Annales de l'université de Grenoble

Marcel Brelot

Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sousmédianes

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 75-90

<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__75_0>

FONCTIONS SOUSHARMONIQUES, PRESQUE SOUSHARMONIQUES OU SOUSMÉDIANES

par M. Marcel BRELOT.

I. — INTRODUCTION

1. Les premières notions sur les fonctions sousharmoniques de F. Riesz, étudiées dans des travaux disparates (1), demandent une rédaction d'ensemble simplifiée et concise que je vais essayer de faire ici pour l'essentiel, avec divers compléments qu'apporte naturellement un examen approfondi et d'après des cours que j'ai faits ces dernières années. Ce sera en somme un chapitre sur les moyennes sphériques où l'on s'attachera à séparer les rôles de la moyenne et de la semi-continuité en examinant particulièrement la convergence lorsqu'on abandonne la semi-continuité (théorie des fonctions presque sousharmoniques). Ces résultats mettront d'autant mieux en valeur les propriétés plus précises des fonctions sousharmoniques, liées comme on sait à la théorie du potentiel.

2. On se placera dans l'espace euclidien R_τ (à $\tau \geqslant 2$ dim.) mais on adjoindra un point-frontière $\mathcal{R}_\tau$ à l'infini en un sens évident qui rend compact l'ensemble total $\overline{R}_\tau$ (2) ; on notera $\overline{E}$, $\overset{*}{E}$ l'adhérence et la frontière d'un ensemble E dans $\overline{R}_\tau$, et D^r_M l'ensemble des points

(1) Voir une bibliographie dans T. Radò « Subharmonic functions » Ergebnisse..., Bd. 5 Heft I (Berlin, 1937), ce qui nous dispensera des références jusqu'à cette date. On trouvera quelques indications plus récentes dans « Beckenbach ; On almost subharmonic functions », Univ. Nac. Tucuman A4 p. 243-254 (1944).

(2) Pour ne pas alourdir l'exposé, $\mathcal{R}_\tau$ n'interviendra que comme point-frontière possible. Pour une théorie générale dans $\overline{R}_\tau$, voir mon article des Annales de l'École normale supérieure, t. 61, p. 301-332 (1944) noté (A. N.).

P tels que $MP < r$. On introduira diverses mesures de Lebesgue (avec l'abréviation « p. p. » de presque partout) comme la mesure-v dans R_τ, la mesure-σ sur $\overset{*}{D}{}^r_{M_0}$. On notera v_τ et σ_τ les mesures v et σ de $D^1_{M_0}$ et $\overset{*}{D}{}^1_{M_0}$ (1).

On considérera des fonctions réelles (finies ou non) dans Ω ouvert de R_τ; on notera (si elles existent comme intégrales de Lebesgue, même au sens large (2)) $\mathcal{A}^r_f(M)$, $\mathcal{M}^r_f(M)$ les moyennes (spatiale et périphérique) de f sur D^r_M, $\overset{*}{D}{}^r_M$ dont l'obtention, si $\overline{D}{}^r_M \subset \Omega$, est dite *médiation* (spatiale ou périphérique) de f.

On sait que si f est sommable-v dans $D^R_{M_0}$, sa trace sur $\overset{*}{D}{}^r_{M_0}$ est sommable-σ, presque partout en $r < R$ et que

$$(1) \quad \mathcal{A}^R_f(M_0) = \frac{\tau}{R^\tau}\int_0^R \mathcal{M}^r_f(M_0) r^{\tau-1}\,dr = \tau\int_0^1 \mathcal{M}^{Rt}_f(M_0) t^{\tau-1}\,dt.$$

On sait aussi que si f est sommable-v localement (c'est-à-dire sur tout compact dans Ω), $\mathcal{A}^r_f(M)$ tend vers $f(M)$ presque partout pour $r \to 0$ et que pour r fixé, et à distance de la frontière plus grande que r, $\mathcal{A}^r_f(M)$ est finie continue de M ; si f est finie continue, $\mathcal{A}^r_f(M)$ admet des dérivées continues et si f admet des dérivées continues d'ordre n, de même $\mathcal{A}^r_f$ à l'ordre $(n+1)$. On dira que f est *régulière* si elle admet des dérivées secondes finies continues.

3. Enfin soulignons que si dans Ω, f est *semi-continue supérieurement et s'il n'y a pas de maximum sans constance au voisinage :*

a) f ne peut atteindre sa borne supérieure α que dans un domaine composant où elle est constante.

Car les ensembles où $f < \alpha$, $f = \alpha$ sont ouverts.

De sorte que si $f \leqslant 0$ dans un domaine, elle y est partout nulle ou partout < 0.

b) La borne supérieure est égale à celle des limites supérieures aux points-frontière (pris dans $\underline{\overline{R}}_\tau$) (principe du maximum).

c) Sur tout compact K de Ω, la borne supérieure vaut celle sur $\overset{*}{K}$.

(1) Rappelons que $v_\tau = \dfrac{\pi^{\tau/2}}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}+1\right)}$, $\sigma_\tau = \tau v_\tau = \dfrac{2\pi^{\tau/2}}{\Gamma\left(\frac{\tau}{2}\right)}$.

(2) C'est-à-dire que f^+ et f^- admettent des intégrales finies ou non, mais non simultanément infinies (sommabilité au sens large).

II. — NOTIONS SUR LES FONCTIONS HARMONIQUES

4. — Rappelons l'indispensable en le démontrant sommairement.

Une fonction $u(\mathrm{M})$ dans Ω ouvert, réelle finie continue, sera dite harmonique si elle est invariante par toute médiation périphérique, ou, ce qui est équivalent, spatiale.

