Astérisque

LAURENT BERGER

Représentations modulaires de $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2

Astérisque, tome 330 (2010), p. 263-279

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2010__330__263_0>

Astérisque
330, 2010, p. 263–279

REPRÉSENTATIONS MODULAIRES DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES DE DIMENSION 2

par

Laurent Berger

Résumé. — On démontre la conjecture de Breuil concernant la réduction modulo p des représentations triangulines V et des représentations $\Pi(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui leur sont associées par la correspondance de Langlands p-adique. L'ingrédient principal de la démonstration est l'étude de certaines représentations lisses irréductibles de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ via des modèles construits en utilisant les (φ,Γ)-modules.

***Abstract* (Modular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ and 2-dimensional Galois representations)**
We prove Breuil's conjecture concerning the reduction modulo p of trianguline representations V and of the representations $\Pi(V)$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associated to them by the p-adic Langlands correspondence. The main ingredient of the proof is the study of some smooth irreducible representations of $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ through models built using the theory of (φ,Γ)-modules.

Introduction

Cet article s'inscrit dans le cadre de la correspondance de Langlands p-adique. Dans ses articles [**10, 11**], Breuil a défini une correspondance qui à une représentation p-adique V de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ qui est cristalline ou semi-stable, associe une représentation $\Pi(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Le fait que $\Pi(V)$ est non-nul, irréductible et admissible a été démontré par Colmez pour les représentations semi-stables (voir [**16**]) puis par Breuil et moi-même pour les représentations cristallines dans [**7**]. La correspondance a ensuite été étendue aux représentations triangulines dans [**16**] puis à toutes les représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ dans [**17**] par Colmez. Dans [**9, 10**], Breuil a par ailleurs défini une correspondance en caractéristique p et conjecturé qu'elle était compatible avec la première. L'objet de cet article est de démontrer cette conjecture pour les représentations triangulines.

Afin d'énoncer ce théorème, nous devons introduire quelques notations qui nous serviront par la suite. Dans tout cet article, p est un nombre premier et le corps L (le

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F33, 11F80, 11F85, 22E50.
Mots clefs. — Représentations galoisiennes, correspondance de Langlands p-adique, (φ,Γ)-modules.

« corps des coefficients ») est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ dont on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau des entiers, $\mathfrak{m}_L$ l'idéal maximal et k_L le corps résiduel. On note $G_{\mathbf{Q}_p}$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$, ω la réduction modulo p du caractère cyclotomique ε, et pour $y \in L$ ou $y \in k_L$ on note μ_y le caractère non-ramifié de $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui envoie Frob_p^{-1} (c'est-à-dire l'inverse du frobenius arithmétique) sur y. On normalise le corps de classes pour que $p \in \mathbf{Q}_p^\times$ s'envoie sur Frob_p^{-1} ce qui permet de voir μ_y comme le caractère non-ramifié de $\mathbf{Q}_p^\times$ qui envoie p sur y. On note enfin ω_2 le caractère fondamental de Serre de niveau 2.

On appelle $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ le sous-groupe de Borel supérieur de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Pour alléger les notations, il nous arrivera d'écrire G pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et B pour $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ ainsi que d'identifier $\mathbf{Q}_p^\times$ au centre de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si Π_1 et Π_2 sont deux k_L-représentations lisses de longueur finie de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ (ou de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$), on écrira $\Pi_1 \underset{\mathrm{B}}{\sim} \Pi_2$ (ou bien $\Pi_1 \underset{\mathrm{G}}{\sim} \Pi_2$) pour signifier que les semi-simplifiées de Π_1 et de Π_2 sont isomorphes.

Si V est une représentation p-adique de $G_{\mathbf{Q}_p}$, on en choisit un $\mathscr{O}_L$-réseau T stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et alors $\overline{V} = (k_L \otimes_{\mathscr{O}_L} T)^{\mathrm{ss}}$ ne dépend pas du choix de T par le théorème de Brauer-Nesbitt. De même, si Π est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui admet un réseau Π^0, on note $\overline{\Pi}$ la semi-simplifiée de la réduction de Π^0 qui, si elle est de longueur finie, ne dépend pas du choix du réseau dans une classe de commensurabilité.

Rappelons à présent les notations de [**9**] et la conjecture de [**10**]. Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via le corps de classes, alors on note $\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})$ l'unique représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de déterminant ω^{r+1} et dont la restriction à l'inertie est $\omega_2^{r+1} \oplus \omega_2^{p(r+1)}$. On pose $\rho(r,\chi) = (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi$.

On pose par ailleurs :

$$\pi(r,\lambda,\chi) = \left(\frac{\mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \mathrm{Sym}^r k_L^2}{T-\lambda} \right) \otimes (\chi \circ \det),$$

où $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p$ et T est un certain opérateur de Hecke (cf. [**3**]). Le théorème ci-dessous est alors l'extension aux représentations trianguliness de la conjecture 1.2 de [**10**]. Plusieurs cas particuliers étaient déjà connus et sont rappelés en détail au §3.2.

Théorème A. — *Si V est une représentation triangulines irréductible, alors :*

$$\overline{V} = \rho(r,\chi) \Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) = \pi(r,0,\chi)$$

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda \omega^{r+1} & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) \underset{\mathrm{G}}{\sim} \pi(r,\lambda,\chi) \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\chi)$$

Ici $[p-3-r]$ est l'unique entier appartenant à $\{0, \dots, p-2\}$ et qui est congruent à $p-3-r$ modulo $p-1$.

La démonstration de ce théorème est fondée sur le lien entre $\Pi(V)$ et le (φ,Γ)-module $\mathrm{D}(V)$ (dont on rappelle la définition au §1.1), d'abord montré par Colmez pour les représentations semi-stables dans [**16**] puis par Breuil et moi-même pour les représentations cristabellines dans [**7**] et enfin par Colmez pour les représentations triangulines (voir encore [**16**]).

Le premier chapitre est consacré à des rappels. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ construites à partir de certaines représentations galoisiennes. On trouve soit des restrictions d'induites paraboliques, soit des restrictions de supersingulières et le fait d'en avoir des modèles explicites est important pour la suite. Nous démontrons notamment les résultats suivants d'intérêt indépendant, les notations étant rappelées dans les paragraphes 1.3 et 2.1.

Théorème B. — *Si* Π *est une* k_L*-représentation lisse irréductible de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *admettant un caractère central, alors :*

1. *si* Π *est un caractère, ou la spéciale, ou supersingulière, alors sa restriction à* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ *est toujours irréductible ;*
2. *si* Π *est une série principale, alors sa restriction à* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ *est une extension du caractère induisant* $\chi_1 \otimes \chi_2$ *par une représentation irréductible* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$.

Ce théorème a depuis été généralisé par Paškūnas (cf. [**24**]) et par Vignéras (cf. [**26**]).

