Astérisque

CLÉMENT MOUHOT

Stabilité orbitale pour le système de Vlasov-Poisson gravitationnel [d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.]

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki, exp. n^{o} 1044, p. 35-82

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__35_0>

© Société mathématique de France, 2013, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64ᵉ année, 2011-2012, nº 1044, p. 35 à 82

STABILITÉ ORBITALE POUR LE SYSTÈME DE VLASOV-POISSON GRAVITATIONNEL [d'après Lemou-Méhats-Raphaël, Guo, Lin, Rein et al.]

par **Clément MOUHOT**

INTRODUCTION

Cet exposé est consacré aux avancées mathématiques récentes sur un problème célèbre de l'astrophysique, la stabilité de modèles galactiques. La question se formule très simplement : si l'on considère un ensemble d'un très grand nombre d'étoiles en interaction gravitationnelle[(1)] dont la cohérence est assurée par leur attraction réciproque et que l'on considère en première approximation comme un système fermé, quelles sont les répartitions statistiques stables au cours du temps ? Autrement dit, quelles sont les configurations de galaxies observables dans notre univers ? On néglige ici les effets relativistes et on se place dans le cadre de la mécanique classique.

Ce problème semble à première vue tout autant insoluble que le problème à N corps de Newton. Comment formuler des prédictions à long terme sur un système de 10^{11} corps[(2)] alors même que l'on ne sait pas résoudre de manière satisfaisante le problème à 3 corps ! C'est ici que la mécanique statistique entre en jeu. En suivant les idées de Maxwell et de Boltzmann, on peut tenter de décrire de manière statistique l'évolution de nos N corps lorsque N tend vers l'infini et que les corps sont suffisamment « peu corrélés », à travers une équation aux dérivées partielles non-linéaire sur la répartition d'un corps typique.

Cette approche a d'abord été appliquée aux cas de gaz collisionnels pour donner la célèbre équation de Boltzmann. Cependant, les collisions entre étoiles dans une galaxie sont quasi-absentes et l'interaction se fait essentiellement à distance *via* le champ gravitationnel. Dans les années 1910 et 1930, Jeans puis Vlasov découvrent comment effectuer la limite $N \to +\infty$ dans ce cas « non-collisionnel » afin d'obtenir

(1) Le rôle joué par les planètes dans la dynamique est négligé au premier ordre car leurs masses sont bien plus petites que celles des étoiles.
(2) C'est l'ordre de grandeur du nombre d'étoiles dans notre galaxie.

des équations aux dérivées partielles non-linéaires dites de « champ moyen ». La plus célèbre d'entre elles est l'équation de Vlasov-Poisson, dont nous allons étudier ici la version gravitationnelle (8)-(9). Cette équation de transport non-linéaire décrit avec une excellente précision l'évolution de systèmes stellaires sur de grandes échelles de temps.

Ainsi, lorsque le nombre de corps est grand et que les corrélations sont faibles, on peut espérer formuler des prédictions de stabilité à partir de l'étude de l'équation de Vlasov-Poisson. C'est le physicien russe Antonov [**4, 3**] qui, le premier, découvre comment résoudre le problème de la stabilité, mais uniquement dans un cadre linéarisé. Il démontre ainsi la *stabilité linéarisée des modèles galactiques sphériques et monotones en l'énergie microscopique pour des petites perturbations.* Cependant, l'équation de Vlasov-Poisson est réversible en temps, non dissipative, et ses solutions montrent des oscillations en temps grand ; rien ne garantit *a priori* que l'étude de stabilité linéarisée d'Antonov implique la stabilité non-linéaire recherchée. C'est ce problème mathématique que nous appellerons **conjecture de stabilité non-linéaire** à la Antonov. Durant les cinquante dernières années, l'analyse mathématique des *équations cinétiques* de Boltzmann et Vlasov a connu un fort développement. Cette conjecture de stabilité non-linéaire a été récemment démontrée par Lemou, Méhats et Raphaël [**54, 56, 57**], suivant des travaux précurseurs de Dolbeault, Guo, Hadžić, Lin, Rein, Sánchez, Soler, Wan, Wolansky ainsi que Lemou, Méhats et Raphaël [**81, 87, 82, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 21, 77, 35, 34, 31, 49, 53, 51**].

Dans cet exposé, nous proposerons tout d'abord dans la section 1 une introduction mathématique au problème, en expliquant l'origine du système de Vlasov-Poisson gravitationnelle à partir du problème à N corps. Nous rappellerons ensuite dans la section 2 les principales propriétés mathématiques de ce système d'équations. Puis nous aborderons dans la section 3 la résolution du problème linéarisé. Enfin nous traiterons dans la section 4 de la question de la stabilité non-linéaire. Nous retracerons l'histoire des différentes méthodes mathématiques développées pour attaquer ce problème, puis nous détaillerons le théorème central du travail [**57**] de Lemou, Méhats et Raphaël, en donnant un schéma détaillé de preuve. Nous conclurons finalement avec des commentaires et questions ouvertes.

L'auteur remercie Y. Guo, P.-E. Jabin, M. Lemou, F. Méhats, Z. Lin, P. Raphaël et J. Soler pour les échanges par courriel ou discussions durant la préparation de cet exposé, ainsi que S. Martin pour ses relectures et commentaires sur ce texte.

1. PROBLÈME À N CORPS ET SYSTÈME DE VLASOV-POISSON

1.1. Le problème à N corps de Newton

On écrit le problème à N corps, pour des interactions binaires et sans champ extérieur, et en normalisant toutes les masses à 1 :

$$(1) \qquad 1 \leq i \leq N, \quad \begin{cases} x_i'(t) = v_i(t) = \dfrac{\partial H}{\partial v_i}(X(t), V(t)), \\ v_i'(t) = -\displaystyle\sum_{i \neq j} \nabla_x \psi(x_i - x_j) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}(X(t), V(t)) \end{cases}$$

où ψ est le potentiel de l'interaction. Ces équations sont écrites sous forme hamiltonienne pour le hamiltonien

$$(2) \qquad H(X,V) = \sum_{i=1}^{N} \frac{|v_i|^2}{2} + \sum_{i<j} \psi(x_i - x_j)$$

où $X = (x_1, \dots, x_N)$, $V = (v_1, \dots, v_d)$ et chaque $x_i, v_i \in \mathbb{R}^3$.

Même si ce système d'équations différentielles ordinaires non-linéaires couplées peut être aussi bien utilisé pour décrire l'évolution d'objets infiniment petits, comme des molécules, ou infiniment grands, comme des étoiles, nous parlerons ici de *point de vue microscopique et trajectoriel* et nous appellerons ψ le *potentiel d'interaction microscopique* et H le *hamiltonien microscopique.*

1.2. La limite de Vlasov ou limite « de champ moyen »

Si l'on considère l'évolution de la distribution $f^{(N)} = f^{(N)}(t, X, V)$ de nos N corps dans l'espace des phases, des positions et vitesses, on obtient l'*équation de Liouville à N corps*, qui est le point de vue statistique sur ce système :

$$(3) \qquad \partial_t f^{(N)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f^{(N)}}{\partial v_i} \right) = \partial_t f^{(N)} + \left\{ f^{(N)}, H \right\} = 0$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ désigne le crochet de Poisson sur $(\mathbb{R}^3)^N \times (\mathbb{R}^3)^N$:

$$\{f^{(N)}, g^{(N)}\} = \nabla_X f^{(N)} \cdot \nabla_V g^{(N)} - \nabla_X g^{(N)} \cdot \nabla_V f^{(N)}.$$

Les solutions sont données par $f^{(N)}(t, X, V) = f^{(N)}(S_{-t}(X, V))$ où S_t désigne le flot solution des équations de Newton.

Cette résolution par la *méthode des caractéristiques* implique la conservation du signe de $f^{(N)}$:

$$f^{(N)}(0, X, V) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f^{(N)}(t, X, V) \geq 0$$

mais aussi, du fait que le jacobien de S_t vaut 1 pour tout t [3], de la masse

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} f^{(N)}(t,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V = \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} f^{(N)}(0,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V$$

et plus généralement de toute « fonctionnelle de Casimir »

$$\int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \mathscr{C}\left(f^{(N)}(t,X,V)\right)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V = \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \mathscr{C}\left(f^{(N)}(0,X,V)\right)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V$$

pour $\mathscr{C} \in C^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$, $\mathscr{C}(0) = 0$. Une fonctionnelle de Casimir désigne pour un système hamiltonien une fonctionnelle qui annule le crochet de Poisson avec toute autre fonctionnelle le long des trajectoires (voir par exemple [**5, 6**]).

Afin de comprendre l'évolution à travers un système réduit, on introduit la distribution d'une particule $f = f^{(1)}$:

$$f(t,x,v) := \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{N-1}} f^{(N)}(t,X,V)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\,\ldots\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}v_2\,\mathrm{d}v_3\,\ldots\,\mathrm{d}v_N$$

qui est donnée par la marginale de la distribution complète à N corps $f^{(N)}$. On calcule alors l'équation vérifiée par cette distribution à une particule

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\cdot\nabla_x f - (N-1)\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \nabla_x\psi(x-y)\cdot\nabla_v f^{(2)}(x,y,v,v_*)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}v_* = 0. \tag{4}$$

Cette équation dépend bien sûr de la seconde marginale (distribution à deux particules)

$$f^{(2)}(t,x_1,x_2,v_1,v_2) := \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^{N-2}} f^{(N)}\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_4\,\ldots\,\mathrm{d}x_N\,\mathrm{d}v_3\,\mathrm{d}v_4\,\ldots\,\mathrm{d}v_N$$

qui contient de l'information sur les corrélations du système. De la même façon, on pourrait définir les k-marginales $f^{(k)}$ pour $1 \le k \le N$, et l'ensemble des équations couplées sur toutes ces marginales constitue la *hiérarchie BBGKY* (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon).

La limite de champ moyen consiste :

– d'une part à considérer que chaque interaction binaire est d'ordre $O(1/N)$, soit

$$\psi = \psi_N = \frac{\bar{\psi}}{N},$$

ce qui signifie que l'influence d'une étoile sur une autre étoile est négligeable à l'échelle de l'ensemble de la galaxie, mais que l'action de l'ensemble de la galaxie sur une étoile donnée est d'ordre $O((N-1)/N) = O(1)$;

(3) Ce qui est une version du célèbre théorème de Liouville dans ce contexte.

– d'autre part à considérer que

$$f^{(2)} \sim f \times f \quad \text{lorsque} \quad N \to \infty, \tag{5}$$

hypothèse que l'on appelle *propriété de chaos* dans ce contexte, et qui traduit des *corrélations faibles* dans le système.

Si l'hypothèse (5) reste vraie au cours du temps lorsqu'elle est vérifiée au temps initial, on parle de « *propagation du chaos* ». Démontrer cette propriété est un problème mathématique ouvert dans le cas de l'interaction gravitationnelle (mais également pour l'interaction de Coulomb répulsive entre particules de même charge) ; nous renvoyons à **[20, 13, 36, 37]** pour des résultats partiels sur ce sujet.

Sous réserve de l'hypothèse d'échelle sur ψ_N et de la propagation du chaos, on obtient l'équation *fermée* suivante sur la distribution f dans la limite $N \to +\infty$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \nabla_x \bar{\psi}(x-y) \cdot \nabla_v f(x,v)\, f(y,w)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}w = 0, \tag{6}$$

que l'on peut réécrire en

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f - \left(\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \bar{\psi}(x-y) \left(\int_{\mathbb{R}^3} f(y, v_*)\, \mathrm{d}v_* \right) \mathrm{d}y \right) \cdot \nabla_v f(x,v) = 0. \tag{7}$$

1.3. Le système de Vlasov-Poisson gravitationnel

Lorsque le potentiel microscopique correspond aux interactions gravitationnelles $\bar{\psi}(x) = -1/(4\pi|x|)$, on obtient ainsi le *système de Vlasov-Poisson gravitationnel* :

$$\begin{cases} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi_f \cdot \nabla_v f = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3, \\ f(t=0,x,v) = f_{\mathrm{in}}(x,v) \end{cases} \tag{8}$$

où l'on définit le *champ moyen gravitationnel* ϕ_f (dépendant de la fonction f) par

$$\rho_f(t,x) := \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,v)\, \mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \phi_f(t,x) := -\frac{1}{4\pi|x|} * \rho_f. \tag{9}$$

Observons que le champ ϕ_f se résout par l'*équation elliptique de Poisson*

$$\Delta_x \phi_f = \rho_f \tag{10}$$

ce qui confère son nom au système de Vlasov-Poisson.

On voit ici le caractère fondamental du système de Vlasov-Poisson. Dans le cas d'interactions à distance (par opposition aux mécanismes de collision), il est à la mécanique classique statistique ce que les équations de Newton sont à la mécanique classique.

1.4. Le problème de stabilité d'un point de vue statistique

On peut maintenant reformuler la question de la stabilité des galaxies dans le cadre du système de Vlasov-Poisson. Cela rejoint l'une des premières questions que l'on se pose face à une équation aux dérivées partielles : quelles sont les solutions stationnaires de ce système et, parmi ces dernières, lesquelles sont stables ou instables ?

De nouveaux aspects mathématiques différents de l'analyse des équations de Newton, et sur lesquels nous reviendrons plus loin, surgissent alors : quelles notions de solution utiliser pour l'équation ? Quels espaces fonctionnels utiliser ? Quelle régularité pour ces solutions ?

Puisque nous sommes partis des équations de Newton, il est légitime de se demander quel serait l'impact en retour d'un théorème de stabilité sur le problème à N corps. C'est une question difficile et mal comprise à l'heure actuelle. Nous pouvons néanmoins avancer deux principes : d'une part, cela dépend fortement des réponses données aux problèmes ouverts de limite de champ moyen et propagation du chaos et, d'autre part, cela dépend vraisemblablement également de l'espace fonctionnel dans lequel les résultats de stabilité sont obtenus. Dans cet exposé, nous nous intéresserons à des voisinages de stabilité pour des espaces des Lebesgue ; ces derniers sont peut-être trop peu réguliers pour espérer en déduire des informations sur le problème à N corps.

2. PROPRIÉTÉS DU SYSTÈME DE VLASOV-POISSON

Nous allons tout d'abord rappeler les propriétés mathématiques élémentaires des équations (8)-(9).

2.1. Énergie microscopique et hamiltonien

Les équations de Newton préservent le hamiltonien microscopique H défini par (2) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad H(S_t(X,V)) = H(X,V).$$

En intégrant ceci contre la distribution initiale de nos N particules $f^{(N)}$ (équation de Liouville) et en divisant par N (pour éviter la divergence de l'énergie lorsque N tend vers l'infini), on obtient la conservation statistique du hamiltonien microscopique

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \frac{H(X,V)}{N}\, f^{(N)}(t,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V = \int_{(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)^N} \frac{H(X,V)}{N}\, f^{(N)}(0,X,V)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}V.$$

Dans la limite de champ moyen, cette égalité implique la conservation au cours du temps de la quantité

$$\mathscr{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{2}\, f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{\phi_f(t,x)}{2}\, f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

que l'on appellera *hamiltonien (macroscopique) du système de Vlasov-Poisson.* Remarquons le facteur $1/2$ devant ϕ_f qui rappelle que notre équation sur la distribution à une particule f est la « trace » d'un système à N particules avec interaction binaire. Cette fonctionnelle se réécrit en utilisant l'équation de Poisson (10) sur ϕ_f :

$$(11) \qquad \mathscr{H}(f) = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|v|^2}{2} f(t,x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|\nabla_x \phi_f(t,x)|^2}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

On voit ici la possibilité de transferts d'énergie entre énergie cinétique et gravitationnelle. De plus, le caractère *attractif* de l'interaction se traduit par le fait que ces transferts peuvent « diverger » : la fonctionnelle $\mathscr{H}$ conservée est la somme de deux termes de signe opposé qui peuvent potentiellement diverger tout en s'équilibrant, ce qui est une source de difficultés mathématiques.

Notons enfin que l'équation de Vlasov de champ moyen (8) peut être interprétée comme l'équation de Liouville sur une particule associée à l'*hamiltonien microscopique de champ moyen*

$$E = E_f(t,x,v) = \frac{|v|^2}{2} + \phi_f(t,x)$$

sous la forme

$$\partial_t f + \{f, E_f\} = 0$$

où $\{\cdot,\cdot\}$ désigne ici le crochet de Poisson sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\{f,g\} = \nabla_x f \cdot \nabla_v g - \nabla_x g \cdot \nabla_v f.$$

Remarquons qu'il n'y a *plus* le facteur $1/2$ devant l'énergie potentielle dans la définition de E_f : la cause en est que l'on considère ici une particule évoluant dans un champ moyen donné en « oubliant » la non-linéarité.

