Annales de l'université de Grenoble

Paul Lévy

Le calcul symbolique et ses principales applications

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 41-56
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__41_0>

LE CALCUL SYMBOLIQUE ET SES PRINCIPALES APPLICATIONS

par M. Paul LÉVY (Paris) (1).

---

1. Notions générales.

L'étude méthodique de chacune des opérations considérées en algèbre ou en analyse implique l'emploi d'un symbole qui la représente. Une formule dans laquelle interviennent plusieurs de ces opérations prend alors l'aspect d'une relation entre les symboles correspondants et, plus on avance dans l'étude de ces opérations, plus il devient nécessaire de considérer ces symboles comme des variables soumises à des règles de calcul spéciales.

L'origine du calcul symbolique se trouve dans les notations de la théorie des groupes. Si I et J désignent deux opérations, le résultat obtenu lorsqu'on les effectue successivement sur une fonction u est naturellement désigné par $\mathrm{J}[\mathrm{I}(u)]$ ou par $\mathrm{I}[\mathrm{J}(u)]$ suivant qu'on commence par l'opération I ou par l'opération J, et il est naturel de désigner l'opération abstraite ainsi effectuée sur u par JI ou par IJ suivant l'ordre des opérations.

Il peut arriver que ces opérations soient *permutables*, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\mathrm{IJ} = \mathrm{JI}. \tag{1}$$

Tel est le cas si u est une fonction de deux variables x et y et que I et J représentent respectivement des dérivations ou des intégrations par rapport à x et y.

Un groupe est *abélien* si les opérations qui le composent sont

(1) Exposé didactique rédigé en 1944 à la demande du Directeur de l'Institut Polytechnique de Grenoble.

toujours deux à deux permutables. Les calculs symboliques effectués sur les opérations de tels groupes sont facilités ; la notation $I^h J^k$ peut alors être employée sans ambiguïté ; autrement il serait nécessaire de distinguer $\frac{(h+k)!}{h!\,k!} = C^h_{h+k}$ opérations différentes suivant l'ordre des facteurs.

Les puissances d'une même opération sont deux à deux permutables. Elles forment un groupe abélien et les règles du calcul des exposants

$$(2) \qquad I^h I^k = I^{h+k}, \qquad (I^h)^k = I^{hk}$$

sont évidemment vraies. De même, si deux opérations I et J sont permutables, toutes les opérations $I^h J^k$ (h et k étant deux entiers positifs) sont deux à deux permutables. Elles forment un groupe abélien.

L'emploi de la notation I^h suggère tout naturellement l'introduction des exposants négatifs ou fractionnaires. Mais il conduit aussi à une extension plus importante du calcul symbolique. Si

$$(3) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est une fonction analytique de x, régulière à l'origine, il est naturel de poser :

$$(4) \qquad f(I) = a_0 + a_1 I + \cdots + a_n I^n + \cdots$$

c'est-à-dire que $f(I)$ désignera une opération qui, effectuée sur une fonction u, donne la nouvelle fonction :

$$a_0 u + a_1 I u + \cdots + a_n I^n u^n$$

L'utilité de cette notation est évidente. Elle permet de simplifier des calculs qui pourraient être autrement forts compliqués et souvent de suggérer des méthodes de calcul qui pourraient, autrement, ne pas se présenter à l'esprit.

Ainsi, considérons l'équation :

$$(5) \qquad u - \lambda I u = v,$$

où u est une fonction inconnue. Le calcul symbolique conduit tout naturellement à la résoudre par la formule :

$$u = \frac{v}{1 - \lambda I},$$

c'est-à-dire, en utilisant le développement :

$$\frac{1}{1-\lambda I} = 1 + \lambda I + \cdots + \lambda^n I^n + \cdots,$$

$$u = v + \lambda I v + \cdots + \lambda^n I^n v + \cdots \tag{6}$$

Cela indique que, si l'on substitue ce développement à u dans l'équation (5), cette équation est formellement vérifiée. Le calcul de vérification est le même que celui par lequel on vérifie la formule :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (|x| < 1).$$

Naturellement, cette résolution formelle doit être complétée par l'étude de la convergence du développement (6) ; ce développement ne donne une solution de l'équation (5) que s'il est convergent. Inversement, on ne peut déduire (6) de (5) que si $\lambda^n I^n u$ tend vers zéro pour n infini ; on peut donc seulement affirmer que la solution (6) de l'équation (5) est la seule solution pour laquelle $\lambda^n I^n u$ tende vers zéro.

