Bertrand Rémy

Groupes algébriques pseudo-réductifs et applications [d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad]

Astérisque, tome 339 (2011), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 1021, p. 259-304

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2011__339__259_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2010
62e année, 2009-2010, n° 1021, p. 259 à 304

GROUPES ALGÉBRIQUES PSEUDO-RÉDUCTIFS ET APPLICATIONS
[d'après J. Tits et B. Conrad-O. Gabber-G. Prasad]

par **Bertrand RÉMY**

INTRODUCTION

Le thème général de ce rapport est la théorie des groupes algébriques. Plus précisément, il s'agit de rendre compte de l'étude, commencée par J. Tits et menée à bien par B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad, d'une classe de groupes généralisant celle des groupes réductifs. La définition de cette classe est assez naturelle quand on connaît ces derniers ; pour cette raison, les groupes en question sont appelés *pseudo-réductifs.* Un corps de base étant donné, la classe des groupes pseudo-réductifs contient toujours celles des groupes réductifs connexes ; elle contient plus de groupes exactement quand le corps est non parfait. Une motivation pour travailler avec des groupes pseudo-réductifs sur des corps non parfaits est qu'élucider leur structure permet en retour un dévissage fin des groupes algébriques connexes généraux. Ce dévissage a par exemple permis à B. Conrad de prouver des résultats de finitude et de compacité pour les groupes algébriques sur les corps globaux de caractéristique positive et leurs complétions. Sur les corps de nombres, ces résultats avaient été démontrés dans les années 60 par A. Borel, J-P. Serre, Harish-Chandra, G. D. Mostow, T. Tamagawa... mais des énoncés généraux restaient non démontrés sur les corps de fonctions. Le travail imposant de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad culmine en une classification des groupes pseudo-réductifs : il existe un procédé presque universel qui permet de construire les groupes pseudo-réductifs au moyen des groupes réductifs, de certains groupes commutatifs et du procédé de restriction des scalaires. Cependant un autre intérêt important de la monographie à laquelle ce travail a donné lieu est que les auteurs reprennent les travaux d'A. Borel et de J. Tits sur la structure des groupes algébriques connexes (conjugaison, points rationnels, systèmes de racines). Des énoncés avaient été présentés par ces derniers à la fin des années 70. Ils avaient été démontrés dans les cours de J. Tits au début des années 90. Ils sont maintenant repris dans un cadre schématique, tout comme la jolie théorie des groupes unipotents écrite par J. Tits à la fin des années 60 et réinvestie par J. Oesterlé dans les années 80.

Revenons un peu plus en détail sur certains points.

Groupes algébriques réductifs

Un *groupe algébrique* est une variété algébrique (lisse) munie d'une structure de groupe dont la multiplication et le passage à l'inverse sont des applications régulières pour la structure algébrique en question. Les groupes considérés dans ces notes sont des groupes de matrices ; autrement dit, un groupe algébrique est ici un groupe algébrique linéaire.

On peut motiver certaines définitions de la théorie par analogie avec celle des algèbres. Une condition importante dans les deux cas est celle de *semi-simplicité* [**12**, VIII]. On peut caractériser les algèbres semi-simples, parmi toutes celles de dimension finie, par la trivialité du radical de Jacobson ; ce radical contient en outre tous les idéaux à gauche formés d'éléments nilpotents. Un des intérêts des algèbres semi-simples est la possibilité de décomposer leurs représentations linéaires en représentations matricielles diagonales par blocs, à blocs irréductibles.

Si l'on revient aux groupes et si on considère une représentation linéaire (de dimension finie) d'un groupe algébrique, celle-ci va pouvoir se mettre sous forme matricielle triangulaire supérieure, les blocs diagonaux correspondant à des sous-quotients irréductibles. Le noyau de l'action sur la somme directe des sous-quotients est un sous-groupe distingué et représenté par des matrices *unipotentes*, c'est-à-dire dont toutes valeurs propres valent 1. Si H est un groupe algébrique connexe (disons sur un corps parfait), son *radical unipotent* est son plus grand sous-groupe algébrique distingué, connexe et unipotent. On note $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ ce groupe et on dit que H est *réductif* si $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}) = \{1\}$. La classe des groupes réductifs est le bon cadre pour étudier les groupes classiques de matrices (groupes d'automorphismes de formes bilinéaires, sesquilinéaires et généralisations). C'est le travail fondamental de C. Chevalley [**16**] qui élucide la structure de ces groupes et qui fournit une classification sur un corps algébriquement clos qui ne dépend que de données combinatoires issues de la théorie de Lie. Dans le cas d'un corps de base quelconque, la structure et la classification des groupes réductifs ont été obtenues respectivement par A. Borel et J. Tits [**7**] et par J. Tits [**36**], dans le même esprit que précédemment (mais avec des énoncés devant prendre en compte le corps de base).

Corps de base non parfaits et groupes pseudo-réductifs

Les choses deviennent plus compliquées quand on prend en compte le corps de définition des sous-groupes d'un groupe algébrique, c'est-à-dire le plus petit corps contenant les coefficients polynomiaux d'équations définissant le sous-groupe considéré. Dans un de ses cours **[41]**, J. Tits recense les principales mises en garde à avoir en mémoire quand on travaille avec un groupe algébrique connexe H défini sur un corps k non parfait :

1. l'adhérence de Zariski des points rationnels $\mathrm{H}(k)$ peut être un sous-groupe strictement inclus dans H ;
2. le groupe H peut n'admettre aucun sous-groupe algébrique non trivial qui soit unipotent, connexe, distingué et défini sur k, sans pour autant être réductif ;
3. certains éléments unipotents peuvent n'être contenus dans aucun sous-groupe unipotent *déployé*, c'est-à-dire admettant une suite de composition à sous-quotients isomorphes au groupe additif de k.

Les groupes *pseudo-réductifs* sont ceux qui sont mentionnés dans le deuxième point. Précisément pour H comme ci-dessus, le *radical unipotent rationnel* de H est son plus grand sous-groupe distingué, connexe, unipotent et défini sur k (1.1.1). On note $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ ce groupe et on dit que H est *k-pseudo-réductif* si $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$ (1.1.2). Le livre de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad **[18]** est principalement consacré à l'étude et à la classification de ces groupes. Ce qui motive cela est par exemple la suite exacte

$$1 \to \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to \mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to 1$$

qui suggère qu'une meilleure compréhension des groupes unipotents et pseudo-réductifs doit permettre de comprendre les groupes algébriques (connexes) en général. La seconde partie de ce rapport illustre le fait que tel est bien le cas, d'après **[18]** et **[17]**.

Classification des groupes pseudo-réductifs

La classification dont il est question est en réalité la mise en évidence d'un procédé très général permettant de produire « presque tous » les groupes pseudo-réductifs, les groupes faisant exception étant définis seulement en caractéristique 2 et 3.

Voyons d'abord comment produire des groupes pseudo-réductifs non réductifs. Voici un moyen, qui demande à être raffiné pour être exhaustif. On part d'une extension finie purement inséparable non triviale K/k, par exemple $k = \mathbf{F}_q(t)$ (où q est une puissance de la caractéristique p) et $K = k(u)$ avec $u^p \in k$ mais $u \notin k$. On se donne un groupe réductif connexe non trivial G sur K, par exemple SL_n ou le groupe multiplicatif GL_1. Notons $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{G})$ le groupe algébrique obtenu par restriction des scalaires, c'est-à-dire en choisissant une base du k-espace vectoriel K et en voyant G comme un groupe sur k via cette base. Alors le groupe $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{G})$ est k-pseudo-réductif mais n'est pas réductif (1.2.2).

Le procédé dit *standard* de construction de groupes pseudo-réductifs est une élaboration assez sophistiquée sur le procédé précédent. Une des nouveautés est la possibilité de pratiquer une sorte de « chirurgie » consistant à remplacer un sous-groupe de Cartan par un sous-groupe commutatif plus général (pas n'importe lequel, cependant) au moyen d'un procédé de « poussé en avant non commutatif » (3.1.1). Voici une simplification du résultat de classification des groupes pseudo-réductifs (3.2.1).

THÉORÈME. — *Tout groupe pseudo-réductif en caractéristique différente de* 2 *et* 3 *est standard, c'est-à-dire obtenu par le procédé de construction standard.*

Cet énoncé et ceux qui le précisent en petite caractéristique constituent le principal résultat du livre **[18]** de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad. Notons que le cas de caractéristique 3 est pour ainsi dire contrôlé (3.3.3) et qu'en caractéristique 2, sous l'hypothèse d'un corps de base k presque parfait (au sens où $[k : k^2] \leqslant 2$), on dispose d'une quantité importante d'informations (3.3.4).

Structure des groupes algébriques généraux

Une bonne partie de la théorie de Borel-Tits sur les groupes réductifs isotropes **[7]** peut être résumée *in fine* :

1. par des théorèmes de conjugaison (sur le corps de base) pour des classes de sous-groupes remarquables ;
2. par l'existence d'une structure combinatoire très particulière, les *systèmes de Tits*, dans les groupes de points rationnels correspondants ;
3. par le fait que la combinatoire ci-dessus peut être raffinée par l'existence d'une famille de sous-groupes indexée par un système de racines naturel dans le groupe.

Les classes de groupes du point 1 sont notamment celles des tores déployés maximaux et des sous-groupes paraboliques minimaux (un sous-groupe est dit *parabolique* si le quotient du groupe ambiant qui lui est associé est une variété propre). Dans le cas d'un groupe algébrique connexe satisfaisant une hypothèse plus faible encore que la pseudo-réductivité, A. Borel et J. Tits ont mis en évidence que les deux premiers points ci-dessus au moins étaient encore valables **[10]** — les preuves sont écrites dans **[41]** et **[18]**. Il faut pour cela généraliser les notions de groupes paraboliques (2.1) et de variété propre (2.2.1). Rappelons qu'un intérêt de la structure de système de Tits **[13**, IV.1] est qu'elle fournit une preuve uniforme de la simplicité abstraite (modulo le centre) des groupes de points rationnels de groupes algébriques simples isotropes (sur un corps de base à au moins 4 éléments) **[35]**. En outre les systèmes de Tits à groupe de Weyl fini, par exemple ceux du point 2, ont été complètement classés **[39]**. Ceci, combiné au point 2 pour les groupes pseudo-réductifs (2.3.3), est une indication — vérifiée dans les faits — que les points rationnels des groupes pseudo-réductifs n'apportent en revanche rien de nouveau à la théorie abstraite des groupes.

Applications sur la structure des groupes et en arithmétique

La classification des groupes pseudo-réductifs permet, à travers les procédés de construction quasiment exhaustifs qu'elle fournit, de déduire un certain nombre de propriétés de structure pour ces groupes : cela concerne les sous-groupes de Cartan, qui sont classiquement les centralisateurs des tores maximaux dans le groupe (4.1), les sous-groupes pseudo-paraboliques qui sont précisément la généralisation des groupes paraboliques évoquée plus haut (définie par une notion de propreté appropriée de la variété quotient associée), les sous-groupes radiciels (4.3). Bien souvent le fait, pour un groupe pseudo-réductif, d'être réductif se lit sur la nature de ces sous-groupes remarquables. Il est également possible de tirer de la classification des propriétés fortes sur les sous-groupes distingués (4.2)

Outre leurs belles propriétés de structure, les applications les plus frappantes de la théorie des groupes réductifs relèvent sans doute des liens entre l'arithmétique et les groupes algébriques. C'est la même chose pour les groupes pseudo-réductifs. En effet, B. Conrad a très récemment tiré parti de la théorie développée dans **[18]** pour démontrer des résultats fondamentaux de finitude et de compacité pour les schémas en groupes sur les corps globaux et locaux de caractéristique positive. Citons la finitude des ensembles de Tate-Shafarevich (5.2.2), la finitude du nombre de classes (5.2.1), tout cela pour des schémas en groupes très généraux, et des finitudes en cohomologie galoisienne (5.2.3). Ces résultats sont classiques sur les corps de nombres et leurs complétés (ils sont dus notamment à A. Borel, J-P. Serre), mais les preuves manquaient pour les cas de caractéristique positive. Des questions de mesures et de topologie pour les quotients arithmétiques de groupes adéliques sont également abordées : B. Conrad prouve une version optimale du critère de compacité de Godement (5.3.2) et la finitude des nombres de Tamagawa (5.3.4), des questions évoquées dans **[26]**.

Plan du rapport

Les deux premières sections sont antérieures, chacune à sa façon, à la classification des groupes pseudo-réductifs. La section 1 rentre directement dans le vif du sujet et présente les groupes pseudo-réductifs et un moyen de les fabriquer grâce à une restriction de Weil purement inséparable ; quelques propriétés ne dépendant pas de la classification sont également citées. La section 2 présente les propriétés générales des groupes algébriques connexes, par extension du cas des groupes réductifs. C'est la section 3 qui fait un résumé très succinct de la classification des groupes pseudo-réductifs, en ayant présenté au préalable le procédé de construction « standard ». Les deux dernières sections présentent des résultats qui dépendent de la classification. Ainsi la section 4 fait la liste des résultats de structure pour les groupes pseudo-réductifs ;

ces résultats concernent les sous-groupes de Cartan, les sous-groupes radiciels etc. et fournit des caractérisations des groupes réductifs parmi les pseudo-réductifs. La section 5 contient les résultats de nature arithmétique de B. Conrad sur les groupes algébriques sur les corps globaux et locaux de caractéristique positive.

Conventions

Dans ce qui suit, k désigne un corps. On choisit une clôture algébrique $\overline{k}$ de k et on note k_s la fermeture séparable de k dans $\overline{k}$. Quand k sera supposé imparfait, disons de caractéristique p, on pourra être amené à introduire la fermeture parfaite de k dans $\overline{k}$, notée k_{p} et définie par $k_{\mathrm{p}} = \{x \in \overline{k} \mid x^{p^r} \in k \text{ pour un certain entier } r\}$.

Tous les groupes algébriques sont affines et lisses, c'est-à-dire réduits ; plus précisément : un *k-groupe* est ici un groupe algébrique linéaire sur k, c'est-à-dire un k-schéma en groupes affine, algébrique et lisse [**19**]. On utilise les lettres G et H pour désigner des k-groupes algébriques (souvent connexes, définis sur k). Le groupe G sera souvent supposé pseudo-réductif, mais *ce dernier point sera systématiquement rappelé le cas échéant.* Si H est un k-groupe, on note $\mathrm{X}^*(\mathrm{H})$ le groupe de ses caractères définis sur k et $\mathrm{X}_*(\mathrm{H})$ le groupe de ses cocaractères sur k. Pour un k-tore S, on utilise la notation usuelle $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pour la dualité naturelle entre $\mathrm{X}^*(\mathrm{S})$ et $\mathrm{X}_*(\mathrm{S})$.

Remerciements

Je remercie R. Rouquier pour son aide bibliographique et H. Benmessaoud pour son chaleureux accueil à l'Université de Monastir, où une grosse partie de ce travail a pu être effectuée. Je remercie aussi B. Conrad et G. Prasad pour leur amicale disponibilité et leur indulgence.

1. GROUPES PSEUDO-RÉDUCTIFS

Dans cette section, on présente les groupes pseudo-réductifs. La référence est principalement [**18**] ; la notion de groupe pseudo-réductif est due à J. Tits et avait déjà été présentée dans la seconde édition du livre de T. Springer [**34**, §15]. On va évoquer quelques propriétés de base de ces groupes — des propriétés dont la preuve ne nécessite pas la classification de B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad (Section 3) ; le choix de ces résultats n'est pas exhaustif. En gros, quand on compare la théorie des groupes pseudo-réductifs à celle des groupes réductifs, les énoncés sont souvent délicats quand il s'agit de résultats de géométrie algébrique ; ils sont plus attendus quand ils relèvent de la théorie abstraite des groupes (par exemple quand ils portent sur les groupes de points rationnels associés).

1.1. Radical unipotent rationnel, groupes pseudo-réductifs et unipotents

Dans ce qui suit, G et H sont des groupes algébriques connexes définis sur le corps k.

1.1.1. *Radical unipotent rationnel.* — Il est assez naturel d'introduire une notion de radical unipotent pour H qui prenne en compte le corps de base de H. On trouve la preuve du résultat suivant par exemple dans [**34**, Prop. 14.4.5].

PROPOSITION 1.1. — *Le k-groupe* H *contient un unique k-sous-groupe connexe, unipotent et distingué, maximal pour ces propriétés ; on le note $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$.*

De la même façon, il existe dans H un unique k-sous-groupe $\mathscr{R}_k(\mathrm{H})$ connexe, résoluble et distingué, maximal pour ces propriétés.

DÉFINITION 1.2. — *On dit que $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ est le* radical unipotent rationnel *de* H *et que $\mathscr{R}_k(\mathrm{H})$ est son* radical rationnel.

