Astérisque

STÉPHANE DRUEL

Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général [d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan]

Astérisque, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. n° 982, p. 1-38

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__1_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 2007
60e année, 2007–2008, n° 982, p. 1 à 38

EXISTENCE DE MODÈLES MINIMAUX POUR LES VARIÉTÉS DE TYPE GÉNÉRAL
[d'après Birkar, Cascini, Hacon et McKernan]

par **Stéphane DRUEL**

INTRODUCTION

La classification des variétés [(1)] projectives lisses à équivalence birationnelle près est un problème central en géométrie algébrique. On rappelle que deux variétés X et X' sont dites birationnellement équivalentes ou simplement birationnelles s'il existe un isomorphisme d'un ouvert dense de X sur un ouvert dense de X'.

Un des premiers objets intrinsèquement attachés à une variété projective lisse X est son *fibré canonique* ω_X, défini comme le déterminant de son fibré cotangent. Pour tout entier m, le m-ième *plurigenre* est la dimension de l'espace vectoriel des sections globales du fibré en droites $\omega_X^{\otimes m}$; on le note $P_m(X)$. On définit un invariant numérique de X, appelé sa *dimension de Kodaira*, en posant $\kappa(X) = \limsup_{m\to+\infty} \dfrac{\log P_m(X)}{\log m}$. On a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \ldots, \dim(X)\}$; on dit que X est *de type général* si $\kappa(X) = \dim(X)$.

Il est connu depuis longtemps que deux variétés projectives lisses birationnelles ont de nombreuses propriétés en commun : la dimension de Kodaira et les plurigenres sont des exemples d'invariants birationnels des variétés projectives lisses. La question peut être formulée ainsi.

Existe-t-il un « bon » représentant d'une classe d'équivalence birationnelle donnée ?

Le cas des courbes est particulier puisque deux courbes (projectives lisses) birationnelles sont isomorphes. Le cas des surfaces est plus compliqué, toute classe d'équivalence birationnelle contenant une infinité de surfaces projectives lisses deux à deux non isomorphes. La solution au problème précédent a été donnée par les géomètres italiens au début du siècle dernier. Soit X une surface projective lisse. Il existe une

(1) Nous travaillons sur le corps des nombres complexes et toutes nos variétés sont algébriques et irréductibles.

surface projective lisse $X_\bullet$ et un morphisme birationnel $X \to X_\bullet$ tels que ou bien le fibré canonique $\omega_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, on dit que $X_\bullet$ est un *modèle minimal* de X, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(Y_\bullet) \leqslant 1$ et $\omega_{X_\bullet}^{\otimes -1}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$, le morphisme $c_\bullet$ est appelé une *fibration de Mori*[2]. On peut être plus précis : dans la seconde alternative, ou bien $X_\bullet$ est isomorphe à $\mathbf{P}^2$ et $\dim(Y_\bullet) = 0$ ou bien $X_\bullet \to Y_\bullet$ est une surface géométriquement réglée. On obtient $X_\bullet$ en contractant successivement des courbes exceptionnelles de première espèce, *i.e.* des courbes rationnelles lisses d'auto-intersection -1. La variété $X_\bullet$ est unique à quelques exceptions près bien comprises.

Il faut attendre le début des années 80 et les travaux de Mori ([**20**]) et Reid ([**23**]) pour entrevoir la possibilité de généraliser l'approche italienne à la dimension supérieure. Les obstacles sont nombreux. Il existe des variétés projectives lisses de dimension 3, de type général, n'ayant pas de modèle minimal lisse (voir par exemple [**24**, Examples 2.8]) ; il faut donc considérer des variétés singulières. Soit X une variété projective lisse. Le programme de Mori ou programme des modèles minimaux ou encore MMP (« Minimal Model Program » en anglais) prédit l'existence d'une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière[3], telle que ou bien le diviseur canonique $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif, ou bien il existe un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tel que $\dim(X_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$. Il prédit aussi comment obtenir $X_\bullet$ au moyen de transformations birationnelles ; il ne suffit plus, comme c'était le cas pour les surfaces, de contracter des diviseurs, il faut introduire de nouvelles transformations birationnelles, les flips, dont l'existence est conjecturale. La dernière difficulté est la question de l'aboutissement du programme ou encore le problème de la non-existence de suite infinie de flips qui, là encore, est conjecturale.

À la suite de contributions de Kawamata, Shokurov et Tsunoda pour les principales, Mori prouve l'existence des flips en dimension 3 ([**21**]). L'existence des flips en dimension 4 est due à Shokurov ([**28**], voir également [**6**]). La non-existence de suite infinie de flips est démontrée par Shokurov ([**25**]) en dimension 3 et par Kawamata, Matsuda et Matsuki ([**15**]) en dimension 4. Le programme des modèles minimaux est donc complet en dimension $\leqslant 4$.

De larges parties du MMP ont été généralisées en dimension $\geqslant 5$ mais les principales conjectures demeuraient : l'existence des flips et la non-existence de suite infinie de flips.

Le but de ce texte est d'exposer les travaux récents de Birkar, Cascini, Hacon et McKernan sur ces questions. Les progrès réalisés sont spectaculaires : ils montrent,

(2) Le point de vue adopté ici, généralement attribué à Reid, diffère de celui des géomètres italiens.
(3) À singularités terminales.

par exemple, l'existence des flips en toutes dimensions (voir le corollaire 2.5 pour un énoncé précis) et la non-existence de suite infinie de flips dirigés lorsque X est de type général (voir le corollaire 2.8). Ils n'obtiennent pas la non-existence de suite infinie de flips en toute généralité mais leurs résultats sont néanmoins suffisants pour beaucoup d'applications.

THÉORÈME 0.1. — *Soit X une variété projective lisse.*

1. *Si X est de type général, alors il existe une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière, telle que $K_{X_\bullet}$ soit numériquement effectif.*
2. *Si K_X n'est pas pseudo-effectif, alors il existe encore une variété projective $X_\bullet$ birationnellement équivalente à X, peu singulière, et un morphisme projectif $c_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ tels que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$ et $-K_{X_\bullet}$ soit ample relativement à $Y_\bullet$.*

Soit X une variété projective lisse. La finitude de l'algèbre canonique

$$\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est un problème classique et difficile. On sait qu'elle est de type fini sur $\mathbf{C}$ si $\dim(X) \leqslant 3$ grâce aux travaux de Zariski si $\dim(X) = 2$, Fujita et ceux que nous avons déjà cités si $\dim(X) = 3$; très peu de choses étaient connues jusqu'alors en dimension plus grande.

THÉORÈME 0.2. — *Soit X une variété projective lisse. L'algèbre canonique*

$$\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(kK_X))$$

est de type fini sur $\boldsymbol{C}$[4].

Le lien avec la question initiale est le suivant. L'énoncé précédent est une conséquence (facile) de l'existence de modèles minimaux et de la conjecture d'abondance qui, $X_\bullet$ étant un modèle minimal de X, prédit que le système linéaire $|mK_{X_\bullet}|$ est sans point base pour $m \gg 0$ (voir par exemple [**23**, Conjecture 4.6]).

L'approche de Birkar, Cascini, Hacon et M$^{\mathrm{c}}$Kernan est un peu différente, ils ne montrent ni l'existence de modèles minimaux, ni la conjecture d'abondance en général (voir théorèmes 2.1 et 1.18).

Le texte est organisé de la façon suivante. On rassemble dans la première partie des résultats « classiques » sur le programme des modèles minimaux et ses extensions aux paires d'une part et à la situation relative d'autre part. On présente les résultats

(4) Une preuve de ce résultat lorsque X est supposée de type général est annoncée dans [**31**].

en début de seconde partie et on donne ensuite les grandes lignes des démonstrations des principaux résultats.

Je remercie pour leur aide à la préparation de ce texte Laurent Bonavero, Sébastien Boucksom, Philippe Eyssidieux, Caroline Gruson, Catriona Maclean, James M^cKernan et Tanguy Rivoal, ainsi que tous les participants au groupe de travail de Grenoble.

1. LE MMP

1.1. Notations et rappels

Dans la suite de ce texte, le symbole X/Z désigne un morphisme projectif $X \to Z$ de variétés quasi-projectives normales. Si X/Z et Y/Z sont deux tels objets, le symbole $X/Z \to Y/Z$ (resp. $X/Z \dashrightarrow Y/Z$) désigne un morphisme $\pi : X \to Y$ (resp. une application rationnelle $\pi : X \dashrightarrow Y$) tel que $g \circ \pi = f$ où f et g sont respectivement les morphismes de X et Y vers Z.

Soit $f : X \to Z$ comme ci-dessus. Un diviseur de Weil sur X est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_{i \in I} d_i D_i$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces irréductibles de X. Il est dit effectif lorsque tous les coefficients sont positifs ; on écrit alors $D \geqslant 0$. Il est dit premier si une seule hypersurface irréductible apparaît dans D et qu'elle a coefficient 1. On considérera aussi des $\mathbf{Q}$-diviseurs et des $\mathbf{R}$-diviseurs. On définit $\llcorner D \lrcorner = \sum_{i \in I} \llcorner d_i \lrcorner D_i$ et $\ulcorner D \urcorner = \sum_{i \in I} \ulcorner d_i \urcorner D_i$.

Toute fonction rationnelle non nulle u sur X a un diviseur, celui de ses pôles et zéros, noté $\mathrm{div}(u)$.

On désigne par K_X un diviseur canonique sur X, c'est-à-dire le diviseur d'une forme différentielle méromorphe de degré maximal ; si X est lisse, on a $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \omega_X$.

Un diviseur de Cartier sur X est un diviseur de Weil qui peut être défini localement par une seule équation.

Le groupe des diviseurs de Weil sur X à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$) est noté $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ et $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$). Le sous-groupe de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Z}}$ formé des diviseurs de Cartier sur X est noté $\mathrm{Div}(X)$. Un $\mathbf{Q}$-diviseur (resp. $\mathbf{R}$-diviseur) de Weil est dit $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-Cartier) s'il est dans le $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel ($\mathbf{R}$-sous-espace vectoriel) de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) engendré par $\mathrm{Div}(X)$. L'ensemble des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier (resp. $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil $\mathbf{R}$-Cartier) est noté $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$).

Les diviseurs D_1 et D_2 de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits $\mathbf{Q}$-linéairement équivalents relativement à Z (resp. $\mathbf{R}$-linéairement équivalents relativement à Z) et on note $D_1 \sim_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \sim_{\mathbf{R},Z} D_2$) s'il existe $u_j \in \mathrm{Rat}(X) \setminus \{0\}$, $r_j \in \mathbf{Q}$

(resp. $r_j \in \mathbf{R}$) pour $j \in J$ fini et $D_Z \in \mathrm{Div}(Z)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $D_Z \in \mathrm{Div}(Z)_{\mathbf{R}}$) tels que $D_1 - D_2 = \sum_{j\in J} r_j \,\mathrm{div}(u_j) + f^*D_Z$ où $\mathrm{Rat}(X)$ désigne le corps des fonctions rationnelles sur X.

On note $\mathrm{Z}_1(X/Z)$ le groupe abélien libre engendré par les courbes intègres complètes $C \subset X$ telles que $\dim(f(C)) = 0$.

Les diviseurs D_1 et D_2 de $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{Q}}$ (resp. $\mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$) sont dits numériquement équivalents relativement à Z et on note $D_1 \equiv_{\mathbf{Q},Z} D_2$ (resp. $D_1 \equiv_{\mathbf{R},Z} D_2$) si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ pour tout 1-cycle $C \in \mathrm{Z}_1(X/Z)$.

On note $\mathrm{N}_1(X/Z)$ (resp. $\mathrm{N}^1(X/Z)$) l'espace vectoriel réel $\mathrm{Z}_1(X/Z) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ (resp. $\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$) modulo la relation d'équivalence numérique définie ci-dessus. Les espaces vectoriels réels $\mathrm{N}_1(X/Z)$ et $\mathrm{N}^1(X/Z)$ sont de dimension finie ; leur dimension commune est appelée le nombre de Picard relatif et notée $\rho(X/Z)$.

Le cône convexe fermé de $\mathrm{N}_1(X/Z)$ engendré par les classes des 1-cycles effectifs de $\mathrm{Z}_1(X/Z)$ est noté $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$.

On note $\mathrm{Amp}(X/Z) \subset \mathrm{N}^1(X/Z)$ le cône convexe engendré par les classes de diviseurs amples relativement à Z et $\mathrm{Nef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit ample relativement à Z ou *ample/Z* (resp. numériquement effectif relativement à Z ou encore *nef/Z*) si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Amp}(X/Z)$ (resp. $\mathrm{Nef}(X/Z)$) de façon équivalente, si pour tout $C \in \overline{\mathrm{NE}}(X/Z) \setminus \{0\}$, on a $D\cdot C > 0$ (resp. $D \cdot C \geqslant 0$) (voir [**16**]).

Un $\mathbf{Q}$-diviseur $D \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ est dit effectif relativement à Z ou *effectif/Z* s'il existe un diviseur effectif $B \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{Q}}$ tel que $D \sim_{\mathbf{Q},Z} B$. On note $\mathrm{Eff}(X/Z)$ le cône convexe de $\mathrm{N}^1(X/Z)$ engendré par les classes des $\mathbf{Q}$-diviseurs de Weil $\mathbf{Q}$-Cartier effectifs/Z et $\mathrm{Pef}(X/Z)$ son adhérence. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit pseudo-effectif relativement à Z ou encore *pseudo-effectif/Z* si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Pef}(X/Z)$. L'intérieur du cône $\mathrm{Pef}(X/Z)$ est noté $\mathrm{Big}(X/Z)$. Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit grand (« big » en anglais) relativement à Z ou *grand/Z* si sa classe dans $\mathrm{N}^1(X/Z)$ est dans $\mathrm{Big}(X/Z)$. Quitte à remplacer Z par la normalisation de $f(X)$, on peut toujours supposer f dominant. La terminologie est alors justifiée par le fait qu'un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est grand/Z si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $\mathrm{rang}(f_*\mathcal{O}(\llcorner mD \lrcorner)) \geqslant c(\dim(X) - \dim(Z))^m$ pour tout $m \gg 0$. Le lemme de Kodaira en donne une autre caractérisation : D est grand/Z si et seulement si pour tout $A \in \mathrm{Amp}(X/Z)$, il existe un réel $t > 0$ et $B \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} tA + B$. L'une ou l'autre de ces deux caractérisations permet d'étendre la définition précédente aux $\mathbf{R}$-diviseurs de Weil.

Un élément $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ est dit semi-ample relativement à Z ou encore *semi-ample/Z* s'il existe un morphisme $\pi : X/Z \to Y/Z$ et $D_Y \in \mathrm{Amp}(Y/Z)$ tel que $D \sim_{\mathbf{R},Z} \pi^* D_Y$ (5) (6).

L'interprétation géométrique des diviseurs à coefficients réels n'est pas évidente, il faut la chercher du côté de la géométrie complexe où, par exemple, si X est supposée projective et lisse, la classe d'un $\mathbf{R}$-diviseur pseudo-effectif dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbf{R})$ peut être représentée par un courant positif fermé de type $(1,1)$ (voir par exemple [**7**]).

1.2. Les singularités de paires

Le lecteur pourra consulter le très joli texte [**18**] sur le sujet ainsi que [**6**, Chapter 3]. L'introduction des paires peut sembler un peu artificielle au premier abord mais il ne fait plus aucun doute aujourd'hui que les techniques sous-jacentes sont un outil extrêmement efficace pour étudier les variétés de dimension supérieure.

DÉFINITION 1.1. — *Une paire (X, Δ) (resp. $(X/Z, \Delta)$) est la donnée d'une variété quasi-projective X normale et d'un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif Δ sur X (resp. d'un morphisme $f : X \to Z$ de variétés quasi-projectives normales et d'un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif Δ sur X) tels que $K_X + \Delta$ soit $\mathbf{R}$-Cartier.*

Soient (X, Δ) une paire et $\pi : V \to X$ une résolution des singularités de (X, Δ) (7). Écrivons

$$K_V + \tilde{\Delta} = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum_F a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers π-exceptionnels, $\tilde{\Delta}$ est le transformé strict de Δ dans V et, si K_X est le diviseur d'une forme différentielle méromorphe ω_X sur X, K_V est le diviseur de ω_X sur V, vue comme forme différentielle méromorphe sur V. Les coefficients $a_F(X, \Delta)$ ne dépendent pas du choix des diviseurs canoniques K_V et K_X par le lemme suivant (voir par exemple [**19**, Lemma 3.39]).

