on the infinite torus $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^{\mathbf{N}}$, *almost all sequences* Λ *have empty spectra,* so that the situation described in corollary 2 is actually the most "common" one.

Explicit examples of empty spectrum sequences are simple to list. According to a well known theorem of VAN der CORPUT, any sequence $\Lambda = (\lambda_n)$ such that $(\lambda_{n+q} - \lambda_n)$

is equidistributed (mod 1) for all integers $q \geqq 1$, has empty spectrum. As a consequence, if $g \geqq 2$ is a given integer and if x is g-normal, then $\mathrm{sp}((xg^n))=\emptyset$. Also, if f is a real polynomial of degree $v \geqq 2$

$$f(x) = a_v x^v + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

with at least one irrational coefficient among $\{a_2, a_3, \ldots, a_v\}$, then the sequence $f=(f(n))$ has an empty spectrum.

By the use of VINOGRADOV's results, G. RAUZY [6] has established that if f is a real entire function, other than a polynomial, and if for $|z|$ infinite

$$|f(z)| = O(\exp(\mathrm{Log}\,|z|)^\delta), \quad 1 < \delta < \frac{5}{4},$$

then again $\mathrm{sp}(f)=\emptyset$.

Finally if f is a real function with a continuous second derivative, slowly increasing in the following sense:

(i) *For all* $\varepsilon>0$, $f'(x)-f'(\varepsilon x)=O(1)$

(ii) $x^2 f''(x)$ *tends to* $\pm\infty$ *when* x *approaches* $+\infty$, *then* $\mathrm{sp}(f)=\emptyset$.

The proof, which is quite straightfoward, depends on VAN DER CORPUT's estimations relating

$$\sum_{a<n\leqq b} e(f(n)) \quad \text{to} \quad \int_a^b e(f(u))\,du$$

Functions f which verify the above conditions are for example $f(x)=(\mathrm{Log}\,x)^\delta$ $(\delta>1)$ and $f(x)=x(\mathrm{Log}\,x)^\delta$ $(\delta \in \mathbf{R}\setminus\{0\})$.

§. 5. Additive functions

A real arithmetic function f is said to be *additive* if for every couple of relatively prime positive integers m, n

$$f(mn) = f(m)+f(n).$$

THEOREM 2. *Let f be a real additive function. Then*

(i) $\mathrm{sp}(f)\cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\emptyset \Leftrightarrow (f(n))$ *is equidistributed* (mod 1).

(ii) $\mathrm{sp}(f)\cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\mathbf{Q}/\mathbf{Z} \Leftrightarrow (f(n))$ *is not equidistributed* (mod 1).

PROOF. (i) If $\mathrm{sp}(f)\cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\emptyset$, then $0 \notin \mathrm{sp}(f)$ and so $(f(n))$ is equidistributed (mod 1). Conversely, suppose that $(f(n))$ is equidistributed (mod 1). Let q and s be nonzero integers and let r be any integer. Define

$$\sigma_n\left(\frac{r}{s}, q\right) = \frac{1}{n}\sum_{k\leqq n} e\left(q\left(f(k)-\frac{r}{s}k\right)\right).$$

It is obvious that

$$\sigma_n\left(\frac{r}{s}, q\right) = \sum_{h=0}^{s-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{\substack{k\leqq n\\ k\equiv h (\mathrm{mod}\, s)}} e(qf(k))\right) e\left(-\frac{qrh}{s}\right).$$

DELANGE [3] proved that the inner mean tends to zero. Hence $\sigma_n\left(\frac{r}{s}, q\right)$ tends to zero when n increases to infinity. WEYL's criterion then shows that $\left(f(n)-\frac{r}{s}n\right)$ is equidistributed (mod 1) so that finally $\frac{r}{s}\notin \mathrm{sp}(f)$. Part (i) of the theorem is thus established.

(ii) It suffices to prove that if $(f(n))$ is not equidistributed (mod 1) then $\mathrm{sp}(f)\cap \cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. According to DELANGE [2], the nonequidistribution (mod 1) of $(f(n))$ is equivalent to the fact that

$$\sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p} \sin^2 m\pi(f(p)-t \operatorname{Log} p) < \infty$$

for some nonzero integer m and for some real number t. The inequality

$$\sin^2 hx \leqq h^2 \sin^2 x \tag{3}$$

valid for all integers h and all real numbers x, implies

$$\sum_{p \text{ prime}} \frac{1}{p} \sin^2 m\pi(hf(p)-ht \operatorname{Log} p) < \infty$$

so that whatever the integer h is, the sequence $(hf(n))$ is not equidistributed (mod 1). Suppose now that the rational number $\frac{r}{s}$ does not belong to $\mathrm{sp}(f)\cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Then $\left(f(n)-\frac{r}{s}n\right)$ is equidistributed (mod 1), and so is $(sf(n))$. This contradiction proves the theorem.

COROLLARY 4. *If f is a real additive function then either*

$$\mathrm{sp}(f) = \emptyset \quad \textit{or} \quad \mathrm{sp}(f) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

PROOF. As a consequence of theorem 2, either $\mathrm{sp}(f)\cap(\mathbf{Q}/\mathbf{Z})=\emptyset$ or $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\subset \mathrm{sp}(f)$. On the other hand DABOUSSI and DELANGE [1] proved that if F is multiplicative and if $|F(n)|\leqq 1$, then for all irrational number α,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k\leqq n} F(k)e(-\alpha k) = 0.$$

Choosing $F(k)=\exp 2i\pi q f(k)$, it follows that $\mathrm{sp}(f)\subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Hence $\mathrm{sp}(f)$ is either $\emptyset$ or $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

COROLLARY 5. *Let f be a real additive function. If $f=(f(n))$ is equidistributed* (mod 1), *then whatever be the* T*-sequence $M=(m_n)$, the sequence $(f(m_n))$ is equidistributed* (mod 1).

PROOF. The equidistribution (mod 1) of f implies $\mathrm{sp}(f)=\emptyset$ if f is additive. The equidistribution (mod 1) of $(f(m_n))$ then follows from corollary 2.

BIBLIOGRAPHY

[1] DABOUSSI, H., DELANGE, H.: Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à un. *Compte Rendu Acad. Sc. Paris,* **278** (1974), 657—660.
[2] DELANGE, H.: On the distribution modulo 1 of additive functions, *Journal of the Indian Math. Soc.* **34** (1970), 215—235.
[3] DELANGE, H.: Sur la distribution des valeurs des fonctions additives, *Compte Rendu Acad. Sc. Paris,* **275** (1972), 1139—1142.
[4] MENDES FRANCE, M.: Les suites à spectre vide et la répartition modulo 1. *Journal of Numb. Theory,* **5** (1973), 1—15.
[5] NOVOSELOV, E. V.: A new method in probabilistic number theory. *Amer. Math. S. Transl.* **52** (1966), 217—275.
[6] RAUZY, G.: Fonctions entières et répartition modulo un II, *Bull. Soc. Math. France,* **101** (1973), 185—192.
[7] WALLIN, H.: On Bohr's spectrum of a function, *Arkiv fur Matem.* **4** (1961), 159—162.

E. R. A. du C. N. R. S. n° 362
Université de Bordeaux I
U. E. R. de Mathématiques et d'Informatique
351, cours de la Libération
33 405 TALENCE

Université de Reims
U. E. R. de Sciences Exactes et Naturelles
Moulin de la Housse
51 062 REIMS CEDEX-B. P. 347

(Received November 5, 1973.)

THÉORIE DES NOMBRES. — *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à* 1. Note (*) de MM. **Hédi Daboussi** et **Hubert Delange**, transmise par M. Henri Cartan.

f étant une fonction multiplicative de module $\leqq 1$, on étudie le comportement pour x tendant vers $+\infty$ d'expressions de la forme $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,S(n)$. D'autre part, on examine le cas où f est presque-périodique-B.

Dans tout ce qui suit, f est une fonction arithmétique multiplicative à valeurs réelles ou complexes, satisfaisant à

$$|f(n)| \leqq 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*.$$

On pose $e(t) = e^{2\pi i t}$. La lettre p désigne toujours un nombre premier.

1. 1° Nous nous proposons d'abord d'étudier le comportement asymptotique pour x tendant vers $+\infty$ de l'expression $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha n)$, où α est un nombre réel quelconque.

THÉORÈME 1. — *Pour tout α irrationnel, $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha n)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.*

Le cas où α est rationnel se traite aisément en utilisant les résultats d'une Note antérieure de l'un des auteurs ([1]). On obtient le

THÉORÈME 2. — *Pour que $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha n)$ tende vers zéro pour tout α rationnel, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\sum_p \frac{1}{p}(1-\mathrm{Re}(f(p)\chi(p)p^{-iu})) = +\infty \tag{1}$$

pour tout caractère de Dirichlet χ et tout nombre réel u.

Si cette condition n'est pas remplie, il existe un nombre réel a et une fonction réelle A *définie sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *et satisfaisant à*

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\sup_{x<x'\leqq x^2} |A(x')-A(x)|\Big) = 0, \tag{2}$$

tels que, lorsque $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha n)$ ne tend pas vers zéro, on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha n) = C_\alpha x^{ia}\exp(iA(x)) + o(1),$$

où C_α est une constante complexe non nulle.

2° Des résultats qui précèdent on déduit le théorème général suivant.

THÉORÈME 3. — *Si* S *est une fonction arithmétique presque-périodique-*B, *l'une des deux circonstances suivantes a lieu :*

(*a*) $(1/x)\sum_{n\leqq x} f(n)\,\mathrm{S}(n)$ *tend vers zéro quand* x *tend vers* $+\infty$;

(*b*) *On a quand* x *tend vers* $+\infty$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)\,\mathrm{S}(n) = \mathrm{C}\,x^{ia}\exp(i\,\mathrm{A}(x))+o(1),$$

où C *est une constante complexe non nulle,* a *une constante réelle, et* A *une fonction réelle définie sur* $[1, +\infty[$ *et satisfaisant à* (2).

a *et* A *ne dépendent que de la fonction* f.

(*a*) *a lieu quelle que soit* S *si et seulement si on a* (1) *pour tout caractère* χ *et tout nombre réel* u.

En utilisant seulement le théorème 1, on établit le résultat plus particulier suivant :

THÉORÈME 4. — *Si* S *est une fonction presque-périodique-*B *et si sa série de Fourier est de la forme* $\lambda+\sum \lambda_\nu\, e(\alpha_\nu n)$, *où tous les* α_ν *sont irrationnels, on a quand* x *tend vers* $+\infty$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)\,\mathrm{S}(n) = \lambda\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)+o(1)$$

et une formule semblable où les sommes sont restreintes aux n *appartenant à une progression arithmétique donnée.*

Exemple. — Si θ est un nombre irrationnel positif quelconque, en prenant pour $\mathrm{S}(n)$ le nombre des $m\in\mathbf{N}^*$ tels que $[m\,\theta] = n$, on voit que l'on a quand x tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f([\theta\, n]) = \frac{1}{\theta\, x}\sum_{n\leqq \theta x} f(n)+o(1)$$

et, quels que soient k entier > 1 et l entier quelconque,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqq x\\ [\theta n]\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}} f([\theta\, n]) = \frac{1}{\theta\, x}\sum_{\substack{n\leqq \theta x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}} f(n)+o(1).$$

3° *Remarque.* — Dans le cas où il existe des α rationnels pour lesquels

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqq x} f(n)\,e(\alpha\, n)$$

ne tend pas vers zéro, on peut montrer par une méthode indépendante des théorèmes 1 et 2 que la conclusion du théorème 3 subsiste si l'on remplace l'hypothèse que S est presque-périodique-B par celle que l'on a

$$\sum_{n\leqq x} |\mathrm{S}(n)|^2 = \mathrm{O}(x)$$

et que $\lim_{x\to+\infty} (1/x)\sum_{n\leqq x} \mathrm{S}(n)\,e(\alpha\, n)$ existe pour tout α rationnel.

Si, de plus, cette limite est égale à λ pour α entier et à 0 pour α non entier, on a encore les relations du théorème 4.

2. On peut chercher si la fonction f est presque-périodique-B.

THÉORÈME 5. — *Pour que f soit presque-périodique-*B *avec un spectre non vide* ([2]), *il faut et il suffit qu'il existe un caractère χ tel que la série*

$$\sum \frac{1-\chi(p)f(p)}{p} \tag{3}$$

soit convergente.

On peut supposer ce caractère propre. Il est alors unique.

Il résulte du théorème 1 que, lorsque la condition indiquée est satisfaite, la série de Fourier de f est de la forme $\sum \lambda_\nu e(r_\nu n)$ où tous les r_ν sont rationnels, de sorte que f est en fait limite-périodique-B. Mais on peut donner beaucoup plus de précisions sur cette série de Fourier.

Supposons la série (3) *convergente, χ étant un caractère propre pour le module k.*

Alors tous les r_ν sont des fractions de dénominateur multiple de k. En groupant ensemble les termes correspondant aux r_ν de même dénominateur, la série se met sous la forme

$$\sum_{q=1}^{+\infty} a_q C_{q,\chi}(n), \qquad \text{où} \quad C_{q,\chi}(n) = \sum_{\substack{1 \leq h \leq qk \\ (h,qk)=1}} \chi(h)\, e\left(\frac{h}{qk} n\right).$$

On peut donner une formule explicite pour a_q.

Si $\chi(2^r)f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \in \mathbf{N}^*$, on a $a_1 \neq 0$ et a_q/a_1 est une fonction multiplicative de q.

Dans le cas contraire (qui nécessite k impair), *on a $a_q = 0$ lorsque $q \not\equiv 2 \pmod 4$, mais $a_2 \neq 0$ et a_{2m}/a_2 est une fonction multiplicative de m.*

*Dans tous les cas, la série $\sum_{q=1}^{+\infty} (1/q^s)\, a_q\, C_{q,\chi}(n)$ est convergente pour $s > 0$ et sa somme tend vers $f(n)$ quand s tend vers zéro. Autrement dit, la série $\sum_{q=1}^{+\infty} a_q C_{q,\chi}(n)$ est sommable-*D $(\log n)$ *avec pour somme $f(n)$.*

Cette dernière série est absolument convergente si et seulement si on a

$$\sum \frac{|1-\chi(p)f(p)|}{p} < +\infty.$$

3. Les résultats de 1 permettent d'étudier la distribution des valeurs des fonctions additives sur certaines suites d'entiers.

Soit $\{u_n\}$ une suite croissante d'entiers > 0, tendant vers $+\infty$. A cette suite on associe la fonction arithmétique S définie par

$$S(m) = \text{nombre des } n \text{ tels que } u_n = m.$$

Soit F une fonction additive réelle.

THÉORÈME 6. — 1° *Supposons que* S *satisfasse aux hypothèses du théorème* 4.

a. La suite $\{ F(u_n) \}$ *possède une distribution limite si et seulement si la suite* $\{ F(n) \}$ *en possède une. Les deux suites ont alors la même distribution limite.*

b. La suite $\{ F(u_n) \}$ *possède une distribution limite modulo* 1 *si et seulement si la suite* $\{ F(u_n) \}$ *en possède une. Les deux suites ont alors la même distribution limite modulo* 1.

c. Si F *est à valeurs entières, pour tout* q *entier* > 1, *la suite* $\{ F(u_n) \}$ *possède une distribution limite modulo* q, *qui est la même que celle de la suite* $\{ F(n) \}$.

2° *Le résultat a du* 1° *subsiste si l'hypothèse sur* S *est remplacée par celle que l'on a* $\sum_{n \leq x} S(n)^2 = O(x)$ *et que la suite* $\{ u_n \}$ *possède une densité* > 0 *et est distribuée uniformément modulo* q *pour tout entier* $q > 1$.

4. *Remarque.* — La méthode par laquelle on démontre le théorème 1 permet aussi d'établir le résultat suivant :

Si g *est une fonction multiplicative satisfaisant à*

$$\sum_{n \leq x} |g(n)|^2 = O(x) \qquad \textit{et si} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} g(n)\, e(\alpha n)$$

existe pour tout α *réel, cette limite est nulle pour tout* α *irrationnel.*

Ceci implique qu'*une fonction multiplicative ne peut être presque-périodique-*B_2 *sans être limite-périodique-*B_2.

(*) Séance du 14 janvier 1974.

(1) H. DELANGE, *Comptes rendus*, 275, série A, 1972, p. 781.

(2) On voit immédiatement que f est presque-périodique-B avec un spectre vide si et seulement si on a

$$\sum \frac{1 - |f(p)|}{p} = +\infty.$$

H. Da. :
avenue de Normandie,
Tour Février,
91440 *Bures-sur-Yvette ;*
H. De. :
22, *allée des Troënes,*
91440 *Bures-sur-Yvette.*

ON A THEOREM OF P. D. T. A. ELLIOTT ON MULTIPLICATIVE FUNCTIONS

HÉDI DABOUSSI AND HUBERT DELANGE

1. In a recent paper [2], P. D. T. A. Elliott proved the following theorem.

Let f be a complex-valued multiplicative function.

(a) *Suppose that*

(1) f *has a non-zero mean-value* A

and

(2) $$\limsup_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)|^2<\infty.$$

Then the following conditions are satisfied.

(3) *The series*

$$\sum\frac{f(p)-1}{p}$$

is convergent and we have

$$\sum\frac{|f(p)-1|^2}{p}<\infty \quad \textit{and} \quad \sum_{\substack{p,\,r\\ r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|^2}{p^r}<\infty.\ \dagger$$

(4) *For each prime* p,

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\neq -1$$

(this series being absolutely convergent by the last part of (3), for

$$|f(p^r)|\leqslant\tfrac{1}{2}\left(1+|f(p^r)|^2\right)).$$

(b) *Conversely, if conditions* (3) *and* (4) *are satisfied, then so are* (1) *and* (2). *Moreover,*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}|f(n)|^2$$

exists (i.e. $|f|^2$ has a mean value).

Our purpose in the present paper is to give a simple proof of the first part of this theorem.

As to the converse part, we remark that condition (3) implies not only the existence of mean values for f and $|f|^2$ but indeed the limit-periodicity (B^2) of f.

Received 13 April, 1976.

† Throughout this paper the letter p denotes a prime number. m, n, r denote positive integers.

[J. LONDON MATH. SOC. (2), 14 (1976), 345–356]

This has been found independently by both authors and has been stated without proof by the second one [1]. The proofs will be given elsewhere.

Although our proof of part (a) is similar in some points to that of Elliott, we will give it in full for completeness.

2. We use the following lemmas.

LEMMA 1. *There exists an absolute constant C such that, if $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ is any sequence of complex numbers, we have for every $x \geqslant 2$*

$$\sum_{\substack{p,\, r \\ p^r \leqslant x}} \frac{1}{p^r} \left| \frac{p^r}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^r \| n}} a_n - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} a_n \right|^2 \leqslant C \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |a_n|^2. \tag{5}$$

This is merely Lemma 1 of Elliott's paper with a slight change in writing.

LEMMA 2.† *Let $u_1, u_2, \ldots, u_m, \ldots$ and $v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots$ be complex-valued functions whose domains contain a fixed set E.*

Suppose that for every positive integer m and every $t \in E$

$$|u_m(t)| \leqslant U_m \quad \text{and} \quad |u_m(t) - v_m(t)| \leqslant V_m,$$

where the numbers U_m and V_m are positive constants satisfying

$$\sum_{m=1}^{\infty} U_m^2 < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{m=1}^{\infty} V_m < \infty.$$

Then the infinite product

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+u_m(t))e^{-v_m(t)}$$

is uniformly convergent for $t \in E$.

