Astérisque

L. Hakan Eliasson

# Résultats non-perturbatifs pour l'équation de Schrödinger et d'autres cocycles quasi-périodiques [d'après Avila, Bourgain, Jitomirskaya, Krikorian, Puig]

*Astérisque*, tome 326 (2009), Séminaire Bourbaki, exp. nº 988, p. 197-217

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2009__326__197_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, n° 988, p. 197 à 217

# RÉSULTATS NON-PERTURBATIFS POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER ET D'AUTRES COCYCLES QUASI-PÉRIODIQUES [d'après Avila, Bourgain, Jitomirskaya, Krikorian, Puig]

par **L. Hakan ELIASSON**

## INTRODUCTION

Soit $G$ un groupe de matrices, et soit $\mathbb{T}^d$ le tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la métrique

$$\|[x]\| = \inf_{k\in\mathbb{Z}^d} |x-k|\,.$$

Soit $\alpha$ un élément de $\mathbb{T}^d$ tel que $\|<k,\alpha>\| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que l'orbite $\{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense en $\mathbb{T}^d$.

À une fonction $A : \mathbb{T}^r \to G$ continue et homotope à l'identité, on associe l'homéomorphisme

$$(\alpha, A) : \begin{cases} \mathbb{T}^d \times G \to \mathbb{T}^d \times G \\ (\theta, X) \mapsto (\theta+\alpha, A(\theta)X). \end{cases}$$

Alors l'application itérée $(\alpha, A)^n$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + n\alpha, A_n(\theta)X) \quad n \in \mathbb{Z},$$

où

$$A_n(\theta) = \begin{cases} A(\theta+(n-1)\alpha)\ldots A(\theta) & n \geq 1 \\ I & n = 0 \\ A(\theta+n\alpha)^{-1}\ldots A(\theta-\alpha)^{-1} & n \leq -1. \end{cases}$$

La famille des matrices $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{n+m}(\theta) = A_n(\theta+m\alpha)A_m(\theta).$$

*Remarque 0.1.* — Il y a aussi une version de cocycle *à temps continu*. Soit $g$ l'algèbre de Lie de $G$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que $|<k,\alpha>| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que l'orbite $\{[t\alpha] : t \in \mathbb{R}\}$ est dense en $\mathbb{T}^d$. Soit $A : \mathbb{T}^d \to g$ continu ; considérons le système autonome

$$\theta' = \alpha,\ X' = A(\theta)X$$

sur $\mathbb{T}^d \times G$. Son flot $(\alpha, A)^t$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + [t\alpha], A_t(\theta)X) \quad t \in \mathbb{R},$$

et la famille des matrices $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{t+s}(\theta) = A_t(\theta + s\alpha)A_s(\theta).$$

La classe la plus importante, ou du moins la plus étudiée, est le *cocycle de Schrödinger* $(\alpha, A(\cdot\,, E))$ où

$$A(\theta, E) = \begin{pmatrix} V(\theta) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa dynamique est liée aux propriétés spectrales de *l'opérateur de Schrödinger* $H_\theta : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$,

$$H_\theta u(n) = -\Delta u(n) + V(\theta + n\alpha)u(n),$$

où $\Delta$ est le laplacien

$$\Delta u(n) = u(n+1) + u(n-1).$$

Dans cet article, nous allons traiter de cocycles de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou analytique à fréquences diophantiennes $\alpha$, c'est-à-dire que $\alpha$ satisfait une *condition diophantienne*

$$DC(\kappa, \tau) : \qquad \|\langle k, \alpha\rangle\| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0.$$

Il y a des résultats importants pour les cocycles qui sont seulement continus et/ou ont des fréquences qui ne sont pas diophantiennes (voir par exemple [**3, 20, 43**]) mais les techniques pour les étudier sont différentes et ne seront pas discutées ici.

Des méthodes de type KAM ont été utilisées avec succès depuis une cinquantaine d'années pour étudier la dynamique des cocycles quasi-périodiques. Cette théorie perturbative n'est valable qu'au voisinage d'un cocycle constant, et la taille de ce voisinage dépend des propriétés arithmétiques des fréquences.