LEMME 1.2 (Lemme de négativité). — *Soient $\pi : V \to X$ un morphisme propre et birationnel de variétés normales et $B \in \mathrm{Div}(V)_{\mathbf{R}}$. On suppose $-B$ nef/X. Alors B est effectif si et seulement si $\pi_* B$ l'est. En particulier, tout $\mathbf{R}$-diviseur de Weil $\mathbf{R}$-Cartier sur V, π-exceptionnel et π-numériquement trivial est nul.*

(5) Si π est propre et à fibres connexes alors π est unique à isomorphisme près ; il est alors déterminé par les courbes complètes $C \subset X$ telles que $D \cdot C = 0$.

(6) On retrouve la définition usuelle si D est à coefficients entiers ou rationnels.

(7) Une résolution des singularités de la paire (X, Δ) est un morphisme projectif birationnel $\pi : V \to X$ avec V lisse tel que $\mathrm{Exc}(\pi)$ soit de codimension pure 1 et $\mathrm{Exc}(\pi) + \pi^{-1}(\mathrm{Supp}(\Delta))$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples, *i.e.* les composantes irréductibles de son support sont lisses et se coupent transversalement. Il en existe toujours.

Si $F \subset V$ est maintenant un diviseur premier non π-exceptionnel, on définit $a_F(X, \Delta)$ comme étant *l'opposé* du coefficient de F dans $\tilde{\Delta}$.

DÉFINITION 1.3. — *Le réel $a_F(X, \Delta)$ est appelé la discrépance du diviseur F relativement à la paire (X, Δ).*

L'anneau local $\mathcal{O}_{F,Y} \subset \mathrm{Rat}(X)$, où $F \subset V$ est un diviseur premier, est un anneau de valuation discrète correspondant à une valuation v_F sur $\mathrm{Rat}(X)$. Une telle valuation est appelée une *valuation algébrique*. Soient $\pi' : V' \to X$ une autre résolution des singularités de (X, Δ) et $F' \subset V'$ un diviseur premier ; $v_F = v_{F'}$ si et seulement si l'application rationnelle induite $V \dashrightarrow V'$ est un isomorphisme aux points génériques de F et F' respectivement et dans ce cas $a_F(X, \Delta) = a_{F'}(X, \Delta)$. Le réel $a_F(X, \Delta)$ ne dépend donc que de v_F et pas de π. Une valuation algébrique v_F sur $\mathrm{Rat}(X)$ est dite *exceptionnelle* sur X si son centre dans X est de codimension au moins 2. Posons

$$\mathrm{discrep}(X, \Delta) := \inf\{a_F(X, \Delta) \text{ où } v_F \text{ est exceptionnelle sur } X\}.$$

DÉFINITION 1.4. — *Une paire (X, Δ) est dite*

$$\begin{cases} \textit{klt pour Kawamata log-terminale} \\ \textit{plt pour purement log-terminale} \\ \textit{lc pour log-canonique} \end{cases} \quad \textit{si discrep}(X,\Delta) \begin{cases} > -1 \textit{ et } \llcorner \Delta \lrcorner = 0, \\ > -1, \\ \geqslant -1. \end{cases}$$

La paire $(X/Z, \Delta)$ est dite klt (resp. plt, lc) si (X, Δ) l'est.

DÉFINITION 1.5. — *Une paire (X, Δ) est dite dlt pour divisoriellement log-terminale si les coefficients de Δ sont inférieurs à 1 et s'il existe un ouvert $X_0 \subset X$ tel que X_0 soit lisse, $\Delta_{|X_0}$ un diviseur dont le support est à croisements normaux simples et $a_F(X, \Delta) > -1$ pour toute valuation v_F dont le centre dans X est contenu dans $X \setminus X_0$* [(8)]. *La paire $(X/Z, \Delta)$ est dite dlt si (X, Δ) l'est.*

Exemple 1.6. — La paire $(\mathbf{C}^2, C_1)$ où C_1 est la cubique cuspidale d'équation $\{(x, y) \,|\, y^2 = x^3\}$ n'est pas lc, la paire $(\mathbf{C}^2, C_2)$ où C_2 est la cubique nodale d'équation $\{(x, y) \,|\, x^3 + y^3 - xy = 0\}$ est lc mais pas dlt et, enfin, la paire $(\mathbf{C}^2, C_3)$ où $C_3 := \{(x, y) \,|\, xy = 0\}$ est dlt mais pas plt.

(8) De façon équivalente, une paire (X, Δ) est dlt si les coefficients de Δ sont inférieurs à 1 et s'il existe une résolution $\pi : V \to X$ des singularités de (X, Δ) telle que pour tout diviseur premier $F \subset V$ π-exceptionnel on ait $a_F(X, \Delta) > -1$ (voir [**32**]).

Exemple 1.7. — Soient X une variété quasi-projective lisse et $\Delta = \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i$ un diviseur effectif dont le support est à croisements normaux simples. La paire $(X, \sum_{i \in I} \delta_i \Delta_i)$ est

$$\begin{cases} \text{klt} \\ \text{plt} \\ \text{dlt} \\ \text{lc} \end{cases} \quad \text{ssi pour tout } i, j \in I \begin{cases} \delta_i < 1, \\ \delta_i \leqslant 1 \text{ et } \delta_i + \delta_j < 2 \text{ si } \Delta_i \cap \Delta_j \neq \varnothing \text{ et } i \neq j, \\ \delta_i \leqslant 1, \text{ et} \\ \delta_i \leqslant 1. \end{cases}$$

La classe des paires (X, Δ) klt est grosso modo la classe de singularités de paires la plus grande où tout fonctionne essentiellement comme si X était lisse et $\Delta = 0$ mais dont le principal défaut est de ne pas permettre les raisonnements par récurrence sur la dimension. Les classes de singularités de paires plt, dlt et lc sont introduites pour y remédier.

Soit (X, Δ) une paire dlt. Alors X est à singularités rationnelles et en particulier de Cohen-Macaulay [(9)] (voir [**8**] et [**15**, Theorem 1.3.6]). De plus, (X, Δ) est « limite » d'une suite de paires klt ; de façon plus précise, si A est un diviseur ample sur X, il existe un réel $c > 0$ et un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil $\Delta_1 \sim_{\mathbf{R}} \Delta + cA$ tel que la paire $(X, (1-t)\Delta + t\Delta_1)$ soit klt pour tout $0 < t \ll 1$.

La proposition suivante explique le lien entre les singularités de paires plt et dlt.

Proposition 1.8 ([**19**, Proposition 5.51]). — *Soit (X, Δ) une paire dlt. Alors (X, Δ) est plt si et seulement si $\llcorner \Delta \lrcorner$ est réunion disjointe de ses composantes irréductibles, auquel cas $\llcorner \Delta \lrcorner$ est normal.*

On peut montrer que si $\operatorname{discrep}(X, \Delta) < -1$ alors en fait $\operatorname{discrep}(X, \Delta) = -\infty$: la classe des paires lc est donc la classe de singularités de paires la plus grande qui puisse être définie de cette façon. On espère pouvoir étendre le MMP aux paires lc mais personne ne sait encore le faire [(10)].

La formule suivante, dite d'adjonction, motive en partie l'introduction des paires (voir [**15**, Lemma 5.1.9] et [**17**, Chapter 16]).

Théorème 1.9. — *Soient X une variété normale et $S \subset X$ une hypersurface normale telles que $K_X + S$ soit $\mathbf{Q}$-Cartier. Alors il existe un $\mathbf{Q}$-diviseur de Weil effectif*

(9) La paire $(X, 0)$ où X est un cône sur une variété abélienne de dimension $\geqslant 2$ est lc mais pas de Cohen-Macaulay, X n'étant pas S_3 en son sommet (voir [**19**, Example 5.23]).

(10) Quelques résultats dans cette direction sont annoncés dans [**10**] (voir également [**2**]).

Diff_S *sur* S*, appelé la différente, ne dépendant pas des choix de* K_S *et* K_X *tel que*

$$(K_X + S)_{|S} \sim_{\mathbf{Q}} K_S + \mathrm{Diff}_S{}^{(11)}.$$

Exemple 1.10. — Soient $X \subset \mathbf{P}^3$ le cône quadratique d'équation $xy = z^2$ et $S \subset X$ la droite d'équations $x = z = 0$. Si p est le sommet de X alors $\mathrm{Diff}_S = \frac{1}{2}p$.

LEMME 1.11. — *Soient* X *une variété normale et* $S \subset X$ *une hypersurface normale telles que* $K_X + S$ *soit* $\mathbf{Q}$*-Cartier. Soit* $D \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ *effectif dont le support ne contient pas* S*. Posons* $\mathrm{Diff}_S(D) := \mathrm{Diff}_S + D_{|S}$*. Si* $(X, S + D)$ *est plt (resp. dlt, lc) alors* $(S, \mathrm{Diff}_S(D))$ *est klt (resp. dlt, lc).*

1.3. Modèles nef, minimaux et canoniques

Ce qui sera expliqué au paragraphe suivant (et plus particulièrement la remarque 1.22) nous amène à poser les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.12. — *Un modèle nef (resp. canonique)* $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet, \varphi)$ *ou* $(X_\bullet/Z, \varphi)$ *de la paire* $(X/Z, \Delta)$ *est la donnée d'une paire* $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$ *et d'une application birationnelle* $\varphi : X/Z \dashrightarrow X_\bullet/Z$ *telles que*

1. φ^{-1} *ne contracte pas de diviseur*[12],
2. $\Delta_\bullet = \varphi_*\Delta$,
3. $K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet$ *soit nef/Z (resp. ample/Z) et*
4. $a_F(X, \Delta) \leqslant a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ *pour tout diviseur premier* φ*-exceptionnel* F.

Un modèle nef est appelé un modèle minimal si

5. *les inégalités ci-dessus sont strictes*[13].

Remarque 1.13. — Si Δ' est un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil effectif tel que $K_X + \Delta'$ et $\varphi_*(K_X + \Delta')$ soient $\mathbf{R}$-Cartier et $K_X + \Delta \equiv_{\mathbf{R},Z} K_X + \Delta'$, alors $(X_\bullet/Z, \varphi)$ est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta)$ si et seulement si c'est un modèle nef (resp. minimal, canonique) de $(X/Z, \Delta')$.

---

(11) Le diviseur Diff_S est supporté par les composantes de codimension 2 du lieu singulier de X contenues dans S.

(12) On a donc $\varphi_* K_X = K_{X_\bullet}$.

(13) Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$ klt. On peut montrer (en utilisant le théorème 2.1) qu'il existe un modèle minimal $(Y/Z, \varphi_0)$ de $(X/Z, \Delta)$ et un morphisme $\varphi_1 : Y/Z \to X_\bullet/Z$ tels que $K_Y + \varphi_{0*}\Delta = \varphi_1^*(K_{X_\bullet} + \varphi_*\Delta)$ (on dit alors que φ_1 est un morphisme *crépant*) et $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_0$.

Remarque 1.14. — Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef d'une paire $(X/Z, \Delta)$. Soient V une résolution commune des singularités de (X, Δ) et $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$, π et $\pi_\bullet$ les morphismes de V sur X et $X_\bullet$ respectivement et

$$E := \sum_F (a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet) - a_F(X, \Delta))F \sim_{\mathbf{R}} \pi^*(K_X + \Delta) - \pi_\bullet^*(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers de V. La condition 4 dans la définition précédente entraîne que $\pi_* E$ est effectif et la condition 3 et le lemme de négativité que E est effectif. Il est $\pi_\bullet$-exceptionnel par la condition 1 et si $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ est modèle minimal alors le support de E contient les transformés stricts des diviseurs sur X contractés par φ par la condition 5. On en tire les conséquences suivantes :

1. le diviseur $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif$/Z$,
2. $a_F(X, \Delta) \leqslant a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ pour toute valuation algébrique v_F sur $\mathrm{Rat}(X)$,
3. en particulier, si (X, Δ) est klt (resp. lc), alors $(X_\bullet, \Delta_\bullet)$ est klt (resp. lc) et enfin,
4. si Δ est à coefficients rationnels et si r est un entier tel que $r(K_X + \Delta)$ et $r(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)$ soient des diviseurs de Cartier, alors les algèbres graduées

$$\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(kr(K_X + \Delta)) \text{ et } \bigoplus_{k \geqslant 0} H^0(X_\bullet, \mathcal{O}_{X_\bullet}(kr(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet))$$

   sont isomorphes.

La remarque précédente motive la définition suivante.

DÉFINITION 1.15. — *Soient $(X/Z, \Delta)$ et $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$ deux paires. Une application birationnelle $\varphi : X/Z \dashrightarrow X_\bullet/Z$ est dite $K_X + \Delta$ négative si elle satisfait aux conditions 1 et 2 de la définition 1.12 et*

$$a_F(X, \Delta) \leqslant a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$$

pour toute valuation algébrique v_F sur $\mathrm{Rat}(X)$. *Elle est dite $K_X + \Delta$ strictement négative si, de plus,*

$$a_F(X, \Delta) < a_F(X_\bullet, \Delta_\bullet)$$

pour tout diviseur premier φ-exceptionnel F.

LEMME 1.16. — *Un modèle canonique est unique à isomorphisme près*[14].

[14] Les modèles $(X_1/Z, \varphi_1)$ et $(X_2/Z, \varphi_2)$ sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : X_1/Z \simeq X_2/Z$ tel que $\varphi \circ \varphi_1 = \varphi_2$.

Preuve. — Soient $(X_1/Z, \varphi_1)$ et $(X_2/Z, \varphi_2)$ deux modèles canoniques de $(X/Z, \Delta)$ et $\pi : V \to X$ une résolution commune des singularités de (X, Δ) et (X_i, φ_i) pour $i \in \{1, 2\}$. Notons π_i le morphisme de V vers X_i et $\Delta_i := \varphi_{i*}\Delta$. Par la remarque 1.14, pour $i \in \{1, 2\}$, il existe un diviseur effectif π_i-exceptionnel E_i tel que $\pi^*(K_X + \Delta) \sim_{\mathbf{R}} \pi_i^*(K_{X_i} + \Delta_i) + E_i$ de sorte que

$$\pi_1^*(K_{X_1} + \Delta_1) - \pi_2^*(K_{X_2} + \Delta_2) \sim_{\mathbf{R}} E_2 - E_1.$$

Le lemme de négativité appliqué à π_1 donne $E_2 - E_1 \geqslant 0$, et $E_1 - E_2 \geqslant 0$ s'il est appliqué à π_2. On en tire $E_1 = E_2$ et $\pi_1^*(K_{X_1} + \Delta_1) \sim_{\mathbf{R}} \pi_2^*(K_{X_2} + \Delta_2)$. Les morphismes π_1 et π_2 contractent donc les mêmes courbes et, par suite, l'application rationnelle $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ s'étend en l'isomorphisme $X_1/Z \simeq X_2/Z$ cherché. $\square$

Soit maintenant $(X/Z, \Delta)$ une paire klt telle que $K_X + \Delta$ soit grand/Z. Par le théorème suivant (voir par exemple [**15**, Theorem 3.1.1] et [**15**, Remark 3.1.2] si Δ est un $\mathbf{Q}$-diviseur et [**4**, Theorem 3.4.1] pour le cas général), si la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal alors elle a un modèle canonique.

Théorème 1.17. — *Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et $H \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ nef/Z tels que $cH - (K_X + \Delta)$ soit nef/Z et grand/Z pour un réel $c > 0$. Alors H est semi-ample/Z.*

Le résultat suivant est un corollaire bien utile du théorème précédent.

Corollaire 1.18 ([**4**, Corollary 3.4.2]). — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire klt où Δ est grand/Z. Si $K_X + \Delta$ est nef/Z alors il est semi-ample/Z.*

Enfin, on peut justifier (en partie) l'hypothèse de $\mathbf{Q}$-factorialité introduite aux paragraphes 1.4 et 1.5 de la façon suivante. Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et $\pi : V \to X$ une résolution des singularités de (X, Δ). Soit $E \subset V$ un diviseur effectif dont le support est exactement le lieu exceptionnel de π. Posons

$$\Gamma := - \sum_{a_F(X,\Delta)<0} a_F(X, \Delta) F$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V tels que $a_F(X, \Delta) < 0$. On peut montrer que pour tout $0 < t \ll 1$, $(X_\bullet/Z, \varphi)$ est un modèle minimal (resp. nef) de (X, Δ) si et seulement si $(X_\bullet/Z, \varphi \circ \pi)$ est un modèle minimal (resp. nef) de $(V, \Gamma + tE)$ (voir [**4**, Lemma 3.5.5]).

