

Astérisque

AST

**Sur les conjectures de Gross et Prasad. II -
Pages préliminaires**

Astérisque, tome 347 (2012), p. III-X

http://www.numdam.org/item?id=AST_2012__347__R1_0

© Société mathématique de France, 2012, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

347

ASTÉRISQUE

2012

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. II

C. MÈGLIN & J.-L. WALDSPURGER

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Colette Mœglin

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2, place Jussieu, 75005 Paris
`moeglin@math.jussieu.fr`

Jean-Loup Waldspurger

Institut de Mathématiques de Jussieu-CNRS, 2 place Jussieu, 75005 Paris, France
`waldspur@math.jussieu.fr`

SUR LES CONJECTURES DE GROSS ET PRASAD. II

Colette MœGLIN & Jean-Loup WALDSPURGER

Résumé. — La conjecture de Gross et Prasad détermine, sous certaines conditions, la restriction d'une représentation admissible et irréductible d'un groupe $G = SO(n)$ sur un corps local à un sous-groupe de la forme $G' = SO(n-1)$. Pour deux L -paquets génériques (étendus à la mode de Vogan), l'un de G , l'autre de G' , la conjecture affirme qu'il existe une unique paire (π, π') dans le produit de ces deux L -paquets telle que π' apparaisse dans la restriction de π . De plus, les paramètres de π et π' (dans le paramétrage usuel des L -paquets) sont calculés par une formule explicite où apparaissent des facteurs ϵ . Ce volume, qui est le deuxième numéro d'*Astérisque* consacré à la conjecture, contient la preuve de celle-ci sur un corps de base non-archimédien. Dans un premier article, pour une représentation admissible irréductible et auto-duale d'un groupe $GL(N)$, on exprime la valeur au centre de symétrie de son facteur ϵ à l'aide d'une formule intégrale faisant intervenir le caractère d'un prolongement de la représentation au groupe $GL(N)$ tordu. Le deuxième article démontre la conjecture pour les représentations tempérées. Celle-ci résulte de la stabilisation, au sens de la théorie de l'endoscopie, des deux formules intégrales obtenues dans l'article précédent et dans celui publié dans le volume 346 d'*Astérisque*. Signalons que l'on utilise quelques propriétés des L -paquets qui sont encore conjecturales mais qui ne le seront plus quand Arthur aura achevé son monumental travail en cours. Enfin, dans le dernier article, commun avec C. Mœglin, on étend le résultat aux paquets génériques non tempérés, en prouvant que ceux-ci sont formés d'induites irréductibles de représentations tempérées.

Abstract (On the conjectures of Gross and Prasad.) The conjecture of Gross and Prasad determines, under some assumptions, the restriction of an irreducible admissible representation of a group $G = SO(n)$ over a local field to a subgroup of the form $G' = SO(n-1)$. For two generic L -packets (more precisely two generic Vogan's L -packets), the first for G , the second for G' , the conjecture states that there is a unique pair (π, π') in the product of the two packets such that π' appears in the restriction of π . Moreover, the parametrization of π and π' (in the usual parametrization of L -packets) is given by an explicit formula involving some ϵ -factors. In this second volume of *Astérisque* devoted to the conjecture, we give its proof when the

base field is non-archimedean. In a first paper, we consider an irreducible admissible and self-dual representation of a group $GL(N)$. We prove that the value at the center of symmetry of its ϵ -factor is given by an integral formula who appears the character of an extension of the representation to the twisted $GL(N)$. The second paper proves the conjecture for tempered representations. It is a consequence of the stabilization, in the sense of endoscopy theory, of the two integral formulas proved in the first paper above and in the volume 346. Here we use some properties of L -packets that are still conjectural, but were probably proved by Arthur in a next future. In the last paper with Mœglin, we extend the result to non-tempered generic L -packets. It follows from the following fact that we prove: the elements in these L -packets are irreducible induced representations from tempered representations.

TABLE DES MATIÈRES

Jean-Loup Waldspurger — Calcul d'une valeur d'un facteur ε par une formule intégrale	1
Introduction	1
Remarque sur la notation	6
1. Notations, groupes tordus	6
1.1. Notations générales	6
1.2. Groupes tordus	6
1.3. Les espaces $\mathcal{A}_{\tilde{M}}$	9
1.4. Mesures	10
1.5. Intégrales orbitales pondérées	11
1.6. Quasi-caractères	11
1.7. Fonctions très cuspidales	12
1.8. Distributions locales associées à une fonction très cuspidale	12
1.9. Représentations de groupes tordus	14
1.10. Intégrales orbitales pondérées invariantes	15
1.11. Un lemme d'annulation	16
1.12. Induction de quasi-caractères	18
1.13. Propriétés des fonctions très cuspidales	19
2. Le groupe GL_d tordu	19
2.1. Description du groupe tordu	19
2.2. Modèle de Whittaker	20
2.3. Représentations induites	21
2.4. Représentations elliptiques des groupes linéaires tordus	23
2.5. Facteurs ε	23
3. La partie géométrique de la formule intégrale	24
3.1. Plongements de groupes linéaires tordus	24
3.2. Les ingrédients de la formule géométrique	25
3.3. La formule géométrique	26
3.4. Localisation	27
3.5. Une première expression de $J_{\tilde{x}, \omega, N}(\Theta, \tilde{f})$	34
3.6. Changement de fonction de troncature	35

