AST

Table des matières et Résumés des exposés

Astérisque, tome 326 (2009), p. I-X

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__R1_0>

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki. École normale supérieure, 45, rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.
URL : `http://www.bourbaki.ens.fr`

***Mots-clefs et classification mathématique par sujet* (2000)**

Exposé n° 982. — Programme des modèles minimaux — 14E30.
Exposé n° 983. — Groupes algébriques linéaires, corps de nombres, groupes simples — 20G15, 20G30.
Exposé n° 984. — Groupe algébrique, groupe de Lie, groupe arithmétique, espace symétrique, surface complexe, corps local, théorie de Bruhat-Tits, fonction arithmétique, covolume, super-rigidité — 20GXX, 20G25, 20G30, 11F06, 22E40, 32M15, 53C35, 14J29.
Exposé n° 985. — o-minimalité — 03C64.
Exposé n° 986. — Formes modulaires, mock theta functions, fonctions theta, Q-séries, combinatoires — 11F11, 11F37, 33D15, 05A15.
Exposé n° 987. — Groupoïde, algébroïde de Lie, variété symplectique, crochet de Poisson, feuilletage, équivalence de Morita, fibré principal, groupe de Galois différentiel, source, but, ancre, crochet de Schouten, identité de Leibniz, variétés de Dirac, champ de Poisson, réalisation symplectique, monodromie — 22A22, 58H05, 53D17, 12H20, 34-99.
Exposé n° 988. — Systèmes dynamiques, cocycles quasi-périodiques, réductibilité — 37A20, 37C15, 37C55, 34C27.
Exposé n° 989. — Conjecture *abc*, corps des fonctions, inégalité tautologique, théorie d'Ahlfors — 14G05, 14G25, 11G30, 11G50, 30D35.
Exposé n° 990. — Espace métrique mesuré, courbure de Ricci, entropie, espace de Wasserstein, convergence de Gromov-Hausdorff, courbure et dimension — 53C21, 53C23, 28A33, 46E35, 49Q20, 58C40, 58G32, 58Jxx, 60J60, 35K05, 60J65.
Exposé n° 991. — Hyperbolicité au sens complexe, lemme de Brody, courants d'Ahlfors, conjecture de Green-Griffiths, compacité à la Gromov, inégalité isopérimétrique — 05C05, 30D45, 32U40, 32U45, 32Q30, 53C23.
Exposé n° 992. — Arbres aléatoires, arbres aléatoires continus, carte brownienne — 05C12, 05C80, 60B05, 60F17.
Exposé n° 993. — Espaces et groupes hyperboliques au sens de Gromov, espaces CAT(-1), dynamique conforme, groupes de convergence, conjecture de Cannon, espaces symétriques, immeubles fuchsiens, modules de courbes, espaces de Loewner, transformations quasimöbius — 20F67, 30C65, 53C24, 20F65, 20F69, 30F10, 31C15, 31C20, 51E24, 53C23, 53C35, 57M07.
Exposé n° 994. — Fibré vectoriel, espace de modules, fonction thêta généralisée, invariant de Gromov-Witten — 14H60, 14H81, 14N35.
Exposé n° 995. — Amalgames, variétés algébriques, exponentielle complexe, conjecture de Schanuel — 03CXX.
Exposé n° 996. — Échanges d'intervalles, surfaces de translation, flot de Teichmüller, exposants de Lyapunov, mélange faible, mélange exponentiel — 37E05, 30F60, 32G15.

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

Résumé. — Comme les précédents volumes de ce séminaire, celui-ci contient quinze exposés de synthèse sur des sujets d'actualité : quatre exposés de géométrie algébrique, un de théorie des nombres, un en probabilité, quatre de géométrie différentielle, trois sur les groupes et les algèbres de Lie, un sur des systèmes dynamiques et un lié à la physique mathématique.