Les notions classiques de *radical* (résoluble) et de *radical unipotent* de H [**2**, 11.21] s'obtiennent simplement en ôtant la condition d'être défini sur k dans les définitions précédentes (autrement dit, en appliquant les définitions précédentes au groupe $\mathrm{H}_{\overline{k}}$).

Le radical $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ et le radical unipotent $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ sont stables sous l'action naturelle de $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ issue de la k-structure de H. Ces sous-groupes sont donc définis sur k si celui-ci est parfait ; ils ne sont alors rien d'autre que le radical et le radical unipotent de H, respectivement. En général, on a : $\mathscr{R}_k(\mathrm{H})_{\overline{k}} \subset \mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ et $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})_{\overline{k}} \subset \mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$.

Les groupes k-pseudo-réductifs (1.1.2) mais non réductifs définis immédiatement ci-après sont des groupes dont le radical unipotent n'est pas défini sur k. On en donne des exemples en 1.2. On peut aussi donner des exemples concrets en termes de groupes classiques définis grâce à des formes quadratiques de défaut $\geqslant 2$ en caractéristique 2 [**10**, §3, p. 55].

On peut prouver la stabilité du radical unipotent rationnel vis-à-vis des extensions séparables [**18**, Prop. 1.1.9].

PROPOSITION 1.3. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Si K/k est une extension séparable, alors $\mathscr{R}_{u,K}(\mathrm{H}_K) = \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})_K$.*
(ii) *Le sous-groupe $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ de $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est défini sur une extension finie purement inséparable de k.*

Le second énoncé de [loc. cit.] est plus général. Le (ii) de notre proposition découle du fait que $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ est stable par $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$, donc défini sur la fermeture parfaite k_{p}, et qu'il est algébrique.

1.1.2. *Groupes pseudo-réductifs.* — Nous pouvons maintenant définir la notion principalement considérée dans ce rapport.

DÉFINITION 1.4. — *Un k-groupe* H *est dit* pseudo-réductif relativement à k *ou* sur k, *ou encore* k-pseudo-réductif, *s'il est connexe et si son radical unipotent k-rationnel* $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ *est trivial.*

Par exemple, tout k-groupe réductif connexe est bien entendu k-pseudo-réductif. Ici, on s'intéressera surtout aux groupes k-pseudo-réductifs non réductifs.

On peut naturellement faire apparaître un groupe k-pseudo-réductif à partir de n'importe quel k-groupe connexe. En effet, si H est un tel groupe, alors le groupe quotient $\mathrm{H}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ est k-pseudo-réductif. On a d'ailleurs une suite exacte :

$$(\star) \qquad 1 \to \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to \mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H}) \to 1,$$

qui laisse espérer que comprendre séparément les k-groupes unipotents et les groupes k-pseudo-réductifs permet de comprendre les k-groupes algébriques connexes généraux. Cette suite exacte motive donc aussi bien l'étude des groupes k-pseudo-réductifs que celles des k-groupes unipotents [**18**, Remark 1.1.4].

Pour l'instant, mentionnons simplement que la connaissance approfondie des groupes pseudo-réductifs a permis à B. Conrad de démontrer des résultats de finitude (en cohomologie galoisienne) et de compacité (de quotients arithmétiques de groupes adéliques) sur les corps globaux de caractéristique positive [**17**]. Ces résultats étaient connus pour les corps de nombres depuis une quarantaine d'années et étaient restés ouverts pour les corps de fonctions (Sect. 5).

1.1.3. *Groupes unipotents.* — Faisons donc une digression sur les groupes unipotents. La théorie de ces groupes, intéressante surtout sur les corps non parfaits, a été faite dans les années 60, notamment par J. Tits [**37**]. Cette théorie est retravaillée dans [**26**, Partie V]. Une reformulation complète, utilisant notamment le langage des schémas, est maintenant disponible dans [**18**, Appendix B]. Pour se faire une idée, voici quelques définitions et résultats, dont certains nous serons utiles.

1. Tout k-groupe unipotent connexe admet une suite de composition centrale par des sous-groupes caractéristiques pour laquelle les sous-quotients sont des k-formes de puissances $(\mathbf{G}_a)^n$ du groupe additif $\mathbf{G}_a$ [**20**, Exp. XVII, 4.1.1].
2. On dit qu'un k-groupe unipotent est *déployé* s'il admet une suite de composition pour laquelle chaque sous-quotient est k-isomorphe à $\mathbf{G}_a$ (un tel groupe est alors connexe).
3. Tout k-groupe unipotent connexe se déploie sur une extension purement inséparable finie de k [**26**, V, 2.2].
4. On dit qu'un k-groupe unipotent U est *totalement ployé* sur k si tout morphisme de k-variétés $\mathbb{A}^1_k \to \mathrm{U}$ est constant ($\mathbb{A}^1$ est la droite affine).

5. Tout k-groupe unipotent U admet un plus grand sous-groupe unipotent k-déployé et distingué $\mathrm{U}_{\mathrm{dép}}$, dans le sens où le k-groupe unipotent $\mathrm{U}/\mathrm{U}_{\mathrm{dép}}$ est totalement ployé sur k [**18**, Th. B.3.4].
6. Tout k-groupe unipotent U admet un plus grand k-sous-groupe connexe, central et d'exposant p [**37**, p. 152], qui est non trivial dès que U n'est pas fini. On note $cckp(\mathrm{U})$ ce groupe.
7. Soit U un groupe unipotent connexe totalement ployé sur k. Soit S un k-tore. La seule action (algébrique et définie sur k) de S sur U est l'action triviale [**18**, Cor. B.4.4].

Ce dernier point dit que, dans les considérations de poids sous une action de k-tore, les groupes unipotents totalement ployés sur k ne sont pas détectés.

Ce résumé sommaire ne rend malheureusement pas justice à la très belle théorie des groupes unipotents sur les corps non parfaits.

1.1.4. *Deux comportements délicats.* — Afin de mesurer les difficultés techniques rencontrées pour élucider la structure et la classification de ces groupes, énonçons deux mauvais comportements de stabilité, qui tranchent avec la théorie des groupes réductifs.

Vis-à-vis des extensions de corps. La pseudo-réductivité peut disparaître après extension de corps. Pour le voir, il suffit de considérer un k-groupe pseudo-réductif sur k mais non réductif, disons G (1.2.2). Par hypothèse, $\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ est non trivial et n'est pas défini sur k. Il est pourtant défini sur une extension finie et purement inséparable, disons K/k (Prop. 1.3). Le groupe G n'est donc pas K-pseudo-réductif, alors qu'il est k-pseudo-réductif.

Vis-à-vis des quotients. Dans [**18**], les auteurs donnent de nombreux exemples de groupes pseudo-réductifs admettant des quotients non pseudo-réductifs. Ils remarquent que des exemples de telles situations sont disponibles sur n'importe quel corps de base non parfait et prennent le soin de mettre en évidence des exemples où les propriétés du groupe pseudo-réductif initialement considéré sont fortes. Le groupe peut en effet être choisi commutatif [**18**, Ex. 1.1.3] (restriction de Weil purement inséparable de GL_1), pseudo-réductif parfait à quotient non pseudo-réductif (alors que le sous-groupe distingué est lui aussi parfait) [loc. cit., Ex. 1.6.4], ou encore standard au sens de 3.1 [loc. cit., Ex. 1.4.9]. Nous citerons aussi le cas d'un quotient central à la fin de 1.2 (remarque 1.8).

1.2. Exemples de construction par restriction des scalaires

L'idée d'utiliser la restriction de Weil (ou restriction des scalaires) pour une extension purement inséparable afin de construire des groupes pseudo-réductifs, apparaît par exemple dans [**10**, §3].

1.2.1. *Restriction de Weil.* — Nous allons commencer par présenter ce procédé. On peut le définir rapidement en voyant les groupes algébriques comme des foncteurs en groupes [**19**, I, §1, 6]. Soit k'/k une extension finie et soit G un k'-foncteur en groupes ; on dispose d'un foncteur $R \rightsquigarrow \mathrm{G}(R \otimes_k k')$ défini sur les k-algèbres. Si G est un k'-schéma en groupes affine algébrique, il existe un k-schéma en groupes affine algébrique, noté $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})$, et un morphisme de k'-schémas en groupes $\alpha_{\mathrm{G}} : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})_{k'} \to \mathrm{G}$ tels que pour tout k-schéma V on ait une bijection fonctorielle en V :

$$\mathrm{Hom}_{k'\text{-sch}}\big(\mathrm{V}_{k'}, \mathrm{G}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-sch}}\big(\mathrm{V}, \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})\big).$$

Le k-schéma $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})$, qui représente donc le foncteur ci-dessus, est appelé la *restriction de Weil* (ou *restriction des scalaires*) de G associé à l'extension k'/k. De cette définition découlent naturellement des propriétés intéressantes [**26**, App. 2 et 3] :

1. tout morphisme de k'-groupes $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ donne lieu à un morphisme de k-groupes $\mathrm{R}_{k'/k}(u) : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}) \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{H})$, qui est lisse si u l'est ;
2. si G est un k'-schéma en groupes algébrique lisse, autrement dit un k'-groupe algébrique, on a : $\dim\big(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})\big) = [k' : k]\dim(\mathrm{G})$;
3. le foncteur $\mathrm{R}_{k'/k}$ est exact à gauche, mais pas à droite en général ;
4. si k'/k est (finie) séparable, on a une identification $\big(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G})\big)_{k_s} \simeq \prod_{\sigma:k'\to k_s} \mathrm{G}^\sigma$, avec $\mathrm{G}^\sigma = \mathrm{G}_{k_s^\sigma}$ où la structure de k'-algèbre de k_s^σ est donnée par l'homomorphisme σ [**23**, Prop. 20.7].

Plutôt qu'à la situation de 4, nous nous intéresserons au contraire aux extensions (finies) k'/k qui sont purement inséparables. En ce qui concerne le défaut d'exactitude à droite de $\mathrm{R}_{k'/k}$, c'est l'origine de constructions de groupes pseudo-réductifs non réductifs plus généraux que ceux obtenus grâce à la proposition 1.5.

1.2.2. *Construction de groupes pseudo-réductifs.* — La proposition suivante, qui est une grande source de groupes pseudo-réductifs non réductifs, apparaît dans les notes de cours de J. Tits [**41**, §4, pp. 248-249].

PROPOSITION 1.5. — *Soit K/k une extension finie et soit* H *un K-groupe connexe réductif non trivial. On suppose K/k purement inséparable non triviale. Alors le groupe* $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H})$ *est k-pseudo-réductif, mais n'est pas réductif.*

Preuve (esquisse). — Par la proposition 1.3, on se ramène au cas où le corps k est séparablement clos : $k = k_s$. Notons p sa caractéristique et $\mathrm{G} = \mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H})$.

Prouvons la pseudo-réductivité de G. Donnons-nous U un k-sous-groupe unipotent, connexe, distingué dans G, qu'on suppose de dimension non nulle pour aboutir à une contradiction. On dispose alors du sous-groupe $cckp(\mathrm{U})$ évoqué en 1.1.3, qui est central dans U, connexe, d'exposant p et non trivial. Le groupe de points rationnels $cckp(\mathrm{U})(k)$ est un sous-groupe d'exposant p et distingué dans $\mathrm{G}(k)$; notons-le V.

Le groupe V est infini par densité des points séparables et parce que $cckp(\mathrm{U})$ est connexe non trivial. Par ailleurs, par définition de la restriction des scalaires, on a $\mathrm{G}(k) = \mathrm{H}(K)$. L'adhérence de Zariski $\overline{\mathrm{V}}^Z$ de V dans H reste dans le lieu des zéros des équations polynomiales données par $X^p = 1$ (X matrice générique). La composante neutre $(\overline{\mathrm{V}}^Z)^\circ$ de $\overline{\mathrm{V}}^Z$ est donc un sous-groupe distingué dans H, d'indice fini dans $\overline{\mathrm{V}}^Z$ donc de dimension positive, et qui ne peut contenir de tore car d'exposant fini. Or, parmi les groupes algébriques connexes de dimension positive, seuls les groupes unipotents ne contiennent pas de tore non trivial [**19**, IV, §2, Prop. 3.11]. Un k-sous-groupe U de G comme ci-dessus donnerait donc lieu à un sous-groupe unipotent, connexe non trivial, distingué dans H. C'est exclu par réductivité de H.

Prouvons maintenant que G n'est pas réductif. La $\overline{k}$-algèbre $\mathrm{B} = K \otimes_k \overline{k}$ est une $\overline{k}$-algèbre commutative de dimension finie. Puisque K/k est purement inséparable, c'est aussi un anneau local d'idéal maximal, disons $\mathfrak{m}$, nilpotent. On a : $\mathrm{B} = \overline{k}\,1 \oplus \mathfrak{m}$ et on note $\pi : \mathrm{B} \twoheadrightarrow \overline{k}$ la projection associée. Cette projection donne lieu à un homomorphisme de groupes $\pi_{\mathrm{H}} : \mathrm{H}(\mathrm{B}) \to \mathrm{H}(\overline{k})$. On a $\mathrm{H}(\mathrm{B}) = \mathrm{G}(\overline{k})$ et cet homomorphisme n'est autre que la réalisation sur $\overline{k}$ de l'homomorphisme $\big(\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H})\big)_K \to \mathrm{H}$. Choisissons un plongement de k-groupes $\mathrm{H} \subset \mathrm{GL}_n$. Alors $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathrm{H}}) = \mathrm{H}(\mathrm{B}) \cap \mathrm{Ker}(\pi_n)$, où $\pi_n : \mathrm{GL}_n(\mathrm{B}) \to \mathrm{GL}_n(\overline{k})$ est l'homomorphisme de groupes déduit de π, autrement dit la réduction modulo $\mathfrak{m}$ des coefficients matriciels. Le « sous-groupe de congruence » $\mathrm{Ker}(\pi_n)$ est formé de matrices unipotentes puisque $\mathfrak{m}$ est nilpotent ; par conséquent, le sous-groupe $\mathrm{Ker}(\pi_{\mathrm{H}})$ est distingué, infini (par dimension) et d'exposant fini dans $\mathrm{H}(\mathrm{B}) = \mathrm{G}(\overline{k})$. Par le même raisonnement d'adhérence de Zariski qu'à la fin du paragraphe précédent, cela fournit un sous-groupe unipotent, connexe, distingué et de dimension non nulle dans G, excluant ainsi la réductivité de ce dernier. □

En utilisant [**26**], on peut en fait être plus général et précis. Soit K/k une extension finie purement inséparable et soit H un K-groupe algébrique. Utilisons la notation précédente $\mathrm{G} = \mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H})$. Alors le K-groupe G_K est extension (de K-groupes algébriques) de H_K par un groupe unipotent, connexe et déployé (1.1) sur K [loc. cit., A.3.6].

Remarque 1.6. — On recommande de garder en tête le cas particulier des constructions ci-dessus quand le corps k est séparablement clos, car comme l'indique J. Tits, l'étude des groupes pseudo-réductifs est l'occasion de rencontrer à diverses occasions des « phénomène[s] en rien galoisien[s] » [**41**, p. 248]. Ceux-ci sont assez troublants pour l'habitué des groupes réductifs (qui sont, eux, déployés sur une extension finie séparable du corps de base [**2**, Cor. 18.8]) : non-existence de sous-groupe parabolique propre, existence de systèmes de racines non réduits (2.3.2)... tout cela même quand $k = k_s$.

1.2.3. *Restriction de Weil et quotients.* — Finissons en mentionnant un résultat technique sur les restrictions des scalaires des quotients centraux de groupes semi-simples simplement connexes [**18**, Prop. 1.3.4].

PROPOSITION 1.7. — *Soit k' une k-algèbre finie, réduite et non nulle. Soit G' un k'-groupe réductif à fibres connexes au-dessus de* $\mathrm{Spec}(k')$. *On se donne un k'-sous-groupe central $\mu \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G}')$ et on pose :* $\mathrm{G} = \frac{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')}{\mathrm{R}_{k'/k}(\mu)}$.

(i) *Le conoyau du plongement naturel* $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}'/\mu)$ *est commutatif, et donc* G *est k-pseudo-réductif.*

(ii) *Si les fibres de* G' *au-dessus de* $\mathrm{Spec}(k')$ *sont toutes simplement connexes, alors le groupe* $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')$ *est parfait. On a :* $\mathrm{G} = \mathscr{D}\big(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}'/\mu)\big)$.

Nous aurons besoin de ce résultat au moment de définir une flèche naturellement associée à un groupe absolument pseudo-simple (3.2). Cette flèche aide à détecter les groupes pseudo-réductifs qui peuvent être construits par un procédé « standard » décrit en 3.1 (en fait, le seul procédé en caractéristique $\geqslant 5$).