The proof is very easy. There exists a positive U such that $U_m \leqslant U$ and $V_m \leqslant U$ for every m.

Since $((1+u)e^{-u}-1)/u^2$ and $(e^u-1)/u$ (taken equal to $-\frac{1}{2}$ and 1 respectively for $u = 0$) are entire functions of u, there exists a positive M such that

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leqslant M|u|^2 \quad \text{and} \quad |e^u-1| \leqslant M|u| \quad \text{for} \quad |u| \leqslant U.$$

Now set $(1+u_m(t))e^{-v_m(t)} = 1+w_m(t)$.

We have for every positive integer m and every $t \in E$

$$w_m(t) = \left((1+u_m(t))e^{-u_m(t)}-1\right)e^{u_m(t)-v_m(t)} + e^{u_m(t)-v_m(t)} - 1$$

and, since $|u_m(t)| \leqslant U_m \leqslant U$ and $|u_m(t)-v_m(t)| \leqslant V_m \leqslant U$,

$$|w_m(t)| \leqslant M|u_m(t)|^2 e^{|u_m(t)-v_m(t)|} + M|u_m(t)-v_m(t)| \leqslant W_m,$$

where $W_m = Me^U U_m^2 + MV_m$.

† This lemma has already been used in other papers by the second author.

We see that

$$\sum_{m=1}^{\infty} W_m < \infty,$$

and it follows that the infinite product

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+w_m(t)), \quad \text{i.e.} \prod_{m=1}^{\infty} (1+u_m(t))e^{-v_m(t)},$$

is uniformly convergent for $t \in E$.

3. Our proof runs as follows.

In Section 4 we make some simple remarks.

In Section 5 we prove, by the same method as Elliott, that we have

$$\sum \frac{|f(p)-1|^2}{p} < \infty \tag{6}$$

and, for some $y \geqslant 2$,

$$\sum_{\substack{p \geqslant y \\ r \geqslant 2}} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r} < \infty.$$

Then, in Section 6, we show that we have (4) and that the series

$$\sum \frac{f(p)-1}{p}$$

converges.

Finally we prove in Section 7 that, for every $y \geqslant 2$,

$$\sum_{\substack{p \leqslant y \\ r \geqslant 2}} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r} < \infty.$$

4. Hypothesis (2) implies that there exists a positive constant K such that

$$\sum_{n \leqslant x} |f(n)|^2 \leqslant Kx \text{ for every positive } x, \tag{7}$$

and that we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^\sigma} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > 1. \tag{8}$$

Since

$$\frac{|f(n)|}{n^\sigma} = \frac{1}{n^{\sigma/2}} \cdot \frac{|f(n)|}{n^{\sigma/2}},$$

Cauchy's inequality yields

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|}{n^\sigma} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > 1. \tag{9}$$

From (8) it follows that

$$\sum \frac{|f(p)|^2}{p^\sigma} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > 1. \tag{10}$$

Similarly (9) gives

$$\sum \frac{|f(p)|}{p^\sigma} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > 1,$$

and it follows that the series

$$\sum \frac{f(p)}{p^s} \quad \text{and} \quad \sum \frac{f(p)-1}{p^s}$$

are absolutely convergent for $\operatorname{Re} s > 1$.

Now let g be the multiplicative function determined by

$$g(p^r) = \begin{cases} 0 \text{ if } r = 1, \\ 1 \text{ if } r \geqslant 2, \end{cases}$$

and let $fg = h$.

Since, for $\sigma > 0$,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{g(p^r)}{p^{r\sigma}} = \frac{1}{p^\sigma(p^\sigma - 1)},$$

we see that

$$\sum_{p,\,r} \frac{g(p^r)}{p^{r\sigma}} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > \tfrac{1}{2},$$

which implies

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^\sigma} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > \tfrac{1}{2}. \tag{11}$$

Writing

$$\frac{h(n)}{n^\sigma} = \frac{f(n)}{n^{2\sigma/3}} \cdot \frac{g(n)}{n^{\sigma/3}}$$

and using Cauchy's inequality, (8), and (11) (with the remark that $g(n)^2 = g(n)$), we see that, for $\sigma > \frac{3}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|h(n)|}{n^\sigma} < \infty,$$

which implies

$$\sum_{p,\,r} \frac{|h(p^r)|}{p^{r\sigma}} < \infty.$$

This means that we have

$$\sum_{\substack{p,\,r \\ r \geqslant 2}} \frac{|f(p^r)|}{p^{r\sigma}} < \infty \quad \text{for} \quad \sigma > \tfrac{3}{4}. \tag{12}$$

5. By Lemma 1 and (7) we have, for every $x \geqslant 2$,

$$\sum_{p^r \leqslant x} \frac{1}{p^r} \left| \frac{p^r}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^r \| n}} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \right|^2 \leqslant CK. \tag{13}$$

5.1. Now we remark that, for each pair (p, r),

$$f(p^r) \sum_{m \leqslant x/p^r} f(m) - \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^r \| n}} f(n) = f(p^r) \sum_{mp^r \leqslant x} f(m) - \sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \nmid m}} f(mp^r)$$

$$= f(p^r) \sum_{mp^r \leqslant x} f(m) - f(p^r) \sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \nmid m}} f(m)$$

$$= f(p^r) \sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \mid m}} f(m).$$

Cauchys' inequality gives

$$\left| \sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \mid m}} f(m) \right|^2 \leqslant \left(\sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \mid m}} 1 \right) \left(\sum_{\substack{mp^r \leqslant x \\ p \mid m}} |f(m)|^2 \right) \leqslant \frac{x}{p^{r+1}} . K \frac{x}{p^r} \text{ by (7).}$$

Thus we have

$$\left| f(p^r) \sum_{m \leqslant x/p^r} f(m) - \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^r \| n}} f(n) \right|^2 \leqslant \frac{Kx^2}{p^{2r+1}} |f(p^r)|^2,$$

which yields

$$\left| f(p^r) \frac{p^r}{x} \sum_{m \leqslant x/p^r} f(m) - \frac{p^r}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^r \| n}} f(n) \right|^2 \leqslant K \frac{|f(p^r)|^2}{p}. \tag{14}$$

5.2. Since

$$f(p) \frac{p}{x} \sum_{m \leqslant x/p} f(m) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) = \left(\frac{p}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p \| n}} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \right)$$

$$+ \left(f(p) \frac{p}{x} \sum_{m \leqslant x/p} f(m) - \frac{p}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p \| n}} f(n) \right),$$

we have by (14), where $r = 1$,

$$\left| f(p) \frac{p}{x} \sum_{m \leqslant x/p} f(m) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \right|^2 \leqslant 2 \left| \frac{p}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p \| n}} f(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n) \right|^2 + 2K \frac{|f(p)|^2}{p}.$$

Thus, if z is any real number $\geqslant 2$, we have for $x \geqslant z$

$$\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}\left|f(p)\frac{p}{x}\sum_{m\leqslant x/p}f(m)-\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right|^2 \leqslant 2\sum_{p\leqslant z}\frac{1}{p}\left|\frac{p}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\| n}}f(n)-\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right|^2$$

$$+2K\sum_{p\leqslant z}\frac{|f(p)|^2}{p^2}$$

$$\leqslant K_1 = 2CK+2K\sum\frac{|f(p)|^2}{p^2}$$

by (13) and (10).

Letting x tend to infinity we obtain, by hypothesis (1),

$$|A|^2\sum_{p\leqslant z}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\leqslant K_1, \quad \text{or} \quad \sum_{p\leqslant z}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\leqslant\frac{K_1}{|A|^2}.$$

Since z may be arbitrarily large, this shows that

$$\sum\frac{|f(p)-1|^2}{p}\leqslant\frac{K_1}{|A|^2}<\infty.$$

5.3. Now let y be any fixed real number greater than $3K/|A|^2$. For each pair (p, r) we have

$$f(p^r)\frac{p^r}{x}\sum_{m\leqslant x/p^r}f(m)=\left(\frac{p^r}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^r\| n}}f(n)-\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right)+\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)$$

$$+\left(f(p^r)\frac{p^r}{x}\sum_{m\leqslant x/p^r}f(m)-\frac{p^r}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^r\| n}}f(n)\right)$$

and, taking account of (14), this gives

$$\left|f(p^r)\frac{p^r}{x}\sum_{m\leqslant x/p^r}f(m)\right|^2\leqslant 3\left|\frac{p^r}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p^r\| n}}f(n)-\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right|^2+3\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right|^2+3K\frac{|f(p^r)|^2}{p}.$$

We multiply this by $1/p^r$ and add up the inequalities obtained for all pairs (p, r) satisfying $p\geqslant y$, $p^r\leqslant z$, $r\geqslant 2$, where z is any real number $\geqslant y^2$. Taking account of (13) and of the fact that $1/p^{r+1}\leqslant(1/y).(1/p^r)$ we obtain for $x\geqslant z$

$$\sum_{\substack{p\geqslant y\\ p^r\leqslant z\\ r\geqslant 2}}\frac{1}{p^r}\left|f(p^r)\frac{p^r}{x}\sum_{m\leqslant x/p^r}f(m)\right|^2\leqslant 3CK+K_2\left|\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}f(n)\right|^2+\frac{3K}{y}\sum_{\substack{p\geqslant y\\ p^r\leqslant z\\ r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|^2}{p^r},$$

where

$$K_2=3\sum_{\substack{p\geqslant y\\ r\geqslant 2}}\frac{1}{p^r}.$$

Letting x tend to infinity, this yields, by hypothesis (1),

$$\left(|A|^2-\frac{3K}{y}\right)\sum_{\substack{p\geqslant y\\ p^r\leqslant z\\ r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|^2}{p^r}\leqslant 3CK+K_2|A|^2,$$

whence

$$\sum_{\substack{p\geqslant y\\ p^r\leqslant z\\ r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|^2}{p^r}\leqslant (3CK+K_2|A|^2)\left(|A|^2-\frac{3K}{y}\right)^{-1}=K_3.$$

Since z may be arbitrarily large, this shows that

$$\sum_{\substack{p\geqslant y\\ r\geqslant 2}}\frac{|f(p^r)|^2}{p^r}\leqslant K_3<\infty.$$

6. It follows from (9) that for $\operatorname{Re} s>1$ each series

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}$$

is absolutely convergent and we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}=\prod\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right), \tag{15}$$

where the infinite product is absolutely convergent.

6.1. (12) implies that each series

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}$$

is actually absolutely convergent for $\operatorname{Re} s>\frac{3}{4}$. Moreover we remark that, if σ_0 is any number $>\frac{3}{4}$, the infinite product

$$\prod\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right)\exp\left(-\frac{f(p)}{p^s}\right). \tag{P}$$

is uniformly convergent for $\operatorname{Re} s\geqslant\sigma_0$.

This follows from Lemma 2. In fact the product may be written as

$$\prod(1+u_p(s))e^{-v_p(s)},$$

where

$$u_p(s)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{rs}}\quad\text{and}\quad v_p(s)=\frac{f(p)}{p^s}.$$

We have, for every p and every s such that $\operatorname{Re} s \geqslant \sigma_0$,

$$|u_p(s)-v_p(s)| \leqslant V_p = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r\sigma_0}}$$

and $|u_p(s)| \leqslant U_p = V_p + |f(p)|/p^{\sigma_0}$.

We have $\sum V_p < \infty$ by (12). It follows that $\sum V_p^2 < \infty$ and this together with (10) implies $\sum U_p^2 < \infty$, for

$$U_p^2 \leqslant 2V_p^2 + 2(|f(p)|^2/p^{2\sigma_0}).$$

Thus we see that the infinite product (P) is convergent for $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$ and that, if we denote its value by $H(s)$, the function H is analytic for $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$.

(15) shows that we have, for $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = H(s) \exp\left(\sum \frac{f(p)}{p^s}\right)$$

and therefore

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \mathscr{H}(s) \exp\left(\sum \frac{f(p)-1}{p^s}\right), \tag{16}$$

where

$$\mathscr{H}(s) = H(s) \exp\left(-\sum_{\substack{p,\, r \\ r \geqslant 2}} \frac{1}{rp^{rs}}\right).$$

The function $\mathscr{H}$ is clearly analytic for $\operatorname{Re} s > \frac{3}{4}$.

6.2 By a well-known elementary result, we have for $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{F(t)}{t^{s+1}} dt, \text{ where } F(t) = \sum_{n \leqslant t} f(n).$$

From this and hypothesis (1) it follows by a straightforward argument that, as s tends to 1 through real values > 1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sim \frac{A}{s-1},$$

so that

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tends to A.

This together with (16) shows that, as s tends to zero through positive values,

$$\mathscr{H}(1+s) \exp\left(\sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}}\right)$$

tends to A.

We see that, since $A \neq 0$, we must have $\mathscr{H}(1) \neq 0$, which is equivalent to (4) by the definition of $\mathscr{H}$.

In fact, by Cauchy's inequality we have, for s real and positive,

$$\left|\sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}}\right| \leqslant \left(\sum \frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum \frac{1}{p^{1+2s}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

and therefore, as s tends to zero,

$$\exp\left(\sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}}\right) = O((1/s)^{\varepsilon})$$

for every positive ε, for

$$\sum \frac{1}{p^{1+2s}} = O(\log 1/s).$$

But $\mathscr{H}(1) = 0$ would imply $\mathscr{H}(1+s) = O(s)$.

Finally, we see that, as s tends to zero through positive values,

$$\exp\left(\sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}}\right)$$

tends to

$$\frac{A}{\mathscr{H}(1)},$$

which is non-zero, and therefore $\sum (f(p)-1)/p^{1+s}$ tends to a finite limit.

It is easy to derive from this that the series $\sum (f(p)-1)/p$ is convergent.

Let

$$\alpha(u) = \sum_{p \leqslant e^u} \frac{f(p)-1}{p}.$$

We have to prove that $\alpha(u)$ tends to a finite limit as u tends to infinity, or equivalently that $\alpha(1/s)$ tends to a finite limit as s tends to zero through positive values. We will actually show that

$$\alpha(1/s) - \sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}}$$

tends to zero.

We have, for s real and positive,

$$\sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}} = s \int_0^\infty e^{-su} \alpha(u) du = \int_0^\infty e^{-t} \alpha(t/s) dt$$

and therefore

$$\alpha(1/s) - \sum \frac{f(p)-1}{p^{1+s}} = \int_0^\infty e^{-t} (\alpha(1/s) - \alpha(t/s)) dt.$$

This tends to zero as s tends to zero because the integrand tends to zero for each positive t and its modulus does not exceed a fixed function of t which is integrable over $(0, \infty)$.

In fact, if $0 < y < z$, Cauchy's inequality gives

$$(17) \qquad |\alpha(z)-\alpha(y)| = \left|\sum_{e^y<p\leqslant e^z} \frac{f(p)-1}{p}\right| \leqslant \left(\sum_{e^y<p\leqslant e^z} \frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{e^y<p\leqslant e^z} \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

From the well-known fact that

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + b + o(1) \text{ as } x \text{ tends to infinity,}$$

it follows easily that there exists a constant C_1 such that

$$(18) \qquad \sum_{e^y<p\leqslant e^z} \frac{1}{p} \leqslant \log\frac{z}{y} + C_1 \quad \text{for} \quad 0 < y < z,$$

and also that

$$(19) \qquad \text{for every } \lambda > 1, \sum_{e^y<p\leqslant e^{\lambda y}} 1/p \quad \text{tends to } \log\lambda \text{ as } y \text{ tends to infinity.}$$

(17) and (18) show that we have, for every positive s and every positive t,

$$|\alpha(1/s)-\alpha(t/s)| \leqslant K_4(|\log t| + C_1)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{where} \quad K_4 = \left(\sum \frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(17) and (19) show that, for each positive t, $\alpha(1/s)-\alpha(t/s)$ tends to zero as s tends to zero.†

7. Now to complete our proof it suffices to show that for every $y \geqslant 2$

$$\sum_{\substack{p,r \\ p\leqslant y}} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r} < \infty.$$

It is obviously sufficient to show that this holds when y is large.

7.1. We first see that the series $\sum(|f(p)|^2-1)/p$ is convergent.
This follows from (6) and the convergence of the series $\sum(f(p)-1)/p$, for we have

$$\frac{|f(p)|^2-1}{p} = \frac{|f(p)-1|^2}{p} + 2\frac{\mathrm{Re}\, f(p)-1}{p}.$$

Moreover, $|f(p)|^2/p$ tends to zero as p tends to infinity and we have

$$(20) \qquad \sum \frac{|f(p)|^4}{p^2} < \infty$$

† Elliott also derives the convergence of the series $\sum(f(p)-1)/p$ from (6) and the fact that $\sum(f(p)-1)/p^{1+s}$ tends to a finite limit as s tends to zero through positive values. But he uses a (well-known) deep tauberian theorem which is not needed. (The same remark applies to the original proof of Delange's theorem).

for

$$\frac{|f(p)|^2}{p} \leqslant 2\left(\frac{|f(p)-1|^2}{p}+\frac{1}{p}\right)$$

and therefore

$$\frac{|f(p)|^4}{p^2} \leqslant 8\left(\left(\frac{|f(p)-1|^2}{p}\right)^2+\frac{1}{p^2}\right).$$

7.2. It follows from (8) that we have for s real and > 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|^2}{n^s} = \prod\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^2}{p^{rs}}\right),$$

where the infinite product is absolutely convergent.

This yields

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|^2}{n^s} = \prod\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^2}{p^{rs}}\right).$$

If y is any real number $\geqslant 2$, we may write

$$\frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f(n)|^2}{n^s} \geqslant \left(\prod_{p\leqslant y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^2}{p^{rs}}\right)\right)$$

$$\times\left(\prod_{p>y}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{|f(p)|^2}{p^s}\right)\right). \tag{21}$$

We will use the elementary fact that

$$\log(1+u) \geqslant u-u^2 \quad \text{for} \quad 0 \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

From now on we suppose that y is so large that

$$|f(p)|^2/p \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{for} \quad p > y.$$

Then we have for $p > y$ and s real and > 1

$$|f(p)|^2/p^s \leqslant |f(p)|^2/p \leqslant \tfrac{1}{2},$$

so that

$$1+\frac{|f(p)|^2}{p^s} \geqslant \exp\left(\frac{|f(p)|^2}{p^s}-\frac{|f(p)|^4}{p^{2s}}\right) \geqslant \exp\left(\frac{|f(p)|^2}{p^s}-\frac{|f(p)|^4}{p^2}\right).$$

Since we also have

$$1-\frac{1}{p^s} \geqslant \exp\left(-\frac{1}{p^s}-\frac{1}{p^2}\right),$$

this gives

$$\left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{|f(p)|^2}{p^s}\right) \geqslant \exp\left(\frac{|f(p)|^2-1}{p^s}-\frac{|f(p)|^4}{p^2}-\frac{1}{p^2}\right). \tag{22}$$

It follows from (21), (22) and (20) that we have for every real $s > 1$

$$(23) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^s} \geqslant K_5 \left(\prod_{p \leqslant y} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^2}{p^{rs}} \right) \right) \exp\left(\sum_{p>y} \frac{|f(p)|^2 - 1}{p^s} \right),$$

where K_5 is a positive constant (which depends upon y).

