

Astérisque

AST

**Représentations p -adiques de groupes p -adiques
II : Représentations de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules
- Pages préliminaires**

Astérisque, tome 330 (2010), p. I-XVII

http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__R1_0

© Société mathématique de France, 2010, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

330

ASTÉRISQUE

2010

REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES
DE GROUPES p -ADIQUES II :
REPRÉSENTATIONS DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$
ET (φ, Γ) -MODULES

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Laurent Berger

Université de Lyon, UMPA ENS Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 Lyon, France
laurent.berger@umpa.ens-lyon.fr

Christophe Breuil

CNRS & IHÉS, Le Bois-Marie, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France
breuil@ihes.fr

Pierre Colmez

CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
colmez@math.jussieu.fr

Classification mathématique par sujet (2000). — 11F**, 11S**.

Mots-clefs. — Correspondance de Langlands locale, (φ, Γ) -modules, anneaux de Fontaine, représentations unitaires.

**REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES
DE GROUPES p -ADIQUES II :
REPRÉSENTATIONS DE $GL_2(\mathbf{Q}_p)$
ET (φ, Γ) -MODULES**

Laurent BERGER, Christophe BREUIL & Pierre COLMEZ, éditeurs

Résumé. — Ce second volume est consacré aux applications de la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine à celle des représentations p -adiques unitaires de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, en vue de l'établissement d'une correspondance (de Langlands locale p -adique) entre ces représentations et les représentations p -adiques de dimension 2 du groupe de Galois absolu de \mathbf{Q}_p . Le lecteur y trouvera un exposé de l'analyse fonctionnelle p -adique classique, divers aspects de la série principale unitaire de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et la construction de foncteurs permettant de passer du monde des représentations galoisiennes à celui des représentations de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et de son sous-groupe mirabolique.

Abstract (p -adic representations of p -adic groups II : Representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ and (φ, Γ) -modules)

This second volume is devoted to applications of Fontaine's theory of (φ, Γ) -modules to that of p -adic unitary representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, whose aim is to construct a (p -adic local Langlands) correspondence between these representations and 2-dimensional p -adic representations of the absolute Galois group of \mathbf{Q}_p . The reader will find in it an overview of classical p -adic functional analysis, diverse features of the unitary principal series of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, and the construction of functors building bridges between the world of Galois representations and that of representations of $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ and its mirabolic subgroup.

TABLE DES MATIÈRES

Pierre Colmez — <i>Introduction</i>	xix
Fonctions L p -adiques et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	xix
La série principale	xx
Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ et $V \mapsto \Pi(V)$	xx
Références	xxii
 Marie-France Vigneras — <i>Banach ℓ-adic representations of p-adic groups</i>	 1
 Pierre Colmez — <i>Fonctions d'une variable p-adique</i>	 13
Introduction	13
I. Espaces fonctionnels p -adiques	14
I.1. Espaces de Banach p -adiques	14
1. L -banach	14
2. Bases orthonormales et bases de Banach	15
3. Le dual d'un L -banach	16
4. Produit tensoriel de L -banach	17
I.2. Fonctions continues sur \mathbf{Z}_p	18
1. Polynômes binomiaux	18
2. Coefficients de Mahler des fonctions continues	19
I.3. Décomposition en ondelettes des fonctions continues	20
1. Fonctions localement constantes et fonctions continues	20
2. Coefficients de Mahler des fonctions localement constantes	21
3. Coefficients d'amplitude des fonctions localement constantes	23
I.4. Fonctions localement analytiques	24
1. Fonctions analytiques sur un disque fermé	24
2. Fonctions localement analytiques sur \mathbf{Z}_p	25
3. Coefficients de Mahler des fonctions localement analytiques	26
4. Démonstration du lemme I.4.9	28
I.5. Fonctions de classe \mathcal{C}^r	29
1. Fonctions dérivables et fonctions de classe \mathcal{C}^r	29