Cela entraîne, d'une part l'impossibilité d'un extremum sans constance au voisinage et ses conséquences (principe du maximum, non multiplicité de la solution du problème de Dirichlet pour données-frontière finies), d'autre part, l'existence des dérivées successives continues, d'un flux nul à travers tout $\overset{*}{\mathrm{D}}{}^r_{\mathrm{M}_0}(\overline{\mathrm{D}}{}^r_{\mathrm{M}_0} \subset \Omega)$ et d'un laplacien nul ; inversement l'existence d'un gradient continu et la propriété du flux [1] ou celle locale de régularité avec nullité du laplacien entraînent l'harmonicité. Cette condition différentielle montre par exemple que les fonctions harmoniques, fonctions de $r = \mathrm{OM}$ seul, sont les fonctions linéaires en $h(r)$

$$\left[h(r) = \frac{1}{r^{\tau-2}}\,(\tau > 2) \qquad \text{ou} \qquad \log\frac{1}{r}\,(\tau = 2)\right].$$

Quelle que soit la manière d'introduire l'expression de l'INTÉGRALE de POISSON :

$$(2) \qquad \mathrm{I}_f(\mathrm{M}) = \frac{1}{\alpha_\tau \mathrm{R}} \int_{\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{O}}} \frac{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2}{\overline{\mathrm{MP}}^\tau} f(\mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} \qquad (\mathrm{M} \in \mathrm{D}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{O}})$$

il suffit d'en connaître les propriétés fondamentales qui s'obtiennent très simplement comme suit. Elle a un sens dès que f est sommable-σ au sens large sur $\overset{*}{\mathrm{D}}{}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{O}}$ et elle vaut partout $\mathrm{I}_f(\mathrm{O})$ ou $\mathcal{M}^r_f(\mathrm{O})$ quand ceci est infini.

Supposons f sommable. Il est élémentaire que $\dfrac{\mathrm{R}^2 - \overline{\mathrm{OM}}^2}{\overline{\mathrm{MP}}^\tau}$ est harmonique de M hors P donc aussi I_f dans $\mathrm{D}^{\mathrm{R}}_{\mathrm{O}}$. De plus si $f = 1$, I_f est fonction de OM seul et puisque bornée au voisinage de O,

[1] C'est avec le flux qu'on étudie facilement la transformation de Kelvin (M, M' inverses de pôle O, $\mathrm{OM}\,.\,\mathrm{OM}' = 1$, $v(\mathrm{M}') = \dfrac{u(\mathrm{M})}{\mathrm{OM}'^{\tau-2}}$) qui conduit aisément, selon une idée de Darboux, à la formule de Poisson.

constante et évidemment égale à 1. Il s'ensuit aisément en tout Q de $\overset{*}{D}{}^{R}_{O}$:

$$(3)\quad \text{lim inf. (en mesure-}\sigma\text{) de } f \text{ en } Q \leqslant \lim_{\substack{M \in D^{R}_{O} \\ M \to Q}} {}^{\text{inf.}}_{\text{sup.}}\ I_f(M) \leqslant$$
$$\leqslant \text{lim. sup. (en mesure-}\sigma\text{) de } f \text{ en } Q.$$

Montrons l'inégalité de droite. Elle est évidente si le membre de droite vaut $+\infty$.

Sinon soit Λ fini, (strictement) plus grand. Il suffira de montrer que

$$\limsup_{M \to Q} I_f \leqslant \Lambda \qquad \text{ou} \qquad \limsup_{M \to Q} (I_f - \Lambda) \leqslant 0$$

ou encore
$$\limsup_{M \to Q} I_{f-\Lambda} \leqslant 0.$$

Or soit sur $\overset{*}{D}{}^{R}_{O}$ un voisinage γ de Q sur lequel $f \leqslant \Lambda$ presque partout. Décomposons l'intégrale de $I_{f-\Lambda}$ en une partie relative à $\overset{*}{D}{}^{R}_{O} - \gamma$ et une relative à γ. La première est au voisinage de Q dans l'espace une fonction continue nulle en Q ; la seconde est $\leqslant 0$ dans D^{R}_{O} d'où la conclusion.

D'après cela toute fonction harmonique u vaut son intégrale de Poisson (pour $\overline{D}{}^{R}_{O} \subset \Omega$ et $f = u$) d'où des conséquences comme l'analyticité.

III. — FONCTIONS SOUSHARMONIQUES

5. — *Définition.* — Une fonction réelle u dans Ω ouvert de R_τ y sera dite sousharmonique au sens large ou hypoharmonique, si

1) u est en tout point finie ou vaut $-\infty$,

2) u est semi-continue supérieurement,

3) u est majorée par toute médiation périphérique,

c'est-à-dire que $u(M_0) \leqslant \mathcal{M}^{r}_{u}(M_0)$ pour tout $D^{r}_{M_0} \subset \Omega$, ce qui entraîne l'impossibilité d'un maximum sans constance au voisinage avec ses conséquences et aussi la propriété suivante justifiant la dénomination :

H) Si h est harmonique dans Ω et si en tout point-frontière, lim. sup. $(u - h) \leqslant 0$, alors $u \leqslant h$.

Un passage à la limite avec φ_n finie continue sur $\overset{*}{D}{}^{r}_{M_0}$ décroissant vers u montre alors que u est majorée par son intégrale I_u pour $\overline{D}{}^{r}_{M_0} \subset \Omega$.

Une fonction u sera dite surharmonique au sens large ou hyperharmonique si $(-u)$ est hypoharmonique. Les fonctions harmoniques seront donc les fonctions à la fois hypo et hyperharmoniques.

6. — *Critère général.* — En intégrant le développement limité au 2ᵉ ordre d'une fonction f régulière, il vient facilement :

$$\Delta f = \lim_{r \to 0} \frac{2\tau}{r^2}[\mathcal{M}_f^r(M_0) - f(M_0)],$$

ce qui conduit à introduire pour f quelconque, plus généralement que cette limite, les lim. inf. et sup. $\underline{P}_f$, $\overline{P}_f$ de l'expression lorsque celle-ci a un sens.

