Astérisque

ANTOINE DUCROS

Les espaces de Berkovich sont modérés [d'après Ehud Hrushovski et François Loeser]

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1056, p. 459-507
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__459_0>

Séminaire BOURBAKI Juin 2012
64[e] année, 2011-2012, n° 1056, p. 459 à 507

LES ESPACES DE BERKOVICH SONT MODÉRÉS
[d'après Ehud Hrushovski et François Loeser]

par **Antoine DUCROS**

Conventions préalables

Il sera question tout au long de ce texte de *valuations*, pour lesquelles deux notations sont en concurrence : la notation additive et la notation multiplicative. Nous avons opté pour la notation multiplicative, naturelle en géométrie de Berkovich. Une valuation sur un corps k consiste donc en la donnée : d'un groupe abélien ordonné G noté multiplicativement d'élément neutre 1; et d'une application $|.|$ de k vers $G_0 := G \cup \{0\}$ (où 0 est absorbant, et plus petit que tout élément de G) telle que $|0| = 0, |1| = 1$, $|ab| = |a| \cdot |b|$ et $|a + b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ pour tout $(a, b) \in k^2$; *nous n'exigeons pas que* $|k| = G_0$. L'anneau de la valuation $|.|$ est égal à $\{x \in k, |x| \leqslant 1\}$; on le notera k°. Son idéal maximal est $k^{\circ\circ} := \{x \in k, |x| < 1\}$; son corps résiduel $k^{\circ}/k^{\circ\circ}$ sera noté $\tilde{k}$. Un *corps valué* est un corps muni d'une valuation ; un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique, c'est-à-dire encore d'une valuation à valeurs réelles.

INTRODUCTION

À la fin des années quatre-vingt, Vladimir Berkovich a proposé une nouvelle approche de la géométrie analytique ultramétrique ([**2**], [**3**] ; cf. aussi l'exposé [**11**] de ce séminaire). L'un de ses traits distinctifs est qu'elle fournit des espaces ayant d'excellentes propriétés *topologiques*, qui se sont avérées très utiles pour des raisons techniques, mais aussi psychologiques dans la mesure où elles sont souvent remarquablement conformes à l'intuition classique : par exemple, le disque unité fermé est, dans ce contexte, une partie compacte et à bord non vide de la droite affine.

(*) Durant la préparation de cet exposé, l'auteur était responsable du projet ANR Jeunes Chercheurs Espaces de Berkovich (07-JCJC-0004-CSD5).
L'auteur est membre junior de l'Institut universitaire de France.

La connaissance de ces propriétés topologiques a récemment progressé de manière considérable grâce à l'article [**17**] de Ehud Hrushovski et François Loeser, auquel ce texte est consacré. Avant d'en présenter les grandes lignes, nous allons succinctement exposer l'état de l'art antérieur à sa parution. On peut, grossièrement, classer les propriétés qui étaient connues jusqu'alors en trois catégories.

1) *Celles qui relèvent de la topologie générale.* Les espaces de Berkovich sont localement compacts, localement connexes par arcs, et de dimension topologique finie lorsqu'ils sont compacts. Elles ont été établies par Berkovich lui-même (pour l'essentiel dans [**2**]) aux débuts de la théorie. Leurs preuves reposent sur des arguments très généraux, tel le théorème de Tychonoff, ainsi que sur une étude *explicite* du disque unité.

2) *Celles qui relèvent de la modération*[(1)] *homotopique.* Elles sont là encore dues à Berkovich, qui les a prouvées dans l'article [**4**]. Soit X un espace analytique compact sur un corps ultramétrique complet k. Supposons que X admet un modèle formel polystable $\mathfrak{X}$ sur k°. La combinatoire des singularités de la fibre spéciale $\mathfrak{X} \otimes \tilde{k}$ de $\mathfrak{X}$ peut être codée par un polytope P de dimension inférieure ou égale à celle de X ; Berkovich démontre, en se ramenant par localisation étale à une situation torique qui se traite à la main, que P est homéomorphe à un fermé de X, sur lequel X se rétracte par déformation.

À l'aide des altérations de de Jong, il en déduit que si la valeur absolue de k n'est pas triviale, tout espace k-analytique lisse est localement contractile ; il montre plus généralement que c'est le cas de tout espace k-analytique *localement isomorphe à un domaine strictement k-analytique d'un espace k-analytique lisse.* Donnons quelques très brèves explications sur les termes employés, en renvoyant le lecteur en quête de définitions détaillées au texte fondateur [**3**] de Berkovich. Les *domaines analytiques* d'un espace analytique X sont des sous-ensembles de X qui ont une structure *canonique* d'espace analytique. Parmi eux, on trouve entre autres les ouverts de X et certains compacts intéressants mais pas, en général, les fermés de Zariski de X (qui peuvent admettre plusieurs structures analytiques, à cause des phénomènes de nilpotence). Quant à l'adverbe « strictement », il fait référence à une condition sur les paramètres de définition. Illustrons ces notions par un exemple : pour tout n-uplet $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ de réels strictement positifs, le polydisque fermé $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ de polyrayon $\mathbf{r}$ est un domaine analytique compact de l'espace affine analytique $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$, et $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ est strictement k-analytique si et seulement si les r_i appartiennent à $|k^*|^{\mathbb{Q}}$. Mentionnons

(1) Nous ne chercherons pas ici à définir précisément le terme « modération ». Il est à prendre dans une acception assez vague, dans l'esprit d'*Esquisse d'un programme* : il évoque une certaine forme de finitude, ainsi que l'absence de pathologies.

incidemment que $\mathbb{A}_k^{n,\mathrm{an}}$ est lisse, mais pas $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ si $n > 0$ car ce dernier a alors un bord non vide.

3) *Celles qui relèvent de la modération en matière de composantes connexes.* Il y en a essentiellement deux, l'une portant sur les « parties semi-algébriques » de l'analytifié d'une variété algébrique, et l'autre sur certaines « familles réelles » d'espaces analytiques.

- *Modération des ensembles semi-algébriques.* Soit X une variété algébrique sur un corps ultramétrique complet k. Une partie V de son analytifié X^{an} est dite *semi-algébrique* si elle peut être définie, localement pour la topologie de Zariski sur X^{an}, par une combinaison booléenne finie d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g sont des fonctions polynomiales, où $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et où le symbole $\bowtie$ appartient à $\{<, >, \leqslant, \geqslant\}$.

Toute partie semi-algébrique de X^{an} a un nombre fini de composantes connexes, elles-mêmes semi-algébriques. Ce résultat a été établi dans **[10]** par l'auteur(2) ; la preuve repose sur différents résultats difficiles d'algèbre commutative normée, reliant les propriétés d'une algèbre affinoïde à celles de sa réduction, qui sont dus à Grauert et Remmert d'une part ([**13**]), à Bosch d'autre part ([**8**]).

- *Modération en famille réelle.* Soit X un espace analytique compact et soit f une fonction analytique sur X. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, notons X_ε l'ensemble des $x \in X$ tels que $|f(x)| \geqslant \varepsilon$. Il existe une partition finie de $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}_+$ en intervalles, possédant la propriété suivante : pour tout $I \in \mathscr{P}$ et tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ d'éléments de I tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$, l'application naturelle $\pi_0(X_{\varepsilon'}) \to \pi_0(X_\varepsilon)$ est bijective. Ce théorème a été prouvé par Jérôme Poineau dans **[20]**, à l'aide de deux résultats de désingularisation : le « théorème de la fibre réduite » (forme affaiblie du théorème de réduction semi-stable, démontrée en toute dimension par Bosch, Lütkebohmert et Raynaud dans **[9]**), et un théorème d'élimination de la ramification sauvage, établi par Epp dans **[12]**. Indiquons que le cas particulier où la fonction f est inversible avait été traité antérieurement par Abbes et Saito dans leur travail **[1]** sur la ramification sauvage.

Mentionnons pour conclure ce survol une interprétation conceptuelle de l'espace topologique sous-jacent à un espace analytique — ou à tout le moins de sa cohomologie. Soit k un corps ultramétrique complet, soit k^a une clôture algébrique de k, et soit X une k-variété algébrique. La cohomologie de l'espace topologique $X^{\mathrm{an}}_{\widehat{k^a}}$ a alors tendance à s'identifier de manière Galois-équivariante, lorsque cela a un sens, à la partie *de poids zéro* de la cohomologie « usuelle » de X_{k^a}. Pour plus de précisions, le lecteur intéressé pourra consulter : l'article **[5]** de Berkovich, qui traite le cas d'un corps local, d'un corps de type fini sur son sous-corps premier, et de $\mathbb{C}$ (la valeur absolue dans ces deux derniers cas est *triviale*) ; et les articles **[6]** et **[19]** (le premier de Berkovich,

(2) Dans **[10]** seul le cas des variétés affines est considéré, mais il est immédiat qu'il entraîne le cas général.

le second de Johannes Nicaise), qui traitent le cas du corps $\mathbb{C}((t))$ muni d'une valeur absolue t-adique, en lien avec les familles à un paramètre de variétés complexes.

Les résultats de Hrushovski et Loeser. On peut les résumer en disant qu'ils étendent 2) et 3) à *toutes les situations provenant de la géométrie algébrique (projective).* Plus précisément, soit k un corps ultramétrique complet, soit X une k-variété algébrique *quasi-projective*, et soit V une partie semi-algébrique de X^{an}. Hrushovski et Loeser démontrent entre autres les assertions suivantes.

A) *Modération globale.* Il existe un fermé S de V homéomorphe à un complexe simplicial fini de dimension inférieure ou égale à celle de X, et une rétraction par déformation de V sur S telle que tous les points d'une trajectoire donnée aient même image terminale sur S.
B) *Modération locale.* L'espace topologique V est localement contractile.
C) *Modération en famille algébrique.* Soit Y une k-variété algébrique et soit f un morphisme de X vers Y. L'ensemble des types d'homotopie des fibres de $f^{\mathrm{an}}|_V : V \to Y^{\mathrm{an}}$ est fini.
D) *Modération en famille réelle.* Soit $g \in \mathscr{O}_X(X)$. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, notons V_ε l'ensemble des $x \in V$ tels que $|g(x)| \geqslant \varepsilon$. Il existe une partition finie de $\mathscr{P}$ de $\mathbb{R}_+$ en intervalles, possédant la propriété suivante : pour tout $I \in \mathscr{P}$ et tout couple $(\varepsilon, \varepsilon')$ d'éléments de I tel que $\varepsilon \leqslant \varepsilon'$, l'inclusion $V_{\varepsilon'} \subset V_\varepsilon$ est une équivalence homotopique.

Commentaires. En ce qui concerne A), soulignons que même dans le cas où X est projective et lisse et où $V = X^{\mathrm{an}}$, cette assertion n'était jusqu'alors connue que lorsque X admet un modèle polystable, cf. les résultats globaux mentionnés en 2).

En ce qui concerne B), notons que V possède une base de voisinages qui sont des parties semi-algébriques de X^{an} ; cela permet de déduire B) de A) et de la locale contractibilité des complexes simpliciaux finis.

Par ailleurs, tout domaine analytique de X^{an} possède une base d'ouverts qui sont des parties semi-algébriques de X^{an}. Il s'ensuit que tout espace analytique localement isomorphe à un domaine analytique (de l'analytifié) d'une variété algébrique est localement contractile. Comme un espace analytique lisse est localement isomorphe à un ouvert d'une variété algébrique lisse, on retrouve comme cas particulier les résultats locaux mentionnés plus haut en 2), de surcroît un peu étendus : il n'y a plus besoin de supposer que la valeur absolue de k est non triviale, ni que les domaines en jeu sont *strictement* analytiques.

Les méthodes de Hrushovski et Loeser. L'intérêt de leur travail réside non seulement dans les résultats que nous venons d'évoquer, mais aussi dans les méthodes totalement inédites qu'ils emploient pour aborder ce type de questions. Elles reposent entièrement sur la *théorie des modèles des corps non trivialement valués algébriquement clos* (dont nous utiliserons l'acronyme anglophone ACVF), et plus précisément sur des progrès récents en la matière dus à Haskell, Hrushovski et Macpherson ([**15**], [**14**]). Contrairement à celles qui ont été utilisées dans les preuves évoquées aux points 1), 2) et 3) plus haut, elles ne font *aucun* appel à l'étude de la réduction des variétés algébriques ou des espaces analytiques, ni à travers les théorèmes sur la réduction des algèbres affinoïdes, ni à travers ceux qui assurent l'existence de modèles pas trop singuliers (réduction semi-stable, altérations de de Jong, fibre réduite).

Dans [**15**], Haskell, Hrushovski et Macpherson introduisent une version enrichie du langage des corps valués, dans laquelle la théorie ACVF « élimine les imaginaires », ce qui veut dire que le quotient d'un foncteur définissable par une relation d'équivalence définissable est encore un foncteur définissable. Nous allons donner un exemple d'un tel quotient qui jouera un rôle important dans la suite ; on utilise à partir de maintenant le langage de [**15**]. Soit $(k, |.|\colon k^* \to G)$ un corps valué, et soit k^a une clôture algébrique de k munie d'un prolongement $|.|\colon (k^a)^* \to G^{\mathbb{Q}}$. Soit M la catégorie des modèles F de ACVF (c'est-à-dire des corps non trivialement valués et algébriquement clos), munis d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{|.|} & |F| \\ \uparrow & & \uparrow \\ k^a & \xrightarrow{|.|} & G_0^{\mathbb{Q}} \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales sont des plongements. Soit T le foncteur qui envoie $F \in \mathsf{M}$ sur le groupe

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right\}_{a \in F^*, b \in F}$$

Il est k-définissable ; on note T' le sous-foncteur k-définissable $F \mapsto T(F) \cap \mathrm{GL}_2(F^\circ)$ de T. Le foncteur quotient T/T' est k-définissable par élimination des imaginaires dans la variante de ACVF utilisée. On vérifie immédiatement que l'application qui envoie la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

sur la boule de centre b et de rayon $|a|$ induit une bijection, fonctorielle en F, entre $T(F)/T'(F)$ et l'ensemble $B(F)$ des boules fermées de F dont le rayon appartient à $|F^*|$. Ainsi, B est k-définissable. L'ensemble $\overline{B}(F)$ des boules fermées de F dont le rayon appartient à $|F|$ (le rayon nul est maintenant autorisé) est isomorphe à $B(F) \coprod F$, fonctoriellement en F. Le foncteur $\overline{B}$ est donc lui aussi k-définissable.

Supposons que $G = \mathbb{R}$ et que k est complet, et soit F un corps ultramétrique appartenant à M. On dispose alors d'une flèche $\overline{B}(F) \to \mathbb{A}_k^{1,\mathrm{an}}$, qui est surjective si F est maximalement complet (cela signifie que toute famille décroissante de boules fermées de F a une intersection non vide). Si $F = k$ la flèche $\overline{B}(F) \to \mathbb{A}_F^{1,\mathrm{an}}$ est injective, et bijective si F est maximalement complet.

Ce foncteur $\overline{B}$ peut s'interpréter comme un cas particulier d'une construction très générale de Hrushovski et Loeser, qui est au cœur de leur article et que nous allons maintenant présenter. On ne suppose plus que $G = \mathbb{R}$ (ni que k est complet). Soit X une k-variété algébrique ; on identifie X au foncteur $F \mapsto X(F)$ de M vers Ens.

Soit U un sous-foncteur (k, G)-définissable de X ; il est donné, localement pour la topologie de Zariski de X, par une combinaison booléenne finie d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g sont des fonctions polynomiales à coefficients dans k, où $\lambda \in G$, et où le symbole $\bowtie$ appartient à $\{<, >, \leqslant, \geqslant\}$. Si $G = \mathbb{R}$ et si k est complet, les formules qui décrivent U définissent sans ambiguïté une partie semi-algébrique U^{an} de X^{an}, et toute partie semi-algébrique de X^{an} est de cette forme.

Hrushovski et Loeser notent $\widehat{U}$ le foncteur qui envoie un corps $F \in \mathsf{M}$ sur l'ensemble des *types stablement dominés F-définissables situés sur U*. Nous ne donnerons pas dans cette introduction la définition de type stablement dominé ; c'est l'une des notions centrales du livre **[14]**, et nous en disons quelques mots dans ce texte au paragraphe 2.6. La formation de $\widehat{U}$ est fonctorielle en U, pour les applications définissables. Le foncteur $\widehat{U}$ jouit des propriétés suivantes.

a) Le foncteur $\widehat{U}$ est muni d'un plongement naturel $U \hookrightarrow \widehat{U}$.

b) Le foncteur $\widehat{U}$ est (k, G)-pro-définissable, et (k, G)-définissable si X est de dimension $\leqslant 1$.

c) Pour tout corps $F \in \mathsf{M}$ et toute fonction polynomiale g à coefficients dans F sur un ouvert de Zariski V de X_F, la fonction $|g| : V(F) \cap U(F) \to |F|$ se prolonge en une fonction $|g| : \widehat{V}(F) \cap \widehat{U}(F) \to |F|$. On munit $\widehat{U}(F)$ de la topologie la plus grossière pour laquelle $\widehat{V}(F) \cap \widehat{U}(F)$ est ouvert et $|g|$ continue pour tout (V, g) comme ci-dessus (la topologie sur $|F|$ est celle de l'ordre). Si $F \subset F'$, la flèche $\widehat{U}(F) \to \widehat{U}(F')$ est une injection ; elle est ouverte sur son image, mais pas continue en général.

d) Pour tout $F \in \mathsf{M}$, le plongement canonique $U(F) \hookrightarrow \widehat{U}(F)$ est un homéomorphisme sur son image, laquelle est dense.

e) Supposons que X soit propre et que U soit défini Zariski-localement par une combinaison booléenne positive d'inégalités *larges*. Pour tout $F \in \mathsf{M}$, l'espace topologique $\widehat{U}(F)$ est alors *définissablement* compact (cela signifie *grosso modo* que tout ultrafiltre définissable, en un sens convenable, y converge).

f) Supposons que $G = \mathbb{R}$ et que k est complet, et soit F un corps ultramétrique appartenant à M. On dispose d'une application continue $\widehat{U}(F) \to U^{\mathrm{an}}$, qui est une surjection topologiquement propre si F est maximalement complet. Lorsque $F = k$, la flèche $\widehat{U}(F) \to U^{\mathrm{an}}$ est injective (elle a pour image les points de U^{an} qui sont définissables, en un sens à préciser), et c'est un homéomorphisme si F est maximalement complet.

Un exemple : le cas où $U = X = \mathbb{A}^1_k$. Le foncteur $\widehat{U}$ est alors égal à $\overline{B}$. On a vu plus haut que $\overline{B}$ est définissable, ce qui redonne b) dans ce cas particulier. Soit $F \in \mathsf{M}$. Le plongement mentionné en a) est celui qui envoie un élément de $U(F) = F$ sur la boule singleton correspondante. La topologie mentionnée en c) est telle que si $x \in F$, l'application qui associe à $r \in |F|$ la boule fermée de centre x et de rayon r induit un homéomorphisme de $|F|$ sur son image. Quant à l'application mentionnée en f), elle coïncide avec la flèche $\overline{B}(F) \to \mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_k$ évoquée précédemment.

L'essentiel du travail de Hrushovski et Loeser est consacré à l'étude des foncteurs de la forme $\widehat{U}$. Ils sont relativement proches des espaces de Berkovich en vertu de f) ; mais ils sont en vertu de c) plus maniables du point de vue de la théorie des modèles, notamment pour ce qui concerne la définissabilité et la modération. Ils apparaissent plus précisément comme les objets d'une géométrie *qui code l'ensemble des questions de modération et de définissabilité en géométrie de Berkovich.* L'apport majeur de Hrushovski et Loeser est, en un sens, la mise au jour de cette géométrie ; les preuves des assertions A), B), C) et D) ci-dessus constituent le premier témoignage de sa fécondité. Celles-ci sont pour l'essentiel d'abord établies dans le monde des espaces chapeautés, avant d'être rapatriées à la toute fin de l'article (chapitre 13) dans celui des espaces de Berkovich, grâce aux liens étroits entre les deux géométries, et notamment aux applications considérées en f).