2.2. Fonctionnelles de Casimir et équimesurabilité

L'équation de champ moyen (8) est associée aux solutions (dites *caractéristiques*) du système différentiel

$$\begin{cases} x'(t) = v(t) = \dfrac{\partial E_f}{\partial v}, \\[2ex] v'(t) = -\nabla_x \phi_f(x(t)) = -\dfrac{\partial E_f}{\partial x}. \end{cases}$$

Ces courbes dépendent bien sûr de la solution elle-même, mais cela montre que l'équation d'évolution (8) est une *dynamique de réarrangement* de la distribution f, qui préserve le signe, mais aussi toutes les fonctionnelles de Casimir

$$\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \mathscr{C}\left(f(t,x,v)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \mathscr{C}\left(f(0,x,v)\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

pour $\mathscr{C} \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\mathscr{C}(0) = 0$. Cet ensemble de lois de conservation peut être synthétiquement exprimé par la propriété suivante : *la solution reste pour tout temps équimesurable à sa donnée initiale*

$$\forall t \geq 0,\ \forall s \geq 0, \quad |\{|f(t,x,v)| \geq s\}| = |\{|f_{\text{in}}(x,v)| \geq s\}| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

où $|\mathscr{O}|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Nous sommes donc en présence d'un système dynamique en dimension infinie *possédant une infinité non dénombrable de contraintes* : le hamiltonien macroscopique $\mathscr{H}(f)$ et l'équimesurabilité.

2.3. Lien entre invariants et hamiltonien : une inégalité d'interpolation clef

Comme nous l'avons vu, l'énergie totale du système $\mathscr{H}(f)$ est la différence de deux termes positifs que nous noterons

$$\mathscr{H}(f) = \mathscr{H}_{\text{cin}}(f) - \mathscr{H}_{\text{pot}}(f).$$

Une difficulté évidente sera alors de contrôler ces deux formes d'énergie séparément. À cette fin, il est possible *d'interpoler* l'énergie potentielle à partir de l'énergie cinétique et d'un espace de Lebesgue L^p, dont la conservation est assurée par l'invariance des fonctionnelles de Casimir. On peut ainsi montrer les inégalités fonctionnelles suivantes.

PROPOSITION 2.1. — *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on a l'estimation d'intégrabilité de la densité spatiale*

$$\|\rho_f\|_{L^{\frac{5p-3}{3p-1}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}^{\frac{2p}{5p-3}} \mathscr{H}_{\text{cin}}(f)^{\frac{3p-3}{5p-3}}$$

avec dans le cas limite $p = +\infty$

$$\|\rho_f\|_{L^{\frac{5}{3}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)}^{\frac{2}{5}} \mathscr{H}_{\text{cin}}(f)^{\frac{3}{5}},$$

pour une certaine constante $C > 0$.

On en déduit le contrôle suivant de l'énergie potentielle pour $p > p_c = 9/7$

$$\mathscr{H}_{\text{pot}}(f) \leq C \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}^{\frac{p}{3(p-1)}} \mathscr{H}_{\text{cin}}(f)^{\frac{1}{2}}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration. — Pour $p > 1$ et $R > 0$, on décompose l'intégrale de la densité spatiale ρ_f en

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}v &= \int_{|v|\le R} f\,\mathrm{d}v + \int_{|v|>R} f\,\mathrm{d}v\\ &\le \|f\|_{L^p_v}\left(\int_{|v|\le R}\mathrm{d}v\right)^{\frac{(p-1)}{p}} + R^{-2}\int_{\mathbb{R}^3} f|v|^2\,\mathrm{d}v\\ &\le \|f\|_{L^p_v}\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right)^{\frac{(p-1)}{p}} + R^{-2}\int_{\mathbb{R}^3} f|v|^2\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

En optimisant le paramètre R, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}v \le C\|f(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2p}{(5p-3)}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} f|v|^2\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{(3p-3)}{(5p-3)}}$$

et on en déduit par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|\rho_f\|_{L^{\frac{(5p-3)}{(3p-1)}}(\mathbb{R}^3)} &\le C\left(\int_{\mathbb{R}^3}\|f(x,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2p}{(3p-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^3} f|v|^2\,\mathrm{d}v\right)^{\frac{(3p-3)}{(3p-1)}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{(3p-1)}{(5p-3)}}\\ &\le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}^{\frac{2p}{(5p-3)}}\mathscr{H}_{\mathrm{cin}}(f)^{\frac{(3p-3)}{(5p-3)}},\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de la première inégalité.

On veut maintenant contrôler le champ ϕ_f. En raisonnant heuristiquement, l'inégalité de Sobolev et la régularité elliptique de l'équation de Poisson impliqueraient

$$\|\nabla_x\phi_f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|\nabla_x\phi_f\|_{W^{1,6/5}(\mathbb{R}^3)} \le C\|\rho_f\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}.$$

La fonction $\nabla_x\phi_f$ n'est pas dans l'espace $W^{1,6/5}(\mathbb{R}^3)$; cependant on a bien l'inégalité $\|\nabla_x\phi_f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|\rho_f\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}$ en utilisant la formule $\nabla_x\phi_f = (x/(4\pi|x|^3)) * \rho_f$ et l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev [**58**, Theorem 4.3]. De manière alternative, il est possible de montrer que $\nabla_x\phi_f \in \dot{W}^{1,6/5}$ (l'espace de Sobolev homogène) au moyen du contrôle sur le laplacien de ϕ_f et de la théorie de Calderón-Zygmund, puis d'utiliser l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev pour conclure.

En combinant ces deux précédentes inégalités, on obtient

$$\mathscr{H}_{\mathrm{pot}}(f) = \|\nabla_x\phi_f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \le C\|\rho_f\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Afin d'estimer ce membre de droite on effectue l'interpolation suivante : pour $p > p_c = 9/7$, on a $(5p-3)/(3p-1) > 6/5$ et

$$\begin{aligned}\|\rho_f\|_{L^{6/5}(\mathbb{R}^3)} &\le \|\rho_f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}^{\frac{(7p-9)}{(12p-12)}}\|\rho_f\|_{L^{\frac{(5p-3)}{(3p-1)}}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{(5p-3)}{(12p-12)}}\\ &\le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}^{\frac{(7p-9)}{(12p-12)}}\|\rho_f\|_{L^{\frac{(5p-3)}{(3p-1)}}(\mathbb{R}^6)}^{\frac{(5p-3)}{(12p-12)}}.\end{aligned}$$

On combine alors toutes les inégalités précédentes pour obtenir (toujours lorsque $p > p_c$)

$$\mathcal{H}_{\mathrm{pot}}(f) \leq C\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}^{\frac{7p-9}{6(p-1)}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^6)}^{\frac{p}{3(p-1)}} \mathcal{H}_{\mathrm{cin}}(f)^{\frac{1}{2}}$$

ce qui termine la démonstration de la seconde inégalité. □

Remarquons que l'énergie potentielle peut être ainsi contrôlée par interpolation entre les invariants du système et l'énergie cinétique, *avec une puissance strictement inférieure à* 1 *de l'énergie cinétique* (plus précisément 1/2 dans notre cas). Par analogie avec les équations aux dérivées partielles dispersives et en particulier l'équation de Schrödinger, dans le cas d'une telle équation où le hamiltonien est composé de deux termes de signe opposé qui peuvent diverger tout en s'équilibrant, on parle d'*équation focalisante* ; et lorsque l'on peut établir un tel contrôle de l'énergie potentielle, on parle d'équation *sous-critique*. Lorsqu'un tel contrôle est possible mais avec une puissance 1 de l'énergie potentielle, on parle d'équation *critique*. Lorsqu'un tel contrôle n'est possible qu'avec une puissance strictement plus grande que 1, on parle d'équations *sur-critiques*, pour lesquelles on s'attend en général à des phénomènes d'explosion en temps fini.

Dans le cas du système de Vlasov-Poisson en dimension 3 qui est sous-critique, comme le suggère le résultat que l'on vient d'établir, la difficulté principale pour montrer des propriétés de stabilité est le contrôle de l'énergie cinétique. Nous renvoyons à [**49, 50, 51, 52, 55**] pour une étude systématique de la formation de singularités dans des cas critiques (dimension 4 ou dimension 3 relativiste), ainsi que pour des commentaires plus précis sur le parallèle avec les équations de Schrödinger. Ces modèles critiques n'ont toutefois pas d'interprétation claire au niveau physique. Nous nous concentrerons dans cet exposé sur les résultats qui concernent le système (8)-(9) en dimension 3.

2.4. La théorie de Cauchy

La théorie de Cauchy est relativement développée pour cette équation non-linéaire. C'est même l'un des rares systèmes non-linéaires fondamentaux de la physique pour lequel on sait construire des solutions globales et uniques sans hypothèse perturbative en dimension 3. Il est facile de se convaincre des points suivants :

- on souhaite montrer une régularité suffisante sur le champ de force moyen pour pouvoir définir des courbes caractéristiques pour les équations différentielles ordinaires correspondantes et établir des contrôles sur ces dernières ;
- cette régularité sur le champ dépend du contrôle sur des *moments en vitesse* $\int f|v|^k \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ de la solution, donc en définitive du comportement de la distribution pour les grandes vitesses.

Le contrôle de ces « particules à grandes vitesses » a finalement été obtenu de deux manières différentes il y a une vingtaine d'années. D'une part, Pfaffelmoser **[72]** a découvert comment propager en temps une borne sur la taille du support de la solution, ce qui implique le contrôle recherché et permet de construire des solutions globales C^1 à support compact. D'autre part et indépendamment, Lions et Perthame **[61]** ont découvert comment propager en temps des bornes directement sur les moments en vitesse de toute solution dans L^∞ et de hamiltonien borné, ce qui leur permet de construire des solutions uniques et globales dans $L^1((1+|v|^k)\,dx\,dv)\cap L^\infty$ pour k suffisamment élevé, modulo une hypothèse assez faible de régularité initiale sur la densité spatiale ρ_{in}. Nous renvoyons ensuite aux articles **[78, 11, 41, 88, 76, 26, 62, 66, 70]** pour les développements ultérieurs de ces théories.

Par ailleurs, sous des hypothèses plus faibles sur les données initiales

$$f_{\mathrm{in}} \geq 0, \quad f_{\mathrm{in}} \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6), \quad |v|^2 f_{\mathrm{in}} \in L^1(\mathbb{R}^6),$$

des solutions faibles globales ont été construites par Arsen'ev **[8]** (voir également **[43, 42]**) ; cependant leur unicité reste ouverte. Ces solutions sont également des solutions renormalisées au sens de DiPerna-Lions **[17, 18]** et on peut leur associer des caractéristiques généralisées au sens de DiPerna-Lions **[19]**. Elles sont continues en temps à valeur dans $L^1(\mathbb{R}^6)$ et vérifient l'inégalité suivante

$$\forall\, t \geq 0, \quad \mathscr{H}(f_t) \leq \mathscr{H}(f_{\mathrm{in}})$$

(la conservation exacte du hamiltonien est ouverte). Les théorèmes de Lemou, Méhats et Raphaël que nous présenterons dans la dernière section ont pour objet ces solutions faibles.

2.5. L'étude des solutions stationnaires

Nous cherchons maintenant les solutions stationnaires du système (8)-(9). Il en existe en fait une infinité, dont nous ne connaissons et ne savons caractériser de manière satisfaisante qu'une petite partie. Une telle solution f^0 doit vérifier

$$\begin{cases} \forall\, x, v \in \mathbb{R}^3, \quad v \cdot \nabla_x f^0 - \nabla_x U(x) \cdot \nabla_v f^0 = 0, \\ \forall\, x \in \mathbb{R}^3, \qquad \Delta_x U = \rho_{f^0}. \end{cases}$$

On voit que la première équation incite à considérer une fonction f^0 ne dépendant que des invariants du mouvement du système différentiel $x''(t) = -\nabla_x U$, au moins si ce dernier est complètement intégrable. Cependant, on ne connaît rien *a priori* sur ce système différentiel, puisqu'il dépend de la solution f^0 recherchée elle-même.

2.5.1. *Le théorème de Jeans.* — On sait néanmoins résoudre ce problème dans le cas de solutions stationnaires dites à « symétrie sphérique ». Cela correspond à l'invariance de la solution stationnaire par les rotations du référentiel, soit

$$\forall (x,v) \in \mathbb{R}^6, \quad f^0(Ax, Av) = f^0(x,v)$$

pour toute matrice 3×3 orthogonale A. Cela implique donc que $f^0 = f^0(|x|, |v|, x \cdot v)$. Les équations du mouvement

$$\begin{cases} x'(t) = v, \\ \\ v'(t) = -\nabla_x U = -\frac{x}{|x|} U'(|x|) \end{cases}$$

possèdent alors *toujours* (c'est-à-dire indépendamment de f^0) un invariant supplémentaire, en plus de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (x(t) \wedge v(t)) = v(t) \wedge v(t) - \frac{U'(|x|)}{|x|} x(t) \wedge x(t) = 0.$$

Le système est alors complètement intégrable (l'espace des phases possède trois degrés de liberté), et l'on peut montrer que les équilibres s'écrivent sous la forme

$$\begin{cases} f^0(x,v) = f^0(|x|, |v|, x \cdot v) = F(E, L), \\ \\ E(x,v) := E_{f^0}(x,v) = \dfrac{|v|^2}{2} + \phi_{f^0}(t,x), \\ \\ L(x,v) := |x \wedge v|^2. \end{cases} \tag{12}$$

C'est le *théorème de Jeans* [**44, 45**] appliqué aux systèmes sphériques (voir la discussion [**12**, section 4.4]). Un cadre et une démonstration mathématiques rigoureux peuvent être consultés dans [**9**], fondés sur la résolution des équations différentielles non-linéaires radiales correspondantes.

Lorsque $F = F(E)$ ne dépend que de E, on parle de modèles sphériques *isotropes*, et lorsque $F = F(E, L)$, on parle de modèles sphériques *anisotropes*. Ces termes s'expliquent par le fait que la matrice (tenseur) de dispersion en vitesse

$$\frac{1}{\rho_f} \int_{\mathbb{R}^3} v_i v_j F(E, L) \,\mathrm{d}v, \quad 1 \leq i, j, \leq 3$$

est un multiple de la matrice identité lorsque $F = F(E)$ alors que, par exemple, ses composantes diagonales sont différentes lorsque $F = F(E, L)$ dépend de L (cf. à nouveau, ici et pour la suite de cette section, [**12**, section 4.4]).

Dans le cadre de tels systèmes à symétrie sphérique, l'équation fondamentale qui gouverne les équilibres de systèmes stellaires est

$$\Delta_x \phi = \rho \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r^2} \left(r^2 \phi' \right)' = \int_{\mathbb{R}^6} F\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi, |x \wedge v|^2 \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}v. \tag{13}$$

C'est une équation elliptique que l'on peut voir comme une équation non-linéaire sur le potentiel ϕ étant donné le profil de l'équilibre sphérique F, ou bien comme une équation non-linéaire sur F étant donné ϕ.

2.5.2. *Les modèles polytropiques.* — Supposons tout d'abord $F = F(E)$ isotrope, et partons de la formule la plus simple pour obtenir un profil F à support compact, c'est-à-dire une fonction puissance tronquée :

$$f(x,v) = F(E) = C_F(E_0 - E)_+^n, \quad n \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

où $z_+ := \max\{z, 0\}$ désigne la partie positive d'un réel $z \in \mathbb{R}$, et C_F est une constante donnée. Un calcul élémentaire montre que, par résolution de l'équation (13), la densité spatiale associée est

$$\rho = c_n(E_0 - \phi)_+^{n+3/2}$$

avec une constante c_n finie si $n > -1$ et la formule simple lorsque $n \geq 0$:

$$c_n := C_F \frac{2^{3/2}\pi n!}{(n+3/2)!}.$$

On voit ainsi que ces modèles ne peuvent *jamais être répartis de manière homogène* car une densité spatiale constante impliquerait $n = -3/2$. L'équation obtenue alors sur le potentiel est l'équation dite de *Lane-Emden*

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi\right) = c_n(E_0 - \phi)_+^{n+3/2}.$$

On parle de modèles *polytropiques* car la distribution spatiale est alors la même que pour un gaz auto-gravitant vérifiant la loi de pression des gaz polytropes $p = \text{cste}\, \rho^\gamma$ avec $\gamma = 1 + 1/(n + 3/2)$. Le cas $n > 7/2$ conduit à des solutions de masse infinie et à support non compact en ajustant le paramètre E_0. L'équation sur le potentiel n'admet pas de solution simple en terme de fonctions élémentaires en dehors du cas $n = -1/2$ (équation linéaire de Helmhotz). Le cas limite $n = 7/2$ est intéressant car on obtient une masse finie mais un support non compact ; c'est le modèle dit *de Plummer*.

