Astérisque

PIERRE RAPHAËL

Concentration compacité à la Kenig-Merle

Astérisque, tome 352 (2013), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 1046, p. 121-146

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2013__352__121_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2011
64e année, 2011-2012, n° 1046, p. 121 à 146

CONCENTRATION COMPACITÉ À LA KENIG-MERLE

par **Pierre RAPHAËL**

Dans leurs articles de référence [**24**], [**25**], Kenig et Merle ouvrent une brèche spectaculaire dans l'étude qualitative des équations aux dérivées partielles. Ce travail est l'aboutissement d'une lente maturation sur une problématique qui naît à la fin des années 1970 dans les travaux pionniers de Ginibre et Velo [**19**], [**20**] et est lui-même le commencement de développements considérables, puisque déjà une série importante de travaux reprend comme un classique la « feuille de route » à la Kenig-Merle.

L'objet de cet exposé est de présenter les principaux résultats obtenus mais surtout de les replacer au sein d'une dynamique scientifique aux multiples facettes et dont l'inspiration provient de domaines très divers des mathématiques : le calcul des variations et les méthodes variationnelles, l'analyse harmonique et les systèmes dynamiques. La notion d'onde solitaire apparaît de façon centrale dans l'analyse. J'illustrerai la profonde unité entre ce travail de 2006 et la percée de Merle [**41**] de 1992 qui obtient la première classification dynamique de l'onde solitaire pour un problème critique, résultat pionnier et totalement isolé à l'époque, et qui contient en fait en substance l'ensemble des arguments.

Il faudra à la suite de ce travail en premier abord très spécifique quatorze ans pour comprendre la profonde universalité de l'argument et développer une méthode de compacité robuste et des outils universels pour classifier la dynamique exceptionnelle de l'onde solitaire. Cette stratégie d'approche par théorème de rigidité à la Liouville, qui avait déjà donné des résultats spectaculaires en elliptique nonlinéaire à la fin des années 1970, s'est développée dans les travaux de Merle et ses collaborateurs autour de la description fine de dynamiques explosives pour des EDP d'abord paraboliques, Merle-Zaag [**50**], puis dispersives Martel-Merle [**37**], Merle-Raphaël [**43**]. L'adaptation de cette approche et la mise en place d'une stratégie robuste pour obtenir des critères optimaux d'existence globale ou dispersion pour des problèmes nonlinéaires requiert en sus l'apport de la machinerie des estimations de Strichartz issue de l'analyse harmonique [**66**], [**19**], et les lemmes de description de perte de compacité à la Lions

[34] via leur version moderne de décomposition en profils [1], [49], [27], l'ensemble aboutissant à la « feuille de route » à la Kenig-Merle mise en œuvre pour la première fois dans [24].

1. EXISTENCE GLOBALE ET EXPLOSION : UN PROBLÈME MODÈLE

Notre compréhension des flots nonlinéaires en dimension infinie est extrêmement pauvre, et même la seule construction d'exemples de dynamiques génériques est souvent mal comprise. La question de l'existence globale des solutions ou au contraire la possibilité de dynamiques explosives est en général ouverte même pour des problèmes modèles, et c'est par exemple l'objet du Prix Clay du Millenium pour les équations de Navier Stokes qui sont l'exemple canonique de modèle surcritique.

Nous présentons dans cette section un problème modèle : l'équation de Schrödinger nonlinéaire

$$(1) \qquad (NLS) \quad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u \pm u|u|^{p-1} = 0 \\ u_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Nous montrons comment l'analyse aujourd'hui classique de Ginibre et Velo [19] permet l'identification des problèmes critiques/surcritiques, puis comment les méthodes variationnelles des années 1980 permettent de construire une solution exceptionnelle : l'onde solitaire. Nous présentons enfin la percée de Merle [41] qui couple les méthodes variationnelles à un argument dispersif dynamique pour obtenir la première classification *dynamique* de l'onde solitaire.

1.1. Existence locale et globale

Ginibre et Velo résolvent le problème de Cauchy local en temps dans l'espace d'énergie $H^1(\mathbb{R}^d)$ et obtiennent l'exact analogue du Théorème de Cauchy Lipschitz pour les ODE :

THÉORÈME 1.1 (Ginibre, Velo [20]). — *Soient l'exposant de Sobolev*

$$2^* = \begin{cases} +\infty & \textit{pour} \ \ d = 1, 2 \\ \frac{2d}{d-2} & \textit{pour} \ \ d \geq 3 \end{cases}$$

et une nonlinéarité énergie sous-critique :

$$1 < p < 2^* - 1;$$

alors pour tout $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *il existe un temps maximal* $0 < T = T(u_0) \leq +\infty$ *et une unique solution* $u \in \mathscr{C}([0,T), H^1(\mathbb{R}^d))$ *de* (1). *En outre, on a le critère d'explosion*

$$T < +\infty \implies \lim_{t \uparrow T} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty. \tag{2}$$

L'existence globale peut maintenant dans certains cas être obtenue comme une conséquence des lois de conservation attachées à la structure hamiltonienne de (1) : la conservation de la masse

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x)|^2 dx,$$

et la conservation de l'énergie totale du système

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|^2 dx \mp \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^{p+1} dx = E(u_0). \tag{3}$$

En vertu du critère d'explosion (2), il suffit pour obtenir l'existence globale de montrer une borne *a priori* sur la norme H^1, ce qui en vertu de la conservation de l'énergie (3) est immédiat dans le cas défocalisant, signe « - » dans (1), où dispersions linéaire et nonlinéaire s'additionnent. Dans le cas focalisant plus délicat, signe « + » dans (1), la nonlinéarité tend à concentrer l'onde et agit contre la dispersion. En vertu de Sobolev,

$$\|u\|_{L^{p+1}} \lesssim \|u\|_{\dot{H}^s} \lesssim \|\nabla u\|_{L^2}^s \|u\|_{L^2}^{1-s}, \quad -s + \frac{d}{2} = \frac{d}{p+1}, \quad \text{i.e.} \quad s = \frac{d(p-1)}{2(p+1)},$$

les lois de conservation impliquent un contrôle H^1 uniforme pour

$$s(p+1) < 2, \quad \text{i.e.} \quad p < 1 + \frac{4}{d}.$$

On a donc le théorème d'existence globale :

COROLLAIRE 1.2 (Existence globale). — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, la solution est globale* $T = +\infty$ *dans les cas :*

1. *défocalisant ;*
2. *focalisant* L^2 *sous-critique :* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$.

1.2. Invariance d'échelle et théorie critique

Cazenave et Weissler généralisent la théorie de Cauchy dans l'espace d'énergie H^1 et établissent dans **[6]** la théorie de Cauchy locale *Sobolev critique*. Le niveau Sobolev critique de (1) se calcule via l'invariance d'échelle du flot

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t \lambda x), \quad \lambda > 0$$

qui laisse invariante la norme Sobolev homogène

$$\|u_\lambda(t,\cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)} = \|u(\lambda^2 t, \cdot)\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)}$$

pour
$$s_c = \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}.$$
Les estimations de Strichartz **[66]**, qui sont une mesure robuste via des normes espace-temps de la dispersion du flot linéaire, permettent de résoudre de manière complètement élémentaire le problème de Cauchy local en temps.

THÉORÈME 1.3 (Problème de Cauchy local critique, **[6]**). — *Soit*
$$1 + \frac{4}{d} \leq p \leq 2^*, \quad i.e. \;\; 0 \leq s_c \leq 1\,;$$
alors pour toute donnée $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, il existe $0 < T = T(u_0)$ et une unique[1] *solution $u \in \mathscr{C}^0([0,T), \dot{H}^s(\mathbb{R}^d))$ de (1). En outre, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que*
$$\|u_0\|_{\dot{H}^s} < \varepsilon_0 \Longrightarrow \quad T = +\infty.$$

Une différence majeure avec le cas des données H^1 est que l'analogue du critère d'explosion (2) est maintenant nettement plus subtil[2], et notamment le temps de vie de la solution est fondamentalement une fonction du *profil* de la donnée initiale, et ne peut pas dépendre du seul contrôle de la norme Sobolev invariante d'échelle. En particulier, il existe *deux problèmes critiques* pour lesquels l'invariance d'échelle vit au niveau d'une loi de conservation : le problème L^2 ou masse critique
$$s_c = 0, \quad \text{i.e. } \; p = 1 + \frac{4}{d},$$
et le problème énergie critique
$$s_c = 1, \quad \text{i.e. } \; p = 2^* - 1, \quad d \geq 3.$$
Par exemple pour le problème masse critique, la conservation de la masse assure le contrôle uniforme de la norme critique $\|u(t,\cdot)\|_{L^2}$, mais cela ne suffit pas à assurer *a priori* l'existence globale : la norme critique peut *concentrer.*

Un corollaire remarquable de cette approche est que, pour les données petites, non seulement on démontre existence globale, mais on obtient gratuitement *scattering*, soit le fait que la solution du problème nonlinéaire se comporte asymptotiquement en temps long comme une solution du problème linéaire, et donc en particulier converge localement en espace vers la solution triviale nulle. On démontre de manière similaire que l'ensemble des données dont la solution disperse au sens Strichartz est *un ouvert* dans l'espace critique, et c'est donc une dynamique stable sans hypothèse de taille.