À titre d'exemple, nous allons décrire plus avant cette stratégie concernant l'assertion A). Introduisons un peu de vocabulaire. On note Γ (resp. Γ_0) le foncteur $F \mapsto |F^*|$ (resp. $F \mapsto |F|$) de M dans Ens. Si a et b sont deux éléments de $|k|$ avec $a \leqslant b$, le segment $[a;b]$ sera considéré comme un sous-foncteur de Γ_0 envoyant F sur $\{x \in |F|, a \leqslant |x| \leqslant b\}$. Un *segment généralisé* est un foncteur qui est une concaténation finie de segments, avec identifications des extrémité et origine de deux segments consécutifs[(3)] ; un segment généralisé possède lui-même deux extrémités. Nous appellerons *polytope* un sous-foncteur de Γ_0^n (pour un certain n) qui est k-définissable ; cela signifie qu'il peut être décrit par une combinaison booléenne d'inégalités de la forme $a\prod x_i^{n_i} \bowtie b\prod x_i^{m_i}$, où a et b appartiennent à $|k|$, les n_i et m_i à $\mathbb{N}$, et $\bowtie$ à $\{\leqslant, \geqslant, <, >\}$. Si P est un polytope (resp. un segment généralisé), alors pour tout F appartenant à M, l'ensemble $P(F)$ est de façon naturelle un espace topologique (resp. un espace

(3) On prendra garde qu'un tel foncteur n'est pas en général définissablement isomorphe à un segment, cf. la remarque 1.11.

topologique définissablement compact) ; il existe une notion naturelle de dimension d'un polytope.

L'avatar chapeauté de l'assertion A), dont celle-ci est déduite, est le suivant. *On suppose que X est quasi-projective.* Il existe alors :

- un sous-foncteur S de $\widehat{U}$;
- un polytope P de dimension inférieure ou égale à celle de X, et un isomorphisme $S \simeq P$ définissable *sur une extension finie*[(4)] *de k contenue dans k^a*, tels que la bijection $S(F) \simeq P(F)$ soit un homéomorphisme pour tout $F \in \mathsf{M}$;
- un segment généralisé I, d'origine o et d'extrémité e ;
- une transformation naturelle définissable $h : \widehat{U} \times I \to \widehat{U}$ qui fixe S point par point, induit l'identité au-dessus de o et une rétraction $\widehat{U} \to S$ au-dessus de e, satisfait les égalités $h(h(x,t),e) = h(x,e)$ pour tout (x,t), et est telle que $h(F)$ soit continue pour tout $F \in \mathsf{M}$.

Disons quelques mots de la démonstration. On fixe un ensemble fini $\mathscr{F}$ de fonctions définissables de $\widehat{X}$ vers Γ_0 qui contient la fonction caractéristique de $\widehat{U}$. Dans ce qui suit, toutes les rétractions, homotopies, déformations, etc. seront implicitement supposées définissables. On dira qu'une homotopie $h(.,.)$ *préserve* $\mathscr{F}$ si $\varphi \circ h(t,.) = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathscr{F}$ et tout t.

Quitte à agrandir X, on peut la supposer projective. Le but est de déformer $\widehat{U}$ sur un polytope. On va en réalité déformer $\widehat{X}$ *tout entier* sur un polytope, en préservant $\mathscr{F}$. Cela garantira la stabilité de $\widehat{U}$ sous l'homotopie construite ; que l'image terminale de $\widehat{U}$ soit un polytope résultera immédiatement d'un argument de définissabilité. Notons qu'il est important de traiter le cas d'un ensemble $\mathscr{F}$ quelconque, même si le cas où $\mathscr{F} = \{\chi_{\widehat{U}}\}$ semble suffire ici : certaines étapes de la récurrence qui est au cœur de la preuve (et dont nous donnons une description extrêmement succincte ci-dessous) requièrent en effet de savoir préserver un ensemble fini arbitraire de fonctions définissables.

On traite tout d'abord le cas où X est une courbe. Si $X = \mathbb{P}^1_k$ la démonstration se fait plus ou moins « à la main » : dans une carte affine standard on construit, en gros, l'homotopie requise en faisant croître le rayon des boules et en stoppant lorsqu'il convient (rappelons que $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$ est l'espace des boules fermées). Si X est une courbe quelconque, on choisit un morphisme fini et plat $f : X \to \mathbb{P}^1_k$, et l'on cherche à construire une homotopie sur $\widehat{\mathbb{P}}^1_k$ qui se relève sur $\widehat{X}$ en une homotopie répondant aux conditions prescrites. C'est possible grâce à l'étude directe de $\widehat{\mathbb{P}}^1_k$ déjà menée, et grâce à un lemme assurant que le cardinal des fibres de $\widehat{f}$ a un comportement raisonnable, en tant que fonction à valeurs entières sur $\widehat{\mathbb{P}^1_k}$. Plus précisément, on prouve d'abord

(4) La présence de cette extension finie est inévitable, cf. la remarque 3.9.

que le « sens de variation » de cette fonction est *génériquement* ce qu'on attend, puis un argument de définissabilité permet de passer de ce fait générique à une assertion ferme.

Pour construire la rétraction dans le cas général, on procède par récurrence sur la dimension n de X (après s'être ramené au cas équidimensionnel). Le caractère projectif de X assure l'existence d'une modification $X' \to X$, qui est un éclatement de centre un sous-schéma de dimension 0, telle que X' admette une fibration propre en courbes sur une variété projective Y purement de dimension $n-1$. Soit D la réunion des diviseurs exceptionnels de $X' \to X$. On cherche à construire une rétraction de $\widehat{X'}$ sur un polytope, qui préserve $\mathscr{F}$ et stabilise $\widehat{D}$. Cela assurera qu'elle descend à $\widehat{X}$, chaque composante connexe de D, et partant de $\widehat{D}$, s'écrasant sur un point. Pour garantir la stabilisation de $\widehat{D}$, il suffit de rajouter sa fonction caractéristique à l'ensemble $\mathscr{F}$; on peut ainsi oublier D.

Pour rétracter $\widehat{X'}$ sur un polytope en préservant $\mathscr{F}$ l'idée est, très grossièrement, d'utiliser la fibration $\widehat{X'} \to \widehat{Y}$ en combinant une rétraction convenable de la base (fournie par l'hypothèse de récurrence) et une rétraction fibre à fibre bien choisie (fournie par le cas des courbes déjà traité, dans sa variante relative). Ce procédé permet de construire une homotopie h_0 ayant les propriétés requises, mais qui n'est définie que sur une partie de $\widehat{X'}$ de la forme $(\widehat{X'} \setminus \widehat{\Delta}) \cup \widehat{D_0}$, où Δ et D_0 sont deux diviseurs sur X' (l'un des points délicats est la vérification de la continuité de h_0). Pour obtenir une homotopie h définie sur $\widehat{X'}$ tout entier, il faut encore travailler. On commence par faire précéder h_0 d'une homotopie h_1 dite *d'inflation* qui fixe $\widehat{D_0}$ point par point, préserve $\mathscr{F}$ et éloigne un peu de $\widehat{\Delta}$ les points de $\widehat{\Delta} - \widehat{D_0}$. On obtient ainsi une homotopie qui est définie sur $\widehat{X'}$ tout entier, préserve $\mathscr{F}$ et déforme $\widehat{X'}$ sur un polytope, mais ce dernier n'est plus nécessairement fixé point par point pendant toute la durée du processus, l'homotopie h_1 pouvant le perturber. On résout le problème en faisant suivre la concaténation de h_1 et h_0 d'une troisième homotopie h_2, dont l'essentiel de la construction se déroule dans le monde polytopal.

Dans les grandes lignes que nous venons d'esquisser, la preuve semble reposer essentiellement sur des idées géométriques. Mais les arguments de théorie des modèles y sont omniprésents, notamment ceux tournant autour de la définissabilité et de la compacité (au sens modèle-théorique du terme). Notons qu'à chaque fois que l'on veut appliquer cette dernière, il est nécessaire de considérer *tous* les modèles de ACVF contenant le corps k. C'est pourquoi il est indispensable de faire intervenir tout au long de la preuve des corps valués *quelconques*, même si la motivation initiale porte sur les corps ultramétriques complets ; pour plus de commentaires sur ce sujet, cf. 2.3 *infra*.

Pour conclure, mentionnons qu'Amaury Thuillier travaille actuellement à l'extension des résultats de modération homotopique de Berkovich (aux espaces non nécessairement lisses et/ou n'admettant pas nécessairement de modèle polystable) par des méthodes plus proches de la stratégie originale de Berkovich : utilisation des altérations de de Jong et descente homotopique — c'est la mise en œuvre de ce dernier point qui nécessite de nouvelles idées.

Remerciements

Je tiens à faire part de toute ma gratitude à Ehud Hrushvoski et François Loeser pour toutes les discussions que j'ai eues avec eux depuis maintenant trois ans au sujet de leur travail. Je suis également extrêmement redevable à tous les participants du groupe de travail qui s'est tenu sur le sujet de 2009 à 2011 à l'*Institut de mathématiques de Jussieu* : Luc Bélair, Elisabeth Bouscaren, Zoé Chatzidakis, Françoise Delon, Deirdre Haskell, Pierre Simon, ainsi que Martin Hils ; je sais particulièrement gré à ce dernier d'avoir relu très attentivement une première version de ce texte et fait un grand nombre de suggestions qui m'ont permis de l'améliorer significativement.

1. UN PEU DE THÉORIE DES MODÈLES

1.1. Langages, formules, énoncés

Références : le lecteur intéressé pourra par exemple consulter **[18]** ou **[21]**.

DÉFINITION 1.1. — *Un* langage *est une collection de symboles comprenant :*
- *les symboles logiques usuels, ainsi qu'une liste (dénombrable) de variables ;*
- *des symboles de* fonctions, *chacun ayant une arité fixée ;*
- *des symboles de* relations, *chacun ayant une arité fixée.*

En général, pour décrire un langage, on se contente de donner la liste des symboles de fonctions et de relations, les autres étant plus ou moins implicites ; les fonctions d'arité 0 sont le plus souvent appelées *constantes.* Dans ce qui suit, les langages seront également implicitement supposés contenir un symbole de relation $=$ d'arité 2.

Donnons quelques exemples. Le langage $\mathscr{L}_{\mathrm{ann}}$ des anneaux comprend deux constantes 0 et 1 et deux symboles fonctionnels d'arité 2, à savoir $+$ et $\times$. Le langage $\mathscr{L}_{\mathrm{co}}$ des corps ordonnés comprend les mêmes symboles, ainsi qu'un symbole de relation $\leqslant$ d'arité 2. Le langage $\mathscr{L}_{\mathrm{gao}}$ des groupes abéliens ordonnés (notés multiplicativement, avec adjonction formelle d'un plus petit élément absorbant) comprend une constante 1, une constante 0, un symbole de fonction $\times$ d'arité 2, et un symbole de relation $\leqslant$ d'arité 2.

Une *structure* d'un langage $\mathscr{L}$ est un ensemble non vide M muni : pour chaque symbole fonctionnel f d'arité n de $\mathscr{L}$, d'une fonction $f_M : M^n \to M$ (souvent notée simplement f s'il n'y a pas d'ambiguïté) ; et pour chaque symbole de relation $\mathscr{R}$ d'arité n, d'une relation à n termes $\mathscr{R}_M$ (ou simplement $\mathscr{R}$), c'est-à-dire d'un sous-ensemble de M^n. On demande que la relation $=_M$ soit l'égalité usuelle. Ainsi, une structure du langage des corps ordonnés est un ensemble muni de deux éléments distingués 0 et 1, de deux lois de composition internes $+$ et $\times$, et d'une relation binaire $\leqslant$. Une *sous-structure* d'une structure M est une partie non vide de M qui est stable par les (interprétations des) symboles fonctionnels. On se permettra d'écrire $N \subseteq M$ pour signifier que N est une sous-structure de M.

On peut écrire des *formules* dans un langage $\mathscr{L}$ en agençant des symboles de $\mathscr{L}$ selon les règles syntaxiques usuelles, en respectant les arités des symboles de fonction et de relation. Par exemple,

$$\forall x, \exists y, (y + x) \leqslant z \text{ ou } (yt \geqslant u + 1 \text{ et } x = t)$$

est une formule du langage $\mathscr{L}_{\mathrm{co}}$. Une formule peut contenir des variables *libres* (qui ne sont pas quantifiées) ; dans la formule ci-dessus, z, u et t sont libres. Une formule sans variable libre est appelée un *énoncé*. À titre d'illustration,

$$\forall x, \exists y, x + y = 0$$

est un énoncé de $\mathscr{L}_{\mathrm{ann}}$. Si $\mathscr{L}$ est un langage et si M est une structure de $\mathscr{L}$, tout énoncé de $\mathscr{L}$ admet une interprétation dans M, laquelle peut être vraie ou fausse : par exemple, l'énoncé $\forall x, \exists y, x + y = 0$ est vrai dans la structure $\mathbb{Z}$ de $\mathscr{L}_{\mathrm{ann}}$, mais faux dans sa structure $\mathbb{N}$.

Une formule φ de $\mathscr{L}$ donne naissance, si l'on remplace certaines de ses variables libres par des éléments de M, à une *formule du langage $\mathscr{L}$ à paramètres dans M* ; lorsqu'on spécialise ainsi *toutes* les variables libres de φ, on obtient un *énoncé du langage $\mathscr{L}$ à paramètres dans M*. Un tel énoncé possède une valeur de vérité dans M, et plus généralement dans toute structure $M' \supseteq M$.

1.2. Langages multisortes

Les définitions des langages, structures, énoncés et formules s'étendent dans un contexte un peu plus général, dit *multisorte*. On se donne un ensemble $\mathscr{S}$. Un langage *d'ensemble des sortes égal à $\mathscr{S}$* se définit comme un langage au sens précédent, à ceci près qu'il ne suffit plus de fixer les arités des symboles fonctionnels et relationnels : on doit également préciser la ou les *sortes* dans lesquels vivent leurs arguments, et leurs valeurs pour les fonctions. Une structure M d'un tel langage est une famille $(\mathscr{s}(M))_{\mathscr{s} \in \mathscr{S}}$ d'ensembles non vides (on dit que $\mathscr{s}(M)$ est « la partie de sorte $\mathscr{s}$ », ou plus simplement « la sorte $\mathscr{s}$ », de la structure M), munie d'une interprétation des symboles par de vraies relations ou fonctions. Les définitions des énoncés et formules dans ce cadre sont *mutatis mutandis* celles du paragraphe précédent.

Exemple 1.2. — Le *langage des corps valués* $\mathscr{L}_{\text{val}}$ est un langage à trois sortes : F, R et Γ_0. Ses symboles sont :

- les constantes 0_{F} et 1_{F}, 0_{R} et 1_{R}, 0_{Γ_0} et 1_{Γ_0} (la sorte est indiquée en indice) ;
- les fonctions $+_{\mathsf{F}}$ et $\times_{\mathsf{F}}$, à deux arguments dans la sorte F et à valeurs dans la sorte F ;
- les fonctions $+_{\mathsf{R}}$ et $\times_{\mathsf{R}}$, à deux arguments dans la sorte R et à valeurs dans la sorte R ;
- la fonction $\times_{\Gamma_0}$, à deux arguments dans la sorte Γ_0 et à valeurs dans la sorte Γ_0 ;
- la fonction $|.|$ à un argument, de la sorte F vers la sorte Γ_0 ;
- la fonction res à deux arguments, de la sorte F vers la sorte R ;
- la relation binaire $\leqslant$ sur la sorte Γ_0.

Soit $(k, |.|\colon k \to G_0)$ un corps valué *(rappelons qu'on ne demande pas que $|.|\colon k \to G_0$ soit surjective)*. On peut le voir de façon naturelle comme une structure de $\mathscr{L}_{\text{val}}$, dont les sortes sont

$$\mathsf{F}(k, |.|\colon k \to G_0) = k,\ \mathsf{R}(k, |.|\colon k \to G_0) = \tilde{k},\ \text{et}\ \Gamma_0(k, |.|\colon k \to G_0) = G_0.$$

Les symboles $0, 1, +$ et $\times$ indexés par les différentes sortes ont le sens que l'on imagine, de même que la fonction $|.|$ et la relation $\leqslant$. Quant à res, elle envoie un couple (x, y) sur $\widetilde{(x/y)}$ si $|x| \leqslant |y|$ et $y \neq 0$ et sur (disons) 0 sinon.

Remarque 1.3. — Au lieu d'écrire « soit $(k, |.| : k \to G_0)$ un corps valué » nous dirons souvent plus simplement « soit (k, G_0) un corps valué », et nous identifierons (k, G_0) à la structure de $\mathscr{L}_{\text{val}}$ qu'il définit. Lorsque nous écrirons « soit k un corps valué » *sans mentionner explicitement G_0*, cela signifiera qu'on s'intéresse au corps valué $(k, |k|)$; autrement dit, on voit k comme une structure de $\mathscr{L}_{\text{val}}$ dont les sortes sont $\mathsf{F}(k) = k$, $\mathsf{R}(k) = \tilde{k}$, et $\Gamma_0(k) = |k|$.

1.3. Théories

DÉFINITION 1.4. — *Soit $\mathscr{L}$ un langage, éventuellement multisorte. Une* théorie *T dans le langage $\mathscr{L}$ est un ensemble d'énoncés de $\mathscr{L}$ qui est consistant; cela signifie qu'il existe une structure M de $\mathscr{L}$ dans laquelle tous les énoncés de T sont vrais. On dit qu'une telle structure est un* modèle *de T.*

Si M est une structure de $\mathscr{L}$, l'ensemble des énoncés vrais dans M est une théorie, qu'on appelle la théorie de M. Voici maintenant quelques exemples moins triviaux qui sont très fréquemment considérés.

• *Dans le langage* $\mathscr{L}_{\mathrm{ann}}$. La théorie des corps, qui comprend les énoncés de $\mathscr{L}_{\mathrm{ann}}$ vrais dans n'importe quel corps, comme par exemple $\forall x, (x \neq 0) \Rightarrow (\exists y, xy = 1)$. On définit de même la théorie des corps algébriquement clos, la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique fixée, etc.

• *Dans le langage* $\mathscr{L}_{\mathrm{co}}$. La théorie des corps ordonnés ; la théorie des corps réels clos, c'est-à-dire des corps ordonnés R tels que tout élément positif de R soit un carré dans R et tels que tout polynôme de degré impair à coefficients dans R ait une racine dans R.

• *Dans le langage* $\mathscr{L}_{\mathrm{gao}}$. La théorie des groupes abéliens ordonnés ; la théorie des groupes abéliens ordonnés divisibles non triviaux, dite DOAG (*divisible ordered abelian groups*).

• *Dans le langage* $\mathscr{L}_{\mathrm{val}}$. La théorie des corps valués, qui comprend les énoncés vrais dans toute structure (k, G_0). Et la théorie des corps non trivialement valués algébriquement clos, dite ACVF (*algebraically closed valued fields*), qui comprend les énoncés vrais dans tout corps valué et algébriquement clos k tel que $|k^*| \neq \{1\}$.

Remarque 1.5. — Soit T l'une des théories que l'on vient d'énumérer. On vérifie que les modèles de T sont *exactement* les structures dont elle porte le nom, car celles-ci sont caractérisées par un ensemble d'énoncés dans le langage concerné ; par exemple, les modèles de ACVF sont exactement les corps non trivialement valués et algébriquement clos.

On dit que T *élimine les quantificateurs* si pour toute formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dans le langage $\mathscr{L}$ à variables libres $x_1, \ldots, x_n$, il existe une formule $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ dans le langage $\mathscr{L}$ à variables libres $x_1, \ldots, x_n$ et *sans quantificateurs* telle que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

soit un énoncé de T.

LEMME 1.6. — *Supposons que T élimine les quantificateurs, soit A une structure du langage $\mathscr{L}$, et soient M et M' deux modèles de T tels que $A \subseteq M$ et $A \subseteq M'$. Soit Φ un énoncé du langage $\mathscr{L}$ à paramètres dans A. Il est alors vrai dans M si et seulement si il est vrai dans M'.*

Démonstration. — Cela résulte de la définition d'une sous-structure si Φ est sans quantificateurs, et l'hypothèse faite sur T permet de se ramener à ce cas. □

La théorie des corps algébriquement clos, la théorie des corps réels clos, la théorie DOAG et la théorie ACVF éliminent les quantificateurs. C'est pour bénéficier de l'élimination des quantificateurs qu'on a choisi, en définissant ACVF, de se limiter aux corps algébriquement clos *non trivialement valués* ; en effet, la théorie T des corps valués algébriquement clos généraux (avec valuation triviale autorisée) dans le langage $\mathscr{L}_{\text{val}}$ n'élimine pas les quantificateurs. Pour le voir, fixons un corps algébriquement clos k trivialement valué, et une extension *non trivialement valuée* et algébriquement close K de k. L'énoncé « $\exists x, x \neq 0$ et $|x| \neq 1$ » est alors par construction faux dans k et vrai dans K ; il en résulte en vertu du lemme 1.6 que T n'élimine pas les quantificateurs.