Since

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(n)|^2}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{\Phi(x)}{x^{s+1}} dx,$$

where

$$\Phi(x) = \sum_{n \leqslant x} |f(n)|^2,$$

it follows from (7) that the left-hand side of (23) is not greater than $Ks/((s-1)\zeta(s))$.

This tends to K as s tends to 1. On the other hand,

$$\sum_{p>y} \frac{|f(p)|^2 - 1}{p^s} \quad \text{tends to} \quad \sum_{p>y} \frac{|f(p)|^2 - 1}{p}.$$

It follows that

$$\limsup_{s \to 1} \prod_{p \leqslant y} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^2}{p^{rs}} \right) \leqslant \frac{K}{K_5} \exp\left(- \sum_{p>y} \frac{|f(p)|^2 - 1}{p} \right) < \infty,$$

which obviously implies

$$\sum_{\substack{p, r \\ p \leqslant y}} \frac{|f(p^r)|^2}{p^r} < \infty.$$

References

1. H. Delange, "Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives", *C.R. Acad. Sci. Paris S A*, 281 (1975) 997–1000.
2. P. D. T. A. Elliott, "A mean-value theorem for multiplicative functions", *Proc. London Ma Soc.* (3), 31 (1975), 418–438.

Université de Paris-Sud,
91405 Orsay, France.

CARACTERISATION DES FONCTIONS MULTIPLICATIVES

pp B^λ A SPECTRE NON VIDE

par Hedi DABOUSSI

INTRODUCTION.

I.1. Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(m.n) = f(m)\, f(n)$ toutes les fois que $(m,n) = 1$.

I.2. Soit $\lambda \geq 1$. Une fonction arithmétique f est dite presque périodique B^λ ($pp\, B^\lambda$) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon(n) = \sum a_j e^{2\pi i \alpha_j n}$ avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n) - P_\varepsilon(n)|^\lambda \leq \varepsilon .$$

Si, de plus, les polynômes P_ε peuvent être pris périodiques, alors f est dite limite périodique B^λ ($\ell p B^\lambda$).

I.3. Soit f une fonction arithmétique. On définit $\sigma(f)$ = spectre de Fourier Bohr de f ainsi :

$$\sigma(f) = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \text{ tel que } \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{-2\pi i n \alpha} \right| > 0 \right\}.$$

I.4. L'objet de cet article est d'établir le résultat suivant :

THEOREME PRINCIPAL.

Pour qu'une fonction multiplicative f soit $pp B^\lambda$ $(\lambda \geq 1)$ avec un spectre de Fourier-Bohr non vide, il faut et il suffit qu'il existe un caractère de Dirichlet χ tel que la série $\sum_p \frac{\chi(p) f(p)-1}{p}$ converge et

$$\sum_p \sum_{r\geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < +\infty \,, \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p)|\leq 2}} \frac{|\chi(p)f(p)-1|^2}{p} < \infty \,, \quad \sum_{\substack{p \\ |f(p)|>2}} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty \,.$$

En fait, si ces conditions sont vérifiées f est $\ell p\ B^\lambda$.

I.5. Des conditions suffisantes pour qu'une fonction multiplicative soit $pp B^\lambda$ ont été obtenues par de nombreux auteurs : Erdös, Hartman, Kac, Novosselov, Schwarz, Spilker, Van Kampen et Wintner [8, 9, 10, 12, 13, 14, 15].

Delange et l'auteur [2] ont montré que, si f est multiplicative, et $f(n) \leq 1$ pour tout n, alors f est pp B avec un spectre non vide si, et seulement si, la série $\Sigma \frac{\chi(p)f(p)-1}{p}$ converge pour un caractère de Dirichlet χ; f est pp B avec un spectre vide si, et seulement si, $\Sigma \frac{1-|f(p)|}{p} = +\infty$.

Delange a prouvé, indépendamment de l'auteur, que les conditions du théorème étaient suffisantes. Il a, de plus, étudié les séries de Fourier Bohr de telles fonctions [3].

Le théorème principal a été énoncé dans [3, remarque finale] et au meeting d'Oberwolfach de novembre 75.

I.6. Le plan de cet article est le suivant :

Dans le paragraphe III, on énonce quelques propriétés des fonctions $pp B^\lambda$.

Dans les paragraphes IV, V on caractérise les fonctions multiplicatives ≥ 0

$pp\,B^2$ avec $\sigma(f) \neq \emptyset$.

Dans le paragraphe VI on caractérise les fonctions multiplicatives ≥ 0 $pp\,B^\lambda$ $(\lambda \geq 1)$ avec $\sigma(f) \neq \emptyset$.

Enfin dans le paragraphe VII on établit le théorème principal.

II.1. NOTATIONS.

La lettre p désigne un nombre premier.

$d \mid n$ signifie "d divise n".

$d \nmid n$ signifie "d ne divise pas n".

Pour $j \geq 1$, $p^j \| n$ signifie "$p^j \mid n$ et $p^{j+1} \nmid n$".

$f * g$ est la fonction arithmétique définie par $(f * g)(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\, g(n/d)$.

$M(f)$ est la limite, si elle existe, de $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

$\overline{M}(f)$ est la limite supérieure de $\frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x} f(n) \right|$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

II.2. DEFINITION.

Soit $\delta(t-a)$ la mesure de Dirac au point a.

Etant donné une fonction arithmétique f, on pose, pour chaque $N \in \mathbf{N}^*$,

$$\mu_N(f,t) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} \delta(t - f(n)).$$

On dit que f a une distribution limite si $\mu_N(f,t)$ converge étroitement vers une mesure $\mu(f,t)$. Cette distribution limite est concentrée à l'origine si $\mu(f,t) = \delta(t)$.

III. QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS $pp\,B^\lambda$ $(\lambda \geq 1)$.

Soit f $pp\,B^\lambda$ (resp. $\ell p\ B^\lambda$).

1. $M(f,\alpha)$ existe pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$.

2. Pour tous entiers ℓ et k, $\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv \ell(k)}} f(n)$ tend vers une limite.

3. $|f|$ est ppB^{λ} (resp. ℓpB^{λ}).

4. Si $\lambda \ge 2$, $M(|f|^2) = \sum_{\alpha \in \sigma(f)} |M(f,\alpha)|^2$.

5. Si $\lambda \ge 2$, $\sigma(f) = \emptyset \iff M(|f|^2) = 0$.

6. Si $M(|f|) = 0$, alors $\sigma(f) = \emptyset$.

7. $|f|$ a une distribution limite.

8. Si g est ppB (resp. ℓpB) et bornée, alors fg est ppB^{λ} (resp. ℓpB^{λ}).

9. Si g est ppB^{α} (resp. ℓpB^{α}) et si $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} \le 1$ alors fg est ppB (resp. ℓpB).

Nous utiliserons également l'équivalence suivante :

10. Supposons $f \ge 0$ alors

$$f \ ppB^{\lambda} \ (\text{resp. } \ell pB^{\lambda}) \iff f^{\lambda/2} \ ppB^{2} \ (\text{resp. } \ell pB^{2}).$$

Certaines de ces propriétés sont bien connues (voir Bésicovitch [1]), nous établirons en appendice III.7 et III.10.

IV. THEOREME 1.

Une fonction multiplicative positive est ppB^2 avec un spectre de Fourier Bohr non vide si, et seulement si, les séries suivantes convergent :

$$\sum_p \Big(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^r)^2}{p^r} \Big), \quad \sum_p \frac{(f(p)-1)^2}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f(p)-1}{p}.$$

Dans ce cas f est ℓpB^2.

Remarque : P.D.T.A. Elliott [5] a récemment caractérisé les fonctions multiplicatives bornées en moyenne quadratique qui possèdent une valeur moyenne non nulle. La condition nécessaire de notre théorème

peut se déduire de sa caractérisation. Notre résultat ayant été obtenu avant la publication de l'article d'Elliott et notre démonstration étant plus simple nous avons préféré en donner tous les détails.

LEMME 1. Soit f une fonction multiplicative et supposons qu'il existe c_1 tel que $\sum_{n\le x} |f(n)|^2 \le c_1 x$. Alors $\sum_p \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty$.

Preuve: L'hypothèse entraîne que, pour tout $s > 1$,

$$\sum \frac{|f(n)|^2}{n^s} \le c_1 \frac{s}{s-1} \quad \text{et donc} \quad \sum \frac{|f(n)|^2}{n^s} < \infty .$$

Soit $h(n)$ la fonction multiplicative définie par $h(p) = 0$ et $h(p^r) = 1$ $\forall$ p et $\forall$ $r \ge 2$. On voit que, pour tout $\alpha > 1/2$, $\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(h(p^r))^2}{p^{r\alpha}} = \sum_p \frac{1}{p^{2\alpha}-p^{\alpha}} < +\infty$ et donc $\sum \frac{(h(n))^2}{n^{\alpha}} < +\infty$.

L'inégalité de Cauchy entraîne que

$$\Big(\sum_{n\le x} \frac{|f(n)h(n)|}{n}\Big)^2 \le \Big(\sum_{n\le x} \frac{|f(n)|^2}{n^s}\Big)\Big(\sum_{n\le x} \frac{|h(n)|^2}{n^{2-s}}\Big).$$

Prenant $s \in]1, 3/2[$ on en déduit que $\sum \frac{|f(n)h(n)|}{n} < \infty$, et en particulier

$$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)h(p^r)|}{p^r} < \infty , \text{ c'est-à-dire } \sum_p \sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty .$$

LEMME 2. Soit f une fonction multiplicative ≥ 0 ppB^2 ; alors il existe une constante c_2 telle que, pour chaque p,

$$|M_p(f) - M(f)| \ge c_2 M(f) \quad \text{où} \quad M_p(f) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\le x \\ p\mid n}} f(n)$$

($M_p(f)$ existe d'après III.2).

Preuve : On a

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n\le x \\ p\mid n}} f(n) = \sum_{\substack{p^j \le x \\ j\le 1}} \frac{1}{x} \sum_{p^j \| n} f(n)$$

$$= \sum_{\substack{p^j \le x \\ j\ge 1}} \frac{f(p^j)}{p^j} \Big(\frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n\le x/p^j \\ p\nmid n}} f(n) \Big) \quad \text{puisque } f \text{ est multiplicative,}$$

et par suite

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ p\mid n}} f(n) = \sum_{\substack{p^j\le x\\ j\ge 1}} \frac{f(p^j)}{p^j}\left(\frac{p^j}{x}\sum_{n\le x/p^j} f(n) - \frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\le x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\right).$$

Ou encore, puisque, si $p^j > x$, $\sum_{n\le x/p^j} f(n) = 0$,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ p\mid n}} f(n) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\left(\frac{p^j}{x}\sum_{n\le x/p^j} f(n) - \frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\le x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\right).$$

Ceci peut s'écrire

4.1. $$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\left(\frac{p^j}{x}\sum_{\substack{n\le x/p^j\\ p\mid n}} f(n)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\left(\frac{p^j}{x}\sum_{n\le x/p^j} f(n)\right)$$

f étant $pp\,B^2$, il existe c_3 telle que

4.2. $$\sum_{n\le x} [f(n)]^2 \le c_3 x \quad \text{pour tout } x \ge 1, \text{ et donc}$$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x} f(n) \le \sqrt{c_3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ p\mid n}} f(n) \le \sqrt{c_3}\ .$$

Il résulte de (4.2) et du lemme 1 que $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} < \infty$.

Nous pouvons alors appliquer le théorème de convergence dominée à (4.1) et obtenir

$$M_p(f)\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} = M(f)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\ , \text{ ou encore}$$

4.3. $$(M(f) - M_p(f))\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j}\right) = M(f).$$

Il suffit alors de remarquer que, d'après (4.2), $[f(n)]^2 \le c_3 n$ et donc

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} \le 1 + c_3\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p^{j/2}}{p^j} = 1 + \frac{c_3}{\sqrt{p}-1} \le 1 + \frac{c_3}{\sqrt{2}-1}\ ,$$ pour déduire de (4.3) le lemme

avec $c_2 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{c_3+\sqrt{2}-1}$.

LEMME 3. Il existe une constante c_4 telle que, quelle que soit la fonction arithmétique g, on ait pour tout $x \ge 2$ et tout $y \le x$:

4.4. $$\sum_{\substack{p^j \le y \\ j \ge 1}} \frac{1}{p^j} \Big| \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ p^j \| n}} g(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \le x} g(n) + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ p \nmid n}} g(n) \Big|^2 \le c_4 \frac{1}{x} \sum_{n \le x} g(n)^2 .$$

P.D.T.A. Elliott a montré [4] que l'inégalité classique de Turan Kubilius [11] est équivalente à l'inégalité suivante :

Il existe une constante c_5 telle que pour toute fonction arithmétique g on a :

4.5. $$\sum_{p^j \le x} \frac{1}{p^j} \Big| \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ p^j \| n}} g(n) - \frac{1}{x} \sum_{n \le x} g(n) \Big|^2 \le \frac{c_5}{x} \sum_{n \le x} |g(n)|^2 .$$

Or $$\sum_{\substack{p^j \le x \\ j \ge 1}} \frac{1}{p^j} \Big| \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ p \mid n}} g(n) \Big|^2 \le \frac{1}{x} \Big(\sum_{n \le x} |g(n)|^2 \Big) \sum_p \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{p^j} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \le x \\ p \mid n}} 1 \Big) \Big)$$

$$\le \frac{1}{x} \Big(\sum_{n \le x} |g(n)|^2 \Big) \sum_p \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p^{j+1}} \Big) = \frac{1}{x} \Big(\sum_{n \le x} |g(n)|^2 \Big) \sum_p \frac{1}{p^2 - p} .$$

Utilisant l'inégalité $|a+b|^2 \le 2|a|^2 + 2|b|^2$, on voit que (4.5) entraîne (4.4), avec

$c_4 = 2(c_5 + \sum_p \frac{1}{p^2 - p})$.

LEMME 4. Pour qu'une fonction multiplicative soit $pp B^2$ avec $\sigma(f) \neq \emptyset$, il faut que $\sum_p \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|f(p^j)| - 1)^2}{p^j} < \infty$.

Preuve : On a ,

$$\frac{p^j}{x} \sum_{\substack{m \le x \\ p^j \| m}} |f(m)| = |f(p^j)| \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n \le x/p^j \\ p \nmid n}} |f(n)| = |f(p^j)| \Big(\frac{p^j}{x} \sum_{n \le x/p^j} |f(n)| - \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{n \le x/p^j \\ p \mid n}} |f(n)| \Big),$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p^j}{x} \sum_{\substack{m \le x \\ p^j \| m}} |f(m)| = |f(p^j)| \, (M(|f|) - M_p(|f|)).$$

Ainsi, en prenant $g = |f|$ dans le lemme 3, et la limite quand $x \to +\infty$ avec y fixé dans (4.4), on aboutit à :

4.6. $$\sum_{\substack{p^j \le y \\ j \ge 1}} \frac{1}{p^j} \left[(|f(p^j)| - 1)(M(|f|) - M_p(|f|)) \right]^2 \le c_4 \overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{1}{x} \sum_{n \le x} |f(n)|^2 \le c_4 c_3$$

d'après (4.2) . Du lemme 2 on déduit alors

$$c_2^2 (M(|f|))^2 \sum_{\substack{p^j \le y \\ j \ge 1}} \frac{(|f(p^j)| - 1)^2}{p^j} \le c_4 c_3 .$$

Il en résulte, prenant la limite quand $y \longrightarrow +\infty$, que

$$M(|f|)^2 \sum_{p} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(|f(p^j)| - 1)^2}{p^j} < +\infty .$$

Ainsi, puisque par hypothèse $\sigma(f) \neq \emptyset$, ce qui implique d'après III.6 que $M(|f|) > 0$, on obtient le lemme.

LEMME 5. Soit f une fonction arithmétique ≥ 0 pp B^2 et ayant un spectre $\sigma(f)$ non vide. Alors f a une distribution limite non concentrée à l'origine.

Preuve: On sait que f a une distribution limite d'après III.7. Il reste à établir que si cette distribution était concentrée à l'origine, on aurait $M(f) = 0$ ce qui, d'après III.6, entrainerait que $\sigma(f) = \emptyset$.

Soit $F_N(u) = \frac{1}{N} \text{card}\{n \le N \text{ tel que } f(n) \le u\}$. Si la distribution était concentrée à l'origine, alors, en tout point $u > 0$, $F_N(u)$ tendrait vers 1 quand N tend vers l'infini. Il en résulterait que, pour tout $a > 0$, $\lim_{N \to \infty} \int_0^a t \, dF_N(t) = 0$, puisque $\int_0^a t \, dF_N(t) = a F_N(a) - \int_0^a F_N(t) dt$.

Ceci est équivalent à $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \le N \\ f(n) \le a}} f(n) = 0$. Or $\frac{1}{N} \sum_{n \le N} f(n) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \le N \\ f(n) \le a}} f(n) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \le N \\ f(n) > a}} f(n)$.

On aurait ainsi $M(f) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n \le N \\ f(n) > a}} f(n)$.

Remarquant alors que,

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\le N\\ f(n)>a}} f(n) \le \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{N}\sum_{\substack{n\le N\\ f(n)>a}} f(n)^2 \le \frac{1}{a}\,\frac{1}{N}\sum_{n\le N} f(n)^2 ,$$

et que $\overline{\lim}_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n\le N} f(n)^2 = c < +\infty$, on obtiendrait $M(f) \le \frac{c}{a}$ pour tout $a > 0$, et donc $M(f) = 0$.

Erdös [6] a établi le résultat suivant :

LEMME 6. Une fonction f multiplicative ≥ 0 a une distribution limite non concentrée à l'origine si,et seulement si les séries suivantes convergent

$$\sum \frac{v_f(p)}{p} , \quad \sum \frac{v_f(p)^2}{p} ,$$

où $$v_f(p) = \begin{cases} f(p)-1 & \text{si } |f(p)-1| \le 1 \\ 1 & \text{si } |f(p)-1| > 1. \end{cases}$$

Preuve du théorème 1 (condition nécessaire).

Soit $f \ge 0$ multiplicative, $pp\,B^2$ avec un spectre non vide.

Il découle du lemme 4 que la série $\sum_p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f(p^j)-1)^2}{p^j}\right) < \infty$.

On voit que cela implique la convergence des deux séries $\sum_p \frac{(f(p)-1)^2}{p}$ et $\sum_p \sum_{j=2}^{\infty} \frac{f(p^j)^2}{p^j}$.

Les lemmes 5 et 6 entraînent la convergence de la série $\sum_{|f(p)-1|\le 1} \frac{f(p)-1}{p}$, puisque $\sum_{|f(p)-1|>1} \frac{1}{p} \le \sum \frac{v_f(p)^2}{p} < \infty$.

La convergence de $\sum_p \frac{(f(p)-1)^2}{p}$ entraîne alors que $\sum_{|f(p)-1|>1} \frac{|f(p)-1|}{p} < \infty$.

Il en résulte la convergence de la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$.

V . PREUVE DU THEOREME 1. (Condition suffisante).

LEMME 7 (Wintner [15]). Soit ℓ une fonction multiplicative telle que :

$\sum_p \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{|\ell(p^r)-1|}{p^r} \right) < \infty$. Alors ℓ est limite périodique B et $M(\ell) = \prod_p (1-\frac{1}{p})(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\ell(p^j)}{p^j})$.

Considérons une fonction f vérifiant les conditions du théorème.