Ces questions de convergence se présentent bien différemment suivant que I est une opération d'intégration ou de dérivation. Examinons tout de suite trois cas particulièrement importants et qui montrent bien les différentes circonstances possibles. Dans ces trois cas, u et v sont des fonctions d'une seule variable x.

Premier cas. — Le symbole Iu représente l'intégrale

$$Iu(x) = \int_0^x K(x, y)\, u(y)\, dy. \tag{7}$$

Désignons respectivement par C et M les bornes supérieures de $|K(x, y)|$ et de $|v(x)|$ pour obtenir $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant X$ (X étant une constante positive donnée). Pour x compris entre O et X, on a :

$$|Iv| \leqslant MCx, \qquad |I^2 v| \leqslant \frac{MC^2x^2}{2\,!}, \qquad |I^n v| \leqslant \frac{MC^n x^n}{n\,!}, \ \ldots, \tag{8}$$

et il en résulte immédiatement que le développement (6) converge quel que soit λ ; il donne la seule solution de l'équation (5) pour laquelle $|u|$ soit borné (car dans ce cas $\lambda^n I^n u$ tend vers zéro pour n infini).

Telle est la méthode, très simple, par laquelle Volterra a résolu l'*équation de Volterra de deuxième espèce*

$$u(x) - \lambda \int_0^x K(x, y)\, u(y)\, dy = v(x), \tag{9}$$

qui est la forme explicite, dans le cas considéré, de l'équation (5). Elle suppose essentiellement le noyau $K(x, y)$ borné au voisinage de l'origine.

Deuxième cas. — Le symbole Iu représente l'intégrale à limites fixes

$$(10) \qquad Iu(x) = \int_a^b K(x, y) u(y) dy.$$

Dans ce cas, les inégalités (8) sont remplacées par les inégalités

$$|Iv| \leqslant MC(b-a), \ \ldots, \qquad |I^n v| \leqslant MC^n(b-a)^n, \ \ldots,$$

et la convergence du développement (6), comme celle de $\lambda^n I^n u$ vers zéro, ne sont assurées que pour λ assez petit ; il suffit que l'on ait $|\lambda| C(b-a) < 1$. La condition de convergence véritable sera d'ailleurs en général $|\lambda| < \lambda_0$, λ_0 étant une constante qui peut dépasser $1/C(b-a)$.

L'équation de Fredholm de deuxième espèce

$$(11) \qquad u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy = v(y)$$

ne sera donc résolue par la formule (6) que pour λ assez petit. Son intégration, dans le cas général, est beaucoup plus difficile que celle de l'équation de Volterra (9). Il existe en général des valeurs de λ pour lesquelles il n'y a pas une solution unique ; suivant le choix de la fonction v, il n'y en a aucune, ou bien il y en a une infinité.

Troisième cas. -- Le symbole I représente une dérivation par à x. Nous le remplacerons alors avec Heaviside, par la lettre p, de sorte que le développement (6) prend la forme

$$(12) \qquad v + \lambda p v + \lambda^2 p^2 v + \cdots \lambda^n p^n v + \cdots$$

$p^n v$ représentant la n$^{\text{ième}}$ dérivée de la fonction v. Ce développement est en général divergent, quelque petit que soit λ. Il ne peut converger dans un intervalle (a, b) que si vy est égal à une fonction entière vérifiant dans tout le plan une inégalité de la forme :

$$|v(z)| \leqslant a e^{c|z|}.$$

Il ne s'agit donc que de fonctions très particulières. Dans ce cas, on obtient pour l'équation différentielle :