Remarque 1.8. — Pour revenir aux cas de quotients non pseudo-réductifs de groupes pseudo-réductifs, mentionnons l'exemple suivant, en rapport avec l'énoncé ci-dessus. Soit k'/k une extension purement inséparable non triviale en caractéristique p. Notons μ_p le centre du groupe SL_p. Alors les k-groupes $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_p)$ et $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_p)/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_p)$ sont k-pseudo-réductifs, mais pas le groupe $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_p)/\mu_p$.

1.3. Premières propriétés des groupes pseudo-réductifs

Cette section présente une série de résultats dont la preuve ne nécessite pas la classification des groupes pseudo-réductifs. La référence est [**18**, 1.2-1.3].

1.3.1. *Groupes pseudo-réductifs résolubles.* — Voici une première propriété relevant de la théorie des groupes [**18**, Prop. 1.2.3] et qui est assez attendue par comparaison avec la situation des groupes réductifs.

PROPOSITION 1.9. — *Tout groupe pseudo-réductif résoluble est commutatif.*

Un groupe possédant un unique tore maximal est nilpotent [**2**, Cor. 11.5]. Par conséquent la proposition implique que tout groupe k-pseudo-réductif possédant un unique tore maximal sur k_s est commutatif.

1.3.2. *Centralisateurs de tores.* — Le résultat qui suit [**18**, Prop. 1.2.4] est intéressant pour l'étude des sous-groupes de Cartan des groupes pseudo-réductifs. La nature de ces sous-groupes permet, du moins en caractéristique $\neq 2$, de caractériser les groupes réductifs parmi les groupes pseudo-réductifs (4.1).

PROPOSITION 1.10. — *Dans un groupe k-pseudo-réductif, tout centralisateur de k-tore est lui-même k-pseudo-réductif.*

On en déduit, grâce à la proposition précédente, que tout k-sous-groupe de Cartan d'un groupe k-pseudo-réductif est commutatif : en effet, un sous-groupe de Cartan d'un groupe connexe est lui-même connexe [**2**, Cor. 11.12] et nilpotent [**2**, Cor. 11.7].

1.3.3. *Groupe dérivé.* — Si G est un groupe réductif connexe, alors l'isogénie (donnée par la multiplication) $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \times \mathrm{Z}(\mathrm{G})^\circ \to \mathrm{G}$ permet de voir un groupe réductif comme un produit presque direct d'un groupe semi-simple et d'un tore. Ayant cela en tête, on s'intéresse au sous-groupe dérivé d'un groupe pseudo-réductif [**18**, Prop. 1.2.6].

PROPOSITION 1.11. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Pour tout k-sous-groupe de Cartan* C *de* H*, on a :* $\mathrm{H} = \mathrm{C} \cdot \mathscr{D}(\mathrm{H})$.
(ii) *Si* H *est k-pseudo-réductif, alors son groupe dérivé* $\mathscr{D}(\mathrm{H})$ *est parfait.*

Rappelons qu'un groupe algébrique est dit *parfait* s'il est égal à son propre groupe dérivé. Les groupes k-pseudo-réductifs et parfaits constitueront des généralisations intéressantes (notamment pour la densité des points rationnels) des groupes semi-simples (5.1).

1.3.4. *Sous-groupes distingués.* — Enfin, sans faire d'hypothèse supplémentaire à la pseudo-réductivité, on peut citer un premier énoncé sur les sous-groupes normaux [**18**, Prop. 1.2.7 et Remark 3.1.10].

PROPOSITION 1.12. — *Soient* G *un groupe k-pseudo-réductif et* H *un k-sous-groupe connexe et distingué dans* G*. Alors tout k-sous-groupe connexe et distingué dans* H *est aussi distingué dans* G.

Si l'on souhaite obtenir des résultats plus forts sur les sous-groupes distingués d'un groupe G comme ci-dessus, il faut faire des hypothèses plus fortes que la pseudo-réductivité. En fait, pour déduire des résultats sur les sous-groupes normaux de la pseudo-semisimplicité (convenablement définie), B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad utilisent leur résultat de classification [**18**, Prop. 11.2.4] (en particulier, ils supposent que $[k : k^2] \leqslant 2$ si k est de caractéristique 2).

1.3.5. *Pseudo-simplicité.* — À ce stade, on va juste définir la pseudo-simplicité.

DÉFINITION 1.13. — *Soit* G *un k-groupe. On dit que* G *est* pseudo-simple sur k *s'il est connexe, non commutatif et s'il n'admet aucun k-sous-groupe connexe, distingué, propre et non trivial. On dit que* G *est* absolument pseudo-simple sur k *si le groupe* G_{k_s} *est pseudo-simple sur* k_s.

Remarque 1.14. — La notion de groupe k-presque simple [**24**, 0.24] est plus forte que celle de groupe k-pseudo-simple car elle exclut les sous-groupes connexes k-fermés (autrement dit, $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$-stables), distingués, propres et non triviaux.

Le radical $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ d'un k-groupe H est stable par l'action de Galois donnée par la k-structure de H ; il est donc défini sur la clôture parfaite k_{p} de k. Cette remarque permet de définir le k_{p}-groupe semi-simple $\mathrm{H}_{k_{\mathrm{p}}}^{\mathrm{ss}} = \mathrm{H}_{k_{\mathrm{p}}}/\mathscr{R}(\mathrm{H}_{k_{\mathrm{p}}})$. Au moyen de cette notion de semi-simplifié, on peut énoncer un critère de pseudo-simplicité [**18**, Lemma 3.1.2].

LEMME 1.15. — *Soit* G *un k-schéma en groupes. Alors* G *est un k-groupe pseudo-simple sur k si et seulement si* G *est pseudo-réductif sur k, parfait et tel que le k_{p}-groupe semi-simple* $\mathrm{H}_{k_{\mathrm{p}}}^{\mathrm{ss}}$ *soit k_{p}-simple. En particulier,* G *est absolument pseudo-simple si et seulement s'il est k-pseudo-réductif, parfait et de semi-simplifé* $\mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}}$ *simple en tant que groupe algébrique.*

La notion de pseudo-simplicité est utilisée pour réduire certaines questions, notamment l'existence d'une présentation standard pour les groupes pseudo-réductifs (3.2), aux cas « irréductibles ».

1.3.6. *La flèche i_{G}.* — Finissons cette section avec la définition d'un morphisme de k-groupes, noté i_{G}, qui est intéressant pour certains groupes k-pseudo-réductifs. Ce morphisme, et surtout son « raffinement » ξ_{G} (3.1.3), sont des outils importants pour décider si un groupe pseudo-réductif relève de la construction standard ou non (3.1). La notion de pseudo-simplicité est le bon cadre pour exploiter cette flèche. Pour la définir, on procède comme suit.

Soit G un k-groupe connexe. Rappelons qu'on dispose du quotient réductif maximal $\mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ et du quotient semi-simple maximal $\mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$. Le groupe $\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ est défini sur une extension finie purement inséparable de k, disons K (on choisit pour K le corps de définition de ce sous-groupe [**18**, Def. 1.1.6]). Le groupe $\mathrm{G}_K/\mathscr{R}(\mathrm{G}_K)$ est défini sur K. C'est une K-forme de $\mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}}$ (dans le sens où $\big(\mathrm{G}_K/\mathscr{R}(\mathrm{G}_K)\big)_{\overline{k}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}}$) et on a le morphisme de K-groupes $\mathrm{G}_K \to \mathrm{G}_K/\mathscr{R}(\mathrm{G}_K)$.

DÉFINITION 1.16. — *Dans les conditions ci-dessus, la flèche i_{G} est le morphisme de k-groupes* $\mathrm{G} \to \mathrm{R}_{K/k}\big(\mathrm{G}_K/\mathscr{R}(\mathrm{G}_K)\big)$ *obtenue par application de la propriété universelle de la restriction des scalaires.*

Pour aller vite, on aimerait pouvoir dire que tout groupe pseudo-réductif, ou disons pseudo-simple, est isomorphe à une restriction des scalaires de son semi-simplifié (auquel cas i_{G} est un bon candidat pour réaliser l'isomorphisme), mais tel n'est pas le cas. Disons plutôt que le noyau et l'image de la flèche i_{G} donnent une première approximation du défaut pour un tel groupe à être standard. Précisément, on a la caractérisation suivante [**18**, Th. 1.6.2 (2)] :

THÉORÈME 1.17. — *Soit* G *un groupe k-pseudo-réductif tel que le quotient réductif maximal* $\mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ *soit un $\overline{k}$-groupe simple. Alors* G *provient d'une restriction de Weil purement inséparable de groupe réductif si et seulement si la flèche* i_{G} *est un isomorphisme.*

Cependant, la flèche i_{G} n'est en général ni injective, ni surjective. Dans [**18**], les auteurs exhibent des situations dans lesquelles G est absolument pseudo-simple et $\mathrm{Ker}(i_{\mathrm{G}})$ est de dimension arbitrairement grande. Pour ce qui est des cas de non surjectivité, revenons à l'exemple final de la remarque 1.8. Soit k'/k une extension purement inséparable non triviale, disons en caractéristique p. Notons à nouveau μ_p le centre de SL_p et $\mathrm{G} = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_p)/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_p)$. Alors la flèche i_{G} est dans ce cas l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{PGL}_p)$. Elle est injective, mais non surjective ; d'après la proposition 1.7, son image est le groupe dérivé $\mathscr{D}\big(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{PGL}_p)\big)$, qui est un groupe k-pseudo-réductif parfait (et non réductif).

2. STRUCTURE DES GROUPES ALGÉBRIQUES CONNEXES

Dans cette section, il est question de résultats de structure concernant les groupes algébriques linéaires connexes généraux sur un corps quelconque. Beaucoup de ces résultats ont été annoncés dans la note [**10**]. Nos principales références sont le cours de J. Tits de l'année 1992-1993 [**42**] et diverses parties de [**18**] où ces résultats sont souvent démontrés dans un cadre (schématique) plus général. Au moyen d'une généralisation judicieuse de la notion de sous-groupe parabolique, on peut prouver des résultats naturels de conjugaison et de structure. Il est également possible de mettre en évidence des systèmes de racines et, sous une hypothèse plus faible que la pseudo-réductivité, de prouver l'existence d'une combinatoire de système de Tits pour les groupes de points rationnels. Des résultats supplémentaires, propres aux groupes pseudo-réductifs et démontrés grâce à leur classification, figurent dans [**18**, §11] ; ils seront présentés dans la section 4.

2.1. Sous-groupes pseudo-paraboliques

Soit H un groupe algébrique linéaire. Un sous-groupe P de H est dit *parabolique* si la variété algébrique quotient H/P est complète (auquel cas H/P est finalement projective). Cette classe de sous-groupes est à la base de l'étude des groupes réductifs (sur un corps de base quelconque) telle qu'elle est menée à bien dans le papier fondamental d'A. Borel et J. Tits [**7**]. La classe des sous-groupes pseudo-paraboliques est introduite dans [**10**]. Les auteurs y annoncent une série de résultats portant sur les k-groupes algébriques connexes, généralisant ceux de [**7**] et pour la preuve desquels ces sous-groupes constituent un outil essentiel. Dans [**42**, Partie I], J. Tits détaille les preuves de ces énoncés ; ce travail est repris dans [**18**, 2.1-2.2].

2.1.1. *Groupes résolubles k-déployés, radicaux déployés.* — Rappelons qu'un k-groupe connexe résoluble H est dit *déployé* sur le corps de base k s'il admet une suite de composition par k-sous-groupes connexes $\mathrm{H} = \mathrm{G}_0 \supset \mathrm{G}_1 \supset \ldots \supset \mathrm{G}_m = \{1\}$ avec $\mathrm{G}_{i+1} \lhd \mathrm{G}_i$ et où $\mathrm{G}_i/\mathrm{G}_{i+1}$ est k-isomorphe à $\mathbf{G}_a$ ou GL_1 pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ [**2**, 15.1]. Ces groupes sont appelés *k-résolubles* dans [**19**, IV, §4, 3.1] ; leur étude remonte aux travaux de M. Rosenlicht. Si dans la suite de composition seul $\mathbf{G}_a$ apparaît parmi les sous-quotients, on retrouve la notion de k-groupe unipotent déployé (1.1).

DÉFINITION 2.1. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Le plus grand k-sous-groupe résoluble déployé contenu dans $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ est appelé le* radical déployé *de* H *sur k ; il est noté $\mathscr{R}_{d,k}(\mathrm{H})$.*

(ii) *Le plus grand k-sous-groupe unipotent déployé contenu dans $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ est appelé le* radical unipotent déployé *de* H *sur k ; il est noté $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H})$.*

L'existence de ces groupes maximaux est justifiée par exemple dans [**8**, Cor. 1.3] pour le cas résoluble et [**34**, 14.4.5] pour le cas unipotent. Dans cette même référence, il est prouvé qu'on a : $\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}) = \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})_{\overline{k}} = \mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H})_{\overline{k}}$ pour un corps de base k parfait. Pour un corps k quelconque, la notion de radical unipotent déployé est stable par extension séparable et la trivialité du radical unipotent déployé $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H})$ implique que le radical unipotent rationnel commute à tous les k-tores contenus dans H.

2.1.2. *Définition dynamique des sous-groupes pseudo-paraboliques.* — Une des définitions des sous-groupes k-pseudo-paraboliques relève d'une algébrisation d'une caractérisation « dynamique » des sous-groupes paraboliques. Dans le cas particulier des groupes réductifs sur les corps locaux, cette caractérisation est d'ailleurs une des idées qui ont permis à G. Prasad de prouver l'approximation forte pour les groupes semi-simples simplement connexes en caractéristique positive [**28**] et une conjecture de J. Tits sur les points rationnels des groupes semi-simples sur les corps locaux [**29**].

Plaçons-nous momentanément dans le cadre général d'un k-schéma en groupes affine H sur un anneau k quelconque [**18**, 2.1]. Donnons-nous $\lambda : \mathrm{GL}_1 \to \mathrm{H}$ un cocaractère de H défini sur k. On fait agir GL_1 sur H par conjugaison via λ. Plus précisément, pour toute k-algèbre R et tout $t \in R$, on note $t.g = \lambda(t)g\lambda(t)^{-1}$ pour chaque $g \in \mathrm{G}(R)$. Dans ces conditions, on dit que *la limite* $\lim_{t\to 0} t.g$ *existe* si l'application $t \mapsto t.g$ se prolonge en un morphisme de R-schémas $\mathbb{A}^1_R \to \mathrm{H}_R$. Le prolongement est alors nécessairement unique et on note $\lim_{t\to 0} t.g = 1_{\mathrm{H}}$ si ce dernier envoie 0 sur 1_{H}. Par [**18**, Lemma 2.1.5], les foncteurs

$$\mathrm{P_H}(\lambda) : R \rightsquigarrow \{g \in \mathrm{H}(R) \mid \lim_{t\to 0} t.g \text{ existe}\}$$

et

$$\mathrm{U_H}(\lambda) : R \rightsquigarrow \{g \in \mathrm{H}(R) \mid \lim_{t\to 0} t.g = 1_{\mathrm{H}}\}$$

sont représentables par des sous-k-schémas en groupes fermés de G, et $\mathrm{U_H}(\lambda) \triangleleft \mathrm{P_H}(\lambda)$. Si k est un corps et si G est un k-groupe lisse et connexe, alors $\mathrm{U_H}(\lambda)$ et $\mathrm{P_H}(\lambda)$ sont eux aussi des k-groupes lisses et connexes, et $\mathrm{U_H}(\lambda)$ est un groupe unipotent k-déployé [**18**, Prop. 2.1.8 et Prop. 2.1.10].

La notation k désigne de nouveau un corps.

DÉFINITION 2.2. — *Soit* H *un k-groupe connexe. On appelle* sous-groupe k-pseudo-parabolique *de* H *tout sous-groupe pouvant être écrit sous la forme* $\mathrm{P_H}(\lambda) \cdot \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ *pour un cocaractère* $\lambda \in \mathrm{X}_*(\mathrm{H})$ *sur k bien choisi.*

Terminons par un énoncé qui illustre l'intérêt des groupes k-pseudo-réductifs pour l'étude des k-groupes connexes généraux [**18**, Lemma 2.2.3].

LEMME 2.3. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Le groupe* H *contient des sous-groupes k-pseudo-paraboliques propres si, et seulement si, le groupe k-pseudo-réductif* $\mathrm{H}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ *contient des tores k-déployés non centraux.*

(ii) *Supposons que* H *est k-pseudo-réductif et donnons-nous un cocaractère* $\lambda \in \mathrm{X}_*(\mathrm{H})$ *sur k. Alors le sous-groupe k-pseudo-parabolique* $\mathrm{P_H}(\lambda)$ *associé est propre si et seulement si l'image de λ est un sous-groupe à un paramètre non central dans* H.

2.1.3. *Définition des sous-groupes pseudo-paraboliques par les poids.* — Il existe une autre façon de définir les sous-groupes pseudo-paraboliques [**10**, §4]. Cette autre approche utilise la décomposition en espaces-poids de l'algèbre de Lie de H sous l'action adjointe d'un k-tore.