2. Propriétés locales des fonctions de classe \mathcal{C}^r	30
3. Fonctions localement analytiques et fonctions de classe \mathcal{C}^r	31
4. Coefficients d'amplitude des fonctions localement polynomiales	32
5. Décomposition en vaguelettes des fonctions de classe \mathcal{C}^r	34
6. Coefficients de Mahler des fonctions de classe \mathcal{C}^r	36
I.6. Propriétés locales des caractères de \mathbf{Q}_p^*	38
II. Duaux	40
II.1. L'anneau \mathcal{R}^+ et certains de ses sous-espaces	40
II.2. Distributions continues	41
II.3. Distributions tempérées et mesures	42
1. Transformées d'Amice des distributions tempérées	42
2. Mesures	43
3. Distributions tempérées et sommes de Riemann	43
4. Autres valuations naturelles sur $\mathcal{D}_r(\mathbf{Z}_p, L)$	45
II.4. Opérations sur les distributions	46
1. Masses de Dirac	46
2. Multiplication par une fonction	46
3. Restriction à un ouvert compact	46
4. Dérivée d'une distribution	47
5. Actions de \mathbf{Z}_p^* , φ et ψ	47
6. Convolution des distributions	48
7. Distributions à support ponctuel	49
II.5. Distributions sur \mathbf{Q}_p	50
1. Distributions sur \mathbf{Q}_p et familles de distributions sur \mathbf{Z}_p	50
2. Action du sous-groupe mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	50
3. Distributions tempérées sur \mathbf{Q}_p	51
4. Vecteurs propres pour l'action de ψ	51
II.6. Distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$	52
1. Conditions de croissance à l'infini	52
2. Estimées préliminaires	53
3. Prolongement à $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ de distributions sur \mathbf{Q}_p	54
4. Restriction à \mathbf{Q}_p de distributions sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$	55
Références	58
Pierre Colmez — <i>(φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$</i>	61
Introduction	61
Notations générales	61
Cadre général	62
Les foncteurs $D \mapsto D^{\natural}$ et $D \mapsto D^{\sharp}$	62
Construction de représentations du mirabolique	65
Un quasi-inverse du foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	66

Opérations analytiques sur les (φ, Γ) -modules et lois de réciprocité explicites	68
I. (φ, Γ) -modules	69
I.1. $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -modules de type fini	69
1. Réseaux et treillis	69
2. Morphismes de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -modules	71
I.2. (φ, Γ) -modules étales	72
1. Catégories de (φ, Γ) -modules	72
2. Le dual de Tate d'un (φ, Γ) -module	73
3. Résidus	74
4. Dual de Tate et dual topologique	75
5. Orthogonalité et treillis	76
II. Les foncteurs $D \mapsto D^{\sharp}$ et $D \mapsto D^{\natural}$	77
II.1. L'équivalence de catégories de Fontaine	78
II.2. L'action de φ	79
1. Les modules D^+ , D^{++} et D^{nr}	79
2. Polynômes en φ	82
II.3. L'opérateur ψ	83
1. Définition	83
2. ψ comme adjoint de φ	83
3. (φ, Γ) -modules et (ψ, Γ) -modules	84
II.4. Le module D^{\sharp}	85
II.5. Le module D^{\natural}	88
1. La dualité entre $D/P(\psi)D$ et $\check{D}^{P(\varphi)=0}$	88
2. Le foncteur $D \mapsto D^{\natural}$	91
3. Dualité	94
4. L'application rés ₀ : $D \rightarrow D^{\sharp}/D^{\natural}$	95
II.6. Une autre construction de D^{\natural} et D^{\sharp}	96
II.7. Surconvergence de D^{\sharp}	98
III. Les foncteurs $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	100
III.1. Construction de représentations du mirabolique	100
1. $(P(\mathbf{Z}_p), \psi)$ -modules et représentations de $P(\mathbf{Q}_p)$	100
2. $(P(\mathbf{Z}_p), \varphi, \psi)$ -modules et restriction à un ouvert compact	102
3. Les applications Res_U sur $M \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et les modules $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ et $(M \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\text{pc}}$	105
III.2. Les $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	106
1. Définition	106
2. Dualité	108
III.3. Le foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	109
1. Lien entre $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	109
2. Exactitude du foncteur $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	109
3. Les sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules de $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	110
III.4. Le Γ -module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$	112