Théorème I (*D'après Blaschke, Privaloff*). — *On obtient un critère général de hypoharmonicité en remplaçant dans la définition la condition* (3) *par celle qu'en tout point où u est finie,* $\overline{P}_u \geqslant 0$ (critère local).

La nécessité est évidente. La suffisance résultera de ce que u est majorée, comme on va voir, par l'intégrale de Poisson relative à $D_{M_0}^r$ et φ finie continue majorant u sur $\overset{*}{D}{}_{M_0}^r$. Introduisons

$$v = u - I_\varphi + \varepsilon w \qquad (\varepsilon > 0)$$

où w est une fonction auxiliaire (comme $\overline{M_0M}^2 - R^2$) finie continue dans $D_{M_0}^r$, $\leqslant 0$ à la frontière, et admettant un $\overline{P}_w > 0$ à l'intérieur. Alors $\overline{P}_v > 0$ dans $D_{M_0}^R$ donc v n'y admet pas de maximum d'où $v \leqslant 0$ puis $u \leqslant I_\varphi$.

On aurait un *critère analogue* en remplaçant $\mathcal{M}_f^r$ par $\mathcal{A}_f^r$ et $\overline{P}_u$ par

$$\overline{S}_u = \limsup_{r \to 0} \frac{2(\tau + 2)}{r^2}[A_u^r(M_0) - u(M_0)]$$

qui vaut aussi le laplacien en cas régulier. Mais le critère est moins bon car $\overline{S}_u \leqslant \overline{P}_u$.

Ces critères permettent de modifier diversement la condition (3) en particulier avec la médiation spatiale et en supposant seulement avec l'une ou l'autre des médiations, r assez petit pour chaque M_0 ; ils fournissent des critères locaux d'harmonicité et lorsque u est régulier, ils équivalent à $\Delta u \geqslant 0$, ce qui par les formules de Green se traduit en conditions sur le flux.

7. — *Sousharmonicité.* — Théorème 2. — *Une fonction hypoharmonique dans un domaine* ω *vaut partout* $-\infty$ *ou est finie presque partout; dans ce dernier cas, toute moyenne* $\mathcal{M}_u^r(M_0)$, $\mathcal{A}_u^r(M_0)$ *pour* $\overline{D}^r_{M_0} \subset \omega$ (1) *est finie, autrement dit u est sommable-*σ *sur* $\overset{*}{D}{}^r_{M_0}$ *et sommable-v sur* $D^r_{M_0}$ *ou tout compact contenu.*

En effet les points pour un voisinage duquel u est sommable forment un ouvert. De même les autres car si $\mathcal{A}_u^r(M_0) = -\infty$ quel que soit r, $\mathcal{A}_u^\varrho(M)$ vaut $-\infty$ si $M_0 \in D^\varrho_M$ et u vaudra $-\infty$ au voisinage de M_0.

Ainsi ou bien $u = -\infty$ dans ω, ou bien u est sommable-v au voisinage de tout point et par suite est finie presque partout. Dans ce dernier cas, pour tout $\overline{D}^r_{M_0} < \omega$, $\mathcal{M}_u^r(M_0)$ est fini, sinon dans $D^r_{M_0}$, l'intégrale de Poisson pour u vaudrait $-\infty$ donc aussi u qu'elle majore.

Définition. — *u hypoharmonique sera dite sousharmonique si elle est finie presque partout. De même pour surharmonique.*

Rappelons les opérations élémentaires conservant la sousharmonicité comme celle donnant l'enveloppe supérieure ou la somme de n fonctions et la transformation de Kelvin, et les exemples classiques de fonctions sousharmoniques que sont les potentiels de masses < 0 et les modules ou logarithmes de modules des fonctions homolomorphes.

8. — *Quelques propriétés des moyennes.*

Théorème 3. — *Si u est hypoharmonique dans* Ω, $\mathcal{M}_u^r(M_0)$ et $\mathcal{M}_u^r(M_0)$ *sont croissantes* (2) *de* r ($\overline{D}^r_{M_0} \subset \Omega$).

Car le remplacement de u par son intégrale de Poisson dans $D^r_{M_0}$ donne une fonction hypoharmonique, majorée par l'intégrale de Poisson dans $D^R_{M_0}$ ($r < R$) d'où la croissance de $\mathcal{M}_u^r$ qui entraîne alors celle de $\mathcal{A}_u^r$ d'ailleurs $\leqslant \mathcal{M}_u^r$.

Si u est régulière la croissance de $\mathcal{M}_u^r$ est d'ailleurs évidente comme équivalant à ce que le flux sortant à travers $\overset{*}{D}{}^r_{M_0}$ soit $\geqslant 0$.

D'autre part, on sait que la sommabilité-v de u entraîne que

(1) Il suffit en fait que $\overset{*}{D}{}^r_{M_0}$ seulement soit dans Ω ce qui rentre d'ailleurs dans une propriété bien plus générale obtenue en utilisant la représentation par un potentiel v à une fonction harmonique près et faisant une interversion d'intégration dans $\int v\,d\mu$.

(2) Les notions de croissance et décroissance seront toujours prises au sens large (constance incluse).