Pour $y \geq 2$, soit f_y la fonction multiplicative définie ainsi :

$$f_y(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{si } p \leq y \\ 1 & \text{si } p > y \end{cases} .$$

Montrons que f_y est $\ell p B^2$. On a :

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f_y^2(p^r)-1|}{p^r} \right) = \sum_{p \leq y} \frac{|f^2(p)-1|}{p} + \sum_{p \leq y} \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f^2(p^r)-1|}{p^r} \right)$$

$$\leq \sum_{p \leq y} \frac{|f^2(p)-1|}{p} + \sum_{p \leq y} \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f^2(p^r)}{p^r} \right) + \sum_{p \leq y} \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{p^r} \right) < +\infty .$$

Ainsi f_y^2 vérifie les hypothèses du lemme 7 et donc f_y^2 est $\ell p B$

$M(f_y^2) = \prod_{p \leq y} (1-\frac{1}{p})(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j})$. Il résulte de III.10 que f_y est $\ell p B^2$.

Nous allons montrer, par la suite, que $\bar{M}[(f-f_y)^2]$ tend vers zéro, quand $y \longrightarrow +\infty$. Ceci entraînera que f est $\ell p B^2$.

LEMME 8. [Erdös Renyi [7]]. Soit S une fonction multiplicative positive telle que les séries $\sum_p \frac{S(p)-1}{p}$ et $\sum_p [\frac{S^2(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{S(p^r)}{p^r}]$ convergent et que

$\varliminf_{N \to +\infty} \sum_{N < p \leq N(1+\epsilon)} \frac{S(p)\log p}{p} > 0$ pour tout $\epsilon > 0$.

Alors M(S) existe et $M(S) = \prod_p (1-\frac{1}{p})(\sum_{r=0} \frac{S(p^r)}{p^r})$.

LEMME 9. Soit f vérifiant les conditions du théorème 1. Alors $M((f-f_y)^2)$ existe et tend vers zéro quand y tend vers l'infini, ce qui entraîne que f est $\ell p B^2$.

Soient, pour $y \geq 2$, G, G_y, H et K_y les fonctions multiplicatives définies ainsi :

$$G(p) = \begin{cases} 3/4 & \text{si } f(p) < 3/4, \\ f(p) & \text{si } f(p) \in [3/4, 5/4], \\ 5/4 & \text{si } f(p) > 5/4, \end{cases}$$

$$G(p^r) = G(p)^r \quad \text{pour tout } r \geq 2,$$

$$G_y(p^r) = \begin{cases} G(p^r) & \text{si } p \leq y, \\ \cdot & \text{pour tout } r \geq 1, \\ 1 & \text{si } p > y, \end{cases}$$

$$H(p^r) = f^2(p^r) - f^2(p^{r-1})\, G^2(p) \quad \text{pour tout } r \geq 1,$$

$$K_y(p^r) = f(p^r)\, f_y(p^r) - f(p^{r-1})\, f_y(p^{r-1})\, G(p) G_y(p) \quad \text{pour tout } r \geq 1.$$

On voit facilement que

$$f^2 = H * G^2 \qquad ff_y = K_y * GG_y .$$

Nous allons montrer que :

(i) G^2 et GG_y vérifient les hypothèses du lemme 8, et donc $M(G^2)$ existe, $M(G^2) = \prod_p (1 - \frac{1}{p})(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{G^2(p^r)}{p^r})$, $M(GG_y)$ existe et $M(GG_y) = \prod_p (1 - \frac{1}{p})(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{G(p^r)G_y(p^r)}{p^r})$;

(ii) $\sum \frac{|H(n)|}{n} < \infty$, $\sum \frac{|K_y(n)|}{n} < +\infty$.

Il en résultera l'existence de $M(f^2)$ et $M(ff_y)$, et donc de $M((f-f_y)^2)$ (puisque, f_y^2 étant ℓpB, $M(f_y^2)$ existe), et la valeur de $M((f-f_y)^2)$.

Preuve de (i) : On voit que $\frac{9}{16} \leq G^2(p)$, et $\frac{9}{16} \leq G(p)\, G_y(p)$. Ainsi :

$$\varliminf_{N \to \infty} \sum_{N<p<N(1+\varepsilon)} \frac{G(p)G_y(p) \log p}{p} \geq \frac{9}{16} \log(1+\varepsilon) > 0 \quad \text{et}$$

$$\varliminf_{N \to \infty} \sum_{N<p<N(1+\varepsilon)} \frac{G^2(p) \log p}{p} \geq \frac{9}{16} \log(1+\varepsilon) > 0.$$

De même, puisque $G^2(p^r) \leq (\frac{5}{4})^{2r}$ et $G(p^r)\, G_y(p^r) \leq (\frac{5}{4})^{2r}$, on voit que

$$\sum_p \left| \frac{G^4(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{G^2(p^r)}{p^r} \right| < \infty, \text{ et,}$$

$$\sum_p \left| \frac{G^2(p) G_y^2(p)}{p^2} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{G(p^r)G_y(p^r)}{p^r} \right| < \infty.$$

remarquant maintenant que $\sum \frac{f^2(p)-1}{p} = \sum \frac{(f(p)-1)^2}{p} + 2\sum \frac{f(p)-1}{p}$, on obtient la convergence de la série $\sum \frac{f^2(p)-1}{p}$. Mais

$$\sum_{p\le x} \frac{G^2(p)-1}{p} = \sum_{\substack{p\le x \\ |f(p)-1|\le 1/4}} \frac{f^2(p)-1}{p} - \frac{7}{16}\sum_{\substack{p\le x \\ f(p)<3/4}} \frac{1}{p} + \frac{9}{16}\sum_{\substack{p\le x \\ f(p)>5/4}} \frac{1}{p}$$

$$= \sum_{p\le x} \frac{f^2(p)-1}{p} - \sum_{\substack{p\le x \\ |f(p)-1|>1/4}} \frac{f^2(p)-1}{p} - \frac{7}{16}\sum_{\substack{p\le x \\ f(p)<3/4}} \frac{1}{p} + \frac{9}{16}\sum_{\substack{p\le x \\ f(p)>5/4}} \frac{1}{p}.$$

On voit immédiatement que

$$\sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{1}{p} \le 16 \sum \frac{(f(p)-1)^2}{p} = < +\infty$$

et que

$$\sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{|f^2(p)-1|}{p} \le \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{f^2(p)+1}{p} \le \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{2(f(p)-1)^2+2+1}{p} < \infty.$$

Ainsi la série $\sum \frac{G^2(p)-1}{p}$ converge.

Il en est de même de la série $\sum \frac{G(p)-1}{p}$, et donc de la série $\sum \frac{G(p)G_y(p)-1}{p}$.

Preuve de (ii) : Montrons que $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|H(p^r)|}{p^r}\right) < \infty$, ce qui entraînera, puisque H est multiplicative, que $\sum \frac{|H(n)|}{n} < \infty$.

Remarquons d'abord que :

$$\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|H(p^r)|}{p^r}\right) \le \sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty}\right) \frac{f(p^r)^2}{p^r} + \frac{25}{16}\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^{r-1})^2}{p^r}\right)$$

$$\le \sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^r)^2}{p^r}\right) + \frac{25}{16}\sum_p \frac{f^2(p)}{p^2} + \frac{25}{16}\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^r)^2}{p^{r+1}}\right)$$

$$\le \frac{41}{16}\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{f(p^r)^2}{p^r}\right) + \frac{25}{16}\left(2\sum \frac{(f(p)-1)^2}{p} + 2\sum \frac{1}{p^2}\right) < \infty.$$

En outre,

$$\sum_p \frac{|H(p)|}{p} = \sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{|f^2(p)-G^2(p)|}{p} \le \sum_{|f(p)-1|>1/4} \left(\frac{f^2(p)}{p} + \frac{G^2(p)}{p}\right)$$

$$\le 2\sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{(f(p)-1)^2}{p} + 2\sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{1}{p} + \frac{25}{16}\sum_{|f(p)-1|>1/4} \frac{1}{p}.$$

Ces dernières sommes étant finies comme on l'a vu plus haut, on en déduit que $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|H(p^r)|}{p^r} \right) < \infty$.

De manière analogue, en remarquant que $f(p^r) \le \frac{1+f(p^r)^2}{2}$, on montre que $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|K_y(p^r)|}{p^r} \right) < \infty$ et donc $\sum \frac{|K_y(n)|}{n}$.

Preuve du lemme 9 : Puisque $f^2 = H * G^2$ on a

$$\frac{1}{x} \sum_{n \le x} f^2(n) = \sum^{\cdot} \frac{H(d)}{d} \cdot \frac{d}{x} \sum_{n \le x/d} G^2(n).$$

G^2 ayant une valeur moyenne finie, il existe une constante C telle que, pour tout entier $d \ge 1$ et tout nombre réel x, $\left[\frac{d}{x} \sum_{n \le x/d} G^2(n) \right] \le C$. De plus $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{d}{x} \sum_{n \le x/d} G^2(n) \right] = M(G^2)$.

Le théorème de convergence dominée, compte tenu de (ii), montre que $\frac{1}{x} \sum_{n \le x} f^2(n)$ tend vers une limite égale à $M(G^2) \sum \frac{H(n)}{n}$, c'est-à-dire que

$$M(f^2) = \left(\prod_p \left((1 - \frac{1}{p}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^2(p^j)}{p^j} \right) \right) \prod_p \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{H(p^j)}{p^j} \right),$$

$$= \prod_p (1 - \frac{1}{p}) \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{G^2(p^j)}{p^j} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{H(p^j)}{p^j} \right) \right) .$$

Remplaçant G et H par leurs valeurs on a :

$$M(f^2) = \prod_p (1 - \frac{1}{p}) \sum_{d=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j} .$$

De manière analogue on obtient l'existence de $M(f f_y)$ et la relation

$$M(f f_y) = \left(\prod_{p \le y} (1 - \frac{1}{p}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j} \right) \left(\prod_{p > y} (1 - \frac{1}{p}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} \right) .$$

Finalement on voit que

$$M((f-f_y)^2) = M(f^2) + M(f_y^2) - 2M(f f_y)$$

$$= \prod_p (1 - \frac{1}{p}) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j} \right) + \prod_{p \le y} (1 - \frac{1}{p}) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j} \right)$$

$$- 2 \left(\prod_{p \le y} (1 - \frac{1}{p}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(p^j)}{p^j} \right) \left(\prod_{p > y} (1 - \frac{1}{p}) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f(p^j)}{p^j} \right)$$

$$= A_y \cdot B_y \quad \text{où}$$

$$A_y = \left[\prod_{p>y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\right]^{\frac{1}{2}} + 1 - 2\left[\prod_{p>y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)}{p^j}\right],$$

$$B_y = \prod_{p\le y}\left(\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^2(p^j)}{p^j}\right).$$

Il est alors immédiat que A_y tend vers zéro quand $y \to +\infty$ et que B_y tend vers $M(f^2)$, et donc que $\lim_{y\to\infty} M((f-f_y)^2) = 0$, ce qui entraîne que f est $\ell_p B^2$.

Il nous reste à montrer, pour prouver le théorème 1, que $\sigma(f) \neq \emptyset$, c'est immédiat puisque $M(f^2) = \prod\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f(p^j)^2}{p^j}$, produit convergent de termes strictement positifs, est non nul.

VI. THEOREME 2.

Pour qu'une fonction multiplicative positive soit $pp B^\lambda$ $(\lambda \ge 1)$ avec un spectre de Fourier Bohr non vide, il faut et il suffit que la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ converge et

$$\sum_p \left|\sum_{r\ge 2}\frac{f(p^r)^\lambda}{p^r}\right| < \infty \ , \ \sum_{f(p)\le 2}\frac{(f(p)-1)^2}{p} < \infty \ , \ \sum_{f(p)>2}\frac{f(p)^\lambda}{p} < \infty .$$

Dans ce cas f est $\ell_p B^\lambda$.

LEMME 10. Soit $f \ge 0$ alors

$$f \ pp B^\lambda \text{ avec } \sigma(f) \neq \emptyset \iff f^{\lambda/2} \ pp B^2 \text{ avec } \sigma(f^{\lambda/2}) \neq \emptyset .$$

Remarquons d'abord que, d'après III.10, $f \ pp B^\lambda \iff f^{\lambda/2} \ pp B^2$.

Supposons que $\sigma(f^{\lambda/2}) = \emptyset$. Alors d'après III.5 $M\left[(f^{\lambda/2})^2\right] = 0$ c'est-à-dire $M(f^\lambda) = 0$; or $M(f) \le \left[M(f^\lambda)\right]^{1/\lambda}$, et donc $M(f) = 0$; ce qui implique que $\sigma(f) = \emptyset$.

Supposons que $\sigma(f) = \emptyset$. Alors $M(f) = 0$. Montrons que $M(f^{\lambda/2}) = 0$, ce qui entraîne que $\sigma(f^{\lambda/2}) = \emptyset$.

Si $\lambda \le 2$ on a $M(f^{\lambda/2}) \le [M(f)]^{\lambda/2} = 0$, et donc $M(f^{\lambda/2}) = 0$.

Supposons donc $\lambda > 2$ et soit $n \ge 1$ tel que $2^n < \lambda \le 2^{n+1}$.

Observons d'abord que pour tout $j \in \{0,1,\dots n-1\}$ f^{2^j} est pp B^2, En effet, si $j \le n-1$, $2^{j+1} \le 2^n < \lambda$ et donc l'hypothèse f pp B^λ entraîne que f est pp $B^{2^{j+1}}$; III.10 montre alors, que f^{2^j} est pp B^2.

Supposons que, pour un $j \in \{0,1,\dots n-1\}$, $M(f^{2^j}) = 0$. On aura alors $\sigma(f^{2^j}) = \emptyset$ et grâce à III.5 $M(f^{2^{j+1}}) = 0$.

Ainsi, en partant de $M(f) = 0$, on aboutit à $M(f^{2^n}) = 0$. Or $M(f^{\lambda/2}) \le M(f^{2^n})^{\lambda/2^{n+1}}$ et donc $M(f^{\lambda/2}) = 0$.

Preuve du théorème 2. D'après le lemme 10 et le théorème 1, pour que f soit pp B^λ avec $\sigma(f) \neq \emptyset$ il faut et il suffit que les séries

$$\sum_p \Big(\sum_{r \le 2} \frac{f(p^r)^\lambda}{p^r} \Big), \quad \sum_p \frac{(f(p)^{\lambda/2}-1)^2}{p} \quad \text{et} \quad \sum_p \frac{f(p)^{\lambda/2}-1}{p}$$

soient convergentes.

Il nous suffit donc de démontrer que la convergence des séries

$$\sum \frac{(f(p)^{\lambda/2}-1)^2}{p} \quad \text{et} \quad \sum \frac{f(p)^{\lambda/2}-1}{p}$$

est équivalente à l'ensemble des conditions suivantes :

la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ est convergente, $\sum_{f(p)\le 2} \frac{(f(p)-1)^2}{p} < \infty$ et $\sum_{f(p)>2} \frac{f(p)^\lambda}{p} < +\infty$.

Nous utiliserons les inégalités suivantes : si $\lambda \ge 1$

6.1. $c_1(x-1)^2 \le (x^{\lambda/2}-1)^2 \le c_2(x-1)^2$ si $x \in [0,2]$.

6.2. $c_3 x^\lambda \le (x^{\lambda/2}-1)^2 \le c_4 x^\lambda$ si $x \ge 2$.

6.3. $|(x^{\lambda/2}-1) - \frac{\lambda}{2}(x-1)| \le c_5(x-1)^2$ si $x \in [0,2]$.

6.4. $(x^{\lambda/2}-1) \le c_6 x^\lambda$ si $x \ge 2$.

6.5. $(x-1) \le c_7 x^\lambda$ si $x \ge 2$.

Les inégalités (6.2), (6.4) et (6.5) sont immédiates.

Les fonctions $\frac{x^{\lambda/2}-1}{x-1}$ et $\frac{x^{\lambda/2}-1-(\lambda/2)(x-1)}{(x-1)^2}$ prolongées en $x = 1$ par $\frac{\lambda}{2}$, et $\frac{\lambda(\lambda-2)}{8}$ respectivement, sont continues sur $[0,2]$, ce qui donne 6.1 et 6.3.

On déduit de 6.1 et 6.2 que la convergence de la série $\sum \frac{(f(p)^{\lambda/2}-1)^2}{p}$ est équivalente

à

(6.6) $$\sum_{f(p)\leq 2} \frac{(f(p)-1)^2}{p} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{f(p)>2} \frac{f(p)^\lambda}{p} < \infty.$$

Grâce aux inégalités (6.4) et (6.5), la condition $\sum_{f(p)>2} \frac{f(p)^\lambda}{p} < \infty$ entraîne

$$\sum_{f(p)>2} \frac{f(p)^{\lambda/2}-1}{p} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{f(p)>2} \frac{f(p)-1}{p} < \infty.$$

Alors (6.3) montre que, si l'on a (6.6), les séries $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ et $\sum \frac{f(p)^{\lambda/2}-1}{p}$ sont de même nature.

VII . DEMONSTRATION DU THEOREME PRINCIPAL.

LEMME 11 (Daboussi-Delange) [2].

Soit g une fonction multiplicative tel que $|g(n)| \leq 1$ pour tout n,

1) Si pour tout caractère de Dirichlet χ et tout u réel on a

$$\sum \frac{1-\mathcal{R}e(g(p)\chi(p)p^{iu})}{p} = +\infty,$$

alors, pour toute fonction arithmétique S pp B, on a $M(g.S) = 0$.

2) S'il existe un caractère de Dirichlet χ et un nombre a réel tels que

$$\sum \frac{1-\mathcal{R}e(g(p)\chi(p)p^{ia})}{p} < +\infty,$$

Alors, pour toute fonction arithmétique S pp B, on a

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} g(n)\,S(n) = C\,x^{ia}\,\exp i A(x) + o(1), \text{ où}$$

C est un nombre complexe, $A(x) = \sum_{p\leq x} \frac{\mathrm{Im}(\chi(p)g(p)\,p^{ia})}{p}$, et $\lim_{x\to+\infty} \{ \operatorname{Sup}_{x<y\leq x^2} A(y)-A(x) \} = 0.$

Etant donné une fonction multiplicative f, soit

$$\rho(n) = |f(n)|$$

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{f(n)}{|f(n)|} & \text{si } f(n) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(n) = 0. \end{cases}$$

ρ et g sont multiplicatives et $|g(n)|$ est égale à 0 ou 1 pour tout n.

Montrons que les 2 propositions (A) et (B) suivantes sont équivalentes

(A) 7.1. les séries $\sum \frac{1-\chi(p)g(p)}{p}$ et $\sum \frac{1-\rho(p)}{p}$ convergent.

7.2. $\sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{(\rho(p)-1)^2}{p} < \infty$.

7.3. $\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} < \infty$.

(B) 7.4. La série $\sum \frac{1-\chi(p)f(p)}{p}$ converge

7.5. $\sum_{|f(p)|\leq 2} \frac{|\chi(p)f(p)-1|^2}{p} < \infty$.

7.6. $\sum_{|f(p)|>2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty$.

Supposons la proposition (A).

Puisque $|1-\chi(p)g(p)|^2 \leq 2(1-\mathrm{Re}[\chi(p)g(p)])$, on voit que 7.1 implique

7.7. $\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p} < \infty$.

