RENÉ DE POSSEL

Sur l'indétermination de la puissance d'un torseur réparti

Annales de l'université de Grenoble, tome 21 (1945), p. 109-115
<http://www.numdam.org/item?id=AUG_1945__21__109_0>

SUR L'INDÉTERMINATION DE LA PUISSANCE D'UN TORSEUR RÉPARTI

par M. René de POSSEL (Alger).

L'exposé des principes mathématiques de la mécanique par Marcel Brelot [1], remplaçant les diverses grandeurs qu'on associe d'ordinaire à des points matériels en nombre fini par des mesures numériques ou vectorielles à variation bornée, paraît fournir une représentation correcte de la plupart des systèmes physiques.

M. Brelot admet que si une force a pour chaque corps partiel c un vecteur principal $\vec{S}(c)$, le moment en O de cette force est :

$$(1) \qquad \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS}.$$

Cependant certains phénomènes physiques donnent naissance à une force ne vérifiant pas cette condition ; il arrive, par exemple, que le vecteur principal soit toujours nul, le moment ne l'étant pas. De nombreuses exceptions semblent se présenter en magnétisme et en théorie des diélectriques.

J'ai montré précédemment [2] comment on peut introduire des torseurs répartis plus généraux, dont le moment en O est simplement assujetti à se transformer suivant la loi :

$$\overrightarrow{G_{o'}}(c) = \overrightarrow{G_o}(c) + \overrightarrow{o'o} \wedge \vec{S}(c).$$

La possibilité d'une telle extension avait d'ailleurs été signalée par M. Brelot dans les travaux ci-dessus cités. J'ai également montré à titre d'exemple comment on peut écrire les équations du mouve-

[1] Annales de l'Université de Grenoble (Section sciences-médecine) : *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique*, t. XIX, 1943. *Sur quelques points de mécanique rationnelle*, t. XX, 1944 ;
et un vol. *Les principes mathématiques de la mécanique classique*, Arthaud, Grenoble-Paris, 1945.

[2] C. R. Acad. Sc. de Paris, t. 222 (1946), p. 1470 : *Sur la définition d'un torseur réparti et sur l'évaluation de sa puissance*, note désignée dans la suite par A, et Gazeta de Matematica, nº 28, 1946, Lisbonne : *Sur les principes mathématiques de la mécanique classique*.

ment d'un fil raide rectifiable ou d'un milieu continu en faisant intervenir ces torseurs généraux [1].

Le but du présent travail est de donner les démonstrations de quelques formules relatives à la puissance d'un torseur énoncées dans la note A. Rappelons les définitions de cette note :

Un *torseur réparti* $\mathcal{T}$ défini pour l'ensemble des corps partiels c du corps C, ayant un vecteur principal $\vec{S}(c)$ et un moment en O égal à $\overrightarrow{G_0}(c)$, est la somme d'un torseur ayant pour vecteur principal $\vec{S}(c)$ et pour moment en O l'intégrale (1), et d'un torseur ayant un vecteur principal toujours nul et un moment

$$\vec{\varpi}(c) = \overrightarrow{G_0}(c) - \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS},$$

expression indépendante de O. Nous nommons le premier *torseur pur de* $\mathcal{T}$, et le deuxième *couple pur de* $\mathcal{T}$. La mesure $\vec{\varpi}(c)$ sera le *moment pur* de $\mathcal{T}$.

Etant donné un corps matériel en mouvement, défini à partir d'une image fixe K par une fonction M(P, t) où P parcourt K, chaque *force absolue* F_k appliquée au corps est un torseur réparti fonction du temps ; soit $\overrightarrow{A_k}(c)$ son vecteur principal et $\overrightarrow{\lambda_k}(c)$ son moment pur. Le *principe fondamental* s'énonce ainsi : *la somme des forces absolues est égale à chaque instant au torseur quantité d'accélération, évalué dans un repère particulier dit galiléen*. Nous admettons que ce torseur quantité d'accélération est pur : il en est donc de même du torseur somme des forces absolues, et le principe fondamental s'écrit, en désignant par $\vec{S}(c)$ le vecteur principal de ce dernier torseur

$$\vec{S}(c) = \Sigma\overrightarrow{A_k}(c) = \int_c \vec{\Gamma} dm, \qquad \Sigma\overrightarrow{\lambda_k}(c) = 0.$$