1.4. Ensembles et foncteurs définissables

Soit T une théorie dans un langage $\mathscr{L}$ dont on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des sortes ; on suppose que T élimine les quantificateurs. On note $\Sigma(\mathscr{L})$ la collection de toutes les structures de $\mathscr{L}$, à laquelle on rajoute l'ensemble vide. Soit $A \in \Sigma(\mathscr{L})$. On note M_A la catégorie des modèles de T tels que $A \subseteq M$ (si $A = \varnothing$, on a donc affaire à la catégorie de *tous* les modèles de T) ; les morphismes sont les inclusions comme sous-structures. Pour tout $\mathscr{s} \in \mathscr{S}$, on note $\mathscr{s}_A$ la restriction de $M \mapsto \mathscr{s}(M)$ à M_A.

DÉFINITION 1.7. — *Soit M appartenant à M_A et soit $(n_{\mathscr{s}})_{\mathscr{s}\in\mathscr{S}}$ une famille d'entiers presque tous nuls. Un sous-ensemble E de $\prod \mathscr{s}(M)^{n_{\mathscr{s}}}$ (resp. un sous-foncteur D de $\prod \mathscr{s}_A^{n_{\mathscr{s}}}$) est dit A-*définissable *s'il existe une formule $\Phi([\underline{x}_{\mathscr{s}}]_{\mathscr{s}})$ du langage $\mathscr{L}$, à paramètres dans A, en variables libres $(\underline{x}_{\mathscr{s}})$ où chaque $\underline{x}_{\mathscr{s}}$ est un $n_{\mathscr{s}}$-uplet de variables de la sorte $\mathscr{s}$, telle que*

$$E = \left\{(\underline{a}_{\mathscr{s}}) \in \prod \mathscr{s}(M)^{n_{\mathscr{s}}}, \Phi([\underline{a}_{\mathscr{s}}])\right\}$$

(resp. $D(N) = \left\{(\underline{a}_{\mathscr{s}}) \in \prod \mathscr{s}(N)^{n_{\mathscr{s}}}, \Phi([\underline{a}_{\mathscr{s}}])\right\}$ pour tout $N \in \mathsf{M}_A$).

Remarque 1.8. — Que $N \mapsto \left\{(\underline{a}_{\mathscr{s}}) \in \prod \mathscr{s}(N)^{n_{\mathscr{s}}}, \Phi([\underline{a}_{\mathscr{s}}])\right\}$ définisse un foncteur résulte du lemme 1.6.

Soit E un sous-ensemble A-définissable de $\prod \mathscr{s}(M)^{n_{\mathscr{s}}}$ et soit E' un sous-ensemble A-définissable de $\prod \mathscr{s}(M)^{m_{\mathscr{s}}}$. Une application $f : E \to E'$ est dite A-définissable si son graphe est une partie A-définissable de $\prod \mathscr{s}(M)^{n_{\mathscr{s}}+m_{\mathscr{s}}}$. Si f est A-définissable, $f(E)$ est un sous-ensemble A-définissable de $\prod \mathscr{s}(M)^{m_{\mathscr{s}}}$.

De même, soit D un sous-foncteur A-définissable de $\prod \mathscr{s}_A^{n_{\mathscr{s}}}$ et soit D' un sous-foncteur A-définissable de $\prod \mathscr{s}_A^{m_{\mathscr{s}}}$. Une transformation naturelle $f : D \to D'$ est dite A-définissable si son graphe est un sous-foncteur A-définissable de $\prod \mathscr{s}_A^{n_{\mathscr{s}}+m_{\mathscr{s}}}$. Si f est A-définissable, $f(D)$ est un sous-foncteur A-définissable de $\prod \mathscr{s}_A^{m_{\mathscr{s}}}$.

Soit E un sous-ensemble A-définissable de $\prod \mathscr{s}(M)^{n_{\mathscr{s}}}$, décrit par une formule Φ comme dans la définition 1.7. Le foncteur

$$N \mapsto \left\{(\underline{a}_{\mathscr{s}}) \in \prod \mathscr{s}(N)^{n_{\mathscr{s}}}, \Phi([\underline{a}_{\mathscr{s}}])\right\}$$

est un sous-foncteur A-définissable de $\prod \mathscr{S}_A^{n_{\mathscr{S}}}$. *Supposons* $A \neq \varnothing$. Ce foncteur ne dépend alors que de E, et pas du choix de la formule Φ utilisée pour décrire ce dernier. En effet, si Ψ est une autre formule décrivant E, le fait que Φ et Ψ décrivent le même ensemble au niveau du modèle M se propage en vertu du lemme 1.6 à tout $N \in \mathsf{M}_A$ (c'est ici qu'on utilise le fait que A est non vide : le lemme 1.6 requiert l'existence d'une sous-structure commune aux deux modèles qu'il met en jeu). Il est dès lors licite de noter ce foncteur $\underline{E}$.

Remarque 1.9. — L'assertion précédente est fausse en général lorsque $A = \varnothing$. Par exemple, supposons que T est la théorie des corps algébriquement clos, et soit D (resp. D') le foncteur qui associe à un modèle F de T l'ensemble $\{x \in F, x+1 = x\}$ (resp. l'ensemble $\{x \in F, x+x = 1\}$). Les foncteurs D et D' sont $\varnothing$-définissables, et si F est un modèle de T de caractéristique 2, alors $D(F) = D'(F) = \varnothing$. Mais D et D' ne coïncident pas pour autant : si F est un modèle de T de caractéristique différente de 2 alors $D(F) = \varnothing$ et $D'(F) = \{1/2\}$.

Soit $M \in \mathsf{M}_A$. Notons $\mathsf{D}_{A,M}$ la catégorie définie comme suit.

• Ses objets sont les couples $((n_{\mathscr{S}}), E)$ où $(n_{\mathscr{S}})_{\mathscr{S} \in \mathscr{S}}$ est une famille d'entiers presque tous nuls, et E un sous-ensemble A-définissable de $\prod \mathscr{S}(M)^{n_{\mathscr{S}}}$.

• Ses morphismes sont les applications A-définissables.

On définit de même la catégorie $\mathbb{D}_A$ en remplaçant sous-ensembles A-définissables de $\prod \mathscr{S}(M)^{n_{\mathscr{S}}}$ par sous-foncteurs A-définissables de $\prod \mathscr{S}_A^{n_{\mathscr{S}}}$, et applications A-définissables par transformations naturelles A-définissables. Si A est non vide, les flèches $E \mapsto \underline{E}$ et $D \mapsto D(M)$ établissent alors un *isomorphisme* entre les catégories $\mathsf{D}_{A,M}$ et $\mathbb{D}_A$.

Donnons maintenant quelques exemples.

• On suppose que $\mathscr{L}$ est le langage des corps ordonnés, et que T est la théorie des corps réels clos. Soit R_0 un modèle de T et soient a et b deux éléments de R_0. Le sous-ensemble $E := \{x \in R_0, a \leqslant x \leqslant b\}$ de R_0 est visiblement définissable sur la sous-structure $A := \mathbb{Q}(a,b)$ de R_0. Le foncteur $\underline{E}$ envoie $R \in \mathsf{M}_A$ sur $\{x \in R, a \leqslant x \leqslant b\}$; on le note $[a;b]$.

Le foncteur $[0;1] : R \mapsto \{x \in R, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ est défini sur $\mathsf{M}_{\varnothing}$ et est $\varnothing$-définissable.

• On suppose que $\mathscr{L}$ est le langage des corps valués, et que T est égale à ACVF. Soit F_0 un modèle de T.

Soient a et b deux éléments de $|F_0|$. Le sous-ensemble $E := \{x \in |F_0|, a \leqslant x \leqslant b\}$ de $|F_0|$ est visiblement définissable sur la sous-structure $A := (k_0, \langle |k_0|, a, b\rangle)$ de F_0, où k_0 est le sous-corps premier de F_0. Le foncteur $\underline{E}$ envoie un modèle F appartenant à M_A sur l'ensemble $\{x \in |F|, a \leqslant x \leqslant b\}$; on le note $[a;b]$.

Le foncteur $[0;1] : F \mapsto \{x \in |F|, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ est défini sur $\mathsf{M}_{\varnothing}$ et est $\varnothing$-définissable.

– Soit $\lambda \in F$ et soit $r \in |F|$. Le sous-ensemble $E := \{y \in F, |y-\lambda| \leqslant r\}$ est visiblement définissable sur la sous-structure $A := (k_0(\lambda), \langle |k_0(\lambda)|, r\rangle)$ de F_0. Le foncteur $\underline{E}$ envoie $F \in \mathsf{M}_A$ sur $\{y \in F, |y-\lambda| \leqslant r\}$; on le note $b(\lambda, r)$. On dit que c'est la *boule fermée de centre* λ *et de rayon* r. On définit de même le foncteur $b^{\text{ouv}}(\lambda, r)$ (boule *ouverte* de centre λ et de rayon r).

Les foncteurs $b(0,1) : F \mapsto \{x \in F, |x| \leqslant 1\}$ et $b^{\text{ouv}}(0,1) : F \mapsto \{x \in F, |x| < 1\}$ sont définis sur $\mathsf{M}_\varnothing$ et $\varnothing$-définissables.

Il arrive fréquemment que l'on dise d'un foncteur covariant $h : \mathsf{M}_A \to \mathsf{Ens}$ qu'il est *A-définissable.* Cela signifie qu'il existe un foncteur $D \in \mathbb{D}_A$ et un isomorphisme de foncteurs $h \simeq D$. Le problème est que le foncteur D en question n'a *a priori* pas de raison d'être canonique, si l'on s'en tient à cette définition. En réalité, à chaque fois que l'on emploiera cette terminologie, le foncteur D sera bien défini, pour une raison simple : on se donnera toujours *implicitement* un peu plus qu'un foncteur covariant de M_A vers Ens, et ces données supplémentaires rigidifieront la situation. Nous allons expliquer ci-après en détail de quoi il retourne.

Soit $D \in \mathbb{D}_A$. Soit $B \in \Sigma(\mathscr{L})$ telle que $A \subsetneq B$. Le foncteur D définit par restriction un élément de $\mathbb{D}_B$, noté D_B, et partant un foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_B(., D_B)$ de $\mathbb{D}_B$ dans Ens ; si $A \subsetneq B \subsetneq B'$, on a une inclusion naturelle $\mathrm{Hom}_B(\Delta, D_B) \subset \mathrm{Hom}_{B'}(\Delta_{B'}, D_{B'})$ pour tout $\Delta \in D_B$. Remarquons par ailleurs que pour tout $M \in \mathsf{M}_A$, on a $D(M) = \mathrm{Hom}_M(\{*\}, D_M)$, où $\{*\}$ est un singleton arbitrairement choisi dans un produit $\prod \mathscr{S}(M)^{n_\mathscr{S}}$ quelconque (notons que $\{*\}$ est un objet de $\mathsf{D}_{M,M} \simeq \mathbb{D}_M$).

Soit C_A la catégorie définie comme suit.

• Ses objets sont les couples (B, D), où $B \in \Sigma(\mathscr{L})$, où $A \subset B$, et où $D \in \mathbb{D}_B$.

• L'ensemble des morphismes de (B, D) dans (B', D') est l'ensemble $\mathrm{Hom}_B(D, D'_B)$ si $B' \subsetneq B$, et est vide sinon.

Si $D \in \mathbb{D}_A$ alors $(B, \Delta) \mapsto \mathrm{Hom}_B(\Delta, D_B)$ est de façon naturelle un foncteur contravariant de C_A vers Ens, noté $\mathrm{Hom}_\bullet(., D_\bullet)$. On dira qu'un foncteur contravariant $h : \mathsf{C}_A \to \mathsf{Ens}$ est *A-définissable* s'il existe $D \in \mathbb{D}_A$ tel que h soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_\bullet(., D_\bullet)$. Le lemme de Yoneda assure que D est dans ce cas uniquement déterminé.

On peut maintenant préciser quelles sont les données implicites évoquées plus haut. Lorsqu'on dira qu'un foncteur covariant $h : \mathsf{M}_A \to \mathsf{Ens}$ est A-définissable, il sera sous-entendu :

– que le foncteur h « se met en familles de façon naturelle », c'est-à-dire qu'il existe un foncteur contravariant $h^\sharp$ de C_A dans Ens, dont la définition est censée découler clairement du contexte, et des identifications naturelles $h(M) = h^\sharp(M, \{*\})$ pour tout M appartenant à M_A ;

– que le foncteur $h^\sharp$ est A-définissable.

En pratique, la première de ces conditions se produit lorsqu'on s'est donné une classe d'objets $\mathscr{C}$, lorsque $h(M)$ se décrit comme l'ensemble des objets de $\mathscr{C}$ définis sur M, et lorsque la notion de famille B-définissable d'objets de $\mathscr{C}$ tombe peu ou prou sous le sens : on définit alors justement $h^\sharp(B,D)$ comme l'ensemble des familles B-définissables d'objets de $\mathscr{C}$ paramétrées par D.

Soit h un foncteur A-définissable, c'est-à-dire un foncteur covariant de M_A dans Ens qui est A-définissable au sens ci-dessus. Il existe un objet $D \in \mathsf{D}_A$, canoniquement déterminé, tel que $h \simeq D$. Il en résulte une définition naturelle de sous-ensemble A-définissable de $h(M)$ pour tout $M \in \mathsf{M}_A$, de transformation naturelle A-définissable de h vers un autre foncteur A-définissable h', etc. Si $A \neq \varnothing$ alors pour tout $M \in \mathsf{M}_A$, tout sous-ensemble A-définissable E de $h(M)$ induit un sous-foncteur A-définissable $\underline{E}$ de h ; et les flèches $E \mapsto \underline{E}$ et $g \mapsto g(M)$ mettent en bijection l'ensemble des parties A-définissables de $h(M)$ et celui des sous-foncteurs A-définissables de h.

Si $B \in \Sigma(\mathscr{L})$ est telle que $A \subseteq B$, tout foncteur A-définissable h induit par restriction à M_B un foncteur B-définissable h_B. Donnons maintenant quelques exemples de foncteurs définissables.

• On se place dans la théorie des corps algébriquement clos. Soit k un corps et soit X un k-schéma de type fini ; il induit un foncteur k-définissable, encore noté X.

• On se place dans la théorie des corps réels clos. Soit k un corps ordonné, et soit X un k-schéma de type fini ; il induit un foncteur k-définissable, encore noté X. Un sous-foncteur U de X est k-définissable si et seulement s'il peut être défini Zariski-localement sur X par une combinaison booléenne d'inégalités entre fonctions régulières.

• On se place dans la théorie ACVF. Soit (k, G_0) un corps valué, et soit X un k-schéma de type fini ; il induit un foncteur k-définissable, encore noté X. Un sous-foncteur U de $X_{(k,G_0)}$ est (k, G_0)-définissable si et seulement s'il peut être défini Zariski-localement sur X par une combinaison booléenne d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g sont des fonctions régulières, où $\lambda \in G_0$ et où $\bowtie \in \{<, >, \leqslant, \geqslant\}$.

• On se place dans la théorie ACVF. Soit (k, G_0) un corps valué, et soient $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux familles finies d'éléments de G_0. Le foncteur qui envoie $F \in \mathsf{M}_{(k,G_0)}$ sur

$$\left(\coprod_i \{x \in |F|, \min(a_i, b_i) \leqslant x \leqslant \max(a_i, b_i)\}\right) / \mathscr{R}$$

où $\mathscr{R}$ identifie pour tout $i \leqslant n-1$ l'élément b_i du i-ème sommande avec l'élément a_{i+1} du $(i+1)$-ème sommande, est (k, G_0) définissable. On appelle un tel foncteur un *segment généralisé* ; le foncteur singleton $F \mapsto \{a_1\}$ (resp. $F \mapsto \{b_n\}$) est appelé son *origine* (resp. *extrémité*).

En s'autorisant à identifier origines et/ou extrémités de plus de deux segments, on définit de même des foncteurs (k, G_0)-définissables appelés *graphes finis*, dont certains sont des *arbres*. Nous laissons au lecteur le soin d'en donner des définitions précises.

Remarque 1.10. — Soit D un foncteur G_0-définissable dans la théorie DOAG. Le foncteur $D \circ \Gamma_0 : F \mapsto D(|F|)$ est alors un foncteur (k, G_0)-définissable dans la théorie ACVF. On vérifie que l'application $\Delta \mapsto \Delta \circ \Gamma_0$ établit une *bijection* entre l'ensemble des sous-foncteurs G_0-définissables de D et celui des sous-foncteurs (k, G_0) définissables de $D \circ |.|$. En bref, la trace de la théorie ACVF sur la sorte Γ_0 coïncide avec la théorie DOAG. De même, la trace de la théorie ACVF sur la sorte « corps résiduel » coïncide avec la théorie des corps algébriquement clos.

Remarque 1.11. — On prendra garde qu'un segment généralisé n'est pas, en général, définissablement isomorphe à un segment $F \mapsto \{x \in |F|, a \leqslant x \leqslant b\}$. Le lecteur vérifiera par exemple que la concaténation $[0; 1] \coprod_{1=0} [0; 1]$ (qui est $\varnothing$-définissable) ne peut pas être identifiée à un segment, car le langage autorisé pour une telle identification est $\mathscr{L}_{\text{gao}}$ (cf. la remarque 1.10 ci-dessus), qui comprend simplement la relation d'ordre et la multiplication. Par contre, une concaténation de segments *à extrémités non nulles* est encore (définissablement isomorphe à) un segment.

1.5. Élimination des imaginaires ; le langage des corps valués de Haskell, Hrushovski et Macpherson

Références : nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage [**14**], ainsi qu'aux transparents d'exposé d'Ehud Hrushovski ([**16**]).

On conserve les notations de la section précédente. Soit D un foncteur A-définissable. On dira qu'un sous-foncteur R de $D \times D$ est une *relation d'équivalence A-définissable* si R est A-définissable et si $R(M)$ est pour tout $M \in \mathsf{M}_A$ le graphe d'une relation d'équivalence sur $D(M)$. Le foncteur quotient D/R est alors bien défini.

Définition 1.12. — *On dit que la théorie* T élimine les imaginaires *dans le langage $\mathscr{L}$ si pour toute $A \in \Sigma(\mathscr{L})$, pour tout foncteur A-définissable D et toute relation d'équivalence A-définissable $R \subset D \times D$, le quotient F/R est A-définissable (la flèche quotient $F \to F/R$ est alors automatiquement A-définissable).*

Remarque 1.13. — Pour que T élimine les imaginaires, il suffit que la condition ci-dessus soit vérifiée lorsque $A = \varnothing$: cela provient du fait qu'en général, toute relation d'équivalence A-définissable peut être vue, en « faisant varier les paramètres », comme une spécialisation d'une relation $\varnothing$-définissable.

La théorie des corps algébriquement clos ou celle des corps réels clos éliminent les imaginaires, mais ce n'est pas le cas de ACVF : on peut montrer que le foncteur quotient $F \mapsto \mathrm{GL}_2(F)/\mathrm{GL}_2(F^\circ)$ (autrement dit, le foncteur « espace des réseaux du plan »), défini sur $\mathsf{M}_\varnothing$, n'est pas $\varnothing$-définissable. Notons par contre que $F \mapsto \mathrm{GL}_1(F)/\mathrm{GL}_1(F^\circ)$ est isomorphe à $F \mapsto |F^*|$, et est donc $\varnothing$-définissable.