1. Action de Γ sur D	112
2. L'action de Γ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$	114
IV. Un quasi-inverse du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$	117
IV.1. Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}$	117
1. Une variante de l'équivalence de catégories de Fontaine	117
2. \widetilde{D} vu comme sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$	119
IV.2. Le foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^+$	120
1. Les sous-modules \widetilde{D}^+ et \widetilde{D}^{++} de \widetilde{D}	121
2. L'inclusion de \widetilde{D}^+ dans $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$	122
3. Caractérisation algébrique du sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module \widetilde{D}^+ de $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$	122
IV.3. Extension du dictionnaire d'analyse fonctionnelle à \mathbf{Q}_p	124
1. Mesures nulles à l'infini	124
2. Dualité	125
IV.4. Le foncteur $M \mapsto M_{\text{apc}}$	126
1. $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ -modules compacts et $\mathcal{D}_0(\mathbf{Q}_p, \mathcal{O}_L)_{\text{pc}}$ -modules	126
2. $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ -modules admissibles	126
IV.5. Le $P(\mathbf{Q}_p)$ -module $\widetilde{D}/\widetilde{D}^+$ et son dual	128
1. Considérations topologiques	128
2. Dualité	129
3. L'application rés ₀ : $D \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\natural/D^\natural$	130
V. Opérations analytiques sur les (φ, Γ) -modules	131
V.1. Image directe par un difféomorphisme local	131
1. Le théorème d'inversion locale	131
2. Le cas d'un difféomorphisme local de \mathbf{Z}_p dans \mathbf{Z}_p	132
3. Le cas général	134
4. L'image directe d'une composée	136
V.2. Multiplication par une fonction continue	137
1. Généralités	137
2. Multiplication par x et dérivation	139
V.3. Dualité	141
V.4. Convolution multiplicative	142
V.5. Torsion par un caractère	144
VI. (φ, Γ) -modules et lois de réciprocité	146
VI.1. L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Iw}}$	146
VI.2. Une loi de réciprocité générale	149
Références	152

Laurent Berger & Christophe Breuil — *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$*

1. Introduction	155
1.1. Introduction	155
1.2. Notations	157

2. Représentations p -adiques	158
2.1. Quelques anneaux de séries formelles	158
2.2. Représentations p -adiques et (φ, Γ) -modules	160
2.3. Topologie faible et treillis	163
2.4. Théorie de Hodge p -adique	166
2.5. Théorie de Hodge p -adique et (φ, Γ) -modules	169
3. Représentations cristabellines	170
3.1. Modules de Wach	170
3.2. De $N(V)$ à $D_{\text{cris}}(V)$	172
3.3. Une autre construction de $N(V)$	176
3.4. Représentations cristabellines de dimension 2 et représentations du Borel	180
4. Représentations cristabellines irréductibles de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	184
4.1. Fonctions de classe \mathcal{C}^r et distributions d'ordre r	184
4.2. Définition de $B(V)$	187
4.3. Une autre description de $B(V)$	191
5. Représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules	196
5.1. Deux lemmes	196
5.2. D'un monde à l'autre	201
5.3. Irréductibilité et admissibilité	206
5.4. Le cas non générique	208
Références	210
Pierre Colmez — <i>La série principale unitaire de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$</i>	213
Introduction	213
0.1. Notations	213
0.2. L'espace des paramètres \mathcal{S}_{irr}	214
0.3. Représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	215
0.4. Représentations triangulines de dimension 2	216
0.5. Remerciements	219
I. L'anneau de Robba et ses sous-objets	219
I.1. Séries de Laurent	220
1. Le corps \mathcal{E}	220
2. Fonctions analytiques sur des couronnes	220
3. L'anneau de Robba	220
4. Éléments d'ordre fini	221
I.2. Les opérateurs φ et ψ , et l'action de Γ	223
1. Estimées préliminaires	224
2. Amélioration de la convergence par ψ	225
3. Action de ψ sur les éléments surconvergens	226
4. Action de ψ sur les éléments d'ordre fini	227
I.3. L'anneau $\mathcal{R}[\log_{\varphi} T]$	228
II. Objets attachés aux caractères continus de \mathbf{Q}_p^*	229