$\mathcal{M}_u^r(\mathrm{M}) \underset{(r \to 0)}{\longrightarrow} u$ presque partout. Mais on a de plus, indépendamment du théorème précédent :

Théorème 4. — *Si u est hypoharmonique dans Ω et $\mathrm{M}_0 \in \Omega$, $\mathcal{M}_u^r(\mathrm{M}_0)$ et $\mathcal{A}_u(\mathrm{M}_0)$ tendent vers $u(\mathrm{M}_0)$ pour $r \to 0$.*

Car si λ fini $> u(\mathrm{M}_0)$, il majore u dans $\mathrm{D}^{\rho}_{\mathrm{M}_0}$ pour ρ assez petit d'où

$$u(\mathrm{M}_0) \leqslant \frac{\mathcal{M}_u^r(\mathrm{M}_0)}{\mathcal{A}_u(\mathrm{M}_0)} \leqslant \lambda \qquad \text{pour } r \leqslant \rho \qquad \text{et le résultat.}$$

Corollaires. — 1) Une fonction hypoharmonique est déterminée par ses valeurs presque partout ;

2) Si $u(\mathrm{M})$ est hypoharmonique :

$$(4)\left\{\begin{aligned} u(\mathrm{M}_0) &= \lim_{r \to 0}.\ (\text{max. en mesure-}v \text{ de } u \text{ sur } \mathrm{D}^r_{\mathrm{M}_0}) \\ &\qquad = \lim_{\mathrm{M} \to \mathrm{M}_0}.\ \text{sup. en mes. de } u = \lim_{\mathrm{M} \neq \mathrm{M}_0,\ \mathrm{M} \to \mathrm{M}_0}.\ \text{sup. } u, \\ u(\mathrm{M}_0) &= \lim_{r \to 0}.\ (\text{max. en mesure-}\sigma \text{ de } u \text{ sur } \overset{*}{\mathrm{D}}{}^r_{\mathrm{M}_0}), \end{aligned}\right.$$

car

$$\mathcal{A}_u \leqslant \text{max. en mesure sur } \mathrm{D}^r_{\mathrm{M}_0},$$
$$\mathcal{M}_u^r \leqslant \text{max. en mesure sur } \overset{*}{\mathrm{D}}{}^r_{\mathrm{M}_0},$$

alors que la semi-continuité supérieure exige que les quantités à droite aient des limites supérieures (pour $r \to 0$) au plus égales à $u(\mathrm{M}_0)$ (1).

Théorème 5. — *Si u est sousharmonique dans Ω, $\mathcal{A}_u(\mathrm{M})$ est pour r fixé, sousharmonique (finie continue) à distance $< r$ de la frontière et tend vers u pour $r \to 0$. Par p médiations successives à rayon r, on obtient $\mathrm{A}_p(\mathrm{M})$ sousharmonique, pourvue de dérivées continues d'ordre $p-1$, tendant vers u pour $r \to 0$. D'ailleurs A_p comme $\mathcal{A}_u^r$ est croissante de r.*

La sousharmonicité de $\mathcal{A}_u^r$ vient de sa continuité et de l'inégalité des moyennes qui se déduit de celle de u par une permutation d'intégrations. Les propriétés limites (pour $r \to 0$) s'obtiennent comme pour $\mathcal{A}_u^r$ (théorème 3). Les propriétés de croissance sont indépendantes et viennent de la croissance de $\mathcal{A}_u^r$ (théorème 2).

Ce théorème d'approximation bien connu (de F. Riesz), permet (sans que ce soit d'ailleurs la meilleure manière) de ramener cer-

(1) On peut en tirer d'intéressantes conséquences, comme celle d'une « quasi-limite » en M_0 et cette étude conduit à celle des ensembles « effilés ». Voir mon opuscule sur « l'étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point ». *Act. sc. et ind.* N° 139 (1934) et mes articles : *Jour. de Math.*, t. 19 (1940) et *Bull. Sc. Math.*, t. 68 (1944).

taines questions au cas, de technique élémentaire, où les fonctions sont régulières. C'est ainsi qu'on retrouvera les propriétés de croissance et qu'on peut même, sans utiliser comme F. Riesz le problème de Dirichlet pour une couronne, démontrer son théorème de convexité qui a tant de conséquences et que voici :

THÉORÈME 6. — *Si u est sousharmonique dans le domaine* $(R_1 < M_0M < R_2)$, $\mathcal{M}_u^r(M_0)$ *est fonction convexe de* $h(r) = t$ *dans l'intervalle* $[h(r_2), h(r_1)]$ (1).

Lorsque $\overline{D}_{M_0}^r \subset \Omega$, on en déduit, grâce à la seconde expression (1), la convexité de $\mathcal{A}_u^r$ et on remarque aussi que les résultats de convexité entraînent ceux de croissance.

9. — *Inégalités.* — Voici sur les médiantes spatiales des remarques simples peut-être nouvelles et d'abord des limitations analogues à celles de Harnack.

Soit u sousharmonique < 0 dans Ω et $\overline{D}_O^r \subset \overline{D}_M^R \subset \Omega$.

Alors $\int_{D_M} u dv \leqslant \int_{D_r} u dv$ d'où par la croissance en r de $\mathcal{A}_u^r$

$$u(M) \leqslant \mathcal{A}_u^r(M) \leqslant \mathcal{A}_u^R(M) \leqslant \left(\frac{r}{R}\right)^\tau \mathcal{A}_u^r(O). \tag{5}$$

D'où aisément :

THÉORÈME 7. — *Soit u sousharmonique < 0 dans Ω*

a) *Si* $\overline{D}_{M'}^{r+M'M''}$ et $\overline{D}_{M''}^{r+M'M''}$ *sont contenues dans* Ω

$$\left(\frac{r}{r+M'M''}\right)^\tau \leqslant \frac{\mathcal{A}_u^r(M')}{\mathcal{A}_u^r(M'')} \leqslant \left(\frac{r+M'M''}{r}\right)^\tau. \tag{6}$$

b) *Si* $\overline{D}_{M'}^r$ et $\overline{D}_{M''}^r$ *sont contenus dans* Ω *et* $M'M'' < r$

$$\left(\frac{r-M'M''}{r}\right)^\tau \leqslant \frac{\mathcal{A}_u^r(M')}{\mathcal{A}_u^r(M'')} \leqslant \left(\frac{r}{r-M'M''}\right)^\tau. \tag{7}$$

On en déduit par un raisonnement facile (bien connu dans le cas harmonique) :

Corollaire. — Soit dans le domaine ω un compact K *à distance* $> r$ *de* $\overset{*}{\omega}$. *Il existe λ fixe > 1 tel que pour toute fonction sousharmonique*

(1) Inversement une fonction convexe de $h(OM)$ est sousharmonique en M. Voir là-dessus et sur les diverses extensions des théorèmes directs et réciproques, le fascicule de Radò (*loc. cit.*).