Dans le cas du problème L^2 critique défocalisant, on obtient donc existence globale pour des données H^1, mais seulement locale pour des données peu régulières.

---

(1) Il faudrait être plus précis sur la notion d'unicité qui n'est stricto sensu connue que pour les solutions Strichartz.

(2) Et fait intervenir la norme Strichartz espace temps associée au problème de Cauchy.

On pourrait à raison, en première approche, arguer que le problème est académique. C'est une erreur pour trois raisons. La première est que, pour l'étude qualitative des solutions même C^∞, il est fréquent qu'un argument de type compacité aboutisse sur des solutions pour lesquelles le seul contrôle naturel vit au niveau de l'espace critique en raison de l'invariance d'échelle, et alors une théorie de Cauchy critique devient fondamentale, voir par exemple **[45]**. Deuxièmement, dans le cas énergie critique $s_c = 1$, la seule théorie de Cauchy est critique, et donc les lois de conservation ne suffisent plus à assurer existence globale, même dans le cas défocalisant. C'est précisément l'objet des travaux de Bourgain **[4]**, Tao et ses collaborateurs **[8]** et Kenig-Merle **[24]** que d'obtenir les résultats d'existence globale et scattering dans ce cadre sur lequel nous allons revenir. Enfin tertio, les résultats pionniers surcritiques de Kenig-Merle **[26]** en *énergie surcritique* $s_c > 1$ montrent que la norme invariante d'échelle joue un rôle fondamental dans la description qualitative du flot, indépendamment de toute autre hypothèse de régularité sur la donnée.

1.3. Onde solitaire et existence globale

Dans le cas focalisant, (1) admet des solutions exceptionnelles dites ondes solitaires. Ce sont des paquets d'ondes bien localisés en espace pour lesquels la dispersion du groupe linéaire et la concentration induite par la nonlinéarité focalisante se compensent exactement. Dans le cadre sous-critique $s_c < 1$, l'onde solitaire est une solution *périodique* en temps

$$u(t,x) = Q(x)e^{it}, \quad \Delta Q - Q + Q|Q|^{p-1} = 0, \tag{4}$$

et stationnaire pour $s_c \geq 1$:

$$u(t,x) = Q(x), \quad \Delta Q + Q|Q|^{p-1} = 0. \tag{5}$$

De telles solutions donnent un premier exemple de dynamiques nonlinéaires puisqu'en particulier *elles ne dispersent pas.*

Les techniques variationnelles des années 1980 permettent de classifier les *états fondamentaux* de (4), (5) et d'obtenir la description complète des solutions *positives* qui apparaissent naturellement comme des minimiseurs de l'énergie (3) en un sens à préciser, ou de manière équivalente comme des extremums dans des inégalités d'interpolation à la Gagliardo-Nirenberg. Le résultat typique d'estimation de Sobolev avec meilleure constante est le suivant :

THÉORÈME 1.4 (Sobolev optimal et état fondamental, **[72]**, **[18]**, **[33]**)

Soit

$$1 + \frac{4}{d} \leq p \leq 2^* - 1, \quad 0 \leq s_c \leq 1\,;$$

alors le problème de minimisation

$$\inf_{u\in H^1} \frac{\|\nabla u\|^{\sigma}_{L^2}\|u\|^{1-\sigma}_{L^2}}{\|u\|_{L^{p+1}}} \quad \textit{où} \quad \sigma = \frac{d(p-1)}{2(p+1)} \in (0,1]$$

est atteint sur la famille

$$\mu_0 Q(\lambda_0 x + x_0)e^{i\gamma_0}, \quad (\mu_0,\lambda_0,x_0,\gamma_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

où l'état fondamental Q est l'unique solution à symétrie sphérique de

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta Q - Q + Q^p = 0 & \textit{pour}\ \ s_c<1 \\ \Delta Q + Q^p = 0 & \textit{pour}\ \ s_c = 1 \end{array}\right., \quad Q>0, \quad Q\in L^{p+1}. \tag{6}$$

La notion d'onde solitaire peut facilement être étendue au cas L^2 sous-critique $s_c < 0$ auquel cas les méthodes variationnelles permettent de démontrer sa stabilité, **[5]**. Au contraire, dans les cas que nous considérons, l'onde solitaire est intrinsèquement
instable par scattering et explosion : n'importe quel voisinage de l'onde solitaire contient des données initiales pour lesquelles la solution correspondante de (1) explose ou au contraire disperse. Ce résultat est très simple à démontrer mais remarquable en soi et repose sur une algèbre très spécifique du problème.

1.4. Le problème L^2 critique

Nous allons maintenant illustrer sur un exemple la propriété fondamentale au cœur de l'intuition Kenig-Merle : *l'onde solitaire est la plus petite solution nonlinéaire de* (1) *au sens de la norme critique.* Considérons en effet le problème L^2 critique $s_c = 0$; alors la combinaison des théorèmes 1.1 et 1.4 donne aisément :

THÉORÈME 1.5 (Existence globale L^2 critique, Weinstein **[72]**)
Soit $u_0 \in H^1$ avec

$$\|u_0\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}\,; \tag{7}$$

alors la solution correspondante de (1) *est globale en temps. En outre, si*

$$u_0 \in \Sigma = H^1 \cap \{xu \in L^2\},$$

alors il y a scattering.

Preuve du théorème 1.5 : La caractérisation variationnelle de l'état fondamental donnée par le théorème 1.4 implique de manière équivalente la minoration du hamiltonien (3) :

$$\forall u \in H^1, \quad E(u) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2}\left[1 - \left(\frac{\|u\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}}\right)^{\frac{4}{d}}\right], \tag{8}$$

et

$$(9) \qquad (\|u\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2} \text{ et } E(u) = 0) \Longrightarrow u \equiv \lambda_0^{\frac{d}{2}} Q(\lambda_0 x + x_0) e^{i\gamma_0}.$$

La conservation de la masse et du hamiltonien couplée à la condition de masse sous-critique (7) implique maintenant une borne uniforme

$$\forall t \in [0, T), \quad \|u(t)\|_{H^1} \lesssim C(E(u_0), \|u_0\|_{H^1})$$

et donc $T = +\infty$ en vertu de (2).

La preuve du scattering est élémentaire si on utilise une symétrie additionnelle exceptionnelle du flot : l'invariance pseudo-conforme, **[19]**. En effet, si $u(t,x)$ est solution de (1), alors

$$(10) \qquad v(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} u\left(\frac{-1}{t}, \frac{x}{|t|}\right) e^{i\frac{|x|^2}{4t}}$$

aussi. Comme $u \in \Sigma$, $v \in H^1$ et $\|v(t)\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ car la symétrie pseudo-conforme est une isométrie L^2. Donc v admet une limite forte dans H^1 quand $t \uparrow 0$ et u disperse quand $\tau = -\frac{1}{t} \to +\infty$ par inversion de la formule (10), cqfd.