3.7. Apparition des intégrales orbitales pondérées	40
3.8. Preuve du théorème 3.2	42
4. Majorations	43
4.1. Les résultats	43
4.2. Choix d'une base	44
4.3. Comparaison de Ξ^H et Ξ^G	45
4.4. Majorations d'intégrales unipotentes	45
4.5. Majoration d'une intégrale de fonctions d'Harish-Chandra	49
4.6. Preuve (sic!) des majorations de 4.1	53
5. Produits bilinéaires et facteurs ε	53
5.1. Modèles de Whittaker	53
5.2. Entrelacements	54
5.3. Entrelacements et modèles de Whittaker	54
5.4. Non-nullité des entrelacements	60
5.5. Entrelacements et groupes tordus	60
5.6. Entrelacements et induction	62
6. La partie spectrale de la formule intégrale	63
6.1. Énoncé du théorème	63
6.2. Utilisation de la formule de Plancherel	63
6.3. Apparition des entrelacements	64
6.4. Une première approximation	68
6.5. Changement de fonction de troncature	69
6.6. Un résultat extrait de la formule des traces locale tordue	82
6.7. Utilisation de la formule des traces locale tordue	84
6.8. Simplification de $\Phi(g')$	86
6.9. Évaluation d'une limite	88
6.10. Preuve du théorème 6.1	90
7. Une formule intégrale calculant une valeur d'un facteur ε	92
7.1. Énoncé du théorème	92
7.2. Terme géométrique et induction	92
7.3. Début de la preuve : le cas des représentations induites	98
7.4. Le cas elliptique	99
Références	102

Jean-Loup Waldspurger — *La conjecture locale de Gross-Prasad pour les représentations tempérées des groupes spéciaux orthogonaux*

Introduction	103
1. Paramétrages	108
1.1. Notations générales	108
1.2. Mesures	108
1.3. Espace de paramètres	110
1.4. Paramétrage des classes de conjugaison	112
1.5. Définition de fonctions sur l'ensemble de paramètres	115

1.6. Endoscopie	116
1.7. Endoscopie pour les groupes spéciaux orthogonaux	118
1.8. Endoscopie pour les groupes linéaires tordus	121
2. Quelques formules revisitées	122
2.1. Multiplicités pour les groupes spéciaux orthogonaux	122
2.2. Reformulation de $m_{\text{géo}}(\sigma, \sigma')$	124
2.3. Facteurs ε de paires	127
2.4. Reformulation de $\varepsilon_{\text{géo}, \nu_1}(\pi, \pi')$	128
3. Endoscopie	130
3.1. Rappels sur le calcul des fonctions $c_{\sigma, \theta}$	130
3.2. Définition d'une multiplicité stable	132
3.3. Transfert de multiplicités	133
3.4. Transfert de valeurs de facteurs ε	143
3.5. Une première conséquence	149
4. Preuve du théorème principal	150
4.1. Représentations du groupe de Weil-Deligne	150
4.2. Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux impairs	152
4.3. Conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs	153
4.4. Version faible des conjectures pour les groupes spéciaux orthogonaux pairs	155
4.5. Remarques sur les conjectures	155
4.6. Remarques sur les constantes	156
4.7. Caractère central	157
4.8. Détermination des constantes	159
4.9. Le théorème	159
4.10. Utilisation des résultats antérieurs	161
4.11. La preuve dans le cas G' déployé	162
4.12. Le cas G' non déployé	163
Références	165
 Colette Mœglin & Jean-Loup Waldspurger — <i>La conjecture locale de Gross-Prasad pour les groupes spéciaux orthogonaux : le cas général</i>	
Introduction	167
1. Induction et multiplicités	171
1.1. Notations	171
1.2. Définition des multiplicités	172
1.3. Induction	173
1.4. Une première inégalité	174
1.5. Rappel d'un résultat de Gan, Gross et Prasad	178
1.6. L'inégalité $m(\sigma, \sigma') \leq m(\sigma_0, \sigma'_0)$	178
1.7. Produit multilinéaire	180
1.8. Prolongement méromorphe du produit multilinéaire	185
1.9. Preuve de l'inégalité $m(\sigma_0, \sigma'_0) \leq m(\sigma, \sigma')$	186

2. Irréductibilité et représentations génériques	187
2.1. Rappels sur les paramétrages	187
Notation	189
2.2. Induction et modules de Jacquet	189
2.3. Support cuspidal étendu	191
2.4. Support cuspidal étendu et induction dans le cas tempéré	193
2.5. Un lemme technique	194
2.6. Induction et L -paquets tempérés	195
2.7. Propriété des représentations tempérées ayant un modèle de Whittaker	196
2.8. Définition des points de réductibilité possible pour une représentation tempérée	201
2.9. Réductibilité et genericité	202
2.10. La notion de liaison	203
2.11. Un résultat d'irréductibilité	204
2.12. Un second résultat d'irréductibilité	207
2.13. Critère d'irréductibilité	207
2.14. Irréductibilité et L -paquets génériques	208
2.15. Le cas des groupes spéciaux orthogonaux pairs	209
3. Preuve du théorème	211
4. Existence et unicité des représentations génériques dans un paquet tempéré	213
Références	215