$u < 0$ *dans* ω *on ait quels que soient* M′M″ *de* K,

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{\mathcal{A}_u(M')}{\mathcal{A}_u^r(M'')} < \lambda. \tag{8}$$

Remarque. — Si u est sousharmonique et bornée supérieurement dans R_τ, $\mathcal{A}_u^r(M)$ croissante en r, a d'après (5) pour $r \to \infty$ une limite finie qui est constante [1] ce qui contient et généralise un théorème classique de Picard sur les fonctions harmoniques.

10. — Il est bien connu qu'une famille de fonctions mesurables dans Ω, comprises entre deux fonctions localement sommables admet des $\mathcal{A}_u^r$ (r fixé) également continues en chaque point M_0 (à distance de la frontière $> r$). On a ici, de plus, grâce aux inégalités précédentes :

Théorème 8. — *Soit une famille de fonctions u hypoharmoniques dans* Ω, *bornées supérieurement dans leur ensemble sur chaque compact* K *contenu. Alors, en tout point* M_0 *(à distance de la frontière* $> r$ *fixé), les* $\mathcal{A}_u^r$ *sont également continues relativement à la structure uniforme de la droite numérique achevée* [2], c'est-à-dire, par exemple, que les $e^{\mathcal{A}_u}$ sont également continues au sens ordinaire (de la structure uniforme additive de la droite).

M_0 étant fixé, on se ramène au cas où les u sont sousharmoniques et < 0 dans un $D_{M_0}^{\rho}$ fixé. Etudions

$$\Delta = \left|e^{\mathcal{A}_u^r(M)} - e^{\mathcal{A}_u^r(M_0)}\right| \text{ pour } MM_0 < \rho - r.$$

Si $\mathcal{A}_u^r(M_0) < \alpha < 0$, on a pour MM_0 assez petit, indépendamment de u

$$\mathcal{A}_u^r(M) < \frac{1}{2}\mathcal{A}_u^r(M_0) \qquad \text{d'où} \qquad \Delta < e^{\frac{\alpha}{2}}$$

ce qui est moindre que ε donné à l'avance si α est convenablement choisi.

α étant ainsi fixé, supposons $\mathcal{A}_u^r(M_0) \geqslant \alpha$. Alors

$$\Delta < \left|e^{\mathcal{A}_u^r(M) - \mathcal{A}_u^r(M_0)} - 1\right|$$

ce qui est moindre que ε si l'exposant de e est assez petit, ou si

(1) Noter que pour u sousharmonique quelconque dans R_τ, $\mathcal{A}_u^r(M_0)$ et $\mathcal{A}_u(M_\theta)$ ont la même limite pour $r \to \infty$ (d'après 1) de sorte qu'il suffit aussi de se reporter à l'étude approfondie de $\mathcal{A}_u^r$ faite dans (AN).

(2) Voir Bourbaki, *Topologie générale*, chapitre IV (Act. sc. et ind. n° 916, Paris, Hermann (1942).

$\left|\frac{\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M})}{\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M}_0)} - 1\right|$ est assez petit, ce qui arrive indépendamment de u si $\mathrm{M}_0\mathrm{M}$ est assez petit.

En résumé Δ sera moindre que ε si MM_0 est assez petit indépendamment de u.

Corollaire. — L'enveloppe supérieure des $\mathcal{A}_u^r$ de la famille précédente sera *continue* (la semi-continuité inférieure étant déjà assurée par la continuité des $\mathcal{A}_u^r$).

IV. — FONCTIONS PRESQUE SOUSHARMONIQUES ET FONCTIONS SOUSMÉDIANES

11\. — En cherchant à dissocier dans la sousharmonicité le rôle de la semi-continuité, on est conduit à des résultats dont voici les plus importants, et d'abord cet énoncé nouveau :

THÉORÈME 9. — *Pour que u dans Ω soit égale presque partout à une fonction hypoharmonique (nécessairement unique, notée $\widehat{u}$, dite régularisée de u) il faut et suffit que :*

a) *u soit mesurable et bornée supérieurement en mesure localement,*

b) *en tout point M_0 où $\varphi(\mathrm{M}_0) = \limsup_{\mathrm{M} \to \mathrm{M}_0}$ en mes. de u est finie ;*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M}_0) - \varphi(\mathrm{M}_0)}{r^2} \geqslant 0 \ (^1). \tag{9}$$

Alors u est dite presque hypoharmonique (presque sousharmonique si $\widehat{u}$ est sousharmonique) et

$$\widehat{u}(\mathrm{M}_0) = \varphi(\mathrm{M}_0) = \lim_{r \to 0} \mathcal{A}_u(\mathrm{M}_0) \leqslant \mathcal{A}_u^{\mathrm{R}}(\mathrm{M}_0) \ \left[\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{R}} \subset \Omega\right].$$

Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons la suffisance :

D'abord φ est $< +\infty$, semi-continue supérieurement et majore u p. p. ; d'où $\overline{\mathrm{S}}_\varphi \geqslant 0$ là où φ est fini. Ainsi φ est hypoharmonique.