Récemment deux approches beaucoup plus globales ont été développées. L'une est basée sur la renormalisation et a donné des résultats globaux, dus à R. Krikorian et A. Avila, pour des cocycles à valeurs dans $SU(2)$ et $SL(2, \mathbb{R})$. L'autre est basée sur des résultats de localisation dus à J. Bourgain et S. Jitomirskaya qui, combinés à un argument de dualité, ont permis à J. Puig de décrire la dynamique du cocycle de Schrödinger dans un cadre semi-global. Ces méthodes restent (pour le moment) restreintes à des cocycles avec une fréquence dans $\mathbb{T}$.

# 1. RÉDUCTIBILITÉ

## 1.1. Définition

Deux cocycles $(\alpha, A)$ et $(\alpha, A')$ sont *conjugués* s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{T}^d \to G$ telle que

$$(0, Z)^{-1} \circ (\alpha, A)^n \circ (0, Z) = (\alpha, A')^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ou, de manière équivalente,

$$Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta) = A'(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^d.$$

On dit qu'ils sont $\mathscr{C}^\infty$*-conjugués* si $Z$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Un cocycle $(\alpha, A)$ est constant si la fonction $A : \mathbb{T}^d \to G$ est constante. Il est *réductible* s'il est conjugué à un cocycle constant.

Cette notion de réductibilité s'avère inutilement restrictive. Plus généralement on dit qu'un cocycle $(\alpha, A)$ est réductible s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{R}^d/(2\mathbb{Z})^d \to G$ telle que

$$B = Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta)$$

soit constante. Dans le cas où $Z$ est en effet définie sur $\mathbb{T}^d$, on dit qu'il est réductible mod $\mathbb{Z}^d$.

*Remarque 1.1.* — Ces notions de conjugaison et de réductibilité se généralisent immédiatement aux cocycles à temps continu.

*Remarque 1.2.* — Notez que la notion de réductibilité dépend du groupe $G$ – c'est la $G$-réductibilité. Pour tout groupe de matrice $G$, réel ou complexe, en $Gl(N, \mathbb{C})$, si un cocycle $(\alpha, A)$ à valeurs dans $G$ est $GL(N, \mathbb{C})$-réductible mod $\mathbb{Z}^d$, alors il est $G$-réductible [**11**].

Il a été démontré par Floquet que les cocycles à temps continu périodiques sont toujours réductibles. Les cocycles (à temps discret) périodiques sont aussi réductibles, quand cette notion est définie de manière appropriée. Les cocycles quasi-périodiques ne sont pas toujours réductibles.

Du point de vue dynamique un cocycle réductible est parfaitement compris – il a la même dynamique qu'un cocycle constant.

Les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger $H_\theta$ sont fortement liées aux propriétés dynamiques du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ associé. Si $E$ n'est pas dans le spectre de $H_\theta$, alors $(\alpha, A(\cdot, E))$ est réductible [**32**], mais cela n'est pas toujours le cas si $E$ est dans le spectre [**23**]. Démontrer la réductibilité d'un cocycle de Schrödinger pour des énergies dans le spectre a été la clé de nombreuses propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger correspondant : spectre absolument continu

[**14, 16**], existence de trous spectraux [**42**], mesure de Lebesgue du spectre [**25, 50**], régularité Hölder de la densité d'états intégrée [**6, 25**].

### 1.2. Obstructions à la réductibilité

Même les cocycles analytiques à fréquence diophantienne ne sont pas toujours réductibles. Par exemple, pour tout entier positif $r$,

$$E_r(\theta) = e^{2\pi r h\theta}, \quad h = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

définit un cocycle non réductible en $\mathbb{T}^1 \times SU(2)$. Il existe aussi de tels cocycles dans $\mathbb{T}^d \times SU(2)$.

Ces cocycles non réductibles sont assez exceptionnels. Par exemple Krikorian montre [**39**] que les cocycles qui ne sont pas conjugués à $E_r(\theta)$ sont un ensemble ouvert et dense en topologie $\mathscr{C}^\infty$ dans un petit $\mathscr{C}^s$-voisinage (pour un $s$ suffisamment grand) autour des cocycles constants.

La question naturelle qui se pose pour des cocycles dans $SU(2)$, et aussi pour d'autres groupes compacts, est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est réductible.