Plus précisément, soit S un k-tore dans un k-groupe connexe H. Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie sur lequel S opère linéairement. Il existe une base de diagonalisation simultanée (sur une extension séparable finie) pour l'action de S_{k_s}. Les caractères dans $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}_{k_s})$ donnés par les actions sur les droites propres sont appelés les *poids* de V (pour l'action de S donnée). Pour une partie Ψ de $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}_{k_s})$, on désigne par V_Ψ le plus grand sous-espace vectoriel S-stable (défini sur une extension finie séparable de k) et dans lequel les seuls poids apparaissant sont contenus dans Ψ.

Pour une S-action algébrique sur un k-groupe H et pour $\Psi \subset X^*(S_{k_s})$, on désigne par H_Ψ le sous-groupe de H engendré par les sous-groupes S-stables connexes H′ de H pour lesquels $\mathrm{Lie}(H') = \mathrm{Lie}(H')_\Psi$. On dit que Ψ est *close* si elle est stable par addition, et qu'elle est *close dans* H si $\mathrm{Lie}(H_\Psi) = \mathrm{Lie}(H)_\Psi$. Choisissons un cocaractère λ de S et posons $\Psi(\lambda) = \{\chi \in X^*(S_{k_s}) \mid \langle \chi, \lambda \rangle \geqslant 0\}$, ainsi que $\Psi(\lambda)_+ = \{\chi \in X^*(S_{k_s}) \mid \langle \chi, \lambda \rangle > 0\}$. Voici un moyen de faire apparaître des k-sous-groupes intéressants dans H [**42**, Prop. 4].

PROPOSITION 2.4. — *Soit* H *un k-groupe connexe muni d'une action algébrique et définie sur k d'un k-tore* S. *Soit Ψ une partie de* $X^*(S)$.

(i) *Si Ψ est close dans* H *et stable par l'action naturelle du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(k_s/k)$ *sur* $X^*(S_{k_s})$, *alors* H_Ψ *est un k-groupe.*

(ii) *Si en outre on a $\Psi \subset \Psi(\lambda)_+$ pour un cocaractère λ ne s'annulant sur aucun élément non nul de* $X^*(S_{k_s})$, *alors* H_Ψ *est un groupe unipotent k-déployé.*

Remarque 2.5. — Ce type d'énoncé, et d'autres fournissant notamment des immersions ouvertes généralisant la grosse cellule des groupes réductifs [**42**, Prop. 3], incitent à voir les actions de tores déployés comme des sortes de substituts de l'application exponentielle pour les groupes de Lie (voir la remarque au début de [**42**, p. 266]).

Au moyen de la proposition précédente, introduisons la classe des k-sous-groupes $P(S, \lambda) = H_{\Psi(\lambda)} \cdot \mathscr{R}_{ud,k}(H)$ quand S parcourt l'ensemble des k-tores dans H et λ celui des cocaractères de S définis sur k. On a alors [**18**, Prop. 2.2.4 et Prop. 2.2.9] :

PROPOSITION 2.6. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *La classe des sous-groupes* $H_{\Psi(\lambda)} \cdot \mathscr{R}_{ud,k}(H)$ *définis ci-dessus coïncide avec la classe des sous-groupes k-pseudo-paraboliques* $P_H(\lambda) \cdot \mathscr{R}_{u,k}(H)$ *définie précédemment.*

(ii) *Si* H *est réductif, ces groupes ne sont rien d'autre que les sous-groupes paraboliques de* H.

Mentionnons enfin un résultat sur les sections rationnelles [**42**, Prop. 7] qui généralise un fait bien connu dans le cas des sous-groupes paraboliques [**7**, Th. 4.13] :

PROPOSITION 2.7. — *Soit* H *un k-groupe connexe et soit* Q *un sous-groupe k-pseudo-parabolique de* H. *Alors la fibration* $H \to H/Q$ *possède une section k-rationnelle et l'application canonique* $H(k) \to (H/Q)(k)$ *est surjective.*

Voir [**18**, Lemme C.2.1] ; ce résultat se démontre lui aussi par des techniques d'actions de tores déployés.

2.1.4. *Propriétés « paraboliques ».* — Un certain nombre de propriétés des groupes paraboliques sont également satisfaites par les sous-groupes pseudo-paraboliques (stabilité par extension séparable, comportement vis-à-vis des inclusions, normalisateur).

THÉORÈME 2.8. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Un k-sous-groupe de* H *est k-pseudo-parabolique si et seulement s'il est k_s-pseudo-parabolique.*

Soit P *un k-sous-groupe de* H.

(ii) *Si pour une extension K/k, le groupe* P_K *est K-pseudo-parabolique dans* H_K*, alors* P *est k-pseudo-parabolique dans* H.

Soit P *un sous-groupe k-pseudo-parabolique de* H.

(iii) *Tout k-sous-groupe de* H *contenant* P *est k-pseudo-parabolique dans* H *et* P *est k-pseudo-parabolique dans tout k-sous-groupe de* H *le contenant.*

(iv) *Le groupe* P *est égal à son propre normalisateur dans* H *au sens schématique.*

(v) *Pour toute extension séparable K/k, le groupe* $\mathrm{P}(K)$ *est le normalisateur dans* $\mathrm{G}(K)$ *de* $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{P})_K = \mathscr{R}_{u,K}(\mathrm{P}_K)$ *et de* $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{P})_K = \mathscr{R}_{ud,K}(\mathrm{P}_K)$.

Ces énoncés sont, dans l'ordre, Cor. 3.5.2 (ou [**42**, Cor. 3.3]), Cor. 3.5.9, Prop. 3.5.8, Prop. 3.5.7 et Cor. 3.5.10 de [**18**].

2.2. Théorèmes de conjugaison

Dans ce qui suit, on va dresser la liste des résultats de conjugaison sur le corps de base pour un groupe algébrique connexe quelconque. Les résultats ont été annoncés dans [**10**], les preuves ont été données dans le cours de 1992-1993 de J. Tits et décrites dans le résumé [**42**, Partie I, Sect. 3]. Enfin, [**18**, Appendix C] reprend en détail ces démonstrations dans un cadre schématique.

2.2.1. *Complétude relative.* — Une idée fondamentale pour les résultats de conjugaison est d'utiliser une notion affaiblie de complétude, un substitut à la propreté de la variété quotient associée à un sous-groupe parabolique (qui est requise, par définition, pour définir cette classe de sous-groupes [**7**, 4.1]).

DÉFINITION 2.9. — *Un k-schéma* X *est dit* relativement complet *sur k s'il est de type fini, séparé et s'il satisfait la condition suivante :*

(VPr) *pour tout anneau de valuation discrète R sur k à corps résiduel séparable sur k, on a* $\mathrm{X}(R) = \mathrm{X}(K)$*, où K est le corps des fractions de R.*

Cette notion jouit de bonnes propriétés de stabilité (par extension séparable et par passage aux sous-schémas fermés). En outre, si un k-schéma est relativement complet après extension de corps alors il l'est déjà sur k, et pour la vérification de (VPr) on peut se restreindre aux anneaux de valuation discrète complets et à corps résiduel séparablement clos et séparable sur k [**18**, Prop. C.1.2].

Le lien entre la notion de groupe pseudo-parabolique et celle de variété relativement complète est le résultat suivant [**18**, Prop. C.1.6]

THÉORÈME 2.10. — *Soit* H *un k-groupe connexe et soit* P *un k-sous-groupe pseudo-parabolique de* H. *Alors la variété* H/P *est relativement complète sur k. En particulier, l'application canonique* $(\mathrm{H/P})\big(k[[t]]\big) \to (\mathrm{H/P})\big(k((t))\big)$ *est bijective.*

Le second point est [**42**, 2.4, Th. 1] ; c'est celui qui est utile pour les théorèmes de conjugaison.

Remarque 2.11. — La réciproque du premier point est fausse en général. B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad appellent *quasi-parabolique* tout sous-groupe dont le quotient associé est relativement complet. En caractéristique $\neq 2$, ils prouvent que tout groupe pseudo-réductif non réductif sur un corps séparablement clos contient des groupes quasi-paraboliques non pseudo-paraboliques [**18**, Th. C.1.9].

2.2.2. *Existence de points fixes.* — L'énoncé d'existence de point fixe qui suit est bien connu dans le cas classique d'une variété complète [**19**, IV, §4, Th. 3.2].

PROPOSITION 2.12. — *Soit* X *un schéma relativement complet sur un corps k et tel que* $\mathrm{X}(k) \neq \varnothing$. *Soit* H *un groupe résoluble k-déployé agissant algébriquement sur* X. *Alors* $\mathrm{X}(k)$ *contient un point fixé par tout élément de* H.

Sous cette forme, il s'agit de [**18**, Prop. C.1.5] (voir aussi [**42**, Prop. 8]).

2.2.3. *Conjugaisons rationnelles.* — Les résultats de conjugaison sur le corps de base sont des énoncés fondamentaux et classiques dans le cas où le groupe ambiant est réductif. Ils permettent notamment de justifier que le système de racines d'un groupe réductif par rapport à un tore déployé maximal est un invariant du groupe en question. Voici le premier résultat de conjugaison, voir [**42**, Th. 2] ou [**18**, Th. C.2.3].

THÉORÈME 2.13. — *Soit* H *un k-groupe connexe. Les tores k-déployés maximaux de* H *sont conjugués sur k, c'est-à-dire conjugués sous l'action de* $\mathrm{H}(k)$.

On peut en déduire que si un sous-groupe k-pseudo-parabolique P contient un tore k-déployé maximal S de H, alors P contient le centralisateur $\mathrm{Z_H(S)}$ tout entier, et que P est k-pseudo-parabolique minimal si on a $\mathrm{P} = \mathrm{Z_H(S)} \cdot \mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{P})$ [**18**, Cor. C.2.4].

Voici une autre série de résultats de conjugaison, concernant cette fois les sous-groupes k-pseudo-paraboliques.

THÉORÈME 2.14. — *Soit* H *un k-groupe connexe.*

(i) *Les sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux sont conjugués sur k.*

Soient P *et* Q *des sous-groupes k-pseudo-paraboliques de* H.

(ii) *L'intersection schématique* $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ *est lisse sur k et connexe.*
(iii) *Il existe un tore k-déployé maximal* S *de* H *tel que* $\mathrm{Z_G(S)} \subset \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$.
(iv) *Si* P *et* Q *sont conjugués sur k et si* $\mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$ *est k-pseudo-parabolique, alors* $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.
(v) *Si* P *et* Q *sont conjugués sur k_s, ils le sont sur k.*

Le point (i) est [**42**, Th. 3] ou [**18**, Th. C.2.5], (iii) est [**18**, Prop. C.2.7] et (v) est [**18**, Cor. C.2.6]. Le reste est contenu dans [**18**, Prop. 3.5.12].

Voici enfin un résultat de caractérisation des sous-groupes résolubles déployés maximaux qui permet d'obtenir un autre énoncé de conjugaison [**42**, Th. 4].

THÉORÈME 2.15. — *Soit* H *un k-groupe connexe. L'ensemble des radicaux déployés des sous-groupes k-pseudo-paraboliques minimaux coïncide avec celui des sous-groupes résolubles k-déployés maximaux de* H. *Ces derniers groupes sont conjugués sur k.*

Remarque 2.16. — Afin d'être complet dans l'analogie avec les sous-groupes paraboliques, mentionnons la question de savoir quand un sous-groupe unipotent est contenu dans le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique. Dans le cas classique (réductif) cette question a été traitée par A. Borel, J. Tits et Ph. Gille dans [**8**], [**40**] et [**21**]. B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad prouvent que tout k-groupe unipotent, connexe et déployé dans un k-schéma en groupes affine, connexe et lisse est contenu dans le radical unipotent déployé d'un sous-groupe k-pseudo-parabolique convenable (voir [**18**, Th. C.3.12] et sa preuve). En réalité, ce fait est utilisé dans la preuve du théorème ci-dessus.

2.3. Combinatoire des points rationnels

Dans le cours de l'année 1992-1993, J. Tits met en évidence des systèmes de racines et des structures combinatoires dans l'esprit des BN-paires (aussi appelées *systèmes de Tits*), pour une classe de k-groupes connexes qui contient les groupes k-pseudo-réductifs [**42**, Partie I, §§4-5]. En retour, la combinatoire de *donnée radicielle* [**14**, 6.1] (du moins des axiomes assez proches raffinant ceux d'une BN-paires et formalisant l'existence d'un système abstrait de groupes radiciels) permet, au moyen d'un prolongement de loi birationnelle de groupe, de construire des groupes pseudo-réductifs non standard (voir [**41**, §§5-6] et 3.3.4).

2.3.1. *Systèmes de racines.* — Soit H un k-groupe connexe. On se donne S un tore k-déployé maximal de H. On note Z le centralisateur de S dans H et N le normalisateur de S dans H. On sait que ces groupes sont définis sur k et que le groupe N/Z est fini. On note $\Pi(\mathrm{S},\mathrm{H})$ l'ensemble des poids de l'action adjointe de S sur Lie(H) et on note $\Phi(\mathrm{S},\mathrm{H}) = \Pi(\mathrm{S},\mathrm{H}) - \{0\}$ l'ensemble des poids non triviaux.

Supposons qu'on ait $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$ (c'est une condition moins forte que la k-pseudo-réductivité). Alors $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{H})$ est un groupe unipotent totalement ployé sur k et donc S opère dessus trivialement (1.1.3). L'application naturelle $\mathrm{H}_{\overline{k}} \to \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ envoie $\mathrm{S}_{\overline{k}}$ sur un tore du groupe réductif $\mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$. On identifie ainsi les groupes de caractères de ces deux tores ; noter aussi que $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}) = \mathrm{X}^*(\mathrm{S}_{\overline{k}})$. Le groupe $W = \mathrm{N}(k)/\mathrm{Z}(k)$ agit naturellement dessus et on munit $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ d'un produit scalaire invariant pour cette action. Enfin, on note

$$\Phi(\mathrm{S}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})) = \Pi(\mathrm{S}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})) - \{0\},$$

où $\Pi(\mathrm{S}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}))$ est l'ensemble des poids de l'action adjointe de $\mathrm{S}_{\overline{k}}$ sur $\mathrm{Lie}\big(\mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})\big)$.

THÉORÈME 2.17. — *Soit* H *un k-groupe connexe tel que* $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$.

(i) *Les ensembles* $\Phi(\mathrm{S},\mathrm{H})$ *et* $\Phi(\mathrm{S}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}))$ *sont des systèmes de racines dans le sous-espace vectoriel qu'ils engendrent dans* $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$.

(ii) *Ces systèmes de racines ont le même ensemble d'éléments non multipliables.*

(iii) *Le groupe de Weyl de ces systèmes de racines est donné par l'action naturelle de* $W = \mathrm{N}(k)/\mathrm{Z}(k)$ *sur* $\mathrm{X}^*(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$.

Le point (i) est l'énoncé [**42**, Th. 5] ; le point (ii) est le lemme qui suit dans cette référence et le point (iii) résulte de [**42**, Prop. 12].

2.3.2. *Systèmes de racines non réduits.* — Quand on exhibe un système de racines, il est naturel de se demander si ce système est *réduit*, ce qui signifie que les seules relations de proportionnalité entre racines sont celles de rapport ± 1 (voir par exemple [**34**, 15.3.10] pour avoir en tête des groupes classiques réductifs à système de racines non réduit). On peut construire des groupes pseudo-réductifs H *sur des corps séparablement clos* à systèmes de racines non réduits [**41**, §6.4]. Sur un corps séparablement clos, tous les tores sont déployés. Donc dans cette situation l'image du tore $\mathrm{S}_{\overline{k}}$ dans le groupe réductif déployé $\mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ est un tore déployé maximal et $\Phi(\mathrm{S}_{\overline{k}}, \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}}))$ est réduit. Cependant :

THÉORÈME 2.18. — *Soit* H *un k-groupe connexe tel que* $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$ *et soit* S *un tore k-déployé maximal de* H. *Si le système de racines* $\mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ *est réduit et si le corps de base k est de caractéristique $\neq 2$, alors le système de racines* $\Phi(\mathrm{S},\mathrm{H})$ *est automatiquement réduit.*

Ainsi ce résultat [**42**, Th. 6] montre que cette pathologie n'a lieu qu'en caractéristique 2. Voir aussi [**18**, Th. 2.3.10] dans lequel H est supposé *pseudo-déployé* (i.e. contenant un tore maximal déployé [loc. cit., p. 43]) et S est un k-tore maximal déployé sur k. C'est dans la preuve de ce résultat qu'est expliqué en quoi le type C_n se distingue : c'est le seul système de racines pour lequel le réseau radiciel contient une racine divisible dans ce réseau.

2.3.3. *Systèmes de Tits.* — Pour la même classe de groupes que précédemment, on peut mettre en évidence une structure combinatoire [**13**, IV.2] entraînant abstraitement de nombreuses propriétés intéressantes [**10**, Théorème 4].