2.5.3. *Le modèle de King.* — D'après les observations, l'énergie est très concentrée au centre des galaxies. Cela incite à considérer de grandes valeurs de n dans le modèle polytropique. Considérons ainsi tout d'abord formellement le cas limite « $n = \infty$ ». Bien sûr les équations que nous avons utilisées pour trouver la solution stationnaire ci-dessus ne font plus sens, mais si on suit le parallèle avec les gaz auto-gravitants, cela doit correspondre au cas d'un gaz vérifiant la loi de pression $p = \text{cste}\, \rho^\gamma$ avec $\gamma = 1$, c'est-à-dire un gaz isotherme. En suivant les considérations usuelles de mécanique statistique, on obtient des distributions de loi exponentielle. C'est le modèle dit de la *sphère isotherme.* Il est cependant de masse infinie et de support non compact. La littérature physique a donc introduit **[47]** la troncature suivante

$$f = F(E) = \left(e^{E_0 - E} - 1\right)_+ \tag{15}$$

que l'on appelle *modèle de King.* Ce modèle reproduit les fortes valeurs d'énergie observées pour les petits rayons, tout en étant compatible avec les contraintes de masse et support. Ce modèle sera l'un des protagonistes principaux des travaux mathématiques récents, car c'est peut-être le modèle sphérique isotrope le plus important d'un point de vue physique, et l'étude de sa stabilité échappe aux techniques variationnelles fondées sur les fonctionnelles d'énergie-Casimir. Une des réussites marquantes du programme de recherche de Lemou, Méhats et Raphaël est d'obtenir dans **[57]** la stabilité de ces modèles pour des perturbations générales.

Remarquons ici que l'on voit apparaître en filigrane un phénomème mystérieux, à savoir le fait que les équilibres sont analysés par des considérations de mécanique statistique *collisionnelle*, soit irréversible. Comprendre pourquoi cette démarche produit des résultats corrects, au moins partiellement, rejoint la question fondamentale de comprendre comment les galaxies se « thermalisent » sans collision. C'est l'objet des théories d'amortissement et de relaxation violente initiées par Lynden-Bell **[63, 64]**.

2.5.4. *Autres modèles.* — Si l'on se prescrit au départ la densité spatiale et que l'on cherche à calculer F, on obtient la formule dite de Eddington **[24]**, dont les deux modèles célèbres qui en sont issus sont le modèle dit $R^{1/4}$ et l'*isochrone d'Hénon.* Le cas anisotrope est moins clair, mais l'on peut citer le modèle dit *d'Osipkov-Merritt* qui généralise le modèle $R^{1/4}$, ainsi que le modèle dit *de Michie* qui généralise le modèle de King (nous renvoyons à **[12**, Chapitre 4]).

2.6. La conjecture de stabilité pour les modèles sphériques

Nous devons d'abord discuter de la notion de stabilité utilisée. Au vu des invariants du système (fonctionnelles de Casimir et hamiltonien macroscopique), il est naturel de mesurer la stabilité de la manière suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\mathscr{D}(f_{\mathrm{in}}, f^0) := \left\|f_{\mathrm{in}} - f^0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} + \left|\mathscr{H}(f_{\mathrm{in}}) - \mathscr{H}(f^0)\right| \leq \eta \\ \Longrightarrow \quad \forall\, t \geq 0,\ \mathscr{D}(f_t, f^0) \leq \varepsilon. \tag{16}$$

(Les fonctionnelles de Casimir sont correctement capturées par les espaces de Lebesgue en terme de distance, et le choix de $L^1(\mathbb{R}^6)$ semble arbitraire, mais sera de toute façon complété plus loin par une hypothèse de borne $L^\infty(\mathbb{R}^6)$.)

Cependant, il faut tenir compte du groupe de symétries du système d'évolution et voir si ces dernières sont « capturées » par la distance utilisée pour mesurer la stabilité. Il s'avère que le système de Vlasov-Poisson (8)-(9) admet un large groupe de symétries : si $f(t,x,v)$ est solution, alors pour tous $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\mu_0 \in \mathbb{R}_+^*$

$$g(t,x,v) := \frac{\mu_0}{\lambda_0^2} f\left(\frac{t+t_0}{\lambda_0\,\mu_0}, \frac{x+x_0}{\lambda_0}, \mu_0\, v\right)$$

est encore solution, et on a également *l'invariance par translation galiléenne* (ce qui ne fait que traduire sur ce modèle statistique l'invariance galiléenne correspondante de la mécanique classique) : si $f(t,x,v)$ est solution, alors pour tout $v_0 \in \mathbb{R}^3$

$$g(t,x,v) := f(t, x+tv_0, v+v_0)$$

est encore solution. Il est clair que la « distance » utilisée $\mathscr{D}$ est également invariante par ces transformations lorsque $\lambda_0 = \mu_0 = 1$. Nous devons donc reformuler la stabilité de la manière suivante : il existe une fonction de translation $z = z(t) \in \mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathscr{D}(f_{\text{in}}, f^0) \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \geq 0,\ \mathscr{D}(f_t, f^0(\cdot - z(t), \cdot)) \leq \varepsilon. \tag{17}$$

C'est la notion de *stabilité orbitale.* Ajoutons que, dans le cas de perturbations à symétrie sphérique, le paramètre $z(t)$ est nécessairement toujours nul.

Pour les solutions stationnaires à symétrie sphérique, il est très largement discuté dans la littérature physique **[12]** que la stabilité est liée à la monotonie par rapport à l'énergie microscopique $E = E_{f^0}(x,v)$. Plus précisément, on peut formuler les conjectures suivantes :

CONJECTURE 2.2. — *Les galaxies $f^0 = F(E,L)$ à symétrie sphérique anisotropes et décroissantes ($\partial_E F < 0$ sur le support de F) sont orbitalement stables par perturbation à symétrie sphérique pour le système d'évolution* (8)-(9).

CONJECTURE 2.3. — *Les galaxies $f^0 = F(E)$ à symétrie sphérique isotropes et décroissantes ($\partial_E F = F' < 0$ sur le support de F) sont orbitalement stables par perturbation générale pour le système d'évolution* (8)-(9).

Les conjectures correspondantes pour le problème linéarisé ont été démontrées dans les années 1960 et 1970 à la suite des travaux fondateurs d'Antonov **[4, 3]**, mais leur résolution pour la dynamique non-linéaire correcte vient d'être obtenue par Lemou, Méhats et Raphaël respectivement dans les articles **[56]** et **[57]** (nous renvoyons également à **[31]** pour une réponse partielle importante sur la conjecture 2.2). Nous nous concentrerons sur la résolution de la conjecture 2.3 (article **[57]**), tandis que nous renvoyons à **[56]** pour la résolution de la conjecture 2.2, qui implique les mêmes idées essentielles. Et lorsque nécessaire, nous illustrerons les méthodes et résultats avec les deux modèles principaux : modèles polytropiques (14) et modèle de King (15). Ajoutons enfin qu'en l'absence de symétrie sphérique de la solution stationnaire, la question de la stabilité est ouverte, *même pour le problème linéarisé.*

3. LE PROBLÈME LINÉARISÉ

3.1. La dynamique linéarisée

Il est possible d'adopter une vision géométrique de l'espace des solutions du système (8)-(9) en terme de structure de Poisson, avec les invariants définissant une *feuille symplectique.* Nous n'en aurons pas besoin dans cet exposé, et nous renvoyons aux références [**83, 89, 67, 68**] et [**1**, p. 302] pour des approfondissements sur cet aspect. Nous mentionnerons uniquement la notion de *perturbation dynamiquement accessible* qui a joué un rôle dans le développement de la théorie perturbative.

Si l'on considère une solution stationnaire $f^0(x,v)$ on peut linéariser le système (8)-(9) autour de cette solution $f = f^0 + \varepsilon\, h$ pour obtenir l'équation linéaire suivante

$$(18)\qquad \begin{cases} \partial_t h + v\cdot\nabla_x h - \nabla_x \phi_{f^0}\cdot\nabla_v h = \nabla_x\phi_h\cdot\nabla_v f^0, \quad t\in\mathbb{R}_+,\ x\in\mathbb{R}^3,\ v\in\mathbb{R}^3, \\ h(t=0,x,v) = h_0(x,v), \\ \rho_h(t,x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} h(t,x,v)\,\mathrm{d}v \quad \text{et} \quad \phi_h(t,x) := -\frac{1}{4\pi|x|} * \rho_h. \end{cases}$$

Il est aisé de construire des solutions régulières uniques et résoudre le problème de Cauchy pour ce système d'équations aux dérivées partielles linéaires, par des méthodes de point fixe et en utilisant l'inégalité d'interpolation fondamentale de la proposition 2.1.

On peut réécrire ce système d'évolution de manière plus compacte en

$$(19)\qquad \begin{cases} \partial_t h + \{h, E_{f^0}\} = \nabla_x\phi_h\cdot\nabla_v f^0, \\ h(t=0,x,v) = h_0(x,v). \end{cases}$$

Il est important de remarquer que la fluctuation h n'est en général pas positive et que la structure hamiltonienne de l'équation (8) n'a pas survécu au processus de linéarisation. Le système linéarisé (18) en hérite toutefois la propriété suivante. Si l'on définit une perturbation initiale *dynamiquement accessible* comme étant créée à partir de f^0 par un hamiltonien extérieur donné $\bar{H}_{\mathrm{ext}}$, on obtient formellement

$$f = f^0 + \varepsilon\, h + O(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad H = E_{f^0} + \varepsilon\,\bar{H}_{\mathrm{ext}} \quad \text{avec} \quad h_{|t=0} = 0.$$

Le premier ordre de linéarisation en ε de l'équation sur h donne

$$\partial_t h + \{f^0, \bar{H}_{\mathrm{ext}}\} = O(\varepsilon)$$

et on obtient finalement $h_t \sim t\,\{f^0, \bar{H}_{\mathrm{ext}}\}$ en temps petit. Ce dernier terme joue le rôle de la direction de dérivation dans le processus de linéarisation. On montre alors dans la proposition suivante que la forme $h_t = \{g_t, f^0\}$ est préservée au cours du temps pour l'équation linéarisée (18) sur h, soit que l'on peut restreindre l'équation linéarisée à l'« espace tangent » des conservations hamiltoniennes, *i.e.*, de la feuille symplectique.

PROPOSITION 3.1. — *Si g est une solution (régulière) de l'*équation génératrice *suivante*

$$\begin{cases} \partial_t g + \{g, E_{f^0}\} = \phi_{\{g,f^0\}}, \\ g_{|t=0} = g_{\text{in}}, \end{cases}$$

alors $h = \{g, f^0\}$ est une solution régulière de (19).

Remarquons dès lors, ce qui nous sera utile par la suite, qu'il est équivalent de chercher une solution sous la forme $h = \{g, f^0\}$ ou sous la forme $h = \{g, E_{f^0}\}$: il suffit en effet de multiplier g dans la première forme par $1/F'(E_{f^0})$ pour obtenir la deuxième.

Démonstration. — On calcule l'équation d'évolution sur $h_t := \{g_t, f^0\}$:

$$\begin{aligned} \partial_t h = \{\partial_t g, f^0\} = -\{\{g, E_{f^0}\}, f^0\} + \{\phi_h, f^0\} \\ = \{\{E_{f^0}, f^0\}, g\} + \{\{f^0, g\}, E_{f^0}\} + \{\phi_h, f^0\} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'identité suivante sur le crochet de Poisson

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{B, C\}, A\} + \{\{C, A, \}, B\} = 0.$$

On utilise alors $\{E_{f^0}, f^0\} = 0$ (par définition d'une solution stationnaire), et $\{\phi_h, f^0\} = \nabla_x \phi_h \cdot \nabla_v f^0$, ce qui permet de conclure à

$$\partial_t h + \{h, E_{f^0}\} = \nabla_x \phi_h \cdot \nabla_v f^0$$

qui est bien l'équation recherchée, avec la donnée initiale $h_{\text{in}} = \{g_{\text{in}}, f^0\}$. □

3.2. Énergie libre du problème linéarisé

Dans le cas de modèles sphériques, l'article **[48]** a pour la première fois proposé une *énergie libre* préservée au cours de l'évolution par le système de Vlasov-Poisson linéarisé dans le cas d'interactions de Coulomb, pour les plasmas. Cette fonctionnelle sera ensuite adaptée au cas gravitationnel du système (18) par Antonov **[4, 3]**, et ce dernier l'utilisera pour formuler un critère de stabilité. Nous ne présentons ici que le cas isotrope $f^0 = F(E)$ pour simplifier l'exposition et nous rappelons la notation $E = E_{f^0}(x, v)$.

PROPOSITION 3.2. — *La quantité*

$$\mathscr{F}(h) = -\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \frac{|h|^2}{F'(E)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_h|^2 \, \mathrm{d}x$$

est conservée par les solutions régulières du système (18) *dont le support est inclus dans le support de F'.*

Le quotient $|h|^2/F'(E)$ doit ici être compris comme étant égal à zéro lorsque les numérateurs et dénominateurs s'annulent.

Démonstration. — On souhaite différencier en temps l'expression de $\mathcal{F}(h)$. On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{|h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v &= -2\int_{\mathbb{R}^6}\frac{\{h,E\}\,h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + 2\int_{\mathbb{R}^6}\frac{\nabla_x\phi_h\cdot\nabla_v f^0\,h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\ &= -2\int_{\mathbb{R}^6}\frac{\{h,E\}\,h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + 2\int_{\mathbb{R}^6} v\cdot\nabla_x\phi_h\,h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

puis on remarque que

$$\left\{\frac{1}{F'(E)},E\right\} = -\frac{F''(E)}{F'(E)^2}\,\{E,E\} = 0$$

et ainsi par intégration par parties

$$2\int_{\mathbb{R}^6}\frac{\{h,E\}\,h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6}\frac{\{h^2,E\}}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = -\int_{\mathbb{R}^6} h^2\,\left\{\frac{1}{F'(E)},E\right\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3}\frac{|h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 2\int_{\mathbb{R}^6} v\cdot\nabla_x\phi_h\,h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

On calcule par ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_h|^2\,\mathrm{d}x &= 2\int_{\mathbb{R}^3}\nabla_x\frac{\partial}{\partial t}\phi_h\cdot\nabla_x\phi_h\,\mathrm{d}x = -2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\Delta_x\phi_h\,\phi_h\,\mathrm{d}x\\ &= -2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}\rho_h\,\phi_h\,\mathrm{d}x = -2\int_{\mathbb{R}^3}\left(\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial}{\partial t}h dv\right)\,\phi_h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^6} v\cdot\nabla_x h\phi_h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = -2\int_{\mathbb{R}^6} v\cdot\nabla_x\phi_h h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

La somme de ces deux dernières équations fournit le résultat. □

3.3. Interprétation variationnelle de l'énergie libre

Quelle est l'origine de cette énergie libre et surtout quel est son lien avec le hamiltonien du problème non-linéaire ? Si l'on compare le hamiltonien en deux fonctions différentes f^0 et f on obtient par un calcul élémentaire la formule

$$(20)\quad \mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(f^0) + \int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f^0}\right)(f-f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_f - \nabla_x\phi_{f^0}|^2\,\mathrm{d}x.$$

En effet

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\frac{\phi_f}{2}\right)f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v=\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\frac{\phi_{f^0}}{2}\right)f^0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\
&+\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f^0}\right)(f-f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{1}{2}\phi_f f-\phi_{f^0}(f-f^0)-\frac{1}{2}\phi_{f^0}f^0\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\
&=\mathscr{H}(f^0)+\int_{\mathbb{R}^6}E(f-f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{2}|\nabla_x\phi_f|^2-\nabla_x\phi_{f^0}\cdot\nabla_x\phi_f+\frac{1}{2}|\nabla_x\phi_{f^0}|^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Il est clair cependant qu'aucune fonction f^0 ne peut constituer un point critique de $\mathscr{H}$ à cause de la partie linéaire en $(f-f^0)$ dans la formule (20) ci-dessus, qui n'est jamais l'application nulle. Cela s'explique par les invariants du système. Pour y remédier, une idée introduite par Arnold **[5, 6, 7]** dans les années 1960 dans le cas de l'équation d'Euler incompressible bidimensionnelle, est de considérer une fonctionnelle dite *d'énergie-Casimir* qui combine le hamiltonien et une fonctionnelle de Casimir bien choisie. Cette idée resurgira plus loin lorsque nous aborderons la stabilité non-linéaire.