$$(13) \qquad u - \lambda \frac{du}{dx} = v$$

à laquelle se réduit l'équation (5) une solution $u_0(x)$ de la forme (6) ; c'est la seule pour laquelle $\lambda^n \frac{d^n u}{dx^n}$ tende vers zéro pour n infini, ce qu'on peut vérifier immédiatement aussi en observant que les autres sont de la forme :

$$u_0(x) + c' e^{\frac{x}{\lambda}}.$$

Si la fonction $v(x)$ est quelconque, on peut, avec Heaviside, appliquer le calcul symbolique à la résolution de l'équation (13), en introduisant l'opération :

$$(14) \qquad \mathrm{I}v(x) = \int_0^x v(y)\,dy$$

qui est l'inverse de la dérivation désignée par p. L'équation (13) s'écrit alors, si

$$u(0) = 0$$
$$(1 - \mathrm{I})u(x) = -\mathrm{I}v(x)$$

et se résout par la formule :

$$(15) \quad u(x) = -\left(\frac{1}{1-\mathrm{I}}\right)v(x) = -\mathrm{I}v(x) - \mathrm{I}^2 v(x) \cdots - \mathrm{I}^n v(x) \cdots,$$

où le développement considéré est convergent. L'opération (14) et, par suite, la formule (15) rentrent dans le premier cas considéré ci-dessus ; il n'y a qu'à prendre $\mathrm{K}(x, y) = 1$ et remplacer v par $-\mathrm{I}v$.

L'examen de ces trois cas suffit à mettre en évidence une circonstance très générale et qui joue un rôle considérable en analyse : l'intégrale est un outil plus maniable que la dérivée ; il s'applique à toutes les fonctions continues et les intégrations répétées conduisent souvent à des suites ou à des séries convergentes, ce qui n'est pas le cas pour les dérivations répétées, même si elles sont possibles.

2. Le calcul symbolique d'Heaviside.

Le principe de ce calcul consiste à désigner par p l'opération de dérivation par rapport à une variable qui, dans les applications, sera souvent le temps. Des opérations d'intégration ou de dérivation plus ou moins complexes seront alors désignées par $f(p)$. Pour les raisons qui viennent d'être indiquées, on évitera de représenter ces fonctions par des développements ordonnés suivant les puissances croissantes de p, mais on utilisera des développements suivant les puissances croissantes de $\mathrm{I} = \frac{1}{p}$, en représentant ainsi l'intégration à partir d'une origine déterminée x_0. De cette nécessité de choisir une origine résulte évidemment que, si l'on a toujours $p\mathrm{I}f(x) = f(x)$, c'est-à-dire symboliquement $p\mathrm{I} = 1$, on a $\mathrm{I}pf(x) = f(x) - f(x_0)$, de sorte que l'on a $p\mathrm{I} = \mathrm{I}p = 1$ que si l'on s'impose de ne considérer que des fonctions dérivables et s'annulant à l'origine.

Indiquons quelques aspects et quelques applications de ce calcul symbolique d'Heaviside.

1° *Intégration et dérivation d'ordre fractionnaire.*

On a : $$\mathrm{I}^h f(x) = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{h-1}} f(xh) dx_h$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations, effectuant celles qui ne contiennent pas $f(x_h)$ et remplaçant x_h par ξ ;

$$\mathrm{I}^h f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{h-1}}{(h-1)!} f(\xi) d\xi.$$

Cette formule conduit tout naturellement à la définition de $\mathrm{I}^\alpha f(x)$, pour n'importe quel exposant positif α, par la formule

(16) $$\mathrm{I}^\alpha f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\xi) d\xi$$

où $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

On déduit aisément des propriétés connues des intégrales eulériennes et notamment de la formule

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0),$$

que l'on a bien

(17) $$\mathrm{I}^\alpha \mathrm{I}^\beta = \mathrm{I}^\beta \mathrm{I}^\alpha = \mathrm{I}^{\alpha+\beta},$$

de sorte que les règles du calcul des exposants s'appliquent à l'opération I^α.