La remarque fondamentale est maintenant que le critère de Weinstein (th. 1.5) est optimal. En effet, au niveau critique

$$\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2},$$

l'onde solitaire $u(t,x) = Q(x)e^{it}$ fournit une solution non dispersive, et sa transformée pseudo-conforme

$$(11) \qquad S(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} Q\left(\frac{x}{|t|}\right) e^{i\frac{|x|^2}{4t}} e^{-\frac{i}{t}}$$

engendre une solution explosive

$$\lim_{t \uparrow 0} \|S(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

L'onde solitaire est donc *le premier objet nonlinéaire* puisque c'est le premier objet qui ne disperse pas, et c'est un résultat typique des années 1980. On voit aussi que l'explosion de la solution pseudo-conforme (11) correspond à la concentration de la norme critique :

$$|S(t)|^2 \rightharpoonup \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=0} \quad \text{quand} \quad t \to 0.$$

La question que pose Merle dans son article pionnier **[41]** est celle de la *classification dynamique de l'onde solitaire* qui est intimement liée à celle des *attracteurs du système hamiltonien de dimension infinie* (1). En effet, l'onde solitaire est à un déphasage temporel près une solution stationnaire. Si le problème était parabolique, on pourrait typiquement espérer démontrer via la dérivation d'une fonctionnelle de Lyapounov que les attracteurs du flot sont les objets stationnaires et donc, si de tels objets sont classifiés, en déduire que c'est l'onde solitaire[(3)]. La gageure est que cette stratégie de preuve classique s'effondre pour un problème dispersif, et la percée de Merle consiste pour classifier l'onde solitaire à remplacer la propriété correcte mais inutilisable

« l'onde solitaire est une solution stationnaire à déphasage près du flot »

par la propriété plus faible mais remarquable

« l'onde solitaire engendre un flot compact dans l'espace critique aux symétries près »,

et ensuite de classifier de tels objets. La classification dynamique de l'onde solitaire procède alors en deux temps :

1. extraction d'un objet compact par concentration compacité ;
2. théorème de Liouville pour classifier les objets compacts dans l'espace critique.

Illustrons la méthode pour classifier la dynamique de l'onde solitaire au niveau de masse critique :

Théorème 1.6 (Classification dynamique de l'onde solitaire, Merle **[41]**)
Soient $u_0 \in H^1$ *avec*

$$\|u_0\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2},$$

et $u \in \mathscr{C}([0,T), H^1)$ *la solution correspondante de* (1) *; alors :*

(i) *si* $T < +\infty$*, alors* $u(t) \equiv S(t)$ *aux symétries du flot près.*

(ii) *si* $T = +\infty$ *et* $u_0 \in \Sigma$*, alors la seule solution qui ne disperse pas est l'onde solitaire* $u(t,x) = Q(x)e^{it}$ *aux symétries du flot près.*

Preuve du théorème 1.6. Les propriétés (i) et (ii) sont duales l'une de l'autre par l'invariance pseudo-conforme (10), il suffit donc de montrer (i). Soit une solution $u \in H^1$ de masse critique explosant en $T = 0$, montrons que $u(t) \equiv S(t)$ aux symétries du flot près.

Étape 1. — Compacité du flot, **[72]**. Nous allons montrer que le flot $u(t)$ est *compact aux symétries près dans l'espace critique* avec profil asymptotique donné par l'onde solitaire, soit qu'il existe $(\lambda(t), x(t), \gamma(t)) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ tels que :

$$\lambda(t)^{\frac{d}{2}} u(t, \lambda(t)x + x(t))e^{i\gamma(t)} \to Q \quad \text{dans} \quad L^2 \quad \text{quand} \quad t \uparrow 0. \tag{12}$$

C'est une conséquence de la caractérisation variationnelle du soliton, des lois de conservation du flot et d'un argument de *concentration compacité* à la Lions **[34]**. Soit en effet la renormalisée

$$v(t,x) = \lambda(t)^{\frac{d}{2}} u(t, \lambda(t)x), \quad \lambda(t) = \frac{\|\nabla Q\|_{L^2}}{\|\nabla u(t)\|_{L^2}} \,;$$

(3) Voir théorème 2.1 ci-après.

alors

$$\|\nabla v(t)\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2},$$

par construction, et en vertu des lois de conservation et du critère d'explosion (2) :

$$\|v(t)\|_{L^2} = \|u(t)\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}, \quad E(v) = \lambda^2(t)E(u) = \lambda^2(t)E(u_0) \to 0 \quad \text{quand} \quad t \uparrow 0.$$

Soit $t_n \uparrow 0$ et $v_n = v(t_n)$; alors v_n est une suite bornée dans H^1. Le lemme de concentration compacité **[34]** décrit la perte de compacité de l'injection de Sobolev $H^1 \hookrightarrow L^p$, $2 < p < 2^*$, et nous donnons la version moderne dite de décomposition en profils **[17]**, **[22]** :

LEMME 1.7 (Décomposition en profils d'une suite bornée H^1, **[17]**, **[22]**)

Soit v_n une suite bornée de H^1 ; alors il existe des points $x_n^j \in \mathbb{R}^d$ et des profils $V^j \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tels que :

(i) *pour tout $k \neq j$, $|x_n^k - x_n^j| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$;*

(ii) *pour tout $J \geq 1$,*

$$v_n(x) = \Sigma_{j=1}^J V^j(x - x_n^j) + w_n^J(x)$$

avec

$$\limsup_{n\to+\infty} \|w_n^J\|_{L^p} \to 0 \quad \textit{quand} \quad J \to +\infty \quad \textit{pour tout} \quad 2 < p < 2^*.$$

En outre,

$$\|v_n\|_{L^2}^2 = \Sigma_{j=1}^J \|V^j\|_{L^2}^2 + \|w_n^J\|_{L^2}^2 + o_{n\to+\infty}(1),$$
$$\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 = \Sigma_{j=1}^l \|\nabla V^j\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_n^J\|_{L^2}^2 + o_{n\to+\infty}(1).$$

En d'autres termes, on obtient une décomposition presque H^1 orthogonale de la suite avec une précision indexée par une erreur $o_{J\to+\infty}(1)$. Appliquons ce lemme à la suite v_n qui vérifie par construction

$$\|\nabla v_n\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}, \quad \|v_n\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}, \quad E(v_n) \to 0. \tag{13}$$

Soit $J \gg 1$. Supposons que la suite admette au moins deux profils non triviaux V^j ; alors par (13) :

$$\|V^1\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}, \quad \|V^j\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2}$$

et donc en vertu de (8) :

$$E(V^1) > 0, \quad E(V^j) \geq 0 \quad \text{for} \quad j \geq 2.$$

Ceci implique en utilisant les propriétés du lemme

$$\liminf_{n\to+\infty} E(v_n) \geq E(V^1) > 0,$$

ce qui est absurde. Donc il existe un unique profil non trivial, donc de masse $\|Q\|_{L^2}$, et alors $v_n(x - x_n^1) \to V^1$ dans L^{p+1}, puis :

$$\|V^1\|_{L^2} = \|Q\|_{L^2}, \quad E(V^1) \leq 0.$$

On en déduit par la caractérisation variationnelle (9) que la convergence est forte $w_n^1 \to 0$ dans H^1, et donc $\|\nabla V^1\|_{L^2} = \|\nabla Q\|_{L^2}$ et

$$V^1 = Q(x - x_0)e^{i\gamma_0}, \quad (x_0, \gamma_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

ce qui conclut la preuve de (12).