On se donne alors une fonctionnelle d'énergie-Casimir générale définie par une fonction $\mathscr{C}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ avec $\mathscr{C}(0)=0$:

$$\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f):=\mathscr{H}(f)+\int_{\mathbb{R}^6}\mathscr{C}(f)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v,$$

et l'on cherche à ajuster la fonction $\mathscr{C}$ afin que cette fonctionnelle admette bien f^0 comme point critique. Par un calcul élémentaire et en développant $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$ autour de f^0 on obtient

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f)&=\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f^0)+\int_{\mathbb{R}^6}\Big(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f^0}+\mathscr{C}'(f^0)\Big)(f-f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_f-\nabla_x\phi_{f^0}|^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^6}\mathscr{C}''(f^0)(f-f^0)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v+\dots\\
&=:\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f^0)+D\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f^0)[f-f^0]+\frac{1}{2}D^2\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f^0)[f-f^0]+\dots
\end{aligned}$$

On voit alors que le choix formel

$$\mathscr{C}'(f^0)=-E=-\left(\frac{|v|^2}{2}+\phi_{f^0}\right)$$

permet d'annuler la partie linéaire et d'obtenir exactement

$$D^2\mathscr{H}_{\mathscr{C}}(f^0)[f-f^0]=\mathscr{I}(f-f^0).$$

En effet puisque $f^0=F(E)$ ne dépend que de E on a

$$\mathscr{C}'(F(E))=-E\quad\Longrightarrow\quad\mathscr{C}''(F(E))F'(E)=-1\ \text{ soit }\ \mathscr{C}''(F(E))=-\frac{1}{F'(E)}.$$

On peut donc interpréter cette énergie libre comme la hessienne de la fonctionnelle d'énergie-Casimir au point f^0, pour une contrainte $\mathscr{C}$ correctement choisie en fonction de f^0.

3.4. Première approche naïve de la stabilité linéaire par interpolation

Donnons tout d'abord une approche « naïve » de la stabilité qui rappelle l'inégalité d'interpolation de la proposition 2.1 pour l'équation non-linéaire. On peut en effet interpréter à nouveau la fonctionnelle $\mathscr{F}$ comme une énergie que l'on décompose en deux termes positifs :

$$\mathscr{F}(h) = \mathscr{F}_{\mathrm{cin}}(h) - \mathscr{F}_{\mathrm{pot}}(h) \qquad \text{avec}$$

$$\mathscr{F}_{\mathrm{cin}}(h) := -\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v, \qquad \mathscr{F}_{\mathrm{pot}}(h) := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_h|^2\,\mathrm{d}x$$

et l'on cherche à contrôler la partie $\mathscr{F}_{\mathrm{pot}}$ à partir de $\mathscr{F}_{\mathrm{cin}}$ dans une estimation *sous-critique*. La proposition suivante est inspirée de [**10**].

Proposition 3.3 ([**10**]). — *Si la solution stationnaire f^0 vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^6} F'(E)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v < +\infty \tag{21}$$

alors

$$\mathscr{F}_{\mathrm{pot}}(h) \le C\|h\|^{2/3}_{L^1(\mathbb{R}^6)}\|\rho_h\|^{1/3}_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\mathscr{F}_{\mathrm{cin}}(h)^{\frac{1}{2}}$$

et l'on peut démontrer la stabilité dans un espace de solutions tel que $\rho_h \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

La preuve de l'inégalité fonctionnelle est immédiate, et le résultat de stabilité linéaire en découle une fois les solutions correctement construites. Malheureusement l'hypothèse (21) ne permet pas de traiter les modèles physiques les plus intéressants. Il va donc falloir se tourner vers une estimation globale de $\mathscr{F}$ sans décomposition ; autrement dit, une estimation de convexité sur la fonctionnelle d'énergie-Casimir $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$.

3.5. L'inégalité de coercitivité d'Antonov

Antonov [**4, 3**] propose alors de considérer la fonctionnelle $\mathscr{F}$ dans son ensemble, et *de montrer qu'elle est positive, une fois restreinte aux perturbations dynamiquement accessibles $h = \{g, f^0\}$*. Pour être exact, l'argument (formel) original d'Antonov n'est pas fondé sur les perturbations dynamiquement accessibles, mais sur une décomposition de la perturbation en partie paire et partie impaire par rapport à la variable de vitesse. Nous renvoyons également aux travaux ultérieurs dans la littérature physique qui ont développé l'idée d'Antonov [**23, 22, 80, 46, 71**].

L'argument historique d'Antonov consiste à considérer une solution h du problème linéarisé (19) puis à la décomposer en partie paire et partie impaire par rapport à la variable de vitesse v, soit $h = h_1 + h_2$ avec

$$h_1(x,v) = \frac{1}{2}\left(h(t,x,v) + h(t,x,-v)\right), \quad h_2(x,v) = \frac{1}{2}\left(h(t,x,v) - h(t,x,-v)\right).$$

On obtient ainsi formellement les deux équations couplées suivantes

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + \{h_2, E\} = 0, \\ \partial_t h_2 + \{h_1, E\} = \nabla_x \phi_{h_1} \cdot \nabla_v f^0. \end{cases}$$

Puis en remplaçant le terme h_1 dans la deuxième équation, on déduit *l'équation de pulsation* suivante sur h_2

$$\partial^2_{tt} h_2 = \{\{h_2, E\}, E\} - \nabla_x \phi_{\{h_2,E\}} \cdot \nabla_v f^0. \tag{22}$$

Par analogie avec l'équation différentielle $y'' = \lambda y$, on voit que, si l'opérateur du membre de droite est négatif, on espère obtenir des solutions oscillantes bornées (ce qui justifie le terme de « pulsation »).

On calcule alors l'énergie de ce système.

PROPOSITION 3.4. — *On suppose $F' < 0$ sur son domaine, et $h \in C^\infty_c$ une solution de* (22) *à support inclus dans celui de F'. Alors h vérifie*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\int_{\mathbb{R}^6} \frac{|h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\{h,E\}|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{\{h,f^0\}}|^2\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\int_{\mathbb{R}^6} \frac{|h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v + \mathscr{I}(\{h, f^0\})\right) = 0.$$

Démonstration. — En intégrant contre $\partial_t h / F'(E)$ l'équation de pulsation on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^6} \partial^2_{tt} h \frac{\partial_t h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\partial_t h|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

pour le premier terme, puis

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^6} \{\{h,E\},E\} \frac{\partial_t h}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\ &\qquad = -\int_{\mathbb{R}^6} \{h,E\} \frac{\{\partial_t h, E\}}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^6} \frac{|\{h,E\}|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

pour le deuxième terme où l'on a utilisé une intégration par parties et le fait que $\{1/F'(E), E\} = 0$, et enfin pour le dernier terme

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^6} \nabla_x \phi_{\{h,E\}} \cdot \nabla_v f^0 \frac{\partial_t h}{F'(E)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v &= -\int_{\mathbb{R}^6} \{\phi_{\{h,E\}}, E\} \partial_t h \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{\mathbb{R}^6} \phi_{\{h,E\}} \{\partial_t h, E\} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^3} \phi_{\{h,E\}} \partial_t \rho_{\{h,E\}} \,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla_x \phi_{\{h,E\}} \cdot \nabla_x \partial_t \phi_{\{h,E\}} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{\{h,E\}}|^2 \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité en combinant les trois précédentes égalités. □

On voit donc que, dès lors que l'on sait montrer la positivité de l'énergie libre sur les perturbations admissibles $\{h_2, f^0\}$ issues d'une fonction h_2 impaire, on peut en déduire l'impossibilité d'instabilités sur la composante impaire h_2 puisque l'on a alors la somme de deux termes positifs qui est conservée au cours du temps. C'est le critère de stabilité d'Antonov [**4**]. Le reste de l'argument de [**4**] est moins clair en ce qui concerne le contrôle de la composante paire h_1, et semble conditionné à certaines hypothèses *ad hoc* pour éviter la possibilité d'instabilités avec une croissance polynomiale en temps. Dans l'article suivant [**3**], Antonov donne une preuve de cette propriété cruciale de positivité de $\mathcal{F}(\{h_2, E\})$ avec h_2 impaire, en résolvant le problème de minimisation associé.

Nous allons maintenant présenter les analyses mathématiques récentes de ces questions. Tout d'abord, nous présentons un énoncé et une preuve élégante issue de [**34**] de la coercitivité découverte par Antonov, *i.e.*, la positivité de l'énergie libre sur les fonctions de la forme $\{h_2, f^0\}$ avec h_2 impaire. Du fait de l'importance de cette propriété d'un point de vue historique, ainsi que pour la genèse des résultats dont il est question ici, nous présentons une preuve détaillée. Une autre approche de cette propriété et de sa preuve, développée dans [**56, 57**], sera discutée dans la section 4.

PROPOSITION 3.5 ([**34**]). — *On suppose $F' < 0$ sur le domaine de f^0, et $h \in C_c^\infty$ à support inclus dans celui de F', à symétrie sphérique et impaire par rapport à la variable de vitesse. Alors on a*

$$\mathcal{F}(\{h, f^0\}) \geq -\int_{\mathbb{R}^6} F'(E) \left(|x \cdot v|^2 \left| \left\{ \frac{h}{x \cdot v}, E \right\} \right|^2 + \frac{\phi'_{f^0}(r)}{r} |h|^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \geq 0 \tag{23}$$

où $r = |x|$ et $\phi'_{f^0}(r)$ désigne la dérivée radiale de $\phi_{f^0} = \phi_{f^0}(r)$.

Démonstration. — Observons tout d'abord que, pour un modèle sphérique $f^0 = F(E)$, les fonctions ϕ_{f^0} et ρ_{f^0} sont radialement symétriques, et on a

$$\Delta_x \phi_{f^0} = \rho_{f^0} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{r^2}\left[r^2 \phi'_{f^0}(r)\right]' = \rho_{f^0}(r)$$

d'où, en intégrant de 0 à r, on obtient

$$\forall\, r > 0, \quad \phi'_{f^0}(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r r_*^2 \rho_{f^0}(r_*)\,\mathrm{d}r_* \geq 0$$

et le potentiel créé par la solution stationnaire f^0 est croissant. On déduit donc immédiatement la positivité du membre de droite dans la proposition.

Rappelons la formule de l'énergie libre

$$\mathcal{F}(\{h,f^0\}) := -\int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \frac{|\{h,f^0\}|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v - \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{\{h,f^0\}}|^2\,\mathrm{d}x.$$

Nous allons tout d'abord contrôler par au-dessus l'opposé du second terme. On observe d'une part que la symétrie sphérique de h implique immédiatement celle de $\phi_{\{h,f^0\}}$, et d'autre part que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} \{h,f^0\}\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^3} \left(\nabla_x h\cdot\nabla_v f^0 - \nabla_v h\cdot\nabla_x f^0\right)\,\mathrm{d}v \\ &= \nabla_x\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3} h\nabla_v f^0\,\mathrm{d}v\right) = \nabla_x\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3} vF'(E)h\,\mathrm{d}v\right).\end{aligned}$$

Par conséquence, en utilisant à nouveau $\Delta_x\phi = r^{-2}[r^2\phi']'$, on obtient

$$\begin{aligned}&\phi'_{\{h,f^0\}}(r) = \frac{1}{r^2}\int_0^r\left(\int_{\mathbb{R}^3}\{h(x_*,v),f^0(x_*,v)\}\,\mathrm{d}v\right) r_*^2\,\mathrm{d}r_* \\ &= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x|\leq r}\nabla_x\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3} vF'(E)h\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{|x|=r}\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x\cdot v}{|x|}\right)F'(E)h\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}\omega(x)\end{aligned}$$

où $\mathrm{d}\omega$ désigne la mesure uniforme sur la sphère, et dans la première ligne $|x_*| = r_*$. Puis, l'intégrande est à nouveau invariant par rotation sur la variable x et on en déduit

$$\forall\,|x| = r, \quad \phi'_{\{h,f^0\}}(r) = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x\cdot v}{|x|}\right)F'(E)h\,\mathrm{d}v.$$

On aboutit au contrôle suivant sur le second terme de l'énergie libre par inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_{\{h,f^0\}}|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^3}\left(-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x\cdot v}{|x|}\right)^2 F'(E)\,\mathrm{d}v\right)\left(-\int_{\mathbb{R}^3}F'(E)|h|^2\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x.$$

Étudions plus précisément la première intégrale en v du membre de droite. En chaque point x, on décompose orthogonalement la variable v en

$$v = \left(\frac{x\cdot v}{|x|}\right)\frac{x}{|x|} + \left(\frac{x\wedge v}{|x|}\right) =: v_{||}\frac{x}{|x|} + v_\perp, \qquad v_{||}\in\mathbb{R},\ v_\perp\in\mathbb{R}^2$$

et

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{x\cdot v}{|x|}\right)^2 F'(E)\,\mathrm{d}v &= -\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} v_{||}^2 F'\left(\frac{|v_{||}|^2}{2}+\frac{|v_\perp|^2}{2}+\phi_{f^0}\right)\mathrm{d}v_{||}\,\mathrm{d}v_\perp \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}_+} v_{||}^2 F'\left(\frac{v_{||}^2}{2}+\frac{|v_\perp|^2}{2}+\phi_{f^0}(r)\right)\mathrm{d}v_{||}\,\mathrm{d}v_\perp \\
&= 2\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}_+} F\left(\frac{v_{||}^2}{2}+\frac{|v_\perp|^2}{2}+\phi_{f^0}(r)\right)\mathrm{d}v_{||}\,\mathrm{d}v_\perp = \int_{\mathbb{R}^6} f^0(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \rho_{f^0}(r).
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_{\{h,f^0\}}|^2\,\mathrm{d}x \le -\int_{\mathbb{R}^6} F'(E)\rho_{f^0}(r)|h|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.
$$

On calcule maintenant le carré du crochet de Poisson suivant

$$
\begin{aligned}
|\{h,f^0\}|^2 &= \left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}(x\cdot v), f^0\right\}\right|^2 = \left|(x\cdot v)\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, f^0\right\} + \frac{h}{(x\cdot v)}\left\{(x\cdot v), f^0\right\}\right|^2 \\
&= (x\cdot v)^2\left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, f^0\right\}\right|^2 + \left(\frac{h}{(x\cdot v)}\right)^2 |\{(x\cdot v), f^0\}|^2 + 2h\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, f^0\right\}\{(x\cdot v), f^0\} \\
&= (x\cdot v)^2\left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, f^0\right\}\right|^2 + \left\{\left(\frac{h}{(x\cdot v)}\right)^2 (x\cdot v)\{(x\cdot v), f^0\}, f^0\right\} \\
&\qquad - \left(\frac{h^2}{(x\cdot v)}\right)\{\{(x\cdot v), f^0\}, f^0\}
\end{aligned}
$$

ce qui donne, lorsque l'on intègre contre $1/F'(E)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^6}\frac{|\{h,f^0\}|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v &= \int_{\mathbb{R}^6}\frac{(x\cdot v)^2}{F'(E)}\left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, f^0\right\}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^6}\frac{1}{F'(E)}\left\{\left(\frac{h}{(x\cdot v)}\right)^2 (x\cdot v)\{(x\cdot v), f^0\}, f^0\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^6}\frac{1}{F'(E)}\left(\frac{h^2}{(x\cdot v)}\right)\{\{(x\cdot v), f^0\}, f^0\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{\mathbb{R}^6}(x\cdot v)^2 F'(E)\left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)}, E\right\}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^6}\left\{\left(\frac{h}{(x\cdot v)}\right)^2 (x\cdot v)\{(x\cdot v), f^0\}, E\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^6} F'(E)\left(\frac{h^2}{(x\cdot v)}\right)\{\{(x\cdot v), E\}, E\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.
\end{aligned}
$$

Le deuxième terme du membre de droite s'annule par intégration par parties, et comme

$$\begin{aligned}\{\{(x\cdot v),E\},E\} &= -(x\cdot v)\phi''_{f^0}(r) - 3\frac{(x\cdot v)}{r}\phi'_{f^0}(r)\\ &= -\frac{(x\cdot v)}{r^2}\left(\phi''_{f^0}(r)r^2 + 2\phi'_{f^0}(r)r\right) - \frac{(x\cdot v)}{r}\phi'_{f^0}(r)\\ &= -\frac{(x\cdot v)}{r^2}\left(r^2\phi'_{f^0}(r)\right)' - \frac{(x\cdot v)}{r}\phi'_{f^0}(r) = -(x\cdot v)\rho_{f^0}(r) - \frac{(x\cdot v)}{r}\phi'_{f^0}(r),\end{aligned}$$

on obtient pour le troisième terme

$$-\int_{\mathbb{R}^6} F'(E)\left(\frac{h^2}{(x\cdot v)}\right)\{\{(x\cdot v),E\},E\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} F'(E)h^2\left(\rho_{f^0} + \frac{\phi'_{f^0}}{r}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

et donc

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^6}\frac{|\{h,f^0\}|^2}{F'(E)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = -\int_{\mathbb{R}^6}(x\cdot v)^2F'(E)\left|\left\{\frac{h}{(x\cdot v)},f^0\right\}\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\\ -\int_{\mathbb{R}^6}F'(E)h^2\left(\rho_{f^0}+\frac{\phi'_{f^0}}{r}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

On conclut la preuve en combinant cette égalité avec l'inégalité précédente sur $\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla_x\phi_{\{h,f^0\}}|^2\,\mathrm{d}x$. □

3.6. Une inégalité de coercitivité précisée à la Weinstein pour les polytropes

Pour conclure cette section, nous allons maintenant considérer le modèle polytropique (14) et présenter l'analyse linéarisée rigoureuse effectuée dans **[53]**. Nous renvoyons à la section suivante pour la caractérisation variationnelle des polytropes de **[51]** qui est utilisée pour montrer la positivité au sens large de la fonctionnelle d'énergie libre du problème linéarisé, et nous montrons comment les auteurs de **[53]** en déduisent une inégalité de coercitivité précisée.