Théorème C. — *Si* Π_1 *et* Π_2 *sont deux* k_L*-représentations lisses semi-simples et de longueur finie de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *(dont les composantes irréductibles admettent un caractère central) et dont les semi-simplifications des restrictions à* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ *sont isomorphes, alors* Π_1 *et* Π_2 *sont déjà isomorphes en tant que représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Dans le troisième chapitre, on utilise les résultats explicites du deuxième pour démontrer le théorème A. On termine en faisant le point sur les résultats que l'on en déduit concernant la réduction modulo p de certaines représentations cristallines et semi-stables.

Remerciements : Je remercie C. Breuil pour ses encouragements tout au long de la rédaction de ce travail, et je le remercie de même que P. Colmez pour des discussions éclairantes sur plusieurs points de cet article.

1. Rappels et compléments

L'objet de ce chapitre est de rappeler certaines des constructions faites dans le cadre de la « correspondance de Langlands p-adique ». Nous renvoyons à [**7, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18**] pour plus de détails.

1.1. Représentations galoisiennes et (φ, Γ)-modules

Nous reprenons les notations de l'introduction. Les caractères $\chi : G_{\mathbf{Q}_p} \to k_L^\times$ sont tous de la forme $\omega^r \mu_y$ pour $r \in \{0, \dots, p-2\}$ et $y \in k_L^\times$. Rappelons la classification des représentations absolument irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 sur k_L. Soit

$\omega_2 : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_{p^2}) \to \mathbf{F}_{p^2}^\times$ le caractère fondamental de Serre de niveau 2. On suppose désormais que $\mathbf{F}_{p^2} \subset k_L$. Si $r \in \{0, \dots, p-1\}$ et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu, que l'on identifie à un caractère continu de $G_{\mathbf{Q}_p}$ via le corps de classes, alors on pose comme dans l'introduction :

$$\rho(r, \chi) = (\mathrm{ind}(\omega_2^{r+1})) \otimes \chi.$$

On obtient ainsi toutes les représentations absolument irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 2 sur k_L, et les entrelacements entre les $\rho(r, \chi)$ sont les suivants (cf. par exemple l'introduction de [**9**]) :

$$\rho(r, \chi) \simeq \rho(r, \chi\mu_{-1}) \simeq \rho(p-1-r, \chi\omega^r) \simeq \rho(p-1-r, \chi\omega^r\mu_{-1}).$$

La classification des représentations p-adiques de $G_{\mathbf{Q}_p}$ est, comme on le sait, beaucoup plus compliquée mais la théorie des (φ, Γ)-modules permet de s'y retrouver un petit peu. Soient μ_{p^n} l'ensemble des racines p^n-ièmes de l'unité, $\mu_{p^\infty} = \cup_{n \geqslant 1} \mu_{p^n}$ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$. Soit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ l'anneau défini par $\mathscr{O}_{\mathscr{E}} = \{\sum_{i \in \mathbf{Z}} a_i X^i$ où $a_i \in \mathscr{O}_L$ et $a_{-i} \to 0$ quand $i \to \infty\}$. On munit cet anneau d'un frobenius $\mathscr{O}_L$-linéaire φ défini par $\varphi(X) = (1+X)^p - 1$ et d'une action $\mathscr{O}_L$-linéaire de Γ donnée par $\gamma(X) = (1+X)^{\varepsilon(\gamma)} - 1$ si $\gamma \in \Gamma$. Un (φ, Γ)-module étale est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module D de type fini muni d'un frobenius semi-linéaire φ tel que $\varphi^*(\mathrm{D}) \simeq \mathrm{D}$ (ici $\varphi^*(\mathrm{D})$ est le $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module engendré par $\varphi(\mathrm{D})$) et d'une action de Γ semi-linéaire continue et commutant à φ. Rappelons que Fontaine a construit dans [**21**, A.3.4] un foncteur $T \mapsto \mathrm{D}(T)$ qui à toute $\mathscr{O}_L$-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ associe un (φ, Γ)-module étale et que ce foncteur est une équivalence de catégories. Si $V = L \otimes_{\mathscr{O}_L} T$ est une représentation p-adique, alors on pose $\mathrm{D}(V) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \mathrm{D}(T)$.

L'anneau $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est un $\varphi(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$-module libre de rang p, dont une base est donnée par $\{(1+X)^i\}_{0 \leqslant i \leqslant p-1}$. Si $y \in \mathrm{D}$, alors on peut écrire $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$ et on définit un opérateur $\psi : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ par la formule $\psi(y) = y_0$ si $y = \sum_{i=0}^{p-1} (1+X)^i \varphi(y_i)$.

Si D est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, alors Colmez a repris et généralisé dans [**18**, §II.4] la construction de [**23**, §3] d'un sous-$\mathscr{O}_L[[X]]$-module $\mathrm{D}^\sharp$ de D, qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{D}^\sharp$ est un « treillis » de D (voir [**18**, §I.1]) ;
2. quels que soient $x \in \mathrm{D}$ et $k \geqslant 0$, il existe $n(x, k) \geqslant 0$ tel que $\psi^n(x) \in \mathrm{D}^\sharp + p^k \mathrm{D}$ si $n \geqslant n(x, k)$;
3. l'opérateur ψ induit une surjection de $\mathrm{D}^\sharp$ sur lui-même.

Le calcul de $\mathrm{D}^\sharp(V)$ pour des représentations de dimension 1 ne pose aucun problème et le calcul suivant est utile dans la suite de cet article.

Lemme 1.1.1. — *Si $W = k_L \cdot w$ est une k_L-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 1, donnée par un caractère $\omega^r \mu_y$, alors $\mathrm{D}^\sharp(W) = X^{-1} k_L[[X]] \cdot e$, avec $e = \alpha w$ où $\alpha \in \overline{\mathbf{F}}_p$ est tel que $\alpha^{p-1} = y$.*

Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, on pose alors $\mathrm{D}^+(W) = k_L[[X]] \cdot e$. Remarquons en passant que $\varphi(e) = ye$ et que $\gamma(e) = \omega^r(\gamma) e$ si $\gamma \in \Gamma$. La notation

D^+ provient de la théorie des représentations « de hauteur finie » de [**21**, §B] (qui n'intervient pas dans le reste de cet article).

Lemme 1.1.2. — *Si W est une k_L-représentation irréductible de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension $\geqslant 2$, et si $M \subset \mathrm{D}^\sharp(W)$ est un sous-$k_L[[X]]$-module non-nul stable par ψ, alors $M = \mathrm{D}^\sharp(W)$.*

De même, si W est une k_L-représentation de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension 1, et si $M \subset \mathrm{D}^+(W)$ est un sous-$k_L[[X]]$-module non-nul stable par ψ, alors $M = \mathrm{D}^+(W)$.

Démonstration. — Faisons tout d'abord le cas où W est de dimension $\geqslant 2$. Nous utilisons les notations du §II.5 de [**18**]. Par le corollaire II.5.12 de [**18**], il s'agit de montrer que $\mathrm{D}^\natural = \mathrm{D}^\sharp$. Le lemme suit alors du (ii) de la proposition II.5.19 de [**18**], en utilisant le (ii) de la remarque II.2.4 de [**18**] parce que $(W^*)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p^{\mathrm{ab}})} = 0$.