Les inégalités 7.2, 7.3, 7.7, entraînent que

7.8. $\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|\,|1-\rho(p)|}{p} < \infty$.

En effet,

$$\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|\,|1-\rho(p)|}{p} \leq \sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{|1-\chi(p)g(p)|\,|1-\rho(p)|}{p} + 2\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p}$$

$$\leq \left[\sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{(1-\rho(p))^2}{p}\right)\left(\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p}\right]^{1/2} + 2\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} < \infty.$$

Il résulte de 7.1, 7.8 et de l'identité suivante :

$$1-\chi(p)f(p) = 1-\chi(p)g(p)\rho(p) = (1-\rho(p))(\chi(p)g(p)-1) + (1-\chi(p)g(p)) + (1-\rho(p))$$

que la série $\sum \frac{1-\chi(p)f(p)}{p}$ converge.

Puisque $\chi(p)f(p) - 1 = (\rho(p)-1)\chi(p)g(p) + (\chi(p)g(p) - 1)$, on a :

$$|\chi(p)f(p) - 1|^2 \leq 2\,|1-\rho(p)|^2 + 2|1-\chi(p)g(p)|^2$$

et donc, grâce à 7.2 et 7.7, on voit que

$$\sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{|1-\chi(p)f(p)|^2}{p} < \infty .$$

Ce qui achève de prouver (B).

Supposons la proposition (B).

Remarquons que si, $\rho(p) \leq 2$, on a $|1-\rho(p)| \leq |1-f(p)\chi(p)|$. En effet si $|\chi(p)| = 1$, $|1-\rho(p)| = |1-|f(p)\chi(p)|| \leq |1-f(p)\chi(p)|$; si $\chi(p) = 0$ et $\rho(p) \leq 2$, $|1-\rho(p)| \leq 1 = |1-f(p)\chi(p)|$. Ainsi on a 7.2.

L'identité $\chi(p)g(p)-1 = (1-\rho(p))\,\chi(p)g(p) - (1-\chi(p)\rho(p)g(p))$ et les inégalités 7.5 et 7.2 entraînent $\sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p} < \infty$. Par ailleurs, puisque $\sum_{\rho(p)>2} \frac{1}{p} < \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p}$, on a $\sum_{\rho(p)>2} \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p} < \infty$ et donc

7.9 $$\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p} < \infty .$$

Ceci entraîne que

7.10 $$\sum \frac{(1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p)))}{p} < \infty$$

puisque, si $|\chi(p)g(p)| = 1$, on a $2(1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p))) = |1-\chi(p)g(p)|^2$, et,

si $\chi(p)g(p) = 0$, on a $(1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p))) = 1 = |1-\chi(p)g(p)|^2$.

On déduit de 7.6 et 7.10 que

7.11 $$\sum \frac{\rho(p)[1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p))]}{p} < \infty ,$$

puisque $$\sum \frac{\rho(p)(1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p)))}{p} \leq 2 \sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p))}{p} + 2\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} .$$

L'identité

$$1-\rho(p) = -\rho(p)[1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p))] + 1 - \mathrm{Re}(\chi(p)f(p))$$

et l'inégalité 7.11 montrent que

7.12. $\sum \frac{1-\rho(p)}{p}$ converge

puisque $\sum \frac{1-\mathrm{Re}\,|\chi(p)f(p)|}{p}$ converge d'après 7.4.

Finalement, en remarquant que, grâce à 7.2, 7.9, 7.6 on a

7.13. $$\sum \frac{|1-\rho(p)||\chi(p)g(p)-1|}{p} < \infty,$$

puisque $$\sum \frac{|1-\rho(p)||\chi(p)g(p)-1|}{p} \leq \Big(\sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{(1-\rho(p))^2}{p}\Big)\Big(\sum \frac{|1-\chi(p)g(p)|^2}{p}\Big)^{1/2} + 2\sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p}.$$

On voit que la série $\sum \frac{1-\chi(p)g(p)}{p}$ converge en considérant l'identité

$$1-\chi(p)g(p) = (1-\rho(p))(1-\chi(p)g(p)) - (1-\rho(p)) + (1-\chi(p)f(p))$$

et 7.13, 7.4, 7.12. Ceci achève de prouver (A).

Si f est $pp B^\lambda$ on sait d'après III.3 et III.6 que ρ est $pp B^\lambda$ et que le spectre de ρ est non vide, si le spectre de f est non vide.

Il résulte du théorème 2, que la série $\sum \frac{\rho(p)-1}{p}$ converge et que

$$\sum_p \sum_{r\geq 2} \frac{\rho(p^r)^\lambda}{p^r} < \infty, \quad \sum_{\rho(p)\leq 2} \frac{(\rho(p)-1)^2}{p} < \infty, \quad \sum_{\rho(p)>2} \frac{\rho(p)^\lambda}{p} < \infty.$$

Montrons que

(i) la série $\sum \frac{1-\chi(p)g(p)}{p}$ converge pour un certain caractère χ, ce qui entraînera d'après un théorème de Delange et l'auteur [2], que g est $\ell p B$.

(ii) Si f vérifie les conditions du théorème f est $\ell p B^\lambda$ et $\sigma(f) \neq \emptyset$.

Preuve de (i) : Si pour tout caractère χ et pour tout u réel, $\sum \frac{1-\mathrm{Re}(\chi(p)g(p)p^{iu})}{p} = +\infty$, alors en appliquant le lemme 11 avec $S(n) = \rho(n)e^{2\pi i n\alpha}$, on aurait $\overline{\lim}\,\big|\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)e^{2\pi i n\alpha}\big| = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, ce qui contredit l'hypothèse $\sigma(f)$ non vide.

Il existe donc un caractère χ et un nombre réel a tel que

$\sum \frac{1 - \Re e(\chi(p)g(p)p^{ia})}{p} < \infty$. Montrons que $a = 0$ et que $\sum \frac{Im(\chi(p)g(p))}{p}$ est une série convergente, ce qui prouvera (i).

Soit $\alpha \in \sigma(f)$ et $S(n) = \rho(n)e^{2\pi in\alpha}$. D'après le lemme 11, on a :

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi in\alpha} = C_\alpha\, x^{ia} \exp(i\, A(x)) + 0(1).$$

f étant pp B, l'expression $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\, e^{2\pi in\alpha}$ tend vers une limite quand $x \to +\infty$. Cette limite est non nulle puisque $\alpha \in \sigma(f)$.

Il en résulte que $C_\alpha \neq 0$ et que la quantité $x^{ia} \exp i\, A(x)$ tend vers une limite, quand $x \to +\infty$.

On voit que pour tout $\gamma > 0$, l'expression $\gamma^{ia} \exp i(A(\gamma x) - A(x))$ tend vers 1 quand $x \longrightarrow +\infty$, puisque

$$\gamma^{ia} \exp i(A(\gamma x) - A(x)) = \frac{(\gamma x)^{ia} \exp i(A(\gamma x))}{x^{ia} \exp i\, A(x)}.$$

Comme, par ailleurs, $A(\gamma x) - A(x)$ tend vers zéro quand $x \to +\infty$, d'après le lemme 11, on obtient que $\gamma^{ia} = 1$ pour tout $\gamma > 0$, ce qui nécessite que $a = 0$.

Reste à montrer que $A(x)$ tend vers une limite quand $x \to \infty$.

Nous savons que $\exp i(A(x))$ tend vers une limite quand $x \longrightarrow +\infty$, et, d'après le lemme 11, que $A(x+1) - A(x)$ tend vers zéro.

Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $\exp i[A(x) - \theta]$ tend vers 1; soit $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\exp i\, \theta_n = \exp i(A(n) - \theta))$.

Il est clair que θ_n tend vers zéro quand $n \to \infty$, et que $A(n+1) - A(n) \equiv \theta_{n+1} - \theta_n$ modulo 2π. Il en résulte, puisque $A(n+1) - A(n)$ tend vers zéro, qu'il existe n_o tel que $n \geq n_o$ entraîne $A(n+1) - A(n) = \theta_{n+1} - \theta_n$. Soit alors $\varepsilon_n = A(n) - \theta_n$. On a $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}$ si $n \geq n_o$ et donc, puisque θ_n tend vers zéro, $A(n)$ tend vers une limite.

Preuve de (ii) : Si les sommes ou séries du théorème principal sont finies ou convergentes, alors, d'après (ii) ci-dessus et le théorème 2, $\rho = |f|$ est $\ell p B^{\lambda}$ et $\sigma(\rho) \neq \emptyset$. De plus, g est $\ell p B$, g bornée. Il résulte de III.8 que $f = \rho g$ est $\ell p B^{\lambda}$. Il reste à montrer que $\sigma(f) \neq \emptyset$.

Supposons donc $\sigma(f) = \emptyset$.

Soit $\epsilon > 0$ et Q un polynôme trigonométrique périodique tel que $M(|f-Q|) \leq \epsilon$. Comme g est $\ell p B$ et $|g(n)| \leq 1$ pour tout n, on voit qu'il existe une fonction périodique K telle que $\left(\max |Q(n)|\right) M|g-K| \leq \epsilon$ et $|K(n)| \leq 1$. En effet il existe un polynôme trigonométrique périodique P telle que $\left(\max |Q(n)|\right) M|g-P| \leq \epsilon$; on définit K(n) ainsi

$$K(n) = \begin{cases} P(n) & \text{si } |P(n)| \leq 1 \\ \dfrac{P(n)}{|P(n)|} & \text{si } |P(n)| > 1. \end{cases}$$

On a alors $|g(n) - K(n)| \leq |g(n) - P(n)|$.

Ceci dit, on a

$$\begin{aligned} M(|f|) = M(f\bar{g}) &= M(f\bar{K}) + M(f\bar{g} - f\bar{K}) \\ &\leq |M(f\bar{K})| + M|(f-Q)(\bar{g}-\bar{K})| + M|Q(\bar{g}-\bar{K})| \\ &\leq |M(f\bar{K})| + 2M|f-Q| + \left(\max |Q(n)|\right) M|\bar{g}-\bar{K}| \\ &\leq 3\epsilon + |M(f\bar{K})|. \end{aligned}$$

Or $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)\,\overline{K}(n) = \sum_{\ell=1}^{N} \overline{K(\ell)}\, \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(N)}} f(n)$, en notant N la période de K.

Comme $\sigma(f) = \emptyset$, on a $\overline{\lim} \left| \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv \ell(N)}} f(n) \right| = 0$. Ainsi $M(f\bar{K}) = 0$ et donc $M|f| \leq 3\epsilon$

ϵ étant arbitraire, ceci est en contradiction avec le fait que $\sigma(\rho) \neq \emptyset$.

APPENDICE

A.1. Preuve de III.7. Il suffit de prouver que "si f ppb, $f \geq 0$ alors f a une distribution limite".

D'après un résultat bien connu, f a une distribution limite si, et seulement si, pour tout t réel $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{2\pi i t f(n)}$ tend, quand $N \to +\infty$, vers une fonction $\sigma(t)$ continue à l'origine.

Remarquons qu'un polynôme trigonométrique réel P a une distribution limite. En effet, pour tout j entier $\int t^j d\mu_N(P,t) = \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} P(n)^j$ tend vers une limite quand $N \to +\infty$. Ceci entraîne, que pour toute fonction h continue à support compact $\int h(t)\, d\mu_N(P,t)$ a une limite quand $N \to \infty$, et donc $\mu_N(P,t)$ converge vers une mesure μ. Il suffit alors de remarquer que pour tout $N \geq 1$

$$\mu_N(P,t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geq \sup\limits_n P(n) \\ 0 & \text{si} \quad t \leq \min\limits_n P(n) \end{cases}$$

pour obtenir que $\mu(\mathbf{R}) = 1$ et donc que la convergence est étroite.

D'après le résultat rappelé ci-dessus cela en particulier entraîne que pour tout polynôme trigonométrique réel P, $\frac{1}{N} \sum_{n \leq N} e^{2\pi i t P(n)}$ tend vers une fonction $M(e^{2\pi i t P})$ continue à l'origine.

Ceci dit, soit f ppB, $f \geq 0$, et P_k des polynômes trigonométriques réels tels que

$$M(|f - P_k|) \leq \frac{1}{k} .$$

Puisque, si $k > r$,

$$M(|e^{2\pi i t P_k} - e^{2\pi i t P_r}|) \leq (2\pi |t|) M(|P_k - P_r|) \leq \frac{4\pi |t|}{k} ,$$

la suite $M(e^{2\pi i t P_k})$ est, pour tout t, une suite de Cauchy. Elle converge donc vers une fonction $\sigma(t)$. Il suffit alors de remarquer que, si $|t| \leq 1$, la suite $M(e^{2\pi i t P_k})$

est une suite uniforme de Cauchy, pour déduire que σ est une limite uniforme pour $|t| \leq 1$ de fonctions continues à l'origine,et donc que σ est continue à l'origine.

Des inégalités :

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e^{2\pi itf(n)} - \sigma(t)\right| \leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\left(e^{2\pi itf(n)} - e^{2\pi itP_k(n)}\right)\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e^{2\pi itP_k(n)} - M\left(e^{2\pi itP_k}\right)\right| + \left(M\left(e^{2\pi itP_k}\right) - \sigma(t)\right|,$$

et

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n\leq N}\left(e^{2\pi itf(n)} - e^{2\pi itP_k(n)}\right)\right| \leq 2\pi|t| \times$$

$$\times \frac{1}{N}\sum_{n\leq N}|f(n) - P_k(n)|$$

on déduit, en prenant la limite quand $N \to +\infty$ puis quand $k \to +\infty$, que

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\left|\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e^{2\pi itf(n)} - \sigma(t)\right| = 0.$$

Ceci prouve le résultat indiqué.

A.2. Preuve de III. 10. Nous établirons le résultat plus général suivant

Soit $g \geq 0$, $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) g^{α} pp B^{β} (resp. $\ell p\ B^{\beta}$).

(ii) g pp $B^{\alpha\beta}$ (resp. $\ell p\ B^{\alpha\beta}$).

Il est clair qu'on obtient III. 10 en prenant :

si $\lambda \geq 2$, $g = f$, $\alpha = \frac{\lambda}{2}$ et $\beta = 2$ et si

$1 \leq \lambda < 2$, $g = f^{\lambda/2}$, $\alpha = \frac{2}{\lambda}$ et $\beta = \lambda$.

Etablissons d'abord :

(a) la condition (i) entraîne (ii).

Soit $\epsilon > 0$ et P un polynôme trigonométrique réel tel que

$M(|g^{\alpha} - P|^{\beta}) \leq \epsilon/2^{\alpha\beta}$.

Il existe A tel que $|P(n)| \leq A$ pour tout entier n.

Soit Q un polynôme ordinaire, (de sorte que $Q \circ P$ est un polynôme trigonométrique) tel que $|Q(u) - (\sup(0,u))^{1/\alpha}| \leq (\frac{\epsilon}{2})^{\frac{1}{\alpha\beta}}$ pour tout $u \in [-A, A]$. Montrons que : $M(|g - Q \circ P|^{\alpha\beta}) \leq \epsilon$, ce qui établira (ii).

On utilisera les inégalités suivantes :

1. $|x-y|^{\alpha} \leq |x^{\alpha} - y^{\alpha}|$ pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

[Il suffit de considérer, si $x > y$, la fonction $t \to (y+t)^{\alpha} - t^{\alpha}$, qui est une fonction croissante sur $[0, x-y]$).

2. $(x+y)^{\alpha\beta} \leq 2^{\alpha\beta-1}(x^{\alpha\beta} + y^{\alpha\beta})$ si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ (cela se déduit de la convexité de la fonction $t \to t^{\alpha\beta}$).

3. $|\sup(0,y) - \sup(0,x)| \leq |y-x|$ pour x et y réels (se vérifie facilement).

On a :

$$|g(n)-Q(P(n))|^{\alpha\beta} \leq \left\{ |g(n) - (\sup(0,P(n)))^{1/\alpha}| + |(\sup(0,P(n)))^{1/\alpha} - Q(P(n))| \right\}^{\alpha\beta}$$

Appliquant successivement les inégalités 2, 1 et 3, on obtient

$$|g(n)-Q(P(n))|^{\alpha\beta} \leq 2^{\alpha\beta-1} \left\{ |g^{\alpha}(n) - P(n)|^{\beta} + |(\sup(0,P(n)))^{1/\alpha} - Q(P(n))|^{\alpha\beta} \right\},$$

et donc $\bar{M}(|f(n) - Q(P(n))|^{\alpha\beta}) \leq \varepsilon$ par choix de P et Q.

Montrons maintenant :

(b) Si $h \geq 0$, h pp B^n (resp. $\ell p B^n$), où n est un entier >0, alors h^n est pp B resp. ($\ell p B$).

La propriété est triviale si n = 1. Supposons-la vraie pour n = k.

Soit h pp B^{k+1}. Alors h est pp B^k, et donc h^k est pp B . Soit $\varepsilon > 0$ et R et S deux polynômes trigonométriques tels que

$$(M(h^{k+1}))^{k/k+1}(M(|h-R|^{k+1})^{1/k+1} \leq \varepsilon/2$$

et $$(\sup |R(n)|)M(|h^k - S|) \leq \varepsilon/2.$$

Puisque

$$\bar{M}(|h^{k+1} - R.S|) \leq M(h^k |h-R|) + M(|R||h^k - S|) \leq [M(h^{k+1})]^{k/k+1} . [M|h-R|^{k+1}]^{1/k+1}$$
$$+ \sup |R(n)| M(|h^k - S|),$$

on a
$$\bar{M}|h^{k+1} - R.S| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat.

Si h était $\ell p B^{k+1}$, on pourrait choisir R et S périodiques, et donc h^{k+1} serait $\ell p B$.

Montrons finalement :

(c) La condition (ii) entraîne (i).

Soit $\gamma = (E(\alpha\beta) + 1)/\alpha\beta$ où $E(\alpha\beta)$ = partie entière de $\alpha\beta$. Ainsi $\gamma \geq 1$ et $\alpha\beta\gamma$ est un entier.

Soit $h = g^{1/\gamma}$. Ainsi h^{γ} est pp $B^{\alpha\beta}$ (resp. ℓp $B^{\alpha\beta}$). De la proposition (a) résulte que h est pp $B^{\alpha\beta\gamma}$ (resp. ℓp $B^{\alpha\beta\gamma}$) ; puisque $\alpha\beta\gamma$ est entier, il résulte de (b) que $h^{\alpha\beta\gamma}$ est pp B (resp. ℓp B), c'est-à-dire que $g^{\alpha\beta}$ est pp B (resp. ℓp $\hat{B}$).

Il suffit d'appliquer de nouveau (a) pour obtenir que g^{α} est pp B^{β} (resp. ℓp B^{β}).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.S. BESICOVITCH. "Almost periodic Functions". Dover Publications.

[2] H. DABOUSSI et H. DELANGE. "Quelques propriétés de fonctions multiplicatives...". C.R. Acad. Sc. Paris t. 278 (1974). Série A p. 657-660.

[3] H. DELANGE. "Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives". C.R. Acad. Sc. Paris t. 281 (1975). Série A p. 997-1000.

[4] P.D.T.A. ELLIOTT. "On connections between the Turan-Kubilius inequality...". Procee. Symposia Math. vol: XXIV, p. 77-82.

[5] P.D.T.A. ELLIOTT."A mean value theorem for multiplicative functions". Proc. London Math. Soc. (3), 31 (1975). p. 418-438.