Nous présentons ce résultat et une ébauche de preuve car cette dernière contient l'une des idées de la méthode non-linéaire de **[57]** : l'inégalité de coercitivité sur l'opérateur de Schrödinger (28) ci-dessous, qui sera utilisée pour pouvoir traiter les perturbations non radiales dans le cas non-linéaire. Ce travail est inspiré de l'étude par Weinstein **[84, 85]** dans les années 1980 de la stabilité des solitons pour l'équation de Schrödinger.

On considère une solution stationnaire polytropique (14) avec $n = 1/(p-1)$ et $E_0 = -1$:

$$f^0 = F(E) = (-1-E)_+^{1/(p-1)} = \left(-1 - \frac{|v|^2}{2} - \phi_{f^0}\right)_+^{1/(p-1)} \tag{24}$$

pour $p > p_c = 9/7$ supérieur strictement à l'exposant critique que nous avons déjà rencontré dans l'inégalité d'interpolation de la proposition 2.1, ce qui redonne exactement la condition $n < 7/2$. On définit l'opérateur

$$\mathcal{M}h = \left(-\frac{h}{F'(E)} + \phi_h\right) 1_K$$

restreint au support K de f^0. Il est clair que

$$\langle \mathcal{M}h, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} = \mathcal{F}(h)$$

et que cet opérateur linéaire est symétrique dans $L^2(K, \mathrm{d}\mu)$ avec la mesure de référence $\mu = 1/|F'(E)|$. On peut donc reformuler la question de contrôler par en-dessous l'énergie libre en un *contrôle de coercitivité* sur l'opérateur $\mathcal{M}$.

Tout d'abord, nous admettons ici la positivité (au sens large) $\mathcal{M} \geq 0$ de cet opérateur pour des perturbations *qui ne modifient pas le hamiltonien* :

$$h \in L^2(K, d\mu) \quad \text{avec} \quad \int_{\mathbb{R}^6} hE \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} h\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_{f^0}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

Cette positivité découle de la caractérisation variationnelle de la proposition 4.1 par saturation d'inégalité de Sobolev de la section suivante.

Une fois cette positivité acquise, en s'inspirant de **[84]**, Lemou, Méhats et Raphaël quantifient la coercitivité de l'énergie libre de la manière suivante.

PROPOSITION 3.6. — *Pour $p_c < p < +\infty$, la forme quadratique $h \mapsto \langle \mathcal{M}h, h\rangle$ est continue et auto-adjointe sur $L^2(K, \mathrm{d}\mu)$, et il existe une constante δ ne dépendant que de p telle que*

$$(25) \qquad \langle \mathcal{M}h, h\rangle \geq \delta \int_K \frac{h^2}{|F'(E)|} - \frac{1}{\delta}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^6} hE\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\mathbb{R}^6} x_i h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right)^2\right].$$

On retrouve le résultat précédent (avec cependant une constante non constructive) lorsque $h = \{g, E\}$ et g impaire en v, mais l'analyse du défaut de coercitivité pour les perturbations qui ne sont pas sous cette forme est ici plus précise.

Ébauche de preuve. — On va raisonner par l'absurde. On définit $\mathcal{Z}$ l'ensemble des fonctions $h \in L^2(K, d\mu)$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}^6} hE\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} x_1 h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} x_2 h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} x_3 h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

On sait par la caractérisation variationnelle de la proposition 4.1 que $\langle \mathcal{M}h, h\rangle \geq 0$ pour $h \in \mathcal{Z}$. On suppose alors que

$$I := \inf_{h\in\mathcal{Z},\ \|h\|_{L^2(K,d\mu)}=1} \langle \mathcal{M}h, h\rangle = 0.$$

Étape 1 – *Construction d'un minimiseur.* On considère une suite minimisante $h_n \in \mathcal{Z}$. Par compacité faible, quitte à extraire, la suite h_n converge faiblement vers une fonction h_∞ dans $L^2(K, \, \mathrm{d}\mu)$. Par ellipticité de l'équation de Poisson, on a la convergence forte de $\nabla_x \phi_{h_n}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. De par la normalisation, on a

$$\langle \mathcal{M} h_n, h_n \rangle = 1 - \|\nabla_x \phi_{h_n}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0$$

d'où $\|\nabla_x \phi_{h_\infty}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1$ et la limite h_∞ n'est pas nulle.

Étape 2 – *Le minimiseur est dans le noyau de $\mathcal{M}$.* Par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on déduit du problème de minimisation sous contraintes ci-dessus que

$$\mathcal{M} h_\infty \in \mathrm{Vect}\left\{ \frac{h_\infty}{|F'(E)|}, x_1 1_K, x_2 1_K, x_3 1_K, E 1_K \right\}.$$

En considérant les intégrations de $\mathcal{M} h_\infty$ contre successivement h_∞, $\partial_{x_1} f^0$, $\partial_{x_2} f^0$, $\partial_{x_3} f^0$ et $x \cdot \nabla_v f^0 - 2v \cdot \nabla_v f^0$, on annule chacun des coefficients dans la décomposition selon cette famille vectorielle, et on déduit finalement que $\mathcal{M} h_\infty = 0$.

Étape 3 – *Étude du noyau de $\mathcal{M}$.* On montre que

$$\mathrm{Ker}\mathcal{M} = \mathrm{Vect}\left\{ \partial_{x_1} f^0, \partial_{x_2} f^0, \partial_{x_3} f^0 \right\}.$$

L'inclusion de ces trois vecteurs dans le noyau de $\mathcal{M}$ provient simplement de la dérivation par rapport à x_1, x_2 et x_3 de l'équation définissant la solution stationnaire

$$0 = \partial_{x_i} \left((f^0)^{p-1} + \frac{|v|^2}{2} + \phi_{f^0} + 1 \right) 1_K = \left(\frac{1}{F'(E)} \partial_{x_i} f^0 + \phi_{\partial_{x_i} f^0} \right) 1_K. \tag{26}$$

Pour l'inclusion réciproque, on considère l'équation

$$\frac{h}{F'(E)} = \phi_h \tag{27}$$

sur K, et l'on en déduit l'équation *réduite* suivante sur le potentiel par intégration en vitesse

$$\Delta_x \phi_h = \rho_h = \int_{\mathbb{R}^3} h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} F'(E) \phi_h \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v.$$

Si l'on définit le potentiel effectif

$$V_{f^0} := - \int_{\mathbb{R}^3} F'(E) \, \mathrm{d}v,$$

on fait donc apparaître une *équation de Schrödinger* stationnaire

$$\mathcal{A} \phi_h := \left(\Delta_x + V_{f^0} \right) \phi_h = 0. \tag{28}$$

Le noyau de cet opérateur $\mathcal{A}$ est alors étudié de manière fine par décomposition selon les harmoniques sphériques, avec pour résultat

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \mathrm{Vect}\left\{ \partial_{x_1} \phi_{f^0}, \partial_{x_2} \phi_{f^0}, \partial_{x_3} \phi_{f^0} \right\}.$$

On déduit donc que $\phi_h \in \mathrm{Vect}\left\{\partial_{x_1}\phi_{f^0}, \partial_{x_2}\phi_{f^0}, \partial_{x_3}\phi_{f^0}\right\}$, puis en utilisant (27) et (26) que $h \in \mathrm{Vect}\left\{\partial_{x_1} f^0, \partial_{x_2} f^0, \partial_{x_3} f^0\right\}$.

Étape 4 – *Conclusion.* Puisque $h \in \mathcal{Z}$, en intégrant la relation linéaire $h \in \mathrm{Vect}\left\{\partial_{x_1} f^0, \partial_{x_2} f^0, \partial_{x_3} f^0\right\}$ contre x_1, x_2 et x_3, on obtient successivement que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls, soit $h = 0$, ce qui aboutit à une contradiction. □

Mentionnons qu'au moyen de cette inégalité de coercitivité, Lemou, Méhats et Raphaël démontrent ensuite dans **[53]** un théorème de stabilité linéarisée qui énonce que, pour toute donnée initiale dans un « espace d'énergie » (correspondant au problème de minimisation non-linéaire), le semi-groupe linéarisé croît au plus en $O(t^2)$. Ils donnent également une décomposition de l'espace $L^2(K, d\mu)$ qui localise plus précisément les modes de croissance algébrique.

4. LA STABILITÉ NON-LINÉAIRE

Nous allons maintenant suivre le cheminement des différents travaux sur la stabilité non-linéaire. En dehors du dernier travail **[57]** que nous détaillerons, nous donnons seulement les étapes principales.

4.1. Premières approches variationnelles

Le grand succès de ce programme conduit par différents groupes indépendants est la preuve de la stabilité de tous les modèles polytropiques discutés précédemment. Les ingrédients communs à ces différentes approches sont :

(a) la caractérisation de la solution stationnaire f^0 étudiée comme un *état fondamental* (« ground state ») d'un problème de minimisation de la forme

$$\min_{\mathcal{V}(f)=\mathrm{cstes}} \mathcal{U}(f) \tag{29}$$

pour une certaine fonctionnelle $\mathcal{U}$ et un ensemble de contraintes $\mathcal{V}$, qui *sont préservées par l'évolution non-linéaire* ;

(b) la preuve d'une *propriété de séparation des états fondamentaux* : la solution stationnaire f^0 est isolée parmi les minimiseurs du problème de minimisation précédent ;

(c) la *compacité des suites minimisantes*, qui repose souvent sur une technique de concentration-compacité **[60, 59]**, sachant que la compacité doit être obtenue dans un sens assez fort pour permettre d'obtenir à la limite une solution stationnaire du système ;

(d) la preuve de la stabilité est alors fondée sur un raisonnement par l'absurde : on considère une suite minimisante qui ne reste pas proche de la solution stationnaire f^0, puis en appliquant (c) on aboutit, à la limite, à un état stationnaire qui minimise le problème (29) mais qui est différent de f^0, ce qui contredit (a)-(b).

L'idée d'utiliser une fonctionnelle d'énergie-Casimir bien choisie et d'étudier ses points critiques et sa convexité a été introduite pour les équations d'Euler incompressibles en dimension 2 par Arnold **[5, 6, 7]**, et elle a ensuite été appliquée avec succès aux équations de Vlasov-Poisson pour les plasmas dans **[38, 73]** (voir également les références incluses dans **[38]** pour les travaux antérieurs de physique sur la stabilité formelle pour les plasmas, ainsi que **[27, 28]** pour des travaux mathématiques dans le cas de plasmas magnétiques).

En ce qui concerne le système de Vlasov-Poisson gravitationnel, le premier travail précurseur en ce sens est dû à Wolansky **[87]** : ce dernier caractérise l'équilibre comme le minimiseur d'une fonctionnelle d'énergie-Casimir

$$\min_{\|f\|_{L^1}=1\ \&\ f\geq 0} \mathcal{H}_{\mathscr{C}}(f) \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_{\mathscr{C}}(f) = \mathcal{H}(f) + \int_{\mathbb{R}^6} \mathscr{C}(f)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v.$$

Cette approche a été développée de manière systématique par Guo et Rein **[29, 32, 74]** et a permis d'obtenir la stabilité des polytropes (14) pour $0 < n \leq 3/2$. Les cas $3/2 < n \leq 7/2$ ont ensuite été étudiés dans **[30, 33, 75, 79, 35]**. En particulier les articles **[30, 33]** modifient le problème variationnel de la façon suivante :

$$\min \mathcal{H}(f) \quad \text{sous les contraintes} \quad f \geq 0,\ \frac{n}{n+1}\|f\|^{1+1/n}_{L^{1+1/n}(\mathbb{R}^6)} + \left(\frac{7}{2} - n\right)\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = M.$$

Parallèlement et de manière légèrement différente à ces travaux, Dolbeault, Sánchez et Soler **[21]** introduisent ensuite un problème de minimisation différent du type

$$\min \mathcal{H}(f) \quad \text{sous les contraintes} \quad f \geq 0,\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = M,\ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \leq 1.$$

Ce problème de minimisation se réécrit de manière équivalente et naturelle par saturation d'inégalité fonctionnelle de type Poincaré reliant l'énergie potentielle, l'énergie cinétique, et les normes utilisées :

$$\min \frac{\mathcal{H}_{\mathrm{cin}}(f)}{\mathcal{H}_{\mathrm{pot}}(f)} \quad \text{sous les contraintes} \quad f \geq 0,\ \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = M,\ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \leq 1.$$

Cette approche a permis de traiter le cas formel limite $n = 0$ dans (14) (en plus de cas de polytropes anisotropes que nous n'évoquons pas ici). Sánchez et Soler **[77]** ont ensuite généralisé cette approche à un espace de contrainte $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = M$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^6)} \leq 1$, et ont pu montrer la stabilité au sens de la distance $L^1(\mathbb{R}^6)$ pour les polytropes (14) avec $0 \leq n < 7/2$. (4) Un des apports de ces travaux semble

(4) Nous renvoyons également au travail **[14]** qui étudie selon une stratégie proche les propriétés de stabilité orbitale pour l'équation de Nordström-Vlasov dans un cadre relativiste.

conceptuel : montrer que le problème variationnel sous-jacent est relié à des inégalités de type Sobolev optimales.

Simultanément, Lemou, Méhats et Raphaël **[49, 51]** caractérisent les polytropes à partir d'une inégalité de type Sobolev optimale correspondant aux inégalités d'interpolation de l'équation non-linéaire. Le problème de minimisation en terme de fonctionnelle d'énergie et d'espace de contraintes est équivalent à celui considéré par Sánchez et Soler. Mais ils font ainsi le lien avec l'inégalité d'interpolation de la proposition 2.1, et ils effectuent aussi un retour conceptuel à la méthode originelle de Cazenave et Lions **[15]** pour l'étude de la stabilité des solitons par concentration-compacité pour l'équation de Schrödinger.

Ils démontrent la proposition suivante, que nous avons déjà évoquée et utilisée dans l'étude linéarisée pour la preuve de la proposition 3.6.

PROPOSITION 4.1 ([**49, 51**]). — *Soient $p \in]p_c, +\infty[$ et f^0 un polytrope défini par* (24). *Alors le problème de minimisation*

$$\min_{f\in\mathcal{E},\ f\neq 0} \frac{\||v|^2 f\|^{\theta_1}_{L^1(\mathbb{R}^6)} \|f\|^{\theta_2}_{L^p(\mathbb{R}^6)} \|f\|^{\theta_3}_{L^1(\mathbb{R}^6)}}{\|\nabla_x \phi_f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}} \quad \textit{avec} \quad \theta_1 = \frac{1}{2},\ \theta_2 = \frac{p}{3(p-1)},\ \theta_3 = \frac{(7p-9)}{6(p-1)}$$

(le dernier coefficient est bien positif du fait que $p > p_c = 9/7$) est atteint sur la famille à quatre paramètres

$$\gamma f^0\left(\frac{x-x_0}{\lambda}, \mu v\right), \quad \gamma \in \mathbb{R}^*_+,\ \lambda \in \mathbb{R}^*_+,\ \mu \in \mathbb{R}^*_+,\ x_0 \in \mathbb{R}^3.$$

En procédant selon les grandes lignes de la stratégie décrite plus haut, les auteurs démontrent ensuite dans **[51]** la stabilité des polytropes (14) pour $0 < n < 7/2$.