1.4. Le MMP

Les textes de référence pour ce paragraphe sont [**15**], [**17**] et [**19**]. Soit $(X/Z, \Delta) := (X_0/Z, \Delta_0)$ une paire dlt. On suppose X $\mathbf{Q}$-factorielle, *i.e* que tout diviseur de Weil sur X est $\mathbf{Q}$-Cartier. Le MMP produit conjecturalement de nouvelles paires $(X_i/Z, \Delta_i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$, avec X_i $\mathbf{Q}$-factorielle, des applications birationnelles $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$ (Δ_{i+1} est le transformé strict de Δ_i dans X_{i+1}) et un objet final $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet) := (X_m/Z, \Delta_m)$ tel que ou bien $(X_\bullet/Z, \varphi_\bullet)$ soit un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$, où l'on a posé $\varphi_\bullet := \varphi_{m-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$, ou bien il existe un morphisme projectif à fibres connexes $c_\bullet : X_\bullet/Z \to Y_\bullet/Z$ tel que $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$, $-(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet)$ soit ample$/Y_\bullet$ et $\rho(X_\bullet/Y_\bullet) = 1$ (le morphisme $c_\bullet$ est appelé une *fibration de Mori*).

Le premier pas est le résultat suivant dit « théorème du cône », fruit des travaux de nombreux auteurs dont les principaux sont Benveniste, Kawamata, Kollár, Mori, Reid et Shokurov.

Théorème 1.19. — *Soit $(X/Z, \Delta)$ une paire dlt.*

1. *Il existe une famille au plus dénombrable $(\Gamma_i)_{i \in I}$ de courbes rationnelles $\Gamma_i \in \mathrm{Z}_1(X/Z)$, telle que $0 < -(K_X + \Delta) \cdot \Gamma_i \leqslant 2\dim(X)$, $R_i := \boldsymbol{R}^+[\Gamma_i]$ soit une arête du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ et*
$$\overline{\mathrm{NE}}(X/Z) = \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)_{K_X+\Delta \geqslant 0} + \sum_{i \in I} R_i\,^{(15)}.$$
2. *Pour tout diviseur A ample$/Z$, il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ contenues dans le demi-espace $\mathrm{N}_1(X/Z)_{K_X+\Delta+A<0}$.*
3. *Soit $i \in I$. Il existe un morphisme projectif à fibres connexes $c_i : X/Z \to X_i/Z$ tel que, pour toute courbe complète $C \subset X$, $\dim(c_i(C)) = 0$ si et seulement si $[C] \in R_i$; le morphisme c_i est appelé la contraction de R_i, il est unique à isomorphisme près.*
4. *Enfin, si $c_i : X/Z \to X_i/Z$ est comme ci-dessus et si $\mathscr{L}$ est un fibré inversible sur X tel que $\mathscr{L} \cdot \Gamma_i = 0$, alors il existe un fibré inversible $\mathscr{L}_i$ tel que $\mathscr{L} \simeq c_i^* \mathscr{L}_i$.*

Supposons la paire $(X_i/Z, \Delta_i)$ déjà construite avec X_i $\mathbf{Q}$-factorielle et (X_i, Δ_i) dlt.

Si $K_{X_i} + \Delta_i$ est nef$/Z$ alors $(X_i/Z, \Delta_i)$ est un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$ et $m = i$.

Si $K_{X_i} + \Delta_i$ n'est pas nef$/Z$, alors il existe une arête R_i du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X_i/Z)$ telle $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$. Soit $c_i : X_i/Z \to Y_i/Z$ la contraction de R_i.

Si $\dim(Y_i) < \dim(X_i)$ alors c_i est une fibration de Mori par les points 3 et 4 du théorème 1.19 et $m = i$.

---

(15) On note $\overline{\mathrm{NE}}(X/Z)_{K_X+\Delta \geqslant 0} := \{z \in \overline{\mathrm{NE}}(X/Z) | (K_X + \Delta) \cdot z \geqslant 0\}$.

Si $\dim(Y_i) = \dim(X_i)$ et le lieu exceptionnel $\mathrm{Exc}(c_i)$ de c_i est de codimension 1 dans X_i alors la contraction c_i est dite *divisorielle*. On peut montrer que $\mathrm{Exc}(c_i)$ est irréductible, Y_i $\mathbf{Q}$-factorielle, la paire $(Y_i, c_{i*}\Delta_i)$ dlt (voir remarque 1.22) et $\rho(Y_i/Z) = \rho(X_i/Z) - 1$. On pose $X_{i+1}/Z := Y_i/Z$ et $\Delta_{i+1} := c_{i*}\Delta_i$.

Si $\dim(Y_i) = \dim(X_i)$ et $\mathrm{Exc}(c_i)$ est de codimension au moins 2 dans X_i alors la contraction c_i est dite *petite*. La situation se complique singulièrement : le diviseur $K_{Y_i} + c_{i*}\Delta_i$ n'est pas $\mathbf{R}$-Cartier. Il faut introduire une nouvelle transformation birationnelle : le *flip* de c_i.

DÉFINITION 1.20. — *Le flip de c_i est un morphisme birationnel projectif $c_i^+ : X_i^+ \to Y_i$, où X_i^+ est une variété normale, dont le lieu exceptionnel* $\mathrm{Exc}(c_i^+)$ *est de codimension au moins 2 dans X_i^+ et tel que $K_{X_i^+} + \Delta_i^+$ soit $\boldsymbol{R}$-Cartier et ample$/Y_i$ où Δ_i^+ est le transformé strict de Δ_i dans X_i^+. On appelle aussi flip l'application rationnelle $X_i/Z \dashrightarrow X_i^+/Z$.*

Si le flip de c_i existe, X_i^+ est $\mathbf{Q}$-factorielle, la paire (X_i^+, Δ_i^+) dlt (voir remarque 1.22) et $\rho(X_i/Z) = \rho(X_i^+/Z)$. On pose $X_{i+1}/Z := X_i^+/Z$ [16] et $\Delta_{i+1} := \Delta_i^+$.

Remarque 1.21. — Le flip de c_i (s'il existe) est unique : c'est le modèle canonique de la paire $(X_i/Y_i, \Delta_i)$ et inversement, si le modèle canonique de $(X_i/Y_i, \Delta_i)$ existe, c'est le flip de c_i (voir [**15**, Proposition 5.1.11]).

Remarque 1.22. — Si $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ est un flip ou une contraction divisorielle, le lemme de négativité entraîne que pour toute valuation algébrique v_F sur $\mathrm{Rat}(X_i)$

$$a_F(X_i, \Delta_i) \leqslant a_F(X_{i+1}, \Delta_{i+1}),$$

l'inégalité étant stricte si le centre de v_F est contenu dans le lieu exceptionnel de c_i ou dans le lieu exceptionnel de c_{i+1} [17]. On en déduit que la paire (X_{i+1}, Δ_{i+1}) est dlt. L'application birationnelle φ_i est $K_{X_i} + \Delta_i$ strictement négative.

Remarque 1.23. — Soit Δ' un $\mathbf{R}$-diviseur de Weil sur X tel que $K_X + \Delta'$ soit $\mathbf{R}$-Cartier et $K_X + \Delta \equiv_{\mathbf{R},Z} K_X + \Delta'$; le MMP pour (X, Δ) produit (conjecturalement) des paires $(X_i/Z, \Delta'_i)$ et un objet final $(X_\bullet/Z, \Delta'_\bullet)$ du même type que $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$. La remarque précédente entraîne que si (X, Δ') est klt (resp. plt, dlt, lc) alors les paires (X_i, Δ'_i) et $(X_\bullet, \Delta'_\bullet)$ sont klt (resp. plt, dlt, lc). C'est une observation élémentaire mais fort utile dans la suite.

(16) Les variétés X_i et X_i^+ sont isomorphes en codimension 1.

(17) On reprend les hypothèses et notations du lemme 1.2. Si B est effectif alors, pour tout $x \in X$, ou bien $f^{-1}(x) \subset \mathrm{Supp}(B)$ ou bien $f^{-1}(x) \cap \mathrm{Supp}(B) = \varnothing$.

Il reste donc, pour que le MMP soit complet, à montrer l'existence des flips et l'aboutissement du MMP (« termination » en anglais). Si $X_i/Z \to X_{i+1}/Z$ est une contraction divisorielle alors $\rho(X_{i+1}/Z) = \rho(X_i/Z) - 1$ et le second point se réduit à montrer qu'il n'y pas de suite infinie de flips. On conjecture que l'une et l'autre des deux assertions précédentes sont vraies pour les paires (X, Δ) dlt. En dimension 2, il n'y a pas de petites contractions et le MMP est donc complet.

L'existence des flips est due à Mori ([**21**]) si $\dim(X) = 3$, X est à singularités terminales (*i.e.* $\operatorname{discrep}(X, 0) > 0$) et $\Delta = 0$ et à Shokurov ([**26**], [**17**] et [**28**]) si $\dim(X) \leqslant 4$ et (X, Δ) est klt.

La non-existence de suite infinie de flips est une question encore ouverte en dimension $\geqslant 4$. Elle est due à Shokurov ([**25**]) si $\dim(X) = 3$, X est à singularités terminales et $\Delta = 0$, à Kawamata, Matsuda et Matsuki ([**15**]) si $\dim(X) = 4$, X est à singularités terminales et $\Delta = 0$, à Kawamata ([**13**] et [**17**]) si $\dim(X) = 3$ et (X, Δ) est klt et enfin à Fujino ([**9**]) si $\dim(X) = 4$ et (X, Δ) est canonique (*i.e.* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) \geqslant 0$) (voir également [**1**]).

On considérera aussi dans la suite de ce texte des flips de pl-contractions ou encore pl-flips (pour « prelimiting flips »).

DÉFINITION 1.24 ([**26**]). — *Soit (X, Δ) une paire plt. On suppose X $\boldsymbol{Q}$-factorielle et $S := \llcorner \Delta \lrcorner$ irréductible. Un morphisme birationnel propre $c : X \to Y$ où Y est une variété normale est appelé une pl-contraction si*

1. *le lieu exceptionnel de c est de codimension $\geqslant 2$ dans X,*
2. *$\rho(X/Y) = 1$,*
3. *$-(K_X + \Delta)$ et $-S$ sont amples/Y.*

Le flip de c, s'il existe, est un morphisme birationnel propre $c^+ : X^+ \to Y$, où X^+ est une variété normale, dont le lieu exceptionnel est de codimension $\geqslant 2$ dans X^+ tel que $K_{X^+} + \Delta^+$ soit $\boldsymbol{R}$-Cartier et ample/Y, où Δ^+ est le transformé strict de Δ dans X^+. Le flip d'une pl-contraction est appelé un pl-flip.

Remarque 1.25. — Le pl-flip, s'il existe, est lui aussi unique : c'est le modèle canonique de la paire $(X/Y, \Delta)$ et inversement, si le modèle canonique de $(X/Y, \Delta)$ existe, c'est le pl-flip de c.

1.5. Le MMP dirigé

Le MMP dirigé est un MMP où les arêtes contractées ne sont pas choisies de façon arbitraire. Les données sont une paire $(X/Z, \Delta)$ dlt où X est $\mathbf{Q}$-factorielle et un $\mathbf{R}$-diviseur effectif $H \in \operatorname{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ tel que $K_X + \Delta + H$ soit nef/Z et $(X, \Delta + H)$ lc. On pose $t_0 = 1$. Le MMP dirigé par H produit (conjecturalement) des paires $(X_i/Z, \Delta_i)$, une suite décroissante de réels $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$, des applications birationnelles $\varphi_i : X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$ telles que $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ soit nef/Z et $(X_i, \Delta_i + t_i)$ lc où, comme toujours, Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} et un objet final $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet) = (X_m/Z, \Delta_m)$ comme précédemment. Le point est que $(X_i/Z, \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)$ est un *modèle nef* de la paire $(X/Z, \Delta + t_i H)$.

L'observation importante est la suivante.

LEMME 1.26 ([**3**, Lemma 2.6]). — *Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire dlt où X est $\mathbf{Q}$-factorielle et $H \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tel que la paire $(X, \Delta + H)$ soit lc. Si $K_X + \Delta$ n'est pas nef/Z mais $K_X + \Delta + H$ l'est alors il existe une arête $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ et un réel $0 < t \leqslant 1$ tels que $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$, $(K_X + \Delta + tH) \cdot R = 0$ et $K_X + \Delta + tH$ soit nef/Z.*

Supposons $(X_i/Z, \Delta_i)$ et $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ déjà construits avec $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ nef/Z et supposons $K_{X_i} + \Delta_i$ non nef/Z. Par le lemme 1.26, il existe une arête $R_i \subset \overline{\mathrm{NE}}(X_i/Z)$ et un réel $0 < t_{i+1} \leqslant t_i$ tels que $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$, $(K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i) \cdot R_i = 0$ et $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i$ soit nef/Z. Soit $c_i : X_i/Z \to Y_i/Z$ la contraction associée et supposons par exemple la contraction petite. Soit $c_i^+ : X_i^+ \to Y_i$ le flip de c_i (s'il existe). On pose à nouveau $X_{i+1}/Z := X_i^+/Z$ et $\Delta_{i+1} := \Delta_i^+$. Par le point 4 du théorème 1.19, $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i = c_i^* M_i$ où $M_i \in \mathrm{Div}(Y_i)_{\mathbf{R}}$. Le diviseur M_i est nef/Z puisque $K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i$ l'est,

$$K_{X_{i+1}} + \Delta_{i+1} + t_{i+1} H_{i+1} = ((c_i^+)^{-1} \circ c_i)_* (K_{X_i} + \Delta_i + t_{i+1} H_i) = (c_i^+)^* M_i$$

l'est donc également. Le cas des contractions divisorielles est analogue.

Si $t \in [0, t_i[$ $(i \geqslant 1)$, $(K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + tH_{i-1}) \cdot R_{i-1} < 0$ de sorte que φ_{i-1} est $K_{X_{i-1}} + \Delta_{i-1} + tH_{i-1}$ strictement négative. On en tire facilement que l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta + t_i H$ négative ou encore que $(X_i/Z, \varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0)$ est un modèle nef de $(X/Z, \Delta + t_i H)$.

1.6. Les polytopes de Shokurov

L'un des ingrédients de la preuve du théorème 0.2 est la compréhension de la dépendance en Δ des modèles nef et minimaux de la paire $(X/Z, \Delta)$. L'observation clef est le résultat suivant (voir également [**15**, Proposition 4.2.4]).

PROPOSITION 1.27 ([**27**]). — *Soient $X \to Z$ un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales et $P \subset \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ un polytope convexe tel que pour tout $\Delta \in P$, Δ soit grand/Z et (X, Δ) klt.*

1. *Fixons $\Delta \in P$. L'ensemble des arêtes $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ telles que $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$ est fini.*

2. *L'ensemble des arêtes* $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ *pour lesquelles* $R^{\perp} := \{\Delta \in P | (K_X + \Delta) \cdot R = 0\}$ *est non vide est également fini.*

Preuve. — Montrons que la seconde assertion est entraînée par la première. On peut toujours supposer que P est un simplexe ; soient $(\Delta_i)_{i \in I}$ ses sommets. Soit A un $\mathbf{Q}$-diviseur ample/Z. Il existe un rationnel $t_0 > 0$ et, pour tout $i \in I$, $E_i \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif tels que $\Delta_i \sim_{\mathbf{R}} t_0 A + E_i$. Quitte à remplacer A par $t_0 A$, on peut toujours supposer $t_0 = 1$. Écrivons $\Delta_i = (1-t)\Delta_i + t\Delta_i \sim_{\mathbf{R}} (1-t)\Delta_i + tA + tE_i$. Si $t > 0$ est assez petit, la paire $(X, tA + (1-t)\Delta_i + tE_i)$ est klt pour tout $i \in I$. Si $\Delta = \sum_{i \in I} \lambda_i \Delta_i$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$ alors la paire $(X, tA + (1-t)\Delta + \sum_{i \in I} \lambda_i E_i)$ est elle aussi klt et $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}} K_X + tA + (1-t)\Delta + \sum_{i \in I} \lambda_i E_i$. Il en résulte qu'on peut toujours supposer $\Delta \geqslant A$ pour tout $\Delta \in P$, quitte à remplacer A par $\frac{1}{t}A$.