II.1. Rappels sur les distributions	229
II.2. La distribution de Kubota-Leopoldt	230
II.3. La formule de Leopoldt	231
II.4. La distribution $\mu_{\alpha,\lambda}$	233
II.5. Les éléments $A_{\alpha,\lambda}$, $B_{\alpha,\lambda}$ et $C_{\alpha,\lambda}$	235
III. L'entrelacement fantôme	238
III.1. Rappels sur les (φ, Γ) -modules	238
III.2. Le module $D(s)$ dans les cas semi-stable et non géométrique	239
III.3. La distribution $\ell_h(\mu)$ sur $\mathrm{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)_0$	240
III.4. Le module $(D(s)^\# \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$	241
III.5. Propriétés algébriques de l'entrelacement fantôme	244
IV. Continuité de l'entrelacement fantôme	246
IV.1. Énoncé des résultats	246
IV.2. Découpage de la démonstration du th. IV.2	248
IV.3. Un peu d'analyse fonctionnelle p -adique	249
IV.4. La fonction $g_{h,j}$	251
IV.5. Existence et propriétés de la distribution $\ell_h(\mu)$	252
V. Application aux représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	253
V.1. La représentation $\Pi(s)$	253
1. Action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ sur $\mathrm{LA}(\mathbf{P}^1(\delta))$	253
2. La représentation $B(s)$	254
3. Les sous- $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -modules $M(s)$ et $\widehat{M}(s)$ de $B(s)$	254
4. La représentation $\Pi(s)$	254
V.2. Le dual de $\Pi(s)$	255
V.3. Le cas $s \in \mathcal{S}_+^{\mathrm{ncI}}$	256
VI. Compléments	257
VI.1. Zéros supplémentaires des fonctions L p -adiques	257
VI.2. La formule de Stevens	259
Références	260

Laurent Berger — Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2

263

Introduction	263
1. Rappels et compléments	265
1.1. Représentations galoisiennes et (φ, Γ) -modules	265
1.2. Construction de représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$	267
1.3. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	270
2. Etude de certaines représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$	272
2.1. Induites paraboliques	272
2.2. Supersingulières	274
2.3. Applications aux représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	275
3. Correspondances continues et modulo p	276

3.1. Démonstration de la conjecture de Breuil	276
3.2. Réduction modulo p de quelques représentations galoisiennes	277
Références	278
Pierre Colmez — Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules ..	281
Introduction	281
1. Notations	281
2. Cadre général	282
3. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p -adique	283
4. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, de $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}$ et (φ, Γ) -modules.	284
5. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G	286
6. Les foncteurs $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ et $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$	288
7. La représentation de $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à un atome automorphe	289
8. La contragrédiente d'une représentation de G	290
9. La correspondance de Langlands locale p -adique	291
10. Vecteurs localement analytiques	292
11. Correspondances p -adique et classique	293
12. Théorie d'Iwasawa et vecteurs localement algébriques	294
13. Genèse de l'article	296
1. La conférence de Montréal	296
2. La première version de cet article	297
3. L'étude de la correspondance	298
14. Organisation de l'article	299
15. Remerciements	299
I. Généralités sur les (φ, Γ) -modules	300
I.1. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p -adique	300
1. Le corps \mathcal{E}	300
2. Fonctions analytiques sur des couronnes	300
3. L'action de Γ , les opérateurs φ et ψ	301
4. Résidus	302
5. Espaces fonctionnels et séries de Laurent	302
6. Extension du dictionnaire à \mathbf{Q}_p	304
I.2. (φ, Γ) -modules étales	305
1. Catégories de (φ, Γ) -modules	305
2. Le dual de Tate d'un (φ, Γ) -module	306
3. Dual de Tate et dual topologique	307
I.3. (φ, Γ) -modules et représentations du mirabolique	307
1. L'équivalence de catégories de Fontaine	307
2. Les modules D^{nr} , D^{++} , D^+ , D^{\natural} , D^{\sharp} , \widetilde{D} , \widetilde{D}^+ et \widetilde{D}^{++}	308
3. Construction de représentations du mirabolique	310
4. Les $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	312
I.4. Opérations analytiques sur les (φ, Γ) -modules	315
I.5. (φ, Γ) -modules et lois de réciprocité explicites	318