Soit δ l'ensemble des points admettant un voisinage où u est sommable. Il est ouvert. S'il est non vide, $\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M})$ y tend vers u p. p. : or là où $\mathcal{A}_u^r$ a une limite, celle-ci majors φ d'après (b) ; d'où $u = \varphi$ p. p. sur δ. Sur $\Omega - \delta$, s'il est non vide, $\varphi = -\infty$ donc $u = -\infty$ p. p. Ainsi sur Ω, $u = \varphi$ p. p.

(1) Il ne suffit pas que φ soit hypoharmonique.

Corollaire 1. — (*Critère de Szpilrajn*). *Il s'obtient en remplaçant* (*b*) *par la condition que presque partout en* M_0

(S) $\qquad u(M_0) \leqslant \mathcal{A}_u^r(M_0)$ quel que soit $\overline{D}_{M_0}^r \subset \Omega$ (¹).

La nécessité est évidente. Voyons la suffisance.

Si u est sommable dans un voisinage de M_0, on voit que $\mathcal{A}_u^r(M)$ est continue de M en M_0 pour r fixé assez petit. Si au contraire $\mathcal{A}_u^r(M_0) = -\infty$ quel que soit r, $\mathcal{A}_u^r(M) = -\infty$ dès que D_M^r contient M_0 et il y aura encore la même continuité. Donc (S) presque partout entraîne en tout point $\varphi(M_0) \leqslant \mathcal{A}_u^r(M_0)$ pour r assez petit, donc (b).

Il en résulte aussitôt :

Corollaire 2. — *Pour que u soit sousharmonique dans Ω, il faut et suffit que u soit localement sommable et que $\mathcal{A}_u^r(M)$ soit croissante de r pour $\overline{D}_M^r \subset \Omega$, même seulement presque partout en* M.

12. — Il paraît intéressant d'isoler la notion nouvelle suivante :

Définition. — *On appelle hypomédianes (sousmédianes si $\widehat{u}$ est sousharmonique) les fonctions u presque hypoharmoniques pour lesquelles* (S) *a lieu en tout point* M_0, cette dernière condition équivalant alors à

$$u \leqslant \widehat{u} \quad \text{ou encore} \quad \limsup_{M \to M_0} u = \widehat{u}(M_0),$$

ou encore $\limsup\limits_{M \to M_0} u = \limsup\limits_{M \to M_0}$ en mesure de u.

Les fonctions opposées seront dites hypermédianes, respectivement surmédianes.

Théorème 10. — *On a un critère* (*nécessaire et suffisant*) *pour que u soit hypomédiane en remplaçant dans celui du théorème 9,* φ par $\psi = \limsup\limits_{M \to M_0} u$.

En effet cela entraîne que u soit presque hypoharmonique et comme alors $\mathcal{A}_u^r = \mathcal{A}_{\widehat{u}}^r \underset{(r \to 0)}{\longrightarrow} \widehat{u}$ on ne peut avoir en un point M_0 : $\widehat{u} < \psi$; d'où $\psi \leqslant \widehat{u}$.

Remarques. — Il est évident que, dans un domaine, une fonction presque hypoharmonique (hypomédiane) vaut $-\infty$ p. p. (resp. $-\infty$) ou une fonction presque sousharmonique (resp. sousmédiane) ;

(¹) Il ne suffit pas que (S) ait lieu pour r assez petit relativement à chaque M_0 (Exemple de h(OM), donné par Szpilrajn). Mais on peut astreindre r à être moindre que $\varepsilon > 0$ *fixe* arbitrairement petit, le même pour tous les M_0, et cela vaut pour le corollaire 2.

en adjoignant la sommabilité locale, les critères précédents deviennent des critères pour que u soit presque sousharmonique ou sousmédiane; avec la semi-continuité supérieure ils deviennent, d'autre part, des critères de sous ou hypo-harmonicité. Et il est évident que les propriétés des médiantes $\mathcal{A}_u^r$ des fonctions hypoharmoniques s'appliquent à celles des fonctions presque hypoharmoniques.

Nous laissons de côté l'étude analogue à ce chapitre mais moins intéressante, où $\mathcal{M}_u^r$ remplacerait $\mathcal{A}_u^r$.

V. — THÉORÈMES DE CONVERGENCE

13. — Les caractères des fonctions sousharmoniques, semi-continuité et inégalité de médiation, se comportent différemment dans les passages à la limite et il convient donc de les dissocier. La semi-continuité supérieure se conserve par décroissance ou convergence uniforme. L'étude du rôle de la moyenne seule nous amène d'abord au théorème :

Théorème 11. — *Soit u_n presque hypoharmonique (ou hypomédiane), bornée supérieurement en mesure sur tout compact de Ω indépendamment de n* [1]. *Alors $\psi = \lim\sup_{n\to\infty} u_n$ est presque hypoharmonique (respectivement hypomédiane) et*

$$\widehat{\psi} = \lim_{r\to 0} (\lim\sup_{n\to\infty} \mathcal{A}_{u_n}^r) \tag{10}$$

(*où $\lim\sup_{n\to\infty} \mathcal{A}_{u_n}^r$ est hypoharmonique et décroît avec r*) [2].

En effet presque partout $u_n \leqslant \mathcal{A}_{u_n}^r (\overline{D}_M^r \subset \Omega)$.

Or, d'après un théorème de Lebesgue-Carathéodory

$$\lim\sup_{n\to\infty} \mathcal{A}_{u_n}^r(M) \leqslant \mathcal{A}_\psi^r(M)$$

d'où presque partout $\psi = \lim\sup_{n\to\infty} \mathcal{A}_{u_n}^r \leqslant \mathcal{A}_\psi^r$.

[1] Ou ce qui est équivalent, majorée dans Ω par une fonction (indépendante de n) localement sommable.