Le polytope P étant compact, il suffit de montrer la seconde assertion de la proposition au voisinage d'un point $\Delta \in P$. Soient R' une arête et $\Delta' \in P$ tels que $(K_X + \Delta') \cdot R' = 0$. Le calcul

$$(K_X + \Delta - \frac{1}{2}A) \cdot R' = (K_X + \Delta') \cdot R' + (\Delta - \Delta' - \frac{1}{2}A) \cdot R' = (\Delta - \Delta' - \frac{1}{2}A) \cdot R'$$

montre que si Δ' est assez proche de Δ alors $(K_X + \Delta - \frac{1}{2}A) \cdot R' < 0$. La seconde assertion est donc bien entraînée par la première.

Montrons la première assertion. Soit $\Delta \in P$. On peut toujours supposer $\Delta = A + B$ où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur (effectif) ample/Z et $B \geqslant 0$ par les arguments ci-dessus. Le résultat cherché est maintenant une conséquence immédiate du point 2 du théorème 1.19 appliqué à la paire $(X/Z, B)$ et au diviseur A. $\square$

Les données étant celles de la proposition précédente, soit $\varphi : X/Z \dashrightarrow Y/Z$ une application birationnelle dont l'inverse ne contracte pas de diviseur. On déduit facilement de la propositon 1.27 que l'ensemble

$$P(Y/Z, \varphi) := \{\Delta \in P | (Y/Z, \varphi_* \Delta) \text{ soit un modèle nef de } (X/Z, \Delta)\}$$

est un polytope convexe. En utilisant les théorèmes 2.1 et 2.3, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.28 ([**4**, Corollary 1.1.5]). — *On reprend les hypothèses de la proposition 1.27. Alors l'ensemble* $\{\Delta \in P | K_X + \Delta$ *soit pseudo-effectif/*$Z\}$ *est la réunion (finie) des polytopes convexes* $P(X_\bullet/Z, \varphi)$ *où* $(X_\bullet/Z, \varphi)$ *parcourt l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles minimaux de paires* $(X/Z, \Delta)$ *pour* $\Delta \in P$.

2. LES RÉSULTATS

2.1. Les énoncés

Les énoncés qui suivent, sauf mention du contraire, sont tirés de [**12**] et [**4**].

THÉORÈME 2.1 (Existence de modèles minimaux). — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt. On suppose* Δ *grand*/Z *et* $K_X + \Delta$ *pseudo-effectif*/Z. *Alors* $(X/Z, \Delta)$ *a un modèle minimal* $(X_\bullet/Z, \varphi)$ *où* $X_\bullet$ *est de plus* $\boldsymbol{Q}$-*factorielle.*

Preuve du théorème 0.2 (esquisse). — Supposons X de type général pour commencer. Soient $k \gg 0$ et $\Delta \in |kK_X|$. La paire $(X, t\Delta)$ est klt pour un rationnel $t > 0$ assez petit et $t\Delta$ est grand. Soit $(X_\bullet, \varphi)$ un modèle minimal de $(X, t\Delta)$, dont l'existence est garantie par le théorème 2.1 ; c'est aussi un modèle minimal pour $(X, 0)$ puisque $K_X + t\Delta \sim_{\mathbf{R}} (1 + tk)K_X$ et $K_{X_\bullet}$ est donc semi-ample par le théorème 1.17.

Soit $r > 0$ un entier tel que $rK_{X_\bullet}$ soit Cartier. L'algèbre $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(krK_X))$ est isomorphe à l'algèbre $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X_\bullet, \mathcal{O}_{X_\bullet}(krK_{X_\bullet}))$ (voir remarque 1.14) qui est de type fini sur $\mathbf{C}$ par le lemme suivant (voir par exemple [**24**]).

LEMME 2.2. — *Soient* X *une variété projective et* $\mathcal{L}$ *un fibré en droites sur* X *semi-ample. Alors l'algèbre* $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{L}^{\otimes k})$ *est de type fini sur* $\boldsymbol{C}$.

L'argument lorsque X est quelconque est le suivant. D'après [**11**], il existe une paire (Y, Γ) klt telle que Γ soit grand et les algèbres $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(krK_X))$ et $\bigoplus_{k\geqslant 0} \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y(kr'(K_Y + \Gamma)))$ isomorphes où r et r' sont des entiers convenables. On conclut ensuite essentiellement comme ci-dessus. □

Le résultat suivant complète le théorème 2.1.

THÉORÈME 2.3 (Finitude des modèles nef). — *Soient* $X \to Z$ *un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales et* $P \subset \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ *un polytope convexe tel que pour tout* $\Delta \in P$, Δ *soit grand*/Z *et* (X, Δ) *klt. Alors l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles nef des paires* $(X/Z, \Delta)$ *pour* $\Delta \in P$ *est fini*[18].

Le dernier et probablement le plus important des énoncés est un résultat de « non-annulation ».

THÉORÈME 2.4 (Non-annulation). — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt. On suppose* Δ *grand*/Z *et* $K_X + \Delta$ *pseudo-effectif*/Z. *Alors il existe un* $\boldsymbol{R}$-*diviseur effectif* D *sur* X *tel que* $K_X + \Delta \sim_{\boldsymbol{R},Z} D$.

Indiquons quelques corollaires des théorèmes 2.1 et 2.3 en plus des résultats déjà mentionnés.

[18] Ce résultat est faux si on ne suppose pas Δ grand/Z pour tout $\Delta \in P$ (voir [**14**]).

COROLLAIRE 2.5. — *Soient* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt avec* X $\mathbf{Q}$*-factorielle et* $c : X/Z \to Y/Z$ *la contraction d'une arête* $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X/Z)$ *telle que* $(K_X + \Delta) \cdot R < 0$. *On suppose la contraction petite. Alors le flip de c existe.*

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.6 et de la remarque 1.21. □

COROLLAIRE 2.6. — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt. Si* $K_X + \Delta$ *est grand/Z alors le modèle canonique de* $(X/Z, \Delta)$ *existe.*

Preuve. — Soit $B \sim_{\mathbf{R},Z} K_X + \Delta$ un $\mathbf{R}$-diviseur effectif ; pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, la paire $(X, \Delta + \varepsilon B)$ est klt et $\Delta + \varepsilon B$ est grand/Z. La paire $(X, \Delta + \varepsilon B)$ a donc un modèle minimal par le théorème 2.1 qui est également un modèle minimal de la paire (X, Δ) puisque $K_X + \Delta + \varepsilon B \sim_{\mathbf{R},Z} (1 + \varepsilon)(K_X + \Delta)$. On conclut comme indiqué à la fin du parargraphe 1.3. □

COROLLAIRE 2.7. — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt avec* X $\mathbf{Q}$*-factorielle. On suppose que* $K_X + \Delta$ *n'est pas pseudo-effectif/Z. Un MMP convenable pour* $(X/Z, \Delta)$ *donne alors une paire* $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet)$ *et une fibration de Mori* $c_\bullet : X_\bullet/Z \to Y_\bullet/Z$ [19].

PREUVE — Soit $H \in \mathrm{Div}(X)$ un diviseur ample/Z tel que $K_X + \Delta + H$ soit ample/Z et $(X, \Delta + H)$ klt. Soit $t > 0$ un réel tel que $K_X + \Delta + tH$ ne soit pas pseudo-effectif/Z. Considérons un MMP dirigé par H pour la paire $(X/Z, \Delta + tH)$. Il produit des paires $(X_i/Z, \Delta_i + tH_i)$, des réels $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ et des applications birationnelles $X_i/Z \dashrightarrow X_{i+1}/Z$ où Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} tels que $K_{X_i} + \Delta_i + (t+t_i)H_i$ soit nef/Z. Les paires $(X_i, \Delta_i + (t+t_i)H_i)$ sont klt par la remarque 1.14. Le théorème 2.3 entraîne que l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles minimaux $(X_i/Z, \Delta_i + (t + t_i)H_i)$ ainsi obtenus est fini et donc que le MMP aboutit puisque deux tels modèles ne sont pas isomorphes s'ils sont distincts (par exemple par la remarque 1.22). L'objet final $(X_\bullet/Z, \Delta_\bullet + tH_\bullet))$ ne peut être un modèle minimal puisque par choix de t, $K_X + \Delta + tH$ n'est pas pseudo-effectif. Il existe donc une contraction $c_\bullet : X_\bullet/Z \to Y_\bullet/Z$ avec $\dim(Y_\bullet) < \dim(X_\bullet)$, $-(K_{X_\bullet} + \Delta_\bullet + tH_\bullet)$ ample/Z et $\rho(X_\bullet/Y_\bullet) = 1$. Il reste à voir que toutes les étapes du MMP pour la paire $(X/Z, \Delta + tH)$ sont en fait des étapes du MMP pour la paire (X, Δ), autrement dit, que $(K_{X_i} + \Delta_i) \cdot R_i < 0$, les notations étant celles du paragraphe 1.5. C'est immédiat puisque $K_{X_i} + \Delta_i + (t + t_i)H_i$ est nef/Z et $(K_{X_i} + \Delta_i + tH_i) \cdot R_i < 0$. □

COROLLAIRE 2.8. — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt avec* X $\mathbf{Q}$*-factorielle et soit* $H \in \mathrm{Div}(X)_{\mathbf{R}}$ *effectif tel que* $(X, \Delta + H)$ *soit klt et* $K_X + \Delta + H$ *nef/Z* [20]. *On*

[19] Les arguments donnés ici montrent également comment déduire le corollaire 2.8 du théorème 2.3.

[20] Un diviseur de la forme $H = \frac{1}{2}H_0$ où H_0 est un diviseur très ample sur X, assez général dans $|H_0|$ tel que $K_X + \Delta + \frac{1}{2}H_0$ soit nef/Z fait l'affaire.

suppose Δ *grand*/Z. *Alors il n'existe pas de suite infinie de flips dans un MMP dirigé par* H.

COROLLAIRE 2.9. — *Soit* (X, Δ) *une paire klt. Il existe* $\pi : X' \to X$ *où* π *est un morphisme petit et* X' $\boldsymbol{Q}$*-factorielle.*

2.2. Schéma de la preuve

Décrivons la structure de la preuve des théorèmes d'existence de modèles minimaux, de finitude des modèles nef et de non-annulation.

Le théorème de finitude des modèles nef en dimension n se déduit, ce n'est pas facile, du théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n ; cela fait l'objet du paragraphe 2.3.

Le théorème d'existence de modèles minimaux se démontre par récurrence sur la dimension n de X. Le résultat en dimension 1 est immédiat. Fixons $n \geqslant 2$ et *supposons le théorème d'existence de modèles minimaux vrai si* $\dim(X) = n - 1$.

Étape 1. — On montre l'existence des pl-flips en dimension n, autrement dit l'énoncé suivant (voir paragraphe 2.6).

THÉORÈME 2.10. — *Soit* (X, Δ) *une paire plt où* X *est* $\boldsymbol{Q}$*-factorielle de dimension* n, Δ *un* $\boldsymbol{Q}$*-diviseur et* $S := \llcorner \Delta \lrcorner$ *irréductible et soit* $c : X \to Y$ *une pl-contraction. Alors le flip de* c *existe.*

Étape 2. — On montre ensuite le théorème d'existence des modèles minimaux dans le cas particulier où la paire (X, Δ) est « effective » (voir paragraphe 2.4).

THÉORÈME 2.11. — *Soit* $(X/Z, \Delta)$ *une paire klt où* X *est de dimension* n. *On suppose* Δ *grand*/Z *et qu'il existe un* $\boldsymbol{R}$*-diviseur effectif* D *sur* X *tel que* $K_X + \Delta \sim_{\boldsymbol{R},Z} D$. *Alors* $(X/Z, \Delta)$ *a un modèle minimal* $(X_\bullet/Z, \varphi)$ *où* $X_\bullet$ *est de plus* $\boldsymbol{Q}$*-factorielle.*

Il faut souligner que le modèle minimal cherché n'est pas obtenu par un MMP pour la paire (X, Δ) ; l'argument est plus subtil.

Étape 3. — On remarque ensuite que les arguments donnés au paragraphe 2.3 permettent de prouver le cas particulier suivant du théorème de finitude des modèles nef.

THÉORÈME 2.12. — *Soient* $X \to Z$ *un morphisme projectif de variétés quasi-projectives normales où* $\dim(X) = n$ *et* $P \subset \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ *un polytope convexe tel que, pour tout* $\Delta \in P$, Δ *soit grand*/Z, *la paire* (X, Δ) *klt et* $K_X + \Delta$ *grand*/Z. *Alors, l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles nef des paires* $(X/Z, \Delta)$ *pour* $\Delta \in P$ *est fini.*

Étape 4. — On montre enfin le théorème de non-annulation en dimension n ; cela fait l'objet du paragraphe 2.5.

Étape 5 (Conclusion). — Le théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n se déduit immédiatement des étapes 2 et 4.

La non-existence de suite infinie de flips dirigés est une conséquence du théorème de finitude des modèles nef (c'est essentiellement le contenu du corollaire 2.8) de sorte que les théorèmes d'existence de modèles minimaux et de finitude des modèles nef sont équivalents modulo l'existence des flips. L'hypothèse de récurrence est utilisée dans les étapes 2 et 4 sous la forme « finitude des modèles nef » en dimension $n-1$.

2.3. Finitude des modèles nef

L'objet de ce paragraphe est d'expliquer comment le théorème de finitude des modèles nef en dimension n se déduit du théorème d'existence de modèles minimaux en dimension n où $n \geqslant 1$ est un entier fixé. *On suppose le théorème 2.1 vrai en dimension n.*

Il suffit de prouver le théorème de finitude des modèles nef lorsque P est un simplexe et, quitte à remplacer X par un modèle $\mathbf{Q}$-factoriel $\pi : X' \to X$ (voir corollaire 2.9 [21]) et P par $(\pi^{-1})_*P$, on peut supposer X $\mathbf{Q}$-factorielle. Comme dans la preuve de la proposition 1.27, on se ramène au cas où il existe un $\mathbf{R}$-diviseur ample A tel que $\Delta \geqslant A$ pour tout $\Delta \in P$, quitte à modifier P convenablement.

Fixons maintenant une famille finie $(H_i)_{i\in I}$ de diviseurs amples et effectifs sur X dont les classes engendrent $\mathrm{N}^1(X/Z)$. Quitte à remplacer les H_i par des multiples convenables, A par un diviseur qui lui est $\mathbf{R}$-linéairement équivalent et P par un translaté, on peut supposer que $A = A_0 + \sum_{i\in I} H_i$ où A_0 est ample$/Z$. Soit $0 < t \leqslant 1$ tel que pour tout $\Delta = A + B \in P$ et tout $-t \leqslant t_i \leqslant t$, la paire $(X, \Delta + \sum_{i\in I} t_i H_i)$ soit klt.

Soit $(X_\bullet/Z, \varphi)$ un modèle nef de $(X/Z, \Delta)$ où $\Delta \in P$ est fixé. Montrons qu'il existe des réels $-t \leqslant t_i \leqslant t$ tels que $(X_\bullet/Z, \varphi)$ soit un modèle canonique de la paire $(X/Z, \Delta + \sum_{i\in I} t_i H_i)$. Supposons pour simplifier $X_\bullet$ $\mathbf{Q}$-factorielle, le cas général étant à peine plus compliqué. Soit H' un diviseur très ample sur $X_\bullet$, général dans $|H'|$. Il existe des réels $(t_i)_{i\in I}$ tels que $(\varphi^{-1})_*H' \equiv_{\mathbf{R},Z} \sum_{i\in I} t_i H_i$. Posons $H := \varphi_*(\sum_{i\in I} t_i H_i) \equiv_{\mathbf{R},Z} H'$; le diviseur H est ample$/Z$ et $K_{X_\bullet} + \varphi_*\Delta + H$ l'est donc également. Quitte à remplacer H par un multiple convenable, on peut également supposer $-t \leqslant t_i \leqslant t$ et $(X_\bullet, \varphi_*\Delta + H)$ klt. Le diviseur H' étant supposé général, φ est $K_X + \Delta + \sum_{i\in I} t_i H_i$ négative et $(X_\bullet/Z, \varphi)$ est donc un modèle canonique de $(X/Z, \Delta + \sum_{i\in I} t_i H_i)$.