Étape 2. — Théorème de Liouville. Nous allons maintenant classifier les flots explosifs L^2 compacts au sens de (12). Tout d'abord on peut montrer la compacité du point de concentration $|x(t)| \lesssim 1$, et en fait à translation près la convergence

$$\lim_{t \uparrow 0} x(t) = 0.$$

Comprendre la dynamique du point de concentration est non trivial en général, nous renvoyons par exemple à **[22]**, **[60]** pour une démonstration élémentaire. Couplée avec la compacité L^2, la localisation du point de concentration implique la concentration de *toute* la masse :

$$|u(t)|^2 \rightharpoonup \|Q\|_{L^2}^2 \delta_{x=0} \quad \text{quand} \quad t \uparrow 0. \tag{14}$$

La clé de la démonstration est un *un gain de régularité* et nous allons montrer que la solution est dans l'espace de viriel :

$$u(t) \in \Sigma. \tag{15}$$

En effet, soit une fonction régulière $\psi(x) = |x|^2$ pour $|x| \leq 1$, $\psi(x) = 1$ pour $|x| \geq 2$, et pour $R > 0$, $\psi_R(x) = R^2 \psi(\frac{x}{R})$, et telle que

$$(\psi_R')^2 \lesssim \psi_R.$$

Un calcul direct sur (1) donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)|u(t,x)|^2 dx = \operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi_R(x) \cdot \nabla u(t,x)\overline{u(t,x)} dx\right). \tag{16}$$

En appliquant l'estimation optimale (8) à $ue^{ia\psi_R(x)}$, $a \in \mathbb{R}$, on obtient facilement l'estimation, **[2]** : $\forall v \in H^1$ avec $\|v\|_{L^2} \leq \|Q\|_{L^2}$,

$$\left|\operatorname{Im}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \nabla\psi_R(x) \cdot \nabla v(x)\overline{v(x)} dx\right)\right| \lesssim \sqrt{E(v)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)|v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc avec (16) :

$$\left|\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)|u(t,x)|^2 dx\right| \lesssim C(u_0)\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi_R(x)|u(t,x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On intègre l'inéquation différentielle avec la condition de bord par (14) :

$$\forall R > 0, \quad \lim_{t \uparrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \psi_R |u(t,x)|^2 dx = 0$$

et on obtient :
$$\forall R>0,\quad \int_{\mathbb{R}^d}\psi_R(x)|u(t,x)|^2dx\lesssim C(u_0)|t|.$$
L'estimation étant uniforme en $R>0$, on a donc montré
$$\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|u(t,x)|^2<+\infty,\quad \lim_{t\uparrow 0}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|u(t,x)|^2dx=0. \tag{17}$$
Étape 3. — Conclusion. Le gain de régularité (17) permet d'utiliser *la loi de conservation additionnelle* qui vit dans l'espace fonctionnel Σ et non seulement H^1, et qui correspond à la conservation de l'énergie pseudo-conforme induite par la symétrie (10). En effet, soit
$$v(t,x)=\frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}}u\left(\frac{-1}{t},\frac{x}{|t|}\right)e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\ ;$$
alors un calcul algébrique explicite montre que le contrôle de la variance (17) implique
$$E(v)=0.$$
Or $\|v\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}=\|Q\|_{L^2}$, et alors $v\equiv Q$ aux symétries du flot près par (9), et donc $u\equiv S$, cqfd.

2. EXTRACTION DE PROFILS, EXPLOSION ET EXISTENCE GLOBALE

Nous allons illustrer dans cette section le rôle de l'onde solitaire en relation avec des résultats d'existence globale ou de description de profils de concentration dans le cadre explosif.

2.1. Problèmes géométriques

Les applications harmoniques entre $\mathbb{R}^d$ et une variété immergée $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^p$ sont les points critiques de l'énergie de Dirichlet
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla u(x)|^2dx$$
pour les applications $u:\mathbb{R}^d\to\mathcal{M}$. L'équation d'Euler-Lagrange associée est l'équation des applications harmoniques de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{M}$:
$$P_{T_{\mathcal{M}}(u(x))}(\Delta u)=0 \tag{18}$$
où $P_{T_{\mathcal{M}}(u(x))}$ est la projection sur le plan tangent à $\mathcal{M}$ en $u(x)$. Cette équation classique de la physique mathématique a été très étudiée et l'existence de solutions non triviales d'énergie finie dépend de la géométrie de la variété cible. Supposons pour simplifier $d=2$ et $p=3$; alors il existe des solutions non triviales d'énergie finie pour $\mathcal{M}=\mathbb{S}^2$, mais pas par exemple pour $\mathbb{H}^2$, l'espace hyperbolique.

On peut associer trois flots dynamiques naturels à (18) : le flot harmonique de la chaleur, le flot des wave maps et le flot des Schrödinger maps, qui font tous trois l'objet d'une littérature très importante. Par exemple le flot parabolique est

$$\partial_t u = P_{T_{\mathcal{M}}(u(x))}(\Delta u) \tag{19}$$

et dissipe par construction l'énergie de Dirichlet

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(t,x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2 dx. \tag{20}$$

Si l'existence locale de solutions est élémentaire, la question de l'existence globale est plus délicate car le problème est *énergie critique* puisque l'invariance d'échelle

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

laisse invariante l'énergie de Dirichlet :

$$\|\nabla u_\lambda(t,\cdot)\|_{L^2} = \|\nabla u(\lambda^2 t,\cdot)\|_{L^2}.$$

Ainsi donc, comme pour le problème L^2 critique, le contrôle de la norme invariante d'échelle ne suffit pas à assurer l'existence globale, et *a priori* une dynamique singulière est possible par *concentration de l'énergie.*

Une démonstration remarquable d'existence globale est due à Struwe dans un papier pionnier de 1986, **[67]** :

THÉORÈME 2.1 (Profil d'explosion pour le flot harmonique de la chaleur, **[67]**)
Soit u une solution d'énergie finie du flot harmonique de la chaleur (19) *qui explose en temps fini $T < +\infty$. Alors il existe $t_n \to T$, $(\lambda_n, x_n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$ tels que*

$$u(t_n, \lambda_n x + x_n) \to Q \quad \textit{quand} \quad t \to T \tag{21}$$

localement en espace, où Q est une application harmonique non triviale d'énergie finie.

Ce résultat appelle trois commentaires fondamentaux.

(i) Tout d'abord (21) est une première description du phénomène d'explosion qui se produit donc par concentration dans l'espace critique d'une bulle d'énergie modulée le long des symétries du flot avec profil donné par une solution stationnaire. Le point fondamental de la démonstration est la *dissipation* (20) et la *coercivité* de l'énergie de Dirichlet qui donnent une borne *a priori*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_t u(t,x)|^2 dx dt < +\infty$$

et impliquent par un principe de type Lassalle qu'un objet récurrent en temps est nécessairement *stationnaire.*

(ii) Un corollaire immédiat est donc que si la variété cible n'admet pas d'application harmonique non triviale d'énergie finie – comme $\mathbb{H}^2$ –, alors toutes les solutions sont globales en temps. C'est une démonstration d'existence globale par l'absurde.

2.2. Théorèmes de Liouville

La description des bulles de concentration de type (21) est centrale pour comprendre la formation de singularités des dynamiques de dimension infinie. La démonstration de Struwe pour le flot harmonique de la chaleur est *directe* et basée sur les estimations a priori très fortes induites par la structure parabolique du problème. Merle et ses collaborateurs ont dans la lignée du théorème 1.6 développé une méthodologie générale pour exhiber les profils de concentration dans deux situations distinctes : pour la chaleur parabolique en lien avec la description fine de la singularité stable, **[50]** ; pour des problèmes dispersifs où les estimations paraboliques s'effondrent, **[37]**, **[43]**. Dans tous ces travaux, le cœur de la démonstration est en deux temps : extraction d'un profil asymptotique par méthodes de compacité ; classification des dynamiques compactes obtenues et Théorème de Liouville.

L'exemple typique de Théorème de Liouville dans un problème parabolique est la classification des « solutions rétrogrades » dont un résultat pionnier est donné dans **[50]** :

THÉORÈME 2.2 (Théorème de Liouville pour la chaleur nonlinéaire, **[50]**)
Soient $1 < p < 2^* - 1$ *et* u *une solution* L^∞ *de*

$$\partial_t u = \Delta u + u^p \quad \textit{dans} \quad (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d.$$

Supposons en outre

$$0 \le u(t,x) \lesssim (T-t)^{-\frac{1}{p-1}}\,; \tag{22}$$

alors

$$u \equiv 0 \quad \textit{ou} \quad u(t,x) = \kappa (T-t)^{-\frac{1}{p-1}}, \ \kappa > 0.$$

La condition (22) peut être comprise comme une condition de minimalité du flot qui n'est donc admissible que pour la solution autosimilaire exacte qui dans ce cas est à nouveau stationnaire après renormalisation du flot.