THÉORÈME 2.19. — *Soit* H *un k-groupe connexe tel que* $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$ *et soit* P *un sous-groupe k-pseudo-parabolique minimal de* H.

(i) *Le couple* $\big(\mathrm{P}(k), \mathrm{N}(k)\big)$ *est une* BN*-paire dans le groupe de points rationnels* $\mathrm{H}(k)$.

(ii) *Le groupe de Weyl* $\mathrm{N}(k)/\big(\mathrm{P}(k) \cap \mathrm{N}(k)\big)$ *de ce système de Tits est isomorphe à celui du système de racines* $\Phi(\mathrm{S}, \mathrm{H})$.

(iii) *La classe des groupes de points rationnels des sous-groupes k-pseudo-paraboliques coïncide avec la classe des sous-groupes paraboliques de* $\big(\mathrm{P}(k), \mathrm{N}(k)\big)$ *au sens combinatoire des systèmes de Tits.*

Une des conséquences de (iii), donc sous l'hypothèse $\mathscr{R}_{ud,k}(\mathrm{H}) = \{1\}$, est la décomposition de Bruhat du groupe de points rationnels $\mathrm{H}(k)$. En fait cette décomposition, sans système de Tits, est démontrée pour un k-schéma en groupes affine, lisse et connexe dans [**18**, Th. C.2.8]. Il en découle également que les classes de conjugaison sur k des sous-groupes k-pseudo-paraboliques de H sont en bijection avec les parties de racines simples de $\Phi(\mathrm{S}, \mathrm{H})$ (pour un choix de sous-groupes k-pseudo-parabolique minimal fixant une base du système de racines).

3. CLASSIFICATION DES GROUPES PSEUDO-RÉDUCTIFS

Dans cette section, nous énonçons la classification des groupes pseudo-réductifs due à B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad [**18**]. Plutôt qu'une classification, le résultat est le fait qu'on peut décrire un procédé de construction de groupes pseudo-réductifs (3.1) qui permet d'obtenir tous les groupes en caractéristique $\geqslant 5$. Les groupes couverts par cette construction sont appelés *standard* (quelle que soit la caractéristique) ; cette classe contient tous les groupes réductifs. On va voir qu'il existe en outre des caractérisations générales des groupes standard parmi les groupes absolument pseudo-simples (Proposition 3.10). Pour un k-groupe absolument pseudo-simple G, les principaux outils de caractérisation sont un système de racines dans le groupe semi-simplifié $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ et un morphisme de k-groupes ξ_{G} de source G et de but un k-groupe pseudo-réductif standard (3.1.3). Enfin, on va rapidement évoquer (3.3) les constructions non standard en caractéristiques 2 et 3 (malheureusement sans pouvoir rendre justice à tout le travail accompli dans [**18**, §§7-10]).

3.1. Construction standard

On ne peut pas s'attendre à un procédé aussi simple qu'une restriction de Weil inséparable pour obtenir tous les groupes pseudo-réductifs (bien qu'on ait envie de voir un tel groupe comme construit à partir de son quotient réductif et de la restriction des scalaires donnée par le corps de définition du radical unipotent). Les raisons expliquant cela sont présentées en détail dans [**18**, §1.3], là où certaines pathologies de la flèche i_{G} (liées par exemple au comportement des groupes infinitésimaux par restriction de Weil) sont énumérées.

3.1.1. *Construction.* — La *construction standard* de groupes pseudo-réductifs est la suivante [**18**, §1.4]. On se donne une k-algèbre finie, réduite et non nulle k' (prendre une extension finie de k est suffisant pour ce qui est de la construction ; dans le cas général, nécessaire pour la formulation de la classification, k' est un produit fini de telles extensions). On se donne aussi un k'-groupe algébrique G' et on suppose que la fibre au-dessus de chaque corps facteur de k' est un groupe connexe et réductif (ce qui revient simplement à demander que G' soit un k'-groupe réductif connexe si k' est une extension de k).

Soit T' un k'-tore maximal de G'. On note Z le centre (au sens schématique) de G' et

$$p : \mathrm{T}' \twoheadrightarrow \overline{\mathrm{T}}' = \mathrm{T}'/\mathrm{Z}$$

la projection canonique associée. L'action de T' sur G' par conjugaison donne lieu à une action de $\overline{\mathrm{T}}'$ sur G' ; par fonctorialité, on en déduit enfin une action de $\mathrm{R}_{k'/k}(\overline{\mathrm{T}}')$ sur $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')$. On choisit ensuite un groupe k-pseudo-réductif commutatif C qui s'insère dans une factorisation

$$\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{T}') \xrightarrow{\phi} \mathrm{C} \xrightarrow{\psi} \mathrm{R}_{k'/k}(\overline{\mathrm{T}}')$$

de $\mathrm{R}_{k'/k}(p)$.

L'application ψ permet de faire agir C sur $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')$; le k-groupe que l'on veut est un quotient du produit semi-direct $\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}') \rtimes \mathrm{C}$. Plus précisément, on introduit le k-morphisme $j : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{T}') \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')$ déduit de l'inclusion $\mathrm{T}' \subset \mathrm{G}'$ par la restriction des scalaires $\mathrm{R}_{k'/k}$, ainsi que le k-morphisme

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{T}') &\to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}') \rtimes \mathrm{C} \\ t' &\mapsto \big(j(t')^{-1}, \phi(t')\big), \end{aligned}$$

une inclusion de sous-groupe central qui est une sorte de plongement diagonal tordu.

Alors le k-groupe $\mathrm{Coker}(\alpha) = \frac{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')\rtimes \mathrm{C}}{\mathrm{Im}(\alpha)}$ peut être vu comme une sorte de « poussé en avant non commutatif » ; on note $\mathrm{G} = \mathrm{Coker}(\alpha)$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat constructif [**18**, Prop. 1.4.3] qui est à la base de classification des groupes pseudo-réductifs.

PROPOSITION 3.1. — *Un k-groupe algébrique $\mathrm{G} = \frac{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')\rtimes \mathrm{C}}{\mathrm{Im}(\alpha)}$ construit comme ci-dessus est k-pseudo-réductif.*

3.1.2. *Groupes pseudo-réductifs standard.* — La construction précédente permet d'introduire la classe des groupes qui décrit tous les groupes pseudo-réductifs en caractéristique $\neq 2$ et 3.

DÉFINITION 3.2. — *Un k-groupe pseudo-réductif obtenu grâce au procédé qu'on vient de décrire est appelé* standard.

Remarquons que tout groupe pseudo-réductif commutatif est standard ; autrement dit, la classification de [**18**] incorpore les groupes pseudo-réductifs commutatifs comme donnée de description des groupes pseudo-réductifs généraux.

Signalons tout de suite quelques propriétés de stabilité pour le fait d'être standard.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* G *un groupe k-pseudo-réductif.*

(i) *Le groupe* G *est standard si et seulement si* $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *l'est.*

(ii) *Si* G *est standard, tout centralisateur de k-tore et tout k-sous-groupe connexe et distingué dans* G *est lui-même k-pseudo-réductif standard.*

Il s'agit des Prop. 5.2.1, Prop. 5.2.4 et Prop. 5.2.6 de [**18**], respectivement. Voici un complément au point (i) : si G est un groupe k-pseudo-réductif non commutatif standard, alors il provient d'un quadruplet $(k'/k, \mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{C})$ comme en 3.1.1, où G' peut être choisi absolument simple à fibres simplement connexes [**18**, Th. 4.1.1] ; dans ce cas, $(k'/k, \mathrm{G}')$ est canoniquement déterminé par G [**18**, Prop. 4.2.4 et Def. 4.2.3].

3.1.3. *La flèche* ξ_{G}. — La définition de ce morphisme de k-groupes de source G est une sorte de prolongement technique de celle de i_{G} (1.3.6). Elle est basée sur la non exactitude à droite du foncteur de restriction des scalaires.

Soit H un k-groupe connexe. On suppose que H est parfait, et donc $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}}) = \mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$. Le plus grand quotient réductif $\mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}}$ de $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est semi-simple, égal à $\mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}} = \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}})$. Les corps de définition des radicaux $\mathscr{R}(\mathrm{H}_{\overline{k}}) = \mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$ et du noyau de la projection canonique $\mathrm{H}_{\overline{k}} \to \mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}}/\mathrm{Z}(\mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}})$ coïncident [**18**, Prop. 5.3.3]. Ce corps, noté K, est une extension finie purement inséparable de k. Notons $\mathrm{H}' = \mathrm{H}_K/\mathscr{R}(\mathrm{H}_K)$. On sait que $\mathrm{H}_K/\mathscr{R}(\mathrm{H}_K)$ est une K-forme de $\mathrm{H}_{\overline{k}}^{\mathrm{ss}}$ et on retrouve la flèche $i_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \to \mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}')$ définie en (1.3.6).

Introduisons $\widetilde{\mathrm{H}}'$ le revêtement simplement connexe de H′. C'est un K-groupe contenant un K-sous-groupe central de type multiplicatif μ pour lequel on a une suite exacte de K-groupes :

$$(\star\star) \qquad 1 \to \mu \to \widetilde{\mathrm{H}}' \to \mathrm{H}' \to 1$$

ce qui nous place dans la situation de 1.2.3. Appliquons justement à $(\star\star)$ le foncteur de restriction des scalaires $\mathrm{R}_{K/k}$. Nous obtenons :

$$(\star\star\star) \qquad 1 \to \mathrm{R}_{K/k}(\mu) \to \mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{H}}') \to \mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}'),$$

ce qui nous permet de voir $\mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{H}}')/\mathrm{R}_{K/k}(\mu)$ comme un k-sous-groupe de $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}')$. D'après la proposition 1.7, ce k-sous-groupe est précisément le sous-groupe dérivé de $\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}')$. Mais puisque H est parfait, on en déduit que l'application $i_{\mathrm{H}} : \mathrm{H} \to \mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}')$ envoie H dans $\mathscr{D}(\mathrm{R}_{K/k}(\mathrm{H}')) = \mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{H}}')/\mathrm{R}_{K/k}(\mu)$.

DÉFINITION 3.4. — *On note* ξ_{H} *l'application* $\mathrm{H} \to \frac{\mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{H}}')}{\mathrm{R}_{K/k}(\mu)}$ *ainsi obtenue.*

Encore une fois, c'est pour les groupes k-pseudo-réductifs G dont le quotient réductif maximal $\mathrm{G}_{\overline{k}}^{\mathrm{red}} = \mathrm{G}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ est un $\overline{k}$-groupe simple que la flèche ξ_{G} est principalement utile (à formuler des critères pour être standard).

3.2. Classification

La classification énoncée ci-dessous repousse à la section suivante la description de la situation des groupes en caractéristique 2 et 3.

3.2.1. *Ubiquité de la construction standard.* — Pour les groupes pseudo-réductifs, ce qu'on entend par classification est le fait que dans le cas d'un corps de base de caractéristique $\geqslant 5$, il existe un procédé uniforme de construction de ces groupes. Soyons un peu plus précis [**18**, Th. 1.5.1 et Th. 5.1.1(ii)] :

THÉORÈME 3.5. — *Soit* G *un groupe pseudo-réductif sur un corps k.*

(i) *Si k est non parfait et de caractéristique, disons p, égale à* 2 *ou* 3, *on suppose que le diagramme de Dynkin du groupe semi-simple* $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}} = \mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}/\mathscr{R}(\mathrm{G})_{\overline{k}}$ *est sans arête de multiplicité p ; si $p = 2$, on exclut aussi les sommets isolés. Alors* G *est standard.*

On suppose désormais que k est non parfait et de caractéristique 2 *ou* 3. *Si k est de caractéristique* 2, *on suppose en outre que* $[k : k^2] \leqslant 2$.

(ii) *Le k-groupe* G *est standard si et seulement si le système de racines de* G_{k_s} *est réduit et si, dans chaque composante irréductible de ce système, les racines ont des sous-espaces poids de même dimension dans* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_{k_s})$.

Remarque 3.6. — Les facteurs simples exclus dans (i) sont les groupes de types A_1, B, C ou F_4 en caractéristique 2 et les groupes de type G_2 en caractéristique 3.

Remarque 3.7. — En fait, le théorème cité contient des énoncés plus précis, mais aussi plus techniques, dans les cas de petite caractéristique. On a aussi la possibilité de décomposer le groupe G suivant la partie réduite et la partie non réduite du système de racines de G_{k_s} [**18**, Th. 10.2.1]. On fait alors intervenir la notion de *groupe standard généralisé* [**18**, Def. 10.1.9] (voir aussi 4.2.2) pour décrire les groupes pseudo-réductifs en caractéristique 2 ou 3 et pour lesquels le système de racines de G_{k_s} est réduit. Quand k est de caractéristique 2 et que $[k : k^2] = 2$, le cas d'un système de racines irréductible non réduit est traité grâce à [**18**, Prop. 10.1.4 et Prop. 9.4.3(1)].

La preuve de ce théorème est longue et difficile.

3.2.2. *Usage des flèches ξ_{G} dans le cas absolument pseudo-simple.* — Une première étape [**18**, Cor. 5.2.3] consiste à se ramener au cas d'un corps de base séparablement clos, puis au cas où G est absolument pseudo-simple [**18**, Prop. 5.3.1], ce que nous supposerons désormais jusqu'à la fin de cette sous-section. Dans ce cas les flèches ξ_{G} s'avèrent d'une grande utilité. Rappelons (3.1.3) que ξ_{G} est le morphisme de k-groupes

$$\xi_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathscr{D}\big(\mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K}/\mu)\big)$$

où

- K est le corps de définition du radical $\mathscr{R}_u(\mathrm{G}_{\overline{k}})$;
- $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K = \mathrm{G}_K/\mathscr{R}(\mathrm{G})_K$ descend $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$ de $\overline{k}$ à K ;
- $\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K}$ est le revêtement simplement connexe de $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K$;
- μ est le sous-groupe central fini de $\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K}$ tel que $\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K}/\mu \simeq \mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K$.

On rappelle aussi (1.2.3) qu'on a : $\mathscr{D}\big(\mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K}/\mu)\big) = \frac{\mathrm{R}_{K/k}(\widetilde{\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_K})}{\mathrm{R}_{K/k}(\mu)}$. Voici maintenant un énoncé qui montre en quoi le morphisme de k-groupes ξ_{G} est lié à la question d'être standard [**18**, Th. 5.3.8].

THÉORÈME 3.8. — *Soit* G *un groupe absolument pseudo-simple sur un corps k.*

(i) *Si le k-morphisme ξ_{G} est surjectif, alors son noyau est connexe.*

(ii) *Le groupe* G *est un groupe k-pseudo-réductif standard si et seulement si ξ_{G} est surjectif et* $\mathrm{Ker}(\xi_{\mathrm{G}})$ *est central.*

(iii) *Si tel est le cas, alors ξ_{G} est un isomorphisme dès que l'ordre du groupe fondamental de $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$ — au sens des groupes algébriques semi-simples — n'est pas multiple de la caractéristique du corps de base k.*

Ce critère, indépendamment du fait d'être satisfait dans la plupart des situations, permet de prouver la propriété de permanence suivante [**18**, Cor. 5.3.9] :

COROLLAIRE 3.9. — *Soit K/k une extension séparable. Soit* G *un schéma en groupes affine, connexe et lisse sur k. Alors* G *est k-pseudo-réductif standard si et seulement si G_K est K-pseudo-réductif standard.*

3.2.3. *Rôle des systèmes de racines.* — L'étape suivante [**18**, Prop. 5.3.10] est une autre condition suffisante pour qu'un groupe absolument pseudo-simple soit standard, où cette fois les systèmes de racines interviennent.

PROPOSITION 3.10. — *Soit* G *un groupe absolument pseudo-simple sur un corps k. On suppose que le système de racines de G_{k_s} est réduit. Alors* $\mathrm{Ker}(\xi_{\mathrm{G}})$ *est central; par conséquent, sous cette hypothèse, le groupe* G *est standard si et seulement si la flèche ξ_{G} est surjective.*

Remarque 3.11. — Par conjugaison des tores déployés maximaux sur un corps séparablement clos, on peut bien entendu parler « du » système de racines d'un groupe pseudo-réductif (connexe par définition).

Cet énoncé sert par exemple ainsi : on veut démontrer que si k est un corps de caractéristique $\neq 2$ et si G est un groupe k-pseudo-réductif de semi-simplifié $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$ isomorphe à SL_2 ou à PGL_2, alors G est standard [**18**, Th. 6.1.1]. D'abord, on utilise le corollaire 3.9 (plus précisément [**18**, Cor. 5.2.3], qui l'implique) pour se ramener au cas où k est séparablement clos ; auquel cas, vu l'hypothèse de caractéristique, on en déduit par le théorème 2.18 (plus précisément [**18**, Th. 2.3.10]) que le système de racines de G est réduit. Il reste à vérifier que ξ_{G} est surjective, ce qui se fait (entre autres) par des calculs explicites dans SL_2. Le même type d'argument permet de démontrer un résultat analogue en rang 2 : si k est un corps de caractéristique $\neq 3$ et si G est un groupe k-pseudo-réductif dont le semi-simplifié $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$ est de type A_2 ou G_2, alors G est standard [**18**, Prop. 6.2.1].