[21] Le corollaire 2.9 en dimension n est une conséquence du théorème 2.1 en dimension n.

Il suffit donc de montrer que l'ensemble des classes d'isomorphie de modèles canoniques des paires $(X/Z, \Delta)$ pour $\Delta \in P$ est fini, quitte à remplacer P par $P + \sum_{i \in I}[-t, t]H_i$ et A par A_0.

Supposons avoir démontré l'existence d'applications birationnelles $\varphi_j : X/Z \dashrightarrow X_j/Z$, pour $j \in J$ fini, telles que, pour tout $\Delta \in P$ tel que $K_X + \Delta$ soit pseudo-effectif$/Z$, il existe $j \in J$ tel que $(X_j/Z, \varphi_j)$ soit un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$. Fixons $j \in J$. L'ensemble

$$P_j := \{\Delta \in P | (X_j/Z, \varphi_j) \text{ soit un modèle nef de } (X/Z, \Delta)\}$$

est un polytope convexe (voir paragraphe 1.6). Soit $\Delta \in P_j$; si $K_X + \Delta$ est grand$/Z$ alors le modèle canonique de $(X/Z, \Delta)$ existe par le corollaire 2.6 [(22)]. Il reste alors à remarquer que si $\Delta \in P_j$ et $\Delta' \in P_j$ sont deux diviseurs dans l'intérieur d'une même face de P_j, $K_X + \Delta$ est grand$/Z$ si et seulement si $K_X + \Delta'$ l'est puisque $K_{X_j} + {\varphi_j}_*\Delta$ et $K_{X_j} + {\varphi_j}_*\Delta'$ sont semi-amples$/Z$ par le théorème 1.18, auquel cas les modèles canoniques de $(X_j/Z, {\varphi_j}_*\Delta)$ et $(X_j/Z, {\varphi_j}_*\Delta')$ sont isomorphes.

Il faut maintenant prouver l'existence d'applications birationnelles φ_j comme ci-dessus. Il suffit, par compacité de P, de montrer l'assertion au voisinage d'un diviseur $\Delta_0 \in P$.

Supposons d'abord $K_X + \Delta_0 \sim_{\mathbf{R},Z} 0$. Soit $\Delta_1 \in \partial P$. Posons $\Delta := \Delta_0 + t(\Delta_1 - \Delta_0)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$. On a $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R},Z} t(K_X + \Delta_1)$ et, si $t > 0$ et $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif$/Z$ alors $K_X + \Delta_1$ est également pseudo-effectif$/Z$ et un modèle minimal pour (X, Δ_1) est un modèle minimal pour (X, Δ). Il suffit donc, par récurrence sur la dimension du sous-espace affine de $\mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ engendré par P, de montrer l'assertion pour $P = \{\Delta_0\}$, auquel cas, la conclusion cherchée est donnée par le théorème d'existence de modèles minimaux.

Il reste à expliquer comment se ramener au cas ci-dessus. Si $K_X + \Delta_0$ n'est pas pseudo-effectif$/Z$ alors la paire $(X/Z, \Delta_0)$ n'a pas de modèle minimal et c'est encore vrai pour $\Delta \in P$ proche de Δ_0 puisque le cône $\mathrm{Pef}(X/Z)$ est fermé. On peut donc supposer $K_X + \Delta_0$ pseudo-effectif$/Z$. En considérant un modèle minimal (à singularités $\mathbf{Q}$-factorielles) de $(X/Z, \Delta_0)$, on se ramène facilement au cas où $K_X + \Delta_0$ est nef$/Z$. Soit $(X_\bullet/Z, \varphi_0)$ le modèle canonique de $(X/Z, \Delta_0)$; φ_0 est un morphisme et $K_X + \Delta_0 \sim_{\mathbf{R},X_\bullet} 0$. Soient $\varphi_j : X/X_\bullet \dashrightarrow X_j/X_\bullet$, pour $j \in J$ fini, des applications birationnelles telles que, pour tout $\Delta \in P$ tel que $K_X + \Delta$ soit pseudo-effectif$/X_\bullet$, il existe $j \in J$ tel que $(X_j/X_\bullet, \varphi_j)$ soit un modèle minimal de $(X/X_\bullet, \Delta)$. Le diviseur $K_{X_\bullet} + {\varphi_0}_*\Delta_0$ étant ample$/Z$, il reste à se convaincre que la proposition 1.27 entraîne que si Δ est assez proche de Δ_0 et $K_{X_j} + {\varphi_j}_*\Delta$ est nef$/X_\bullet$ alors $K_{X_j} + {\varphi_j}_*\Delta$ est nef$/Z$, autrement dit, $(X_j/Z, \varphi_j)$ est un modèle minimal de $(X/Z, \Delta)$. $\square$

(22) Le corollaire 2.6 en dimension n est une conséquence du théorème 2.1 en dimension n.

2.4. Existence de modèles minimaux pour les paires effectives

L'objet de ce paragraphe est de donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.11. *On suppose le théorème d'existence de modèles minimaux vrai en dimension* $n-1$.

LEMME 2.13. — *Soient* $(X/Z, \Delta)$ *une paire dlt où* X *est* $\boldsymbol{Q}$*-factorielle de dimension* n *et* $H \in \mathrm{Z}^1(X)_{\boldsymbol{R}}$ *effectif tels qu'aucune composante irréductible de* H *ne soit contenue dans* $\llcorner \Delta \lrcorner$ *et tels que* $K_X + \Delta$ *soit pseudo-effectif/*Z.

(H1) *On suppose que pour toute composante irréductible* S *de* $\llcorner \Delta \lrcorner$ *il existe* $\Delta' \in \mathrm{Z}^1(X)_{\boldsymbol{R}}$ *tel que* $\Delta' \sim_{\boldsymbol{R},Z} \Delta$, $(X, \Delta' + tH)$ *soit plt pour tout* $0 \leqslant t < 1$, $\llcorner \Delta' \lrcorner = S$ *et* $(\Delta' - S)_{|S}$ *grand/*Z.

(H2) *On suppose enfin que pour toute composante irréductible* S *de* $\llcorner \Delta \lrcorner$ *il existe* $\Delta'' \in \mathrm{Z}^1(X)_{\boldsymbol{R}}$ *tel que* $\Delta'' \sim_{\boldsymbol{R},Z} \Delta + H$, (X, Δ'') *soit plt,* $\llcorner \Delta'' \lrcorner = S$ *et* $(\Delta'' - S)_{|S}$ *grand/*Z.

On considère un MMP dirigé par H *pour* (X, Δ) [23]. *Alors, pour* $i \gg 0$, *le lieu exceptionnel de* φ_i *est disjoint de* $\llcorner \Delta_i \lrcorner$, *les notations étant celles du paragraphe 1.5.*

Preuve (esquisse). — Les contractions c_i sont toutes birationnelles puisque $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif/Z. Supposons qu'il existe une composante irréductible S de $\llcorner \Delta \lrcorner$ telle que le lieu exceptionnel de φ_i rencontre S_i pour une infinité d'entiers $i \geqslant 0$ où S_i est le transformé strict de S dans X_i ; en particulier, S n'est contractée par aucune des φ_i. Notons $\psi_i : S_i \dashrightarrow S_{i+1}$ les applications birationnelles induites par les φ_i et $\Theta_i := \mathrm{Diff}_{S_i}(\Delta'_i - S_i)$ où Δ' est donné par l'hypothèse (H1) et Δ'_i est le transformé strict de Δ' dans X_i ; (S_i, Θ_i) est klt et Θ_i est grand/Z.

On montre, nous ne le ferons pas, que pour un entier i_0 convenable et tout $i \geqslant i_0$, ψ_i^{-1} ne contracte pas de diviseur, $\psi_{i*}\Theta_i = \Theta_{i+1}$ et

$$a_F(S_i, \Theta_i) \leqslant a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1})$$

pour toute valuation algébrique v_F sur $\mathrm{Rat}(S_i)$.

On montre ensuite que l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $S_{i_1} \dashrightarrow S_i$ pour $i \geqslant i_1 \geqslant i_0$ est fini de la façon suivante.

Supposons $t_{i_1} < 1$ pour au moins un entier $i_1 \geqslant i_0$ et donc pour tout entier $i \geqslant i_1$. Les paires $(S_i/Z, \Theta_i + t_i H_{i|S_i})$ sont des modèles nef [24] de paires $(S_{i_1}/Z, \Theta_{i_1} + tH_{i_1|S_{i_1}})$ pour des réels $t \in [0, t_{i_1}]$ convenables et puisque $(X, \Delta' + tH)$ est plt pour tout $0 \leqslant t < 1$, les paires $(S_{i_1}/Z, \Theta_{i_1} + tH_{i_1|S_{i_1}})$ pour $t \in [0, t_{i_1}]$ sont klt. Par le théorème de finitude des modèles nef, l'ensemble des classes d'isomorphie de ces modèles est

(23) On suppose l'existence des flips nécessaires.

(24) Je triche un peu ici ; il faut encore vérifier que les applications birationnelles $\psi_{i-1} \circ \cdots \circ \psi_{i_1}$ sont $K_{S_{i_1}} + \Theta_{i_1} + t_i H_{i_1|S_{i_1}}$ négatives, ce n'est pas très difficile.

fini et l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $S_{i_1} \dashrightarrow S_i$ pour $i \geqslant i_1$ l'est donc également.

Si $t_i = 1$ pour tout $i \geqslant 0$, l'argument est analogue, en utilisant cette fois l'hypothèse (H2).

Il reste maintenant à exhiber une contradiction. Quitte à remplacer i_1 par un entier plus grand, on peut supposer que les φ_i sont des flips pour tout $i \geqslant i_1$. Notons T_i la normalisation de $c_i(S_i)$, $p_i : S_i \to T_i$ et $q_i : S_{i+1} \to T_i$ les restrictions des morphismes c_i et c_i^+ à S_i et S_{i+1} respectivement. Si S_i rencontre le lieu exceptionnel de φ_i alors ou bien p_i n'est pas un isomorphisme ou bien q_i n'en est pas un. En effet, si p_i est un isomorphisme alors $S_i \cdot R_i > 0$, $-S_{i+1}$ est donc ample$/Y_i$ et S_{i+1} contient le lieu exceptionnel de c_i^+ de sorte que q_i n'est pas un isomorphisme.

Soient maintenant $j > i \geqslant i_1$ deux entiers tels que $S_i \cap \operatorname{Exc}(\varphi_i) \neq \varnothing$ et tels que l'application rationnelle induite $S_i \dashrightarrow S_j$ s'étende en un isomorphisme. Soit v_F une valuation algébrique sur $\operatorname{Rat}(S_i)$ dont le centre est contenu dans le lieu exceptionnel de p_i ou celui de q_i, l'un des deux n'étant pas vide par la discussion qui précède ; le lemme de négativité entraîne facilement

$$a_F(S_i, \Theta_i) < a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1}).$$

Enfin, puisque $i \geqslant i_1 \geqslant i_0$,

$$a_F(S_{i+1}, \Theta_{i+1}) \leqslant \cdots \leqslant a_F(S_j, \Theta_j) = a_F(S_i, \Theta_i),$$

une contradiction. □

LEMME 2.14. — *On reprend les hypothèses du lemme 2.13. S'il existe $D \in \mathrm{Z}^1(X)_{\mathbf{R}}$ effectif et un réel $t \geqslant 0$ tels que*

$$K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R},Z} D + tH \quad \textit{et} \quad \operatorname{Supp}(D) \subset \llcorner \Delta \lrcorner,$$

et si $K_X + \Delta + H$ est nef$/Z$ alors la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_\bullet/Z, \varphi)$ où $X_\bullet$ est de plus $\mathbf{Q}$-factorielle.

Preuve (esquisse). — Le modèle minimal cherché est obtenu au moyen d'un MMP dirigé par H pour $(X/Z, \Delta)$. Les notations sont celles du paragraphe 1.5. Notons que, pour tout $i \geqslant 0$, $K_{X_i} + \Delta_i \sim_{\mathbf{R},Z} D_i + tH_i$. On en tire facilement $D_i \cdot R_i < 0$ puis que le lieu exceptionnel de la contraction c_i est contenu dans le support de $\llcorner D_i \lrcorner$. L'hypothèse (H1) entraîne ensuite que les flips nécessaires sont en fait des pl-flips dont l'existence est acquise à ce stade de la démonstration. La non-existence de suite infinie de flips est maintenant impliquée par le lemme 2.13. □

Remarque 2.15. — Les hypothèses (H1) et (H2) du lemme 2.13 sont satisfaites lorsque par exemple $(X, \Delta + H)$ est dlt et $\Delta \geqslant A$ où A est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif ample$/Z$. En effet, on peut toujours supposer, quitte à remplacer A par un diviseur qui lui est $\mathbf{R}$-linéairement équivalent, que $\Delta = S_1 + \cdots + S_k + A + B$ où les S_i sont des diviseurs irréductibles et réduits deux à deux distincts, B un $\mathbf{R}$-diviseur effectif et $\llcorner \Delta \lrcorner = S_1 + \cdots + S_k$. On écrit, pour $\varepsilon > 0$,

$$\Delta = S_1 + (1-\varepsilon)(S_2 + \cdots + S_k + B) + A + \varepsilon(S_2 + \cdots + S_k + B).$$

La paire $(X, S_1 + (1-\varepsilon)(S_2 + \cdots + S_k + B) + tH)$ est plt pour tout $0 \leqslant t < 1$ et tout $0 < \varepsilon \leqslant 1$ par la proposition 1.8 ; pour tout $0 < \varepsilon \ll 1$, $A + \varepsilon(S_2 + \cdots + S_k + B)$ est ample$/Z$. Si $A'_\varepsilon \sim_{\mathbf{R},Z} A + \varepsilon(S_2 + \cdots + S_k + B)$ est général, la paire $(X, A'_\varepsilon + S_1 + (1-\varepsilon)(S_2 + \cdots + S_k + B) + tH)$ est encore plt pour tout $0 \leqslant t < 1$ et $\Delta' := A'_\varepsilon + S_1 + (1-\varepsilon)(S_2 + \cdots + S_k + B) \sim_{\mathbf{R},Z} \Delta$ convient. L'hypothèse (H2) s'obtient de la même façon.

La difficulté est d'utiliser le lemme 2.14 : si (X, Δ) est de plus klt alors $\llcorner \Delta \lrcorner = 0$, $D = 0$ et $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R},Z} \frac{t}{t+1}(K_X + \Delta + tH)$ est nef$/Z$ par hypothèse.

LEMME 2.16. — *Soit D un $\boldsymbol{R}$-diviseur de Weil effectif sur une variété normale X. Il existe des diviseurs irréductibles $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ dont des multiples entiers convenables sont mobiles*[25]*, des réels positifs ou nuls $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ et un diviseur effectif F à support dans l'ensemble base stable* $\mathrm{B}(D)$[26] *de D tels que*

$$D \sim_{\boldsymbol{R}} \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i M_i + F.$$

Le résultat annoncé en début de paragraphe se déduit facilement de la proposition suivante[27].

PROPOSITION 2.17. — *Soient $(X/Z, \Delta)$ une paire klt et D un $\boldsymbol{R}$-diviseur de Weil effectif sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\boldsymbol{R},Z} D$. On suppose X lisse et que $\Delta + D$ est un diviseur dont le support est à croisements normaux simples. On suppose également qu'il existe un diviseur ample$/Z$ A sur X tel que $\Delta \geqslant A$, des diviseurs irréductibles $(M_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ dont des multiples entiers convenables sont mobiles, des réels positifs ou nuls $(r_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ et un diviseur effectif F à support dans $\mathrm{B}(D)$ tels que $D = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i M_i + F$ et qu'aucun des M_i n'est une composante irréductible de Δ. Alors la paire $(X/Z, \Delta)$ a un modèle minimal $(X_\bullet/Z, \varphi)$ où $X_\bullet$ est de plus $\boldsymbol{Q}$-factorielle.*

Preuve (esquisse). — Soit Δ^+ le $\mathbf{R}$-diviseur effectif sur X à coefficients inférieurs à 1 tel que $\Delta^+ \geqslant \Delta$ et $\mathrm{Supp}(\llcorner \Delta^+ \lrcorner)$ soit la partie divisorielle de $\mathrm{B}(D)$. Posons $F^+ := F + \Delta^+ - \Delta$.