Il existe un procédé standard pour enrichir le langage $\mathscr{L}$ de façon à *forcer* la théorie T à éliminer les imaginaires : il consiste à rajouter, pour toute famille $(n_{\mathscr{S}})$ d'entiers presque tous nuls, tout sous-foncteur $\varnothing$-définissable D de $\prod \mathscr{S}_\varnothing^{n_S}$ et toute relation d'équivalence $\varnothing$-définissable $R \subset D \times D$ définissable sans paramètres, une sorte « quotient de D par R » et un symbole fonctionnel « application quotient de D vers D/R ». Ce langage étendu $\mathscr{L}^*$ possède les propriétés suivantes :

- si $A \in \Sigma(\mathscr{L})$, si $M \in \mathsf{M}_A$ et si D est un foncteur A-définissable, un sous-foncteur de D (resp. un sous-ensemble de $D(M)$) est A-définissable au sens de $\mathscr{L}^*$ si et seulement si il l'est au sens de $\mathscr{L}$;
- le lemme 1.6 est encore valable pour $\mathscr{L}^*$;
- la théorie T élimine les imaginaires dans le langage $\mathscr{L}^*$.

Par contre, la théorie T n'élimine plus nécessairement les quantificateurs dans le langage $\mathscr{L}^*$. On peut y remédier sans modifier l'ensemble des sortes, ni la notion de foncteur ou de sous-ensemble A-définissable : il suffit de rajouter, au langage $\mathscr{L}^*$, pour toute formule (quantifiée) Φ de L^* en les variables libres $(x_1, \ldots, x_n)$, un symbole de relation n-aire σ_Φ, que l'on interprète dans un modèle M de T en disant que $\sigma_\Phi(m_1, \ldots, m_n) \iff \Phi(m_1, \ldots, m_n)$.

Si le langage ainsi obtenu a un intérêt théorique, il n'est en général pas forcément très explicite ni très maniable, étant donnée la profusion de sortes supplémentaires introduites. Aussi cherche-t-on, lorsque c'est possible, à mettre en évidence un ensemble limité de quotients tel que l'adjonction des sortes et symboles fonctionnels correspondants suffise à rendre définissables *tous* les quotients. C'est ce que Haskell, Hrushovski et Macpherson ont fait dans **[15]** à propos de la théorie ACVF. Ils ont démontré que pour qu'elle élimine les imaginaires, il suffit de rajouter au langage $\mathscr{L}_{\mathrm{val}}$ les sortes et symboles fonctionnels suivants, où GL_n (resp. GL_n°, resp. $\mathrm{GL}_n^{\circ\circ}$) désigne le foncteur qui envoie un modèle F de ACVF sur $\mathrm{GL}_n(F)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(F^\circ)$, resp. $I_n + F^{\circ\circ}\mathrm{M}_n(F^\circ)$) :

- pour tout $n > 0$, une sorte $\mathscr{S}_n$ pour le quotient $\mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_n^\circ$, et un symbole fonctionnel ρ_n codant l'application quotient correspondante ;
- pour tout entier $n > 0$, une sorte $\mathscr{T}_n$ pour le quotient $\mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_n^{\circ\circ}$, et un symbole fonctionnel τ_n codant l'application quotient $\mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_n^{\circ\circ} \to \mathrm{GL}_n/\mathrm{GL}_n^\circ$.

Remarque 1.14. — Soit F un modèle de ACVF. On peut identifier naturellement $\mathscr{S}_n(F)$ à l'espace des réseaux de F^n, et $\mathscr{T}_n(F)$, *via* l'application τ_n, à l'espace total du « fibré des bases » d'un certain « fibré vectoriel » sur $\mathscr{S}_n(F)$; plus précisément, la fibre de τ_n en un point correspondant à un réseau Λ est l'espace des bases du $\tilde{\Lambda}$-espace vectoriel $\Lambda/F^{\circ\circ}\Lambda$.

Appelons $\mathscr{L}^*_{\text{val}}$ le langage des corps valués enrichi par les sortes $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{T}_n$ et les symboles ρ_n et τ_n, et convenablement étendu de façon à assurer l'élimination des quantificateurs[(5)]. C'est désormais avec lui que nous travaillerons, et l'acronyme ACVF désignera à partir de maintenant la théorie des corps non trivialement valués et algébriquement clos *dans le langage* $\mathscr{L}^*_{\text{val}}$. Cette nouvelle version de ACVF élimine par construction les quantificateurs et les imaginaires. Le *foncteur des boules fermées* $\overline{B}$ de $\mathsf{M}_\varnothing$ vers Ens qui associe à un corps $F \in \mathsf{M}_\varnothing$ l'ensemble $\{b(\lambda, r)_F\}_{\lambda\in F, r\in|F|}$ est $\varnothing$-définissable ; en effet, il se décrit simplement, comme on l'a vu dans l'introduction[(6)], à partir d'un quotient de deux foncteurs en groupes $\varnothing$-définissables dans le langage classique $\mathscr{L}_{\text{val}}$. On vérifie sans peine que si $F \in \mathsf{M}_\varnothing$, l'application de $F \times |F|$ vers $\overline{B}(F)$ qui envoie (λ, r) sur $b(\lambda, r)_F$ est $\varnothing$-définissable.

2. TYPES

Références : pour ce qui concerne les types, nous renvoyons le lecteur aux premiers chapitres de l'article étudié **[17]**, à l'ouvrage **[14]**, et aux transparents d'exposés de Hrushovski (**[16]**).

2.1. Généralités

On fixe un langage $\mathscr{L}$ et une théorie T dans le langage $\mathscr{L}$; on suppose que T élimine les quantificateurs. Soit A une structure de $\mathscr{L}$, et soit D un foncteur A-définissable. Soient N et N' deux objets de M_A. Soit $x \in D(N)$ et soit $x' \in D(N')$. On dit que (N, x) et (N', x') sont *A-équivalents* si pour tout sous-foncteur A-définissable Δ de D, on a

$$x \in \Delta(N) \iff x' \in \Delta(N')$$

(autrement dit, x et x' ne sont pas discernables par une formule à paramètres dans A). Un *type sur D* est une classe de A-équivalence de couples (N, x) comme ci-dessus. Si

(5) Nous avons expliqué ci-dessus comment atteindre ce dernier objectif par adjonction d'un ensemble de symboles relationnels. Celui-ci peut sembler absolument gigantesque, et peu tangible. Mais dans *loc. cit.*, Haskell, Hrushovski et Macpherson exhibent un ensemble *explicite* et de taille raisonnable de tels symboles qui s'avère suffisant.

(6) Dans l'introduction, on travaillait au-dessus d'une structure A particulière, mais celle-ci ne jouait aucun rôle dans la description évoquée.

t est la classe de (N, x), on dira que x *réalise* le type t. Soit t un type sur D et soit x une réalisation de t, appartenant à un modèle N. Soit Δ un sous-foncteur A-définissable de D. L'appartenance ou non de x à $\Delta(N)$ ne dépend que de t ; si elle est avérée, on dira que t est situé sur Δ. Il n'y a pas de conflit de terminologie : le couple (N, x) définit justement dans ce cas sans ambiguïté un type sur Δ. Notons que le type t est par définition *caractérisé* par l'ensemble des sous-foncteurs A-définissables de D sur lesquels il est situé. On note $S(D)$ l'ensemble(7) des types sur D.

Soit D' un foncteur A-définissable et soit $f : D \to D'$ une transformation naturelle définissable. Soit $t \in S(D)$ et soit x une réalisation de t ; son image $f(x)$ induit un type sur D' qui ne dépend que de t, et que l'on note $f(t)$.

Supposons que A soit un modèle de T. Si $x \in D(A)$ il définit un type sur D (dont il est une, et même la seule, réalisation) ; un tel type est qualifié de *simple*. Donnons maintenant quelques exemples plus intéressants.

(1) On suppose que $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{ann}}$, et que T est la théorie de corps algébriquement clos. Soit F un corps et soit X un F-schéma de type fini ; on peut le voir comme un foncteur F-définissable. Soit x un point du schéma X et soit F' une extension algébriquement close du corps résiduel $F(x)$. Le point x définit un point de $X(F')$, et partant un type sur X. Cette construction induit une *bijection* entre l'ensemble sous-jacent au schéma X et $S(X)$.

À titre d'illustration, supposons que X est intègre, et soit x son point générique. Le type correspondant est alors caractérisé par le fait qu'il n'est situé sur *aucun* fermé de Zariski strict de X.

(2) On suppose que $\mathscr{L} = \mathscr{L}_{\text{co}}$, et que T est la théorie des corps réels clos. Soit R un corps ordonné, et soit X un R-schéma de type fini ; on peut le voir comme un foncteur R-définissable. Rappelons que le *spectre réel* X_r de X est l'ensemble des couples $(x, \leqslant)$ où x est un point du schéma X et $\leqslant$ un ordre sur le corps résiduel $R(x)$ prolongeant l'ordre sur R. Soit $\xi = (x, \leqslant)$ un point de X_r et soit R' la clôture réelle de $(R(x), \leqslant)$. Le point x définit un point de $X(R')$, et partant un type sur X. Cette construction induit une *bijection* entre l'ensemble X_r et $S(X)$.

À titre d'illustration, supposons que $X = \mathbb{A}^1_R$, et soit u la fonction coordonnée sur X. Munissons $R(u)$ de l'ordre tel que $u > 0$ et $u < \varepsilon$ pour tout élément $\varepsilon > 0$ de R. On définit par ce biais un point de X_r, supporté par le point générique de X. Le type correspondant est noté 0^+_R ; il est caractérisé par le fait qu'il est situé sur $]0; \varepsilon[_R$ pour tout élément $\varepsilon > 0$ de R.

(7) Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des sous-foncteurs A-définissables de D (qui s'identifie, rappelons-le, à l'ensemble des parties A-définissables de $D(M)$ pour tout $M \in \mathsf{M}_A$). On peut par ce qui précède voir un type sur D comme une application de $\mathscr{F}$ vers $\{0, 1\}$; par conséquent, $S(D)$ est bien un ensemble.

(3) On suppose que $\mathscr{L} = \mathscr{L}^*_{\mathrm{val}}$, et que T est la théorie ACVF. Soit F un corps valué, et soit X un F-schéma de type fini ; on peut le voir comme un foncteur F-définissable. Rappelons que le *spectre valuatif* X_v de X est l'ensemble des couples $(x, |.|)$ où x est un point du schéma X et $|.|$ une valuation sur le corps résiduel $F(x)$, qui prolonge la valuation de F. Soit $\xi = (x, |.|)$ un point de X_v et soit F' une extension non trivialement valuée et algébriquement close de $(F(x), |.|)$. Le point x définit un point de $X(F')$, et partant un type sur X. Cette construction induit une *bijection* entre l'ensemble X_v et $S(X)$.

À titre d'illustration, supposons que $X = \mathbb{A}^1_F$, et soit u la fonction coordonnée sur X. Soit $\lambda \in F$ et soit $r \in |F|$. Munissons $F(u)$ de la valuation $|.|$ telle que l'on ait $|\sum a_i(u-\lambda)^i| = \max|a_i|r^i$ pour tout polynôme $\sum a_i(u-\lambda)^i$ à coefficients dans F. On définit par ce biais un point de X_v, supporté par le point générique de X ; on note $\eta_{\lambda,r,F}$ le type correspondant. Si F est un modèle de ACVF, le type $\eta_{\lambda,r,F}$ est caractérisé par le fait qu'il est situé sur $b(\lambda, r)_F$, mais qu'il n'est situé sur aucune boule fermée ou ouverte F-définissable contenue *strictement* dans $b(\lambda, r)_F$; il s'ensuit aisément que $\eta_{\lambda,r,F} = \eta_{\mu,s,F}$ si et seulement si $b(\lambda, r)_F = b(\mu, s)_F$. On appelle parfois $\eta_{\lambda,r,F}$ le *type générique de* $b(\lambda, r)_F$.

Supposons que $r > 0$. Donnons-nous maintenant un groupe abélien ordonné contenant $|F^*|$ ainsi qu'un élément ω de ce groupe tel que $\omega < 1$ et $\alpha < \omega$ pour tout $\alpha \in |F^{\circ\circ}|$. Munissons $F(u)$ de la valuation $|.|$ telle que l'on ait $|\sum a_i(u-\lambda)^i| = \max|a_i|r^i\omega^i$ pour tout polynôme $\sum a_i(u-\lambda)^i$ à coefficients dans F. On définit par ce biais un point de X_v, supporté par le point générique de X ; on note $\eta_{\lambda,r^-,F}$ le type correspondant. Lorsque F est un modèle de ACVF, le type $\eta_{\lambda,r^-,F}$ est caractérisé par le fait qu'il est situé sur $b^{\mathrm{ouv}}(\lambda, r)_F$ mais qu'il n'est situé sur aucune boule fermée $\beta \in \overline{B}(F)$ contenue dans $b^{\mathrm{ouv}}(\lambda, r)_F$; il s'ensuit aisément que $\eta_{\lambda,r^-,F} = \eta_{\mu,s^-,F}$ si et seulement si $b^{\mathrm{ouv}}(\lambda, r)_F = b^{\mathrm{ouv}}(\mu, s)_F$. On appelle parfois $\eta_{\lambda,r^-,F}$ le *type générique de* $b^{\mathrm{ouv}}(\lambda, r)_F$.

(4) On travaille toujours avec le langage $\mathscr{L}^*_{\mathrm{val}}$; soit k un corps ultramétrique complet. Soit X un k-schéma de type fini ; on peut le voir comme un foncteur k-définissable. Rappelons que *l'analytifié* X^{an} de X (au sens de Berkovich) est l'ensemble des couples $(x, |.|)$ où x est un point du schéma X et où $|.|$ est une valeur absolue ultramétrique sur le corps résiduel $k(x)$. Soit $\xi = (x, |.|)$ un point de X^{an} et soit k' une extension ultramétrique non trivialement valuée et algébriquement close de $(k(x), |.|)$. Le point x définit un point de $X(k')$, et partant un type sur X qui est *ultramétrique*, au sens où il admet une réalisation dans un modèle ultramétrique de ACVF. Cette construction induit une *bijection* entre l'ensemble X^{an} et l'ensemble des types ultramétriques situés sur X.

2.2. Topologies sur les espaces de types

On conserve les notations $\mathscr{L}$ et T introduites au début de 2.1. Soit A une structure de $\mathscr{L}$ et soit D un foncteur A-définissable. On munit $S(D)$ de la topologie dont une base d'ouverts est constituée des $S(\Delta)$, où Δ parcourt l'ensemble des sous-foncteurs A-définissables de D.

Reprenons l'exemple (1) de 2.1. L'ensemble $S(X)$ s'identifie au schéma X. La topologie sur X déduite de celle de $S(X)$ est alors la topologie *constructible* (celle qui est engendrée par les ouverts *et les fermés* de Zariski).

Reprenons l'exemple (2) de 2.1. On a vu que $S(X)$ s'identifie au spectre réel X_r de X. La topologie sur X_r déduite de celle de $S(X)$ est alors la topologie *constructible* (celle qui est engendrée Zariski-localement par les combinaisons booléennes d'inégalités strictes *ou larges* entre fonctions régulières).

La topologie ainsi définie sur $S(D)$ a l'avantage d'en faire un espace topologique compact (nous discuterons cette propriété plus avant un peu plus bas). Elle a l'inconvénient de faire de *tout* définissable un ouvert, indépendamment de la nature de la formule qui le décrit. Dans certaines circonstances, où l'on estime que certaines formules « doivent » être ouvertes et d'autres non, on peut donc être amené à introduire une topologie alternative en prenant pour base d'ouverts les $S(\Delta)$, pour Δ parcourant *un certain sous-ensemble* de l'ensemble des sous-foncteurs A-définissables de D.

Reprenons l'exemple (1) de 2.1. L'ensemble $S(X)$ s'identifie au schéma X. On peut munir $S(X)$ de la topologie engendrée par les $S(\Delta)$, où Δ est un ouvert de Zariski de X. La topologie ainsi définie sur $S(X)$ correspond évidemment à la topologie de Zariski de X.

Reprenons l'exemple (2) de 2.1. On a vu que $S(X)$ s'identifie au spectre réel X_r de X. On peut munir $S(X)$ de la topologie engendrée par les $S(\Delta)$, où Δ est défini Zariski localement par combinaison booléenne positive d'inégalités *strictes* entre fonctions régulières. La topologie sur X_r à laquelle elle correspond est la topologie usuelle du spectre réel.

2.3. Digression sur la compacité

La compacité des espaces de type joue un rôle majeur en théorie des modèles en général, et chez Hrushovski et Loeser en particulier, où elle intervient à maints endroits — même si cela n'apparaîtra guère dans ce texte, où nous nous contenterons de brosser très grossièrement les preuves. Le plus souvent, elle s'utilise sous la forme du principe suivant, à l'énoncé volontairement vague : si $\mathscr{P}$ est une propriété à l'énoncé raisonnable dans le langage $\mathscr{L}$, il revient au même de la démontrer en situation *relative* sur *un* modèle M donné ou en situation *absolue* sur *tous* les modèles M' tels que $M \subseteq M'$. C'est ce qui explique qu'il puisse être nécessaire, même si l'on s'intéresse à un modèle M bien défini, de travailler sur des modèles éventuellement beaucoup plus gros. Nous allons étayer notre propos à travers deux exemples.

Le premier concerne la *trivialisation constructible d'un faisceau cohérent*. Soit F un corps et soit X un F-schéma de type fini. Soit $\mathscr{F}$ un faisceau cohérent sur X. Il existe alors une partition constructible finie et localement fermée (X_i) de X telle que $\mathscr{F}|_{X_i}$ soit libre pour tout i (où X_i est muni de sa structure réduite). En effet, si x est un point du schéma X alors $\mathscr{F} \otimes F(x)$ est libre (c'est la forme absolue du résultat à établir, sur le corps $F(x)$), et cette propriété se propage au-dessus d'un ouvert de Zariski non vide de $\overline{\{x\}}_{\text{red}}$; on conclut en invoquant la compacité de X pour la topologie constructible — ou une récurrence noethérienne si l'on préfère, ce qui revient au même.

On voit que si l'on s'était contenté de ne considérer que des F-points de X, on n'aurait pas pu aboutir même si F est algébriquement clos : si $x \in X(F)$, la liberté de $\mathscr{F} \otimes F(x)$ n'a aucune raison *a priori* de se propager au-delà du singleton constructible $\{x\}$.

Le second concerne *le théorème de Hardt*; nous allons donner les grandes lignes de la preuve qu'en ont proposée Jacek Bochnak, Michel Coste et Marie-Françoise Roy ([**7**], th. 9.3.1) ou disons plutôt d'une traduction de celle-ci dans le langage des types (ils utilisent quant à eux celui du spectre réel). Soit R un corps réel clos, et soient $Y \subset \mathbb{A}^n_R$ et $X \subset \mathbb{A}^m_R$ deux foncteurs R-définissables dans le langage des corps ordonnés (on dit aussi qu'ils sont *semi-algébriques*). Soit $f : Y \to X$ une transformation naturelle R-définissable. On la suppose continue dans le sens suivant : pour tout corps réel clos R' contenant R, l'application $f(R') : Y(R') \to Y(R')$ est continue pour les topologies déduites de l'ordre sur R' (il suffit en vertu du lemme 1.6 de le tester sur *un* tel corps R', par exemple sur R). Il existe alors une partition finie et R-définissable (X_i) de X et, pour tout i, un sous-foncteur R-définissable Z_i de $\mathbb{A}^n_R$ telle que $f^{-1}(X_i)$ soit R-définissablement homéomorphe à $Z_i \times X_i$. En effet, soit $t \in S(X)$ et soit x une réalisation de t, appartenant à $X(R')$ pour un certain corps réel clos R' contenant R. La fibre $f_{R'}^{-1}(x)$ est un sous-foncteur R'-définissable de $\mathbb{A}^n_{R'}$, et possède à ce titre une triangulation R'-définissable[8]. L'ensemble simplicial correspondant admettant une réalisation dans $\mathbb{A}^m_S$, il en admet une, disons Z, dans $\mathbb{A}^m_R$ (par le lemme 1.6). Par conséquent, il existe un homéomorphisme R'-définissable $f_{R'}^{-1}(x) \simeq Z_{R'}$ (c'est la forme absolue du résultat à établir, sur le corps réel clos R'). Cette propriété se propage : il existe un sous-foncteur R-définissable T de X tel que $t \in S(T)$ et tel que $f^{-1}(T)$

[8] Cela signifie qu'elle s'identifie à une union finie de cellules *ouvertes* d'un complexe simplicial (elle n'est pas forcément fermée bornée) ; l'expression « ensemble simplicial » que nous employons ensuite fait référence à la donnée combinatoire de ces cellules ouvertes.

soit R-définissablement homéomorphe à $Z \times T$. On conclut en utilisant la compacité de $S(X)$.