3.2.4. *Réduction au rang* 1. — La dernière étape est un énoncé de réduction au rang 1 de la condition de surjectivité de la flèche ξ_{G} [**18**, Th. 6.3.4]. Cela suppose d'attacher convenablement à toute paire de racines opposées $\{\pm a\}$ un groupe de rang 1, ce qui est fait au début de [**18**, 6.3] (en prenant en compte l'existence possible de racines divisibles).

Remarque 3.12. — La notion de groupe *exceptionnel* sera précisée ci-dessous ; elle ne concerne que les caractéristiques 2 et 3.

THÉORÈME 3.13. — *Soit* G *un groupe absolument pseudo-simple sur un corps k. Soit* T *un k-tore maximal dans* G *et soit $\Phi(\mathrm{G}_{k_s}, \mathrm{T}_{k_s})$ le système de racines associé. Pour chaque paire de racines opposées $\{\pm a\}$ dans $\Phi(\mathrm{G}_{k_s}, \mathrm{T}_{k_s})$, on note $(\mathrm{G}_{k_s})_a$ le sous-groupe de rang* 1 *correspondant. On fait les hypothèses suivantes.*

(i) *Le système de racines $\Phi(\mathrm{G}_{k_s}, \mathrm{T}_{k_s})$ est réduit.*

(ii) *Pour chaque racine $a \in \Phi(\mathrm{G}_{k_s}, \mathrm{T}_{k_s})$, la flèche $\xi_{(\mathrm{G}_{k_s})_a}$ est surjective.*

Alors G *est non standard si et seulement s'il est exceptionnel, ce qui n'a lieu qu'en caractéristique* 2 *ou* 3.

Ce théorème permet de conclure [**18**, Cor. 6.3.5] en ce qui concerne le point (i) de la classification (3.2.1), c'est-à-dire en caractéristique $\geqslant 5$.

3.3. Les groupes pseudo-réductifs en caractéristique 2 ou 3

La situation des groupes pseudo-réductifs en caractéristique 2 et 3 est moins claire, en tout cas plus difficile à décrire en termes simples. Il y a même une grande différence entre les deux cas puisque des systèmes de racines non réduits peuvent apparaître sur les corps séparablement clos en caractéristique 2 et pas en caractéristique 3.

3.3.1. *Groupes exceptionnels.* — Pour rendre complètement explicite le théorème 3.13 ci-dessus, voici donc la définition d'un groupe exceptionnel [**18**, Def. 6.3.3]. Le corps $K_{>}$ mentionné dans la définition est défini immédiatement à la suite, il est défini au moyen des corps de définition des radicaux des groupes de rang 1 déjà utilisés.

DÉFINITION 3.14. — *Soit k un corps. Un groupe k-pseudo-réductif* G *est dit* exceptionnel *s'il est absolument pseudo-simple et si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(i) *Le corps k est non parfait et de caractéristique, disons p, égale à* 2 *ou* 3.

(ii) *Le système de racines Φ de G_{k_s} est réduit et son diagramme de Dynkin comporte une arête indexée par p.*

(iii) *Pour toute racine $a \in \Phi$, l'application $\xi_{(\mathrm{G}_{k_s})_a}$ est surjective.*

(iv) *En notant K le corps de définition du radical $\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$, on a : $K_{>} \neq K$.*

La longueur et la technicité de cette définition (d'un usage essentiellement passager) s'explique notamment par le fait qu'elle est ajustée pour mettre en place la réduction au rang 1 de 3.2.4. Prenons l'exemple du corps $K_>$ qu'elle mentionne, défini de la façon suivante. En utilisant [**18**, Prop. 6.3.2], on commence par le cas où k est séparablement clos. Le corps $K_>$ qu'on veut définir provient des corps de définition K_a/k des radicaux $\mathscr{R}\big((\mathrm{G}_a)_{\overline{k}}\big) \subset (\mathrm{G}_a)_{\overline{k}}$.

(*) S'il n'y a qu'une longueur de racine dans Φ, alors $K_a = K$ pour toute racine a et on pose $K_> = K$;

(**) sinon, il y deux longueurs de racines, et la situation des corps de définition est la même que précédemment, sauf si k est non parfait, de caractéristique p égale à 2 ou 3, et qu'une arête indexée par p apparaît dans le diagramme de Dynkin de $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$; dans ce cas on a $K_a = K$ pour les racines courtes, et alors le corps $K_>$ satisfait : $kK^p \subseteq K_> \subseteq K$ et $K_> = K_a$ pour toute racine $a \in \Phi$ longue.

Le corps $K_>$, pour k quelconque, se définit par descente galoisienne à partir du cas précédent.

Remarque 3.15. — Nous avons mentionné cette définition surtout pour être complet dans la définition d'un groupe exceptionnel, mais aussi pour montrer où intervenait la condition sur les arêtes des diagrammes de Dynkin dans la classification (3.2.1).

3.3.2. *Groupes exotiques.* — Une autre classe de groupes liée aux groupes pseudo-réductifs exceptionnels est celle des groupes exotiques basiques. La définition fait appel à deux notions supplémentaires de la théorie des groupes algébriques. Rappelons d'abord qu'un *sous-groupe de Lévi* [**2**, 11.22] dans un k-groupe H est un k-sous-groupe L tel que $\mathrm{L}_{\overline{k}}$ scinde la projection $\mathrm{H}_{\overline{k}} \twoheadrightarrow \mathrm{H}_{\overline{k}}/\mathscr{R}_u(\mathrm{H}_{\overline{k}})$. Une *$k$-isogénie*, c'est-à-dire un morphisme surjectif à noyau fini entre k-groupes, est dite *centrale* si son noyau schématique l'est ; elle est dite *spéciale* si son application tangente ne se factorise pas à travers les co-invariants de l'algèbre de Lie source [**18**, Rem. 7.1.4].

En gros, les groupes exotiques basiques sont des préimages convenables de facteurs de Lévi par des restrictions de Weil d'isogénies spéciales non centrales.

On les définit pour un corps de base non parfait et de caractéristique p égale à 2 ou 3, une extension finie non triviale k'/k telle que $(k')^p \subset k$ et un diagramme de Dynkin connexe, disons $\mathbb{D}$, avec une arête indexée par p — comme en (**) ci-dessus, précisément pour assurer l'existence d'une isogénie spéciale bien particulière, obtenue en factorisant non trivialement l'isogénie de Frobenius [**18**, Lemme 7.1.2]. Cette isogénie est appelée l'isogénie *très spéciale* [**18**, Def. 7.1.3].

Remarque 3.16. — Si G est un groupe absolument simple, simplement connexe et de diagramme de Dynkin $\mathbb{D}$ (dont l'isogénie de Frobenius est notée $F_{\mathrm{G}/k}$), l'isogénie très spéciale de G est l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{N}$ où N est l'unique sous-k-schéma en groupes de G distingué, non central, sur lequel $F_{G/k}$ est triviale et dont la p-algèbre de Lie est un sous-module irréductible de Lie(G).

Revenons à l'extension non triviale k'/k, donnons-nous G' un k'-groupe simplement connexe, absolument simple, de diagramme de Dynkin $\mathbb{D}$ et introduisons

$$\pi' : G' \to \overline{G}',$$

son isogénie très spéciale. En appliquant le foncteur de restriction des scalaires $R_{k'/k}$, on obtient un morphisme de k-groupes

$$R_{k'/k}(\pi') : R_{k'/k}(G') \to R_{k'/k}(\overline{G}').$$

Un k-groupe G est dit *exotique basique* [**18**, Def. 7.2.6] s'il peut s'écrire comme la préimage schématique par $R_{k'/k}(\pi')$ d'un k-facteur de Lévi de $R_{k'/k}(\overline{G}')$ et si G_{k_s} contient un facteur de Lévi de $R_{k'/k}(G')_{k_s}$ pour des choix convenables de k'/k et $\mathbb{D}$ comme ci-dessus.

Un k-groupe exotique basique est k-pseudo-réductif [**18**, Th. 7.2.3] et absolument k-pseudo-simple (i.e. n'admet pas de k-sous-groupe distingué, connexe, propre et non trivial, voir 1.3.5) : utiliser [**18**, Cor. 8.1.3] pour $k = k_s$; cependant, il n'est jamais standard [**18**, Prop. 8.1.1].

Remarque 3.17. — Nous avons repris cette définition pour faire de nouveau intervenir la condition reliant caractéristique du corps de base et diagramme de Dynkin. Cette définition n'interviendra pas techniquement dans la suite.

Le lien entre les groupes exotiques et les groupes exceptionnels est le théorème suivant [**18**, Th. 8.2.1].

THÉORÈME 3.18. — *Un groupe absolument pseudo-simple* G *sur un corps non parfait, disons k, de caractéristique* 2 *ou* 3 *est exceptionnel avec* $G^{ss}_{\overline{k}}$ *simplement connexe si et seulement s'il peut s'écrire comme restriction de Weil purement inséparable d'un groupe exotique basique.*

3.3.3. *La caractéristique* 3. — Examinons maintenant spécifiquement le cas de la caractéristique 3. Le raisonnement logique est alors le suivant : d'abord, si le groupe pseudo-réductif G est non standard, il est exceptionnel (la caractéristique exclut les systèmes de racines non réduits, voir 3.2.3) ; puis, on applique le théorème précédent si le groupe est absolument pseudo-simple. Cela donne [**18**, Th. 8.2.10] :

THÉORÈME 3.19. — *Soit k un corps non parfait de caractéristique* 3 *et soit* G *un groupe k-pseudo-réductif, qu'on suppose non standard. Alors* G *se décompose de façon unique en produit direct* $G_{st} \times R_{K/k}(G_{ex})$ *où* G_{st} *est k-pseudo-réductif standard — éventuellement trivial, K/k est une k-algèbre finie, réduite, non nulle et* G_{ex} *est un K-groupe à fibres exotiques basiques.*

Notons que, d'après [**18**, Prop. 8.2.4(i)], le couple $(K/k, \mathrm{G}_{\mathrm{ex}})$ est entièrement déterminé par G.

3.3.4. *La caractéristique* 2. — Comme annoncé, le cas de la caractéristique 2 est beaucoup plus délicat. Cependant, dans le cas absolument pseudo-simple il y a une classification quand le corps k est presque parfait, c'est-à-dire tel que $[k : k^2] = 2$, et que le système de racines est non-réduit [**18**, Th. 9.4.10]. Une des conséquences est que si G est un tel k-groupe dont le semi-simplifié $\mathrm{G}^{\mathrm{ss}}_{\overline{k}}$ est de rang n, alors ce semi-simplifié est Sp_{2n}. En outre, le groupe abstrait $\mathrm{G}(k)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Sp}_{2n}(K)$ des points rationnels de Sp_{2n} sur le corps de définition de $\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$ (au passage, l'application ξ_{G} est surjective).

Le résultat le plus général [**18**, Th. 10.2.1], analogue du théorème 3.19 en caractéristique 2, doit supposer que $[k : k^2] \leqslant 2$ et fait appel, pour être formulé, à la notion de groupe pseudo-réductif *standard généralisé* (4.2.2).

Finissons l'évocation de la classification en mentionnant que des constructions ne relevant pas de techniques de restrictions de Weil purement inséparables apparaissent déjà dans le cours de J. Tits de 1991-1992 [**41**, §§5-6]. Les techniques consistent en une combinaison de structures combinatoires, qui sont des raffinements de la notion de donnée radicielle [**14**, 6.1] déjà évoquée en 2.3, avec des techniques de schémas en groupes. Cette méthode, très indirecte puisqu'elle utilise des techniques « à la Weil » de lois birationnelles de groupes [**11**, Chap. 5], contraste avec le cas constructif des groupes exotiques basiques ; elle a permis à J. Tits de construire des groupes pseudo-réductifs dont le semi-simplifé est à système des racines non réduit [**41**, 6.4]. Une version similaire de mélange de combinatoire de groupes (indexée par un système de racines) et de loi birationnelle de groupes est utilisée dans [**15**] pour définir les structures entières de la théorie de Bruhat-Tits des groupes réductifs sur les corps locaux.

4. PREMIÈRES APPLICATIONS DE LA CLASSIFICATION

Dans cette section, on énonce quelques propriétés supplémentaires des groupes pseudo-réductifs. Ces propriétés ci-dessous sont, pour la plupart d'entre elles, démontrées grâce à la classification de la section 3. Elles concernent les classes de sous-groupes remarquables usuellement considérées dans la théorie des groupes algébriques : sous-groupes de Cartan (4.1), sous-groupes radiciels et sous-groupes pseudo-paraboliques (4.3). La structure de ces sous-groupes, en général moins restreinte que dans le cas réductif, permet parfois d'obtenir des caractérisations théoriques des groupes réductifs parmi les groupes pseudo-réductifs (Théorème 4.1). Enfin, on présente une notion convenable de pseudo-semi-simplicité et on montre ce qu'elle implique sur la description des sous-groupes distingués.

4.1. Sous-groupes de Cartan

On sait déjà qu'un sous-groupe de Cartan est toujours commutatif, car il est lui-même pseudo-réductif et nilpotent (1.3).

4.1.1. *Critère de réductivité par les sous-groupes de Cartan.* — L'étape suivante est de mieux comprendre la nature des sous-groupes de Cartan d'un groupe pseudo-réductif : quand ceux-ci (par définition centralisateurs de tores maximaux) sont-ils eux-mêmes des tores, comme dans le cas réductif ? En caractéristique $\neq 2$, la réponse fournit en fait un critère de réductivité [**18**, Theorem 11.1.1].

THÉORÈME 4.1. — *Soit k un corps de caractéristique $\neq 2$ et soit* G *un groupe pseudo-réductif défini sur k. Alors le groupe* G *est réductif si, et seulement si, il existe un k-sous-groupe de Cartan qui est un tore ; dans ce cas, tout k-sous-groupe de Cartan est un tore.*

La preuve utilise la classification à travers la connaissance du type A_1 (c'est-à-dire le cas du rang 1). L'exemple fourni dans [**41**, p. 249] et [**18**, Ex. 11.1.2], rappelé dans la sous-section suivante, montre que l'hypothèse de caractéristique 2 est nécessaire.

4.1.2. *Retour sur les groupes infinitésimaux.* — Partons en effet d'une extension quadratique k'/k en caractéristique 2, qu'on suppose purement inséparable. Comme en 3.1.3, on a une suite exacte :

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{SL}_2 \to \mathrm{PGL}_2 \to 1,$$

et un groupe pseudo-réductif standard $\mathrm{G} = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{SL}_2)/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_2)$. Au passage, d'après la proposition 1.7, on a : $\mathrm{G} = \mathscr{D}\big(\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{PGL}_2)\big)$, et d'après la propriété 1.11 le groupe G est parfait (G est absolument pseudo-simple). Pour des raisons de dimensions, l'inclusion $\mathrm{GL}_1/\mu_2 \hookrightarrow \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{GL}_1)/\mathrm{R}_{k'/k}(\mu_2)$ est une égalité et ce groupe est un sous-groupe de Cartan de G. Ainsi, pour tout corps de base non parfait en caractéristique 2, il existe des groupes pseudo-réductifs (et même standard), non réductifs mais avec des sous-groupes de Cartan toriques.

4.1.3. *Groupes quasi-paraboliques et pseudo-paraboliques.* — Dans le même ordre d'idées, mentionnons un énoncé [**18**, Th. C.1.9] en rapport avec le précédent, et qui élucide la différence entre les groupes quasi-paraboliques et les groupes pseudo-paraboliques (pour $k = k_s$).

Théorème 4.2. — *Soit k un corps séparablement clos et soit* G *un groupe k-pseudo-réductif.*

(i) *La classe des sous-groupes quasi-paraboliques sur k dans* G *coïncide avec celle des groupes k-pseudo-paraboliques si, et seulement si, les k-sous-groupes de Cartan de* G *sont des tores.*

(ii) *Si* G *n'est pas réductif et si k est de caractéristique $\neq 2$, alors* G *contient des sous-groupes quasi-paraboliques non pseudo-paraboliques sur k.*

Pour un groupe réductif sur un corps quelconque, les trois classes (paraboliques, pseudo-paraboliques et quasi-paraboliques) sont les mêmes. Noter que la combinaison de (i) et des exemples précédents (4.1.2) montre que pour tout corps non parfait de caractéristique 2, il existe des groupes k-pseudo-réductifs standard (non réductifs) pour lesquels les sous-groupes quasi-paraboliques sur k coïncident avec les groupes k-pseudo-paraboliques.