L'extension de ce type de résultat au cadre dispersif fut une percée fondamentale de Martel et Merle **[35]** pour l'équation de (KdV) généralisée, puis pour l'équation de Schrödinger L^2 critique au voisinage de l'onde solitaire **[43]**. Donnons par exemple le résultat pour (gKdV) démontré dans **[35]**, et central dans la démonstration de l'existence de solutions explosives, **[42]**, et la description des attracteurs du flot en temps long **[37]**. Le modèle est

$$(gKdV) \quad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x(\partial_x^2 u + u^5) = 0, \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases} \qquad (t,x) \in \times R \times \mathbb{R}$$

et il partage une structure très similaire avec (NLS) L^2 critique focalisant : la masse et l'énergie sont conservées

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}, \quad E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} u^6(t,x)dx = E(u_0),$$

l'invariance d'échelle vit au niveau L^2

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{1}{2}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \|u_\lambda(t)\|_{L^2} = \|u(\lambda^2 t)\|_{L^2},$$

et la solution admet des ondes progressives de type onde solitaire :

$$u(t,x) = Q(x-t)$$

où Q est l'unique solution positive H^1 de $Q'' - Q + Q^5 = 0$. On a alors le théorème de classification :

THÉORÈME 2.3 (Théorème de Liouville pour (gKdV), **[35]**)

Soit $u \in \mathscr{C}([0,+\infty), H^1)$ une solution de (gKdV) avec :

(i) *Petitesse initiale :* $\|u(0) - Q\|_{H^1} \ll 1$.

(ii) *Contrôle H^1 :* $0 < c_1 \leq \|u(t)\|_{H^1} \leq c_2 < +\infty$.

(iii) *Compacité : il existe $x(t) \in \mathbb{R}$ telle que $v(t) = u(t, x + x(t))$ est L^2 étroite, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R > 0 \ \ \textit{tel que} \ \ \forall t \geq 0, \quad \int_{|x| \geq R} v^2(t,x) < \varepsilon.$$

Alors $u(t,x) \equiv Q(x-t)$ aux symétries du flot près.

En d'autres termes, l'unique solution non dispersive – (iii) –, non explosive ni évanescente – (ii) –, initialement au voisinage de l'onde solitaire – (i) – est l'onde solitaire elle-même. Le fait fondamental est que la preuve ne se ramène pas à un problème stationnaire, ce qu'on ne sait pas faire, mais procède de manière dynamique pour classifier les flots non dispersifs. Conceptuellement, ces résultats sont la directe continuation des théorèmes de classification en elliptique nonlinéaire de Gidas, Ni, Nirenberg, **[18]**.

2.3. (NLS) énergie critique

Montrons maintenant comme cet ensemble d'idées couplées avec la machinerie dispersive Strichartz se cristallise dans le papier de référence **[24]**. Le problème considéré est l'équation de Schrödinger nonlinéaire[4] *énergie critique.*

$$(23) \qquad (NLS) \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u \pm u|u|^4 = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \end{cases}, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3.$$

En vertu du théorème d'existence locale 1.3, il existe une unique solution $u \in \mathscr{C}([0,T), \dot{H}^1)$ et les petites données initiales engendrent un flot global avec scattering.

Dans le cas défocalisant, Bourgain **[4]** est le premier à démontrer l'existence globale de toutes les solutions. De manière remarquable et au contraire de ce qui était connu notamment pour le problème analogue des ondes **[21]**, **[68]**, la preuve de Bourgain ne repose pas sur des estimations *a priori* valables pour toute solution, mais sur un *argument inductif* sur le niveau d'énergie minimale d'une solution possiblement non dispersive. La preuve est radiale et étendue au cadre général dans **[8]** au prix d'une extrême virtuosité technique et de l'importation d'une très lourde machinerie d'analyse harmonique.

En particulier, traiter le cas focalisant à la suite de ces travaux semblait inaccessible en raison de l'existence de la solution stationnaire non dispersive

$$u(t,x) = Q(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{|x|^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \Delta Q + Q^5 = 0.$$

C'est l'objet de **[24]** où est démontré le critère optimal d'existence globale et scattering :

THÉORÈME 2.4 (Existence globale et scattering énergie critique, **[24]**)
Soient $u_0 \in \dot{H}^1$ à symétrie sphérique avec

$$E(u_0) < E(Q),$$

et $u \in \mathscr{C}([0,T), \dot{H}^1)$ la solution correspondante de (1) focalisante. Alors :

(i) *si $\|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla Q\|_{L^2}$, alors la solution est globale $T = +\infty$ et il y a scattering ;*

(ii) *si $\|\nabla u_0\|_{L^2} > \|\nabla Q\|_{L^2}$, alors la solution explose en temps $T < +\infty$.*

Ce théorème est complété dans **[15]** par la classification des dynamiques critiques $E(u) = E(Q)$ qui est l'exacte généralisation du théorème 1.6.

Preuve du théorème 2.4. La gageure est de démontrer existence globale et scattering (i), le critère explosif étant connu **[3]** et conséquence d'une identité algébrique très spécifique. La preuve est en trois temps : mise en place d'un raisonnement inductif par

[4] Nous nous restreignons au cas de la dimension $N = 3$ pour simplifier.

contradiction ; extraction d'un élément minimal par concentration compacité dans les normes Strichartz ; classification des objets compacts sous le soliton.

Étape 1. — *Induction.* La machinerie Strichartz pour (23) assure que le scattering est équivalent au contrôle dispersif espace temps

$$\|u\|_{L^{10}_t L^{10}_x} < +\infty, \tag{24}$$

et cette borne est donc vérifiée pour les petites données. Suivant **[4]**, on peut donc considérer le niveau d'énergie

$$E_C > 0$$

qui est minimal au sens où, pour toute donnée initiale avec

$$\|\nabla u_0\|_{L^2} < \|\nabla Q\|_{L^2} \quad \text{et} \quad E(u_0) < E_C,$$

la solution correspondante est globale sur $\mathbb{R}$ et vérifie scattering au sens de (24). Il nous faut donc montrer

$$E_C \geq E(Q)$$

et on raisonne par l'absurde en supposant

$$E_C < E(Q).$$

On considère alors une suite de données initiales $u_{0,n} \in \dot{H}^1$ avec

$$E(u_{0,n}) \uparrow E_C, \quad \int |\nabla u_{0,n}|^2 < \int |\nabla Q|^2 \tag{25}$$

et telle que la solution correspondante u_n de (23) vit sur un intervalle $I_n = (-T_-(u_{0,n}), T_+(u_{0,n}))$ avec

$$\|u_n\|_{S(I_n)} = \|u_n\|_{L^{10}_{I_n} L^{10}_x} < +\infty, \quad \|u_n\|_{S(I_n)} \to +\infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{26}$$

L'hypothèse $E_C < E(Q)$, la conservation de l'énergie et la caractérisation variationnelle du soliton du théorème 1.4 assurent un contrôle uniforme

$$\forall t \in I_n, \quad \int |\nabla u_n(t)|^2 \leq (1-\delta) \int |\nabla Q|^2, \quad \delta > 0. \tag{27}$$

Étape 2. — *Concentration compacité.* Nous allons extraire par compacité un objet minimal au niveau énergie critique $E(u) = E_C$, ce qui pour un problème de minimisation standard correspond formellement à la compacité à symétrie près des suites minimisantes $u_{0,n}$. L'obstruction à la compacité de l'estimation de Strichartz linéaire

$$\|e^{it\Delta}\phi\|_{L^{10}_t L^{10}_x} \lesssim \|\nabla \phi\|_{L^2}$$

est due aux actions

$$\tau_{x_0}\phi(x) = \phi(x - x_0), \quad S_{\lambda_0}\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\phi\left(\frac{x}{\lambda_0}\right), \quad R_{t_0}\phi(t,x) = e^{it_0\Delta}\phi(x).$$

Le lemme de décomposition en profil dont nous avons besoin est dû à Keraani **[27]** dans la continuation de **[1]**, **[49]**, et est la version Strichartz du lemme 1.7 :