La deuxième équation équivaut, en tenant compte de la première, à l'équation des moments qui s'écrit, en désignant par $\overrightarrow{G_{ok}}(c)$ le moment en O de $\mathcal{F}_k$:

$$\Sigma\overrightarrow{G_{ok}}(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma} dm.$$

Les *forces intérieures* sont définies, comme chez M. Brelot, par la

(1) Voir C. R. Ac. Sc. de Paris, t. 223 (1946) p. 127 : *Sur les applications des torseurs répartis à la dynamique des corps à une dimension rectifiables et des milieux continus.*

condition d'être nulles pour le corps tout entier C. Si la force $\mathcal{F}_k$ par exemple est intérieure, cette condition s'écrit

$$\vec{A}_k(C) = 0, \qquad \vec{\lambda}_k(C) + \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dA_k} = 0.$$

Si donc on désigne par $\vec{S}_i(c)$, $\vec{\varpi}_i(c)$ le vecteur principal et le moment pur de la somme des forces intérieures, et par $\vec{S}_e(c)$, $\vec{\varpi}_e(c)$ les mêmes éléments pour les forces extérieures (forces absolues non intérieures, augmentées des forces d'inertie d'entraînement et complémentaire si le repère dans lequel on évalue $\vec{\Gamma}$ n'est plus galiléen), on a les relations ;

$$(2)\quad \vec{S}_i(C) = 0, \quad \vec{\varpi}_i(C) + \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_i} = 0, \quad \vec{\varpi}_e(c) + \vec{\varpi}_i(c) = 0,$$

la dernière ayant lieu quel que soit c.

On en déduit, en particulier,

$$(3)\qquad \vec{\varpi}_e(C) = \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_i}.$$

La *puissance d'un torseur pur* de vecteur principal $\vec{A}(c)$ est toujours définie pour un corps c, par rapport à un champ de vecteur $\vec{w}$, par l'intégrale $\int_c \vec{w} \cdot \overrightarrow{dA}$.

PUISSANCE D'UN TORSEUR QUELCONQUE

Cas d'un solide. — Evaluons, par exemple, la puissance $\mathfrak{L}$ du torseur (pur) somme de toutes les forces dans le cas d'un corps solide, de rotation instantanée $\vec{\omega}$, puissance réelle par rapport au champ des vitesses

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}.$$

$$\mathfrak{L} = \int_C \vec{V}_0 \cdot \overrightarrow{dS} + \int (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \cdot \overrightarrow{dS} = \vec{V}_0 \cdot \vec{S}(C) + \vec{\omega} \cdot \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS},$$

d'où, en tenant compte des égalités (2) et (3)

$$(4)\quad \mathfrak{L} = \vec{V}_0 \cdot \vec{S}_e(C) + \vec{\omega}\left[\int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_e} + \vec{\varpi}_e(C)\right] = \mathfrak{L}_e + \vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}_e(C),$$

en désignant par $\mathfrak{L}_e$ la puissance du torseur pur extérieur. Si on désigne par $\overrightarrow{G_{oe}}(c)$ le moment en O de la somme des forces extérieures, on a

$$\mathcal{L} = \overrightarrow{V_o} \cdot \overrightarrow{S_e}(C) + \cdot \overrightarrow{G_{oe}}(C),$$

cette dernière expression ne dépend que des forces extérieures.

La puissance du torseur pur intérieur est de même

$$\mathcal{L}_i = \overrightarrow{V_o} \cdot \overrightarrow{S_i}(C) + \vec{\omega} \int_C \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS_i}$$
$$= \overrightarrow{V_o} \cdot \overrightarrow{S_i}(C) - \vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}_i(C) = -\vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}_i(C).$$

Pour rester en accord avec la notion physique de puissance, la puissance des forces intérieures doit être nulle et il faut attribuer au couple pur intérieur une puissance opposée à $\mathcal{L}_i$, soit $\vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}_i(C)$.

De plus, $\mathcal{L}$ doit représenter la puissance du torseur extérieur et par suite son couple pur, d'après (4), doit avoir une puissance

$$\vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}_e(C).$$

On peut illustrer ces relations par l'exemple d'un solide soumis à un couple pur proportionnel au volume.

Cas général. — Physiquement, on peut considérer un torseur quelconque comme schématisant un torseur pur $\mathcal{T}$, dont le vecteur principal $\vec{\sigma}(c)$ subit de fortes variations dans des corps partiels très petits et peut être remplacé par une moyenne $\vec{S}(c)$ pour un corps c de dimensions appréciables et de forme assez simple.