Faisons maintenant le cas où W est de dimension 1. Il s'agit de montrer qu'un idéal non-nul et stable par ψ de $k_L[[X]]$ est égal à $k_L[[X]]$. Les idéaux de $k_L[[X]]$ sont de la forme $X^j k_L[[X]]$ pour $j \geqslant 0$ et un calcul facile montre que si $j \geqslant 1$, alors $\psi(X^j k_L[[X]])$ contient $X^{j-1} k_L[[X]]$ ce qui permet de conclure. □

1.2. Construction de représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$

Rappelons que si Π est une k_L-représentation profinie d'un groupe topologique G, alors sa duale Π^* (l'ensemble des formes linéaires continues $f : \Pi \to k_L$) est une k_L-représentation lisse de G et que si Π est topologiquement irréductible, alors Π^* est irréductible (voir par exemple le §2.3 de [**5**] pour une démonstration).

Si D est un (φ, Γ)-module, alors $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp$ dénote l'ensemble des suites $v = (v_i)_{i \geqslant 0}$ telles que $\psi(v_{i+1}) = v_i$ pour tout $i \geqslant 0$. Si D est un (φ, Γ)-module sur L, on demande en plus que la suite $(v_i)_{i \geqslant 0}$ soit bornée pour la topologie faible.

On fixe un caractère lisse χ de $\mathbf{Q}_p^\times$ et on munit $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp$ d'une action de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ comme suit. Tout élément $g \in \mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ peut s'écrire comme produit :

$$g = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $x \in \mathbf{Q}_p^\times$, $j \in \mathbf{Z}$, $a \in \mathbf{Z}_p^\times$ et $z \in \mathbf{Q}_p$. Si $v = (v_i)_{i \geqslant 0} \in \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp$, alors on pose pour $i \geqslant 0$:

$$\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \star v\right)_i = \chi^{-1}(x) v_i;$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^j \end{pmatrix} \star v\right)_i = v_{i-j} = \psi^j(v_i);$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \star v\right)_i = \gamma_a^{-1}(v_i), \text{ où } \gamma_a \in \Gamma \text{ est tel que } \varepsilon(\gamma_a) = a\,;$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \star v\right)_i = \psi^j((1+X)^{p^{i+j}z} v_{i+j}), \text{ pour } i+j \geqslant -\mathrm{val}(z).$$

Définition 1.2.1. — Si W est une k_L-représentation irréductible de $G_{\mathbf{Q}_p}$ de dimension $\geqslant 2$, et si $\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère lisse, alors on pose $\Omega_\chi(W) = (\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W))^*$ et si W est une k_L-représentation de dimension 1, alors on pose $\Omega_\chi(W) = (\varprojlim_\psi \mathrm{D}^+(W))^*$.

Proposition 1.2.2. — *Si on munit $\Omega_\chi(W)$ d'une action de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ en utilisant les formules ci-dessus, alors $\Omega_\chi(W)$ est une représentation lisse irréductible dont le caractère central est χ.*

Démonstration. — Comme $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ est profini, le fait que $\Omega_\chi(W)$ est une représentation lisse résulte des rappels que l'on a faits au début du paragraphe. Le fait que le caractère central est χ est évident. Enfin, pour montrer que $\Omega_\chi(W)$ est irréductible, il suffit de montrer que $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ (ou bien $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^+(W)$ si $\dim W = 1$) n'admet pas de sous-espace fermé stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ et non-trivial, ce que nous faisons maintenant (si $\dim W = 1$, il faut remplacer $\mathrm{D}^\sharp(W)$ par $\mathrm{D}^+(W)$ dans les calculs qui suivent).

Soit $\mathrm{pr}_j : \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W) \to \mathrm{D}^\sharp(W)$ la projection $(v_n)_{n\geqslant 0} \mapsto v_j$. Si M est un sous-espace fermé et stable par $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$, on note M_j l'image de $\mathrm{pr}_j : M \to \mathrm{D}^\sharp(W)$. On voit que M_j est un sous-$k_L[[X]]$-module non-nul de $\mathrm{D}^\sharp(W)$ stable par ψ ce qui fait que, par le lemme 1.1.2, $M_j = \mathrm{D}^\sharp(W)$. On en déduit que M est dense dans $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ et donc finalement que $M = \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ ce qui fait que $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ est bien topologiquement irréductible et donc que $\Omega_\chi(W)$ est irréductible. □

Proposition 1.2.3. — *Si W_1 et W_2 sont deux k_L-représentations irréductibles de $G_{\mathbf{Q}_p}$ et si $f : \Omega_{\chi_1}(W_1) \to \Omega_{\chi_2}(W_2)$ est une application $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante et non-nulle, alors $\chi_1 = \chi_2$ et $W_1 \simeq W_2$ et f est scalaire.*

Démonstration. — Il est immédiat que $\chi_1 = \chi_2$ et on se ramène donc à montrer que si W_1 et W_2 sont deux représentations irréductibles telles qu'il existe une application $\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$-équivariante continue et non-nulle $f : \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_1) \to \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_2)$, alors $W_1 \simeq W_2$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.4.5 de [**7**] et nous la faisons pour $\dim W_i \geqslant 2$; quand $\dim W_i = 1$, il suffit de remplacer $\mathrm{D}^\sharp(W_i)$ par $\mathrm{D}^+(W_i)$ dans les calculs qui suivent.

Notons comme ci-dessus $\mathrm{pr}_0 : \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W) \to \mathrm{D}^\sharp(W)$ la projection $(v_n)_{n\geqslant 0} \mapsto v_0$. Commençons par montrer que si $v = (v_n)_{n\geqslant 0} \in \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_1)$, alors $\mathrm{pr}_0 \circ f(v)$ ne dépend que de $v_0 = \mathrm{pr}_0(v)$. Pour cela, soit K_n l'ensemble des $v \in \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_1)$ dont les n premiers termes sont nuls, ce qui fait que pour $n \geqslant 1$, K_n est un sous-$k_L[[X]]$-module fermé et stable par ψ de $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_1)$ et que $\psi(K_n) = K_{n+1}$. On en déduit que

$\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n)$ est un sous-$k_L[[X]]$-module fermé et stable par ψ de $\mathrm{D}^\sharp(W_2)$. Le lemme 1.1.2 implique alors que soit $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$, soit $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = \mathrm{D}^\sharp(W_2)$. Enfin, on voit que $\psi(\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n)) = \mathrm{pr}_0 \circ f(K_{n+1})$ d'une part et que $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$ si $n \gg 0$ par continuité d'autre part. Cela implique que $\mathrm{pr}_0 \circ f(K_n) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc que si $v_0 = 0$, alors $\mathrm{pr}_0 \circ f(v) = 0$.