Cette approche variationnelle a pu traiter de manière satisfaisante les modèles polytropiques. Elle semblait cependant impuissante à traiter des modèles plus généraux, et en particulier le modèle de King. La difficulté est que pour les types de problèmes de minimisation que l'on vient d'énumérer, la propriété de séparation des états fondamentaux (b) décrite plus haut n'est en général plus vérifiée, sans même parler de la propriété (c) de compacité des suites minimisantes.

4.2. Approche directe non-variationnelle par linéarisation

Il existe essentiellement deux manières d'aborder la question de la stabilité d'un système d'évolution non-linéaire : d'une part l'approche variationnelle où l'on exprime la solution stationnaire comme solution d'un problème de minimisation qui est invariant le long de l'évolution, et d'autre part l'approche « directe » par linéarisation et contrôle du reste. Nous allons maintenant parler des travaux s'inscrivant dans cette dernière approche.

Dans le cas de cette approche directe, il faut tout d'abord quantifier précisément les propriétés de stabilité du système linéarisé. L'inégalité de coercitivité d'Antonov

(23) est un point de départ naturel pour cela. Cependant il faut ensuite surmonter deux difficultés importantes :

- il faut contrôler les termes d'ordre supérieur ou égal à trois dans le développement de Taylor de la fonctionnelle d'énergie-Casimir au voisinage de la solution stationnaire f^0 considérée ;
- et l'autre difficulté est que l'inégalité de coercitivité d'Antonov (23) n'est valide que pour les perturbations dynamiquement accessibles de la forme $h = \{g, f^0\}$, et que l'on souhaiterait s'affranchir de cette restriction.

La première tentative d'utiliser cette approche remonte à Wan [**81**] mais la preuve semble incomplète. La deuxième tentative du même auteur [**82**] est plus aboutie mais semble reposer sur une hypothèse non réaliste de positivité de la fonctionnelle $\mathscr{F}$ pour toute perturbation h qui exclut la plupart des modèles physiques.

Le premier article traitant du modèle de King, et suivant cette approche directe, est dû à Guo et Rein [**34**]. Les ingrédients clés de ce travail sont :

- la définition d'une classe de perturbation à symétrie sphérique

$$\mathscr{S}_{f^0} = \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^6),\ f = f(E,L) \geq 0 \ \text{ tel que} \\ \forall\, \mathscr{C} \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \text{ avec } \mathscr{C}(0,L) \equiv \partial_1 \mathscr{C}(0,L) \equiv 0,\ \partial_1^2 \mathscr{C} \text{ borné, alors} \\ \int_{\mathbb{R}^6} \mathscr{C}(f,L)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} \mathscr{C}(f^0,L)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v \Big\}$$

  qui est : d'une part *stable par le système d'évolution non-linéaire* du fait que L est conservé le long des trajectoires et donc les fonctionnelles $\int_{\mathbb{R}^6} \mathscr{C}(f,L)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}v$ sont des invariants du système et, d'autre part, incluse dans les perturbations de la forme $h = \{g, f^0\}$ (ce dernier point est démontré en résolvant le système différentiel ordinaire associé) ;
- la démonstration par contradiction d'une propriété de convexité stricte de la fonctionnelle d'énergie-Casimir $\mathscr{H}$ au voisinage de f^0 :

$$\mathscr{H}(f) - \mathscr{H}(f^0) \geq C_0 \|\nabla_x \phi_f - \nabla_x \phi_{f^0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

  pour une constante $C_0 > 0$ et avec

$$d(f,f^0) := \mathscr{H}(f) - \mathscr{H}(f^0) + \|\nabla_x \phi_f - \nabla_x \phi_{f^0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \quad \text{assez petit.}$$

Il y a deux limitations importantes dans les résultats ainsi obtenus. D'une part les perturbations considérées sont restreintes à la classe $\mathscr{S}_{f^0}$, qui est « trop petite », et en particulier incluses dans l'ensemble des fonctions équimesurables à f^0. D'autre part, on aimerait bien sûr s'affranchir totalement de la contrainte de symétrie sphérique pour ces perturbations.

La première de ces limitations a ensuite été levée dans le travail **[31]** de Guo et Lin. Ils démontrent ainsi la stabilité du modèle de King par petite perturbation à symétrie sphérique. Les éléments principaux de leur travail sont les suivants.

– Ils considèrent la fonctionnelle d'énergie-Casimir

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f) = \mathcal{H}(f) + \int_{\mathbb{R}^6} \mathcal{C}(f)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{C}(f) := (1+f)\ln(1+f) - 1 - f$$

et la distance associée

$$d_{\mathcal{C}}(f, f^0) := \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f) - \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f^0) + \|\nabla_x \phi_f - \nabla_x \phi_{f^0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

– Afin de montrer la coercitivité de cette fonctionnelle d'énergie-Casimir au voisinage de f^0 sans faire apparaître de termes d'ordre supérieur, ils font appel à une inégalité de dualité convexe élémentaire mais astucieusement utilisée, qui permet de contrôler par en dessous

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f) - \mathcal{H}_{\mathcal{C}}(f^0) \geq \text{cste} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^6} F'(E) |\phi_{f-f^0} - \mathcal{P}\phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \right) \\ - \int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}\phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x \;- \cdots$$

où les trois points désignent des termes contrôlables par les invariants du système, et l'opérateur $\mathcal{P}$ est le projecteur sur le noyau de $D := v \cdot \nabla_x - \nabla_x \phi_{f^0} \cdot \nabla_v$ (c'est un opérateur de moyennisation sur chacun des tores invariants du flot complètement intégrable associé à cet opérateur de transport).

– Malheureusement le terme négatif $-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}\phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x$ dans l'équation ci-dessus semble difficilement contrôlable, aussi les auteurs ont-ils l'idée d'approcher l'opérateur $\mathcal{P}$ par une suite bien construite d'opérateurs $\mathcal{P}_\ell$ de rang fini, et de remplacer $\mathcal{P}$ par $\mathcal{P}_\ell$ dans l'argument ci-dessus. Le terme négatif $-\int_{\mathbb{R}^3} |\mathcal{P}_\ell \phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x$ est alors facilement contrôlable en utilisant un nombre fini de fonctionnelles de Casimir invariantes.

– Enfin il reste à étudier la coercitivité du terme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x \phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^6} F'(E) |\phi_{f-f^0} - \mathcal{P}\phi_{f-f^0}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \right).$$

Cette dernière implique sans mal une estimation de coercitivité du même terme avec $\mathcal{P}_\ell$ à la place de $\mathcal{P}$, pour ℓ assez grand. Cela revient à étudier la positivité de l'opérateur

$$\mathcal{A}\phi = -\Delta_x \phi + \int_{\mathbb{R}^3} F'(E)(\phi - \mathcal{P}\phi)\,\mathrm{d}v$$

agissant uniquement sur le potentiel ϕ. En remarquant simplement que

$$\mathrm{Im}(1 - \mathcal{P}) \perp \mathrm{Ker}(D) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Im}(D)^\perp,$$

on déduit facilement que $(\phi - \mathscr{P}\phi) = \{h, f^0\}$ avec h impaire, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de coercitivité d'Antonov (23), et de conclure.

Ce travail intéressant semble pouvoir se généraliser à des modèles sphériques décroissants plus généraux que le modèle de King. La seconde limitation de cette méthode, c'est-à-dire le fait de ne considérer que des perturbations à symétrie sphérique, semble par contre plus sévère. Un des apports principaux du travail [**57**], que nous allons maintenant discuter, est de s'être affranchi de cette limitation.

4.3. Nouvelle approche variationnelle par réarrangement

Après ce détour par une approche non-variationnelle, nous allons maintenant revenir à une approche variationnelle, mais sous un angle nouveau. On voit qu'un défaut de l'approche variationnelle par énergie-Casimir est qu'elle semble impuissante à reformuler sous forme de problème de minimisation certains modèles stationnaires décroissants. Cependant, dans le même temps, l'approche directe par linéarisation semble limitée par l'inégalité de coercitivité d'Antonov elle-même et par les difficultés inhérentes aux contrôles des termes d'ordre supérieur dans le développement du hamiltonien.

Le travail [**55**] constitue une première avancée en introduisant l'idée d'exploiter les propriétés d'équimesurabilité du flot : même si la propriété de séparation des états fondamentaux n'est pas vérifiée pour le problème de minimisation avec un nombre fini de contraintes, l'équimesurabilité de la solution à sa donnée initiale permet de prouver dans certains cas une propriété de séparation *locale*. Finalement dans les travaux [**56, 57**], Lemou, Méhats et Raphaël résolvent complètement ces contradictions. Ils prouvent le théorème suivant dans le cas de modèles sphériques isotropes.

THÉORÈME 4.2 ([**57**]). — *Soit $f^0 = F(E) \geq 0$ une solution stationnaire continue, non nulle, à support compact, du système (8)-(9), pour laquelle il existe $E_0 < 0$ tel que $F(E) = 0$ pour $E \geq E_0$, F est C^1 sur $]-\infty, E_0[$ et $F' < 0$ sur $]-\infty, E_0[$.*

Alors f^0 est orbitalement stable au sens suivant : pour tous $M > 0$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute donnée initiale

$$f_{\text{in}} \in \mathscr{E} := \{g \geq 0,\ g \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^6),\ |v|^2 g \in L^1(\mathbb{R}^6)\}$$

telle que

$$\|f_{\text{in}} - f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \eta, \quad \mathscr{H}(f_{\text{in}}) \leq \mathscr{H}(f^0) + \eta, \quad \|f_{\text{in}}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} \leq \|f^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^6)} + M,$$

alors toute solution faible issue de cette donnée initiale vérifie

$$\forall t \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^6} \left|(1 + |v|^2)\big(f(t,x,v) - f^0(x - z(t), v)\big)\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \varepsilon.$$

Avant de détailler la preuve, donnons les idées essentielles :

- en s'inspirant d'idées introduites dans la littérature physique **[25, 65, 86, 2]** les auteurs démontrent que le hamiltonien possède une propriété de monotonie par rapport aux réarrangements *selon l'énergie microscopique* ;
- après ce réarrangement, on est alors ramené à un *problème variationnel de minimisation sur le potentiel gravitationnel uniquement*, pour lequel la solution stationnaire est bien un minimum isolé ;
- enfin pour ce problème de minimisation réduit, ils démontrent une inégalité de coercitivité d'Antonov généralisée dans ce contexte, et font le lien entre la partie radiale de cette inégalité et une inégalité de type Poincaré ;
- la fin de la preuve est basée sur un argument de compacité pour des suites minimisantes « généralisées » dont le réarrangement selon l'énergie microscopique est une suite minimisante pour le problème réduit sur le champ gravitationnel, et la compacité est extraite à partir de la coercitivité de l'étape précédente.

Ce travail met donc à jour une nouvelle structure variationnelle « cachée sous les réarrangements selon l'énergie microscopique », pour laquelle l'approche variationnelle est bien plus simple et naturelle. Il révèle également le lien entre la coercitivité de ce problème de minimisation réduit et un problème d'inégalité fonctionnelle de type Poincaré.

4.3.1. *Réarrangement selon l'énergie microscopique.* — Rappelons tout d'abord la notion classique de *réarrangement symétrique* (voir par exemple [**58**, Chapitre 3]). Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^6$ mesurable, on définit son réarrangement symétrique A^* comme étant la boule ouverte centrée en zéro et de même volume que A (pour une norme donnée sur $\mathbb{R}^6$). Étant donnée une fonction $f \geq 0$ intégrable sur $\mathbb{R}^6$, on définit alors son réarrangement symétrique f^* comme étant la fonction positive sur $\mathbb{R}^6$ dont les ensembles de niveau supérieur sont obtenus par réarrangement symétrique des ensembles de niveau supérieur correspondants de f, ce qui donne la formule suivante par intégration par tranche

$$f^*(x,v) = \int_0^{+\infty} 1^*_{\{f \geq s\}} \, \mathrm{d}s \qquad \text{avec} \qquad 1^*_A = 1_{A^*}.$$

La fonction f^* est alors radialement symétrique, décroissante, et équimesurable à f. Rappelons la propriété élémentaire suivante sur les réarrangements symétriques.

LEMME 4.3. — *Pour $f \geq 0$ intégrable sur $\mathbb{R}^6$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^6} f^*(x,v) |(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f(x,v) |(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v$$

où $|(x,v)|_{\mathbb{R}^6}$ désigne la norme considérée sur $\mathbb{R}^6$.

Démonstration. — La preuve est très simple, nous la rappelons pour éclairer la suite. Pour deux ensembles mesurables $A, B \subset \mathbb{R}^6$ de volume fini avec $|A| \leq |B|$ (l'autre cas étant symétrique), on a

$$\int_{\mathbb{R}^6} 1_A 1_B \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v = |A \cap B| \leq |A| = |A^*| = |A^* \cap B^*| = \int_{\mathbb{R}^6} 1_A^* 1_B^* \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v.$$

Or pour $s \geq 0$ donné on a $1^*_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \leq s} = 1_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \leq s}$, et on déduit en utilisant la précédente inégalité et en intégrant par tranche

$$\int_{\mathbb{R}^6} f 1_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \leq s} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f^* 1_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} \leq s} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v.$$

Puisque $\int_{\mathbb{R}^6} f \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} f^* \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v$ on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^6} f^* 1_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} > s} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f 1_{|(x,v)|_{\mathbb{R}^6} > s} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v.$$

En intégrant finalement selon $s \in [0, +\infty[$, on en déduit le résultat. □

On introduit maintenant de manière similaire le *réarrangement selon l'énergie microscopique*

$$E_\phi := \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi(x) \right)$$

d'un potentiel donné ϕ sur $\mathbb{R}^3$ de la manière suivante. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^6$ mesurable on définit $A^{*\phi}$ son réarrangement selon l'énergie microscopique E_ϕ comme étant la « boule d'énergie » ouverte

$$A^{*\phi} = \{(x,v) \mid E_\phi(x,v) < E_A\}$$

avec E_A choisi tel que $|A^{*\phi}| = |A|$. Il est facile de voir que

$$E \to |\{(x,v) \mid E_\phi(x,v) < E\}|$$

est une bijection de $[\min E_\phi, 0[$ sur $\mathbb{R}_+$. Étant donnée une fonction $f \geq 0$ intégrable à support compact sur $\mathbb{R}^6$, on définit alors $f^{*\phi}$ son réarrangement selon l'énergie microscopique E_ϕ comme étant la fonction positive sur $\mathbb{R}^6$ dont les ensembles de niveau supérieur sont obtenus par réarrangement selon l'énergie microscopique des ensembles de niveau supérieur correspondants de f :

$$f^{*\phi}(x,v) = \int_0^{+\infty} 1^{*\phi}_{\{f \geq s\}} \, \mathrm{d}s \quad \text{avec} \quad 1^{*\phi}_A = 1_{A^{*\phi}}.$$

La fonction $f^{*\phi}$ est alors une fonction de E_ϕ, à support compact, décroissante en l'énergie microscopique E_ϕ, et équimesurable à f. On a la propriété suivante qui rappelle le lemme élémentaire ci-dessus, et dont nous nous servirons par la suite :

LEMME 4.4. — *Pour $f \geq 0$ intégrable à support compact sur $\mathbb{R}^6$ on a*

$$\int_{\mathbb{R}^6} f^{*\phi}(x,v)E_\phi(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f(x,v)E_\phi(x,v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

Démonstration. — En raisonnant comme précédemment on a

$$\int_{\mathbb{R}^6} 1_A 1_B\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} 1_A^{*\phi} 1_B^{*\phi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

D'où, pour $s \in [-\min E_\phi, 0[$, puisque $1^{*\phi}_{E_\phi(x,v)\leq s} = 1_{E_\phi(x,v)\leq s}$, en intégrant par tranche

$$\int_{\mathbb{R}^6} f 1_{E_\phi(x,v)\leq s}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f^{*\phi} 1_{E_\phi(x,v)\leq s}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

et puisque $\int_{\mathbb{R}^6} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} f^{*\phi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^6} f^{*\phi} 1_{E_\phi(x,v)>s}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f 1_{E_\phi(x,v)>s}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

En intégrant finalement selon $s \in [-\min E_\phi, 0[$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^6} f^{*\phi}\left(E_\phi(x,v) - \min E_\phi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq \int_{\mathbb{R}^6} f\left(E_\phi(x,v) - \min E_\phi\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

d'où le résultat. □

On va par la suite utiliser le réarrangement de f *selon l'énergie microscopique créée par la fonction f elle-même*, que nous noterons $\hat{f} = f^{*\phi_f}$ avec, comme précédemment, $\phi_f = -(1/(4\pi|x|)) * \rho_f$. On voit que l'on obtient ainsi une opération de réarrangement $f \to \hat{f}$ *très fortement non-linéaire.* Remarquons immédiatement que la solution stationnaire sphérique est un point fixe de ce réarrangement non-linéaire : $\hat{f}^0 = (f^0)^{*\phi_{f^0}} = f^0$.