On en déduit, si n est un entier $\leqslant \alpha$ que

(18) $$\frac{d^n}{dx^n} \mathrm{I}^\alpha = \mathrm{I}^{\alpha-n}$$

et si $n > \alpha$, cette formule peut être prise comme définition de $I^{\alpha-n}$ qu'on peut aussi représenter par $p^{n-\alpha}$. L'opération ainsi définie est parfois appelée dérivée d'ordre (fractionnaire) $n - \alpha$. Cette expression est commode, mais impropre en ce sens que le caractère de la dérivée, qui ne dépend que de l'allure locale de $f(x)$, ne s'étend pas à elle ; $I^{\alpha'}f(x)$, si $\alpha' = \alpha - n$ est négatif et non entier, dépend, comme $I^{\alpha}f(x)$ pour α positif, de toutes les valeurs de $f(\xi)$ dans l'intervalle x_0, x.

Les notions de dérivée et d'intégrale d'ordres fractionnaires sont dues à Riemann (1855) ; le livre d'Heaviside est de 1896.

Cette notion s'applique à la résolution d'équations intégrales, telles que l'équation

$$(19) \quad I^{\alpha}f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\xi)\,d\xi = g(x) \qquad (\alpha > 0).$$

Il suffit d'introduire un entier n supérieur à α ; en posant $\beta = n - \alpha$ il vient :

$$I^{\beta}g(x) = I^{\beta+\alpha}f(x) = I^{n}f(x),$$

et par suite :

$$(20) \qquad \frac{d^n}{dx^n} I^{\beta}g(x) = f(x) \qquad (\beta = n - \alpha).$$

Si donc l'équation (19) est résoluble, sa résolution est donnée par la formule (20). On démontre aisément qu'il en est ainsi si $g(x)/(x - x_0)^{\alpha}$ est borné pour x voisin de x_0 ; cette condition est d'ailleurs nécessaire pour que $f(x)$ soit borné. Pour que $f(x)$ existe et soit intégrable, il suffit d'une condition moins restrictive ; il suffit que $g(x)/(x - x_0)^{\alpha}$ soit borné pour au moins une valeur de α' supérieure à $\alpha - 1$.

Le fait que $I^{\alpha}f(x)$, si $f(x)$ est borné et non nul soit de l'ordre de grandeur de $(x - x_0)^{\alpha}$ a de nombreuses applications. Grâce à ce fait, l'opération I^{α} permet de mettre en évidence l'ordre de grandeur de $f(x)$ au voisinage de x_0. Dans sa thèse, M. Hadamard a appliqué cette méthode à l'étude des singularités des fonctions analytiques.

Dans un mémoire publié en 1923 dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, Paul Lévy a indiqué une généralisation du symbole I^{α} et son application à la résolution de nouvelles équations intégrales.

2° *L'équation intégrale de Laplace et Carson.*

Pour la fonction e^{px}, l'opération p équivaut à une multiplication par p. Il est alors naturel de définir les opérations $p^{\alpha}f(x)$ et $\mathrm{I}^{\alpha}f(x)$ pour $f(x)=e^{px}$ par les formules :

$$(21) \qquad p^{\alpha}f(x)=p^{\alpha}e^{px}, \qquad \mathrm{I}^{\alpha}f(x)=p^{-\alpha}e^{px}.$$

On vérifie aisément, si p est positif, que c'est bien ce qui donne la définition de Riemann, si l'on prend $x_0=-\infty$. Pour l'étude du cas où x_0 est quelconque, nous renvoyons au mémoire cité de P. Lévy.

Ces remarques peuvent conduire à une nouvelle définition de la dérivée d'ordre quelconque α. Pour une fonction de la forme

$$(22) \qquad f(x)=\int_0^{\infty} e^{sx}d\Phi(s),$$

il est naturel de définir la dérivée d'ordre α par la formule

$$p^{\alpha}[f(x)]=\int_0^{\infty} s^{\alpha}e^{sx}d\Phi(s),$$

et, moyennant certaines conditions de convergence à l'origine, il suffit de remplacer α par $-\alpha$ pour définir l'opération I^{α}.

Cette définition de la dérivation d'ordre non entier a été indiquée par Liouville bien avant le mémoire de Riemann. Elle n'a pas la même portée que celle de Riemann ; elle ne part pas des valeurs de la fonction $f(x)$ et ne s'applique qu'à des fonctions d'une forme déterminée. On est alors conduit tout naturellement à se demander si une fonction donnée peut être mise sous cette forme.