[6] P. ERDÖS. "Some remarks about additive and multiplicative functions". Bull. Am. Math. Soc. t. 52 (1946) p. 527-537.
et "Some remarks and corrections...". Bull. Am. Math. Soc. t. 53 (1947) p. 761-763.

[7] P. ERDÖS and A. RENYI. "On the mean value of non negative multiplicative...". Michigan Math. J. t. 12 (1965), p. 321-328.

[8] P. ERDÖS and A. WINTNER. "Additive functions and almost periodicity B^2". Amer. J. Math. 62 (1940) p. 635-645.

[9] P. HARTMAN and A. WINTNER. "On the almost periodicity of additive number...". Amer. J. Math. 62 (1940) p. 753-758.

[10] M. KAC, E.R. Van KAMPEN and A. WINTNER. "Ramanujan sums and almost periodic functions". Amer. J. Math. 62 (1940) p. 107-144.

[11] I. KUBILIUS. "Probabilistic methods in the theory of numbers". Transl. Math. Monographs vol. 11. Amer. Math. Soc. Providence.

[12] E.V. NOVOSELOV. "A new method in probabilistic number theory". Amer. Math. Soc. Transl. 52 (1966) p. 217-275.

[13] W. SCHWARZ and J. SPILKER. "Mean values and Ramanujan expansions of almost E.A.C. " Colloquia Math. S. Janos Bolyai 13. Topics in Number theory Debrecen 1974.

[14] E.R. Van KAMPEN and A. WINTNER. "On the almost periodic behavior of multiplicative...". Amer. J. Math. 62 (1940) p. 613-626.

[15] A. WINTNER. "Number theoretical almost periodicities. Amer. J. Math. 67 (1945) p. 173-193.

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES AYANT UNE VALEUR MOYENNE NON NULLE.

Hédi DABOUSSI

I. INTRODUCTION.

I.1. Une fonction $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et $f(m.n) = f(m).f(n)$ toutes les fois que $(m,n) = 1$.

I.2. Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la quantité $\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} f(n)$ tend, quand $x \to +\infty$, vers une limite non nulle. On notera $M(f)$ cette limite.

I.3. Un théorème de Delange [4] affirme que si f est multiplicative, $|f(n)| \leq 1$, alors f a une valeur moyenne non nulle si et seulement si la série $\sum_p \frac{f(p)-1}{p}$ converge et $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(2^k)}{2^k} \neq 0$.

I.4. Elliott [6] a montré que, si f est multiplicative, et satisfait aux conditions suivantes :

(i) $\overline{\lim_x} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x} |f(n)|^2 < +\infty$;

(ii) f a une valeur moyenne non nulle ;

alors les séries suivantes sont convergentes

$$\sum_p \frac{f(p)-1}{p} \quad , \quad \sum_p \frac{|f(p)-1|^2}{p} \quad , \quad \sum_p \Big(\sum_{k \geq 2} \frac{|f(p^k)|^2}{p^k} \Big),$$

et, pour tout nombre premier p, $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^k} \neq 0$.

Réciproquement, si ces conditions sont satisfaites, alors f et $|f|^2$ ont une valeur moyenne non nulle.

Delange et l'auteur [2] ont donné une nouvelle démonstration de ce résultat, et ont, indépendamment, montré que ces conditions impliquaient que f est limite périodique B^2 [5,1].

I.5. Nous allons établir dans cet article le résultat suivant, qui généralise celui d'Elliott.

THEOREME 1. Soit $\lambda > 1$, et soit f une fonction multiplicative vérifiant :

(1) $\overline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} |f(n)|^\lambda < +\infty$,

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} f(n)$ existe et est non nulle.

Alors

(3) la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ est convergente et on a

$$\sum_{|f(p)|\le 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < +\infty, \quad \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty$$

$$\sum_p \Big(\sum_{r\ge 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\Big) < +\infty .$$

(4) pour tout nombre premier p, la série $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^k}$ est non nulle.

Réciproquement, si la condition (3) est vérifiée alors f est limite périodique B^λ, et en particulier M(f) et $M(|f|^\lambda)$ existent. De plus, M(f) est non nul si, et seulement si, la condition (4) est vérifiée.

Remarques.

- Le nombre 3/2 du théorème peut être remplacer par tout nombre positif.

- Notre méthode est essentiellement différente de celle d'Elliot.

Elle consiste à étudier la série de Dirichlet de la fonction multiplicative et, en ce sens, est plus proche de la méthode analytique de Delange [4].

Nous allons en fait, démontrer le théorème suivant

THEOREME 2. Soit $\lambda > 1$ et f une fonction multiplicative vérifiant :

(5) $\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty$ pour tout $s > 1$.

(6) $\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty$.

(7) $\lim_{s\to 1, s>1} \zeta(s)^{-1} \sum \frac{f(n)}{n^s}$ existe et est non nulle,

Alors la conclusion du théorème 1 subsiste.

Il est facile de voir que les hypothèses (1) et (2) du théorème 1 entrainent (5), (6) et (7).

Ainsi le théorème 2 implique le théorème 1.

II.1 Nous démontrerons d'abord le théorème suivant

THEOREME 3. Soit f une fonction multiplicative réelle ou complexe. Soit $\lambda > 1$.

Supposons que

(8) $\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} < \infty$ pour tout $s > 1$

(9) $\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} = A < \infty$

(10) $\overline{\lim}_{s\to 1, s>1} \frac{1}{\zeta(s)} \left|\sum \frac{f(n)}{n^s}\right| = B > 0.$

Alors

(11) $\sum_{|f(p)|\leq 3/2} \frac{|f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$

(12) $\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty$

et pour tout p premier, la série

(13) $1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}$

est convergente et est non nulle.

On montrera ensuite qu'en remplaçant l'hypothèse (10) par (7) on pourra ajouter aux conclusions que la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ est convergente et que

$$\sum_p \Big(\sum_{r\geq 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} \Big) < +\infty.$$

Nous établirons à la fin une généralisation du théorème 2.

II.2. Notation.

La lettre p désigne un nombre premier,

$p \mid n$ signifie "p divise n"

$p \nmid n$ signifie "p ne divise pas n"

$p^j \| n$ signifie "$p^j \mid n$ et $p^{j+1} \nmid n$".

II.3. LEMME 1. Soient $u_1, u_2, \dots u_n \dots$ et $v_1, v_2, \dots v_n \dots$ des fonctions à valeurs complexes définies sur un ensemble S.

Supposons que, pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et tout $s \in S$,

$$|u_m(s)| \leq U_m, \quad |v_m(s) - u_m(s)| \leq V_m$$

où U_m et V_m sont des nombres positifs vérifiant :

$$\sum_m U_m^2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum V_m < \infty .$$

Alors le produit infini

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1+u_m(s))e^{-v_m(s)}$$

est absolument convergent pour $s \in S$. De plus il existe une constante C telle que pour tout ensemble E d'entiers et tout $s \in S$

$$\Big| \prod_{m\in E} (1+u_m(s))\, e^{-v_m(s)} \Big| < C.$$

Preuve. Soit $T > 0$ tel que $U_m \leq T$ et $V_m \leq T$. Posons

$$w_m(s) = (1 + u_m(s))e^{-v_m(s)} - 1.$$

Les fonctions $((1+u)e^{-u}-1)/u^2$ et $(e^u-1)/u$ (prises égales à $-1/2$ et 1 respectivement pour $u = 0$) étant continues, il existe M tel que :

$$|(1+u)e^{-u}-1| \leq M|u|^2 \quad \text{et} \quad |e^u - 1| \leq M|u| \quad \text{pour} \quad |u| \leq T.$$

Il en résulte, en remarquant que :

$$|w_m(s)| \leq |((1+u_m(s))e^{-u_m(s)} - 1||e^{u_m(s)-v_m(s)}| + |e^{(u_m(s)-v_m(s))} - 1|,$$

l'inégalité,

$$|w_m(s)| \leq M|u_m(s)|^2 e^{|u_m(s) - v_m(s)|} + M|u_m(s) - v_m(s)|$$

$$\leq M W_m,$$

où

$$W_m = U_m^2 e^{2T} + V_m.$$

On a

$$\sum_{m=1}^{\infty} |W_m| \leq M e^{2T} \sum_m U_m^2 + M \sum_m V_m < +\infty,$$

et donc le produit infini $\Pi(1+w_m(s))$ est absolument et uniformément convergent pour $s \in S$.

II 4 LEMME 2. Soit $\alpha > 1$ et $Z \in \mathbb{C}$.

La quantité $|z|^\alpha - 1 + \alpha(1 - \text{Re } z)$ est positive pour tout z complexe.

De plus il existe des constantes positives c_1, c_2, c_3 et c_4 ne dépendant que de α telles que

(14) si $|z| \leq 3/2$, $c_1|z-1|^2 \leq |z|^\alpha - 1 + \alpha(1-\text{Re } z) \leq c_2|z-1|^2$

(15) si $|z| > 3/2$, $c_3|z|^\alpha \leq |z|^\alpha - 1 + \alpha(1 - \text{Re } z) \leq c_4|z|^\alpha$.

Preuve. Posons $z = x e^{i\theta}$ avec $x \geq 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Puisque $x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos\theta \geq x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x$, il suffit de remarquer que la fonction définie pour $x \geq 0$ par $x \to x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x$ est minimale au point $x = 1$, où elle vaut 0 pour obtenir que $x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos\theta \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$.

L'inégalité (15) est immédiate.

De même l'inégalité (14) pour $x \in [0, 1/2]$ puisque chacune des fonctions $x \to |x e^{i\theta} - 1|^2$ et $x \to x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos\theta$ est majorée et minorée par des constantes positives indépendantes de θ pour $x \in [0, 1/2]$.

Soit alors $x \in [1/2, 3/2]$. La formule de Taylor montre qu'il existe $h \in]0,1[$ tel que

$$x^\alpha = 1 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2\,[\,1 + h(x-1)\,]^{\alpha-2}.$$

Ainsi

$$x^\alpha - 1 + \alpha - \alpha x \cos\theta = \alpha x(1 - \cos\theta) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)^2\,[\,1 + h(x-1)\,]^{\alpha-2}.$$

Puisque $1 + h(x-1) \in]1/2, 3/2[$ et que $(x-1)^2 + 2x(1-\cos\theta) = |x e^{i\theta} - 1|^2$, on a, en prenant,

$$c_1' = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha-2}\right)$$

$$c_2' = \max\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-2}, \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha-2}\right)$$

$$c_1' |x\, e^{i\theta} - 1|^2 \leq x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x \cos\theta \leq c_2' |x\, e^{i\theta} - 1|^2.$$

II.5. Supposons que f satisfait aux hypothèses du théorème 3.

Soit $\mu = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ et $\sigma_0 = 1 - \frac{1}{2\mu}$.

Montrons, d'abord, que l'hypothèse (8) entraîne que

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) < \infty \quad \text{pour } s > 1 \text{ et } \alpha \in [1, \lambda] \tag{16}$$

$$\sum_p \left(\sum_{r=2}^{\infty} \frac{|f(p^r)|}{p^{r\sigma}} \right) < \infty \quad \text{si } \sigma > \sigma_0. \tag{17}$$

Si $\alpha = \lambda$ (16) découle de (8).

Si $\alpha < \lambda$, l'inégalité de Hölder entraîne que

$$\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\alpha}{p^{rs}} \right) \leq \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \right) \right)^{\alpha/\lambda} \left(\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \right) \right)^{\frac{\lambda-\alpha}{\lambda}},$$

et donc (16) se déduit de (8) et de la convergence de la série $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}} \right)$, pour $s > 1$.

D'autre part, soit $g(n)$ la fonction multiplicative déterminée par

$$g(p^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 1 \\ 1 & \text{si } r \geq 2 \end{cases} .$$

Ainsi $\sum_p \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{g(p^r)}{p^{r\gamma}} \right) < \infty$ pour $\gamma > 1/2$, et donc

$$\sum \frac{g(n)}{n^{\gamma}} < \infty \text{ pour } \gamma > 1/2. \tag{18}$$

Soit $\sigma > \sigma_o$. On peut trouver 2 nombres a et b tels que $a+b = \sigma$ et $a > 1/\lambda$, $b > \frac{1}{2\mu}$. L'inégalité de Hölder montre que

$$\sum \frac{|g(n)f(n)|}{n^{\sigma}} \leq \left(\sum \frac{|f(n)|^{\lambda}}{n^{\lambda a}} \right)^{1/\lambda} \left(\sum \frac{g(n)}{n^{b\mu}} \right)^{1/\mu} ,$$

et donc $\sum \frac{|g(n)f(n)|}{n^{\sigma}} < \infty$ grâce à (8) et (18). Tenant compte de la définition de g, on obtient (17).

II.6. Pour tout p premier, la série $1 + \sum_{r=1}^{\infty} f(p^r)/p^r$ est convergente d'après (17). Nous allons voir que les hypothèses entraînent qu'elle est non nulle.

Posons, pour $s > 1$,

$$F(s) = \sum \frac{f(n)}{n^s} \qquad \text{et} \qquad F_p(s) = \sum_{p \nmid n} \frac{f(n)}{n^s} .$$

L'inégalité de Hölder et l'hypothèse (9) donnent

$$\overline{\lim_{s \to 1, s>1}} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^{\alpha}}{n^s} \leq \overline{\lim_{s \to 1, s>1}} \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^{\lambda}}{n^s} \right)^{\alpha/\lambda} = A^{\alpha/\lambda}$$

pour tout $\alpha \in [\, 1, \lambda \,[$.

Par suite, puisque $|F_p(s)| \leq \sum \frac{|f(n)|}{n^s}$,

$$\overline{\lim_{s \to 1, s>1}} \frac{1}{\zeta(s)} |F_p(s)| \leq A^{1/\lambda} . \tag{20}$$

Mais, pour $s > 1$,

$$F_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{p^r \| n} \frac{f(n)}{n^s}$$

$$F_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \sum_{p \nmid n} \frac{f(n)}{n^s},$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} (F(s) - F_p(s)).$$

Ainsi

$$(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}) F_p(s) = (\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}) F(s),$$

et donc

$$|\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}| \overline{\lim_{s \to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} |F(s)| = |1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}| \overline{\lim_{s \to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} |F_p(s)|.$$

Il résulte de (10) et (20) que :

$$|\sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}| . B \leq A^{1/\lambda} |1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}| .$$

B étant non nul, cela implique que $1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r} \neq 0$ et prouve donc (13).

II.7. Soit $\alpha \in [1, \lambda[$. On a :

(21) $$\sum \frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2} < \infty .$$

En effet :

si $\lambda \geq 2\alpha$, cela découle de (16).

Supposons $\alpha < \lambda < 2\alpha$ et soit $\sigma_1 \in]1, \frac{\lambda}{2\alpha - \lambda}[$.

De (16) on déduit l'existence d'une constante c_5 telle que $|f(p)|^{\lambda} \leq c_5 p^{\sigma_1}$.

Ainsi :

$$\sum_p |f(p)|^{2\alpha} p^{-2} \leq c_5^{\frac{2\alpha - \lambda}{\lambda}} \sum_p |f(p)|^{\lambda} p^{-2 + \sigma_1 (\frac{2\alpha - \lambda}{\lambda})} .$$

Il suffit alors de remarquer que $2 - \sigma_1 (\frac{2\alpha - \lambda}{\lambda}) > 1$ pour déduire (21) de (8).

II.8. Pour $s > 1$, posons

$$H(s) = \prod_p \left[(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}})(1 - \frac{1}{p^s}) \exp \frac{1 - f(p)}{p^s} \right].$$

$$u_p(s) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{rs}}$$

$$v_p(s) = \frac{f(p) - 1}{p^s} .$$

Ainsi $\mathcal{H}(s) = \prod_p \left[(1+u_p(s)) \exp - v_p(s) \right]$.

$$U_p = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)-f(p^{r-1})}{p^r}$$

$$V_p = 2\left(\sum_{r\geq 2} \frac{|f(p^r)|}{p^r}\right) + \frac{|f(p)|}{p^2} .$$

Les inégalités (16) et (17) montrent que :

$$\Sigma V_p < \infty , \quad \text{ce qui entraîne que}$$

$$\Sigma V_p^2 < \infty .$$

Et, puisque $U_p \leq V_p + \frac{|f(p)-1|}{p}$, on a

$$\Sigma U_p^2 \leq 3 \Sigma V_p^2 + 3 \Sigma \frac{|f(p)|^2}{p^2} + 3 \Sigma \frac{1}{p^2}$$

$$< + \infty \quad \text{d'après (2 1)}.$$

En appliquant le lemme 1, on obtient que $\mathcal{H}(s)$ est absolument convergent pour $s \geq 1$ et qu'il existe une constante c telle que, pour tout ensemble F de nombres premiers distincts et tout $s \geq 1$ on a

$$\text{(22)} \qquad \prod_{p\in F} \left| 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right| \left(1-\frac{1}{p^s}\right) \exp \frac{1-\operatorname{Re} f(p)}{p^s} \leq C.$$

De plus $\mathcal{H}(1)$ est différent de zéro.

II.9. LEMME 3. Soit E un ensemble fini de nombres premiers, k un entier et α et λ réels satisfaisant à : $1 < \alpha \leq \lambda$.

Supposons que la fonction f satisfait les hypothèses du Théorème 3.