[2] D'après Szpilrajn-Radò, on savait que si u_n sousharmonique croissant a une limite localement sommable, celle-ci est presque sousharmonique, d'où suit aisément le premier résultat du texte, dont le complément par la formule (10) se trouve à peu près dans la thèse de Lelong (*Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 58, 1941). D'autre part, avec u_n essentiellement sousharmonique et grâce à la théorie du potentiel, on peut préciser davantage l'ensemble où ψ diffère de $\widehat{\psi}$. Voir ma note des *C. R.*, t. 207, p. 836 (1938), les résultats définitifs de H. Cartan (*C. R.*, t. 214 (1942), p. 944 et leur développement dans *Bull. Soc. Math. de France*, t. 73, 1945).

ψ est donc bien presque hypoharmonique ; de l'enveloppe supérieure des $\mathcal{H}_{u_n}$ pour $n \geqslant p$ est continue, donc $\lim_{n \to \infty}$ sup. $\mathcal{H}^r_{u_n}$ est semi-continue supérieurement, et d'après le résultat qu'on vient d'établir, hypoharmonique.

D'où
$$\widehat{\psi} \leqslant \limsup_{n \to \infty} \mathcal{H}^r_{u_n} \leqslant \mathcal{H}^r_{\psi},$$
ce qui entraîne l'égalité (10) à démontrer.

Remarque. — Si, de plus $u_n \to -\infty$ p. p., $\widehat{u_n}$ tend vers $-\infty$ uniformément localement et cela s'étend aussitôt aux filtres (conséquence de la même propriété des $\mathcal{H}^r_{u_n}$ d'après le théorème 8 ou conséquence directe des inégalités (5)).

Cas particuliers. — 1) Toute suite décroissante de fonctions sousharmoniques dans un domaine, tend vers une fonction sousharmonique, ou bien vers $-\infty$ et alors uniformément localement.

Il y a de plus extension aux ordonnés filtrants décroissants (car le passage à la limite sous $\int$ subsiste avec des fonctions semi-continues supérieurement décroissantes comme avec la convergence uniforme).

2) Si u_n sousharmonique finie converge uniformément localement (au sens ordinaire) la limite est sousharmonique.

Supposons seulement u_n hypoharmonique et d'autre part qu'elle soit bornée supérieurement localement (indépendamment de n) et converge uniformément localement au sens de la structure uniforme de la droite numérique achevée, c'est-à-dire, par exemple, que e^{u_n} converge uniformément localement. Alors la limite de u_n est hypoharmonique.

Il y a encore extension aux filtres, le second énoncé se ramenant au premier en prenant les enveloppes supérieures avec une constante qu'on fait ensuite tendre vers $-\infty$ [1].

14. — *Convergence en moyenne* [2]. — Théorème 12. — *Soit*

[1] Le second énoncé pour filtres se ramène aussi directement au cas des suites (on forme sur un compact une suite extraite qui a même limite).

[2] La convergence uniforme ou même simple p. p. de f_n (localement sommable) majorée par une fonction fixe localement sommable, vers f localement sommable entraîne la convergence en moyenne sans réciproque d'où l'intérêt du théorème 12.

Mazurkievicz avait posé la question de caractériser les limites en moyenne des fonctions sousharmoniques, ce que résolut Szpilrajn en introduisant ainsi les fonctions presque sousharmoniques A côté de l'énoncé direct pour u_n sousharmonique, il remarque que si u est presque sousharmonique, c'est la limite en moyenne de $\mathcal{H}^{1/n}_u$ sousharmonique.

dans Ω, u_n *presque sousharmonique qui converge vers* u (*localement sommable*) *en moyenne sur tout compact* $K \subset \Omega$ *c'est-à-dire telle que* $\int_K |u - u_n| dv \to 0$. *Alors* u *est presque sousharmonique* (Szpilrajn) *et vaut presque partout* $\lim_{n \to \infty} \sup u_n$.

K étant choisi, soit $r < \delta <$ distance de K à $\overset{*}{\Omega}$ et K_1 un autre compact de Ω contenant D_M^δ quel que soit $M \in K$. Alors

$$|\mathcal{A}_{u_n}^r(M) - \mathcal{A}_u^r(M)| \leqslant \int_{K_1} |u_n - u| dv \to 0.$$

Sur K, $u_n \leqslant \mathcal{A}_{u_n}^r$ p. p. ; donc u_n est bornée supérieurement en mesure indépendamment de n d'où presque partout, en posant $\psi = \lim_{n \to \infty} \sup u_n$,

$$\psi \leqslant \lim_{n \to \infty} \mathcal{A}_{u_n}^r = \mathcal{A}_u^r \leqslant \mathcal{A}_\psi^r \text{ fini}.$$

On en déduit que ψ est presque sousharmonique et (en faisant tendre r vers zéro) qu'il vaut u presque partout.

Interprétation topologique. — Sur l'ensemble des classes d'équivalence [1] des fonctions localement sommables dans Ω prenons la structure uniforme, d'ailleurs métrisable, définie par la base d'entourages relative à l'inégalité $\int_K |f_1 - f_2| dv < \varepsilon$ (ε variable > 0, K compact variable de Ω).

D'après le théorème de Fisher-Riesz, cet espace des f est *complet*. Le théorème de Szpilrajn exprime alors que le sous-espace formé des classes d'équivalence de fonctions presque sousharmoniques (chaque classe étant celle des fonctions presque sousharmoniques de même régularisée) est aussi *complet* [2].

15. — Familles non dénombrables et enveloppe supérieure.

L'extension aux fonctions hypomédianes étant banale, énonçons seulement :

Théorème 13 [3]. — *Considérons dans* Ω *une famille quelconque de*

[1] Deux fonctions sont équivalentes si elles sont égales p. p.

[2] En outre, de la suite u_n du théorème 12, on peut extraire une suite qui converge p. p. vers $\lim_{n \to \infty} \sup u_n$.