Pour tout $w \in \mathrm{D}^\sharp(W_1)$, soit $\widetilde{w}$ un élément de $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W_1)$ tel que $\widetilde{w}_0 = w$. Les calculs précédents montrent que l'application $h : \mathrm{D}^\sharp(W_1) \to \mathrm{D}^\sharp(W_2)$ donnée par $h(w) = \mathrm{pr}_0 \circ f(\widetilde{w})$ est bien définie, et qu'elle est $k_L[[X]]$-linéaire et commute à ψ et à l'action de Γ. Par la proposition II.3.4 de [**18**], elle s'étend en une application de (φ, Γ)-modules $h : \mathrm{D}(W_1) \to \mathrm{D}(W_2)$ et par fonctorialité, on en déduit qu'il existe une application non-nulle et $G_{\mathbf{Q}_p}$-équivariante de W_1 dans W_2, ce qui fait que par le lemme de Schur, on a $W_1 \simeq W_2$ et que f est scalaire. □

Si W est une k_L-représentation de dimension 1, le lemme 1.1.1 montre que $\mathrm{D}^\sharp(W) = X^{-1}k_L[[X]] \cdot e$. On appelle res l'application de $\mathrm{D}^\sharp(W)$ dans k_L qui à $y = \sum_{j=-1}^{\infty} f_j X^j \cdot e$ associe f_{-1} et on note toujours res l'application de $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ dans k_L qui à $(y_0, y_1, \ldots)$ associe $\mathrm{res}(y_0)$.

Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de $\mathbf{Q}_p^\times$, on note $\chi_1 \otimes \chi_2$ le caractère de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ défini par la formule :

$$\chi_1 \otimes \chi_2 : \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mapsto \chi_1(a)\chi_2(d).$$

Proposition 1.2.4. — *Si η_W dénote le caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ associé à W par le corps de classes, et si χ est un caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$, alors l'application* res *induit par dualité une suite exacte de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-représentations :*

$$0 \to \chi\omega\eta_W^{-1} \otimes \omega^{-1}\eta_W \to (\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W))^* \to \Omega_\chi(W) \to 0.$$

Démonstration. — Il existe $r \in \{0, \ldots, p-2\}$ et $\lambda \in k_L^\times$ tels que $\eta_W = \omega^r \mu_\lambda$ et il s'agit donc de montrer que l'on a une suite exacte :

$$0 \to \varprojlim_\psi \mathrm{D}^+(W) \to \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W) \to \chi^{-1}\omega^{r-1}\mu_\lambda \otimes \omega^{1-r}\mu_{\lambda^{-1}} \to 0.$$

Si l'on pose $y = (\lambda^n X^{-1} e)_{n \geqslant 0}$, alors $y \in \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W)$ et $\mathrm{res}(y) = 1$ ce qui fait qu'il suffit de calculer $\mathrm{res}(b \star y)$ pour $b \in \mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$. On trouve que :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{res}\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) \star y\right) = \chi^{-1}(x),\\
&\mathrm{res}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right) \star y\right) = \mathrm{res}((\lambda^{n-1}X^{-1}e)_{n \geqslant 0}) = \lambda^{-1},\\
&\mathrm{res}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \star y\right) = \mathrm{res}((\omega^{r-1}(\gamma_a^{-1})(\lambda^n + \mathrm{O}(X))X^{-1}e)_{n \geqslant 0}) = a^{1-r},\\
&\mathrm{res}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \star y\right) = 1,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque 1.2.5. — Nous allons voir dans la suite de cet article que si $\dim W \in \{1,2\}$, alors les représentations $\Omega_\chi(W)$ sont les restrictions à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Quand $\dim W \geqslant 3$, ce n'est plus le cas et on obtient des représentations lisses irréductibles propres à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$. Quelles représentations lisses irréductibles de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ obtient-on ainsi ? Un début de réponse est donné dans [**5**].

1.3. Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

L'objet de ce paragraphe est de rappeler brièvement certaines des constructions de Breuil et Colmez. Il s'agit d'associer une représentation $\Pi(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à une représentation p-adique V irréductible de dimension 2. Cette représentation $\Pi(V)$ a été conjecturalement construite pour les représentations cristallines et semi-stables par Breuil (voir [**10**] pour le cas cristallin et [**11**] pour le cas semi-stable). Le fait que la représentation $\Pi(V)$ est non-nulle, irréductible et admissible (au sens de [**25**]) a été démontré par Colmez pour V semi-stable (voir [**16**] ; des cas particuliers se trouvent dans [**11**]) puis par Breuil et moi-même pour V cristabelline (voir [**7**] ; des cas particuliers se trouvent dans [**10**]). Enfin, ces résultats ont été étendus aux représentations trianguline par Colmez (voir [**16**] et [**15**] pour la définition de « trianguline » que l'on n'utilise pas dans cet article). Le théorème ci-dessous rassemble les résultats dont nous nous servirons. Rappelons que l'on note $\simeq_B$ pour « isomorphes en tant que représentations de B » et $\sim_B$ pour « les semi-simplifiées des restrictions à B sont isomorphes ».

Théorème 1.3.1. — *Si V est une représentation trianguline irréductible de dimension 2, alors :*

1. *on a* $\Pi(V)^* \simeq_B \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(V)$ *;*
2. *si T est un réseau de V, alors* $(\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(T))^*$ *est un réseau de* $\Pi(V)$ *stable sous l'action de* $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ *et commensurable aux $\mathscr{O}_L$-réseaux stables par* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *de* $\Pi(V)$ *;*
3. *on a* $\overline{\Pi}(V)^* \underset{\mathrm{B}}{\sim} \varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(\overline{V})$.

Démonstration. — Le (1) est démontré dans [**16**] pour une représentation semi-stable, dans [**7**] pour une représentation cristabelline et enfin dans [**15**] dans le cas d'une représentation trianguline [(1)]. Le (2) est un résultat facile (voir [**7**, §5.4] par exemple) et le (3) suit du (1) et du (2) ainsi que du théorème 0.6 de [**16**] et du principe de Brauer-Nesbitt (ce qui explique qu'il faut semi-simplifier). □

Rappelons à présent la classification des k_L-représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui admettent un caractère central. Si $r \in \{0,\dots,p-1\}$, si $\lambda \in \overline{\mathbf{F}}_p$ et si

(1) Il faut tout de même faire attention au fait que les normalisations changent d'un article à l'autre et il convient donc éventuellement de tordre la formule par un caractère.

$\chi : \mathbf{Q}_p^\times \to k_L^\times$ est un caractère continu, on pose :

$$\pi(r,\lambda,\chi) = \left(\frac{\operatorname{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \operatorname{Sym}^r k_L^2}{T-\lambda} \right) \otimes (\chi \circ \det),$$

où T est un certain opérateur de Hecke (voir [**3**]).