On voit que si l'on s'était contenté de ne considérer que des R-points, on n'aurait pas pu aboutir : le type d'homéomorphie semi-algébrique de la fibre en un tel point x n'a aucune raison *a priori* de se propager au-delà du singleton $\{x\}$.

Remarque 2.1. — Soit M un modèle de T, et soit D un foncteur M-définissable. Soit $x \in S(D)$, et soit $\mathscr{E}_x$ l'ensemble des sous-foncteurs M-définissables de D sur lesquels x est situé. L'ensemble $\mathscr{U}_x$ des parties M-définissables de $D(M)$ de la forme $\Delta(M)$, où $\Delta \in \mathscr{E}$, est un ultra-filtre de parties M-définissables. Réciproquement, il résulte de la compacité de $S(D)$ que tout ultrafiltre de parties M-définissables de $D(M)$ est de la forme $\mathscr{U}_x$ pour un certain $x \in S(D)$ (nécessairement unique par définition d'un type).

2.4. Types définissables

On conserve les notations $\mathscr{L}$ et T introduites au début de 2.1.

DÉFINITION 2.2. — *Soit M un modèle de T, soit D un foncteur M-définissable et soit $t \in S(D)$. On dit que t est M-*définissable *s'il possède la propriété suivante : pour tout foncteur M-définissable D' et tout sous-foncteur M-définissable $\Delta \subset D \times D'$, le sous-ensemble de $D'(M)$ formé des points x tels que t soit situé sur $\Delta \times_{D'} \{x\} \subset D$ est M-définissable.*

Donnons quelques exemples et contre-exemples.

• Plaçons-nous dans la théorie des corps algébriquement clos, et soit D un foncteur F-définissable pour un certain corps algébriquement clos F. Tout type sur D est alors F-définissable.

• Plaçons-nous dans la théorie des corps réels clos et soit R un corps réel clos. Le type 0_R^+ défini à la fin de l'exemple (2) de 2.1 est R-définissable. Cela provient essentiellement du fait suivant. Soit $f \in R(u)$ et soit D le sous-foncteur de $\mathbb{A}_R^1$ défini par la condition $f \bowtie 0$, où $\bowtie$ est un symbole appartenant à $\{<, >, \leqslant, \geqslant\}$. Le type 0_R^+ est alors situé sur D si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ dans R tel que $f(x) \bowtie 0$ pour tout x tel que $0 < x < \varepsilon$, et cette condition s'exprime visiblement par une formule de $\mathscr{L}_{\mathrm{co}}$ à paramètres dans R et portant sur les coefficients de f.

• Plaçons-nous dans la théorie ACVF et soit F un modèle de celle-ci. Les types $\eta_{\lambda,r,F}$ et $\eta_{\lambda,r^-,F}$ définis à l'exemple (3) de 2.1 sont F-définissables : cela résulte essentiellement de leurs descriptions par des formules de $\mathscr{L}_{\mathrm{val}}^*$ à paramètres dans F.

• Plaçons-nous dans la théorie des corps réels clos, et soit R_0 la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (c'est un corps réel clos). Le nombre réel $\pi \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})$ définit un type sur

$\mathbb{A}^1_{R_0}$; il n'est pas R_0-définissable : si $f \in R_0(u)$, le signe de $f(\pi)$ ne s'exprime pas par une formule de $\mathscr{L}_{\mathrm{co}}$ à paramètres dans R_0 en les coefficients de f.

• On reste dans la théorie des corps réels clos. On se donne un corps réel clos R contenant strictement $\mathbb{R}$ (il existe alors dans R un élément supérieur à tout réel positif). Munissons $R(u)$ de l'ordre pour lequel un élément f est strictement positif si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f(x)$ soit strictement positif pour tout x *appartenant à* $\mathbb{R}$ et strictement supérieur à N. On définit ainsi un point du spectre réel de $\mathbb{A}^1_R$, et partant un type sur $\mathbb{A}^1_R$. Ce type n'est pas R-définissable ; cela résulte essentiellement du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas une partie R-définissable de R.

Restriction des types, extension des types définissables. Soit M un modèle de T, soit D un foncteur M-définissable, et soit $M' \in \mathsf{M}_M$. Soit θ un type sur $D_{M'}$. Si x désigne une réalisation de θ, alors x induit un type sur D, qui ne dépend que de θ, et pas du choix de x ; on dispose ainsi d'une application naturelle $S(D_{M'}) \to S(D)$, parfois dite de *restriction au modèle M*.

Soit maintenant t un type *M-définissable* situé sur D. Il existe alors un *antécédent canonique* t' de t sur $S(D_{M'})$ qui est M'-définissable (on dit que c'est *l'extension canonique de t au modèle M'*) ; grossièrement, le type t' est défini par les mêmes formules que t. Plus précisément, soit Δ un sous-foncteur M'-définissable de $D_{M'}$. En « faisant varier les paramètres de la formule qui définit Δ », on montre l'existence d'un foncteur M-définissable D_1, d'un sous-foncteur M-définissable D_2 de $D \times D_1$, et d'un point $x \in D_1(M')$ tel que $\Delta = D_{2,M'} \times_{D_{1,M'}} \{x\}$. Le type t étant M-définissable, il existe un sous-foncteur M-définissable D_3 de D_1 tel que pour tout $y \in D_1(M)$, le point y appartienne à $D_3(M)$ si et seulement si t est situé sur $D_2 \times_{D_1} \{y\}$. Le type t' est alors situé sur Δ si et seulement si $x \in D_3(M')$.

Donnons maintenant quelques exemples d'extension canonique.

• Si $x \in D(M)$ il définit un type simple t sur D ; l'extension canonique de t au modèle M' est le type simple sur $D_{M'}$ associé à $x \in D(M) \subset D(M')$.

• On reprend les notations de l'exemple (1) de 2.1, en supposant que F est algébriquement clos. Soit F' une extension algébriquement close de F, soit $t \in S(X)$, et soit $t' \in S(X_{F'})$ son extension canonique. Le type t correspond à un point x du schéma X. Le fermé de Zariski $\overline{\{x\}}_{F'}$ de $X_{F'}$ est irréductible (car F est algébriquement clos). Son point générique x' est précisément le point du schéma $X_{F'}$ qui correspond à t'.

• On reprend les notations de l'exemple (2) de 2.1 en supposant que R est réel clos. Soit R' une extension réelle close de R. L'extension canonique du type 0^+_R au modèle R' est le type $0^+_{R'}$.

• On reprend les notations de l'exemple (3) de 2.1 en supposant que F est un modèle de ACVF. Soit F' une extension valuée algébriquement close de F. L'extension canonique du type $\eta_{\lambda,r,F}$ (resp. $\eta_{\lambda,r^-,F}$) au modèle F' est le type $\eta_{\lambda,r,F'}$ (resp. $\eta_{\lambda,r^-,F'}$).

Terminons ce paragraphe en mentionnant que si $f : D \to D'$ est une transformation naturelle M-définissable entre deux foncteurs M-définissables, et si t est un type M-définissable sur D, alors le type image $f(t)$ est M-définissable.

2.5. Topologies définissables ; compacité définissable

On conserve les notations $\mathscr{L}$ et T introduites au début de 2.1. Soit A une structure de T, et soit D un foncteur A-définissable. Une *topologie définissable* $\mathscr{T}$ sur D consiste en la donnée, pour tout $M \in \mathsf{M}_A$, d'une famille $\mathscr{T}_M$ de sous-foncteurs M-définissables de D_M, que l'on appelle les *ouverts M-définissables de D_M*, possédant les propriétés suivantes[(9)] :

• la famille $\mathscr{T}_M$ est stable par intersections finies ;

• si (U_i) est une famille d'éléments de $\mathscr{T}_M$ telle que $\bigcup U_i(M) = V(M)$ pour un certain sous-foncteur M-définissable V de D_M alors $V \in \mathscr{T}_M$;

• si $M \subseteq M'$ et si U est un sous-foncteur M-définissable de D_M alors $U \in \mathscr{T}_M$ si et seulement si $U_{M'} \in \mathscr{T}_{M'}$.

Soit $\mathscr{T}$ une topologie définissable sur D. Elle induit pour tout M une topologie $\mathscr{T}(M)$ sur $D(M)$, à savoir celle engendrée par les $U(M)$ pour U parcourant $\mathscr{T}_M$. Lorsque $M \subseteq M'$, la topologie $\mathscr{T}(M)$ est plus grossière (et, en général, *strictement* plus grossière) que la topologie induite par celle $\mathscr{T}(M')$. Si B est une structure telle que $A \subseteq B$, on dira qu'un sous-foncteur B-définissable U de D_B est un *ouvert B-définissable* si U_M est un ouvert définissable de D_M pour tout $M \in \mathsf{M}_B$ — il suffit que ce soit le cas pour *un* tel M.

Si D' est un foncteur A-définissable muni d'une topologie définissable $\mathscr{T}'$, une transformation naturelle A-définissable $f : D \to D'$ est dite *continue* si pour tout $M \in \mathsf{M}_A$ et tout $U \in \mathscr{T}'_M$, le foncteur $f^{-1}(U)$ appartient à $\mathscr{T}_M$. Il revient au même de demander que $f(M) : D(M) \to D'(M)$ soit continue pour *tout* modèle $M \in \mathsf{M}_A$.

Soit $M \in \mathsf{M}_A$, soit t un type sur D_M et soit $x \in D(M)$. On dit que *x adhère à t* si pour tout $U \in \mathscr{T}_M$ tel que $x \in U(M)$, le type t est situé sur U.

On dira que D est *définissablement compact* si pour tout $M \in \mathsf{M}_A$ et tout type *M-définissable* t sur D_M, il existe un unique $x \in D(M)$ qui est adhérent à t. Cela revient en quelque sorte à demander que « tout ultra-filtre M-définissable de parties M-définissables de $D(M)$ converge », cf. rem. 2.1.

---

(9) On impose également des conditions de finitude très raisonnables sur lesquelles nous ne nous étendrons pas ici.

Si D est définissablement compact et si Δ est un sous-foncteur A-définissable de D, alors Δ est un fermé A-définissable (*i.e.* le complémentaire d'un ouvert A-définissable) si et seulement si il est définissablement compact.

Exemple 2.3. — On se place dans la théorie des corps réels clos. Soit R_0 un corps réel clos et soit X un R_0-schéma de type fini. Pour tout corps réel clos R contenant R_0, notons $\mathscr{T}_R$ la famille des sous-foncteurs R-définissables de X_R définis Zariski-localement sur X_R par une combinaison booléenne positive d'inégalités *strictes* entre fonctions régulières. La donnée des $\mathscr{T}_R$ constitue une topologie définissable sur X et en induit une, par restriction, sur tout sous-foncteur R_0-définissable de X. Si R est un corps réel clos contenant R_0, la topologie $\mathscr{T}(R)$ sur $X(R)$ est celle déduite de la topologie de corps ordonné de R. Remarquons que si R' est un corps réel clos contenant R et s'il existe un élément strictement positif ε de R' qui est inférieur à x pour tout $x > 0$ dans R, la topologie de $X(R)$ induite par $\mathscr{T}(R')$ est la topologie *discrète* : en effet, pour tout $x \in R$ on a $\{x\} = \{y \in R', -\varepsilon < y - x < \varepsilon\}$.

Si $X = \mathbb{A}^n_{R_0}$ et si Y est un sous-foncteur R-définissable de X alors Y est définissablement compact si et seulement si il est fermé (autrement dit, $X \setminus Y \in \mathscr{T}_{R_0}$) et borné, c'est-à-dire contenu dans $[-x; x]^n_{R_0}$ pour un certain $x > 0$ dans R_0.

Donnons un exemple de point adhérent à un type. On suppose maintenant que X est égal à $\mathbb{A}^1_{R_0}$. Le point $0 \in \mathbb{A}^1(R_0) = R_0$ est alors adhérent au type $0^+_{R_0}$ (et c'est le seul point de R_0 dans ce cas). On voit ainsi pourquoi $]0; 1[_{R_0}$ n'est pas définissablement compact : $0^+_{R_0}$ est situé sur $]0; 1[_{R_0}$, mais aucun R_0-point de ce dernier n'adhère à $0^+_{R_0}$. Insistons à ce propos sur l'importance, pour la compacité définissable, de se limiter à manipuler des types *définissables.* Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le cas où R_0 est la fermeture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Le sous-foncteur R_0-définissable $[0; 4]_{R_0}$ de $\mathbb{A}^1_{R_0}$ est définissablement compact. Le nombre réel π induit un type t sur $[0; 4]_{R_0}$ qui n'est pas R_0-définissable... et de fait, aucun R_0-point de $[0; 4]_{R_0}$ n'adhère à t.

2.6. Types stablement dominés ; le cas de ACVF

Commençons par une remarque, qui sera implicitement utilisée dans toute la suite du texte. Soit F un modèle de ACVF, et soit D un foncteur $|F|$-définissable dans la théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux (resp. un foncteur $\tilde{F}$-définissable dans la théorie des corps algébriquement clos). Soit D' le foncteur qui envoie $L \in \mathsf{M}_F$ sur $D(|L|)$ (resp. $D(\tilde{L})$). Il résulte alors de la remarque 1.10 qu'il existe une bijection canonique $S(D) \simeq S(D')$, et qu'un type sur D' est F-définissable si et seulement si le type correspondant sur D est $|F|$-définissable (resp. $\tilde{F}$-définissable).

Venons-en maintenant à la stabilité. Il n'est pas question de donner des définitions précises en la matière ; nous renvoyons le lecteur intéressé à l'ouvrage **[14]** de Haskell, Hrushovski et Macpherson. Nous allons nous contenter de quelques explications très sommaires.

1) Il existe différentes définitions équivalentes d'une théorie *stable*. L'une d'elles consiste à exiger « qu'elle ne contienne pas d'ensemble ordonné infini » ; une autre requiert que pour tout modèle M et tout foncteur M-définissable D, le cardinal de $S(D_{M'})$ croisse raisonnablement en fonction de celui du modèle $M' \supseteq M$. La théorie des corps algébriquement clos est stable. La théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux, la théorie des corps réels clos et la théorie ACVF ne sont pas stables : chacune d'elles « contient un ensemble ordonné infini ».

2) Une théorie T possède toutefois une sorte de « plus grande sous-théorie stable » T_{stab}. Si T est la théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux, T_{stab} ne voit que les foncteurs définissables *finis* (c'est-à-dire dont l'ensemble des points à valeur dans un modèle donné, et donc dans tout modèle, est fini). Si $T = \text{ACVF}$, la théorie T_{stab} est essentiellement la théorie de la sorte « corps résiduel » (qui s'identifie à celle des corps algébriquement clos).

3) Un type définissable dans une théorie T est dit *stablement dominé* s'il est déterminé par sa trace sur la plus grande sous-théorie stable de T.

Un type simple est toujours stablement dominé. La réciproque est parfois vraie. Ainsi, si T est la théorie des groupes abéliens divisibles ordonnés non triviaux, et si D est un foncteur M-définissable pour un certain modèle M de T, un type stablement dominé sur D est un type M-définissable t qui doit être caractérisé par $f(t)$ pour une certaine transformation naturelle M-définissable de D vers un foncteur M-définissable *fini* D' ; il n'est pas difficile de voir que cela équivaut à demander que t soit *simple*. La théorie des types stablement dominés est donc triviale dans la théorie T.

Il n'en va pas de même dans la théorie ACVF. Donnons un exemple de type stablement dominé qui n'est pas simple. On fixe un modèle F. On dispose d'une transformation naturelle F-définissable ρ de $b(0,1)_F$ vers $\mathbb{A}^1_{\tilde{F}}$ (la réduction modulo l'idéal maximal). Soit $t \in S(b(0,1)_F)$. On vérifie aisément que $t = \eta_{0,1,F}$ si et seulement si $\rho(t)$ est le type correspondant au point générique de $\mathbb{A}^1_{\tilde{F}}$. Comme $\mathbb{A}^1_{\tilde{F}}$ « appartient » à $\text{ACVF}_{\text{stab}}$, le type $\eta_{0,1,F}$ est contrôlé par sa trace sur $\text{ACVF}_{\text{stab}}$, et est dès lors stablement dominé.

En fait, on dispose dans la théorie ACVF d'un critère permettant de décider si un type définissable est stablement dominé, que nous allons maintenant énoncer ; on rappelle que Γ_0 désigne le foncteur $F \mapsto |F|$.

PROPOSITION 2.4. — *Soit F un modèle de ACVF, soit D un foncteur F-définissable et soit t un type F-définissable sur D. Le type t est stablement dominé si et seulement si il est* orthogonal à Γ_0, *c'est-à-dire si pour tout modèle $F' \supseteq F$ et toute transformation naturelle F'-définissable $f : D_{F'} \to \Gamma_{0,F'}$, le type image $f(t)$ est simple.*

Remarque 2.5. — Supposons que D soit un sous-foncteur d'un F-schéma de type fini X. Le type t correspond alors à un point $(x, |.|)$ du spectre valuatif de X, et la condition énoncée dans la proposition ci-dessus équivaut simplement à l'égalité $|F(x)| = |F|$.

Remarque 2.6. — Soit F un modèle de ACVF, soit D un foncteur F-définissable, et soit t un type stablement dominé sur D. Il résulte immédiatement de la proposition ci-dessus que :

- si f est une transformation naturelle F-définissable de D vers un foncteur F-définissable, le type $f(t)$ est stablement dominé ;
- si $F' \in \mathsf{M}_F$, l'extension canonique de t au modèle F' est stablement dominée.

On a vu plus haut que $\eta_{0,1,F}$ est stablement dominé. On peut retrouver ce fait grâce à la proposition 2.4 et à la remarque 2.5 ; nous allons les utiliser pour vérifier plus généralement que $\eta_{\lambda,r,F}$ est stablement dominé pour tout $\lambda \in F$ et tout $r \in |F|$. Si $r = 0$ alors $\eta_{\lambda,r,F}$ est le type simple induit par le point λ de $\mathbb{A}^1_F(F) = F$, et il est donc stablement dominé. Supposons $r > 0$. Le point $\eta_{\lambda,r,F}$ est alors le type associé au point du spectre valuatif de $\mathbb{A}^1_F$ défini par la valuation $|.| : F(u) \to |F|$ qui envoie $\sum a_i(u-\lambda)^i$ sur $\max |a_i| \cdot r^i$. Comme $|F(u)| = |F|$, le type $\eta_{\lambda,r,F}$ est stablement dominé.

Nous allons *a contrario* vérifier que si $r > 0$ alors $\eta_{\lambda,r^-,F}$ n'est pas stablement dominé. En effet, il est associé au point du spectre valuatif de $\mathbb{A}^1_F$ défini par la valuation $|.| : F(u) \to |F|$ qui envoie $\sum a_i(u-\lambda)^i$ sur $\max |a_i| \cdot \omega^i r^i$ (avec les notations de l'exemple (3) de 2.1). On a donc $|F(u)| = \omega^{\mathbb{Z}} \cdot |F| \supsetneq |F|$; par conséquent, le type $\eta_{\lambda,r^-,F}$ est stablement dominé. Il n'est pas difficile, dans ce dernier cas, d'exhiber une transformation naturelle définissable $f : \mathbb{A}^1_F \to \Gamma_0$ telle que $f(\eta_{\lambda,r^-,F})$ ne soit pas simple. Il suffit de remarquer que $|u-\lambda| = \omega$, et de traduire ce fait. On note f la transformation F-définissable de $\mathbb{A}^1_F \to \Gamma_{0,F}$ donnée par la formule $x \mapsto |x-\lambda|$. Sa valeur en $\eta_{\lambda,r^-,F}$ est alors par la remarque qui précède le type sur $\Gamma_{0,F}$ induit par ω, qui n'est pas simple : ce type n'est autre que $1^-_{|F|}$, qui est caractérisé par le fait qu'il est situé sur $]\varepsilon; 1[_{|F|}$ pour tout $\varepsilon < 1$ dans $|F|$.