[25] Un $\mathbf{R}$-diviseur B sur X est dit mobile si $\mathrm{Fix}(B) = 0$.

[26] On rappelle que l'ensemble base stable $\mathrm{B}(D)$ est le fermé $\bigcap_{D' \sim_{\mathbf{R}} D} \mathrm{Supp}(D')$.

[27] La preuve présentée ici tient compte de quelques simplifications apportées par Kollár.

Étape 1. — Soit H^0 un diviseur ample sur X tel que $K_X+\Delta^+ +\sum_{1\leqslant i\leqslant k} M_i+H^0$ soit nef$/Z$ et la paire $(X, \Delta^+ + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} M_i + H^0)$ dlt. Il vient

$$\underbrace{K_X + \Delta^+ + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} M_i}_{=:\Delta^0} \sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{\sum_{1\leqslant i\leqslant k} (r_i+1)M_i + F^+}_{=:D^0} +0\cdot H^0 \text{ et } \mathrm{Supp}(D^0) \subset \llcorner \Delta^0 \lrcorner.$$

On en déduit que la paire $(X/Z, \Delta^+ + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} M_i)$ a un modèle minimal $(X_1/Z, \varphi_0)$ par le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X/Z, \Delta^0)$ et au diviseur H^0.

Étape 2. — Si $r_1 = \cdots = r_k = 0$, on va directement à la dernière étape. Supposons $0 < r_1 \leqslant \cdots \leqslant r_k$. On va construire successivement des modèles minimaux $(X_j/Z, \varphi_{j-1})$ de $(X_{j-1}/Z, \Delta^+_{j-1} + \frac{1}{r_j}\sum_{1\leqslant l\leqslant j-1} r_l M_{l,j-1} + \sum_{j\leqslant m\leqslant k} M_{m,j-1})$ pour $j \in \{1, \ldots, k\}$, le premier étant le modèle construit à l'étape 1. Ici, Δ^+_j (resp. F^+_j, $M_{i,j}$) désigne le transformé strict de Δ^+ (resp. F^+, M_i) dans X_j. Supposons déjà construit $(X_j/Z, \varphi_{j-1})$; en particulier $K_{X_j} + \Delta^+_j + \frac{1}{r_j}\sum_{1\leqslant l\leqslant j-1} r_l M_{l,j} + \sum_{j\leqslant m\leqslant k} M_{m,j}$ est nef$/Z$. Si $r_j = r_{j+1}$ alors $X_{j+1}/Z := X_j/Z$ convient. Supposons $r_j < r_{j+1}$.

Écrivons

$$\begin{aligned}
K_{X_j} &+ \Delta^+_j + \frac{1}{r_j}\sum_{1\leqslant l\leqslant j-1} r_l M_{l,j} + \sum_{j\leqslant m\leqslant k} M_{m,j}\\
&= K_{X_j} + \Delta^+_j + \frac{1}{r_j}\sum_{1\leqslant l\leqslant j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1\leqslant m\leqslant k} M_{m,j}\\
&= K_{X_j} + \Delta^+_j + \frac{1}{r_{j+1}}\sum_{1\leqslant l\leqslant j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1\leqslant m\leqslant k} M_{m,j} + (\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_{j+1}})\sum_{1\leqslant l\leqslant j} r_l M_{l,j}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
&\underbrace{K_{X_j} + \Delta^+_j + \frac{1}{r_{j+1}}\sum_{1\leqslant l\leqslant j} r_l M_{l,j} + \sum_{j+1\leqslant m\leqslant k} M_{m,j}}_{=:\Delta^j}\\
&\quad\sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{\sum_{j+1\leqslant m\leqslant k} (r_m+1)M_{m,j} + F^+_j}_{=:D^j} + (1+\frac{1}{r_{j+1}})\underbrace{\sum_{1\leqslant l\leqslant j} r_l M_{l,j}}_{=:(1+\frac{1}{r_{j+1}})(\frac{1}{r_j}-\frac{1}{r_{j+1}})^{-1}H^j} \text{ et } \mathrm{Supp}(D^j) \subset \llcorner \Delta^j \lrcorner
\end{aligned}$$

Le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X_j/Z, \Delta^j)$ et au diviseur H^j donne encore le modèle minimal cherché. Finalement, on obtient un modèle minimal $(X_k/Z, \varphi_{k-1})$ de la paire $(X_{k-1}/Z, \Delta^+_{k-1} + \frac{1}{r_k}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} r_l M_{l,k-1})$. En particulier, $K_{X_k} + \Delta^+_k + \frac{1}{r_k}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} r_l M_{l,k}$ est nef$/Z$.

Étape 3. — On a

$$K_{X_k} + \underbrace{\Delta_k^+}_{=:\Delta^k} \sim_{\mathbf{R},Z} \underbrace{F_k^+}_{=:D^k} + \underbrace{r_1 M_{1,k} + \cdots + r_k M_{k,k}}_{=:r_k H^k} \text{ et } \mathrm{Supp}(D^k) \subset \llcorner \Delta^k \lrcorner.$$

On en déduit que la paire $(X_k/Z, \Delta_k^+)$ a un modèle minimal $(X_{k+1}/Z, \varphi_k)$ par le lemme 2.14 appliqué à la paire $(X_k/Z, \Delta^k)$ et au diviseur H^k.

Étape 4. — Il reste à constater que $(X_{k+1}/Z, \varphi_k \circ \cdots \varphi_0)$ est un modèle minimal de (X, Δ). On montre pour commencer que l'application birationnelle $\varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta$ strictement négative puis que toutes les composantes irréductibles de codimension 1 de $\mathrm{B}(D)$ sont contractées dans X_{k+1} de sorte que $\Delta_{k+1}^+ = \Delta_{k+1}$ où Δ_{k+1} est le transformé strict de Δ dans X_{k+1}. □

2.5. Non-annulation

L'objet de ce paragraphe est de montrer que le théorème de non-annulation est vrai en dimension n. *On suppose le théorème d'existence des modèles minimaux vrai en dimension $n-1$.*

On reprend les notations du théorème de non-annulation. On suppose X projective lisse et $\dim(Z) = 0$ pour simplifier. On se ramène à ce cas avec un peu de travail. L'idée est à nouveau de modifier la paire (28) (X, Δ) de façon à faire apparaître une composante irréductible dans Δ avec coefficient 1. La méthode est la suivante. Soit

$$K_X + \Delta = P(K_X + \Delta) + N(K_X + \Delta)$$

la décomposition de Zariski divisorielle de $K_X + \Delta$ (voir [**5**] et [**22**, Chapter 3]) où $N(K_X + \Delta)$ (29) est un $\mathbf{R}$-diviseur effectif et $P(K_X + \Delta)$ un $\mathbf{R}$-diviseur nef en codimension 1 (30) (31).

Supposons d'abord $P(K_X + \Delta) \equiv 0$ ou encore $K_X + \Delta \equiv N(K_X + \Delta)$. Quitte à perturber un peu Δ, on peut toujours supposer $\Delta \geqslant A$ où A est un $\mathbf{R}$-diviseur ample. Le $\mathbf{R}$-diviseur $A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta)$ est ample puisque l'amplitude est une propriété numérique et $A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta) \equiv A$ par hypothèse. Si $A' \sim_{\mathbf{R}} A + N(K_X + \Delta) - (K_X + \Delta)$ est général et $\Delta' := A' + \Delta - A$ alors (X, Δ') est klt

(28) Il faut aussi modifier X.

(29) Le $\mathbf{R}$-diviseur $N(K_X + \Delta)$ ne dépend que de $K_X + \Delta$ à équivalence numérique près.

(30) Le lieu non nef $\mathrm{B}_-(D) := \cup_{A \text{ ample}} \mathrm{B}(D + A)$ d'un $\mathbf{R}$-diviseur D sur X est *a priori* réunion au plus dénombrable de fermés ; D est dit nef en codimension 1 si $\mathrm{B}_-(D)$ est réunion au plus dénombrable de fermés de codimension au moins 2 dans X.

(31) Si D un $\mathbf{R}$-diviseur grand alors la décomposition de Zariski divisorielle est l'unique décomposition en somme de deux $\mathbf{R}$-diviseurs $P(D)$ et $N(D)$ respectivement nef en codimension un et effectif telle que l'application $\mathrm{H}^0(X, \llcorner mP(D) \lrcorner) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(X, \llcorner mD \lrcorner)$ soit bijective pour tout entier $m \geqslant 0$. Soient maintenant D un $\mathbf{R}$-diviseur pseudo-effectif et A un $\mathbf{R}$-diviseur ample. Alors $D + \varepsilon A$ est grand pour tout $\varepsilon > 0$ et la limite $\lim_{\varepsilon \to 0^+} N(D + \varepsilon A)$ existe et ne dépend pas de A ; on pose $N(D) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} N(D + \varepsilon A)$ et $P(D) = D - N(D)$.

et $K_X + \Delta' \sim_{\mathbf{R}} N(K_X + \Delta)$ est effectif. La paire (X, Δ') a donc un modèle minimal $(X_\bullet, \varphi_\bullet)$ (voir paragraphe précédent) qui est aussi un modèle minimal pour (X, Δ). Le corollaire 1.18 et la négativité de $\varphi_\bullet$ (voir remarque 1.14) donnent le résultat cherché dans ce cas.

Supposons maintenant $P(K_X + \Delta) \not\equiv 0$. Il existe alors un diviseur ample A' et un réel $c > 0$ tels que pour tout $m \gg 0$ (voir [**22**, Chapter 5, Theorem 1.11]),

$$\mathrm{h}^0(X, \llcorner m(K_X + \Delta)\lrcorner + A') \geqslant c \cdot m.$$

On peut toujours supposer $\Delta \geqslant \frac{1}{k}A'$ pour un entier $k > 0$ convenable, quitte à remplacer Δ par un diviseur qui lui est $\mathbf{R}$-linéairement équivalent ; posons $A := \frac{1}{k}A'$ et soit $x \in X$. On montre alors facilement qu'il existe un $\mathbf{R}$-diviseur effectif $G' \sim_{\mathbf{R}} m_0 k(K_X + \Delta) + A'$ tel que $\operatorname{mult}_x G > kn$ pour un entier $m_0 \gg 0$ convenable ; la paire (X, G) n'est pas lc au point x où $G := \frac{1}{k}G'$. Posons $\Delta_t = \frac{m_0 - t}{m_0}A + \Delta - A + \frac{t}{m_0}G$. On a

$$(t+1)(K_X + \Delta) \sim_{\mathbf{R}} K_X + \Delta_t$$

et la paire (X, Δ) est donc effective si et seulement si (X, Δ_t) l'est. Par construction, la paire (X, Δ_0) qui n'est autre que (X, Δ) est klt et la paire (X, Δ_{m_0}) n'est pas lc en x. Il existe donc une valuation v_F sur $\operatorname{Rat}(X)$ telle que $a_F(X, \Delta_{m_0}) < -1$. On en déduit l'existence d'une valuation $v_{F'}$ sur $\operatorname{Rat}(X)$ telle que $a_{F'}(X, \Delta_t) = -1$ et $\operatorname{discrep}(X, \Delta_t) \geqslant -1$ pour une certaine valeur du paramètre t : le diviseur F' est la composante avec coefficient 1 que nous cherchions à construire en début de paragraphe [32]. Au prix de quelques efforts de plus, on montre que le résultat cherché se déduit de l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2.18. — *Soit (X, Δ) une paire plt où X est une variété projective lisse et Δ un diviseur dont le support est à croisement normaux simples. On suppose $K_X + \Delta$ pseudo-effectif et $\Delta \geqslant A$ où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ample sur X. On suppose enfin que $S := \llcorner \Delta \lrcorner$ est irréductible et n'est contenu ni dans le support de $N(K_X + \Delta)$, ni dans le support de A. La paire (X, Δ) est alors effective, i.e. il existe un $\mathbf{R}$-diviseur effectif D sur X tel que $K_X + \Delta \sim_{\mathbf{R}, Z} D$.*

Preuve (esquisse). — Pour simplifier, nous allons supposer le diviseur Δ à coefficients rationnels. L'argument général est plus délicat.

Soit $H \sim_{\mathbf{Q}} A$ un $\mathbf{Q}$-diviseur ample tel que la paire $(X, \Delta + H)$ soit plt et $K_X + \Delta + H$ nef. Quitte à remplacer A par un $\mathbf{Q}$-diviseur qui lui est $\mathbf{Q}$-linéairement équivalent, on peut toujours supposer $A = \varepsilon H$ pour un rationnel $\varepsilon > 0$.

[32] Il faut choisir x en dehors de $\mathrm{B}_-(K_X + \Delta) = \mathrm{B}_-(P(K_X + \Delta)) \cup \operatorname{Supp}(N(K_X + \Delta))$.

Un MMP dirigé par H pour la paire (X, Δ) [33] produit des paires (X_i, Δ_i), des réels $0 \leqslant t_i \leqslant 1$ et des applications birationnelles $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ où Δ_{i+1} (resp. H_{i+1}) est le transformé strict de Δ_i (resp. H_i) dans X_{i+1} tels que $K_{X_i} + \Delta_i + t_i H_i$ soit nef.

Montrons que la suite $(t_i)_{i \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 lorsque i tend vers $+\infty$. Si $t_i > 0$ alors le diviseur $K_X + \Delta + t_i H$ est grand puique $K_X + \Delta$ est pseudo-effectif et H ample. Fixons un réel $t > 0$. Le théorème 2.12 et un argument de perturbation entraînent facilement que l'ensemble des classes d'isomorphie d'applications birationnelles $(X, \varphi_i \circ \cdots \circ \varphi_0)$ pour i tel que $t_i \geqslant t > 0$ est fini. Les modèles nef (X_i, φ_i) et (X_j, φ_j) de $(X, \Delta + t_i H)$ et $(X, \Delta + t_j H)$ respectivement n'étant pas isomorphes si $i \neq j$ (par exemple par la remarque 1.22), l'ensemble des indices i tels que $t_i \geqslant t$ est donc fini, et on a bien $\lim_{i \to +\infty} t_i = 0$.

Montrons ensuite que l'hypersurface S n'est contractée par aucune des applications birationnelles φ_i. Fixons $i \geqslant 1$ et supposons l'hypersurface S contractée par φ_{i-1}. Soit $t \in [0, t_i[\cap \mathbf{Q}$. Soient V une résolution commune des singularités de (X, Δ) et (X_i, Δ_i), π et π_i les morphismes de V sur X et X_i respectivement et

$$E_i(t) := \sum_F (a_F(X_i, \Delta_i + tH_i) - a_F(X, \Delta + tH))F \sim_{\mathbf{Q}} \pi^*(K_X + \Delta + tH) - \pi_i^*(K_{X_i} + \Delta_i + tH_i)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V ; $E_i(t)$ est effectif, π_i-exceptionnel et son support contient les transformés stricts des diviseurs sur X contractés dans X_i puisque l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta + tH$ strictement négative (voir remarque 1.14). On en déduit que, pour tout $m \in \mathbf{N}$ tel que $m(K_X + \Delta + tH)$ soit entier, toute section globale du faisceau $\mathcal{O}_V(m\pi^*(K_X + \Delta + tH))$ s'annule à l'ordre m le long de $E_i(t)$. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $m(K_X + \Delta + tH)$ soit entier et soit $B \sim_{\mathbf{Z}} m(K_X + \Delta + tH)$ un diviseur effectif. On a donc

$$\mathrm{mult}_S(B) \geqslant m(a_S(X_i, \Delta_i + tH_i) - a_S(X, \Delta + tH)) > 0$$

et $N(K_X + \Delta + tH) \geqslant (a_S(X_i, \Delta_i + tH) - a_S(X, \Delta + tH))S$. Finalement, $N(K_X + \Delta) \geqslant (a_S(X_i, \Delta_i) - a_S(X, \Delta))S$, une contradiction.

Si $t_i = 0$ pour un entier $i \geqslant 0$ alors (X_i, Δ_i) est un modèle minimal de (X, Δ) et le résultat cherché se déduit à nouveau du théorème 1.18 par un argument de perturbation. Supposons donc maintenant $t_i > 0$ pour tout $i \geqslant 0$.