4.3.2. *Monotonie du hamiltonien et hamiltonien réduit.* — On définit la fonctionnelle

$$\mathcal{J}_{f^*}(\phi) := \mathcal{H}(f^{*\phi}) + \frac{1}{2}\|\nabla_x\phi - \nabla_x\phi_{f^{*\phi}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

et on montre la propriété de monotonie suivante.

PROPOSITION 4.5. — *Si l'on considère $f \in \mathcal{E}$ et $\hat{f} = f^{*\phi_f}$, alors*

$$\mathcal{H}(f) \geq \mathcal{J}_{f^*}(\phi_f) \geq \mathcal{H}(\hat{f})$$

avec égalité si et seulement si $f = \hat{f}$.

Ébauche de preuve. — La preuve repose sur le lemme précédent. Par un calcul que nous avons déjà fait

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(g) + \frac{1}{2}\|\nabla_x\phi_f - \nabla_x\phi_g\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_{\mathbb{R}^6}\left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_f(x)\right)(f-g)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

pour deux fonctions $f, g \in \mathscr{E}$, d'où avec $g = \hat{f}$:

$$\mathscr{H}(f) = \mathscr{J}_{f^*}(\phi_f) + \int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_f(x) \right) (f - \hat{f}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v$$

et l'on conclut grâce au lemme précédent appliqué à

$$\int_{\mathbb{R}^6} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_f(x) \right) (f - \hat{f}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v \geq 0.$$

Le cas d'égalité se traite en étudiant le cas d'égalité dans l'inégalité de monotonie du réarrangement selon l'énergie microscopique. □

Il s'avère que la différence $\mathscr{J}_{f^*} - \mathscr{J}_{f^0}$ est facilement contrôlable par des normes sans dérivée :

$$\mathscr{J}_{f^*}(\phi) - \mathscr{J}_{f^0}(\phi) \geq -\|\phi_f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|f^* - (f^0)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^6)},$$

et l'on peut ainsi se contenter d'étudier la coercitivité de la fonctionnelle $\mathscr{J}_{f^0}$. Nous noterons $\mathscr{J}(\phi) := \mathscr{J}_{f^0}(\phi)$ et nous appellerons cette fonctionnelle *hamiltonien réduit* ; elle n'agit que sur le potentiel ϕ.

4.3.3. *Inégalité de coercitivité d'Antonov généralisée pour le hamiltonien réduit.* — On va maintenant étudier les propriétés de convexité de $\mathscr{J}$ au voisinage de ϕ_{f^0}, et ainsi montrer que ϕ_{f^0} est un *minimum local* de $\mathscr{J}$. On définit un espace de potentiels admissibles

$$\mathscr{X} := \left\{ \phi \in C^0(\mathbb{R}^3) \quad | \quad \phi \leq 0, \ \lim_{\infty} \phi = 0, \ \nabla_x \phi \in L^2(\mathbb{R}^3), \ \inf_{x \in \mathbb{R}^3} (1 + |x|)|\phi(x)| > 0 \right\}.$$

On peut alors montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 4.6. — *Il existe des constantes c_0, $\delta_0 > 0$ et une application continue $\phi \to z_\phi$ de $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ (l'espace de Sobolev homogène) dans $\mathbb{R}^3$ telles que pour $\phi \in \mathscr{X}$ tel que*

$$\inf_{z \in \mathbb{R}^3} \left[\|\phi - \phi_{f^0}(\cdot - z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla_x \phi - \nabla_x \phi_{f^0}(\cdot - z)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \right] < \delta_0$$

alors

$$\mathscr{J}(\phi) - \mathscr{J}(\phi_{f^0}) \geq c_0 \|\nabla_x \phi - \nabla_x \phi_{f^0}(\cdot - z_\phi)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Ébauche de preuve. — On décompose la démarche en plusieurs étapes.

Étape 1 : *Développement de Taylor.* La première phase calculatoire est d'écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $\mathscr{J}$ avec un reste contrôlé explicitement :

$$\mathscr{J}(\phi) - \mathscr{J}(\phi_{f^0}) = \frac{1}{2} D^2 \mathscr{J}(\phi_{f^0})(\phi - \phi_{f^0}, \phi - \phi_{f^0}) + o\left(\|\phi - \phi_{f^0}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\right) \|\nabla_x \phi - \nabla_x \phi_{f^0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

avec le terme d'ordre 1 qui s'annule et

$$D^2 \mathscr{J}(\phi_{f^0})(h, h) := \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla_x h|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^6} |F'(E)| \left[h(x) - (\mathscr{P} h)(x, v) \right]^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}v$$

où l'on rappelle que, sans autre précision, $E = E_{\phi_{f^0}} = (|v|^2/2 + \phi_{f^0}(x))$, et la projection $\mathscr{P}$ est définie par

$$(\mathscr{P}h)(x,v) := \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_{f^0}(x) - \phi_{f^0}(y)\right)_+^{1/2} h(y)\,\mathrm{d}y}{\int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|v|^2}{2} + \phi_{f^0}(x) - \phi_{f^0}(y)\right)_+^{1/2} \mathrm{d}y}.$$

C'est un opérateur de projection sur les fonctions de E uniquement. Dans le cas radial on retrouve ainsi l'opérateur de projection sur le noyau de l'opérateur $v \cdot \nabla_x - \nabla_x \phi_{f^0} \cdot \nabla_v$ que nous avons déjà rencontré dans le travail **[31]**.

Étape 2 : *Inégalité d'Antonov généralisée.* Si l'on définit

$$\mathscr{L}h = -\Delta_x h - \int_{\mathbb{R}^3} |F'(E)|(1-\mathscr{P})\,\mathrm{d}v$$

on obtient

$$\langle \mathscr{L}h, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = D^2\mathscr{J}(\phi_{f^0})(h,h)$$

et l'on ramène le problème à l'étude de l'opérateur $\mathscr{L}$; on a alors la proposition suivante.

Proposition 4.7. — *L'opérateur $\mathscr{L}$ est positif, c'est une perturbation compacte du laplacien sur $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$, son noyau est donné par*

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{L}) = \mathrm{Vect}\left\{\partial_{x_1}\phi_{f^0}, \partial_{x_2}\phi_{f^0}, \partial_{x_3}\phi_{f^0}\right\}$$

et on a donc

$$\forall\, h \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3), \quad \langle \mathscr{L}h, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq c_0 \|\nabla_x h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{1}{c_0}\sum_{i=1}^3 \left(\int_{\mathbb{R}^3} h\Delta_x(\partial_{x_i}\phi_{f^0})\,\mathrm{d}x\right)^2$$

pour une certaine constante $c_0 > 0$.

On décompose h en partie radiale et complémentaire orthogonal

$$h = h_0 + h_1, \quad h_0 \in \dot{H}^1_{rad}(\mathbb{R}^3),\ h_1 \in \left(\dot{H}^1_{rad}(\mathbb{R}^3)\right)^{\perp}.$$

La positivité selon la composante h_1 est plus simple à traiter car $\Pi h_1 = 0$ et son étude se ramène donc à celle de l'opérateur de Schrödinger $\mathscr{A}$ que nous avons déjà étudié plus haut dans la preuve de la proposition 3.6. Le noyau $\mathrm{Ker}(\mathscr{L})$ de l'énoncé s'en déduit en particulier.

Sur la composante radiale h_0 on a l'inégalité

$$\forall\, h \in \dot{H}^1_{rad}(\mathbb{R}^3),\ h \neq 0, \quad \langle \mathscr{L}h, h\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} > 0.$$

Cette propriété peut se démontrer comme dans la preuve de Guo et Lin **[31]** que nous avons discutée précédemment à la sous-section 4.2, en montrant qu'elle se réduit à l'inégalité de coercitivité d'Antonov démontrée à la proposition 3.5.

Lemou, Méhats et Raphaël proposent une autre preuve intéressante de cette propriété et de la proposition 3.5, en faisant le parallèle avec la démonstration d'une *inégalité de type Poincaré.* Ils adaptent la stratégie de preuve de Hörmander [**40, 39**], et utilisent une inégalité fonctionnelle de type Hardy.

Donnons l'idée générale de cet argument. On introduit l'opérateur suivant sur les fonctions radiales, exprimé dans les variables E et r :

$$Tf(E,r) = \frac{1}{r^2\sqrt{2(E-\phi_{f^0}(r))}}\partial_r f = \frac{1}{r^2|v|}\partial_r f,$$

et on vérifie que $\mathscr{P}h = 0$ implique $h = T\tilde{h}$ pour un certain $\tilde{h}$. On calcule alors par intégration par parties et inégalité de Cauchy-Schwarz (un argument d'approximation supplémentaire est nécessaire, que nous n'évoquons pas ici)

$$\int_{\mathbb{R}^6} |F'(E)|(h-\mathscr{P}h)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \le \|\nabla_x h\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \left(3\int_{\mathbb{R}^6} \rho_{f^0}(r)\frac{\tilde{h}^2}{4r^4(E-\phi_{f^0}(r))^2}|F'(E)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right)^{1/2}.$$

On montre alors l'inégalité de type Hardy suivante

$$\left(3\int_{\mathbb{R}^6}\left(\rho_{f^0}(r)+\frac{(\phi_{f^0})'(r)}{r}\right)\frac{\tilde{h}^2}{4r^4(E-\phi_{f^0}(r))^2}|F'(E)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v\right) \le \int_{\mathbb{R}^6}|F'(E)||T\tilde{h}|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v,$$

ce qui, combiné avec l'inégalité précédente, donne

$$\|\nabla_x h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \int_{\mathbb{R}^6}|F'(E)|(h-\mathscr{P}h)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \ge 3\int_{\mathbb{R}^6}\frac{(\phi_{f^0})'(r)}{r}\frac{\tilde{h}^2}{4r^4(E-\phi_{f^0}(r))^2}|F'(E)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

et conclut la preuve de positivité. L'inégalité de Hardy se démontre en remarquant que

$$(T\tilde{h})^2 = T\left(\tilde{h}_1^2\tilde{h}_2 T\tilde{h}_2\right) - \frac{T^2\tilde{h}_2}{\tilde{h}_2}\tilde{h}^2 \qquad \text{avec} \qquad \tilde{h} = \tilde{h}_1\tilde{h}_2,$$

puis

$$-\frac{T^2\tilde{h}_2}{\tilde{h}_2} = \frac{3}{4r^4(E-\phi_{f^0}(r))^2}\left(\rho_{f^0}(r)+\frac{\phi_{f^0}(r)}{r}\right) \qquad \text{pour} \qquad \tilde{h}_2 = r^3(2(E-\phi_{f^0}(r)))^{3/2}.$$

Étape 3 : *Traitement du noyau par modulation.* On ajuste finalement la fonction de translation z_ϕ au moyen d'un théorème des fonctions implicites pour annuler les défauts de coercitivité, *i.e.*, les termes négatifs dans la proposition ci-dessus. □

4.3.4. *Compacité des suites minimisantes et résolution de la conjecture.* — On peut montrer la compacité de certaines suites minimisantes généralisées f_n au sens suivant.

PROPOSITION 4.8. — *Si $f_n \in \mathscr{E}$ vérifie*

$$\sup_{n\ge 0}\inf_{z\in\mathbb{R}^3}\left[\|\phi_{f^n}-\phi_{f^0}(\cdot-z)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \|\nabla_x\phi_{f^n}-\nabla_x\phi_{f^0}(\cdot-z)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right] < \delta_0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n^* - (f^0)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = 0, \quad \liminf_{n\to\infty} \mathcal{H}(f_n) \leq \mathcal{H}(f^0),$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} \left|(1+|v|^2)\big(f_n(x,v) - f^0(x - z_{\phi_{f^n}}, v)\big)\right| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

Ébauche de preuve. — La preuve est faite en deux étapes. Tout d'abord le contrôle de coercitivité précédent implique sans difficultés que

$$\lim_{n\to\infty} \|\nabla_x \phi_{f^n} - \nabla_x \phi_{f^0}(\cdot - z_{\phi_{f^n}})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Ensuite on note $\bar{f}_n(x,v) = f_n(x + z_{\phi_{f^n}}, v)$ et l'on revient au hamiltonien complet en utilisant l'identité

$$\mathcal{H}(\bar{f}_n) - \mathcal{H}(f^0) + \frac{1}{2}\|\nabla_x \phi_{\bar{f}^n} - \nabla_x \phi_{f^0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(\bar{f}_n - f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

À partir des hypothèses et de la convergence déjà démontrée, on a

$$\begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \big(\mathcal{H}(\bar{f}_n) - \mathcal{H}(f^0)\big) = \limsup\limits_{n\to\infty} \big(\mathcal{H}(f_n) - \mathcal{H}(f^0)\big) \leq 0, \\[2ex] \|\nabla_x \phi_{\bar{f}^n} - \nabla_x \phi_{f^0}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \|\nabla_x \phi_{f^n} - \nabla_x \phi_{f^0}(\cdot - z_{\phi_{f^n}})\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \to 0, \end{cases}$$

et on en déduit

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(\bar{f}_n - f^0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq 0.$$

L'hypothèse $(f_n)^* \to (f^0)^*$ implique par ailleurs

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(f^0 - \bar{f}_n^{*\phi_{f^0}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0$$

d'où l'on déduit

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(\bar{f}_n - \bar{f}_n^{*\phi_{f^0}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \leq 0.$$

De par la monotonie du réarrangement $\int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(\bar{f}_n - \bar{f}_n^{*\phi_{f^0}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v \geq 0$, on en déduit finalement

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} E_{\phi_{f^0}}(\bar{f}_n - \bar{f}_n^{*\phi_{f^0}})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = 0.$$

Il suffit ensuite de montrer que la saturation de cette inégalité de réarrangement, combinée à l'hypothèse $(f_n)^* \to (f^0)^*$, implique que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} = 0.$$

En combinant cette convergence avec l'hypothèse de limite supérieure sur le hamiltonien ainsi que la convergence du potentiel, on obtient finalement la convergence de l'énergie cinétique

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^6} |v|^2 f^0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$$

ce qui conclut la preuve de la proposition 4.8. □

La fin de la preuve du théorème 4.2 se fait ensuite en combinant la proposition 4.8, l'inégalité d'interpolation de la proposition 2.1, ainsi que la contractivité du réarrangement symétrique $\|f^* - (f^0)^*\|_{L^1(\mathbb{R}^6)} \leq \|f - f^0\|_{L^1(\mathbb{R}^6)}$.

5. CONCLUSION ET PROBLÈMES OUVERTS

Ce problème de stabilité des galaxies est un exemple intéressant de recherche mathématique nourrie par une question concrète posée par la physique théorique. Nous essayons pour terminer de soulever quelques questions ouvertes d'ordre mathématique, en suggérant des liens avec d'autres travaux.

Tout d'abord, la première question naturelle du point de vue de la pertinence physique des résultats est de *quantifier* la taille du voisinage de stabilité orbitale. Cela paraît maintenant une tâche plus abordable avec la nouvelle théorie de Lemou, Méhats et Raphaël ; il s'agit essentiellement de rendre explicites, ou tout au moins constructives, les constantes de coercitivité dans les inégalités fonctionnelles utilisées.

L'autre question naturelle est de sortir du cadre strictement monotone pour la solution stationnaire $f^0(E)$. Par exemple, nous pouvons déjà nous demander si, au niveau des solutions stationnaires, localement au voisinage d'une solution orbitalement stable, il est possible de démontrer un théorème de paramétrisation bijective des solutions stationnaires par les conservations du système, dans le même esprit que le travail récent de Choffrut et Sverák **[16]** sur l'équation d'Euler incompressible en dimension 2.