3. ESPACES CHAPEAUTÉS ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME PRINCIPAL

Références : la référence principale est bien entendu l'article **[17]** lui-même, mais le lecteur pourra consulter avec profit les transparents d'exposés de Hrushovski (**[16]**).

On travaille dans la théorie ACVF. On fixe *pour toute la suite du texte* un corps valué (k, G_0). On se donne une clôture algébrique k^a de k, et l'on note simplement M la catégorie $\mathsf{M}_{k^a,G_0^{\mathbb{Q}}}$. Si A est une sous-structure de $(k^a, G_0^{\mathbb{Q}})$, un *foncteur A-définissable* désignera ici la restriction à M d'un foncteur A-définissable au sens précédemment utilisé ; on note encore $\overline{B}$ et Γ_0 les restrictions respectives à M des foncteurs $\overline{B}$ (qui envoie F sur $\{b(\lambda, r)_F\}_{\lambda\in F, r\in|F|}$) et Γ_0 (qui envoie F sur $|F|$). De même, si X est une k-variété algébrique, on note encore X le foncteur qu'elle induit sur M.

3.1. Les espaces chapeautés : définition, exemples de base, premières propriétés

Soit D un foncteur (k, G_0)-définissable, soit $F \in \mathsf{M}$ et soit $F' \in \mathsf{M}_F$. La remarque 2.6 assure que l'ensemble des types stablement dominés sur D_F se plonge, *via* l'opération d'extension canonique au modèle F', dans celui des types stablement dominés sur $D_{F'}$. Ainsi, la formation de l'ensemble des types stablement dominés sur D_F est *fonctorielle en F*.

DÉFINITION 3.1. — *Soit D un foncteur (k, G_0)-définissable. On note $\widehat{D}$ le foncteur qui associe à un modèle $F \in \mathsf{M}$ l'ensemble des types stablement dominés sur D_F.*

La remarque 2.6 assure que la formation de $\widehat{D}$ est fonctorielle en D, pour les transformations naturelles (k, G_0)-définissables.

Commentaires et premiers exemples. Si $F \in \mathsf{M}$, tout point de $D(F)$ définit un type simple, et partant stablement dominé, sur D_F. On dispose par ce biais d'un plongement naturel $D \hookrightarrow \widehat{D}$.

Supposons que D « vive dans la sorte Γ_0 », c'est-à-dire soit de la forme $\Delta \circ \Gamma_0$, où Δ est un foncteur G_0-définissable dans la théorie DOAG ; c'est par exemple le cas dès que D est un sous-foncteur de Γ_0^n. Dans ce cas, pour tout $F \in \mathsf{M}$, les types stablement dominés sur D_F sont exactement les types simples : autrement dit, le plongement $D \hookrightarrow \widehat{D}$ est bijectif. On montre plus généralement que si D' est un foncteur (k, G_0)-définissable, le foncteur $\widehat{D' \times D}$ s'identifie naturellement à $\widehat{D'} \times D$.

Nous allons maintenant décrire $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$. Pour tout $F \in \mathsf{M}$, on note $\iota(F)$ l'application qui envoie une boule fermée $b(\lambda, r)_F \in \overline{B}(F)$ sur son type générique $\eta_{\lambda,r,F}$. Les types de la forme $\eta_{\lambda,r,F}$ étant stablement dominés, on définit ainsi un plongement $\iota : \overline{B} \hookrightarrow \widehat{\mathbb{A}^1_k}$, dont on démontre qu'il est *bijectif*. Par conséquent, $\widehat{\mathbb{A}^1_k} \simeq \overline{B}$. Comme $\overline{B}$ est (k, G_0)-définissable, il en va de même de $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$.

Ce dernier fait se généralise en partie. Avant de formuler l'énoncé correspondant, donnons une définition. Soit X une k-variété algébrique, et soit U un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de X ; cela signifie, rappelons-le, que U est défini Zariski-localement sur X par une combinaison booléenne d'inégalités de la forme $|f| \bowtie \lambda|g|$, où f et g sont des fonctions régulières, où $\lambda \in G_0$ et où $\bowtie \in \{<, >, \leqslant, \geqslant\}$. Supposons que U est non vide et soit $F \in \mathsf{M}$. Le plus grand entier n pour lequel il existe un *plongement* F-définissable de $b(0,1)^n_F$ dans U_F ne dépend pas de F, et est appelé la *dimension* de U.

PROPOSITION 3.2. — *Soit U comme ci-dessus. Le foncteur $\widehat{U}$ est alors* (k, G_0)-pro-définissable*; il est (k, G_0)-définissable si et seulement si il est de dimension inférieure ou égale à* 1.

Faisons quelques commentaires. Dire qu'un foncteur est (k, G_0)-prodéfinissable signifie qu'il est isomorphe à une limite projective de foncteurs (k, G_0)-définissables – on demande de surcroît que l'ensemble d'indices ne soit pas trop gros, dans un sens que nous ne préciserons pas ici. Bien entendu, pour que la limite projective en question soit canonique, il faut, à l'instar de ce qu'on a vu dans le cas définissable, se donner un peu plus qu'un foncteur sur M : le foncteur en question doit se mettre en familles de façon évidente. C'est le cas en ce qui concerne $\widehat{U}$ — on dispose d'une définition naturelle de famille définissable de types stablement dominés.

Une bonne partie de ce qu'on a vu à propos des foncteurs définissables s'étend au cadre des foncteurs prodéfinissables, comme la notion de transformation définissable, celle de type, ou celle de type définissable. Si D est un foncteur (k, G_0)-prodéfinissable, un sous-foncteur D' de D sera dit :

– (k, G_0)-*isodéfinissable* s'il existe un foncteur (k, G_0)-définissable Δ, et une transformation (k, G_0)-définissable $\Delta \to D$ qui induit un isomorphisme $\Delta \simeq D'$;

– *relativement* (k, G_0)-*définissable* s'il existe un foncteur (k, G_0)-définissable Δ, un sous-foncteur (k, G_0)-définissable Δ' de Δ, et une transformation naturelle (k, G_0)-définissable $f : D \to \Delta$ telle que $D' = f^{-1}(\Delta')$.

Par exemple, la transformation naturelle $U \hookrightarrow \widehat{U}$ est (k, G_0)-définissable. Son image (que l'on identifiera à U) est donc (k, G_0)-isodéfinissable ; on montre qu'elle est aussi (k, G_0)-relativement définissable. Si V est un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de U alors $\widehat{V}$ est relativement (k, G_0)-définissable dans $\widehat{U}$.

Remarque 3.3. — On montre plus précisément que le foncteur $\widehat{U}$ est *strictement* (k, G_0)-prodéfinissable : cela signifie que pour toute transformation (k, G_0)-définissable f de $\widehat{U}$ vers un foncteur (k, G_0)-définissable D, le foncteur image $f(\widehat{U})$ est (k, G_0)-définissable.

Disons maintenant quelques mots des preuves.

• La pro-définissabilité de $\widehat{U}$ est établie à l'aide d'arguments qui n'ont rien de spécifique à ACVF et s'appliquent à bien d'autres théories. Ils reposent pour l'essentiel sur une propriété très générale d'uniformité, qui dans le cas qui nous préoccupe dit en gros la chose suivante : si, avec les notations de la proposition 2.2, on fixe D' et Δ et fait parcourir à t l'ensemble des types définissables et orthogonaux à Γ_0 sur D, alors le sous-ensemble définissable de $D'(M)$ fourni par *loc. cit.* évolue au sein d'une famille M-définissable.

• La *stricte* prodéfinissabilité de $\widehat{U}$ repose, *via* le fait qu'un type stablement dominé est contrôlé par sa trace sur la sorte « corps résiduel », sur une propriété de la théorie des corps algébriquement clos : si X est un foncteur définissable dans cette théorie, le foncteur des types (définissables) sur X est *ind-définissable.* Pour se convaincre de ce dernier point, rappelons que si X est un schéma, les types sur X correspondent bijectivement aux points du schéma X, donc aux fermés irréductibles de X — d'où un foncteur ind-définissable : on se ramène au cas affine, on fixe un « degré » et un nombre d'équations, on fait varier les coefficients de celles-ci, on ne garde que celles qui décrivent un fermé irréductible, et l'on quotiente par la relation d'équivalence qui identifie deux systèmes d'équations définissant le même fermé.

• La définissabilité de $\widehat{U}$ en dimension $\leqslant 1$ est quant à elle une conséquence du résultat de finitude suivant, qui lui-même résulte du théorème de Riemann-Roch : si X est une courbe projective, irréductible et lisse de genre g sur un corps algébriquement clos F, le corps $F(X)$ est engendré multiplicativement par les fonctions ayant au plus $g+1$ pôles (avec multiplicités) ; cela généralise le fait que les polynômes de degré 1 en u engendrent multiplicativement $F(u)$.

À propos des fibres d'applications chapeautées. Soient D et D' deux foncteurs (k, G_0)-définissables, soit $f : D \to D'$ une transformation naturelle (k, G_0)-définissable et soit $\widehat{f} : \widehat{D} \to \widehat{D'}$ la transformation induite. Soit $F \in \mathsf{M}$. Si $x \in \widehat{D'}(F)$, la fibre $\widehat{f}_F^{-1}(x)$ est un sous-foncteur bien défini de $\widehat{D}_F$.

Supposons que $x \in D'(F)$, c'est-à-dire encore que x est un type simple. Il n'est alors pas difficile de voir que $\widehat{f}_F^{-1}(x)$ s'identifie naturellement à $\widehat{f_F^{-1}(x)}$.

Par contre, on prendra garde que si x n'est pas simple, le foncteur $\widehat{f}_F^{-1}(x)$ *ne s'interprète pas en général comme un espace chapeauté.* Ce phénomène qui peut sembler un peu désagréable – les fibres ne sont pas toutes des objets de la théorie — n'est pas lié à une lacune dans les définitions, mais à une « vraie pathologie » de la théorie des valuations, dont nous allons décrire une manifestation. Il est possible d'exhiber deux modèles $F \subseteq F'$ de ACVF et un couple $(x, y) \in (F')^2$ tels que les propriétés suivantes soient satisfaites :

– le type sur $\mathbb{A}^1_F$ induit par x est stablement dominé ;

– le type sur $\mathbb{A}^2_F$ induit par (x, y) est stablement dominé ;

– le type sur $\mathbb{A}^1_{F(x)^a}$ induit par y *n'est pas* $F(x)^a$-définissable, et *a fortiori* pas stablement dominé (on désigne par $F(x)^a$ la fermeture algébrique de $F(x)$ dans F').

Cela dit, ce défaut n'est pas rédhibitoire. Nous verrons qu'il n'interdit pas de raisonner par fibrations ; simplement, il contraint à un certain nombre de contorsions techniques lorsqu'on veut le faire, puisqu'on ne sait travailler que sur les fibres en les points simples.

3.2. La topologie sur $\widehat{U}$

Pour tout n, on munit le foncteur (k, G_0)-définissable Γ_0^n de la topologie définissable pour laquelle les ouverts F-définissables de $\Gamma_{0,F}^n$ sont, pour tout $F \in \mathsf{M}$, les sous-foncteurs de $\Gamma_{0,F}^n$ qui peuvent être définis par une combinaison booléenne positive d'inégalités de la forme $a \prod x_i^{n_i} < b \prod x_i^{m_i}$ où a et b appartiennent à $|F|$. Cette topologie possède les propriétés intuitives attendues : si D est un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de Γ_0^n, il est définissablement compact si et seulement si il est borné et peut être décrit par une combinaison booléenne positive d'inégalités *larges* entre monômes. Cette topologie en induit une sur tout segment généralisé, et plus généralement sur tout graphe fini (pour une définition, voir la fin de 1.4). Un graphe fini est définissablement compact.

La notion de topologie définissable sur un foncteur définissable s'étend au cas des foncteurs prodéfinissables — sur un modèle donné, une telle topologie est donnée par une collection de sous-foncteurs *relativement définissables.* La compacité définissable se définit de façon analogue dans ce cadre.

On désigne toujours par U un sous-foncteur (k, G_0)-définissable d'un k-schéma de type fini X. Soit $F \in \mathsf{M}$, soit V un ouvert de Zariski de X_F et soit f une fonction régulière sur V. On peut voir $|f|$ comme une transformation F-définissable de V vers $\Gamma_{0,F}$; elle en induit une de $\widehat{V}$ vers $\widehat{\Gamma}_{0,F} = \Gamma_{0,F}$, que l'on note encore $|f|$. Soit D un ouvert F-définissable de $\Gamma_{0,F}$; le foncteur $|f|^{-1}(D) \cap \widehat{U}_F$ est un sous-foncteur relativement F-définissable de $\widehat{U}_F$. On munit $\widehat{U}$ de la topologie définissable la plus grossière pour laquelle $|f|^{-1}(D) \cap \widehat{U}_F$ est un ouvert relativement F-définissable de $\widehat{U}_F$ pour tout (F, V, f, D) comme ci-dessus. Indiquons quelques propriétés de cette topologie.

- Pour tout $F \in \mathsf{M}$, le plongement naturel $U(F) \hookrightarrow \widehat{U}(F)$ est un homéomorphisme de $U(F)$ (muni de la topologie déduite de celle du corps valué F) sur son image, laquelle est dense.
- Si X est géométriquement connexe alors $\widehat{X}$ est $(k^a, G_0^{\mathbb{Q}})$-connexe : il ne peut s'écrire comme une union disjointe de deux ouverts $(k^a, G_0^{\mathbb{Q}})$-définissables non vides. Si X est connexe et *si k est hensélien* alors $\widehat{X}$ est (k, G)-connexe.
- Supposons que X est séparé, et qu'il existe une famille finie (X_i) d'ouverts affines de X telle que $U = \bigcup U_i$, où U_i est un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de X_i possédant les propriétés suivantes :
  - α) U_i est borné relativement à un plongement fixé de X_i dans un espace affine ;

β) U_i est « naïvement fermé », c'est-à-dire qu'il peut être défini par une combinaison booléenne positive d'inégalités de la forme $|f| \leqslant \lambda |g|$ où f et g sont des fonctions régulières sur X_i, et où $\lambda \in G_0$.

Sous ces hypothèses, $\widehat{U}$ est définissablement compact. Notons que si X est projective et possède un recouvrement (X_i) par des ouverts affines tels que $U \cap X_i$ soit naïvement fermé pour tout i, les hypothèses ci-dessus sont satisfaites et $\widehat{U}$ est définissablement compact. En particulier, $\widehat{X}$ est définissablement compact dès que X est projective.

La structure d'arbre de $\widehat{\mathbb{P}^1_k}$. Identifions $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$ au foncteur $\overline{B}$ des boules fermées (en envoyant une boule sur son type générique). Soit $F \in \mathsf{M}$ et soit λ un élément de F. On note $b(\lambda, .)_F$ la transformation naturelle $\Gamma_{0,F} \to \widehat{\mathbb{A}^1_F}$ qui, sur un modèle F' donné dans M_F, envoie un élément r de $|F'|$ sur $b(\lambda, r)_{F'}$. Elle est F-définissable, et induit un homéomorphisme entre $\Gamma_{0,F}$ et un sous-foncteur F-définissable de $\widehat{\mathbb{A}^1_F}$. Soit μ un (autre) élément de F ; posons $r = |\lambda - \mu|$. Soit I le F-segment généralisé obtenu en concaténant $[0; r]_F$ et $[r; 0]_F$. On définit alors un homéomorphisme F-définissable de I sur un sous-foncteur F-définissable de $\widehat{\mathbb{A}^1_F}$ en appliquant $b(\lambda, .)_F$ sur le premier segment, et $b(\mu, .)_F$ sur le second.

Ce « segment généralisé joignant λ à μ » est le seul. Plus généralement, on démontre que si x et y appartiennent à $\widehat{\mathbb{P}^1_k}(F)$, il existe un unique sous-foncteur F-définissable D de $\widehat{\mathbb{P}^1_F}$ possédant la propriété suivante : *il existe un F-segment généralisé I et un homéomorphisme F-définissable $I \simeq D$ envoyant l'origine de I sur x et l'extrémité de I sur y.* Donnons une description informelle du foncteur D : si x et y appartiennent à $\widehat{\mathbb{A}^1_k}(F)$, on fait croître le rayon de la boule x jusqu'à rencontrer la boule y, puis on le diminue jusqu'à obtenir exactement y. Si $x \in \widehat{\mathbb{A}^1_k}(F)$ et si $y = \infty$, on fait croître le rayon de la boule x jusqu'à l'infini (et on paramètre par l'inverse du rayon, le point correspondant à 0 étant alors y). On dira que D est le *segment généralisé joignant x à y*.

On dispose d'une notion naturelle d'*enveloppe convexe* C d'une famille finie de points de $\widehat{\mathbb{P}^1_k}(F)$: c'est la réunion des segments généralisés les joignant deux à deux. Il existe un homéomorphisme F-définissable d'un arbre fini sur C.

Terminons cette section en mentionnant que si U est comme ci-dessus et si D est un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de Γ_0^n, ou un segment généralisé et plus généralement un graphe fini, on munit $\widehat{U} \times D$ de la topologie définissable produit.

3.3. Liens avec les espaces de Berkovich

On suppose dans cette section que $G_0 \subset \mathbb{R}_+$ et que k est complet. Le corps k est donc un *corps ultramétrique complet.* On désigne toujours par X un k-schéma de type fini, et par U un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de X. Les inégalités qui décrivent U définissent sans ambiguïté une partie semi-algébrique U^{an} de X^{an}.

Soit $F \in \mathsf{M}$ un corps *ultramétrique* et soit $x \in \widehat{U}(F) \subset \widehat{X}(F)$. Le point x est un type sur X_F, c'est-à-dire un couple formé d'un point ξ du schéma X_F et d'une valuation sur $F(\xi)$, prolongeant celle de F. Comme x est stablement dominé, il est orthogonal à Γ_0, ce qui veut dire que $|F(\xi)| \subset |F| \subset \mathbb{R}_+$. Soit ξ_0 l'image de ξ sur le schéma X. La valuation sur $k(\xi_0)$ induite par celle de $F(\xi)$ est à valeurs réelles ; elle définit donc un point $\theta(x)$ de X^{an} supporté par ξ_0. L'appartenance de x à $\widehat{U}(K)$ implique immédiatement que $\theta(x) \in U^{\mathrm{an}}$.

Avant d'énoncer les propriétés fondamentales de l'application θ, rappelons qu'un corps ultramétrique F est dit *maximalement complet* si toute famille décroissante de boules fermées de F a une intersection non vide. Cela équivaut à demander que F n'admette pas d'extension immédiate non triviale (une extension valuée de F est dite immédiate si elle a même corps résiduel et même groupe des valeurs que F). Tout corps ultramétrique F admet une extension maximalement complète F' qui est algébriquement close, vérifie l'égalité $|F'| = \mathbb{R}_+$, et a pour corps résiduel une clôture algébrique de $\tilde{F}$; une telle extension est essentiellement unique. Notons qu'un corps maximalement complet est complet (considérer une famille décroissante de boules dont le rayon tend vers 0).

Proposition 3.4. — *Soit $F \in \mathsf{M}$ un corps ultramétrique.*

1) L'application $\theta : \widehat{U}(F) \to U^{\mathrm{an}}$ est continue ; si $F = k$, c'est un homéomorphisme sur son image.

2) Supposons que F soit maximalement complet et que $|F| = \mathbb{R}_+$. L'application θ est alors une surjection topologiquement propre, et un homéomorphisme si $F = k$.