LEMME 2.5 (Décomposition en profils, **[27]**). — *Étant donnée une suite* $(v_{0,n})_{n\geq 1}$ *de données initiales bornée dans l'espace critique* $\dot{H}^1$*, alors à sous-suite près, on peut trouver* $(\lambda_{j,n}, x_{j,n}, t_{j,n})$ *avec*

$$\frac{\lambda_{j,n}}{\lambda_{j',n}} + \frac{\lambda_{j',n}}{\lambda_{j,n}} + \frac{|t_{j,n} - t_{j',n}|}{\lambda_{j,n}^2} + \frac{|x_{j,n} - x_{j',n}|}{\lambda_{j,n}} \to +\infty \quad \text{quand} \quad n \to +\infty, \quad j \neq j', \tag{28}$$

et une suite de profils $V_{0,j} \in \dot{H}^1$ *telle que pour tous* J, n,

$$v_{0,n}(x) = \Sigma_{j=1}^J \frac{1}{\lambda_{j,n}^{\frac{1}{2}}} V_j\left(\frac{-t_{n,j}}{\lambda_{j,n}^2}, \frac{x - x_{j,n}}{\lambda_{j,n}}\right) + w_n^J(x), \quad V_j(t,x) = e^{it\Delta}V_{0,j} \tag{29}$$

avec l'estimation d'erreur :

$$\limsup_{n\to+\infty} \|e^{it\Delta}w_n^J\|_{S(\mathbb{R})} \to 0 \quad \text{quand} \quad J \to +\infty, \tag{30}$$

$$E(v_{0,n}) = \Sigma_{j=1}^J E\left(V_j(\frac{-t_{j,n}}{\lambda_{j,n}^2})\right) + E(w_n^J) + o(1) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty. \tag{31}$$

Étape 3. — Extraction de l'objet minimal. Nous pouvons maintenant extraire l'objet compact. Nous appliquons le lemme de décomposition en profils à la suite minimisante $u_{0,n}$. L'observation fondamentale est que la décomposition en profils (29)ne peut contenir qu'une bulle : $V_{0,1} \neq 0$, $V_{0,j} = 0$ pour $j \geq 2$. Le raisonnement formel est identique à celui de l'étape 1 du théorème 1.6. S'il existait au moins deux profils non triviaux, alors par (31), (25), $E(V_{0,j}) \leq E_C - \delta$ pour un certain $\delta > 0$, et donc *par définition du niveau minimal* E_C, la solution correspondante de problème nonlinéaire (23) avec donnée $V_{0,j}$ satisfait des bornes Strichartz uniformes. Il reste maintenant à observer que la condition de découplage des profils (28) et l'estimation Strichartz uniforme du reste assurent que la solution de (23) avec donnée $u_{0,n}$ se comporte asymptotiquement comme la somme des solutions issues de chaque profil $V_{0,j}$. Ceci nécessite une théorie perturbative robuste pour le flot nonlinéaire qui est typiquement à nouveau une conséquence de la machinerie Strichartz. On en déduit dans la limite $n \to +\infty$ un contrôle Strichartz uniforme qui contredit l'hypothèse d'explosion (26).

Le même argument implique $E(V_{0,1}) = E_C$ et la convergence forte $\nabla w_n^1 \to 0$ dans L^2. Il est alors facile de réextraire sur cette décomposition simplifiée une suite convergente de donnée initiale qui converge vers une donnée $u_{C,0} \in \dot{H}^1$ telle que la solution correspondante $u_C \in \mathscr{C}(I, \dot{H}^1)$ de (23) vérifie :

$$E(u_C) = E_C, \quad \int |\nabla u_{0,C}|^2 < \int |\nabla Q|^2, \quad \|u_C\|_{S(I)} = +\infty.$$

En outre, en réappliquant la décomposition en profil à la suite $u_C(t_n)$, on montre que cette décomposition à nouveau ne peut faire intervenir qu'un seul profil avec un reste fortement convergent vers 0 dans $\dot{H}^1$: une solution minimale ne peut disperser car sinon on pourrait extraire une autre solution minimale avec strictement moins d'énergie, contradiction. On obtient ainsi que *la solution minimale engendre un flot compact* au sens suivant : il existe $(\lambda(t), x(t)) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3$ tels que

(32)
$$\left\{v_C(t,x) = \lambda(t)^{\frac{1}{2}} u_C(t, \lambda(t)x + x(t)),\ t \in I\right\} \text{ est d'adhérence compacte dans } \dot{H}^1.$$

En particulier, $v_C(t)$ est $\dot{H}^1$ étroit, soit : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall t \in I,\quad \int_{|x| \geq R(\varepsilon)} \left[|\nabla v_C|^2 + |v_C|^6 + \frac{|v_C|^2}{|x|^2}\right](t,x)dx < \varepsilon. \tag{33}$$

Insistons sur le fait qu'une solution *générique* disperse et éjecte de la masse, et ne vérifie donc typiquement pas l'étroitesse (33).

Étape 4.Ê *Théorème de Liouville.* Classifier les flots compacts en général est un problème ouvert, mais il nous suffit de montrer ici que l'onde solitaire est le *plus petit objet* compact. Le théorème de rigidité suivant achève la démonstration du théorème 2.4 :

THÉORÈME 2.6 (Liouville sous-critique, **[24]**). — *Soit* $u_C \in \mathscr{C}([0,T), \dot{H}^1)$ *solution compacte à symétrie sphérique de* (23) *au sens de* (32) *avec*

$$E(u_C) < E(Q), \quad \int |\nabla u_{C,0}|^2 < \int |\nabla Q|^2\,; \tag{34}$$

alors

$$u_C \equiv 0.$$

Preuve du théorème 2.6. La difficulté est comme pour la preuve du théorème 1.6 qu'on ne dispose pas d'estimation *a priori* sur la taille des paramètres $(\lambda(t), x(t))$ dans la décomposition (32). En utilisant l'hypothèse de minimalité, un argument initié dans **[42]** permet de ramener le problème à la négation de deux scénarios :

(i) explosion type II : $T < +\infty$ et $\lambda(t) \to 0$ quand $t \to T$;

(ii) existence globale hors évanescence : $T = +\infty$ et $0 < \lambda(t) < \lambda_1 < +\infty$.

Montrons pourquoi explosion est impossible sous le soliton. L'argument pour évacuer existence globale est dans la même veine mais nécessite dans **[24]** l'hypothèse de radialité[5]. D'une manière générale, il faut penser que l'étroitesse (33) permet de *localiser* les lois de conservation ou les monotonies nonlinéaires associées au flot, dont la structure est intimement liée à la caractérisation variationnelle du soliton, **[3]**.

[5] Ou plus précisément une borne *a priori* sur le point de concentration $|x(t)| \lesssim 1$.

Supposons donc $\lambda(t) \to 0$ en temps fini $t \to T$. Nous allons procéder de façon très analogue à la démonstration du théorème 1.6 en intégrant l'équation backwards depuis la singularité pour gagner de la régularité et ainsi utiliser la loi de conservation *sous-critique*[(6)], ici L^2.

Soit une fonction de troncature $\phi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$, $\phi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$ et $\phi_R(x) = \phi(\frac{x}{R})$. On calcule avec (23) le flux de masse local :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \phi_R(x)|u_C(t,x)|^2dx\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\int \nabla\phi_R\cdot\nabla u_C\overline{u_C}dx\right)\right| \lesssim \left(\int \frac{|u_C|^2}{|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\nabla u_C|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \int |\nabla u_C|^2 \lesssim 1 \end{aligned} \tag{35}$$

où l'on a utilisé Hardy et comme précédemment la borne *a priori* $\dot{H}^1$ (27). Maintenant la compacité (33) couplée à l'hypothèse d'explosion implique :

$$\forall R > 0, \quad \lim_{t\to T}\int \phi_R|u_C(t,x)|^2dx = 0. \tag{36}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq R}|u_C(t,x)|^2 &= \lambda^2(t)\int_{|\lambda(t)y+x(t)|\leq R}|v_C(t,y)|^2dy \\ &= \lambda^2(t)\int_{|\lambda(t)y+x(t)|\leq R}|v_C(t,y)|^2\mathbf{1}_{\lambda(t)|y|\leq\varepsilon R}dy \\ &+ \lambda^2(t)\int_{|\lambda(t)y+x(t)|\leq R}|v_C(t,y)|^2\mathbf{1}_{\lambda(t)|y|\geq\varepsilon R}dy. \end{aligned}$$

Pour le premier terme, par Hölder et Sobolev :

$$\begin{aligned} \lambda^2(t)\int_{|\lambda(t)y+x(t)|\leq R}|v_C(t,y)|^2\mathbf{1}_{\lambda(t)|y|\leq\varepsilon R}dy &\lesssim \lambda^2(t)\|v_C(t)\|^2_{L^6}\left(\frac{\varepsilon R}{\lambda(t)}\right)^2 \\ &\lesssim R^2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Pour le second terme, par Hölder et la compacité (33) :

$$\begin{aligned} &\lambda^2(t)\int_{|\lambda(t)y+x(t)|\leq R}|v_C(t,y)|^2\mathbf{1}_{\lambda(t)|y|\geq\varepsilon R}dy \\ \lesssim\ &\lambda^2(t)\left(\int_{|y|\geq\frac{\varepsilon R}{\lambda(t)}}|v_C(t,y)|^6dy\right)^{\frac{1}{3}}\left(\int_{\lambda(t)y\in B(x(t),R)}dy\right)^{\frac{2}{3}} \\ \lesssim\ &\lambda^2(t)\left(\frac{R}{\lambda(t)}\right)^2\left(\int_{|y|\geq\frac{\varepsilon R}{\lambda(t)}}|v_C(t,y)|^6dy\right)^{\frac{1}{3}} \\ \to\ &0 \text{ quand } t\to T, \end{aligned}$$

[(6)] Donc *a priori* inutilisable.

et (36) s'ensuit. On intègre maintenant (35) backwards depuis la singularité avec (36) et donc :
$$\int \phi_R |u_C(t,x)|^2 dx \lesssim T-t.$$
La constante étant indépendante de $R>0$, on en déduit
$$\int |u_C(t,x)|^2 dx < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\uparrow T} \int |u_C(t,x)|^2 dx = 0.$$
Mais la loi de conservation L^2 implique maintenant $u_C \equiv 0$, cqfd.