Soit S_i le transformé strict de S dans X_i. Le lemme 2.13 entraîne maintenant que S_i ne rencontre pas le lieu exceptionnel de φ_i pour $i \geqslant i_0 \gg 0$ de sorte que, pour $i \geqslant i_0$, φ_i induit un isomorphisme d'un voisinage ouvert de S_i dans X_i sur un voisinage ouvert de S_{i+1} dans X_{i+1} ; en particulier, $S_i \simeq S_{i+1}$ pour un tel i. Posons $\Theta_i := \mathrm{Diff}_{S_i}(\Delta_i - S_i)$. Via les identifications $S_i \simeq S_{i+1}$, on a donc $\Theta_i = \Theta_{i+1}$ et,

[33] On vérifie, par un argument de perturbation, que les flips nécessaires sont en fait des pl-flips dont l'existence est acquise à ce stade de la démonstration.

puisque $K_{S_i} + \Theta_i + t_iH_{i|S_i}$ est nef et $\lim_{i\to+\infty} t_i = 0$, $K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}$ est nef. La paire (S_{i_0}, Θ_{i_0}) est klt puisque (X, Δ) est plt par hypothèse et $\Theta_{i_0} \geqslant A_{i_0|S_{i_0}}$ est grand ; un multiple entier convenable de $K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}$ est donc effectif par le théorème 1.18. Fixons un entier k_0 tel que $k_0(K_{X_{i_0}} + \Delta_{i_0})$ soit un diviseur de Cartier et tel que $\mathrm{h}^0(S_0, k_0(K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0})) \neq 0$.

Fixons $i \geqslant i_0$ tel que $(k_0 - 1)t_i \leqslant \varepsilon$. Écrivons

$$k_0(K_{X_i}+\Delta_i)-S_i = K_{X_i}+(1-(k_0-1)t_i\varepsilon^{-1})A_i+\Delta_i-S_i-A_i+(k_0-1)(K_{X_i}+\Delta_i+t_iH_i)$$

où A_i est le transformé strict de A dans X_i.

La paire $(X_i, (1-(k_0-1)t_i\varepsilon^{-1})A_i+\Delta_i-S_i-A_i)$ étant klt et $(k_0-1)(K_{X_i}+\Delta_i+t_iH_i)$ étant nef et grand, $\mathrm{h}^1(X_i, k_0(K_{X_i} + \Delta_i) - S_i) = 0$ par le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg ([**15**, Theorem 1.2.5 et Remark 1.2.6]) ; la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte [(34)]

$$0 \to \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i) - S_i)) \to \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i)) \to \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i)) \to 0$$

donne ensuite la surjectivité de l'application de restriction

$$\mathrm{H}^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))) \to \mathrm{H}^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i)).$$

Enfin, $\mathrm{H}^0(S_i, \mathcal{O}_{S_i}(k_0(K_{S_i} + \Theta_i)) \simeq H^0(S_{i_0}, k_0(K_{S_{i_0}} + \Theta_{i_0}))$ puisque $i \geqslant i_0$ et finalement $\mathrm{h}^0(X_i, \mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))) \neq 0$. D'où $\mathrm{h}^0(X, \mathcal{O}_X(k_0(K_X + \Delta))) \neq 0$ puisque l'application birationnelle $\varphi_{i-1} \circ \cdots \circ \varphi_0$ est $K_X + \Delta$ négative. $\square$

2.6. Existence des pl-flips

Ici encore, *on suppose le théorème d'existence de modèles minimaux vrai en dimension* $n-1$. L'objet de ce paragraphe est de donner les grandes lignes de la preuve du théorème 2.10.

La notion de pl-flip est introduite par Shokurov dans [**26**] où il montre que l'existence des flips en dimension n se déduit de l'existence des pl-flips en dimension n et du MMP en dimension $n-1$ [(35)]. Shokurov propose dans [**28**] la stratégie suivante pour démontrer l'existence des pl-flips.

Les données sont celles du théorème 2.10. Fixons un entier $k_0 > 0$ tel que $k_0\Delta$ soit à coefficients entiers. L'existence du flip de c est locale sur Y et si *on suppose* Y *affine,* ce que nous ferons dans la suite de ce texte, est équivalente à montrer que l'algèbre

$$R(X, \Delta)_{(k_0)} := \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta)))$$

(34) La suite de faisceaux est bien exacte puisque, S_i ne rencontrant pas le lieu exceptionnel de φ_i, le faisceau réflexif $\mathcal{O}_{X_i}(k_0(K_{X_i} + \Delta_i))$ est localement libre au voisinage de S_i.

(35) La réduction n'est prouvée qu'en dimension 3 ; l'argument en toute dimension est donné dans [**17**, Chapter 4].

est de type fini sur l'anneau $A := \mathrm{H}^0(Y, \mathcal{O}_Y)$ [36] (voir [**15**, Proposition 5.1.11]).

L'algèbre restreinte est définie, suivant Shokurov, par

$$R_S(X, \Delta)_{(k_0)} := \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathrm{Im}(\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))) \to \mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))_{|S}))$$

où les flèches sont les applications de restriction des sections.

LEMME 2.19 (Shokurov). — *L'algèbre $R(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A si et seulement si $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ l'est.*

Il suffit donc maintenant de montrer que l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A et le problème en dimension n est réduit à un énoncé du même type en dimension $n-1$. Shokurov exhibe deux propriétés de ces algèbres [37], et conjecture grosso modo que toutes les algèbres de ce type sont de type fini (voir [**28**, Conjecture 4.39]). Il obtient ainsi une nouvelle preuve de l'existence des flips en dimension 3 et obtient également l'existence des flips en dimension 4 ([**28**]).

Hacon et McKernan suivent la même stratégie et mettent en évidence de nouvelles propriétés de l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ qui permettent ensuite de montrer que $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A : de façon plus précise, ils montrent qu'il existe une variété lisse T/Y et un diviseur D sur T, semi-ample, tels que l'algèbre $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ soit isomorphe à l'algèbre $\bigoplus_{k \geqslant 0} \mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(kD))$ qui est classiquement de type fini sur A.

DÉFINITION 2.20. — *Soient T une variété lisse et $(B_m)_{m \in \boldsymbol{N}}$ une suite sous-additive* [38] *de diviseurs entiers sur T telle que la suite $(\frac{B_m}{m})_{m \in \boldsymbol{N}^*}$ soit majorée* [39].

1. *Le suite $(B_m)_{m \in \boldsymbol{N}}$ est dite adjointe s'il existe une suite de $\boldsymbol{Q}$-diviseurs effectifs $(\Theta_m)_{m \in \boldsymbol{N}}$ et un entier $k_0 > 0$ tels que*
   (a) *$B_m = mk_0(K_T + \Theta_m)$ pour un diviseur canonique K_T sur T convenable et tout $m \in \boldsymbol{N}$ et*
   (b) *(T, Θ) soit une paire klt où Θ est la limite de la suite $(\Theta_m)_{m \geqslant 1}$* [40].

(36) On montre facilement que si $k_0 > 0$ et $k_1 > 0$ sont deux entiers tels que $k_0\Delta$ et $k_1\Delta$ soient à coefficients entiers alors $R(X, \Delta)_{(k_0)}$ est de type fini sur A si et seulement si $R(X, \Delta)_{(k_1)}$ l'est.

(37) Ce n'est pas tout à fait correct : ces propriétés sont satisfaites par une extension entière naturelle de $R_S(X, \Delta)_{(k_0)}$ et on peut montrer qu'il est équivalent de prouver que l'une ou l'autre est de type fini sur A.

(38) Une suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de diviseurs sur T est dite sous-additive si $B_i + B_j \leqslant B_{i+j}$ pour tous $i, j \geqslant 0$.

(39) Une suite $(B_m)_{m \in \mathbf{N}}$ de diviseurs sur T est dite majorée s'il existe un diviseur B sur T tel que $B_m \leqslant B$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

(40) La limite doit être comprise comme la limite coefficient par coefficient ; le diviseur Θ est à coefficients réels.

2. *Posons* $D_m = \frac{\mathrm{Mob}(B_m)}{m}$ *pour* $m \in \boldsymbol{N}^*$ [41]. *La suite* $(B_m)_{m\in \boldsymbol{N}}$ *est dite semi-ample si le* $\boldsymbol{R}$*-diviseur* $\lim_{m\to+\infty} D_m$ *est semi-ample.*
3. *La suite* $(B_m)_{m\in \boldsymbol{N}}$ *est dite saturée s'il existe un* $\boldsymbol{Q}$*-diviseur* F *sur* T *et un entier* $s > 0$ *tels que*
   (a) $\ulcorner F \urcorner \geqslant 0$ *et*
   (b) $\mathrm{Mob}(\ulcorner jD_i + F\urcorner) \leqslant jD_{sj}$ *pour tous* $i, j > 0$.

La saturation est une propriété de nature arithmétique ; supposons que T soit une courbe affine, $B_m = b_m \cdot t$ où t est un point de T et $b_m \in \mathbf{Q}$ et $F = a \cdot t$ où a est un rationnel > -1. Posons $d_m = \frac{b_m}{m}$ pour $m > 0$ et $d = \lim_{m\to+\infty} d_m = \sup_{m\in\mathbf{N}} d_m \in \mathbf{R}$. La condition de saturation est l'inégalité

$$\ulcorner jd_i + a\urcorner \leqslant jd_{sj}$$

et, en passant à la limite lorsque $i \to +\infty$,

$$\ulcorner jd + a\urcorner \leqslant jd_{sj}.$$

On peut supposer $a \leqslant 0$ quitte à remplacer a par $a - \ulcorner a\urcorner$. Supposons $d \notin \mathbf{Q}$. Alors l'ensemble des parties fractionnaires $\{jd\}$ pour $j \in \mathbf{N}$ est dense dans $[0,1]$ et il existe donc $j \in \mathbf{N}$ tel que $\{jd\} > -a$. Il vient

$$jd_{sj} \leqslant jd < \ulcorner jd + a\urcorner \leqslant jd_{sj},$$

une contradiction. Il est facile de voir ensuite que $d_{sj} = d$ si $jd \in \mathbf{Z}$. Un argument d'approximation diophantienne analogue donne le résultat suivant.

LEMME 2.21. — *Soient* T *une variété lisse et* $(B_m)_{m\in\boldsymbol{N}}$ *une suite sous-additive de diviseurs entiers sur* T *telle que la suite* $(\frac{B_m}{m})_{m\in\boldsymbol{N}^*}$ *soit majorée. On suppose la suite* $(B_m)_{m\in\boldsymbol{N}}$ *saturée et semi-ample. Soient* $D_m = \frac{\mathrm{Mob}(B_m)}{m}$ *pour* $m \in \boldsymbol{N}^*$ *et* $D = \lim_{m\to+\infty} D_m$. *Alors il existe un entier* $m_0 > 0$ *tel que, pour tout* $m \in \boldsymbol{N}$, $D_{mm_0} = D$ *; en particulier,* D *est un* $\boldsymbol{Q}$*-diviseur.*

Les données sont toujours celles du théorème 2.10. Soit $\pi : V \to X$ une résolution des singularités de (X,Δ). Posons

$$\Gamma = \max(\pi^*(K_X+\Delta)-K_V,0) = -\sum_{a_F(X,\Delta)<0} a_F(X,\Delta)F \text{ et } E := K_V+\Gamma-\pi^*(K_X+\Delta)$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de V. On a

$$K_V + \Gamma = \pi^*(K_X + \Delta) + E,$$

Γ et E sont effectifs, E est π-exceptionnel et enfin, Γ et E n'ont aucune composante irréductible en commun. Soit T le transformé strict de S dans V. L'isomorphisme

(41) La partie mobile $\mathrm{Mob}(B)$ d'un $\mathbf{R}$-diviseur B sur T est le $\mathbf{R}$-diviseur $B - \mathrm{Fix}(B)$.

naturel $\mathrm{H}^0(X, mk_0(K_X+\Delta)) \simeq \mathrm{H}^0(V, mk_0(K_V+\Gamma))$ pour tout $m \geqslant 0$ induit un isomorphisme

$$R_S(X,\Delta)_{(k_0)} \simeq R_T(V,\Gamma)_{(k_0)}.$$

Le résultat observé par Hacon et M^c^Kernan est le suivant.

PROPOSITION 2.22. — *Il existe une résolution des singularités $\pi : V \to X$ de (X,Δ), une suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de diviseurs sur T adjointe et un entier $s' > 0$ tels que la suite $(s'B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ soit semi-ample et saturée*[(42)] *et tels que les A-algèbres graduées $R_T(V,\Gamma)_{(k_0)}$*[(43)] *et $\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(B_m))$ soient isomorphes*[(44)].

Preuve du théorème 2.10. — On considère la suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ donnée par la proposition 2.22 : les algèbres $R_S(X,\Delta)_{(k_0)}$ et $R_T(V,\Gamma)_{(k_0)}$ étant isomorphes, il suffit de montrer que l'algèbre $\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(B_m))$ est de type fini sur A. Posons $M_m = \mathrm{Mob}(B_m)$. La suite $(M_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est également sous-additive et l'algèbre graduée correspondante $\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(M_m))$ est naturellement isomorphe à la précédente.

Supposons $s' = 1$ pour simplifier, l'argument général n'étant pas beaucoup plus difficile. La suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ étant semi-ample et saturée, il existe un entier $m_0 > 0$ et un $\mathbf{Q}$-diviseur D semi-ample tels que, pour tout $m \geqslant 0$, $M_{mm_0} = mm_0 D$ (voir lemme 2.21). Quitte à remplacer m_0 par un multiple entier convenable, on peut toujours supposer $m_0 D$ entier et le système linéaire correspondant sans point base et enfin, quitte à remplacer k_0 par $k_0 m_0$, on peut supposer $m_0 = 1$. On a

$$\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(M_m)) = \bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(mD))$$

où $|D|$ est sans point base et toute algèbre de ce type est de type fini sur A (voir par exemple le lemme 2.2). □

Nous terminons ce texte en donnant les grandes lignes de la preuve de la proposition 2.22.

Preuve de la proposition 2.22 (esquisse). — L'outil principal est un résultat d'extension des sections généralisant les travaux de Siu sur l'invariance des plurigenres ([**29**] et [**30**]).

(42) Nous n'utiliserons que les deux dernières propriétés de la suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ pour démontrer le théorème 2.10.
(43) Je triche un peu ici, il faut éventuellement remplacer l'entier k_0 introduit en début de paragraphe par un multiple entier convenable.
(44) La structure d'algèbre sur $\bigoplus_{m\geqslant 0}\mathrm{H}^0(T,\mathcal{O}_T(B_m))$ est induite par le produit sur $\mathrm{Rat}(T)$: si $u, v \in \mathrm{Rat}(T)\setminus\{0\}$ sont telles que $\mathrm{div}(u) + B_i \geqslant 0$ et $\mathrm{div}(v) + B_j \geqslant 0$ pour des entiers i et j convenables alors $\mathrm{div}(uv) + B_{i+j} \geqslant \mathrm{div}(u) + B_i + \mathrm{div}(v) + B_j \geqslant 0$ par sous-additivité de la suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$.

THÉORÈME 2.23. — *Soit* $(V/Y, \Gamma)$ *une paire plt où* Γ *est un* $\mathbf{Q}$*-diviseur,* Y *affine,* V *lisse,* $\mathrm{Supp}(\Gamma)$ *à croisements normaux simples et* $T := \llcorner \Gamma \lrcorner$ *irréductible. Soit* $k > 0$ *un entier tel que* $k\Gamma$ *soit à coefficients entiers.*

1. *On suppose* $\Gamma - T \sim_{\mathbf{Q}} A + B$ *où* A *est ample,* B *effectif et* $T \not\subset \mathrm{Supp}(B)$.
2. *On suppose, de plus, qu'aucune intersection non vide de composantes irréductibles de* Γ *n'est contenue dans l'ensemble base* $\mathrm{Bs}(k(K_V+\Gamma))$ *du système linéaire* $|k(K_V + \Gamma)|$.

Alors l'application $\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(k(K_V + \Gamma))) \to \mathrm{H}^0(T, \mathscr{O}_V(k(K_V + \Gamma))_{|T})$ *de restriction des sections est surjective.*

Fixons une forme différentielle méromorphe ω_X de degré maximal avec un pôle simple au point générique de S et posons $K_X = \mathrm{div}(\omega_X)$ et $K_S = \mathrm{div}(\omega_S)$ où ω_S est le résidu de Poincaré de ω_X au point générique de S ; ayant identifié les espaces vectoriels $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(mk_0(K_X + \Delta)))$ et $\mathrm{H}^0(S, \mathscr{O}_X(mk_0(K_X + \Delta))_{|S})$ avec des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{Rat}(X)$ et $\mathrm{Rat}(S)$ respectivement, l'application de restriction à S des sections s'identifie avec l'application de restriction des fonctions rationnelles régulières au point générique de S.