[3] Au cours d'un échange de lettres (sept. 42), H. Cartan m'a indiqué, indépendamment, à peu près la démonstration suivante que je venais d'obtenir, à cela près qu'il ne considérait qu'une famille de fonctions *sousharmoniques* ; le résultat rentrait alors dans

fonctions sousmédianes admettant une majorante, constante finie, commune sur tout compact contenu. L'enveloppe supérieure U *est sousmédiane et* $\widehat{\mathrm{U}} = \lim_{r \to 0}$. (env. sup. des $\mathcal{A}_u^r$) *où cette enveloppe* U_r *des* $\mathcal{A}_u^r$ *est finie continue sousharmonique décroissant avec* r.

Il s'agit au fond d'un théorème de convergence puisque les enveloppes U et U_r ne changent pas *lorsqu'on adjoint* aux u les enveloppes supérieures des ensembles finis de fonctions u, ce qui donne une famille ordonnée filtrante croissante (ou à droite) (1). U, U_r sont alors les limites selon le filtre $\mathcal{F}$ des sections à droite.

On conservera le caractère de cette nouvelle famille en remplaçant en outre chacune de ces fonctions par son enveloppe supérieure avec l'une d'elles et l'on raisonnera sur cette troisième famille comprise entre deux fonctions localement sommables.

Alors si l'on sait que U est localement sommable

$$u(\mathrm{M}) \leqslant \mathcal{A}_u^r(\mathrm{M}) \leqslant \mathcal{A}_{\mathrm{U}}^r(\mathrm{M}),$$

d'où $\mathrm{U} \leqslant \mathrm{U}_r \leqslant \mathcal{A}_{\mathrm{U}}^r$ de sorte que U est sousmédiane.

L'égale continuité des $\mathcal{A}_u^r$ entraîne la continuité de U_r et la proposition qu'on vient d'établir montre que U_r est sousmédiane, donc sousharmonique. U_r majore $\widehat{\mathrm{U}}$ et tend vers $\widehat{\mathrm{U}}$ pour $r \to 0$.

Reste donc à voir la sommabilité locale à priori de U.

Soit $\mathrm{V} = \lim_{r \to 0}. \mathrm{U}_r$. Comme $u \leqslant \mathrm{U} \leqslant \mathrm{V}$, il suffit de voir que pour tout $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{M}_0}^r \subset \Omega$, il existe un u tel que $|\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M}_0) - \mathcal{A}_{\mathrm{V}}^r(\mathrm{M}_0)|$ soit arbitrairement petit, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{A}_{\mathrm{V}}^r(\mathrm{M}_0) = \mathrm{U}_r(\mathrm{M}_0)$ (2).

Or $\mathcal{A}_{\mathrm{U}_\rho}^r = \mathcal{A}^r_{\lim_{\mathcal{F}}, \mathcal{A}_u^\rho}$, ce qui grâce à la convergence uniforme venant de l'égale continuité des $\mathcal{A}_u^\rho$ vaut aussi

$$\lim_{\mathcal{F}}. \mathcal{A}^r_{\mathcal{A}_u^\rho} \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\mathcal{F}}. \mathcal{A}^\rho_{\mathcal{A}_u^r}$$

ou encore pour la même raison que précédemment $\mathcal{A}_{\lim_{\mathcal{F}} \mathcal{A}_u^r}$.

son théorème général plus précis et bien plus important de la théorie du potentiel, affirmant qu'alors U est quasi-sousharmonique, c'est-à-dire ne diffère de $\widehat{\mathrm{U}}$ que sur un ensemble dit polaire ou encore de capacité extérieure nulle. Voir ses travaux cités plus haut (théorème 11).

(1) C'est-à-dire une famille telle que deux fonctions quelconques de la famille soient majorées par une troisième.

(2) On peut achever la démonstration sans usage de filtre : au moyen d'un recouvrement fini de $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{M}_0}^r$ par des $\mathrm{D}_{\mathrm{P}}^\rho$ on formera un u tel que $0 \leqslant \mathrm{U}_\rho - \mathcal{A}_u^\rho \leqslant \varepsilon$ dans $\overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{M}_0}^r$.

Si ρ est assez petit on aura $\left|\mathcal{A}^r_{\mathcal{A}_u^\rho}(\mathrm{M}_0) - \mathcal{A}_{\mathrm{V}}^r(\mathrm{M}_0)\right| < 2\varepsilon$. On achève en remarquant que $\mathcal{A}^r_{\mathcal{A}_u^\rho}(\mathrm{M}_0)$ ou $\mathcal{A}^\rho_{\mathcal{A}_u^r}(\mathrm{M}_0)$ est pour ρ assez petit arbitrairement voisin de $\mathcal{A}_u^r(\mathrm{M}_0)$.

Il n'y a plus qu'à faire tendre ρ vers o pour obtenir l'égalité cherchée.

16. — Cas d'égale continuité. — Considérons dans Ω une famille de fonctions f également continues en tout point au sens (A) de la structure uniforme de la droite numérique achevée. On sait que pour des suites ou filtres, la convergence simple équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de Ω au sens (A) ([1]). De plus, à toute suite (filtre) on peut associer une suite extraite (filtre plus fin) avec convergence uniforme au sens A sur tout compact.

Prenons une famille (H) de fonctions hypoharmoniques majorées par une même fonction localement sommable et également continues au sens (A) en tout point, comme *par exemple* les $\mathcal{A}_u^r$ (r fixé) d'une famille de u presque hypoharmoniques majorées par une même fonction localement sommable. Alors, outre les résultats généraux précités, toute limite sera hypoharmonique.

Il sera facile d'expliciter des conséquences pour le cas des fonctions harmoniques ([2]).

([1]) Et aussi, si $|f|$ est majorée par une fonction fixe localement sommable, à la convergence en moyenne sur tout compact vers une fonction finie continue.

([2]) Voir le développement dans (AN).