Alors, il existe une constante $D(\alpha)$ ne dépendant pas de E et de k telle que

$$\text{(I)} \qquad \prod_{p\in E} \left[1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\right]\left[1-\frac{1}{p}\right] \exp \alpha \left[\frac{1-\operatorname{Re} f(p)}{p}\right] \leq D(\alpha).$$

Preuve. Soit $h_E(n)$ la fonction multiplicative définie par :

$$h_E(p^r) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin E \\ 0 & \text{si } p \in E \end{cases} \qquad r \geq 1.$$

On voit immédiatement que pour $s > 1$,

$$\Sigma \frac{f(n)h_E(n)}{n^s} = \prod_{p\notin E} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\right),$$

On en déduit que :

$$F(s) = \Big(\sum \frac{f(n)h_E(n)}{n^s}\Big) \prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\Big),$$

Comme, à cause de (13), quand $s\to 1$, le produit

$$\prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}}\Big)$$

tend, vers le produit

$$\prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r}}\Big),$$

qui est non nul, on a :

$$\overline{\lim_{s\to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} |F(s)| = \prod_{p\in E} \Big|\Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\Big)\Big| \overline{\lim_{s\to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \Big|\sum \frac{f(n)h_E(n)}{n^s}\Big|.$$

Ainsi

$$\overline{\lim_{s\to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \Big|\sum \frac{f(n)h_E(n)}{n^s}\Big| = B\Big[\prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^r}\Big)\Big]^{-1}. \tag{23}$$

Si $\alpha\in[1,\lambda]$ et si $s>1$, on a également

$$\sum \frac{|f(n)|^{\alpha} h_E(n)}{n^s} = \prod_{p\notin E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^{rs}}\Big)$$

et donc

$$\Big[\sum \frac{|f(n)|^{\alpha} h_E(n)}{n^s}\Big] \prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^{rs}}\Big) = \sum \frac{|f(n)|^{\alpha}}{n^s}.$$

Par suite, pour tout entier k,

$$\Big[\sum \frac{|f(n)|^{\alpha} h_E(n)}{n^s}\Big] \prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^{rs}}\Big) \le \sum \frac{|f(n)|^{\alpha}}{n^s}.$$

Il résulte de (19) que

$$\overline{\lim_{s\to 1}} \sum \frac{|f(n)|^{\alpha} h_E(n)}{n^s} \le A^{\alpha/\lambda}\Big[\prod_{p\in E} \Big(1 + \sum_{r=1}^{k} \frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\Big)\Big]^{-1}. \tag{24}$$

Soit $\alpha\in\,]1,\lambda]$ pour $s>1$, on a par l'inégalité de Hölder

$$[\zeta(s)]^{-1} \Big|\sum \frac{f(n)h_E(n)}{n^s}\Big| \le (\zeta(s))^{-1} \sum \frac{|f(n)|^{\alpha} h_E(n)}{n^s}\Big)^{1/\alpha} \Big((\zeta(s))^{-1} \sum \frac{h_E(n)}{n^s}\Big)^{1-1/\alpha}.$$

Il résulte alors de (23) et (24) que

$$B\Big(\prod_{p\in E}\Big|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\Big|\Big)^{-1}\le A^{1/\lambda}\Big(\prod_{p\in E}\Big(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\Big)\Big)^{-1/\alpha}\prod_{p\in E}(1-\tfrac{1}{p})^{1-\frac{1}{\alpha}}$$

puisque $\frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{h_E(n)}{n^s}$ tend vers $\prod_{p\in E}(1-\frac{1}{p})$

Ceci peut s'écrire :

$$\prod_{p\in E}\Big(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\Big)(1-\tfrac{1}{p})\le A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}\Big[\prod_{p\in E}\Big|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\Big|(1-\tfrac{1}{p})\Big]^{\alpha}.$$

Multipliant par $\prod_{p\in E}\exp(\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}\,f(p)}{p})$, il vient

$$\prod_{p\in E}\Big[\Big(1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\Big)(1-\tfrac{1}{p})\exp\Big(\alpha\,\frac{1-\mathrm{Re}\,f(p)}{p}\Big)\le$$

$$\le A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}\Big[\prod_{p\in E}\Big|1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^r}\Big|(1-\tfrac{1}{p})\exp\frac{1-\mathrm{Re}\,f(p)}{p}\Big]^{\alpha}.$$

Il résulte alors de (22) que

$$\prod_{p\in E}\Big[1+\sum_{r=1}^{k}\frac{|f(p^r)|^{\alpha}}{p^r}\Big](1-\tfrac{1}{p})\exp\Big(\alpha\frac{1-\mathrm{Re}\,f(p)}{p}\Big)$$

$$\le D(\alpha)$$

où $D(\alpha)=A^{\alpha/\lambda}B^{-\alpha}C^{\alpha}$.

II.10.

Prenons $k=1$ dans l'inégalité (I) du lemme 3.

Puisque $\log(1+u)\ge u-u^2$ si $u\ge -1/2$, on déduit

$$\sum_{p\in E}\frac{|f(p)|^{\alpha}-1+\alpha-\alpha\mathrm{Re}\,f(p)}{p}-\sum_{p\in E}\frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2}-\sum_{p\in E}\frac{1}{p^2}$$

$$\le \log D(\alpha),$$

pour tout $\alpha\in]1,\lambda]$.

Comme, d'après (21), $\sum\frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2}<\infty$ on voit que

$$\sum_{p\in E} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} \leq D_1(\alpha),$$

où

$$D_1(\alpha) = \log D(\alpha) + \sum \frac{|f(p)|^{2\alpha}}{p^2} + \sum \frac{1}{p^2}.$$

On remarquera que $D_1(\alpha)$ est une constante indépendante de E.

Pour $x>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la quantité $x^\alpha+\alpha-1-\alpha x \cos\theta$ étant positive d'après le lemme 2, il en résulte que

$$\sum \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty.$$

En particulier

$$\sum_{|f(p)|\leq 3/2} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty$$

et

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\alpha + \alpha - 1 - \alpha \operatorname{Re} f(p)}{p} < \infty.$$

Ceci entraîne d'après (14) et (15) que

$$\sum_{|f(p)|\leq 3/2} \frac{|f(p)-1|^2}{p} < \infty,$$

et

(25) $$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\alpha}{p} < \infty \quad \text{pour tout} \quad 1<\alpha<\lambda.$$

Il nous reste à montrer que

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty.$$

Reprenons l'inégalité (I) du lemme 3 avec $k = 1$, $E = \left\{p \leq y \text{ tel que } |f(p)|>3/2\right\}$ et $\alpha = \lambda$, ce qui donne

$$\prod_{p\in E} (1 + \frac{|f(p)|^\lambda}{p})(1-\frac{1}{p}) \exp(\lambda \frac{1-\operatorname{Re} f(p)}{p}) \leq D(\lambda).$$

Or, d'après (25), les séries

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|}{p}$$

sont convergentes, et donc le produit $\prod_{|f(p)|>3/2} (1-\frac{1}{p}) \exp(\lambda \frac{1-\mathrm{Re}\, f(p)}{p})$ est convergent. Il est non nul ayant tous ses facteurs non nuls et il en résulte que

$$\prod_{p \in E} (1 + \frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}) \leq D'(\lambda),$$

où

$$D'(\lambda) = D(\lambda)\Big[\prod_{|f(p)|>3/2} (1-\frac{1}{p}) \exp \lambda(\frac{1-\mathrm{Re}\, f(p)}{p})\Big]^{-1}.$$

Cela montre que

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^{\lambda}}{p} < +\infty$$

et achève la démonstration du théorème 3.

III. Démonstration du théorème 2.

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème 2. A fortiori f vérifie les hypothèses du théorème 3. Il nous suffit donc de prouver que la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$ converge et que $\sum_p \Big(\sum_{r\geq 2} \frac{|f(p^r)|^{\lambda}}{p^r}\Big) < \infty$.

III.1. Convergence de la série $\sum \frac{f(p)-1}{p}$.

Nous utilisons pour cela la méthode classique de Delange [4].

Il est immédiat que, pour $s > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p (1 + \sum_{r\geq 1} \frac{f(p^r) - f(p^{r-1})}{p^{rs}})$$

le produit étant absolument convergent pour $s > 1$. Ainsi

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)}{n^s} = \mathcal{H}(s) \exp \sum \frac{f(p)-1}{p^s}.$$

D'après l'hypothèse (7) on a

$$\lim_{s \to 1} \mathcal{H}(s) \exp \sum \frac{f(p)-1}{p^s} = M(f) \qquad \text{où} \quad M(f) \neq 0.$$

D'après le lemme 4, $\mathcal{H}(s)$ tend vers $\mathcal{H}(1) \neq 0$, quand $s \to 1$, et donc

$$\lim_{s \to 1} \exp \sum \frac{f(p)-1}{p^s} = \frac{M(f)}{\mathcal{H}(1)}.$$

Il en résulte que $\sum \frac{f(p)-1}{p^s}$ tend vers une limite finie quand s tend vers 1.

Posons $\alpha(u) = \sum_{p \leq e^u} \frac{f(p)-1}{p}$ et montrons que $\alpha(\frac{1}{s-1}) - \sum \frac{f(p)-1}{p^s}$ tend vers zéro quand s tend vers 1. Posons $\sigma = s-1$.

Pour $\sigma > 0$, on a :

$$\sum \frac{f(p)-1}{p^s} = \int_0^\infty e^{-t} \alpha(t/\sigma) dt.$$

Ainsi

$$\alpha(\frac{1}{\sigma}) - \sum \frac{f(p)-1}{p^s} = \int_0^\infty e^{-t}(\alpha(\frac{1}{\sigma}) - \alpha(\frac{t}{\sigma}))dt.$$

Il nous suffit alors de démontrer que, pour tout t, $e^{-t}\left[\alpha(\frac{1}{\sigma}) - \alpha(\frac{t}{\sigma})\right]$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro et que son module est majoré par une fonction de t intégrable sur $(0,\infty)$.

Soient y et z réels satisfaisant à $0 < y < z$. On a

$$|\alpha(y) - \alpha(z)| = \Big| \sum_{e^y < p \leq e^z} \frac{f(p)-1}{p} \Big|.$$

Notons $E_1 = E_1(y,z) = \left\{p \text{ tel que } e^y < p \leq e^z \text{ et } |f(p)| \leq 3/2\right\}$ et $E_2 = E_2(y,z) = \left\{p \text{ tel que } e^y < p \leq e^z \text{ et } |f(p)| > 3/2\right\}$.

On a : $$|\alpha(y) - \alpha(z)| \leq \sum_{p \in E_1} \frac{|f(p)-1|}{p} + \sum_{p \in E_2} \frac{|f(p)-1|}{p}.$$

Or

$$\sum_{p \in E_1} \frac{|f(p)-1|}{p} \leq \Big(\sum_{p \in E_1} \frac{|f(p)-1|^2}{p}\Big)\Big(\sum_{p \in E_1} \frac{1}{p}\Big)^{1/2}$$

$$\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)-1|}{p}\le 2\Big(\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}\Big)^{1/\lambda}\Big(\sum_{p\in E_2}\frac{1}{p}\Big)^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Remarquant alors que $\sum_{e^y<p\le e^z}\frac{1}{p}\le(\log\frac{z}{y}+C_5)$ où C_5 est une constante absolue, on en déduit que

$$|\alpha(y)-\alpha(z)|\le\Big(\sum_{p\in E_1}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\Big)^{1/2}(\log\frac{z}{y}+C_5)^{1/2}+2\Big(\sum_{p\in E_2}\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}\Big)^{1/\lambda}(\log\frac{z}{y}+c_5)^{1-\frac{1}{\lambda}}.$$

Ainsi grâce à (11) et (12) on voit que $|\alpha(\frac{1}{\sigma})-\alpha(\frac{t}{\sigma})|$ tend vers zéro quand σ tend vers zéro en tout point t, et que

$$|\alpha(\tfrac{1}{\sigma})-\alpha(\tfrac{t}{\sigma})|\le c_6(\log|t|+c_5)^{1/2}+c_7(\log|t|+c_6)^{1-\frac{1}{\lambda}},$$

où $c_6=\Big(\sum_{|f(p)|\le 3/2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\Big)^{1/2}$ et $c_7=\Big(\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}\Big)^{1/\lambda}$. Les fonctions $e^{-t}(\log|t|+c_5)^{1/2}$ et $e^{-t}(\log|t|+c_5)^{1-\frac{1}{\lambda}}$ étant intégrables sur $[0,+\infty[$, nous obtenons le résultat.

III.2. Convergence de la série $\sum_p\sum_{r\ge 2}\frac{|f(p^r)|^{\lambda}}{p^r}$.

Notons $f^*(p)=\mathrm{Inf}(|f(p)|,3/2)$.

Il est facile de voir que la convergence des séries

$$\sum\frac{f(p)-1}{p},\quad\sum_{|f(p)|\le 3/2}\frac{|f(p)-1|^2}{p}\quad\text{et}\quad\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^{\lambda}}{p}$$

entraîne la convergence des séries

$$\sum\frac{f^*(p)^{\lambda}-1}{p}\quad\text{et}\quad\sum\frac{f^*(p)-1}{p}.$$

En effet, puisque

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f^*(p)-1|}{p}=\frac{1}{2}\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{1}{p}<+\infty$$

et $\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)-1|}{p} \leq 2 \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < +\infty$ on obtient que la série

$\sum_{|f(p)|<3/2} \frac{f^*(p)-1}{p} = \sum_{|f(p)|<3/2} \frac{f(p)-1}{p}$ converge.

L'inégalité

$$c_1 |f(p)-1|^2 \leq |f(p)|^\lambda - 1 + \lambda(1-\mathrm{Re}\, f(p)) \leq c_2 |f(p)-1|^2$$

si $|f(p)| < 3/2$, entraîne alors la convergence de $\sum_{|f(p)|<3/2} \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p}$ et finalement de $\sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p}$ puisque

$$\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f^*(p)^\lambda - 1|}{p} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^\lambda - 1\right] \sum_{|f(p)|>3/2} \frac{1}{p} < \infty.$$

Mais, pour tout p et tout $s > 1$ on a

$$1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} \leq \frac{1}{\mu} \quad \text{où} \quad \mu = \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^\lambda\right)^{-1}.$$

Alors, étant donné k entier ≥ 2, on a pour tout p et tout $s > 1$,

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \geq 1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s} + \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \geq \left(1 + \frac{f^*(p)^\lambda}{p^s}\right)\left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right).$$

Comme, pour $x \geq -\frac{1}{2}$, $\log(1+x) \geq x - x^2$ on en déduit

$$\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right) \geq \left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right) \exp\left(\frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^s}\right).$$

Il en résulte que, pour $s > 1$, et y quelconque ≥ 2,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{1}^{\infty} \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s} \geq \left(\prod_{p \leq y} \left(1 + \mu \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right)\right) \exp\left(\sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s} - \sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^2}\right).$$

D'où

$$\sum_{p \leq y} \sum_{r=2}^{k} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}} \leq \frac{1}{\zeta(s)} \left(\sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \exp\left(\sum \frac{f^*(p)^{2\lambda} + 1}{p^2} - \sum \frac{f^*(p)^\lambda - 1}{p^s}\right).$$

Prenant les limites supérieures quand s tend vers 1 on obtient

$$\sum_{p\le y}\Big(\sum_{r=2}^{k}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\Big)\le\frac{A}{\mu}\exp\Big[\sum\frac{f^*(p)^{2\lambda}+1}{p^2}-\sum\frac{f^*(p)^\lambda-1}{p}\Big].$$

Faisons alors tendre k et y vers l'infini on a

$$\sum_{p}\Big(\sum_{r=2}^{\infty}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\Big)<\infty.$$

IV. Nous pouvons généraliser le théorème 2 ainsi :

THEOREME 4. Soit $\lambda>1$ et f une fonction multiplicative vérifiant :

(26) $$\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}<+\infty \text{ pour tout } s>1,$$

(27) $$\overline{\lim_{s\to 1}}\ \frac{1}{\zeta(s)}\sum\frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}<\infty,$$

il existe deux entiers ℓ,k tels que

(28) $$\lim_{s\to 1}\ \frac{1}{\zeta(s)}\sum_{n\equiv\ell(k)}\frac{f(n)}{n^s}$$

existe et est non nulle.

(29) Alors : Il existe un caractère de Dirichlet χ_1 tel que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :

$$\sum\frac{\chi_1(p)f(p)-1}{p},\qquad\sum_{|f(p)|\le 3/2}\frac{|\chi_1(p)f(p)-1|^2}{p},$$

$$\sum_{|f(p)|>3/2}\frac{|f(p)|^\lambda}{p},\qquad\sum_p\Big(\sum_{r\ge 2}\frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}\Big).$$

(30) De plus, pour tout p premier ne divisant pas (ℓ,k)

$$1+\sum_{k\ge 1}\frac{\chi_1(p)^k f(p^k)}{p^k}\ \text{ est non nulle.}$$

Réciproquement si les sommes ou séries ci-dessus sont finies ou convergentes alors f est limite périodique B^λ.

Notons $\ell = \ell' d$, $k = k' d$ avec $(k', \ell') = 1$.

Soient a et b les fonctions complètement multiplicatives définies par :

$$a(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \mid d \\ 0 \text{ si } p \nmid d \end{cases}, \qquad b(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \nmid d \\ 0 \text{ si } p \mid d \end{cases}.$$

On voit facilement que $n \equiv \ell(k)$ équivaut à : $n = n_1 d n_2$ avec $a(n_1 d) = b(n_2) = 1$, $(n_1 d, n_2) = 1$ et $n_1 n_2 \equiv \ell'(k')$.

Dès lors :

$$\sum_{n \equiv \ell(k)} \frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n_1} \frac{f(n_1 d)}{n_1^s d^s} a(n_1 d) \Big(\sum_{n_1 n_2 \equiv \ell'(k')} \frac{f(n_2) b(n_2)}{n_2^s} \Big)$$

$$(3\,1) \quad \sum_{n \equiv \ell(k)} \frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{\varphi(k')} \sum_{\chi \bmod k'} \overline{\chi(\ell')} \sum_{n_1} \frac{f(n_1 d) a(n_1 d) \chi(n_1)}{n_1^s d_1^s} \Big(\sum_{n_2} \frac{f(n_2) b(n_2) \chi(n_2)}{n_2^s} \Big).$$

Comme en II.3, on voit que

$$\sum_{r \geq 1} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty \text{ pour tout } p \text{ premier.}$$

Ainsi : $\sum_{p,r} \frac{|f(p^r)|\, a(p^r)}{p^r} = \sum_{p \mid d} \sum_{r \geq 1} \frac{|f(p^r)|}{p^r} < \infty$.

Il en résulte que :

$$\sum \frac{|f(n)|\, a(n)}{n} < \infty$$

et donc

$$(3\,2) \qquad \sum_{d \mid n} \frac{|f(n)\, a(n)|}{n} < +\infty.$$

Nous allons montrer qu'il existe un caractère χ_1 modulo k', et un seul, tel que

$$\lim_{s \to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n) \chi_1(n) b(n)}{n^s} \text{ existe et est non nulle.}$$

Ceci entraînera que la fonction $b \chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2, et donc, puisque $b(p) |\chi_1(p)| = 1$ sauf pour un nombre fini de nombres premiers, que les sommes ou séries suivantes sont finies ou convergentes :

$$\sum \frac{\chi_1(p) f(p) - 1}{p}, \qquad \sum_{|f(p)| \le 3/2} \frac{|\chi_1(p) f(p) - 1|^2}{p},$$

$$\sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p}, \qquad \sum_{|\chi_1(p)|\, b(p)=1} \; \sum_{r \ge 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r}.$$

De plus : $1 + \sum_{k \ge 1} \frac{f(p^k)\chi_1(p^k)}{p^k}$ est non nulle pour tout $p \mid d$. On montrera alors que

$$\sum_{|\chi_1(p)|\, b(p)=0} \; \sum_{r \ge 2} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < \infty .$$

Considérons les quantités :

$$\overline{\lim_{s \to 1}} \; \frac{1}{\zeta(s)} \left| \sum \frac{\chi(n) f(n) b(n)}{n^s} \right| .$$

Si elles sont nulles pour tout caractère χ modulo k', on déduirait de (31) et de (32) que :

$$\lim_{s \to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \equiv \ell(k)} \frac{f(n)}{n^s} = 0.$$

Il y a donc au moins un caractère χ_1 modulo k', pour lequel la quantité plus haut est non nulle. Supposons que ce soit encore vrai, pour un autre caractère χ_2 modulo k'. On aurait, en appliquant le théorème 3 aux fonctions $b\,\chi_1 f$ et $b\,\chi_2 f$,

$$\sum_{|f(p)| \le 3/2} \frac{|\chi_1(p) f(p) - 1|^2}{p} < \infty, \qquad \sum_{|f(p)| > 3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p},$$

$$\sum_{|f(p)| \le 3/2} \frac{|\chi_2(p) f(p) - 1|^2}{p} < \infty,$$

puisque, sauf pour un nombre fini de p, $|\chi_1(p)|\, b(p) = |\chi_2(p)|\, b(p) = 1$.

Ces inégalités impliquent à leur tour que

$$\sum_{1/2<|f(p)|\leq 3/2} \frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{|f(p)|<1/2} \frac{1}{p} < +\infty.$$

Comme, d'autre part, $\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{|f(p)|^\lambda}{p} < \infty$ entraîne que $\sum_{|f(p)|>3/2} \frac{1}{p} < \infty$, on voit que $\sum \frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p} < +\infty$.