En remplaçant x par $-t$ et supposant $\alpha\Phi(s)$ de la forme $\varphi(s)ds$, on est conduit à résoudre en $\varphi(s)$ l'équation de Laplace

$$(23) \qquad \psi(t)=\int_0^{\infty} e^{-st}\varphi(s)ds,$$

où $\psi(t)$ est donné dans $(0, +\infty)$.

Cette équation a fait l'objet de nombreux travaux. La fonction $\psi(t)$ étant analytique, on peut, par prolongement analytique, définir $\psi(to+iu)$ et en déduire $\varphi(s)$ par la formule de Fourier

$$(24) \qquad \varphi(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{+\infty} e^{(t_0+iu)s}\psi(t_0+iu)du.$$

On peut aussi remarquer que, si

$$(25) \qquad \varphi(1)=\sum_0^{\infty} a_n\frac{s^n}{n!}$$

est une série entière et si les coefficients vérifient la relation

$$(26) \qquad |a_a| < \frac{M}{R^n},$$

on a

$$(27) \qquad \psi(t) = \frac{1}{t}\sum_0^\infty \frac{a_n}{t^n},$$

de sorte que $t\psi(t)$ est une série entière en $1/t$, à rayon de convergence au moins égal à R. Inversement, à une fonction de t holomorphe et nulle à l'infini, correspond par les formules (27) et (25) une fonction entière associée $\varphi(s)$ telle que $\psi(t)$ soit de la forme (23).

Cette remarque est en relation étroite avec les travaux de E. Borel sur la sommabilité des séries divergentes. Pour certaines valeurs de t extérieures au cercle de convergence de la série (27), il peut arriver que l'intégrale (23) ait un sens et définisse la somme généralisée de cette série.

On aurait naturellement une solution plus parfaite de l'équation de Laplace si, en partant des valeurs de $\psi(t)$ données pour t réel et positif, on obtenait $\varphi(s)$ par des opérations de quadrature en nombre fini. On a pu croire longtemps que cela était impossible. G. Doetsch a pourtant résolu ce problème en 1936 ; nous ne pouvons ici que renvoyer à son très élégant mémoire.

En 1936, Tricomi [1] a obtenu le même résultat pour l'équation bilatérale de Laplace

$$(28) \qquad \psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}\varphi(s)\,ds,$$

où $\psi(t)$ est donné pour tout t réel.

Revenons maintenant sur la relation entre l'équation de Laplace et le calcul symbolique. Elle a été bien mise en évidence par Carson (dans la revue technique *The Bell System*, 1923 ; éditée par l'American Telephon and Telegraph Company). Le livre de Heaviside, d'une lecture assez difficile, était peu connu, sauf en Angleterre, et ce sont surtout les travaux de Carson qui ont attiré l'attention sur le calcul symbolique d'Heaviside.

Partons de la formule (23) et désignons par p la dérivation par rapport à $x = t$. On a :

$$(29) \qquad p\psi(t) = \int_0^\infty se^{-st}\varphi(s)\,ds.$$

[1] *Math. Zeitschrift*, t. 40 (1936), p. 720-726.

et, pour l'opération définie par la fonction $f(p) = \Sigma a_n p^n$, on a

$$[f(p)]\psi(r) = \int_0^\infty e^{-ts} f(s)\varphi(s)\,ds. \tag{30}$$

On voit donc que : *effectuer sur $\psi(t)$ l'opération représentée symboliquement par $f(p)$, c'est multiplier par $f(s)$ la fonction $\varphi(s)$ qui lui est associée par l'équation de Laplace.*

Carson a tiré un grand parti de cette règle simple. Nous ne pouvons ici que renvoyer à son mémoire. Signalons aussi que G. Doetsch a publié en 1936 un gros ouvrage sur l'équation de Laplace, qui peut être utile à consulter sur ces questions.

3° *Intégration d'équations différentielles.*

Le calcul symbolique d'Heaviside s'applique aisément à l'intégration des équations différentielles à coefficients constants, ou du moins à la recherche d'une solution particulière d'une telle équation. La méthode généralise celle que nous avons appliquée à l'équation (13).