4.2. Sous-groupes distingués

Nous avons pour l'instant défini la classe des groupes k-pseudo-réductifs (1.1.2) et celles des groupes pseudo-simples sur k (1.3.5).

4.2.1. *Pseudo-semi-simplicité.* — Voici une classe intermédiaire [**18**, Def. 11.2.2] qui aura aussi un intérêt pour des questions d'unirationalité (5.1).

Définition 4.3. — *Soit* G *un k-groupe. On dit que* G *est* k-pseudo-semi-simple *s'il est parfait et k-pseudo-réductif; autrement dit, si $\mathscr{D}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ et $\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{G}) = \{1\}$.*

Remarque 4.4. — Cette définition généralise une façon de reconnaître les groupes semi-simples parmi les groupes réductifs, à savoir le fait d'être parfait, mais pas une autre : le fait que le radical rationnel $\mathscr{R}_k(\mathrm{G})$ (qui, sous l'hypothèse de réductivité, est la composante neutre du centre réduit du groupe) soit trivial.

Avec cette notion plus forte que la pseudo-réductivité et les résultats de classification, on peut pousser un peu plus loin l'étude des sous-groupes normaux de [**18**, §3.1] (voir 1.3.4).

4.2.2. *Groupes standard généralisés.* — Introduisons tout d'abord une notion qui généralise le fait d'être standard [**18**, Def. 10.1.9]. Si G est un k-schéma en groupes connexe, lisse et affine et si C est un k-sous-groupe de Cartan, on désigne par $\mathrm{Z}_{\mathrm{G,C}}$ l'image de C dans le groupe des automorphismes de G qui opèrent comme l'identité sur C (il se trouve que ce dernier groupe est un k-schéma en groupes de type fini [**18**, Th. 2.4.1]).

On dit qu'un groupe k-pseudo-réductif G est *standard généralisé* s'il existe un quadruplet $(k'/k, \mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{C})$ où :

- k' est une k-algèbre finie, réduite et non nulle ;
- G' est un k'-groupe dont les fibres sont absolument pseudo-simples, ou absolument simples et semi-simples simplement connexes, ou encore exotiques basiques ;
- T' est un k'-tore maximal dans G' ;
- C est un groupe k-pseudo-réductif commutatif qui s'insère dans une factorisation

$$(\dagger) \qquad \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{C}') \to \mathrm{C} \to \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{Z}_{\mathrm{G}',\mathrm{C}'}),$$

avec $\mathrm{C}' = \mathrm{Z}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')$, qui permet d'identifier G avec $\frac{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}')\rtimes\mathrm{C}}{\mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{C}')}$. Sous cette identification, le groupe C est un k-sous-groupe de Cartan de G [**18**, Prop. 10.2.2(i)].

Il résulte de la classification qu'un groupe k-pseudo-réductif G tel que G_{k_s} est à système de racines réduit, est standard généralisé (en faisant l'hypothèse $[k : k^2] = 2$ en caractéristique 2).

4.2.3. *Combinatoire des sous-groupes distingués.* — Revenons maintenant aux sous-groupes distingués. Soit G un groupe k-pseudo-réductif, standard généralisé et muni d'une présentation comme en 4.2.2. On note $k' = \prod_{i\in I} k'_i$ la décomposition de k en produit d'extensions de k, ainsi que $\mathrm{G}' = \coprod_{i\in I} \mathrm{G}'_i$ et $\mathrm{T}' = \coprod_{i\in I} \mathrm{T}'_i$ les décompositions fibre à fibre correspondantes. Pour chaque partie J de I, on note

$$k'_J = \prod_{i\in J} k'_i, \quad \mathrm{G}'_J = \coprod_{i\in J} \mathrm{G}'_i \quad \text{et} \quad \mathrm{T}'_J = \coprod_{i\in J} \mathrm{T}'_i,$$

et on pose

$$G_J = \frac{\mathrm{R}_{k'_J/k}(\mathrm{G}'_J)\rtimes\mathrm{C}_J}{\mathrm{R}_{k'_J/k}\big(\mathrm{Z}_{\mathrm{G}'_J}(\mathrm{T}'_J)\big)},$$

où C_J est l'image de $\mathrm{R}_{k'_J/k}\big(\mathrm{Z}_{\mathrm{G}'_J}(\mathrm{T}'_J)\big)$, sous-groupe de $\mathrm{R}_{k'/k}\big(\mathrm{Z}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{T}')\big)$, dans C par la factorisation (†) de 4.2.2. Voici l'énoncé de [**18**, Prop. 11.2.4].

PROPOSITION 4.5. — *Chaque k-sous-groupe G_J est distingué dans* G *et tout k-sous-groupe connexe, parfait, distingué de* G *est de cette forme, pour une unique partie d'indices J.*

4.3. Retour aux sous-groupes pseudo-paraboliques et aux groupes radiciels

La classification des groupes pseudo-réductifs permet également de revenir sur la structure de certains sous-groupes bien connus dans la théorie des groupes réductifs.

4.3.1. *Structure des groupes radiciels.* — Les sous-groupes radiciels sont définis ici dans le cas pseudo-déployé, c'est-à-dire quand il existe un tore k-déployé maximal qui est un k-tore maximal. On peut définir un sous-groupe radiciel (par rapport à un tore déployé maximal donné) en « intégrant » un sous-espace poids sous l'action adjointe de ce tore dans l'algèbre de Lie [**18**, Prop. 2.3.11] ; on peut aussi les définir par la définition dynamique de 2.1.2 en se plaçant dans des centralisateurs de rang 1 de tore singuliers, et en utilisant des cocaractères convenables [**18**, Lemme 2.3.3]. On a le résultat suivant [**18**, Prop. 11.4.1].

PROPOSITION 4.6. — *Soit* G *un groupe k-pseudo-réductif pseudo-déployé, avec* $[k : k^2] \leqslant 2$ *en caractéristique* 2. *Soit* T *un tore k-déployé maximal dans* G *et soit* Φ *le système de racines associé. Pour toute racine non multipliable* $a \in \Phi$, *il existe une extension finie purement inséparable* k_a/k *telle que le groupe radiciel soit k-isomorphe à* $\mathrm{R}_{k_a/k}(\mathbf{G}_a)$, *l'isomorphisme étant* T*-équivariant pour l'action de* T_{k_a} *sur* $\mathbf{G}_a$ *via le caractère* a.

Par conséquent, il n'y a pas de borne sur la dimension des groupes radiciels dans le cas pseudo-réductif pseudo-déployé.

4.3.2. *Retour aux sous-groupes pseudo-paraboliques.* — Le procédé standard généralisé de construction des groupes pseudo-réductifs à système de racines réduit permet de paramétrer les sous-groupes pseudo-paraboliques qui contiennent un tore donné [**18**, Prop. 11.4.3].

PROPOSITION 4.7. — *Soit* G *un groupe k-pseudo-réductif standard généralisé et parfait, défini par le quadruplet* $(k'/k, \mathrm{G}', \mathrm{T}', \mathrm{C})$. *Alors les sous-groupes k-pseudo-paraboliques* P *de* G *sont en bijection naturelle avec les sous-groupes k'-pseudo-paraboliques fibre à fibre* P' *de* G' ; *en particulier, on a :* $\mathrm{G}/\mathrm{P} = \mathrm{R}_{k'/k}(\mathrm{G}'/\mathrm{P}')$ *pour une paire de sous-groupes pseudo-paraboliques ainsi associés.*

4.3.3. *Caractérisations des groupes réductifs.* — On peut finalement revenir à une caractérisation des groupes réductifs [**18**, Prop. 3.4.9].

PROPOSITION 4.8. — *Soit k un corps et soit* G *un groupe k-pseudo-réductif parfait.*

(i) *Le groupe* G *est réductif si et seulement si les groupes radiciels de* G_{k_s} *sont tous de dimension* 1.

(ii) *Soit* P *un sous-groupe k-pseudo-parabolique qui ne contient aucun k-sous-groupe non trivial, connexe, parfait, distingué de* G. *Alors* G *est réductif si et seulement si la variété* G/P *est complète, autrement dit si et seulement si* P *est parabolique.*

Rappelons que pour un groupe réductif sur un corps quelconque, les trois classes (paraboliques, pseudo-paraboliques et quasi-paraboliques) sont les mêmes.

5. UNIRATIONALITÉ, FINITUDES ET COMPACITÉ

Une grande partie de cette section est consacrée à illustrer le fait qu'une meilleure connaissance des groupes pseudo-réductifs (et des groupes unipotents) permet de déduire des résultats sur les groupes algébriques connexes quelconques (1.1.2). Les résultats qui illustrent cela sont surtout dus à B. Conrad **[17]** et portent sur les groupes algébriques définis sur les corps globaux et locaux de caractéristique positive. Les questions résolues étaient souvent restées ouvertes depuis des décennies : finitude cohomologique des corps (5.2.3), finitude des nombres de classes des groupes algébriques (5.2.1), des ensembles de Tate-Shafarevich (5.2.2), critère de compacité de Godement (5.3.2)... On commencera par évoquer des questions d'unirationalité et de densité (5.1) bien que le rapport avec les groupes pseudo-réductifs soit moins direct.

Dans cette dernière section les notations, aussi bien pour les corps que pour les groupes, varient un peu par rapport aux conventions précédentes. Dans 5.1 la lettre k désigne un corps quelconque, infini quand il est question de densité pour la topologie de Zariski, mais sans plus ; ensuite, pour les deux dernières sous-sections, k est un corps global (c'est-à-dire un corps de nombres ou un corps de fonctions à une variable sur un corps fini). La lettre G désignera un k-schéma en groupes ; il n'est supposé *a priori* ni réductif, ni connexe, ni lisse — comme dans **[17]**.

5.1. Unirationalité et densité

Un point étonnant mentionné dans le livre **[18]** est le fait que, pour les questions d'unirationalité des groupes algébriques, des conditions de théorie des groupes beaucoup moins sophistiquées que la réductivité sont suffisantes (alors que la pseudo-réductivité ne l'est pas).

5.1.1. *Groupes parfaits.* — C'est un fait bien connu qu'un k-groupe réductif (connexe par définition) est *unirationnel* sur k [**2**, Th. 18.2]. Cela signifie que le corps k(G) des fonctions rationnelles sur G se plonge dans une extension de k purement transcendante de type fini, et cela implique (quand k est infini) que les points rationnels sur k sont denses dans G pour la topologie de Zariski. Une question naturelle est alors de se demander si la propriété d'unirationalité est encore satisfaite par les groupes pseudo-réductifs. Il n'en est rien : B. Conrad, O. Gabber et G. Prasad fournissent même des exemples k-pseudo-réductifs commutatifs pour lesquels les points rationnels ne sont pas Zariski-denses [**18**, 11.3].

Encore une fois, on voit que quand il est question d'étudier le comportement d'une propriété en passant du réductif au pseudo-réductif, les problèmes se détectent dès le cas commutatif, alors que les groupes réductifs commutatifs ne sont rien d'autre que des tores. Cependant, on peut trouver dans [**18**, Prop. A.2.11] un résultat positif dont la formulation est très simple.

PROPOSITION 5.1. — *Soit k un corps infini* [1]. *Soit* G *un groupe affine, connexe et lisse sur k. On note* G_t *le k-groupe connexe et lisse engendré par les k-tores dans* G.

(i) *Le groupe* G_t *est distingué dans* G *et le quotient* G/G_t *est unipotent.*
(ii) *Le groupe* G_t *est unirationnel.*

Puisqu'un groupe unipotent admet des morphismes non triviaux vers des groupes commutatifs, on déduit de cette proposition :

COROLLAIRE 5.2. — *Si le groupe* G *est parfait, alors il est unirationnel.*

Si l'on tient à mettre en relation la propriété d'unirationalité et la notion de pseudo-réductivité, on en déduit que les groupes k-pseudo-semisimples (groupes dérivés des groupes k-pseudo-réductifs non commutatifs), sont unirationnels sur k.

5.1.2. *Densité.* — Puisqu'il est question d'unirationalité, faisons une courte digression sur la densité des points rationnels en revenant, en quelque sorte, à l'une des trois principales pathologies répertoriées par J. Tits concernant les groupes algébriques sur les corps non parfaits (voir l'introduction). Ces questions de densité sont considérées dans [**41**, §§1-3], où est démontré le joli résultat suivant [**41**, Prop. 3].

THÉORÈME 5.3. — *Soit k un corps qui n'est pas une extension algébrique d'un corps fini et soit* T *un k-tore. Alors il existe un point rationnel $t \in \mathrm{T}(k)$ tel que le groupe engendré par t soit dense dans* T *pour la topologie de Zariski.*

Ce résultat est prouvé dans le cas déployé dans [**2**, Prop. 8.8]. Le cas général, avant d'être rédigé dans ses notes de cours par J. Tits, avait été écrit dans [**37**].

Remarque 5.4. — Il est intéressant de jeter un œil à la démonstration de ce résultat car une idée (au moins) préfigure certains arguments de la preuve de l'alternative de Tits pour les groupes linéaires de type fini [**38**] : usage d'un corps finiment engendré et notamment de valeurs absolues sur celui-ci.

[1] Les auteurs de [**18**] ont récemment réussi à se débarrasser de l'hypothèse « k infini », même si cela ne figure pas dans la première édition de ce livre.

5.2. Nombres de classes et cohomologie galoisienne

Désormais, et jusqu'à la fin de ce texte, k désigne un corps global tel que décrit dans l'introduction de cette section. Pour les notions associées de places (notées v) de k, de complétés k_v, d'anneau des adèles $\mathbf{A}_k$, etc. et la façon dont on les utilise en théorie des groupes algébriques, on renvoie à [**27**], à [**26**] et au chapitre de préliminaires de [**24**] pour un résumé synthétique. Pour la cohomologie galoisienne, on renvoie à [**33**], à [**23**, IX] ou à [**43**, Part V].

5.2.1. *Nombres de classes.* — Les nombres de classes sont des cardinaux d'ensembles de doubles classes dans des groupes adéliques. Ces cardinaux ont pour cas particuliers les ordres des groupes de classes d'idéaux ; c'est un de leurs intérêts arithmétiques.

Venons-en à leur définition précise. Soit G un schéma en groupes affine sur le corps global k. On choisit S un ensemble fini, non vide, de places de k (contenant l'ensemble S_∞ des places infinies en caractéristique 0). On note k_S le produit $\prod_{v\in S} k_v$ et $\mathbf{A}_k^S$ le facteur formé des adèles s'annulant aux places $v\in S$, de sorte que $k_s \times \mathbf{A}_k^S = \mathbf{A}_k$. On choisit également un sous-groupe compact ouvert K dans $\mathrm{G}(\mathbf{A}_k^S)$. On introduit alors :

$$\Sigma_{\mathrm{G},S,K} = \mathrm{G}(k)\backslash \mathrm{G}(\mathbf{A}_k^S)/K.$$

DÉFINITION 5.5. — *On dit que* G *est à* nombres de classes finis *si les ensembles* $\Sigma_{\mathrm{G},S,K}$ *sont finis pour tous les choix de* S *et* K *comme ci-dessus.*

Remarquer qu'on a aussi $\Sigma_{\mathrm{G},S,K} = \mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)/\mathrm{G}(k_S)K$. Le théorème suivant est dû à B. Conrad [**17**, Theorem 1.3.1].

THÉORÈME 5.6. — *Soit* k *un corps global de caractéristique positive. Soit* G *un schéma en groupes affine de type fini sur* k. *Alors* G *est à nombres de classes finis.*

Dans le cas des groupes algébriques sur les corps de nombres, ce résultat est dû à A. Borel [**1**]. Il a été prouvé par G. Harder [**22**] pour les groupes algébriques réductifs sur les corps de fonctions. Dans le cas où le groupe G est réductif anisotrope sur k (5.3.1), il existe des estimations quantitatives des nombres de classes (en supposant en outre, en caractéristique 0, la compacité de tous les complétés archimédiens de G). Ces estimations (majorations et minorations) dépendent du sous-groupe compact ouvert K choisi, du corps k, de certaines de ses extensions définies par rapport à des conditions de déploiement partiel de G et d'invariants de Lie de G [**30**]. Celles-ci permettent de prouver une propriété de finitude extrêmement forte pour les groupes algébriques sur les corps globaux, conjecturée par Tits et prouvée par Borel-Prasad ([**4**] et [**5**]). Voir [**32**] pour une présentation de ces résultats dans un cadre plus général de calcul de covolumes et de divers autres comptages.

La preuve du théorème ci-dessus est exemplaire des applications possibles de la classification des groupes pseudo-réductifs, en particulier des dévissages qu'elle fournit.

Jusqu'à la fin de cette sous-section, on va s'intéresser à des questions de finitude en cohomologie galoisienne. Une référence pour ces questions (dans laquelle les corps sont supposés parfaits) est [**33**, III, §4].