***Abstract* (Séminaire Bourbaki, volume 2007/2008, exposés 982-996)**

As in the preceding volumes of this seminar, one finds here fifteen survey lectures on topics of current interest: four lectures on algebraic geometry, one on number theory, one on probability theory, four on differential geometry, three about groups or Lie algebras, one concerning dynamical systems and one about mathematical physics.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2009

Stéphane DRUEL — *Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général (d'après Birkar, Cascini, Hacon et M^c Kernan)*

La compréhension des variétés algébriques complexes de dimension trois et supérieure a été bouleversée par les travaux initiés à la fin des années 1970 par Mori, généralisant à la dimension trois la théorie des modèles minimaux de surfaces. Soit X une variété algébrique projective lisse. Le programme des modèles minimaux prédit l'existence d'une variété projective peu singulière X' birationnelle à X telle que, ou bien $K_{X'}$ soit numériquement effectif (on dit alors que X' est un modèle minimal de X) ou bien X' soit fibrée en variétés de Fano. On donne les grandes lignes de la preuve par Birkar, Cascini, Hacon et M^c Kernan de l'existence de modèles minimaux pour les variétés de type général.

Philippe GILLE — *Le problème de Kneser-Tits*

Ce survol porte sur le groupe de Whitehead $W(k, \mathbf{G}) = \mathbf{G}(k)/\,\mathbf{G}(k)^+$ d'un k–groupe algébrique linéaire G/k isotrope et presque simple. Pour les groupes $\mathbf{SL}_n(D)$, on discute la conjecture d'annulation de Suslin. On donne une démonstration unifiée de résultats de Prasad-Raghunathan et Garibaldi sur la trivialité de $W(k, \mathbf{G})$ pour les groupes trialitaires, respectivement certains groupes de type E_6. Ceci s'applique notamment au cas des corps de nombres.

Bertrand RÉMY — *Covolume des groupes S-arithmétiques et faux plans projectifs (d'après Mumford, Prasad, Klingler, Yeung, Prasad-Yeung)*

Les groupes S-arithmétiques constituent une généralisation naturelle des groupes de matrices classiques à coefficients dans des anneaux d'entiers de corps de nombres. À la fin des années 80, G. Prasad a démontré une formule calculant le volume des quotients de groupes de Lie par des groupes S-arithmétiques. Le principal outil de démonstration est la théorie de Bruhat-Tits des groupes réductifs sur les corps locaux. Un faux plan projectif est une surface complexe compacte avec les mêmes nombres de Betti que (mais non homéomorphe à) $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$. B. Klingler et S.-K. Yeung ont démontré indépendamment que le groupe fondamental d'une telle surface est un groupe arithmétique. Ceci a permis à G. Prasad et S.-K. Yeung, en utilisant la formule de G. Prasad, de considérablement améliorer les précédents résultats de finitude sur le nombre de ces surfaces.

Alex J. WILKIE — *o-minimal structures*

The notion of o-minimality was invented by L. van den Dries as a framework for investigating the model theory of the real exponential function. It has now developed into a candidate for Grothendieck's idea of "tame topology", being both flexible enough to carry out many geometrical and topological constructions on real functions and subsets of real euclidean spaces and at the same time having built in restrictions so that we are a priori guaranteed that pathological phenomena can never arise. I shall survey the area, beginning with the semi-algebraic and sub-analytic cases.

Don ZAGIER — *Ramanujan's mock theta functions and their applications (d'après Zwegers and Ono–Bringmann)*

In a notorious letter sent to Hardy shortly before his death in 1920, Ramanujan introduces a class of very interesting functions which he called "mock theta functions" and of which he gave 17 examples, but no precise definition. By "theta function" Ramanujan meant what we call today a "modular form" and by "mock" something "fake" or "whimsical", and indeed, his 17 functions had visibly properties analogous to those of usual modular functions but didn't belong to any known class. The mystery has been solved in 2002 by Sander Zwegers in his Ph.D. (Utrecht) where he shows, by three different methods, that these functions can be completed by adding functions of an explicit and very simple form, to obtain non holomorphic modular forms. His theory has found many applications, in particular in the works of Ono–Bringmann, who have used it to show conjectured or new results concerning the properties of partitions, as well as more coefficients of q-hypergeometric series.