1. L'action de Γ sur $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$	318
2. L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{Iw}}$	319
II. La correspondance de Langlands locale p -adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	320
II.1. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G	321
1. Construction	321
2. Squelette de l'action de G	325
3. Torsion par un caractère	327
4. Dualité	327
5. Lien entre $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$	328
II.2. Les sous-modules $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$	330
1. Propriétés conditionnées à la stabilité par G	330
2. La représentation conditionnelle $\Pi(D)$ de G	332
3. Dualité	334
4. Résultats en famille	335
II.3. (φ, Γ) -modules de rang 2 et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	336
1. La représentation $\Pi(D)$ attachée à un (φ, Γ) -module de rang 2	336
2. Réduction à une famille zariski-dense	337
3. Représentations cristallines	339
4. Déformation d'un (φ, Γ) -module	344
III. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	345
III.1. Représentations lisses de $\mathbf{GL}_2(F)$	345
1. $\mathbf{GL}_2(F)$ et ses sous-groupes	345
2. L'arbre de $\mathbf{PGL}_2(F)$	346
3. Représentations de G	348
4. Présentation d'une représentation de G	349
5. Construction de représentations admettant une présentation standard	350
6. Quelques propriétés des présentations standard	352
7. Stabilité par extensions et sous-quotients	353
III.2. Dualité	355
1. Le dual Π^{\vee} d'une \mathcal{O}_L -représentation Π de G	355
2. L'isomorphisme $\Pi^{\vee} \cong D_W^{\natural}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$	356
3. L'isomorphisme $\Pi^{\vee} \cong D_W^{\natural}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$	357
III.3. Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	358
1. Les objets irréductibles de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$	359
2. Quelques représentations de B	360
3. La série principale en caractéristique p	361
4. La steinberg	363
5. Les supersingulières	363
IV. Le (φ, Γ) -module attaché à une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	366
IV.1. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$	367
1. P^+ -modules et (φ, Γ) -modules	367

2. Le $\mathcal{O}_{\mathcal{G}}$ -module $\mathbf{D}(\Pi)$	367
3. La structure de (φ, Γ) -module sur $\mathbf{D}(\Pi)$	368
4. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi)$	369
5. L'opérateur ψ sur $\mathbf{D}(\Pi)$	369
IV.2. Propriétés de finitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$	371
1. Calcul des (φ, Γ) -modules attachés aux irréductibles de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$..	371
2. Exactitude du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$	376
3. Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$	377
IV.3. Compléments	377
1. Le morphisme $\beta_{\mathbf{Q}_p} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes \mathbf{Q}_p$	377
2. L'application $\beta_U : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes U$	378
IV.4. La contragrédiente d'une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	380
1. L'action de w sur $\mathbf{D}(\Pi) \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$	380
2. Le morphisme $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^{\vee} \rightarrow \mathbf{D}(\Pi) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$	383
3. Unicité de w_{δ}	385
4. Série principale et (φ, Γ) -modules triangulins	385
5. La contragrédiente	386
6. Exemples	387
V. Surconvergence et analyticité locale	389
V.1. Surconvergence	389
1. (φ, Γ) -modules surconvergens	389
2. Le module \tilde{D}_{rig}^+	391
3. L'anneau $\mathcal{R}(\Gamma)$ et ses sous-anneaux	394
4. Le Γ -module $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$	395
5. (φ, Γ) -modules sur \mathcal{R}	398
V.2. Vecteurs localement analytiques	398
1. L'action de w_D sur $D^{\dagger} \boxtimes \mathbf{P}^1$	398
2. Le G -module $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$	401
3. Caractérisation des vecteurs localement analytiques	402
4. Estimées préliminaires	403
5. L'injection de $(\tilde{\Pi}^{\text{an}})^*$ dans $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$	404
6. Description des vecteurs localement analytiques de $\mathbf{\Pi}(D)$	407
VI. Correspondances de Langlands p -adique et classique	408
VI.1. Préliminaires	409
1. Notations	409
2. Transformée de Fourier	409
3. Transformées de Fourier et de Mellin, et résidus	411
VI.2. Représentations localement algébriques	412
1. Caractérisation	413
2. Vecteurs localement algébriques	414
3. L'action du mirabolique sur les fonctions localement polynomiales ..	415
4. Modèle de Kirillov d'une représentation lisse	416