Posons :

$$f(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{31}$$

L'équation

$$a_0 \frac{d^n u}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n u = v, \tag{32}$$

s'écrit symboliquement :

$$f(p)u = v,$$

et conduit à

$$u = \left[\frac{1}{f(p)}\right] v. \tag{33}$$

Or, si $f(p)$ a des racines distinctes, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, on a :

$$\frac{1}{f(p)} = \sum \frac{1}{f'(r_\nu)(p - r_\nu)} = \sum_{h=0} \frac{1}{p^{h+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu}{f'(r_\nu)},$$

et l'on est conduit à interpréter la formule symbolique (33) comme représentant la fonction :

$$\sum_0^\infty C_h I^{h+1} v(x), \qquad \left[C_h = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{r_\nu^h}{f'(r_\nu)}\right].$$

On a ainsi une solution particulière de l'équation (32). Elle peut encore, compte tenu de la formule (16), s'écrire :

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi) \sum_{0}^{\infty} C_h \frac{(x-\xi)^h}{h\,!} d\xi. \tag{34}$$

Le calcul symbolique d'Heaviside s'applique aussi à l'intégration d'équation aux dérivées partielles à coefficients constants, telles que l'équation des cordes vibrantes ou l'équation des télégraphistes. Cela est moins simple ; il faut introduire deux symboles différents, p et q, qui représentent respectivement les dérivations par rapport à x et y. Nous renverrons pour ces questions aux travaux de Heaviside et de Carson.

3. Le calcul symbolique de Volterra.

Ce calcul généralise considérablement celui de Heaviside. L'exposé le plus complet a été fait par Volterra dans ses leçons sur la composition et sur les fonctions permutables rédigées par J. Pérès et publiées chez Gauthier-Villars.

La composition de deux fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ est, suivant les cas, définie par une des formules :

$$f(x, y) = \int_{x}^{y} f_1(x, z) f_2(z, y)\, dz, \tag{35}$$

$$f(x, y) = \int_{a}^{b} f_1(x, z) f_2(z, y)\, dz, \tag{36}$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x, z) f_2(z, y)\, dz. \tag{37}$$

Dans les trois cas, nous emploierons avec Volterra la notion symbolique :

$$f(x, y) = f_1(x, y) * f_2(x, y), \tag{38}$$

et la $n^{\text{ième}}$ puissance symbolique d'une fonction f sera représentée par

$$[f(x, y)]^{*n}.$$

L'étude du cas où l'on a :

$$f_1(x, y) * f_2(x, y) = f_2(x, y) * f_1(x, y), \tag{39}$$

c'est-à-dire où les deux fonctions $f_1(x, y)$ et $f_2(x, y)$ sont permutables, est particulièrement importante, pour les raisons déjà indiquées au

§ 1. Les puissances symboliques d'une même fonction sont permutables entre elles.

Un groupe de fonctions permutables particulièrement important est constitué par les fonctions qui ne dépendent que de la différence des deux arguments. Dans le cas de la composition à limites variables, la fonction

$$(40) \qquad f(y-x)=\int_x^y f_1(z-x)f_2(y-z)\,dz,$$

ou plus simplement

$$(40') \qquad f(x)=\int_0^x f_1(z)f_2(x-z)\,dz,$$

ne dépend bien que de $x-y$, puisque rien ne change si, en ajoutant une même constante à x et y, on l'ajoute aussi à z. D'autre part, en posant $x-z=y$, on vérifie que les fonctions f_1 et f_2 sont permutables.