2.4. Extensions

L'article **[24]** a immédiatement engendré un nombre impressionnant de travaux. Tout d'abord en relation avec la question de l'extension à toute dimension et l'élimination de l'hypothèse de radialité, **[29]**. Dans le cas des ondes nonlinéaires énergie critique, une démonstration école et complète est donnée dans **[25]**. L'extension de ces techniques au problème L^2 critique fait l'objet de la série de travaux **[71]**, **[28]**, **[30]** avec notamment de très sérieuses difficultés pour obtenir la classification sous-critique des états compacts en petite dimension non radiale qui fait l'objet des travaux remarquables de Dodson **[9]**, **[10]**, **[11]**, **[12]** ; nous renvoyons à l'exposé de F. Planchon **[58]** pour une exposition détaillée.

En outre, ces travaux ont ouvert la voie à la découverte et la classification des dynamiques critiques, **[15]**, **[14]**, **[16]**, et à la généralisation complètement insoupçonnée du théorème 1.6 qui loin d'être un cas isolé revêt donc un caractère universel. Les arguments d'extraction de profil et la classification des dynamiques critiques sont centraux dans les très élégants résultats de description du flot en énergie au-delà de l'onde solitaire obtenus par Nakanishi et Schlag **[55]**, **[56]**, et qui sont une première étape vers la classification du flot au voisinage de l'onde solitaire qui en est à ses débuts ; nous renvoyons par exemple à **[48]** pour une introduction à ces problèmes délicats. Les récentes percées sur les problèmes de wave map qui sont la généralisation ondes du problème parabolique (19), et complètent le programme initié dans **[7]**, **[69]**, sont dans la droite ligne de ces travaux, en particulier le travail Sterbenz-Tataru **[65]**, **[64]** qui adapte les fonctionnelles de Lyapounov non radiales sur le flot renormalisé découvertes dans **[51]**, **[25]** pour démontrer la version ondes du théorème 2.1, et le travail Krieger, Schlag **[31]**, qui met en œuvre la « feuille de route » à la Kenig-Merle pour démontrer existence globale et scattering de la wave map énergie critique avec cible l'espace hyperbolique, voir aussi Tao **[70]**.

Ces travaux ouvrent plusieurs directions de recherche importantes. Tout d'abord l'étude du flot près de l'onde solitaire, soit au-delà du seuil $E(Q)$, qui était totalement ouverte il y a encore dix ans et fait l'objet d'une dynamique de recherche intense.

Dans les cadres critiques d'énergie et de masse, des progrès considérables ont été accomplis notamment pour la construction de dynamiques effectives, explosives ou globales, au voisinage de l'onde solitaire, par exemple **[57]**, **[36]**, **[32]**, **[63]**, **[61]**, **[52]**, **[46]**, et la classification de l'onde solitaire comme profil universel d'explosion **[37]**, **[44]**, **[13]**. Le cas général de hautes énergies est pour l'instant largement ouvert mais ne semble plus totalement hors de portée au moins pour certains modèles simples, voir par exemple **[53]** pour un premier résultat de décomposition universel de la solution en train d'ondes solitaires. Enfin une frontière particulièrement excitante se dessine aux portes du monde surcritique $p > 2^*$ largement inexploré hors quelques résultats isolés – mais spectaculaires – dans le cas parabolique radial, **[38]**, **[39]**, **[40]**, **[54]**, et quelques résultats d'explosion dispersive surcritique explicite **[59]**, **[47]**, **[62]**. Dans le cas de l'équation des ondes énergie surcritique défocalisante, Kenig et Merle illustrent dans **[26]** le rôle fondamental de la norme invariante d'échelle et montrent que, si l'on suppose une borne *a priori* sur cette norme, alors la solution est globale et disperse, ce qui fait écho au résultat de régularité **[23]** pour Navier Stokes, et le résultat qualitatif explosif pour (NLS) **[45]**. L'existence d'une solution développant une dynamique dite faiblement turbulente avec croissance de la norme Sobolev critique est un des problèmes ouverts majeurs du domaine.

RÉFÉRENCES

[1] H. Bahouri & P. Gérard – High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, *Amer. J. Math.* **121** (1999), n° 1, p. 131–175.

[2] V. Banica – Remarks on the blow-up for the Schrödinger equation with critical mass on a plane domain, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **3** (2004), n° 1, p. 139–170.

[3] H. Berestycki & T. Cazenave – Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **293** (1981), n° 9, p. 489–492.

[4] J. Bourgain – Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), n° 1, p. 145–171.

[5] T. Cazenave & P.-L. Lions – Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.* **85** (1982), n° 4, p. 549–561.

[6] T. Cazenave & F. B. Weissler – The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, *Nonlinear Anal.* **14** (1990), n° 10, p. 807–836.

[7] D. Christodoulou & A. S. Tahvildar-Zadeh – On the regularity of spherically symmetric wave maps, *Comm. Pure Appl. Math.* **46** (1993), n° 7, p. 1041–1091.

[8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka & T. Tao – Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$, *Ann. of Math.* **167** (2008), n° 3, p. 767–865.

[9] B. Dodson – Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical nonlinear Schrödinger equation when $d \geq 3$, *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), n° 2, p. 429–463.

[10] ———, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical nonlinear Schrödinger equation when $d = 1$, prépublication arXiv:1010.0040.

[11] ———, Global well-posedness and scattering for the defocusing, L^2-critical nonlinear Schrödinger equation when $d = 2$, prépublication arXiv:1006.1375.

[12] ———, Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state, prépublication arXiv:1104.1114.

[13] T. Duyckaerts, C. E. Kenig & F. Merle – Universality of the blow-up profile for small type II blow-up solutions of energy-critical wave equation : the non-radial case, prépublication arXiv:1003.0625.

[14] T. Duyckaerts & F. Merle – Dynamics of threshold solutions for energy-critical wave equation, *Int. Math. Res. Pap. IMRP* (2008), p. Art ID rpn002, 67.

[15] ———, Dynamic of threshold solutions for energy-critical NLS, *Geom. Funct. Anal.* **18** (2009), n° 6, p. 1787–1840.

[16] T. Duyckaerts & S. Roudenko – Threshold solutions for the focusing 3D cubic Schrödinger equation, *Rev. Mat. Iberoam.* **26** (2010), n° 1, p. 1–56.

[17] P. Gérard – Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **3** (1998), p. 213–233.

[18] B. Gidas, W. M. Ni & L. Nirenberg – Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.* **68** (1979), n° 3, p. 209–243.

[19] J. Ginibre & G. Velo – Existence of solutions and scattering theory for the nonlinear Schrödinger equation, in *Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1977)*, Teubner, 1978, p. 320–334.

[20] ———, On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case, *J. Funct. Anal.* **32** (1979), n° 1, p. 1–32.

[21] M. G. Grillakis – Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity, *Ann. of Math.* **132** (1990), n° 3, p. 485–509.

[22] T. HMIDI & S. KERAANI – Remarks on the blowup for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.* **38** (2006), n° 4, p. 1035–1047.