Cependant, nous pourrions nous attendre plus généralement, au niveau dynamique, à la stabilité orbitale autour d'une solution stationnaire « presque » monotone, et donc proche des solutions orbitalement stables que nous avons étudiées. Une première tâche serait ici de clarifier au niveau mathématique les instabilités créées par des perturbations non radiales de modèles sphériques anisotropes.

Les méthodes variationnelles semblent néanmoins trouver leur limite, et cela soulève la question de revenir à nouveau à une approche directe par linéarisation. Cela nous amène également à faire une autre remarque importante sur les travaux que nous avons présentés : *ceux-ci n'utilisent pas la dynamique proprement dite de l'équation, mais uniquement ses invariants.* Même si les résultats obtenus sont dynamiques, le cœur conceptuel de ces méthodes n'utilise pas la dynamique. C'est une force de ces approches, qui leur confère une grande robustesse pour traiter des modèles généraux et manipuler des solutions très faibles, mais c'est également une faiblesse dès lors que l'on sort d'un cadre parfaitement variationnel.

Par conséquent, il serait intéressant d'explorer les dialogues possibles avec les résultats de stabilité non-linéaire obtenus dans **[69]**. Ces derniers résultats utilisent des espaces fonctionnels très réguliers, c'est donc en ce sens l'extrême opposé des méthodes de stabilité orbitale que nous avons présentées. En particulier, cela implique qu'il faut « traquer » les oscillations du système dans les estimations de régularité, alors que les espaces de Lebesgue utilisés dans les théories de stabilité orbitale ne « voient » pas les oscillations de la variable de vitesse produites par le mélange de phase. Les hypothèses sur les données initiales sont donc bien plus fortes, mais cela permet également d'obtenir une information plus précise sur le comportement asymptotique du système, et de montrer la stabilité non-linéaire autour de solutions stationnaires linéairement stables, mais qui ne vérifient pas un problème variationnel.

Les résultats de **[69]** s'appliquent à l'équation de Vlasov-Poisson gravitationnelle, mais uniquement dans le cas non physique d'un domaine périodique en espace. Le cas d'un système auto-gravitant qui « crée sa propre géométrie » et son propre confinement au cours du temps représente un défi probablement difficile mais aussi très intéressant pour cette approche par linéarisation : à l'inverse de **[69]** où « l'amortissement Landau » produit une convergence vers zéro du champ moyen asymptotiquement, on ne connaît plus ici à l'avance quelle doit être la limite du champ moyen lorsque $t \to +\infty$. Un défi conceptuel similaire se pose pour l'équation d'Euler incompressible en dimension 2 ainsi que pour l'équation de Vlasov-Poisson avec un confinement magnétique.

Pour terminer, nous mentionnerons le problème intéressant, mais probablement pour le moment hors d'atteinte tant que les questions précédentes et la limite de champ moyen ne sont pas mieux comprises, de faire le lien entre les résultats de stabilité obtenus pour l'équation de Vlasov-Poisson gravitationnelle, et les résultats de stabilité asymptotique (on pense par exemple à la théorie KAM) pour le problème à N corps, dans la limite $N \to \infty$.

RÉFÉRENCES

[1] R. ABRAHAM & J. E. MARSDEN – *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, 1978.

[2] J. J. ALY – On the lowest energy state of a collisionless self-gravitating system under phase space volume constraints, *Monthly Notices Roy. Astronom. Soc.* **241** (1989), n° 1, p. 15–27.

[3] A. V. ANTONOV – Solution of the problem of stability of a stellar system with the Emden density law and spherical velocity distribution, *J. Leningrad Univ. Si. Mekh. Astro.* **7** (1962), p. 135–146.

[4] V. A. ANTONOV – Remarks on the problems of stability in stellar dynamics, *Soviet Astronom. AJ* **4** (1960), p. 859–867.

[5] V. I. ARNOL'D – On conditions for non-linear stability of plane stationary curvilinear flows of an ideal fluid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **162** (1965), p. 975–978.

[6] V. I. ARNOLD – Variational principle for three dimensional steady-state flows of an ideal fluid, *J. Appl. Math. Mech.* **29** (1965), p. 1002–1008.

[7] ———, On an a priori estimate in the theory of hydrodynamic stability, *Am. Math. Soc. Transl.* **19** (1969), p. 267–269.

[8] A. A. ARSEN'EV – Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **15** (1975), p. 136–147.

[9] J. BATT, W. FALTENBACHER & E. HORST – Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **93** (1986), n° 2, p. 159–183.

[10] J. BATT, P. J. MORRISON & G. REIN – Linear stability of stationary solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions, *Arch. Rational Mech. Anal.* **130** (1995), n° 2, p. 163–182.

[11] J. BATT & G. REIN – Global classical solutions of the periodic Vlasov-Poisson system in three dimensions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **313** (1991), n° 6, p. 411–416.

[12] J. BINNEY & S. TREMAINE – *Galactic dynamics*, Princeton Univ. Press, 1987.

[13] W. BRAUN & K. HEPP – The Vlasov dynamics and its fluctuations in the $1/N$ limit of interacting classical particles, *Comm. Math. Phys.* **56** (1977), n° 2, p. 101–113.

[14] S. CALOGERO, Ó. SÁNCHEZ & J. SOLER – Asymptotic behavior and orbital stability of galactic dynamics in relativistic scalar gravity, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **194** (2009), n° 3, p. 743–773.

[15] T. CAZENAVE & P.-L. LIONS – Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), n° 4, p. 549–561.

[16] A. CHOFFRUT & V. ŠVERÁK – Local structure of the set of steady-state solutions to the 2D incompressible Euler equations, *Geom. Funct. Anal.* **22** (2012), n° 1, p. 136–201.

[17] R. DIPERNA & P.-L. LIONS – Global weak solutions of kinetic equations, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **46** (1988), n° 3, p. 259–288.

[18] ———, Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **307** (1988), n° 12, p. 655–658.

[19] ———, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Invent. Math.* **98** (1989), n° 3, p. 511–547.

[20] R. L. Dobrušin – Vlasov equations, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **13** (1979), n° 2, p. 48–58.

[21] J. Dolbeault, Ó. Sánchez & J. Soler – Asymptotic behaviour for the Vlasov-Poisson system in the stellar-dynamics case, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **171** (2004), n° 3, p. 301–327.

[22] J. P. Dorémus & M. R. Feix – Stability of a self gravitating density function of energy and angular momentum, *Astron. & Astrophys.* **29** (1973), p. 401–407.

[23] J. P. Dorémus, M. R. Feix & G. Baumann – Stability of encounterless spherical stellar systems, *Phys. Rev. Letter* **26** (1971), p. 725–728.

[24] A. Eddington – The distribution of stars in globular clusters, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **76** (1916).

[25] C. S. Gardner – Bound on the energy available from a plasma, *Phys. Fluids* **6** (1963), p. 839–840.

[26] I. Gasser, P.-E. Jabin & B. Perthame – Regularity and propagation of moments in some nonlinear Vlasov systems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **130** (2000), n° 6, p. 1259–1273.

[27] Y. Guo – Stable magnetic equilibria in collisionless plasmas, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), n° 9, p. 891–933.

[28] ———, Stable magnetic equilibria in a symmetric collisionless plasma, *Comm. Math. Phys.* **200** (1999), n° 1, p. 211–247.

[29] ———, Variational method for stable polytropic galaxies, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **150** (1999), n° 3, p. 209–224.

[30] ———, On the generalized Antonov stability criterion, in *Nonlinear wave equations (Providence, RI, 1998)*, Contemp. Math., vol. 263, Amer. Math. Soc., 2000, p. 85–107.

[31] Y. Guo & Z. Lin – Unstable and stable galaxy models, *Comm. Math. Phys.* **279** (2008), n° 3, p. 789–813.

[32] Y. Guo & G. Rein – Stable steady states in stellar dynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **147** (1999), n° 3, p. 225–243.

[33] ———, Isotropic steady states in galactic dynamics, *Comm. Math. Phys.* **219** (2001), n° 3, p. 607–629.

[34] ———, A non-variational approach to nonlinear stability in stellar dynamics applied to the King model, *Comm. Math. Phys.* **271** (2007), n° 2, p. 489–509.

[35] M. Hadžić – A constraint variational problem arising in stellar dynamics, *Quart. Appl. Math.* **65** (2007), n° 1, p. 145–153.

[36] M. Hauray & P.-E. Jabin – N-particles approximation of the Vlasov equations with singular potential, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **183** (2007), n° 3, p. 489–524.

[37] ———, Particles approximations of Vlasov equations with singular forces : Part 2, prépublication arXiv:1107.3821.

[38] D. D. HOLM, J. E. MARSDEN, T. RATIU & A. WEINSTEIN – Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria, *Phys. Rep.* **123** (1985), n^{os} 1-2, p. 116.

[39] L. HÖRMANDER – L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.* **113** (1965), p. 89–152.

[40] ———, *An introduction to complex analysis in several variables*, third éd., North-Holland Mathematical Library, vol. 7, North-Holland Publishing Co., 1990.

[41] E. HORST – On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system, *Math. Methods Appl. Sci.* **16** (1993), n° 2, p. 75–86.

[42] E. HORST & R. HUNZE – Weak solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equation, *Math. Methods Appl. Sci.* **6** (1984), n° 2, p. 262–279.

[43] R. ILLNER & H. NEUNZERT – An existence theorem for the unmodified Vlasov equation, *Math. Methods Appl. Sci.* **1** (1979), n° 4, p. 530–544.

[44] J. H. JEANS – On the theory of star-streaming and the structure of the universe, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **76** (1915), p. 70–84.

[45] ———, *Problems of cosmogony and stellar dynamics*, Cambridge Univ. Press, 1919.

[46] H. E. KANDRUP & J. F. SYGNET – A simple proof of dynamical stability for a class of spherical clusters, *Astrophys. J.* **298** (1985), n° 1, part 1, p. 27–33.

[47] I. R. KING – The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models, *Astronomical Journal* **71** (1966), p. 64.

[48] M. D. KRUSKAL & C. R. OBERMAN – On the stability of plasma in static equilibrium, *Phys. Fluids* **1** (1958), p. 275–280.

[49] M. LEMOU, F. MÉHATS & P. RAPHAEL – Orbital stability and singularity formation for Vlasov-Poisson systems, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **341** (2005), n° 4, p. 269–274.

[50] M. LEMOU, F. MÉHATS & P. RAPHAËL – Uniqueness of the critical mass blow up solution for the four dimensional gravitational Vlasov-Poisson system, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **24** (2007), n° 5, p. 825–833.

[51] M. LEMOU, F. MÉHATS & P. RAPHAEL – The orbital stability of the ground states and the singularity formation for the gravitational Vlasov Poisson system, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **189** (2008), n° 3, p. 425–468.

[52] M. LEMOU, F. MÉHATS & P. RAPHAËL – Stable self-similar blow up dynamics for the three dimensional relativistic gravitational Vlasov-Poisson system, *J. Amer. Math. Soc.* **21** (2008), n° 4, p. 1019–1063.

[53] ———, Structure of the linearized gravitational Vlasov-Poisson system close to a polytropic ground state, *SIAM J. Math. Anal.* **39** (2008), n° 6, p. 1711–1739.

[54] ———, A new variational approach to the stability of gravitational systems, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **347** (2009), n^os^ 15-16, p. 979–984.

[55] ———, Stable ground states for the relativistic gravitational Vlasov-Poisson system, *Comm. Partial Differential Equations* **34** (2009), n^os^ 7-9, p. 703–721.

[56] ———, A new variational approach to the stability of gravitational systems, *Comm. Math. Phys.* **302** (2011), n° 1, p. 161–224.

[57] ———, Orbital stability of spherical galactic models, *Invent. Math.* **187** (2012), n° 1, p. 145–194.

[58] E. LIEB & M. LOSS – *Analysis*, Amer. Math. Soc., 2001.

[59] P.-L. LIONS – The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), n° 2, p. 109–145.

[60] ———, The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), n° 4, p. 223–283.

[61] P.-L. LIONS & B. PERTHAME – Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-Poisson system, *Invent. Math.* **105** (1991), n° 2, p. 415–430.

[62] G. LOEPER – Uniqueness of the solution to the Vlasov-Poisson system with bounded density, *J. Math. Pures Appl.* **86** (2006), n° 1, p. 68–79.

[63] D. LYNDEN-BELL – The stability and vibrations of a gas of stars, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **124** (1962), p. 279–296.

[64] ———, Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **136** (1967), p. 101–121.

[65] ———, The Hartree-Fock exchange operator and the stability of galaxies, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **144** (1969), p. 189–217.

[66] C. MARCHIORO, E. MIOT & M. PULVIRENTI – The Cauchy problem for the 3-D Vlasov-Poisson system with point charges, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **201** (2011), n° 1, p. 1–26.

[67] P. J. MORRISON & D. PFIRSCH – The free energy of Maxwell-Vlasov equilibria, *Phys. Fluids B* **2** (1990), n° 6, part 1, p. 1105–1113.

[68] ———, Dielectric energy versus plasma energy, and Hamiltonian action-angle variables for the Vlasov equation, *Phys. Fluids B* **4** (1992), n° 10, p. 3038–3057.

[69] C. MOUHOT & C. VILLANI – On Landau damping, *Acta Math.* **207** (2011), n° 1, p. 29–201.

[70] C. PALLARD – Moment propagation for weak solutions to the Vlasov-Poisson system, *Comm. Partial Differential Equations* **37** (2012), n° 7, p. 1273–1285.

[71] J. PEREZ & J. J. ALY – Stability of spherical stellar systems. I : Analytical results, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **280** (1996), p. 689–699.

[72] K. PFAFFELMOSER – Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data, *J. Differential Equations* **95** (1992), n° 2, p. 281–303.

[73] G. REIN – Non-linear stability for the Vlasov-Poisson system—the energy-Casimir method, *Math. Methods Appl. Sci.* **17** (1994), n° 14, p. 1129–1140.

[74] ______, Stability of spherically symmetric steady states in galactic dynamics against general perturbations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **161** (2002), n° 1, p. 27–42.

[75] G. REIN & Y. GUO – Stable models of elliptical galaxies, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **344** (2003), p. 1396–1406.

[76] R. ROBERT – Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **324** (1997), n° 8, p. 873–877.

[77] Ó. SÁNCHEZ & J. SOLER – Orbital stability for polytropic galaxies, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **23** (2006), n° 6, p. 781–802.

[78] J. SCHAEFFER – Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimensions, *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), nos 8-9, p. 1313–1335.

[79] ______, Steady states in galactic dynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **172** (2004), n° 1, p. 1–19.

[80] J. F. SYGNET, G. DES FORETS, M. LACHIEZE-REY & R. PELLAT – Stability of gravitational systems and gravothermal catastrophe in astrophysics, *Astrophys. J.* **276** (1984), p. 737–745.

[81] Y. H. WAN – Nonlinear stability of stationary spherically symmetric models in stellar dynamics, *Arch. Rational Mech. Anal.* **112** (1990), n° 1, p. 83–95.

[82] ______, On nonlinear stability of isotropic models in stellar dynamics, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **147** (1999), n° 3, p. 245–268.

[83] A. WEINSTEIN – The local structure of Poisson manifolds, *J. Differential Geom.* **18** (1983), n° 3, p. 523–557.

[84] M. I. WEINSTEIN – Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.* **16** (1985), n° 3, p. 472–491.

[85] ______, Lyapunov stability of ground states of nonlinear dispersive evolution equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **39** (1986), n° 1, p. 51–67.

[86] H. WIECHEN, H. J. ZIEGLER & K. SCHINDLER – Relaxation of collisionless self gravitating matter : the lowest energy state, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **223** (1988), p. 623–646.

[87] G. Wolansky – On nonlinear stability of polytropic galaxies, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **16** (1999), n° 1, p. 15–48.

[88] S. Wollman – Global-in-time solutions to the three-dimensional Vlasov-Poisson system, *J. Math. Anal. Appl.* **176** (1993), n° 1, p. 76–91.

[89] H. Ye, P. J. Morrison & J. D. Crawford – Poisson bracket for the Vlasov equation on a symplectic leaf, *Phys. Lett. A* **156** (1991), n^{os} 1-2, p. 96–100.

Clément MOUHOT

University of Cambridge
Centre for Mathematical Sciences
Wilberforce Road
Cambridge CB3 0WA, UK
E-mail : `C.Mouhot@dpmms.cam.ac.uk`