5. Modèle de Kirillov d'une représentation localement algébrique	419
VI.3. (φ, Γ) -modules et théorie de Hodge p -adique	420
1. Les modules D_{dR} , D_{Sen} , D_{dR}^*	421
2. (φ, Γ) -modules presque de Rham	422
3. Le cas de la dimension 2	423
4. Résidus et dualité	424
5. Un calcul de résidu	424
VI.4. (φ, Γ) -modules presque de Rham de dimension 2	428
1. Compléments sur l'action de Γ	428
2. Les Γ -modules $X^+ \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $X^- \boxtimes \mathbf{Q}_p$	430
3. Le module N_{rig}	432
4. Le module $\widetilde{N}_{\text{rig}}^+$	434
5. Le module $N_{\text{rig}}^{\psi=1}$	435
6. Dualité	437
VI.5. Irréductibilité de Π^{alg}	438
1. Une condition d'existence de vecteurs localement algébriques	438
2. Le modèle de Kirillov de Π^{alg}	439
3. Vecteurs P -algébriques à support compact	441
4. Compléments sur les vecteurs localement analytiques	444
VI.6. Détermination des vecteurs localement algébriques	445
1. L'accouplement antisymétrique $[\ , \]_{\text{Iw}}$	445
2. Action de w_D sur $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et ses sous-modules	446
3. Une condition nécessaire pour la non nullité de Π^{alg}	449
4. Dévissage du module $D_{\text{rig}} \boxtimes \mathbf{P}^1$	450
5. Existence de vecteurs localement algébriques	451
6. Description des vecteurs localement algébriques	453
7. Le module de Jacquet de Π^{alg}	455
8. Une seconde copie des vecteurs localement algébriques	458
9. Indépendance par rapport à la filtration	460
10. Décomposition des vecteurs localement analytiques	463
11. Lien avec la correspondance classique	465
VII. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	466
VII.1. Le foncteur de Jacquet et ses variantes	466
1. Le foncteur de Jacquet $\Pi \mapsto J(\Pi)$	466
2. Compléments sur le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$	469
3. Le module $\widetilde{J}^{\vee}(\Pi)$	470
VII.2. Extensions de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	472
VII.3. Les atomes galoisiens et leurs (φ, Γ) -modules	478
1. Atomes galoisiens	478
2. Les (φ, Γ) -modules attachés aux atomes galoisiens	479
VII.4. Classification des atomes automorphes	483
1. Atomes irréductibles	483

2. Réduction modulo p d'éléments irréductibles de $\text{Rep}_L G$	484
3. Atomes de longueur 2	485
4. Extensions de la représentation triviale par la steinberg	488
5. Atomes de longueur 3	491
6. Atomes de longueur 4	493
7. Non exactitude du foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$	493
VII.5. Extensions d'atomes automorphes	495
1. Injectivité de $\text{Ext}^1(\Pi, \Pi) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathbf{V}(\Pi), \mathbf{V}(\Pi))$	495
2. Calculs de groupes d'extensions de représentations de G	497
VIII. Annexe : (φ, Γ) -modules et cohomologie galoisienne	498
VIII.1. Compléments de théorie d'Iwasawa	498
1. Cohomologie d'Iwasawa	498
2. Théorie d'Iwasawa	500
3. Théorie d'Iwasawa et (φ, Γ) -modules	501
VIII.2. La loi de réciprocité explicite de Kato	502
Index	504
Références	506
Mark Kisin — <i>Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ representations</i>	511
Introduction	511
1. Density of crystalline representations	514
2. Deformation theory	521
References	527
Gebhard Böckle — <i>Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of \mathbb{Q}_3</i>	529
1. Introduction	529
Acknowledgements	532
2. A functor of equivariant homomorphisms	532
3. Demuškin groups with group actions	534
4. Proof of the main theorem in the residually reducible case	537
Case (a)	538
Case (b)	539
Case (c)	539
5. Proof of the main theorem for the residually dihedral case	540
References	541
Fabrizio Andreatta & Adrian Iovita — <i>Erratum to the article: Global applications to relative (φ, Γ)-modules, I (Astérisque 319, p. 339–419)</i>	543
1. The errors to be corrected	543
2. Faltings's topology	543
The formal case	547

3. Geometric points of \mathfrak{X}_M	547
Geometric points of \mathfrak{X}_M	547
Morphisms of topoi	550
3.1. Explicit description of $R^i v_*$	551
References	554

*Nous dédions ces trois volumes de
représentations p -adiques de groupes p -adiques
à Jean-Marc Fontaine.
Son œuvre a inspiré la plupart
des questions qui y sont abordées.*

Les éditeurs : Laurent Berger, Christophe Breuil et Pierre Colmez.