Précisons ce point de vue. Posons

$$\vec{\tau}(c) = \vec{\sigma}(c) - \vec{S}(c),$$
$$\mu(c) = \operatorname{Sup} \sum_k \left|\vec{\tau}(c_k)\right|, \qquad \nu(c) = \operatorname{Sup} \sum_k \left|\vec{S}(c_k)\right|$$

les barres verticales désignant les longueurs des vecteurs et Sup indiquant les bornes supérieures pour tous les partages de c en corps partiels c_k, $\mu(c)$ et $\nu(c)$ sont finis puisque $\vec{S}$ et $\vec{\sigma}$ sont à variation bornée, hypothèse faite dès le début. Admettons que pour un nombre $\eta > 0$, très petit par rapport à $\nu(c)$, et un nombre $\delta > 0$ il existe des partages de C en corps partiels de diamètre au plus égal à δ pour lesquels on ait :

$$(4) \qquad \sum_k \left|\vec{\tau}(c_k)\right| \leqslant \eta.$$

Evaluons la puissance $\mathfrak{L} = \int_C \vec{w}\,\vec{d\sigma}$ du torseur pur $\mathfrak{T}$ par rapport à un champ de vecteurs $\vec{w}$. Supposons pour simplifier que $\vec{w}$ soit défini et admette des dérivées dans un ensemble ouvert contenant C. Désignons par w^j les coordonnées de $\vec{w}$, par x^i celles d'un point de C, et posons :

$$r_i^j = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}.$$

Soit α un nombre positif tel qu'en deux points M′ et M″ distants d'au plus δ, on ait :

$$|r_i^j(\mathrm{M}') - r_i^j(\mathrm{M}'')| \leqslant \alpha.$$

Soit c un corps partiel de diamètre au plus égal à δ, Q un point fixe de c de coordonnées $\underset{o}{x^i}$. Evaluons d'abord la puissance $p(c)$ pour le corps c du torseur pur de vecteur principal τ. En un point quelconque de c, en posant

$$\xi^i = x^i - \underset{o}{x^i}, \qquad \underset{o}{r_i^j} = r_i^j(\mathrm{Q}),$$

la formule des accroissements donne

$$\vec{w} = \vec{w}(\mathrm{Q}) + \sum_i \xi^i \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{Q}} + \vec{\varepsilon}\delta \qquad |\vec{\varepsilon}| \leqslant 3\alpha.$$

Désignons par τ_j, les coordonnées de $\vec{\tau}$; on a

$$p(c) = \int_c \vec{w}\,\vec{d\tau} = \vec{w}(\mathrm{Q}) \,.\, \vec{\tau}(c) + \sum_i \sum_j \underset{o}{r_i^j} \int_c \xi^i d\tau_j + \varepsilon_1 \delta$$

avec

$$|\varepsilon_1| \leqslant 3\alpha\mu(c).$$

On peut écrire (sans convention de sommation)

$$\underset{o}{r_i^j}\xi^i = r_i^j x^i - \underset{o}{r_i^j}\underset{o}{x^i} - \left(r_i^j - \underset{o}{r_i^j}\right) x^i$$

d'où, en posant

(6) $$\lambda_j^i(c) = \int_c x^i d\tau_j,$$

on déduit

$$\underset{o}{r_i^j} \int_c \xi^i d\tau_j = \int r_i^j d\lambda_j^i + \rho_{ij}$$

avec

$$|\rho_{ij}| \leqslant \mathrm{BN}|\tau_j(c) + \alpha\lambda_j^i(c),$$

pourvu que les x^i ne changent pas de signe, B majorant les coordonnées d'un point de C et N majorant les $|r_i^j|$.

On en déduit, si A majore $|\vec{w}|$,

$$p(c) = \sum_i \sum_j \int_c r_i^j d\lambda_j^i + \rho$$

$$|\rho| \leqslant \mathrm{A}|\vec{\tau}(c)| + 3\mathrm{BN}\sum_j |\tau_j(c)| + 3\alpha\delta\mu(c) + \alpha \sum_i \sum_j |\lambda_j^i(c)|$$

ou

$$|\rho| \leqslant \mathrm{A}_1 |\vec{\tau}(c)| + 3\alpha\delta\mu(c) + \alpha \sum_i \sum_j |\lambda_j^i(c)|$$

en posant

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A} + 3\sqrt{3}\,\mathrm{BN}.$$