Si $(r,\lambda) \notin \{(0,\pm 1); (p-1,\pm 1)\}$, alors $\pi(r,\lambda,\chi)$ est irréductible (pour $\lambda \neq 0$, c'est un résultat de [**3**] et pour $\lambda = 0$, c'est un résultat de [**9**]). Pour $\lambda = 0$, les entrelacements entre les $\pi(r,0,\chi)$ sont les suivants :

$$\pi(r,0,\chi) \simeq \pi(r,0,\chi\mu_{-1}) \simeq \pi(p-1-r,0,\chi\omega^r) \simeq \pi(p-1-r,0,\chi\omega^r\mu_{-1}).$$

Si $(r,\lambda) \in \{(0,\pm 1); (p-1,\pm 1)\}$, alors la semi-simplifiée de $\pi(r,\lambda,\chi)$ est somme d'un caractère et de la tordue d'une représentation appelée la spéciale (qui correspond à $r=0$, $\lambda = 1$ et $\chi = 1$). Enfin, toute représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui admet un caractère central (2) est dans la liste ci-dessous :

1. les caractères $\chi \circ \det$;
2. la spéciale tordue par un caractère $\mathrm{Sp} \otimes (\chi \circ \det)$;
3. les séries principales $\pi(r,\lambda,\chi)$ avec $\lambda \neq 0$ et $(r,\lambda) \notin \{(0,\pm 1); (p-1,\pm 1)\}$;
4. les supersingulières $\pi(r,0,\chi)$.

Nous rappelons maintenant le calcul de $\overline{\Pi}(V)$ pour certaines représentations cristallines. Si $k \geqslant 2$ et si $a_p \in \mathfrak{m}_L$, alors on définit un φ-module filtré D_{k,a_p} par $D_{k,a_p} = Le \oplus Lf$ où :

$$\begin{cases} \varphi(e) = p^{k-1} f \\ \varphi(f) = -e + a_p f \end{cases} \quad \text{et} \quad \operatorname{Fil}^i D_{k,a_p} = \begin{cases} D_{k,a_p} & \text{si } i \leqslant 0, \\ Le & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \\ 0 & \text{si } i \geqslant k. \end{cases}$$

Ce φ-module filtré est admissible, et on sait (par le théorème principal de [**19**]) qu'il existe alors une représentation cristalline V_{k,a_p} de $G_{\mathbf{Q}_p}$ telle que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{k,a_p}^*) = D_{k,a_p}$ (on passe au dual pour que les notations soient compatibles avec celles de [**10**] et [**8**] ; remarquons tout de même que l'on a $V_{k,a_p}^* = V_{k,a_p}(1-k)$).

Soit Π_{k,a_p} la représentation localement algébrique construite par Breuil dans [**10**] :

$$\Pi_{k,a_p} = \frac{\operatorname{ind}_{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)\mathbf{Q}_p^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)} \operatorname{Sym}^{k-2} L^2}{T - a_p},$$

où T est un certain opérateur de Hecke (voir [**10**]).

Il est montré dans [**7**] que Π_{k,a_p} admet un $\mathscr{O}_L$-réseau de type fini sur $\mathscr{O}_L[\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$ et que sa complétion est isomorphe à $\Pi(V_{k,a_p})$. Breuil a d'autre part déterminé $\overline{\Pi}_{k,a_p}$ pour $k \leqslant 2p+1$ (voir le paragraphe 3.2) et nous avons besoin dans la suite du cas particulier ci-dessous (c'est le corollaire 5.1 de [**10**]).

(2) Dans la suite, on suppose tout le temps sans le dire que les représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que l'on considère admettent un caractère central.

Proposition 1.3.2. — *Si $k \leqslant p+1$, alors* $\overline{\Pi}_{k,0} \simeq \pi(k-2,0,1)$.

2. Etude de certaines représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$

L'objet de ce chapitre est de faire le lien entre les différentes constructions de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ (soit comme restriction de représentations lisses irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, soit directement comme $\Omega_\chi(W)$).

2.1. Induites paraboliques

On commence par faire l'étude des induites paraboliques. Si χ_1 et χ_2 sont deux caractères de $\mathbf{Q}_p^\times$, alors l'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ est par définition l'ensemble des fonctions localement constantes $\sigma : \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p) \to k_L$ qui vérifient $\sigma(bg) = (\chi_1 \otimes \chi_2)(b)\sigma(g)$ si $b \in B$ et $g \in G$.

Si $\sigma \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$, alors l'application $\sigma \mapsto \sigma(\mathrm{Id})$ nous donne une application de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ dans $\chi_1 \otimes \chi_2$ dont on note $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$ le noyau ce qui fait que l'on a une suite exacte de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-représentations :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2) \to \chi_1 \otimes \chi_2 \to 0.$$

Soit $\mathrm{LC}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{Q}_p \to k_L$ localement constantes à support compact. Si $\sigma \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$, alors on associe à σ une fonction $f_\sigma \in \mathrm{LC}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ via la recette :

$$f_\sigma(x) = \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\right).$$

La décomposition de Bruhat montre que l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ est une bijection de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$ dans $\mathrm{LC}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ et comme $(b \star \sigma)(g) = \sigma(gb)$ si $\sigma \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ et $b \in B$ et $g \in G$, on a :

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} f_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\star\sigma}(x) &= \sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) \\ &= \sigma\left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{dx-b}{a} \end{pmatrix}\right) \\ &= \chi_1(d)\chi_2(a) f_\sigma\left(\frac{dx-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.1.1. — *Si η_W dénote le caractère de $\mathbf{Q}_p^\times$ associé à W par le corps de classes, alors $\Omega_\chi(W) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\eta_W \otimes \chi\eta_W^{-1})_0$.*

Démonstration. — Ecrivons $W = \omega^r \mu_\lambda$, ce qui fait que l'on doit montrer que :

$$\Omega_\chi(W) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\omega^r \mu_\lambda \otimes \chi\omega^{-r}\mu_{\lambda^{-1}})_0.$$

Nous allons définir une application :

$$\varprojlim_{\psi} \mathrm{D}^+(W) \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\omega^r \mu_\lambda \otimes \chi\omega^{-r}\mu_{\lambda^{-1}})_0^*,$$

et montrer que c'est un isomorphisme $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariant.

Rappelons tout d'abord la définition de la transformée d'Amice (tout au moins la version dont nous avons besoin). Si ν est une forme linéaire $\nu : \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L) \to k_L$ (on dira que ν est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$), alors sa transformée d'Amice $\mathscr{A}(\nu) \in k_L[[X]]$ est définie par :

$$\mathscr{A}(\nu)(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu\left(z \mapsto \binom{z}{n}\right) X^n = \nu(z \mapsto (1+X)^z),$$

et l'application $\mathscr{A} : \mathrm{LC}(\mathbf{Z}_p, k_L)^* \to k_L[[X]]$ est alors un isomorphisme (cf. [**1**]).