Faisons quelques commentaires. L'assertion 1) résulte immédiatement de la définition des topologies sur $\widehat{U}(F)$ et sur U^{an}. Disons à titre d'illustration quelques mots de l'image de θ lorsque $F = k$ (ce qui implique que k est algébriquement clos, que sa valuation n'est pas triviale, et que $|k| = G_0$) et lorsque $U = X = \mathbb{A}^1_k$. L'application θ envoie par construction le point $\eta_{\lambda,r,k} \in \widehat{\mathbb{A}^1_k}(k)$ sur la semi-norme $\sum a_i(u-\lambda)^i \mapsto \max|a_i|r^i$. On voit donc que son image consiste exactement en l'ensemble des points *de type* 1 *ou* 2 de $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_k$. Ce fait s'étend à toute courbe algébrique X : l'image de $\theta : \widehat{X}(k) \to X^{\mathrm{an}}$ est l'ensemble de points de type 1 ou 2 de X^{an}. Du point de vue de la définissabilité, qui préside à l'ensemble de la construction de Hrushovski et Loeser, cela n'a rien de choquant : l'expérience montre que, tant qu'on s'intéresse à des problèmes de nature algébrique ne faisant pas intervenir d'autres nombres réels que ceux de $|k|$, les points de type 1 ou 2 sont précisément les seuls points en lesquels « il peut se passer quelque chose ». Les autres servent à garantir de bonnes propriétés topologiques (compacité, connexité par arcs), mais ne détectent rien d'intéressant. Se limiter aux points de type 1 ou 2 ne fait donc perdre pour l'essentiel aucune information — simplement, il faut compenser les désagréments topologiques inhérents à cette approche en remplaçant les propriétés classiques par leurs avatars modèles-théoriques : compacité définissable, existence de segments généralisés définissables joignant deux points, etc.

En ce qui concerne l'assertion 2), sa preuve repose essentiellement sur le fait suivant (qui garantit la surjectivité, la propreté découlant ensuite du théorème de Tychonoff convenablement utilisé). Soit F un corps maximalement complet, algébriquement clos et tel que $|F| = \mathbb{R}_+$, soit X un F-schéma de type fini et soit x un type sur X. Il correspond à un couple $(\xi, |.|)$ où ξ est un point de X et $|.|$ une valuation sur $F(\xi)$. Le type x est alors stablement dominé si et seulement si $|F(\xi)| = \mathbb{R}_+$. *Notons la différence absolument cruciale avec la proposition 2.4 : nous n'avons pas supposé* a priori *que x est F-définissable.*

Cette application θ peut être utilisée pour transférer certaines applications chapeautées en géométrie de Berkovich, comme le montre le théorème ci-dessous.

THÉORÈME 3.5. — *Soit U comme ci-dessus, et soit D un foncteur (k, G_0)-définissable vivant dans la sorte Γ_0 ; on suppose plus précisément que D est muni d'une topologie définissable, et qu'il admet un plongement topologique (k, G_0)-définissable dans Γ_0^n pour un certain n (c'est par exemple le cas si D est un segment généralisé). Soit V un sous-foncteur (k, G_0)-définissable d'une k-variété algébrique et soit $f : \widehat{U} \times D \to \widehat{V}$ une transformation naturelle (k, G_0)-définissable et* continue. *Soit F une extension ultramétrique complète de k. On suppose que F est algébriquement clos, maximalement complet, et que $|F| = \mathbb{R}_+$. Il existe alors une unique application continue*

$$f^{\mathrm{an}} : U^{\mathrm{an}} \times D(\mathbb{R}_+) \to V^{\mathrm{an}}$$

telle que

$$\begin{array}{ccc} \widehat{U}(F) \times D(\mathbb{R}_+) & \xrightarrow{f} & \widehat{V}(F) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (\theta,\mathrm{Id})} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \theta} \\ U^{\mathrm{an}} \times D(\mathbb{R}_+) & \xrightarrow{f^{\mathrm{an}}} & V^{\mathrm{an}} \end{array}$$

commute.

Remarque 3.6. — L'unicité et la continuité de f^{an} proviennent immédiatement du caractère surjectif et propre de θ. L'existence demande un peu plus de travail : le diagramme commutatif indique comment la construire, mais il y a des choix d'antécédents à faire et il faut vérifier que le résultat n'en dépend pas. La définissabilité *et* la continuité de f sont utilisées pour cette étape.

3.4. Énoncé du théorème principal

Commençons par quelques conventions. Soit D un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de Γ_0^n. On fixe un modèle $F \in \mathsf{M}$; le plus grand entier m tel qu'il existe un plongement définissable $\prod_{1 \leqslant i \leqslant m} [a_i; b_i]_F \hookrightarrow D_F$, où les a_i et les b_i appartiennent à $|F|$ et où $a_i < b_i$ pour tout i, ne dépend pas de F ; on l'appelle la *dimension* de D (on la prend égale à $-\infty$ si D est vide).

Si U est un foncteur (k, G_0)-définissable et $f : U \to D$ une transformation naturelle (k, G_0)-définissable, nous nous permettrons souvent de noter encore f la transformation naturelle $\widehat{U} \to \widehat{D} \simeq D$ induite par f.

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de Hrushovski et Loeser, qui porte sur la géométrie chapeautée ; les résultats annoncés de modération des espaces de Berkovich en découlent grâce au théorème 3.5 ci-dessus.

THÉORÈME 3.7. — *Soit (k, G_0) un corps valué, soit X une k-variété algébrique* quasi-projective *et soit U un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de X. Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de transformations naturelles (k, G_0)-définissables de U vers Γ_0, et soit G un groupe fini agissant sur X (par automorphismes de k-schéma) et stabilisant U. Il existe :*

- *un segment généralisé (k, G_0)-définissable I, d'origine o et d'extrémité e ;*
- *une transformation naturelle (k, G_0)-définissable et* continue *$h : I \times \widehat{U} \to \widehat{U}$;*
- *un sous-foncteur (k, G_0)-isodéfinissable S de $\widehat{U}$;*
- *un sous-foncteur (k, G_0)-définissable P de Γ_0^n (pour un certain n), de dimension majorée par celle de X ;*
- *une extension finie L de k contenue dans k^a et un homéomorphisme (L, G_0)-définissable $P \simeq S$ (nous résumerons l'existence de L, de P et de l'homéomorphisme évoqué en disant simplement que S est un* polytope*),*

tels que les propriétés suivantes soient satisfaites pour tout modèle $F \in \mathsf{M}$, tout $x \in \widehat{U}(F)$ et tout $t \in I(F)$.

1) *On a $h(e, x) \in S(F)$, et $h(t, x) = x$ dès que $x \in S(F)$. On a aussi les égalités $h(e, h(t, x)) = h(e, x)$ et $h(o, x) = x$. Nous dirons plus brièvement que h est* une homotopie d'image S.

2) *Si $f \in \mathscr{F}$ alors $f(h(t, x)) = f(x)$.*

3) *Pour tout $g \in \mathsf{G}$ on a $g(h(t, x)) = h(t, g(x))$.*

Remarque 3.8. — Ce n'est pas seulement par souci de généralité que Hrushovski et Loeser ont cherché à imposer à leur homotopie h de préserver les fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ (propriété 2) et d'être équivariante (propriété 3) : même pour construire h sans ces contraintes, leur stratégie requiert, au cours d'un raisonnement par récurrence, de savoir construire en dimension inférieure des homotopies auxiliaires qui satisfont ce type de conditions.

Remarque 3.9. — Il n'existe pas, en général, d'homéomorphisme (k, G_0)-définissable entre S et un sous-foncteur (k, G_0)-définissable de Γ_0^n. La raison est que le type d'homotopie de $\widehat{X}$ n'a aucune raison d'être invariant sous l'action de Galois. Par exemple, le groupe de Galois peut permuter les composantes connexes de $\widehat{X}$, si X est connexe mais pas géométriquement connexe. Il peut aussi agir de façon plus subtile sur la topologie de $\widehat{X}$. Considérons par exemple le cas où X est la courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_3$ d'équation affine $y^2 = x(x-1)(x-3)$. On peut alors construire une homotopie comme dans le théorème, dont l'image S est homéomorphe à un cercle (ou plus précisément à son avatar modèle-théorique dans DOAG). Cet homéomorphisme est $\mathbb{Q}_3(i)$-définissable, mais n'est pas $\mathbb{Q}_3$-définissable : la conjugaison agit en fixant deux points sur le cercle et en échangeant les deux demi-cercles correspondants.

En termes d'espaces de Berkovich, $X^{\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_3(i)}$ a le type d'homotopie d'un cercle (c'est une courbe de Tate déployée), mais X^{an} a celui du quotient d'un cercle par l'action précédemment décrite, c'est-dire d'un segment.

4. ESQUISSE DE LA PREUVE

4.1. Rétractions par déformation de $\widehat{\mathbb{P}^1_k}$

Soit U le sous-foncteur k-définissable de $\mathbb{P}^1_k$ défini par la condition $|u| \leqslant 1$, où u est la fonction coordonnée ; soit V le sous-foncteur k-définissable de U défini par la condition $|u| < 1$, et soit W le foncteur $\mathbb{P}^1_k \setminus U$; la fonction $1/u$ induit un isomorphisme k-définissable $\psi : W \simeq V$.

Soit $F \in \mathsf{M}$. Soit $\lambda \in F^\circ$ et soit $r \in |F|^\circ$. Pour tout t appartenant à $|F^\circ|$, on pose $h(t, \eta_{\lambda,r,F}) = \eta_{\lambda,\max(r,t),F}$. Notons que $h(0,x) = x$ et $h(1,x) = \eta_{0,1,F}$ pour tout $x \in \widehat{U}(F)$; notons aussi que $h(t,x)$ appartient à $\widehat{V}(F)$ dès que $x \in \widehat{V}(F)$ et que $t < 1$. Si x appartient à $W(F)$ on pose $h(t,x) = \widehat{\psi}^{-1}(h(t, \widehat{\psi}(x)))$ si $t < 1$, et $h(1,x) = \eta_{0,1,F}$. On vérifie aisément que l'on a ainsi construit une homotopie k-définissable $h : [0\,;1] \times \widehat{\mathbb{P}^1_k} \to \widehat{\mathbb{P}^1_k}$, dont l'image est le (foncteur) singleton $\{\eta_{0,1}\}$.

On fixe un diviseur D sur $\mathbb{P}^1_k$, sans multiplicités ; on le voit comme un sous-ensemble fini et Galois-invariant de $\mathbb{P}^1(k^a)$. Soit C_D l'enveloppe convexe de $D \cup \{\eta_{0,1}\}$. C'est un sous-foncteur k-définissable de $\widehat{\mathbb{P}^1_k}$ qui est un polytope. Notons que l'action de Galois sur C_D n'est pas forcément triviale (elle l'est si D est constitué de k-points). On définit comme suit une homotopie k-définissable $h_D : [0\,;1] \times \widehat{\mathbb{P}^1_k} \to \widehat{\mathbb{P}^1_k}$ d'image C_D. Soit $F \in \mathsf{M}$ et soit $x \in \widehat{\mathbb{P}^1_k}(F)$. On note $\tau(x)$ le plus petit élément t de $|F^\circ|$ tel que $h(t,x) \in C_D(F)$ (remarquons que $h(1,x) = \eta_{0,1,F} \in C_D(F)$). Soit $t \in |F^\circ|$. On pose

$$h_D(t,x) = h(t,x) \text{ si } t \leqslant \tau(x) \text{ et } h_D(t,x) = h(\tau(x),x) \text{ si } \tau(x) \leqslant t \leqslant 1.$$

Remarquons que $h_D(t,x) = x$ si $x \in D$ (car $D \subset C_D(F)$), et que $h_D(t, h_D(t',x))$ est égal à $h_D(t',x)$ si $t \leqslant t'$, et à $h_D(t,x)$ sinon.

4.2. Relèvement à une courbe

Soit X une k-courbe algébrique projective et soit $\varphi : X \to \mathbb{P}^1_k$ un morphisme fini. Le but de ce qui suit est d'exhiber un diviseur D sur $\mathbb{P}^1_k$ tel que l'homotopie h_D construite ci-dessus se relève de manière unique en une homotopie de $[0;1] \times \widehat{X}$ vers $\widehat{X}$ d'image un polytope de dimension $\leqslant 1$. Pour ce faire, il va être nécessaire de disposer d'un certain contrôle sur le cardinal des fibres de $\widehat{\varphi}$. La condition cruciale à ce propos s'exprime plus naturellement dans le cadre des courbes affines. On suppose donc (pour un moment) que X est une courbe *affine*, munie d'un morphisme fini $\varphi : X \to \mathbb{A}^1_k$.

Soit $F \in \mathsf{M}$, et soit $x \in \widehat{\mathbb{A}^1_k}(F)$. Écrivons $x = \eta_{\lambda,r,F}$ pour un certain $\lambda \in F$ et un certain r appartenant à $|F|$ (remarquons que r est unique, contrairement à λ : c'est le rayon de la boule dont x est le type générique). L'application n qui à un élément t de $|F|$ associe le cardinal de $\widehat{\varphi}_F^{-1}(\eta_{\lambda,t,F})$ est constante par morceaux, par définissabilité de $\widehat{X}$ et $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$. On dit que x est un point de *ramification extérieure* de $\widehat{\varphi}_F$ si $r > 0$ et si $\mathsf{n}(t) > \mathsf{n}(r)$ pour t suffisamment proche supérieurement de r (cela ne dépend pas du choix de λ).

LEMME 4.1. — *Le sous-foncteur k-définissable de $\widehat{\mathbb{A}^1_k}$ qui associe à $F \in \mathsf{M}$ l'ensemble des points de ramification extérieure de $\widehat{\varphi}_F$ est fini.*

Nous allons nous contenter de donner quelques indications de la preuve. L'idée, grossièrement exprimée, est de prouver que n a « génériquement » tendance à croître lorsque le rayon diminue ; des arguments de définissabilité spécifiques à la droite affine (et notamment la caractérisation des sous-foncteurs définissables de cette dernière comme des « fromages suisses ») permettent ensuite de conclure à la finitude du lieu des points de ramification extérieure de $\widehat{\varphi}$ — qui sont en quelque sorte les points en lesquels on observe un comportement non générique.

Expliquons un peu plus avant ce que nous entendons lorsque nous disons que n a génériquement tendance à croître lorsque le rayon diminue. Fixons $F \in \mathsf{M}$ et un point $\eta_{\lambda,r,F} \in \widehat{\mathbb{A}^1_k}(F)$ avec $r > 0$. Soit s un élément de $|F|$ strictement inférieur à r. Choisissons un modèle $F' \supseteq F$ et une réalisation $a \in F'$ du type $\eta_{\lambda,r,F}$. Choisissons alors un modèle $F'' \supseteq F$ et une réalisation $b \in F''$ du type $\eta_{a,s,F'}$. L'élément b est alors lui-même une réalisation de $\eta_{\lambda,r,F}$ (on a en effet $|b-\mu| = r$ pour tout élément μ de F tel que $|\lambda - \mu| \leqslant r$).

Le nombre N d'antécédents de $\eta_{\lambda,r,F}$ sur $\widehat{X}(F)$ est alors égal au cardinal de l'ensemble E des types sur $X_{F(b)}$ admettant une réalisation z sur F'' telle que $\varphi(z) = b$ (en effet, si deux tels antécédents sont discernables par une formule à paramètres dans $F(b)$, ils le sont par une formule à paramètres dans F : il suffit de remplacer partout b par $\varphi(x)$ où x est la variable codant un élément de X) ; pour la même raison, le nombre N' d'antécédents de $\eta_{a,s,F'}$ sur $\widehat{X}(F)$ est égal au cardinal de l'ensemble E' des types sur $X_{F'(b)}$ admettant une réalisation z sur F'' telle que $\varphi(z) = b$. On dispose d'une surjection naturelle de E' vers E (si deux antécédents de b par φ ne peuvent être discernés par une formule à paramètres dans $F'(b)$, ils ne peuvent *a fortiori* l'être par une formule à paramètres dans $F(b)$). Par conséquent, $N' \geqslant N$. Autrement dit, on a établi l'assertion (informelle) suivante, qui est celle que nous avions en vue : *le type générique d'une boule F-générique de rayon $s < r$ contenue dans $b(\lambda, r)$ a plus d'antécédents sur $\widehat{X}$ que le type générique de $b(\lambda, r)$.*

Revenons au problème initial, à savoir celui du relèvement des homotopies. Si $t \geqslant \tau$ on pose $h'_{\varphi,D}(t,x) = h'_{\varphi,D}(\tau,x)$. On désigne donc à nouveau par X une k-courbe algébrique projective munie d'un morphisme fini $\varphi : X \to \mathbb{P}^1_k$. Le choix d'une coordonnée u sur $\mathbb{P}^1_k$ fournit deux cartes affines. Soit D un diviseur sur $\mathbb{P}^1_k$ possédant les propriétés suivantes :

- la restriction de φ à $X \setminus \varphi^{-1}(D)$ admet une factorisation $X \setminus \varphi^{-1}(D) \to X' \to \mathbb{P}^1_k$ où $X \setminus \varphi^{-1}(D) \to X'$ est radiciel et où $X' \to \mathbb{P}^1_k$ est étale ;
- le polytope C_D contient les points de ramification extérieure de $\widehat{\varphi}$ au-dessus de chacune des deux cartes affines de $\mathbb{P}^1_k$.

Notons qu'un tel diviseur existe toujours en vertu du lemme 4.1. Nous allons alors expliquer brièvement comment montrer qu'il existe une unique homotopie $h'_{\varphi,D}$ de $[0;1] \times \widehat{X}$ vers $\widehat{X}$ relevant h_D. Fixons $F \in \mathsf{M}$. Soit $y \in \widehat{\mathbb{P}^1_k}(F) \setminus C_D(F)$ et soit x un antécédent de y sur $\widehat{X}(F)$. Soit $\tau(y)$ le plus grand $t \in |F^\circ|$ tel que $h_D(\tau(y), y) = y$; on a $\tau(y) < 1$ car $y \notin C_D$. Il existe dès lors un élément $t_0 \in |F^\circ|$ qui est strictement supérieur à $\tau(y)$, et un voisinage Ω de x dans $\widehat{X}(F)$ sur lequel tout point de la forme $h(t,y)$ avec $\tau(y) < t < t_0$ a *au moins* un antécédent sur Ω (on montre en effet que $\widehat{\varphi}_F$ est ouvert). On peut de plus choisir Ω et t de sorte que tout point de la forme $h(t,y)$ avec $\tau(y) < t < t_0$ ait *exactement* un antécédent sur Ω. En effet, si $\tau(y) > 0$ cela provient du fait que y n'est pas un point de ramification extérieure de $\widehat{\varphi}_F$ (car tous ces points appartiennent à $C_D(F)$), ce qui force le nombre d'antécédents de $h(t,y)$ à être (au plus) égal au nombre d'antécédents de y lorsque t est strictement supérieur à $\tau(y)$ et suffisamment proche de celui-ci. Et si $\tau(y) = 0$ le point y appartient à $\mathbb{P}^1_k(F) \setminus C_D(F)$; le point x appartient alors à $X(F)$. Par choix de D, la flèche $X \to \mathbb{P}^1_k$ se dévisse, au voisinage de x, en une flèche radicielle (qui induit un homéomorphisme entre les espaces chapeautés sous-jacents) suivie d'une flèche étale ; un avatar du théorème des fonctions implicites assure alors que φ induit un homéomorphisme entre un voisinage de x dans $\widehat{X}(F)$ et un voisinage de y dans $\widehat{\mathbb{P}^1_k}(F)$, d'où l'assertion.

On peut alors définir $h'_{\varphi,D}(x,t)$ pour tout $x \in X(F)$ et tout $t \in |F^\circ|$: si x appartient à $\varphi^{-1}(D)$, on pose $h'_{\varphi,D}(t,x) = x$ pour tout t. Sinon, soit τ le plus petit élément t de $|F^\circ|$ tel que $h(t,\varphi(x)) \in C_D(F)$. Nous avons établi ci-dessus une propriété « d'unique relèvement de $h(.,x)$ dans le sens des temps croissants ». Celle-ci, combinée à des arguments de compacité définissables autorisant les « passages à la limite à droite », assure l'existence d'un unique relèvement définissable et continu du chemin

$$t \mapsto h_D(t,\varphi(x)), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

en un chemin

$$t \mapsto h'_{\varphi,D}(t,x), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

tel que $h'_{\varphi,D}(0,x) = x$.

On obtient ainsi une transformation naturelle continue et k-définissable

$$h'_{\varphi,D} : [0\,;1] \times X \to \widehat{X}.$$

En fait, $h'_{\varphi,D}$ jouit d'une propriété de continuité *renforcée*, que nous ne détaillerons pas ici, et qui garantit son prolongement en une homotopie k-définissable

$$h'_{\varphi,D} : [0\,;1] \times \widehat{X} \to \widehat{X}.$$

Par construction, $h'_{\varphi,D}$ relève h_D ; son unicité découle de sa construction et de la densité de X dans $\widehat{X}$. Que $h'_{\varphi,D}$ soit un polytope de dimension $\leqslant 1$ résulte de la k-définissabilité de $\widehat{X}, \widehat{\mathbb{P}^1_k}$ et $\widehat{f}$, du fait que $\widehat{f}$ est à fibres finies, et du fait que C_D est un polytope de dimension $\leqslant 1$.