Mais, si $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe m premier avec k' tel que $\chi_1(m) \neq \chi_2(m)$. Si $p \equiv m(k')$. Ainsi :

$|\chi_1(p) - \chi_2(p)|^2 = |\chi_1(m)-\chi_2(m)|^2 > 0$ et comme $\sum_{p\equiv m(k')} \frac{1}{p} = +\infty$, on a $\sum \frac{|\chi_1(p)-\chi_2(p)|^2}{p} = +\infty$, ce qui est contradictoire.

Ainsi pour tout χ modulo k' $\chi \neq \chi_1$,

$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{\chi(n)f(n)b(n)}{n^s} = 0.$$

L'hypothèse (28) et (31), (32), entraînent alors que :

(33)
$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{\chi_1(n)f(n)b(n)}{n^s}$$

existe et est non nulle et par conséquent la fonction $b\chi_1 f$ vérifie les hypothèses du théorème 2.

Montrons maintenant que

$$\sum_{\chi_1(p)b(p)=0} \sum_{r\geq 1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^r} < \infty.$$

Pour $s > 1$

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{f(n)\chi_1(n)b(n)}{n^s}\right| \leq \left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}\right)^{1/\lambda}.$$

Ainsi, (33) entraîne que

$$\lim_{s\to 1} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s} > 0.$$

Or,

$$\left(\frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}\right) \prod_{\chi_1(p)b(p)=0} \left(1+\sum_{r\geq 1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}$$

et donc

$$\overline{\lim_{s\to 1}} \prod_{\chi_1(p)b(p)=0} \left[1 + \sum_{r\geq 1} \frac{|f(p^r)|^\lambda}{p^{rs}}\right] \leq$$

$$\leq \left[\overline{\lim_{s\to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)|^\lambda}{n^s}\right]\left[\underline{\lim_{s\to 1}} \frac{1}{\zeta(s)} \sum \frac{|f(n)\chi_1(n)b(n)|^\lambda}{n^s}\right]^{-1},$$

quantité finie d'après (27).

On en déduit le résultat désiré.

Références

[1] H. DABOUSSI. "Caractérisation des fonctions multiplicatives $pp B^\lambda$ à spectre non vide" (à paraître).

[2] H. DABOUSSI - H. DELANGE. "On a theorem of P.D.T.A. Elliot on multiplicative functions". J. London Math. Soc. (2), 14 (1976), p. 345-356.

[3] H. DABOUSSI - H. DELANGE. "Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à 1". C.R. Acad. Sci. Paris t. 278, Série A, p. 657-660.

[4] H. DELANGE. "Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives". Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Sup. 78 (1961), p. 273-304.

[5] H. DELANGE. "Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives". C.R. Acad. Sci. Paris Série A, 281 (1975), p. 997-1000.

[ ] P.D.T.A. ELLIOT. "A mean value theorem for multiplicative functions". Proc. London Math. Soc. (3), 31 (1975), p. 418-438.

ON THE DENSITY OF DIRECT FACTORS OF THE SET OF POSITIVE INTEGERS

HÉDI DABOUSSI

1. *Introduction*

Let A and B be a pair of direct factors of $\mathbb{N}^*$, that is a pair of subsets A and B of $\mathbb{N}^*$ such that every integer $n \in \mathbb{N}^*$ can be written uniquely as $n = a.b$, with $a \in A$ and $b \in B$. Let α and β the arithmetical functions defined by:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in A \\ 0 & \text{if } n \notin A \end{cases}, \qquad \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in B \\ 0 & \text{if } n \notin B \end{cases}.$$

It is easy to see that A and B are a pair of direct factors if and only if:

$$(\alpha * \beta)(n) = 1 \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

(where $\alpha * \beta$ means the Dirichlet convolution of α and β).

We shall give a new and easier proof of the following:

THEOREM. (A) *If* $\sum_{b \in B} 1/b < \infty$, *then*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{a \leqslant x \\ a \in A}} 1$$

exists and is equal to $(\sum_{b \in B} 1/b)^{-1}$.

(B) *If* $\sum_{b \in B} 1/b = +\infty$, *then*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{a \in A \\ a \leqslant x}} 1$$

exists and is zero.

Remark. Part (A) of the theorem has been proved by Saffari [2], part (B) has been proved by Erdős–Saffari–Vaughan [1].

2. *Definitions*

Let $y \geqslant 2$ and let u_y, v_y be the completely multiplicative functions defined by:

$$u_y(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p > y \\ 0 & \text{if } p \leqslant y \end{cases}, \qquad v_y(p) = \begin{cases} 1 & \text{if } p \leqslant y \\ 0 & \text{if } p > y \end{cases}.$$

We have:

$$(v_y * u_y)(n) = 1 \quad \text{for every } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Received 13 July, 1977.

[J. LONDON MATH. SOC. (2), 19 (1979), 21–24]

It is easy to see that $\sum v_y(n)/n$ is finite and

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}u_y(n) \quad \text{exists and is equal to} \quad \left(\sum\frac{v_y(n)}{n}\right)^{-1}. \tag{3}$$

Let α_y be the arithmetical function defined by

$$\alpha_y(n) = (v_y.\alpha * u_y)(n) = \sum_{d|n} v_y(d)\,\alpha(d)\,u_y(n/d).$$

Set

$$A_y(x) = \sum_{n\leqslant x}\alpha_y(n) \qquad \text{and} \qquad A(x) = \sum_{n\leqslant x}\alpha(n).$$

3. *Main results*

LEMMA 1. *The limit*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}A_y(x)$$

exists for every $y \geqslant 2$, *and is equal to*

$$\left(\sum_{b\in B}\frac{v_y(b)}{b}\right)^{-1}.$$

Proof. As

$$\sum_n \frac{v_y(n)\,\alpha(n)}{n} \leqslant \sum_n \frac{v_y(n)}{n} < \infty \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}u_y(n)$$

exists, a classical argument shows that

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}A_y(x) = \lim_{x\to+\infty}\sum_{d\leqslant x}\frac{v_y(d)\,\alpha(d)}{d}\cdot\frac{d}{x}\sum_{n\leqslant x/d}u_y(n)$$

exists and is equal to:

$$\left(\sum\frac{v_y(n)}{n}\right)^{-1}\sum\frac{v_y(d)\,\alpha(d)}{d}. \tag{4}$$

Now, v_y being completely multiplicative, we obtain from (1)

$$v_y(n) = (v_y.\alpha * v_y.\beta)(n), \qquad \text{and so} \tag{5}$$

$$\sum\frac{v_y(n)}{n} = \sum\frac{v_y(n)\,\alpha(n)}{n}\cdot\sum\frac{v_y(n)\,\beta(n)}{n}. \tag{6}$$

We deduce the lemma from (4) and (6).

LEMMA 2. *For every* $x \geqslant 1$, $A(x) \leqslant A_y(x)$.

We first remark that:

$$\sum_{b \in B} \alpha(mb) \text{ is equal to 0 or 1 for every } m \in \mathbb{N}^*, \tag{7}$$

because there is at most one $b \in B$ such that $mb \in A$.

In fact, suppose that there exist $b \in B$ and $b' \in B$, $b \neq b'$, such that $mb \in A$ and $mb' \in A$; then we should have $mb = a \in A$ and $mb' = a' \in A$, and so $a.b' = a'.b$, which is impossible by the definition of direct factors.

Proof of Lemma 2. From (2) and (5), we see that, for every $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(v_y \alpha * v_y \beta * u_y)(n) = 1,$$

which can be written:

$$\sum_{\substack{abc=n \\ a \in A,\, b \in B}} v_y(a)\, v_y(b)\, u_y(c) = 1.$$

Thus:

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} \alpha(n) \sum_{\substack{a \in A,\, b \in B \\ abc=n}} v_y(a)\, v_y(b)\, u_y(c)$$

$$A(x) = \sum_{\substack{abc \leqslant x \\ a \in A,\, b \in B}} v_y(a)\, v_y(b)\, u_y(c)\, \alpha(abc)$$

$$A(x) = \sum_{\substack{a \leqslant x \\ a \in A}} v_y(a) \left(\sum_{c \leqslant x/a} u_y(c) \left(\sum_{\substack{b \leqslant x/ac \\ b \in B}} v_y(b)\, \alpha(abc) \right) \right).$$

Now,

$$\sum_{\substack{b \leqslant x/ac \\ b \in B}} v_y(b)\, \alpha(abc) \leqslant \sum_{b \in B} \alpha(abc) \leqslant 1$$

by the preceeding remark (7). So

$$A(x) \leqslant \sum_{\substack{a \leqslant x \\ a \in A}} v_y(a) \left(\sum_{c \leqslant x/a} u_y(c) \right) = A_y(x).$$

Proof of the theorem. From (1) we deduce that:

$$\sum_{\substack{b \in B \\ b \leqslant x}} A(x/b) = [x]$$

and therefore

$$A(x) + \sum_{\substack{b \in B \\ 1 < b \leqslant x}} A(x/b) = [x].$$

It follows from Lemma 2 that:

$$[x] - \sum_{\substack{b \in B \\ 1 < b \leqslant x}} A_y(x/b) \leqslant A(x) \leqslant A_y(x). \tag{8}$$

Now consider the case when $\sum_{b \in B} 1/b = +\infty$. Then Lemmas 1 and 2 yield

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{A(x)}{x} \leqslant \left(\sum_{b \in B} \frac{v_y(b)}{b} \right)^{-1},$$

and, by making $y \to \infty$, we have

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{A(x)}{x} = 0.$$

In the case $\sum_{b \in B} 1/b < \infty$, (8) and Lemma 1 give

$$1 - \left(\sum_{\substack{b \in B \\ 1 < b}} 1/b \right) \lim_{x \to +\infty} \frac{A_y(x)}{x} \leqslant \underline{\lim} \frac{A(x)}{x} \leqslant \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x)}{x} \leqslant \lim_{x \to \infty} \frac{A_y(x)}{x},$$

or

$$1 - \left(\sum_{b \in B} 1/b - 1 \right) \left(\sum_{b \in B} \frac{v_y(b)}{b} \right)^{-1} \leqslant \underline{\lim} \frac{A(x)}{x} \leqslant \overline{\lim} \frac{A(x)}{x} \leqslant \left(\sum_{b \in B} \frac{v_y(b)}{b} \right)^{-1}.$$

Making y tend to infinity, we obtain:

$$\left(\sum_{b \in B} 1/b \right)^{-1} \leqslant \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x)}{x} \leqslant \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x)}{x} \leqslant \left(\sum_{b \in B} 1/b \right)^{-1}.$$

References

1. P. Erdős, B. Saffari and R. C. Vaughan, " On the asymptotic density of sets of integers. II ", *J. London Math. Soc.* (2), 19 (1979), 17–20.
2. B. Saffari, " On the asymptotic density of sets of integers ", *J. London Math. Soc.* (2), 13 (1976), 475–485.

Département de Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay,
France.

ON THE LIMITING DISTRIBUTION OF NON NEGATIVE ADDITIVE FUNCTIONS.

H. DABOUSSI

Let A be a set of positive integers and let for $y \geq 2$

$$A(N) = \sum_{n \in A, n \leq N} 1.$$

Let f be an arithmetic function and define for $N \geq 2$

$$F_{N,A}(t) = \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n \leq N, n \in A \\ f(n) \leq t}} 1.$$

When A is fixed, or $A = \mathbb{N}^*$ we write simply $F_N(t)$.

We say that f has a limiting distribution on the set A if there exists a non-decreasing function F satisfying $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$ and, at every continuity point, t, of F, $F_N(t)$ tends, when $N \to +\infty$ to $F(t)$.

Erdös Wintner [2] showed that an additive function f (i.e. $f(m.n) = f(m) + f(n)$ for every coprime m and n) has a limiting distribution on the set of all integers if and only if the following series converge

$$\sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{f(p)}{p}, \quad \sum_{|f(p)| \leq 1} \frac{|f(p)|^2}{p}, \quad \sum_{|f(p)| > 1} \frac{1}{p}.$$

Katai [3] proved that if these series converge, then the additive function f has a limiting distribution on the set $\{p+1 \mid p \text{ is prime}\}$.

Elliott [1] proved that if $f(p) \geq 0$ for every prime p and $f(p^r) = f(p)$ if $r \geq 1$ and if f has a limiting distribution on the set $\{p+1\}$ these series converge.

We shall be concerned in the following with non negative additive functions (i.e. $f(p^r) \geq 0$ for every prime power p^r).

THEOREM. Let A be a set of positive integers satisfying

(i) for every $d \in \mathbb{N}^*$ $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{d \mid n,\ n\leq N \\ n\in A}} 1$ exists and is equal to $\frac{\omega(d)}{d}$.

(ii) ω is a multiplicative function satisfying $\sum_{p} \sum_{r\geq 2} \frac{\omega(p^r)}{p^r} < \infty$.

Let f be a non negative additive function satisfying

$$\sum_{0\leq f(p)\leq 1} \frac{f(p)\,\omega(p)}{p} + \sum_{1<f(p)} \frac{\omega(p)}{p} = +\infty$$

then f has not a limiting distribution on the set A and more precisely

$$\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = 0 \quad \text{for every } t.$$

COROLLARY 1. If $A = \{p+1\}$ and if f is a non negative additive function satisfying $\sum_{0\leq f(p)\leq 1} \frac{f(p)}{p} = +\infty$ or $\sum_{1<f(p)} \frac{1}{p} = \infty$ then f has not a limiting distribution on A and $\lim_{N\to\infty} F_N(t) = 0$ for every t.

This corollary contains Elliott's result.

COROLLARY 2. Let A be a set of positive integers such that

$$\underline{\lim} \frac{A(N)}{N} > 0.$$

If f is a non negative additive function and if $\sum_{0\leq f(p)\leq 1} \frac{f(p)}{p} = +\infty$ or $\sum_{1<f(p)} \frac{1}{p} = \infty$ then f has not a limiting distribution on A and $\lim_{N\to\infty} F_{N,A}(t) = 0$.

Proof of the corollaries.

Corollary 1 is immediate by remarking that for every $d \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{p+1\leq N \\ d \mid p+1}} 1$ tends to $\frac{1}{\varphi(d)}$ that is $\omega(d) = \frac{d}{\varphi(d)}$ where φ is Euler's function.

For the proof of corollary 2 let $F_{N,A}(t) = \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N,\, n\in A \\ f(n)\le t}} 1$ and $F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{n\le N \\ f(n)\le t}}$. From the theorem with $A = \mathbf{N}^*$ we see that $\lim_{N\to\infty} F_N(t) = 0$. As $F_{N,A}(t) \le \frac{N}{A(N)} F_N(t)$ we get $\lim F_{N,A}(t) = 0$ for every t.

Proof of the theorem.

We first remark that $\sum_p \frac{\omega(p)(1-e^{-f(p)})}{p} = \infty$ this is easily deduced from the following inequalities :

$$(1-1/e)t \le 1-e^{-t} \le t \qquad \text{if } 0 \le t \le 1$$

$$(1-1/e) \le 1-e^{-t} \le 1 \qquad \text{if } t > 1$$

and the hypothese on f.

For $y \ge 2$, define the non negative additive function f_y by

$$f_y(p^r) = \begin{cases} f(p^r) & \text{if } p^r \le y \\ 0 & \text{if } p^r > y \end{cases} \quad \text{for every prime power } p^r.$$

Let $g_y = e^{-f_y} * \mu$ where μ is the Mobius function. Clearly g_y is multiplicative, $g_y(p^r) = e^{-f_y(p^r)} - e^{-f_y(p^{r-1})}$ which shows that $|g_y(p^r)| \le 2$ and that $g_y(n) = 0$ except on a finite set of integers S_y, say :

Let $\Pi_y = \sum \frac{g_y(n)}{n} \omega(n)$ then one sees easily that

$$\Pi_y = \prod_{p\le y} \Big(1 - \frac{(1-e^{-f(p)})\omega(p)}{p} + \sum_{r\ge 2} \frac{g_y(p^r)\omega(p^r)}{p^r}\Big).$$

As $\sum_p \frac{(1-e^{-f(p)})\omega(p)}{p} = +\infty$ and $\sum_p \sum_{r\ge 2} \frac{\omega(p^r)}{p^r} < \infty$ we get $\lim_{y\to\infty} \Pi_y = 0$.

Now, as $e^{-f_y(n)} = \sum_{d\mid n} g_y(d)$ we have

$$\frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} e^{-f_y(n)} = \sum_{d\in S_y} g_y(d) \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A,\, d\mid n}} 1$$

and so $$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} e^{-fy(n)} = \sum \frac{gy(d)\omega(d)}{d} = \Pi y \ .$$

Remarking that

$$e^{-f(n)} = \prod_{p^r \| n} e^{-f(p^r)} \le \prod_{\substack{p^r \| n \\ p^r \le y}} e^{-f(p^r)} = e^{-fy(n)}$$

we obtain

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} e^{-f(n)} \le \Pi y$$

and by taking the limit when $y \to \infty$ we get

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} e^{-f(n)} = 0.$$

As

$$\frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} e^{-f(n)} = \int_0^\infty e^{-x}\, dF_N(x)$$

and for every t

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dF_N(x) \ge e^{-t} F_N(t)$$

we obtain

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} F_N(t) = 0$$

and so the theorem.

REMARKS.

1. In our proof we have been guided by the following and easily proved result :

The non negative function f has a limiting distribution on a set A if and only if $\int_0^\infty e^{-at}\, dF_N(t)$ tends, when N tends to infinity, to a function $G(a)$ for every $a \ge 0$ and G is continuous at $a=0$.

2. If A satisfies the hypotheses (i) and (ii) of the theorem and if h is a positive multiplicative function such that $|h(n)| \le 1$ for every n and $\sum_p \omega(p) \frac{(1-h(p))}{p} = +\infty$

then $F_N(t) = \frac{1}{A(N)} \sum_{n\le N,\, h(n)\le t} 1$ tends to

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \le 0 \\ 1 & \text{if } t > 0 \end{cases} \quad \text{for every } t,$$

so h has a limiting distribution on the set A.

In fact we need only to show that for every integer $k \ge 1$ $\overline{\lim} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} (h(n))^k = 0$.

Define for $y \ge 2$ the multiplicative function hy by

$$hy(p^r) = \begin{cases} h(p^r) & \text{if } p^r \le y \\ 1 & \text{if } p^r > y \end{cases}$$

then $h(n) \le hy(n)$ and

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{A(N)} \sum_{\substack{n\le N \\ n\in A}} (hy(n))^k = \prod_{p\le y} \left(1 - \frac{(1-h^k(p))\omega(p)}{p} + \sum_{r\ge 2} \frac{hy^k(p^r) - hy^k(p^{r-1})}{p^r}\omega(p^r)\right).$$

The product tends to zero when y tends to infinity and so $\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{1}{A(N)} \sum_{n\le N} h(n)^k = 0$.

References

[1] P.D.T.A. ELLIOTT. On the limiting distribution of f(p+1) for non negative additive functions. Acta Arithmetica XXV (1974) p. 259-264.

[2] P. ERDÖS & A. WINTNER. Additive arithmetical functions and statistical independence. Amer. J. Math. 61 (1939) p. 713-721.

[3] I. KATAÏ. On the distribution of arithmetical functions on the set of primes plus one. Compositio Math. 19 (1968) p. 278-289.