Fixons une base e de $\mathrm{D}^+(W)$ telle que $\varphi(e) = \lambda e$ et $\gamma(e) = \omega^r(\gamma)e$ (voir le lemme 1.1.1) ; si $y \in \varprojlim_{\psi} \mathrm{D}^+(W)$, alors $y = (y_i)_{i\geqslant 0}$ et on a $y_i = f_i e$ avec $f_i \in k_L[[X]]$. On voit que $\psi(\lambda^{-i} f_i) = \lambda^{-(i-1)} f_{i-1}$ et on définit une mesure $\nu_{y,i}$ sur $\mathbf{Z}_p$ en demandant que $\mathscr{A}(\nu_{y,i}) = \lambda^{-i} f_i$ ce qui nous permet de définir une mesure ν_y sur $\mathbf{Q}_p$ en imposant que si $f \in \mathrm{LC}_0(\mathbf{Q}_p, k_L)$ est à support dans $p^{-i}\mathbf{Z}_p$, alors :

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f d\nu_y = \int_{\mathbf{Z}_p} f(p^{-i}z) d\nu_{y,i}.$$

Le terme de droite ne dépend pas de $i \gg 0$, en vertu de la formule :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} f(z) d\psi(\nu) = \int_{p\mathbf{Z}_p} f(p^{-1}z) d\nu,$$

et $\int_{\mathbf{Q}_p} f d\nu_y$ est donc bien définie. Il est clair que l'application $y \mapsto \nu_y$ est une bijection qui nous permet d'identifier, via la recette $\sigma \mapsto f_\sigma$ rappelée au début de ce paragraphe, $\Omega_\chi(W)$ avec le dual de l'induite parabolique. Cette construction est bien sûr l'analogue de celle de Colmez dans [**18**].

Pour terminer la démonstration du théorème, nous devons montrer que cette identification est $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-équivariante. L'action de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ sur les mesures est donnée par l'action correspondante sur leurs transformées d'Amice et on trouve les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\nu_{\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)\star y} &= \chi^{-1}(x) \int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\nu_y \\
\int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\nu_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{smallmatrix}\right)\star y} &= \lambda^{-1} \int_{\mathbf{Q}_p} f(p^{-1}z) d\nu_y \\
\int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\nu_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\star y} &= d^{-r} \int_{\mathbf{Q}_p} f(d^{-1}z) d\nu_y \quad (\text{avec } d \in \mathbf{Z}_p^\times) \\
\int_{\mathbf{Q}_p} f(z) d\nu_{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\star y} &= \int_{\mathbf{Q}_p} f(z+b) d\nu_y.
\end{aligned}$$

En comparant ces formules avec (A), on trouve bien que :

$$\int_{\mathbf{Q}_p} f_{g\star\sigma}(z)d\nu_{g\star y} = \int_{\mathbf{Q}_p} f_\sigma(z)d\nu_y$$

si $g \in \mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$, $y \in \varprojlim_\psi \mathrm{D}^+(W)$ et $\sigma \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\omega^r\mu_\lambda \otimes \chi\omega^{-r}\mu_{\lambda^{-1}})_0$. □

Pour terminer, rappelons le lien entre les induites paraboliques et les $\pi(r,\lambda,\chi)$ (c'est le (3) du théorème 30 de [**2**]).

Proposition 2.1.2. — *On a* $\pi(r,\lambda,\chi) \underset{\mathrm{G}}{\simeq} \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi\mu_{\lambda^{-1}} \otimes \chi\mu_\lambda\omega^r)$.

Remarque 2.1.3. — En particulier, la spéciale Sp est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(1\otimes 1)_0$. Dans ce cas, la suite exacte de représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$:

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(1\otimes 1)_0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(1\otimes 1) \to 1\otimes 1 \to 0$$

est d'ailleurs scindée (le k_L-espace vectoriel engendré par la fonction $g \mapsto 1$ est un supplémentaire $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-stable de Sp). Il est amusant de remarquer que la suite exacte de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$:

$$0 \to \mathrm{Id} \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(1\otimes 1) \to \mathrm{Sp} \to 0$$

n'est *pas* scindée (voir la démonstration du théorème 29 de [**3**]).

2.2. Supersingulières

Dans ce court paragraphe, nous démontrons l'analogue du théorème 2.1.1 pour les représentations de dimension 2 mais contrairement à la démonstration du théorème 2.1.1, l'argument n'est pas direct et repose de manière essentielle sur des calculs en caractéristique 0. Il serait intéressant de disposer d'une démonstration purement en caractéristique p [(3)].

Théorème 2.2.1. — *Si $W \simeq \rho(r,\chi)$, alors $\Omega_{\omega^r\chi^2}(W)$ est isomorphe à la restriction au Borel de $\pi(r,0,\chi)$.*

Démonstration. — Un calcul facile montre que $\overline{V}_{r+2,0} \simeq \rho(r,1)$ et le (3) du théorème 1.3.1 montre alors que $\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(\rho(r,\chi)) \underset{\mathrm{B}}{\simeq} \overline{\Pi}(V_{r+2,0}\otimes\chi)^*$ ce qui fait que, comme le caractère central de $\overline{\Pi}_{r+2,0}\otimes(\chi\circ\det)$ est $\omega^r\chi^2$, on a :

$$\Omega_{\omega^r\chi^2}(\rho(r,\chi)) \underset{\mathrm{B}}{\simeq} \overline{\Pi}_{r+2,0}\otimes(\chi\circ\det) \simeq \pi(r,0,\chi),$$

par la proposition 1.3.2. □

(3) Depuis la rédaction de cet article en 2005, j'ai rédigé une telle démonstration ; c'est l'un des résultats de [**5**].

2.3. Applications aux représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Pour terminer ce chapitre, nous donnons deux applications des identifications précédentes à l'étude des représentations de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ et de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Théorème 2.3.1. — *Si Π est une k_L-représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ admettant un caractère central, alors :*

1. *si Π est un caractère, ou la spéciale, ou supersingulière, alors sa restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ est toujours irréductible ;*
2. *si Π est une série principale, alors sa restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ est une extension du caractère induisant $\chi_1 \otimes \chi_2$ par la représentation irréductible $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0$.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord le (1). Comme la spéciale est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(1 \otimes 1)_0$ on renvoie au (2) et le cas des caractères est trivial, ce qui nous laisse les supersingulières. Comme $\pi(r, 0, \chi) \simeq_B \Omega_{\omega^r \chi^2}(\rho(r, \chi))$, le fait que cette représentation est irréductible en restriction au Borel suit de la proposition 1.2.2.

Passons à présent au (2). On a vu au paragraphe 2.1 que l'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0 \to \mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2) \to \chi_1 \otimes \chi_2 \to 0,$$

ce qui montre l'assertion concernant l'extension, et comme $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)_0 \simeq \Omega_{\chi_1 \chi_2}(\chi_1)$ par le théorème 2.1.1, le fait que cette représentation est irréductible suit encore de la proposition 1.2.2. □

Théorème 2.3.2. — *Si Π_1 et Π_2 sont deux k_L-représentations lisses semi-simples et de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (dont les composantes irréductibles admettent un caractère central) et dont les semi-simplifications des restrictions à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ sont isomorphes, alors Π_1 et Π_2 sont déjà isomorphes en tant que représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.*

Démonstration. — Une représentation semi-simple et de longueur finie de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ est une somme directe de caractères $\chi \circ \det$, de tordues de la spéciale, de séries principales $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ avec $\chi_1 \neq \chi_2$ et de supersingulières.

La restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ du caractère $\chi \circ \det$ est $\chi \otimes \chi$ et par le théorème 2.3.1, celle de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ est une extension de $\chi_1 \otimes \chi_2$ (avec nécessairement $\chi_1 \neq \chi_2$) par une représentation de dimension infinie alors que les restrictions des tordues de la spéciale et des supersingulières sont irréductibles et de dimension infinie. On voit donc que si l'on a deux représentations Π_1 et Π_2 qui satisfont les conditions du théorème, alors elles contiennent les mêmes caractères et séries principales.

Pour terminer, il faut voir que les tordues des spéciales et les supersingulières sont déterminées par leur restriction au Borel. Elles sont toutes de la forme $\Omega_\chi(W)$ (avec W de dimension 1 pour la spéciale par le théorème 2.1.1 et W de dimension 2 pour les supersingulières par le théorème 2.2.1) et la proposition 1.2.3 montre qu'il n'y a pas de $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$-entrelacements non-triviaux entre deux telles représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ différentes. □

3. Correspondances continues et modulo p

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat principal de cet article (la correspondance entre réduction modulo p des représentations galoisiennes V et des représentations $\Pi(V)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$) et ensuite nous rappelons les cas où le calcul de cette réduction a été fait.

3.1. Démonstration de la conjecture de Breuil

Dans ce paragraphe, nous démontrons le résultat principal de cet article. Le théorème ci-dessous est (pour V cristalline) la conjecture 1.2 de [**10**] (attention au fait que $\mu_\lambda = \mathrm{nr}(\lambda^{-1})$).

Théorème 3.1.1. — *Si V est une représentation trianguline irréductible, alors :*

$$\overline{V} = \rho(r, \chi) \Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) = \pi(r, 0, \chi)$$

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} \mu_\lambda \omega^{r+1} & 0 \\ 0 & \mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \otimes \chi \Leftrightarrow \overline{\Pi}(V) \underset{\mathrm{G}}{\sim} \pi(r, \lambda, \chi) \oplus \pi([p-3-r], \lambda^{-1}, \omega^{r+1}\chi)$$

Ici $[p-3-r]$ est l'unique entier appartenant à $\{0, \dots, p-2\}$ et qui est congruent à r modulo $p-1$.

Démonstration. — Le (3) du théorème 1.3.1 nous dit que l'on a :

$$\text{(B)} \qquad \overline{\Pi}(V)^* \underset{\mathrm{B}}{\sim} \varprojlim_{\psi} \mathrm{D}^\sharp(\overline{V}).$$

Supposons tout d'abord que l'on connaisse $\overline{V}$. Le théorème 2.1.1 et la proposition 1.2.4 quand $\overline{V}$ est réductible, ou bien le théorème 2.2.1 quand $\overline{V}$ est irréductible, ainsi que la formule (B), montrent que $\overline{\Pi}(V)$ est une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ dont la restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ coïncide avec celle qui est prédite par le théorème, et le théorème 2.3.2 permet alors de conclure.

Supposons maintenant que l'on connaisse $\overline{\Pi}(V)$; on peut conclure comme ci-dessus (nous laissons cela en exercice) mais il y a plus explicite. Si $\overline{\Pi}(V)$ est une représentation supersingulière, alors par le théorème 2.3.1 sa restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ est toujours irréductible ce qui fait que (à cause de la formule (B)) $\overline{V}$ est irréductible et le théorème 2.2.1 et la proposition 1.2.3 permettent de conclure. Si $\overline{\Pi}(V)$ est du deuxième type, alors $\overline{V}$ est forcément réductible et la formule (B) ainsi que la proposition 1.2.4 montrent que l'on peut lire $\overline{V}$ sur la restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de $\overline{\Pi}(V)$ (c'est la tordue par ω de la partie de dimension finie de cette restriction, c'est cela qui est explicite). □

Remarque 3.1.2. — La démonstration ci-dessus montre qu'en fait, la restriction à $\mathrm{B}(\mathbf{Q}_p)$ de $\overline{\Pi}(V)$ suffit à déterminer $\overline{V}$.

Remarque 3.1.3. — Si W est de dimension 1, on voit que la représentation $\Omega_\chi(W)$ est d'une part un sous-objet de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\eta_W \otimes \chi\eta_W^{-1})$ et d'autre part un quotient de

$(\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W))^*$. On pourrait donc croire que $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\eta_W \otimes \chi\eta_W^{-1}) \underset{\mathrm{B}}{\sim} (\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W))^*$ mais en fait, la proposition 1.2.4 et les résultats du §2.1 montrent que :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{G}}(\eta_W \otimes \chi\eta_W^{-1}) \underset{\mathrm{B}}{\sim} \Omega_\chi(W) \oplus (\eta_W \otimes \chi\eta_W^{-1})$$
$$(\varprojlim_\psi \mathrm{D}^\sharp(W))^* \underset{\mathrm{B}}{\sim} \Omega_\chi(W) \oplus (\chi\omega\eta_W^{-1} \otimes \omega^{-1}\eta_W)$$

et dans la correspondance entre

$$\mu_\lambda\omega^{r+1}\chi \oplus \mu_{\lambda^{-1}}\chi \quad \text{et} \quad \pi(r,\lambda,\chi) \oplus \pi([p-3-r],\lambda^{-1},\omega^{r+1}\chi),$$

les termes se « croisent » et il y a donc une sorte d'« entrelacement fantôme » entre $\pi(r,\lambda,\chi)$ et $\pi([p-3-r],\lambda^{-1},\omega^{r+1}\chi)$ (il y a d'ailleurs un véritable entrelacement en ℓ-adique pour $\ell \neq p$, voir la remarque 4.2.5 de [**9**]).

3.2. Réduction modulo p de quelques représentations galoisiennes

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les résultats des calculs qui ont été faits par différents auteurs. Il s'agit soit du calcul de $\overline{V}$, soit du calcul de $\overline{\Pi}(V)$, pour certaines représentations V.