4.3. La récurrence : préliminaires généraux

On note n la dimension de X. Le théorème à démontrer est trivial si $n = 0$; on suppose que $n > 0$ et que le théorème est vrai en dimension $< n$.

Par des méthodes élémentaires, on construit une variété projective équidimensionnelle contenant X, de dimension n, et à laquelle l'action de G s'étend ; on peut donc supposer que X est projective et équidimensionnelle. On peut aussi, incluant dans la famille $\mathscr{F}$ les valuations des fonctions utilisées dans la description de U, se ramener au cas où $U = X$: en effet, le théorème appliqué dans le cas où $U = X$ fournira une homotopie $I \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ qui préservera $\widehat{U}$ (puisqu'elle préservera les fonctions[10] appartenant à $\mathscr{F}$), donc induira une homotopie $I \times \widehat{U} \to \widehat{U}$ ayant les propriétés voulues

[10] Les éléments de $\mathscr{F}$ sont *stricto sensu* des transformations naturelles ; nous nous permettrons de les qualifier de fonctions.

(notons que son image $S \cap \widehat{U}$ s'identifiera à un sous-foncteur (L, G_0)-définissable de P, puisque $\widehat{U}$ est relativement (k, G_0)-définissable dans $\widehat{X}$).

Soit $f \in \mathscr{F}$. Sa définition fait intervenir un certain nombre de paramètres appartenant à G_0. En autorisant ceux-ci à varier, on obtient une transformation naturelle k-définissable $X \to \underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma_0^m, \Gamma_0)$ pour un certain m, qu'il suffit de préserver le long des trajectoires de l'homotopie pour que f soit préservée. Or une telle transformation naturelle peut être identifiée (en considérant les paramètres intervenant dans la description d'un élément de $\underline{\mathrm{Hom}}(\Gamma_0^m, \Gamma_0)$) à une transformation naturelle k-définissable de X vers Γ_0^p pour un certain p ; en la composant avec les différentes projections, on obtient une famille finie de fonctions k-définissables de X vers Γ_0 dont la préservation entraîne celle de f. Par ce procédé, on élimine les paramètres appartenant à G_0 ; autrement dit, on peut supposer que $(k, G_0) = k$ (ou encore que $G_0 = |k|$). La notion de définissabilité sur k ne change pas si l'on remplace k par son hensélisé, puis par sa clôture parfaite. On peut donc le supposer parfait et hensélien.

Toute fonction $f \in \mathscr{F}$ est *in fine* décrite au moyen de la valuation de certains polynômes homogènes (une fois X plongé dans un espace projectif), ce qui permet de supposer que les éléments de $\mathscr{F}$ sont des fonctions *continues*. On peut par ailleurs saturer $\mathscr{F}$ de façon à le rendre globalement G-invariant puis, en remplaçant chaque G-orbite de $\mathscr{F}$ par la liste des fonctions qui la constituent *rangées dans l'ordre croissant*, que $\mathscr{F}$ est constitué de fonctions individuellement G-invariantes.

4.4. La récurrence : préparation géométrique

On peut supposer X réduite, donc génériquement lisse (le corps k est parfait). Par des méthodes standard de géométrie algébrique, *utilisant de façon fondamentale le fait que X est projective*, on montre l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X' \times_{\mathbb{P}_k^{n-1}} U \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & X' \arrow[r] \arrow[dd] & X \\
\mathbb{P}_k^1 \times_k U \arrow[d] & & \\
U \arrow[r] & \mathbb{P}_k^{n-1} &
\end{tikzcd}$$

et d'un diviseur D_0 sur X' tels que :

- la flèche $X' \to X$ est un éclatement au-dessus d'un sous-schéma fermé de dimension nulle de X ;
- le diviseur D_0 est fini sur $\mathbb{P}_k^{n-1}$;
- l'action de G se relève à X', et stabilise D_0 ;

• le schéma U est un ouvert non vide de $\mathbb{P}_k^{n-1}$, et l'image réciproque de $\mathbb{P}_k^{n-1} \setminus U$ sur X' est un diviseur Δ de X' ;

• la flèche $X' \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ est équivariante, et sa fibre générique est de dimension 1 ;

• la flèche φ est équivariante et finie ;

• le diviseur D_0 contient les diviseurs exceptionnels de l'éclatement $X' \to X$, ainsi que $f^{-1}(0) \cap Y$ pour toute composante irréductible Y de X' et toute f appartenant à l'image inverse de $\mathscr{F}$ sur X' qui ne s'annule pas identiquement sur Y ;

• il existe un morphisme étale et G-équivariant $\pi : (X' \setminus D_0) \to \mathbb{A}_k^n$ (en particulier, la variété $X' \setminus D_0$ est lisse).

Il suffit alors de montrer le théorème pour X', en rajoutant à la famille $\mathscr{F}$, ou plus précisément à son image réciproque sur X', un certain nombre de fonctions continues décrivant la réunion Z des diviseurs exceptionnels de l'éclatement $X' \to X$; on modifie $\mathscr{F}$ comme expliqué plus haut pour qu'elle soit constituée de fonctions individuellement G-invariantes. L'homotopie h' construite sur $\widehat{X'}$ stabilisera alors $\widehat{Z}$. Chacune des composantes connexes de $\widehat{Z}$ s'envoyant sur un point (simple) de $\widehat{X}$, on pourra descendre h' et conclure. On peut donc supposer que $X' = X$.

4.5. L'homotopie fibre à fibre

On choisit une fonction coordonnée u sur $\mathbb{P}_k^1 \times_k U$.

Soit F une extension de k et soit $x \in U(F)$; on notera les fibres en x des divers objets en jeu par un x en indice. Par construction, la flèche $\varphi_x : X_x \to \mathbb{P}_F^1$ est finie. On sait donc, d'après ce qui a été fait au 4.2, que pour tout diviseur D_x sur $\mathbb{P}_F^1$ contenant l'image de $D_{0,x}$ et suffisamment gros, l'homotopie h_{D_x} admet un unique relevé h'_{φ,D_x} à $\widehat{X_x}$. On peut même faire en sorte que ce relevé préserve les fonctions appartenant à f : en effet, chacune d'elle est continue à valeurs dans $\Gamma_{0,F}$, et on peut montrer qu'une telle fonction est localement constante en dehors d'un graphe fini contenu dans $\widehat{X_x}$; il suffit alors de prendre D_x assez gros pour que l'image réciproque de son enveloppe convexe contienne tous les « graphes de variation » des fonctions appartenant à f. L'unicité de h'_{φ,D_x} et le fait que chaque fonction f soit invariante par G garantissent l'équivariance de h'_{φ,D_x}.

Un raisonnement fondé sur la compacité permet de mettre les diviseurs D_x en famille. Plus précisément, il existe, quitte à restreindre U, un diviseur D sur $\mathbb{P}_k^1 \times_k U$, contenant l'image de $D_0 \cap (X \times_{\mathbb{P}_k^{n-1}} U)$ et qui possède les propriété suivantes : *le morphisme $D \to U$ est fini, et pour toute extension F de k et tout F-point x de U, le diviseur D_x est tel que h_{D_x} admette un unique relevé h'_{φ,D_x} à $\widehat{X_x}$, préservant les fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ et commutant à l'action de* G.

Notons $\widehat{X/\mathbb{P}_k^{n-1}}$ le sous-foncteur (relativement k-définissable) de $\widehat{X}$ qui envoie un modèle F sur l'ensemble des points de $\widehat{X}(F)$ situés au-dessus d'un point *simple* de $\widehat{\mathbb{P}_k^1}(F)$. Soit h_c la transformation naturelle k-définissable

$$[0\,;1] \times X \to \widehat{X/\mathbb{P}_k^{n-1}}$$

définie comme suit. Soit $F \in \mathsf{M}$, soit $y \in X(F)$, soit x son image sur $\mathbb{P}_k^{n-1}(F)$ et soit $t \in |F^\circ|$. Si $y \in \Delta(F)$, on pose $h_c(t,y) = y$; sinon, on pose

$$h_c(t,y) = h'_{\varphi,D_x}(t,y) \in \widehat{X_x}(F) \subset \widehat{X/\mathbb{P}_k^{n-1}}(F).$$

La transformation naturelle k-définissable h_c a été définie de façon beaucoup trop brutale pour être continue. Elle l'est toutefois lorsqu'on la restreint à $[0\,;1] \times ((X\setminus\Delta) \cup D_0)$. Elle jouit même sur ce domaine d'une propriété de continuité renforcée (que nous avons déjà eu l'occasion d'évoquer à la fin du 4.2) qui assure qu'elle s'étend en une homotopie

$$h_c : [0\,;1] \times \widehat{(X \setminus \Delta) \cup D_0} \to \widehat{(X \setminus \Delta) \cup D_0}$$

qui préserve ce qui doit l'être. L'image Υ de h_c est un *polytope relatif* sur $\widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}}$ de dimension relative $\leqslant 1$.

Remarque 4.2. — Au-dessus de $\widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}} - \widehat{U}$ on dispose par construction d'un isomorphisme entre Υ et $\widehat{D}_0$; le polytope relatif Υ est donc à fibres finies au-dessus de $\widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}} - \widehat{U}$. Ailleurs, ses fibres sont en général de dimension 1.

4.6. L'homotopie de la base

Le but est maintenant de construire une homotopie $J \times \Upsilon \to \Upsilon$ dont l'image soit un polytope S de dimension $\leqslant n$, qui préserve les fonctions $f \in \mathscr{F}$ et soit G-équivariante. L'idée consiste à exhiber une homotopie de $\widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}}$ qui se relève de manière convenable à Υ. Or ce problème relativement polytopal est en fait contrôlé algébriquement par un morphisme fini, comme le montre la proposition suivante (qui vaudrait pour tout polytope relatif, la forme précise de Υ importe peu).

PROPOSITION 4.3. — *Il existe un revêtement fini quasi-galoisien $T \to \mathbb{P}_k^{n-1}$, et une famille finie $\mathscr{G}$ de fonctions k-définissables de T vers Γ_0 telle que pour toute homotopie*

$$h : I \times \widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}} \to \widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}},$$

les assertions suivantes soient équivalentes :

a) *l'homotopie h admet un relèvement à Υ, préservant les fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ et G-équivariant ;*

b) *l'homotopie h admet un relèvement à $\widehat{T}$ préservant les fonctions appartenant à $\mathscr{G}$.*

En vertu de l'hypothèse de récurrence, il existe une homotopie h' sur $\widehat{T}$ préservant les fonctions appartenant à $\mathscr{G}$, commutant à l'action de $\mathsf{H} := \mathrm{Gal}(T/\mathbb{P}_k^{n-1})$, et dont l'image est un polytope de dimension $\leqslant n-1$. On note J le segment généralisé où vit son paramètre temporel.

Comme $(T/\mathsf{H}) \to \mathbb{P}_k^{n-1}$ est radiciel, il induit un homéomorphisme entre les espaces chapeautés sous-jacents. L'homotopie h' descend dès lors en une homotopie

$$h : J \times \widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}} \to \widehat{\mathbb{P}_k^{n-1}}$$

dont l'image est un polytope de dimension $\leqslant n-1$. Par construction, h satisfait l'assertion b) de la proposition ci-dessus, et partant l'assertion a). On obtient ainsi une homotopie $h_b : J \times \Upsilon \to \Upsilon$. Comme h_b relève h, l'image de h_b est relativement polytopale à fibres de dimension $\leqslant 1$ sur un polytope de dimension $\leqslant n-1$, et est de ce fait un polytope de dimension $\leqslant n$.

4.7. L'homotopie d'inflation

La concaténation $h_b \diamond h_c$ de h_b et h_c (on commence par h_c, puis on applique h_b) définit une homotopie

$$([0\,;1] \diamond J) \times \widehat{(X \setminus \Delta) \cup D_0} \to \widehat{(X \setminus \Delta) \cup D_0}$$

(on note aussi $\diamond$ la concaténation des segments généralisés), dont l'image S est un polytope.

Pour obtenir une homotopie définie sur $\widehat{X}$ tout entier, on a recours à une homotopie dite d'*inflation* $h_{\mathrm{inf}} : J' \times \widehat{X} \to \widehat{X}$ qui possède la propriété suivante : pour tout $F \in \mathsf{M}$, pour tout $t \in J'(F)$ et tout $x \in \widehat{X}(F)$, on a $h_{\mathrm{inf}}(t,x) = x$ si $x \in \widehat{D_0}(F)$ et $h_{\mathrm{inf}}(t,x) \notin \widehat{\Delta}(F)$ si $x \notin \widehat{D_0}(F)$ et si t n'est pas l'origine de J'. On exige en outre que h_{inf} préserve les fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ et soit G-équivariante.

Disons quelques mots sur la façon dont cette homotopie h_{inf} est construite. Par choix du diviseur D_0, il existe un morphisme étale et G-équivariant $\pi : X \setminus D_0 \to \mathbb{A}_k^n$. Comme π est étale, il induit pour tout $F \in \mathsf{M}$ et tout $x \in X(F) \setminus D_0(F)$ un homéomorphisme d'un voisinage de x dans $\widehat{X}(F) \setminus \widehat{D}_0(F)$ sur un ouvert de $\widehat{\mathbb{A}_k^n}(F)$. On procède maintenant comme suit.

• On construit une homotopie $h_0 : J' \times \mathbb{A}_k^n \to \widehat{\mathbb{A}_k^n}$ consistant peu ou prou, comme en dimension 1, à « faire croître le rayon des boules ». À l'exception de son origine, tous les points d'une trajectoire de h_0 sont Zariski-génériques : si $F \in \mathsf{M}$, si $x \in \mathbb{A}^n(F)$ et si Z est un fermé de Zariski strict de $\mathbb{A}_F^n$ alors $h_0(t,x) \notin \widehat{Z}(F)$ si t n'est pas l'origine de J'.

• La propriété topologique du morphisme π que nous avons mentionnée ci-dessus permet de construire « un relevé partiel de h_0 à $X \setminus D_0$ avec temps d'arrêt », c'est-à-dire une homotopie $h_1 : J' \times (X \setminus D_0) \to \widehat{(X \setminus D_0)}$ possédant la propriété suivante : pour tout $F \in \mathsf{M}$ et tout $x \in X(F) \setminus D_0(F)$, il existe un « temps d'arrêt » $\tau(x)$ différent de l'origine de J' tel que $\pi(h_1(t,x)) = h_0(t, \pi(x))$ pour $t \leqslant \tau(x)$ et $h_1(t,x) = h_1(\tau(x), x)$ pour $t \geqslant \tau(x)$. À l'exception de son origine, tous les points d'une trajectoire de h_1 sont Zariski-génériques (en particulier, ils ne sont pas situés sur $\widehat{\Delta}$).

De plus on peut, en diminuant éventuellement les temps d'arrêt, faire en sorte :

– que h_1 soit G-équivariante (car π est G-équivariant) ;

– qu'elle préserve les fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ (car celles-ci, étant par construction continues et à lieu des zéros ouvert en dehors de D_0, sont constantes au voisinage de tout point *simple* non situé sur D_0) ;

– qu'elle se prolonge par continuité en une homotopie $h_{\text{inf}} : J' \times X \to \widehat{X}$, qui fixe $\widehat{D}_0$ point par point en tout temps (il suffit de faire tendre le temps d'arrêt vers l'origine de J' lorsqu'on se rapproche de $\widehat{D}_0$).

L'homotopie h_{inf} ainsi obtenue jouit de la propriété de continuité renforcée que nous avons plusieurs fois évoquée, qui permet de l'étendre en une homotopie, encore notée h_{inf}, qui va de $J' \times \widehat{X}$ vers $\widehat{X}$ et possède les propriétés requises.

4.8. L'homotopie polytopale

On considère la concaténation $h_b \diamond h_c \diamond h_{\text{inf}}$. C'est une transformation naturelle k-définissable de $I \times \widehat{X}$ vers $\widehat{X}$, où I est un segment généralisé, qui a presque toutes les propriétés requises, à une exception près : son image Σ est bien un polytope (c'est par construction une partie k-définissable du polytope image de $h_b \diamond h_c$), mais Σ *n'est plus nécessairement fixée point par point au cours du temps* : l'homotopie h_{inf} a semé la pagaille. Pour remédier à ce problème, Hrushovski et Loeser introduisent une quatrième homotopie $h_{\text{pol}} : I_{\text{pol}} \times \Sigma \to \Sigma$ dont l'image est un polytope qui reste invariant point par point au cours du temps sous $h_b \diamond h_c \diamond h_{\text{inf}}$. La définition de h_{pol} est purement polytopale ; comme elle est très technique, nous ne la détaillerons pas ici. Par construction, la concaténation

$$h_{\text{pol}} \diamond h_b \diamond h_c \diamond h_{\text{inf}}$$

répond aux conditions du théorème.

RÉFÉRENCES

[1] A. Abbes & T. Saito – Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Amer. J. Math.* **124** (2002), n° 5, p. 879–920.

[2] V. G. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, Amer. Math. Soc., 1990.

[3] ———, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Publ. Math. I.H.É.S.* (1993), n° 78, p. 5–161 (1994).

[4] ———, Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible, *Invent. Math.* **137** (1999), n° 1, p. 1–84.

[5] ———, An analog of Tate's conjecture over local and finitely generated fields, *Int. Math. Res. Not.* **2000** (2000), n° 13, p. 665–680.

[6] ———, A non-Archimedean interpretation of the weight zero subspaces of limit mixed Hodge structures, in *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, Progr. Math., vol. 269, Birkhäuser, 2009, p. 49–67.

[7] J. Bochnak, M. Coste & M.-F. Roy – *Géométrie algébrique réelle*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 12, Springer, 1987.

[8] S. Bosch – Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume, *Math. Ann.* **229** (1977), n° 1, p. 25–45.

[9] S. Bosch, W. Lütkebohmert & M. Raynaud – Formal and rigid geometry. IV. The reduced fibre theorem, *Invent. Math.* **119** (1995), n° 2, p. 361–398.

[10] A. Ducros – Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique, *Manuscripta Math.* **111** (2003), n° 4, p. 513–528.

[11] ———, Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich, Séminaire Bourbaki, vol. 2005/2006, exposé n° 958, *Astérisque* **311** (2007), p. 137–176.

[12] H. P. Epp – Eliminating wild ramification, *Invent. Math.* **19** (1973), p. 235–249.

[13] H. Grauert & R. Remmert – Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis, *Invent. Math.* **2** (1966), p. 87–133.

[14] D. Haskell, E. Hrushovski & D. MacPherson – *Stable domination and independence in algebraically closed valued fields*, Lecture Notes in Logic, vol. 30, CUP, 2008.

[15] D. Haskell, E. Hrushovski & D. Macpherson – Definable sets in algebraically closed valued fields : elimination of imaginaries, *J. reine angew. Math.* **597** (2006), p. 175–236.

[16] E. Hrushovski – Constructible sets over valued fields, `http://www.singacom.uva.es/oldsite/seminarios/ConfWorkVT/archivos/Hrushovski.pdf`.

[17] E. Hrushovski & F. Loeser – Nonarchimedean tame topology and stably dominated types, prépublication arXiv:1009.0252.

[18] D. Marker – *Model theory*, Graduate Texts in Math., vol. 217, Springer, 2002.

[19] J. Nicaise – Singular cohomology of the analytic Milnor fiber, and mixed Hodge structure on the nearby cohomology, *J. Algebraic Geom.* **20** (2011), n° 2, p. 199–237.

[20] J. POINEAU – Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p-adiques : privilège et noethérianité, *Compos. Math.* **144** (2008), n° 1, p. 107–133.

[21] K. TENT & M. ZIEGLER – *A course in model theory*, Lecture Notes in Logic, vol. 40, CUP, 2012.

Antoine DUCROS

Institut de mathématiques de Jussieu
Université Pierre et Marie Curie
Case 247
4, place Jussieu
F-75252 Paris Cedex 05
E-mail : `ducros@math.jussieu.fr`