Pierre CARTIER — *Groupoïdes de Lie et leurs algébroïdes*

Les groupoïdes de Lie ont été introduits par Ch. Ehresmann autour de 1950 et sont les groupoïdes dans la catégorie des variétés différentielles. Ils constituent donc une généralisation des groupes de Lie et, comme ceux-ci, ils ont une contrepartie infinitésimale : les « algébroïdes de Lie ». Cette dernière notion a un pendant algébrique, connu sous le nom d'algèbres de Lie-Rinehart (introduites indépendamment par A. Grothendieck). À côté de nombreuses applications, portant surtout sur la géométrie des variétés symplectiques et de Poisson, les recherches se sont surtout orientées vers la démonstration d'un analogue du troisième théorème de Lie (remontant d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie). Cette histoire est longue et mouvementée, avec des contributions de J. Pradines, A. Douady et M. Lazard,... et vient de se conclure par des résultats définitifs obtenus par les collaborateurs d'Alan Weinstein : Krainic, Fernandes, Ping Xu, Zhu...

L. Hakan ELIASSON — *Résultats non-perturbatifs pour l'équation de Schrödinger et d'autres cocycles quasi-périodiques (d'après Avila, Bourgain, Jitomirskaya, Krikorian, Puig)*

Des méthodes de type KAM ont été utilisées avec succès depuis une cinquantaine d'années pour étudier la dynamique des co-cycles quasi-périodiques à valeurs dans $SL(2, R)$. L'exemple le plus important d'un tel co-cycle est l'équation de Schrödinger quasi-périodique uni-dimensionnelle, pour laquelle il y a des connections importantes entre les propriétés dynamiques et spectrales.

KAM est une théorie perturbative : elle est valable au voisinage d'un co-cycle à coefficients constants (ou de l'équation de Schrödinger libre), et la taille de ce voisinage dépend des propriétés arithmétiques des « quasi-périodes ». Récemment deux approches basées, respectivement, sur la renormalisation et sur la localisation + dualité, ont été développées. Ces méthodes sont beaucoup plus globales mais restent (pour le moment) restreintes à des co-cycles avec une fréquence.

Carlo GASBARRI — *The strong abc conjecture over function fields (after McQuillan and Yamanoi)*

The *abc* conjecture predicts a highly non trivial upper bound for the height of an algebraic point in terms of its discriminant and its intersection with a fixed divisor of the projective line counted without multiplicity. We will report on the two independent proofs of the strong *abc* conjecture over function fields given by McQuillan and Yamanoi. The first proof relies on tools from differential and algebraic geometry; the second relies on analytic and topological methods. They correspond respectively to the Nevanlinna and the Ahlfors approach to the Nevanlinna Second Main Theorem.

Michel LEDOUX — *Géométrie des espaces métriques mesurés : les travaux de Lott, Villani, Sturm*

Grâce aux travaux parallèles et complémentaires de J. Lott et C. Villani et K.-T. Sturm, l'étude géométrique des espaces métriques mesurés s'est récemment dotée d'une définition synthétique de borne inférieure de courbure de Ricci à travers une propriété de convexité d'une fonctionnelle de type entropique le long de géodésiques dans l'espace des mesures de probabilités. Ces développements récents, issus de la théorie du transport optimal de mesures, ont pris place au carrefour de l'analyse, de la géométrie et du calcul des probabilités.

Mihai PĂUN — *Courants d'Ahlfors et localisation des courbes entières (d'après Julien Duval)*

Soit (Δ_k) une suite divergente de disques holomorphes dans une variété complexe compacte X. Le lemme classique de Brody montre qu'une telle suite engendre une courbe entière non-constante $\varphi : \mathbb{C} \to X$, via un procédé de reparamétrisation. On remarque qu'on ne peut pas localiser a priori la courbe φ, dans le sens suivant : supposons que tous les disques précédents passent par un point $x \in X$; en général, l'image de la courbe φ ne contient pas x. Le très beau résultat de J. Duval présenté dans notre texte utilise un courant d'Ahlfors T induit par (Δ_k) afin d'obtenir un « lemme de Brody » quantitatif, comme suit : *soit $K \subset X$ un ensemble compact, chargé par T ; alors il existe une courbe entière intersectant K selon un ensemble d'aire positive.* Cet énoncé est plus complet que les *conjectures* formulées dans les développements récents de l'hyperbolicité complexe ; on espère qu'il aura des applications très importantes dans un futur proche.