Commençons par les représentations cristallines V_{k,a_p} définies à la fin du paragraphe 1.3. Le calcul de $\overline{V}_{k,a_p}$ remonte à Fontaine et Serre (en raison du lien avec les formes modulaires) ; la théorie de Fontaine-Laffaille (voir [**22**]) permet de faire ce calcul pour tout $k \leqslant p$. Quand $k \leqslant p+1$, c'est un résultat d'Edixhoven (sous l'hypothèse que la représentation provienne d'une forme modulaire). Enfin, quand $k \geqslant p+1$, la théorie des modules de Wach permet de calculer $\overline{V}_{k,a_p}$ si $\mathrm{val}(a_p)$ est assez grand (voir [**8**] et [**6**]). Le calcul de $\overline{\Pi}(V_{k,a_p})$ a été fait par Breuil pour $k \leqslant 2p+1$ (voir [**10**] pour $k \leqslant 2p$; si $k = 2p+1$ et $p \neq 2$, c'est un calcul non-publié de Breuil ; le résultat avait été suggéré par des expériences numériques de Buzzard). Voici la liste des résultats que l'on avait au moment de la rédaction de cet article, en 2005.

Théorème 3.2.1. — *La réduction modulo p des représentations V_{k,a_p} est connue dans les cas suivants.*

1. *Si $2 \leqslant k \leqslant p+1$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.*
2. *Pour $k = p+2$:*
   (a) *si $1 > \mathrm{val}(a_p) > 0$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^2)$.*
   (b) *si $\mathrm{val}(a_p) \geqslant 1$, et si λ est une racine du polynôme $\lambda^2 - \overline{a_p/p}\cdot\lambda + 1 = 0$, alors :*
   $$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$
3. *Pour $2p \geqslant k \geqslant p+3$:*
   (a) *si $1 > \mathrm{val}(a_p) > 0$, alors $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-p})$.*

(b) *si* $\mathrm{val}(a_p) = 1$, *et si* $\lambda = \overline{a_p/p} \cdot (k-1)$, *alors :*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega^{k-2}\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix}.$$

(c) *si* $\mathrm{val}(a_p) > 1$, *alors* $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.

4. *Pour* $k = 2p+1$ *(et* $p \neq 2$*) :*

(a) *si* $\mathrm{val}(a_p^2 + p) < 3/2$, *alors* $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^2)$.

(b) *si* $\mathrm{val}(a_p^2 + p) \geqslant 3/2$, *alors :*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \omega\mu_\lambda & 0 \\ 0 & \omega\mu_{\lambda^{-1}} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \lambda^2 - \overline{\frac{a_p^2+p}{2pa_p}} \cdot \lambda + 1 = 0.$$

5. *Pour* $k \geqslant 2p+2$, *les résultats ne sont que partiels :*

(a) *si* $\mathrm{val}(a_p) > \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$ *et si* $p+1 \nmid k-1$, *alors* $\overline{V}_{k,a_p} = \mathrm{ind}(\omega_2^{k-1})$.

(b) *si* $\mathrm{val}(a_p) > \lfloor (k-2)/(p-1) \rfloor$, *si* $p+1 \mid k-1$ *et si* $i^2 = -1$, *alors :*

$$\overline{V}_{k,a_p} = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_{-i} \end{pmatrix} \otimes \omega^{\frac{k-1}{p+1}}.$$

Des résultats de Buzzard et Gee postérieurs à la rédaction de cet article et fondés sur le théorème A (voir [**14**]) décrivent ce qui se passe sur la couronne $0 < \mathrm{val}(a_p) < 1$.

Pour ce qui est des représentations semi-stables, le calcul de la réduction côté Galois a été fait dans [**12**] (pour k pair vérifiant $2 \leqslant k < p$) et le calcul de la réduction côté $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ a été fait dans [**11, 13**] (pour k pair vérifiant $2 \leqslant k \leqslant p+1$ et en supposant de plus que l'invariant $\mathscr{L}$ est de valuation $\geqslant 0$ si $k \neq 2$). Nous ne rappelons pas ici les formules, que l'on peut trouver dans [**12**, §4.3.3] côté Galois et dans [**11**, §4.5] (pour $k = 2$) et [**13**, §1.1] (pour $k \geqslant 4$) côté $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Comme ces formules ont des applications directes au calcul de la réduction modulo p des représentations locales associées aux formes modulaires, il serait intéressant de les déterminer pour tout k. Cela pose des problèmes compliqués mais fascinants d'analyse p-adique en relation avec les (φ, Γ)-modules.

Références

[1] Y. Amice – Duals, in *Proceedings of the Conference on p-adic Analysis (Nijmegen, 1978)*, Report, vol. 7806, Katholieke Univ. Nijmegen, 1978, p. 1–15.

[2] L. Barthel & R. Livné – Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 261–292.

[3] ______, Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case, *J. Number Theory* **55** (1995), p. 1–27.

[4] L. Berger – Limites de représentations cristallines, *Compos. Math.* **140** (2004), p. 1473–1498.

[5] ———, On some modular representations of the Borel subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Compos. Math.* **146** (2010), p. 58–80.

[6] L. Berger & C. Breuil – Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2 en poids moyens, prépublication, 2005.

[7] ———, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[8] L. Berger, H. Li & H. J. Zhu – Construction of some families of 2-dimensional crystalline representations, *Math. Ann.* **329** (2004), p. 365–377.

[9] C. Breuil – Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I, *Comp. Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[10] ———, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. II, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 23–58.

[11] ———, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 559–610.

[12] C. Breuil & A. Mézard – Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ en $l = p$, *Duke Math. J.* **115** (2002), p. 205–310.

[13] ———, Représentations semi-stables de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, *Astérisque* **331** (2010), p. 117–178.

[14] K. Buzzard & T. Gee – Explicit reduction modulo p of certain two-dimensional crystalline representations, *Int. Math. Res. Not.* **2009** (2009), p. 2303–2317.

[15] P. Colmez – Représentations triangulines de dimension 2, *Astérisque* **319** (2008), p. 213–258.

[16] ———, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[17] ———, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules, ce volume.

[18] ———, (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce volume.

[19] P. Colmez & J.-M. Fontaine – Construction des représentations p-adiques semistables, *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[20] B. Edixhoven – The weight in Serre's conjectures on modular forms, *Invent. Math.* **109** (1992), p. 563–594.

[21] J.-M. Fontaine – Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., vol. 87, Birkhäuser, 1990, p. 249–309.

[22] J.-M. Fontaine & G. Laffaille – Construction de représentations p-adiques, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **15** (1982), p. 547–608.

[23] L. Herr – Sur la cohomologie galoisienne des corps p-adiques, *Bull. Soc. Math. France* **126** (1998), p. 563–600.

[24] V. Paškūnas – On the restriction of representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ to a Borel subgroup, *Comp. Math.* **143** (2007), p. 1533–1544.

[25] P. Schneider & J. Teitelbaum – Algebras of p-adic distributions and admissible representations, *Invent. Math.* **153** (2003), p. 145–196.

[26] M.-F. Vignéras – Série principale modulo p de groupes réductifs p-adiques, *Geom. Funct. Anal.* **17** (2008), p. 2090–2112.

Laurent Berger, Université de Lyon, UMPA, ENS de Lyon, 46 allée d'Italie, 69007 LYON
E-mail : laurent.berger@ens-lyon.fr • *Url :* www.umpa.ens-lyon.fr/~lberger/