5.2.2. *Ensembles de Tate-Shafarevich et orbites.* — Là encore, les résultats dont il va être question sont des résultats de finitude fondamentaux, prouvés il y a quelques décennies dans le cas des corps de nombres [**6**], qui sont restés non démontrés en caractéristique positive jusqu'à présent [**17**].

Si Γ est un groupe profini qui agit continûment sur un groupe discret A, on dit que A est un Γ-*groupe*. On note $\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathrm{A})$ l'ensemble des classes de cohomologie de 1-cocycles $\Gamma \to \mathrm{A}$. C'est un ensemble pointé : on distingue dedans la classe du cocycle trivial. On peut par ailleurs introduire la notion de A-*torseur* ou encore d'*espace homogène principal* sur A : c'est un ensemble, disons E, sur lequel Γ agit continûment à gauche et admettant une A-action à droite simplement transitive et compatible à celle de Γ dans le sens où l'application correspondante $\mathrm{E} \times \mathrm{A} \to \mathrm{E}$ est Γ-équivariante pour la Γ-action diagonale sur $\mathrm{E} \times \mathrm{A}$. L'ensemble $\mathrm{H}^1(\Gamma,\mathrm{A})$ est en bijection avec celui des classes d'isomorphisme de A-torseurs [**33**, I, 5.2, Prop. 33].

Donnons-nous maintenant un k-schéma en groupes de type fini sur un corps k (temporairement quelconque). On peut voir $\mathrm{G}(k_s)$ comme un groupe discret, et plus spécifiquement comme un Γ-groupe où Γ est le groupe profini $\mathrm{Gal}(k_s/k)$. Si G est lisse, on peut alors définir l'ensemble pointé $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{G})$ comme étant $\mathrm{H}^1\big(\Gamma,\mathrm{G}(k_s)\big)$ comme ci-dessus, avec $\mathrm{A} = \mathrm{G}(k_s)$ (2). Si k est un corps global, pour chaque place v on dispose d'une complétion k_v qui donne lieu à une application $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{G}) \to \mathrm{H}^1(k_v,\mathrm{G})$. Pour chaque ensemble fini S de places de k, on introduit l'application

$$\vartheta_{S,\mathrm{G}} : \mathrm{H}^1(k,\mathrm{G}) \to \textstyle\prod_{v \notin S} \mathrm{H}^1(k_v,\mathrm{G}).$$

Le *groupe de Tate-Shafarevich* $Ш^1_S(k,\mathrm{G})$ est le noyau (au sens des ensembles pointés) de l'application pointée $\vartheta_{S,\mathrm{G}}$. Le théorème qui suit [**17**, Theorem 1.3.3] est un résultat de finitude qui implique celle des groupes de Tate-Shafarevich sur les corps de fonctions, et ce pour des schémas en groupes très généraux.

THÉORÈME 5.7. — *Soit k un corps global de caractéristique positive. Soit* G *un schéma en groupes affine de type fini sur k. Alors, pour chaque ensemble fini S de places de k, les fibres de l'application $\vartheta_{S,\mathrm{G}}$ sont finies.*

(2) Si G n'est pas lisse, la définition convenable de $\mathrm{H}^1(k,\mathrm{G})$ est plus sophistiquée ; on renvoie par exemple à [**17**, B.1.1] pour une discussion de ce point.

Avec les mêmes notations, un énoncé plus concret en rapport avec celui-ci est un problème « local-global » lié aux orbites d'actions de groupes algébriques : si X est un k-schéma muni d'une G-action à droite et si $x \in \mathrm{X}(k)$, alors l'ensemble des points de $\mathrm{X}(k)$ qui sont dans la même $\mathrm{G}(k_v)$-orbite que x dans $\mathrm{X}(k_v)$, pour tout $v \notin S$, est une réunion finie de $\mathrm{G}(k)$-orbites. Pour obtenir ce dernier résultat, on applique le théorème ci-dessus au stabilisateur G_x de x dans G ; pour ce faire, on a besoin d'un énoncé aussi général que le théorème 5.7 car G_x n'est pas lisse en général.

5.2.3. *Finitude de la cohomologie en degré* 1. — On conserve les notations précédentes. Dans le même ordre d'idée que le principe local-global précité, l'annulation de $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{G})$ a des applications intéressantes sur l'existence de points rationnels pour les espaces homogènes sur G (définis sur k). Le résultat suivant est lui aussi dû à B. Conrad [**17**, Prop. 7.1.3].

PROPOSITION 5.8. — *Soit k un corps local de caractéristique positive. Soit* G *un groupe k-pseudo-réductif engendré par ses k-tores maximaux — par exemple k-pseudo-semi-simple, c'est-à-dire k-pseudo-réductif et parfait. Alors l'ensemble* $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{G})$ *est fini.*

Dans [**33**, III, 4.3, remarque 2], il est mentionné une preuve due à J. Tits du fait que, si k est un corps local de caractéristique positive et si G est un k-groupe connexe et réductif, alors $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{G})$ est fini. Cependant, il existe des groupes k-pseudo-réductifs commutatifs G pour lesquels $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{G})$ est infini [**18**, Ex. 11.3.3] ; encore une fois, l'idée est d'éviter le cas pseudo-réductif commutatif mais non torique (précisément les groupes pseudo-réductifs qui échappent à toute classification).

5.3. Compacité de quotients arithmétiques

Les espaces homogènes de (produits de) groupes de Lie, archimédiens ou non, ou de groupes adéliques ont de nombreuses applications intéressantes en théorie ergodique, en théorie des représentations, en arithmétique, etc. Une meilleure connaissance des groupes pseudo-réductifs a permis à B. Conrad de prouver un critère de compacité en caractéristique positive, bien connu pour les corps de nombres (critère de Godement).

5.3.1. *Anisotropie et compacité.* — La notion d'isotropie provient de la théorie des formes quadratiques. Par extension des groupes orthogonaux aux groupes algébriques, on l'a utilisée dans la théorie des groupes réductifs : pour un tel groupe sur un corps k, être k-isotrope revient à contenir un tore k-déployé non trivial (un groupe orthogonal est k-isotrope si et seulement si la forme quadratique qui le définit l'est, autrement dit, si et seulement si elle représente 0 sur k [**2**, 24.4]). Pour les groupes algébriques connexes quelconques, la notion n'est pas évidente à définir mais on dispose de l'énoncé suivant [**10**] (voir [**17**, Propositon A.5.1 et Lemma A.5.2] pour une preuve de ces équivalences).

PROPOSITION 5.9. — *Soit k un corps quelconque et soit* G *un k-groupe connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le groupe* G *possède un tore k-déployé non contenu dans le radical* $\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$.
(ii) *Le groupe* G *possède un sous-groupe unipotent k-déployé non contenu dans* $\mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$.
(iii) *Le groupe* G *possède un sous-groupe k-pseudo-parabolique propre.*

Noter qu'un tore k-déployé non trivial ne satisfait pas les hypothèses ci-dessus.

Remarque 5.10. — Voici aussi comment se démontre cet énoncé au moyen des résultats détaillés de [**18**] (communiqué par B. Conrad). Par [**18**, Prop. 1.2.2], (i) est équivalent au fait que $\mathrm{G}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{G})$ possède un cocaractère défini sur k et (ii) est équivalent au fait que $\mathrm{G}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{G})$ contient un k-sous-groupe isomorphe à $\mathbb{G}_a$; enfin (iii) est équivalent à la même assertion pour $\mathrm{G}/\mathscr{R}_{u,k}(\mathrm{G})$ [**18**, Prop. 2.2.10]. On est donc ramené au cas k-pseudo-réductif. Dans ce cas : (i) et (iii) sont équivalents par [**18**, Lemme 2.2.3], on a (iii) $\Rightarrow$ (ii) par [**18**, Prop. 2.1.8 et 2.1.10] et (ii) $\Rightarrow$ (iii) par [**18**, Th. C.3.8].

La notion d'anisotropie est souvent liée à celle de compacité quand celle-ci a un sens. Par exemple lorsque les corps de base considérés sont des corps locaux, il y a un lien entre compacité des groupes de points rationnels et anisotropie : pour G semi-simple sur k local, le groupe $\mathrm{G}(k)$ est compact si et seulement si G est k-anisotrope. Quand le corps de base est un corps global, la topologie vient des complétés ou de l'anneau des adèles, et on s'intéresse plutôt à la compacité des espaces homogènes $\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)$.

5.3.2. *Critère de Godement en caractéristique positive.* — Pour que le sous-groupe discret $\mathrm{G}(k)$ de $\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)$ ait des chances d'être cocompact, il faut considérer un groupe ambiant, noté $\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1$, moins gros que $\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)$. Il est défini par une sorte de transformée de Gelfand : on définit un homomorphisme continu

$$\vartheta : \mathrm{G}(\mathbf{A}_k) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathrm{X}^*(\mathrm{G}), \mathbf{R}_+^\times)$$

par $\vartheta(g) : \chi \mapsto \| \chi_{\mathbf{A}_k}(g) \|$ pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathbf{A}_k)$ (ici $\| \cdot \|$ est la norme naturelle des idèles et $\chi_{\mathbf{A}_k}$ est l'extension adélique du caractère algébrique χ). Le groupe $\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1$ est le noyau de ϑ. Comme pour la compacité des points rationnels d'un groupe semi-simple sur un corps local, le critère de Godement relie des propriétés de groupe algébrique de G (anisotropie) à des propriétés topologiques de $\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1$ (compacité). Voici donc un critère, en caractéristique positive, pour des schémas en groupes G très généraux [**17**, Theorem A.5.5].

THÉORÈME 5.11. — *Soit k un corps global de caractéristique positive. Soit* G *un schéma en groupes affine, connexe et lisse sur k. On suppose que, pour chaque tore k-déployé* T *dans* G, *on a* $\mathrm{T}_{\overline{k}} \subset \mathscr{R}(\mathrm{G}_{\overline{k}})$. *Alors l'espace homogène* $\mathrm{G}(k)\backslash \mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1$ *est compact. En particulier, si* G *n'admet pas de cocaractère défini sur k, l'espace homogène* $\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)$ *est compact.*

5.3.3. *Un énoncé de propreté sur les corps globaux.* — La preuve de l'énoncé précédent utilise un résultat de propreté plus technique [**17**, Theorem A.1.1].

THÉORÈME 5.12. — *Soit k un corps global. Soit* G *un schéma en groupes affine, connexe et de type fini sur k. On se donne* H *un sous-groupe fermé et distingué dans* G. *On suppose que la composante neutre du groupe réduit* $(\mathrm{H}_{\overline{k}})_{\mathrm{red}}$ *est résoluble. On note* L *le groupe affine connexe* G/H. *Alors l'application naturelle* $\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1 \to \mathrm{L}(k)\backslash\mathrm{L}(\mathbf{A}_k)$ *est propre.*

5.3.4. *Finitude des nombres de Tamagawa.* — Indépendamment de la question de compacité de l'espace homogène, pour une mesure convenablement normalisée le volume de $\mathrm{G}(k)\backslash\mathrm{G}(\mathbf{A}_k)^1$ est le *nombre de Tamagawa* de G, noté τ_{G} [**26**, I, 5.12]. Ce volume est toujours fini pour les corps de nombres [**1**], pour les groupes réductifs sur les corps de fonctions [**22**] et pour le cas résoluble indépendamment du corps, où cela découle de la compacité prouvée en [**26**, IV, 1.3]. Voici un tout dernier résultat frappant [**17**, Theorem 1.3.6] :

THÉORÈME 5.13. — *Soit k un corps global. Soit* G *un schéma en groupes affine, lisse et connexe sur k. Alors le nombre de Tamagawa* τ_{G} *est fini.*

RÉFÉRENCES

[1] A. BOREL – Some finiteness properties of adele groups over number fields, *Publ. Math. I.H.É.S.* **16** (1963), p. 5–30.

[2] ———, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Math., vol. 126, Springer, 1991.

[3] A. BOREL & HARISH-CHANDRA – Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. of Math.* **75** (1962), p. 485–535.

[4] A. BOREL & G. PRASAD – Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 119–171.

[5] ———, Addendum to : « Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups » [*Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 119–171], *Publ. Math. I.H.É.S.* **71** (1990), p. 173–177.

[6] A. BOREL & J-P. SERRE – Théorèmes de finitude en cohomologie galoisienne, *Comment. Math. Helv.* **39** (1964), p. 111–164.

[7] A. BOREL & J. TITS – Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–150.

[8] ———, Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs. I, *Invent. Math.* **12** (1971), p. 95–104.

[9] ———, Compléments à l'article : « Groupes réductifs », *Publ. Math. I.H.É.S.* **41** (1972), p. 253–276.

[10] ———, Théorèmes de structure et de conjugaison pour les groupes algébriques linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **287** (1978), p. 55–57.

[11] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – *Néron models*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 21, Springer, 1990.

[12] N. BOURBAKI – *Algèbre*, Éléments de mathématique, Springer, 2007.

[13] ———, *Groupes et algèbres de Lie*, Éléments de mathématique, Springer, 2007.

[14] F. BRUHAT & J. TITS – Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.É.S.* **41** (1972), p. 5–251.

[15] ———, Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.É.S.* **60** (1984), p. 197–376.

[16] C. CHEVALLEY – *Classification des groupes algébriques semi-simples*, Springer, 2005.

[17] B. CONRAD – Finiteness theorems for algebraic groups over function fields, prépublication, 2010.

[18] B. CONRAD, O. GABBER & G. PRASAD – *Pseudo-reductive groups*, New Mathematical Monographs, vol. 17, Cambridge Univ. Press, 2010.

[19] M. DEMAZURE & P. GABRIEL – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970.

[20] M. DEMAZURE & A. GROTHENDIECK – *Schémas en groupes*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1962/64, Lecture Notes in Math., vol. 151–153, Springer, 1970.

[21] P. GILLE – Unipotent subgroups of reductive groups in characteristic $p > 0$, *Duke Math. J.* **114** (2002), p. 307–328.

[22] G. HARDER – Minkowskische Reduktionstheorie über Funktionenkörpern, *Invent. Math.* **7** (1969), p. 33–54.

[23] M.-A. KNUS, A. MERKURJEV, M. ROST & J.-P. TIGNOL – *The book of involutions*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 44, Amer. Math. Soc., 1998.

[24] G. A. MARGULIS – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 17, Springer, 1991.

[25] G. D. MOSTOW & T. TAMAGAWA – On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, *Ann. of Math.* **76** (1962), p. 446–463.

[26] J. OESTERLÉ – Nombres de Tamagawa et groupes unipotents en caractéristique p, *Invent. Math.* **78** (1984), p. 13–88.

[27] V. PLATONOV & A. RAPINCHUK – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., 1994.

[28] G. PRASAD – Strong approximation for semi-simple groups over function fields, *Ann. of Math.* **105** (1977), p. 553–572.

[29] ———, Elementary proof of a theorem of Bruhat-Tits-Rousseau and of a theorem of Tits, *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), p. 197–202.

[30] ———, Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups, *Publ. Math. I.H.É.S.* **69** (1989), p. 91–117.

[31] M. S. RAGHUNATHAN – *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebn. Math. Grenzg., vol. 68, Springer, 1972.

[32] B. RÉMY – Covolume des groupes S-arithmétiques et faux plans projectifs [d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad-Yeung], Séminaire Bourbaki, vol. 2007/2008, exp. n° 984, *Astérisque* **326** (2009), p. 83–129.

[33] J-P. SERRE – *Cohomologie galoisienne*, cinquième éd., Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer, 1994.

[34] T. A. SPRINGER – *Linear algebraic groups*, second ed., Progress in Math., vol. 9, Birkhäuser, 1998.

[35] J. TITS – Algebraic and abstract simple groups, *Ann. of Math.* **80** (1964), p. 313–329.

[36] ———, Classification of algebraic semisimple groups, in *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math. 9, Boulder, Colo., 1965)*, Amer. Math. Soc., 1966, p. 33–62.

[37] ———, Lectures on algebraic groups, notes d'un cours à Yale University, 1967.

[38] ———, Free subgroups in linear groups, *J. Algebra* **20** (1972), p. 250–270.

[39] ———, *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Math., vol. 386, Springer, 1974.

[40] ———, Unipotent elements and parabolic subgroups of reductive groups. II, in *Algebraic groups (Utrecht 1986)*, Lecture Notes in Math., vol. 1271, Springer, 1987, p. 265–284.

[41] ———, résumé de cours, 1991/1992, Collège de France, 1992.

[42] ———, résumé de cours, 1992/1993, Collège de France, 1993.

[43] W. C. WATERHOUSE – *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Math., vol. 66, Springer, 1979.

Bertrand RÉMY

Université de Lyon
Université Lyon 1
CNRS UMR 5208
Institut Camille Jordan
Bâtiment du Doyen Jean Braconnier
43, blvd du 11 novembre 1918
F-69622 Villeurbanne Cedex – France
E-mail : `remy@math.univ-lyon1.fr`