Vincent BEFFARA — *Grands graphes planaires aléatoires et carte brownienne (d'après Jean-François Le Gall)*

La mécanique statistique en dimension deux a toujours été une importante source d'inspiration tant pour les mathématiciens que pour les physiciens ; un outil important dans sa compréhension, et qui est longtemps resté mystérieux, est la gravitation quantique, qui consiste à rendre le graphe sous-jacent (sur lequel le modèle est défini) lui-même aléatoire. Pour pouvoir passer à la limite thermodynamique, il est alors nécessaire de comprendre le comportement asymptotique de tels graphes planaires aléatoires quand leur volume tend vers l'infini. On présentera les travaux récents de J.-F. Le Gall dans ce domaine, et en particulier le résultat fondamental suivant : soit G_n une quadrangulation aléatoire de la sphère, choisie uniformément parmi les quadrangulations à n faces ; on munit G_n de sa distance de graphe renormalisée par un facteur $n^{-1/4}$. Alors, toute limite en loi d'une sous-suite de (G_n) (pour la topologie de Gromov-Hausdorff) est homéomorphe à une sphère.

Peter HAÏSSINSKY — *Géométrie quasiconforme, analyse au bord des espaces métriques hyperboliques et rigidités (d'après Mostow, Pansu, Bourdon, Pajot, Bonk, Kleiner...)*

Les espaces hyperboliques non bornés peuvent être compactifiés en considérant une sphère visuelle à l'infini, qui est naturellement munie d'une structure quasiconforme. Cette structure caractérise en général les espaces hyperboliques à quasi-isométries près.

Dans le cas des espaces symétriques non compacts de rang 1 et des immeubles fuchsiens, la géométrie de leur bord s'avère être très particulière. Le but de cet exposé est de décrire certaines de ses propriétés et des mécanismes responsables de phénomènes de rigidité qui en découlent.

Christian PAULY — *La dualité étrange (d'après P. Belkale, A. Marian et D. Oprea)*

Dans cet exposé, j'expliquerai la démonstration donnée par A. Marian et D. Oprea, ainsi que P. Belkale, de la dualité étrange ou dualité rang–niveau, qui établit une dualité entre deux espaces de fonctions thêta généralisées, c'est-à-dire des espaces de sections globales de fibrés en droites sur les espaces de modules de fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe complexe projective et lisse.

Bruno POIZAT — *Amalgames de Hrushovski*

En 1989, Ehud Hrushovski a introduit une sorte de construction par amalgamation qui a servi depuis à fabriquer de nombreux exemples et contre-exemples en théorie des modèles, les plus sophistiqués étant dus à Hrushovski lui-même.

Dans mon exposé, je présenterai deux d'entre eux, qui sont des objets très naturels du point de vue géométrique, si bien que leur exposé ne nécessite pas de connaissances en logique mathématique. Le premier est la limite des courbes génériques : une courbe plane de degré d est dite générique si elle est définie par un polynôme de degré d dont les coefficients sont algébriquement indépendants ; quand on fait tendre d vers l'infini, on obtient quelque chose, une courbe non algébrique qui satisfait une contrainte de type schanuélien. Le deuxième est la fausse exponentielle de Zilber, définie sur le corps des complexes, et obtenue en amalgamant des homomorphismes de k^+ dans k^* qui satisfont à l'hypothèse de Schanuel, où les k sont des corps de caractéristique nulle ; la conjecture (ou, du moins, la question) de Zilber, c'est qu'elle est isomorphe à la vraie exponentielle.

Jean-Christophe YOCCOZ — *Échanges d'intervalles et surfaces de translation*

Les échanges d'intervalles sont des transformations généralisant les rotations sur le cercle. Leur suspension produit des surfaces de translation, qu'on peut voir comme des surfaces de Riemann munies d'une 1–forme holomorphe. On survolera quelques résultats récents concernant la dynamique des échanges d'intervalles, la géométrie des espaces de modules de surfaces de translation, et la dynamique du flot de Teichmüller sur cet espace de modules.