La même remarque s'applique à la permutation à limites fixes, à condition de considérer les fonctions $f_1(u)$ et $f_2(u)$ comme définies même en dehors de l'intervalle (a, b) et ayant pour période $b-a$. En prenant des fonctions de périodes 2π, la formule de composition devient :

$$(41) \qquad f(y-x)=\int_0^{2\pi} f_1(z-x)f_2(y-z)\,dz,$$

ou, plus simplement :

$$(41') \qquad f(x)=\int_0^{2\pi} f_1(z)f_2(x-z)\,dz.$$

On remarque que, si l'on représente les fonctions f, f_1, f_2 par les séries de Fourier

$$(42) \quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\Sigma a_n e^{inx}, \quad f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\Sigma b_n e^{inx}, \quad f_2(x)=\frac{1}{2\pi}\Sigma c_n e^{inx}\ (^1),$$

la formule (41′) donne immédiatement

$$(43) \qquad a_n=b_n c_n.$$

Il en résulte que la puissance de composition d'ordre h de $f(x)$ est

(1) Voir à ce sujet les travaux de P. Lévy et notamment la notice sur ses travaux scientifiques (Hermann, 1935). Rappelons que $2\pi f(x) \sim \Sigma a_n e^{inx}$ est une notation employée parce que la série de Fourier peut n'être pas convergente. Elle équivaut à

$$a_n=\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-nix}\,dx.$$

représentée par la série de Fourier

$$|f(x)|^{*h} \sim \frac{1}{2\pi} \Sigma a_n^h e^{inx},$$

et si tous les a_n sont positifs ou nuls (ou si on les met sous la forme $e^{\alpha n + i\beta n}$ de manière que a_n^h soit défini sans ambiguïté), on peut parler des puissances symboliques de $f(x)$ à exposants non entiers.

Dans le cas des limites infinies, on a de même

$$(44) \qquad f(x) = f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) f_2(x-y)\, dy, \\ = f_2(x) * f_1(x),$$

et, si l'on fait intervenir la transformée de Fourier

$$(45) \qquad \varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x)\, dx,$$

il vient :

$$(46) \qquad \varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z).$$

Cette formule, comme la formule (43) dans le cas des limites infinies, permet de définir des puissances symboliques d'ordres non entiers.

Ces formules sont très importantes en calcul des probabilités. Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont les densités de probabilité de deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, la fonction $f(x)$, définie par les formules (44) ou (41) suivant que ces variables sont définies sur une droite ou sur le cercle trigonométrique, est la densité de probabilité de la somme $X_1 + X_2$. Le fait, indiqué ci-dessus, que la transformation de Fourier réduise les formules relatives à l'addition de deux variables aux formes simples (46) et (43) est naturellement fondamental [1].

La formule (44) et, par suite, la formule (46) sont de même très importantes dans la théorie de la chaleur. Si $f_0(x)$ est la température initiale d'une barre isolée et de capacité et conductibilité constantes,

[1] La fonction $\varphi(z)$ est la fonction caractéristique introduite par Cauchy, systématiquement utilisée par Paul Lévy. Pour les applicotions de la formule (43), voir son mémoire de 1939 dans le *Bulletin de la Société mathématique*. Voir aussi l'application de formules analogues dans sa thèse (Paris, 1911) et dans son mémoire sur le cylindre de révolution (*Rendiconti. d. circ. matematico di Palermo*, 1912).

au bout du temps t sa température sera (avec des unités convenables)

$$(47) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{2t}} d\xi,$$

$$= f_0(x) * \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} = f_0(x) * \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)^{*t}.$$

Cette formule introduit l'intégrale de Laplace et Gauss

$$(48) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

fondamentale tant en calcul des probabilités que pour l'étude de la chaleur. On voit que la fonction intégrée formée pour différentes valeurs de t correspond à différentes puissances symboliques d'une même fonction. Elles forment un groupe abélien continu.

On remarque que les formules (43) et (46) permettent immédiatement de résoudre les équations intégrales (41) et (44), si l'on y considère f_1 (ou f_2) comme la fonction inconnue. (Voir sur ce sujet les travaux de P. Lévy, notamment sa notice de 1935, ceux de N. Wiener, et ceux de G. Doetsch.)