Quitte à perturber Δ, on peut toujours supposer $\Delta = S + A + B$ où A est un $\mathbf{Q}$-diviseur ample et B un $\mathbf{Q}$-diviseur effectif ne contenant pas S dans son support [(45)].

Soit $k_1 > 0$ un entier tel que $k_1 A$ soit très ample et $k_1\Delta$ un diviseur entier et supposons, quitte à remplacer A par un $\mathbf{Q}$-diviseur qui lui est $\mathbf{Q}$-linéairement équivalent, que $k_1 A$ soit très général dans $|k_1 A|$ [(46)].

Soit maintenant $\pi : V \to X$ une résolution des singularités de $(X, \Delta - A)$ telle que les composantes irréductibles du diviseur $\max(\pi^*(K_X + \Delta - A) - K_V, 0) - T$ soient disjointes (voir [**12**, Lemma 6.5]), où T désigne le transformé strict de S dans V et K_V le diviseur de ω_X sur V, vue comme forme différentielle méromorphe sur V.

Le diviseur $k_1 A$ étant très général dans $|k_1 A|$, π est une résolution des singularités de (X, Δ), $\pi^* A$ le transformé strict de A et

$$\Gamma := \max(\pi^*(K_X + \Delta) - K_V, 0) = \max(\pi^*(K_X + \Delta - A) - K_V, 0) + \pi^* A.$$

Soit $(\Theta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ la suite de $\mathbf{Q}$-diviseurs sur T définie de la façon suivante. Pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, le diviseur $mk_1\Theta_m$ est le plus petit diviseur entier

$$0 \leqslant mk_1\Theta_m \leqslant mk_1(\Gamma - T) \cap T$$

tel que l'application de restriction

$$\mathrm{H}^0(V, \mathscr{O}_V(mk_1(K_V + \Gamma))) \to \mathrm{H}^0(T, \mathscr{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T)))$$

(45) Un diviseur premier sur X est mobile puisque Y est affine.

(46) Le diviseur A ne doit en particulier contenir aucune composante irréductible de l'ensemble base de l'un des systèmes linéaires $|mk_1(K_X + \Delta)|$ pour $m \geqslant 1$.

soit à valeurs dans [47]

$$\mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m))) \subset \mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T))).$$

On pose $\Theta_0 = 0$.

La suite $(m\Theta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est sous-additive, la suite $(\Theta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ majorée par $(\Gamma - T) \cap T$ et la paire (T, Θ) klt, où $\Theta := \lim_{m\to+\infty} \Theta_m$.

Nous allons maintenant vérifier que, pour tout $m \geqslant 0$, l'image de l'application de restriction est exactement $\mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m)))$ au moyen du théorème 2.23.

Fixons un entier $m \geqslant 1$. Montrons que la condition 2 du théorème d'extension est satisfaite quitte éventuellement à devoir modifier la paire (V, Γ) convenablement. Le diviseur k_1A étant très général dans $|k_1A|$ et T étant mobile, ni π^*A ni T ne sont contenus dans $\mathrm{Bs}(mk_1(K_V+\Gamma))$. Les seules intersections de composantes irréductibles de Γ éventuellement contenues dans $\mathrm{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma))$ sont donc les composantes irréductibles de $\Gamma - \pi^*A - T$ et les composantes irréductibles de $T \cap (\Gamma - \pi^*A - T)$ puisque les composantes irréductibles de $\Gamma - \pi^*A - T$ sont disjointes par choix de $\pi : V \to X$.

Posons $F_m := \mathrm{Fix}(mk_1(K_V + \Gamma))$ et $\Gamma_m = \max(\Gamma - \frac{F_m}{mk_1}, 0)$. On vérifie facilement que Γ_m et $\mathrm{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$ n'ont aucune composante irréductible en commun puis que les composantes irréductibles de $\Gamma_m - \pi^*A - T$ sont encore disjointes car $\Gamma_m \leqslant \Gamma$ et enfin que si $u \in \mathrm{Rat}(V) \setminus \{0\}$ satisfait $\mathrm{div}(u) + mk_1(K_V + \Gamma) \geqslant 0$ alors $\mathrm{div}(u) + mk_1(K_V + \Gamma_m) \geqslant 0$ puisque $mk_1(\Gamma - \Gamma_m) \leqslant \mathrm{Fix}(mk_1(K_V + \Gamma))$. On peut donc remplacer Γ par Γ_m : aucune composante irréductible de Γ_m n'est maintenant contenue dans $\mathrm{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$.

La méthode utilisée pour traiter les composantes irréductibles de $T \cap (\Gamma_m - \pi^*A - T)$ contenues dans $\mathrm{Bs}(mk(K_V + \Gamma_m))$ est analogue. Supposons donc que l'une des composantes irréductibles K de $T \cap (\Gamma_m - T)$ soit contenue dans $\mathrm{Bs}(mk_1(K_V + \Gamma_m))$ et considérons $\pi_{m,1} : V_{m,1} \to V$ l'éclatement de V le long de K.

Soit $\Phi'_{m,1} = \pi^*_{m,1}(K_V + \Gamma_m) - K_{V_{m,1}}$ ($\Phi'_{m,1}$ est effectif) et posons $\Phi_{m,1} = \max(\Phi'_{m,1} - \frac{F_{m,1}}{mk}, 0)$ où $F_{m,1} = \mathrm{Fix}(mk(K_{V_{m,1}} + \Phi'_{m,1}))$.

Le transformé strict dans $V_{m,1}$ de la composante irréductible de $\Gamma_m - T$ contenant K est disjoint du transformé strict $T_{m,1}$ de T dans $V_{m,1}$ mais l'une des composantes irréductibles de $T_{m,1} \cap \pi^{-1}_{m,1}(K)$ ou $(\Phi_{m,1} - T_{m,1}) \cap \pi^{-1}_{m,1}(K)$ est éventuellement contenue dans $\mathrm{Bs}(mk_1(K_{V_{m,1}} + \Phi_{m,1}))$; on montre, en répétant l'opération un nombre fini de fois, qu'il existe une suite finie d'éclatements $\pi_m : V_m \to V$ de centres lisses de dimension $n-2$ contenus dans ou disjoints de T et ses transformés stricts successifs telle que

[47] Les diviseurs K_V et K_T sont les diviseurs sur V et T de ω_X et ω_S respectivement.

$\mathrm{Bs}(mk_1(K_{V_m} + \Phi_m))$ ne contienne aucune intersection non vide de composantes irréductibles de Φ_m, où $\Phi_m = \max(\Phi'_m - \frac{F_m}{mk}, 0)$ avec $\Phi'_m = \max(\pi_m^*(K_V + \Gamma_m) - K_{V_m}, 0)$ et $F_m = \mathrm{Fix}(mk(K_{V_m} + \Phi'_m))$.

Notons T_m le transformé strict de T dans V_m. Le diviseur $\pi_m^* A$ étant le transformé strict de A dans V_m, $\Phi_m \geqslant \pi_m^* A$. Soit E_m un diviseur effectif π_m-exceptionnel tel que $\pi_m^* A - E_m$ soit ample. On a $\Phi_m - T_m \geqslant (\pi_m^* A - E_m) + E_m$ et la condition 1 du théorème d'extension est également satisfaite.

En conclusion, l'image de l'application de restriction

$$\mathrm{H}^0(V_m, \mathcal{O}_{V_m}(mk_1(K_{V_m} + \Phi'_m))) \to \mathrm{H}^0(T_m, \mathcal{O}_{T_m}(mk_1(K_{T_m} + (\Phi'_m - T_m) \cap T_m)))$$

est exactement $\mathrm{H}^0(T_m, \mathcal{O}_{T_m}(mk_1(K_{T_m} + (\Phi_m - T_m) \cap T_m)))$.

Le point essentiel est le suivant : T_m est isomorphe à T puisque V_m est obtenue en éclatant des hypersurfaces de T et de ses transformés stricts successifs et il n'est plus très difficile de se convaincre que l'image de l'application de restriction

$$\mathrm{H}^0(V, \mathcal{O}_V(mk_1(K_V + \Gamma))) \to \mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + (\Gamma - T) \cap T)))$$

est le sous-espace $\mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(mk_1(K_T + \Theta_m)))$. On pose $B_m := mk_1(K_T + \Theta_m)$ pour $m \geqslant 0$; la suite $(B_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est adjointe et les A-algèbres graduées $R_T(V, \Gamma)_{(k_1)}$ et $\bigoplus_{m\geqslant 0} \mathrm{H}^0(T, \mathcal{O}_T(B_m))$ sont isomorphes.

L'hypothèse de récurrence n'est utilisée que pour prouver le résultat suivant.

LEMME 2.24. — *Il existe un morphisme birationnel projectif $T_1 \to T$ où T_1 est une variété lisse et un entier $s > 0$ tels que pour tout morphisme birationnel projectif $R \to T_1$ et tout entier $m \geqslant 1$,*

1. *le système linéaire* $\mathrm{Mob}(mk_1 s\varpi_R^*(K_T + \Theta_m))$ *soit sans point base et*
2. *le $\mathbf{R}$-diviseur $D = \lim_{m\to+\infty} \frac{\mathrm{Mob}(mk_1 s\varpi_R^*(K_T + \Theta_m))}{mk_1}$ semi-ample, où ϖ_R est le morphisme $R \to T$.*

On considère maintenant $\varpi : W \to V$ une résolution des singularités de (V, Γ) telle que, si R désigne le transformé strict de T dans W, le morphisme induit $\varpi_R : R \to T$ se factorise à travers $T_1 \to T$ et telle que les composantes irréductibles du diviseur $\max(\varpi^*(K_V + \Gamma - \pi^* A) - K_W, 0) - R$ soient disjointes. Posons

$$\Lambda = \max(\varpi^*(K_V + \Gamma) - K_W, 0).$$

Soit $(\Xi_m)_{m\in\mathbf{N}}$ la suite de $\mathbf{Q}$-diviseurs sur R définie comme la suite $(\Theta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ l'a été : pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, le diviseur $mk_1\Xi_m$ est le plus petit diviseur entier $0 \leqslant mk_1\Xi_m \leqslant mk_1(\Lambda - R) \cap R$ tel que l'application de restriction

$$\mathrm{H}^0(W, \mathcal{O}_W(mk_1(K_W + \Lambda))) \to \mathrm{H}^0(R, \mathcal{O}_R(mk_1(K_R + (\Lambda - R) \cap R)))$$

soit à valeurs dans $\mathrm{H}^0(R, \mathcal{O}_R(mk_1(K_R+\Xi_m)))$ et on pose $\Xi_0 = 0$. On pose également $C_m = mk_1(K_R + \Xi_m)$ pour $m \geqslant 0$.

Il n'est pas très difficile de se convaincre que, par les arguments que nous venons de donner, les A-algèbres graduées $R_T(W, \Lambda)_{(k_1)}$ et $\bigoplus_{m\geqslant 0} \mathrm{H}^0(R, \mathcal{O}_R(C_m))$ sont isomorphes.

On montre ensuite facilement que pour tout $m \geqslant 0$

$$\mathrm{Mob}(mk_1(K_R + \Xi_m)) = \mathrm{Mob}(\varpi_R^*(mk_1(K_T + \Theta_m))).$$

Il s'ensuit que la suite $(sC_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est semi-ample par le point 2 du lemme 2.24. Au prix de quelques efforts de plus, on montre enfin que la suite $(sC_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est saturée, le diviseur F étant la restriction à R du diviseur

$$\sum_F a_F(X, \Delta)F - R$$

où la somme porte sur l'ensemble des diviseurs premiers F de W (48) de la façon suivante. On montre, par un argument de « descente » utilisant le point 1 du lemme 2.24, qu'il suffit de vérifier la propriété sur un modèle birationnel convenable $R_{i,j}$ de R ; $R_{i,j}$ est en fait le transformé strict de R dans un modèle $W_{i,j}$ de W et, en utilisant le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, on montre finalement que la propriété recherchée se réduit à l'assertion facile suivante : une fonction rationnelle sur $W_{i,j}$ avec au pire des pôles le long du lieu exceptionnel de $W_{i,j} \to W$ est régulière. □

RÉFÉRENCES

[1] V. Alexeev, C. Hacon & Y. Kawamata – Termination of (many) 4-dimensional log flips, *Invent. Math.* **168** (2007), p. 433–448.

[2] F. Ambro – Quasi-log varieties, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **240** (2003), p. 220–239.

[3] C. Birkar – On existence of log minimal models, prépublication arXiv:0706.1792, 2007.

[4] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon & J. McKernan – Existence of minimal models for varieties of log general type, prépublication arXiv:math/0610203, 2006.

[5] S. Boucksom – Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 45–76.

[6] A. Corti (éd.) – *Flips for 3-folds and 4-folds*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 35, Oxford Univ. Press, 2007.

(48) La condition $\ulcorner F \urcorner \geqslant 0$ dans la définition 2.20 se déduit de l'hypothèse (X, Δ) plt.

[7] O. DEBARRE – Classes de cohomologie positives dans les variétés kählériennes compactes (d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell *et al.*), Séminaire Bourbaki, vol. 2004/2005, exposé n° 943, *Astérisque* **307** (2006), p. 199–228.

[8] R. ELKIK – Rationalité des singularités canoniques, *Invent. Math.* **64** (1981), p. 1–6.

[9] O. FUJINO – Termination of 4-fold canonical flips, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004), p. 231–237.

[10] ———, Notes on the log minimal model program, prépublication arXiv:0705.2076, 2007.

[11] O. FUJINO & S. MORI – A canonical bundle formula, *J. Differential Geom.* **56** (2000), p. 167–188.

[12] C. HACON & J. McKERNAN – On the existence of flips, prépublication arXiv:math/0507597, 2005.

[13] Y. KAWAMATA – Termination of log flips for algebraic 3-folds, *Internat. J. Math.* **3** (1992), p. 653–659.

[14] ———, On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces, *Internat. J. Math.* **8** (1997), p. 665–687.

[15] Y. KAWAMATA, K. MATSUDA & K. MATSUKI – Introduction to the minimal model problem, in *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, North-Holland, 1987, p. 283–360.

[16] S. L. KLEIMAN – Toward a numerical theory of ampleness, *Ann. of Math.* **84** (1966), p. 293–344.

[17] J. KOLLÁR – Flips and abundance for algebraic threefolds, *Astérisque* **211** (1992), p. 1–258.

[18] ———, Singularities of pairs, in *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., 1997, p. 221–287.

[19] J. KOLLÁR & S. MORI – *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 134, Cambridge Univ. Press, 1998.

[20] S. MORI – Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, *Ann. of Math.* **116** (1982), p. 133–176.

[21] ———, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 117–253.

[22] N. NAKAYAMA – *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs, vol. 14, Mathematical Society of Japan, 2004.

[23] M. Reid – Minimal models of canonical 3-folds, in *Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 1, North-Holland, 1983, p. 131–180.

[24] ______, Young person's guide to canonical singularities, in *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 46, Amer. Math. Soc., 1987, p. 345–414.

[25] V. V. Shokurov – A nonvanishing theorem, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **49** (1985), p. 635–651.

[26] ______, Three-dimensional log perestroikas, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **56** (1992), p. 105–203.

[27] ______, 3-fold log models, *J. Math. Sci.* **81** (1996), p. 2667–2699, Algebraic geometry, 4.

[28] ______, Prelimiting flips, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **240** (2003), p. 82–219.

[29] Y.-T. Siu – Invariance of plurigenera, *Invent. Math.* **134** (1998), p. 661–673.

[30] ______, Extension of twisted pluricanonical sections with plurisubharmonic weight and invariance of semipositively twisted plurigenera for manifolds not necessarily of general type, in *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, Springer, 2002, p. 223–277.

[31] ______, A general non-vanishing theorem and an analytic proof of the finite generation of the canonical ring, prépublication arXiv:math/0610740, 2006.

[32] E. Szabó – Divisorial log terminal singularities, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **1** (1994), p. 631–639.

Stéphane DRUEL

Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
Université de Grenoble I
BP 74
F-38402 Saint-Martin d'Hères Cedex
E-mail : Stephane.Druel@ujf-grenoble.fr