[23] L. ISKAURIAZA, G. A. SERËGIN & V. SHVERAK – $L_{3,\infty}$-solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness, *Uspekhi Mat. Nauk* **58** (2003), n° 2(350), p. 3–44.

[24] C. E. KENIG & F. MERLE – Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case, *Invent. Math.* **166** (2006), n° 3, p. 645–675.

[25] ———, Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation, *Acta Math.* **201** (2008), n° 2, p. 147–212.

[26] ———, Nondispersive radial solutions to energy supercritical non-linear wave equations, with applications, *Amer. J. Math.* **133** (2011), n° 4, p. 1029–1065.

[27] S. KERAANI – On the defect of compactness for the Strichartz estimates of the Schrödinger equations, *J. Differential Equations* **175** (2001), n° 2, p. 353–392.

[28] R. KILLIP, T. TAO & M. VISAN – The cubic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions with radial data, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **11** (2009), n° 6, p. 1203–1258.

[29] R. KILLIP & M. VISAN – The focusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in dimensions five and higher, *Amer. J. Math.* **132** (2010), n° 2, p. 361–424.

[30] R. KILLIP, M. VISAN & X. ZHANG – The mass-critical nonlinear Schrödinger equation with radial data in dimensions three and higher, *Anal. PDE* **1** (2008), n° 2, p. 229–266.

[31] J. KRIEGER & W. SCHLAG – *Concentration compactness for critical wave maps*, EMS Monographs in Math., European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2012.

[32] J. KRIEGER, W. SCHLAG & D. TATARU – Renormalization and blow up for charge one equivariant critical wave maps, *Invent. Math.* **171** (2008), n° 3, p. 543–615.

[33] M. K. KWONG – Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbf{R}^n$, *Arch. Rational Mech. Anal.* **105** (1989), n° 3, p. 243–266.

[34] P.-L. LIONS – The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **1** (1984), n° 2, p. 109–145.

[35] Y. MARTEL & F. MERLE – A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation, *J. Math. Pures Appl.* **79** (2000), n° 4, p. 339–425.

[36] ———, Blow up in finite time and dynamics of blow up solutions for the L^2-critical generalized KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002), n° 3, p. 617–664.

[37] ______, Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation, *Ann. of Math.* **155** (2002), n° 1, p. 235–280.

[38] H. MATANO & F. MERLE – On nonexistence of type II blowup for a supercritical nonlinear heat equation, *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), n° 11, p. 1494–1541.

[39] ______, Classification of type I and type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), n° 4, p. 992–1064.

[40] ______, Threshold and generic type I behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, *J. Funct. Anal.* **261** (2011), n° 3, p. 716–748.

[41] F. MERLE – On uniqueness and continuation properties after blow-up time of self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equation with critical exponent and critical mass, *Comm. Pure Appl. Math.* **45** (1992), n° 2, p. 203–254.

[42] ______, Existence of blow-up solutions in the energy space for the critical generalized KdV equation, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), n° 3, p. 555–578.

[43] F. MERLE & P. RAPHAEL – On universality of blow-up profile for L^2 critical nonlinear Schrödinger equation, *Invent. Math.* **156** (2004), n° 3, p. 565–672.

[44] ______, Profiles and quantization of the blow up mass for critical nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **253** (2005), n° 3, p. 675–704.

[45] F. MERLE & P. RAPHAËL – Blow up of the critical norm for some radial L^2 super critical nonlinear Schrödinger equations, *Amer. J. Math.* **130** (2008), n° 4, p. 945–978.

[46] F. MERLE, P. RAPHAËL & I. RODNIANSKI – Blow up dynamics for smooth equivariant solutions to the energy critical Schrödinger map, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **349** (2011), n^{os} 5-6, p. 279–283.

[47] F. MERLE, P. RAPHAËL & J. SZEFTEL – Stable self-similar blow-up dynamics for slightly L^2 super-critical NLS equations, *Geom. Funct. Anal.* **20** (2010), n° 4, p. 1028–1071.

[48] F. MERLE, P. RAPHAËL & J. SZEFTEL – The instability of Bourgain Wang solutions for the mass critical NLS, à paraître dans *Amer. J. Math.*

[49] F. MERLE & L. VEGA – Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, *Int. Math. Res. Not.* **1998** (1998), n° 8, p. 399–425.

[50] F. MERLE & H. ZAAG – Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998), n° 2, p. 139–196.

[51] ______, Determination of the blow-up rate for the semilinear wave equation, *Amer. J. Math.* **125** (2003), n° 5, p. 1147–1164.

[52] ______, Existence and universality of the blow-up profile for the semilinear wave equation in one space dimension, *J. Funct. Anal.* **253** (2007), n° 1, p. 43–121.

[53] ———, Existence and classification of characteristic points at blow-up for a semilinear wave equation in one space dimension, *Amer. J. Math.* **134** (2012), n° 3, p. 581–648.

[54] N. MIZOGUCHI – Rate of type II blowup for a semilinear heat equation, *Math. Ann.* **339** (2007), n° 4, p. 839–877.

[55] K. NAKANISHI & W. SCHLAG – Global dynamics above the ground state energy for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation, *J. Differential Equations* **250** (2011), n° 5, p. 2299–2333.

[56] ———, Global dynamics above the ground state energy for the cubic NLS equation in 3D, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **44** (2012), n^{os} 1-2, p. 1–45.

[57] G. PERELMAN – On the blow up phenomenon for the critical nonlinear Schrödinger equation in 1D, in *Nonlinear dynamics and renormalization group (Montreal, QC, 1999)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 27, Amer. Math. Soc., 2001, p. 147–164.

[58] F. PLANCHON – Existence globale et scattering pour les solutions de masse finie de l'équation de Schrödinger cubique en dimension deux (d'après Benjamin Dodson, Rowan Killip, Terence Tao, Monica Vişan et Xiaoyi Zhang), Sém. Bourbaki (2010/11), exp. n° 1042, *Astérisque* **348** (2012), p. 425–447.

[59] P. RAPHAËL – Existence and stability of a solution blowing up on a sphere for an L^2-supercritical nonlinear Schrödinger equation, *Duke Math. J.* **134** (2006), n° 2, p. 199–258.

[60] ———, Stability and blow up for the non linear Schrödinger equation, in *Clay summer school on nonlinear evolution equations, Zürich*, 2008, `http://www.claymath.org/programs/summerschool/2008/raphael.pdf`.

[61] P. RAPHAËL & I. RODNIANSKI – Stable blow up dynamics for critical corotational wave maps and the equivariant Yang Mills problems, à paraître dans *Publ. Math. IHÉS*.

[62] P. RAPHAËL & J. SZEFTEL – Standing ring blow up solutions to the N-dimensional quintic nonlinear Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **290** (2009), n° 3, p. 973–996.

[63] I. RODNIANSKI & J. STERBENZ – On the formation of singularities in the critical O(3) σ-model, *Ann. of Math.* **172** (2010), n° 1, p. 187–242.

[64] J. STERBENZ & D. TATARU – Energy dispersed large data wave maps in $2+1$ dimensions, *Comm. Math. Phys.* **298** (2010), n° 1, p. 139–230.

[65] ———, Regularity of wave-maps in dimension $2+1$, *Comm. Math. Phys.* **298** (2010), n° 1, p. 231–264.

[66] R. S. STRICHARTZ – Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Math. J.* **44** (1977), n° 3, p. 705–714.

[67] M. STRUWE – On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces, *Comment. Math. Helv.* **60** (1985), n° 4, p. 558–581.

[68] ———, Globally regular solutions to the u^5 Klein-Gordon equation, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **15** (1988), n° 3, p. 495–513.

[69] ———, Equivariant wave maps in two space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), n° 7, p. 815–823.

[70] T. TAO – Global regularity of wave maps III-VII, prépublication arXiv:0908.0776.

[71] T. TAO, M. VISAN & X. ZHANG – Global well-posedness and scattering for the defocusing mass-critical nonlinear Schrödinger equation for radial data in high dimensions, *Duke Math. J.* **140** (2007), n° 1, p. 165–202.

[72] M. I. WEINSTEIN – Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, *Comm. Math. Phys.* **87** (1982/83), n° 4, p. 567–576.

Pierre RAPHAËL

Institut de Mathématiques de Toulouse
et Institut Universitaire de France
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 9
E-mail : `pierre.raphael@math.univ-toulouse.fr`