Le résultat essentiel de Volterra est l'intégration, par sa méthode de calcul symbolique, de nouvelles équations intégrales. Si une équation :

$$(49) \qquad y = x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

est résolue par

$$(50) \qquad x = y + b_2 y^2 + \cdots b_n y^n + \cdots,$$

il en résulte que l'équation

$$(51) \qquad g(x) = f(x) + \sum_2^{\infty} a_n [f(x)]^{*n},$$

est résolue par

$$(52) \qquad f(x) = g(x) + \sum_2^{\infty} b_n [g(x)]^{*n}.$$

Il n'y a qu'à porter cette expression dans l'équation (51); l'identification des deux membres implique les mêmes relations entre les a_n et les b_n que la vérification de l'équation (49) par l'expression (50).

Ainsi, l'équation :

$$(53)\qquad g(x) = (e^* - 1)f(x) = f(x) + \sum_2^\infty \frac{1}{n!} f^{*n}(x),$$

est résolue par

$$(54)\qquad f(x) = [\log(1 + *)] f(x) = f(x) - \frac{1}{2} f^{*2}(x) + \frac{1}{2} f^{*3}(x) \ldots$$

On remarque que, dans ces formules, n'interviennent que des puissances symboliques d'une même fonction, nécessairement permutables entre elles. Dans des équations où interviendraient plusieurs fonctions données, il faut qu'elles soient permutables pour que l'application du calcul symbolique soit commode.

Pour justifier les formules (52) et (54), il reste à s'occuper des questions de convergence. On constate à ce sujet, entre le cas des limites fixes et celui des limites variables, la différence déjà signalée dans les cas particuliers considérés au n° 1.

Si les limites sont variables, c'est-à-dire si la composition est définie par la formule (35), les formules

$$(55)\qquad |f_\nu(x, y)| \leqslant K_\nu, \qquad (\nu + 1, 2, \ldots, n),$$

entraînent, pour tous les produits de composition des fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_n$, la majoration

$$(56)\qquad |f(x, y)| \leqslant K_1 K_2 \ldots K_n \frac{|x - y|^{n-1}}{(n-1)!},$$

et la présence des factorielles en dénominateur assure la convergence des développements considérés dans les applications. Ainsi, si la fonction y de x définie par la formule (49) est holomorphe à l'origine, c'est-à-dire si les formules (49) et (50) ont un sens pour x et y assez petits, les développements (51) et (52) sont convergents pourvu que les fonctions qui y figurent soient bornées et, dans le champ des fonctions bornées, chacune de ces formules résout l'autre.

Il n'en est pas de même s'il s'agit de la composition à limite fixe. La formule (56) est alors remplacée par

$$(57)\qquad |f(x, y)| < K_1 K_2 \ldots K_n |b - a|^{n-1},$$

et la convergence des développements (51) et (52) n'est assurée que si $|f(x)|$ et $|g(x)|$ sont assez petits.

Cela explique que, comme on peut le voir dans son ouvrage cité plus haut, Volterra ait pu pousser l'étude de la composition à limites variables beaucoup plus loin que celle du cas des limites fixes. Il a notamment, dans le cas des limites variables, poussé très loin l'étude de la recherche des fonctions permutables avec une fonction donnée.

On peut, dans le cas de la formule (45), indiquer une autre majoration qui s'applique dans certains cas où $f(x)$ n'est pas borné et qui présente aussi l'avantage de s'étendre au cas des limites infinies. Si l'on a

$$\int_0^{2\pi} |f_\nu(x)|\, dx \leqslant 2\pi K_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{58}$$

pour le produit symbolique $f(x)$ des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots, f_n(x)$, on a :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant 2\pi\, K_1 K_2 \ldots K_n, \tag{59}$$

et, en particulier, si tous les facteurs sont égaux, on voit que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \leqslant 2\pi K, \tag{60}$$

entraîne

$$\int_0^{2\pi} |f^{*n}(x)|\, dx \leqslant 2\pi K^n. \tag{61}$$

Si alors le développement (49) converge pour x assez petit (donc aussi (40) pour y assez petit), le développement (51) converge pour toutes les fonctions sommables pour lesquelles l'intégrale (60) est assez petite ; comme alors l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx \leqslant 2\pi\Big[K + \sum_2^{\infty} |a_n| K^n\Big], \tag{62}$$

est aussi petite, le développement (52) converge aussi et l'on peut toujours affirmer que les deux formules (51) et (52) se résolvent l'une par l'autre.