Partageons C en corps partiels c_k de manière à satisfaire à la condition (5) et désignons par β le maximum des sommes $\sum_k |\lambda_j^i(c_k)|$. Nous obtenons pour expression de la puissance cherchée

$$\mathfrak{L} = \int_{\mathrm{C}} \vec{w}\,\vec{d\sigma} = \int_{\mathrm{C}} \vec{w}\,\vec{d\mathrm{S}} + \sum_k p(c_k) = \int_{\mathrm{C}} \vec{w}\,\vec{d\mathrm{S}} + \sum_i \sum_j \int_{\mathrm{C}} r_i^j d\lambda_j^i + \mathrm{R}$$

avec

$$|\mathrm{R}| \leqslant \mathrm{A}_1\eta + 3\alpha\delta\mu(\mathrm{C}) + 9\alpha\beta.$$

Si donc η, $\alpha\delta\mu(\mathrm{C})$ et $\alpha\beta$ sont assez petits, on a pour expression approchée de $\mathfrak{L}$ celle de la puissance du torseur pur de vecteur principal $\vec{\mathrm{S}}$, augmentée de :

$$\Pi = \sum_i \sum_j \int_{\mathrm{C}} r_i^j d\lambda_j^i$$

les λ_j^i étant définis par (6).

En introduisant le tenseur gradient du vecteur $\vec{w}$ et la mesure tensorielle $\vec{\vec{\lambda}}$ de coordonnées $\lambda_j^i(c)$, on peut écrire

$$\Pi = \int_{\mathrm{C}} \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\vec{w}}\,\vec{\vec{d\lambda}}.$$

(Si le corps est un milieu continu et si $\vec{\vec{\lambda}}$ admet une densité $\vec{\vec{\mathrm{U}}}$ par rapport au volume, cette intégrale peut s'interpréter de la façon suivante : le milieu étant animé d'un champ de vitesses $\vec{w}$, Π représente la puissance d'une tension qui y régnerait et qui serait représentée par un tenseur égal à $-\vec{\vec{\mathrm{U}}}$.)

Transformons Π. Le moment en O du torseur $\mathcal{T}$ est, en désignant par $\vec{\varpi}(c)$ son moment pur,

$$\int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d\sigma} = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dS} + \vec{\varpi}(c)$$

d'où

$$\vec{\varpi}(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d\tau}.$$

Les coordonnées de $\vec{\varpi}$ sont donc

$$\lambda_3^2 - \lambda_2^3, \qquad \lambda_1^3 - \lambda_3^1, \qquad \lambda_2^1 - \lambda^2.$$

Si on désigne par $\vec{\vec{\mu}}(c)$ la mesure tensorielle de coordonnées

$$\mu_j^i = \frac{1}{2}(\lambda_j^i + \lambda_i^j),$$

on a

$$\lambda_j^i = \mu_j^i + \frac{1}{2}(\lambda_j^i - \lambda_i^j)$$

et
$$\sum_i \sum_j (\lambda_j^i - \lambda_i^j) r_i^j = \overrightarrow{\text{rot}\, w} \cdot \vec{\varpi}.$$

D'autre part, si on désigne par $\vec{\vec{D}}$ le tenseur vitesse de déformation qui correspondrait à un champ de vitesses égal à $\vec{w}$, dont les coordonnées sont les r_i^j on a

$$\sum_i \sum_j (r_i^j \mu_j^i = \vec{\vec{D}} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{d\mu}}.$$

Il en résulte

$$\Pi = \int_C \vec{\vec{D}} \cdot \overrightarrow{\overrightarrow{d\mu}} + \int_C \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}\, \vec{w}}\, \overrightarrow{d\varpi}.$$

Pour un corps solide de rotation instantanée $\vec{\omega}$, on a $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}\, \vec{w}}$, $\vec{\vec{D}} = 0$ et $\Pi = \vec{\omega} \cdot \vec{\varpi}(C)$.

La formule reste vraie pour tout corps partiel (à condition qu'il ne soit pas trop petit). C'est l'expression trouvée plus haut dans le cas du torseur somme de toutes les forces intérieures ou extérieures.

En résumé, la puissance du torseur ne paraît pas être déterminée en général quand on connaît son vecteur principal macroscopique $\vec{S}(c)$ et son moment pur. Il intervient en outre une mesure tensorielle symétrique $\vec{\vec{\mu}}$ qui dépend de la répartition microscopique du vecteur principal exact $\vec{\sigma}(c)$.