*L'exposant de Lyapunov* d'un cocycle $(\alpha, A)$ en $SL(2,\mathbb{R})$ est

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^d} \log(\|A_n(\theta)\|) d\theta.$$

C'est facile de montrer que cette limite existe, qu'elle est indépendante du choix de la norme matricielle et qu'elle est non-négative. Un cocycle $(\alpha, A)$ en $SL(2,\mathbb{R})$ est *hyperbolique* s'il existe deux sous-espaces continus, unidimensionnels et linéairement indépendants $W_\pm$ et un $\gamma > 0$ constant tel que pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$ et tout $u \in W_\pm(\theta) \setminus 0$

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|A_n(\theta)u\| = -\gamma.$$

Dans ce cas, $\gamma$ est l'exposant de Lyapunov. Tout cocycle hyperbolique en $SL(2,\mathbb{R})$ (qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou analytique et qui a des fréquences diophantiennes) est réductible [**31, 33**].

À cause d'un théorème célèbre d'Oseledec [**44**], un cocycle qui a un exposant de Lyapunov positif mais qui n'est pas hyperbolique est appelé *non uniformement hyperbolique*. Ce n'est pas facile de voir que de tels cocycles existent, mais nous savons aujourd'hui qu'ils constituent une grande classe. Ce qui est facile de voir par contre, c'est qu'un tel cocycle ne peut pas être réductible.

Une question naturelle pour les cocycles dans $SL(2,\mathbb{R})$ est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est ou bien réductible ou bien non uniformement hyperbolique.

Un cocycle dont l'exposant de Lyapunov est zéro a parfois une propriété plus forte : le cocycle $(\alpha, A)$ est *$L^2$-conjugué à une rotation*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $Z : \mathbb{T}^d \to SL(2,\mathbb{R})$ carré-intégrable telle que, pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}^d$,

$$Z(\theta+\alpha)^{-1}A(\theta)Z(\theta) \in SO(2,\mathbb{R}).$$

Par exemple, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot\,, E))$ est $L^2$-conjugué à une rotation pour presque tout $E$ tel que $\gamma(\alpha, A(\cdot\,, E)) = 0$ [**49**]. La même chose vaut pour tout cocycle de la forme $A(\theta)R_E$, où

$$R_E = \begin{pmatrix} \cos(E) & -\sin(E) \\ \sin(E) & \cos(E) \end{pmatrix},$$

mais certainement pas pour n'importe quelle famille de cocycles à un paramètre.

## 2. RÉSULTATS LOCAUX

La réductibilité de cocycles proches de cocycles constants a été intensivement étudiée par des théories de perturbation de type KAM. Les meilleurs résultats sont obtenus pour des cocycles $(\alpha, A)$ avec $\alpha$ diophantienne dans $DC(\kappa,\tau)$ et $A$ dans la classe $\mathscr{C}_\rho(\mathbb{T}^d, G)$ des matrices $A : \mathbb{T}^d \to G$ analytiques telles que

$$|A|_\rho =: \sup_{|\Im\theta|<\rho} |A(\theta)| < \infty.$$

L'existence de cocycles réductibles proches des constants a été démontrée dans des familles à plusieurs paramètres [**14, 41**] – la réductibilité est démontrée pour un grand (au sens de Lebesgue) ensemble de paramètres, et la dimension de l'espace des paramètres augmente dans ces théories avec la dimension de la matrice $A$. Plus tard des résultats analogues ont été démontrés dans des familles à un paramètre [**15, 34**].

Dans les années 1990, des résultats plus forts ont été obtenus et aujourd'hui nous avons une vision assez complète qui a été confirmée dans beaucoup de cas : pour $\alpha \in DC(\kappa,\tau)$ donné, il existe un voisinage $\mathscr{U}$ (qui dépend seulement de $\rho,\kappa,\tau$) de l'ensemble des cocycles constants en $\{\alpha\} \times \mathscr{C}_\rho(\mathbb{T}^d, G)$ de sorte que

- tout cocycle dans $\mathscr{U}$ est presque réductible ;
- « presque tout » cocycle dans $\mathscr{U}$ est réductible ;
- un cocycle générique dans $\mathscr{U}$ n'est pas réductible.

Être presque réductible veut dire que le cocycle peut être conjugué (par une conjugaison définie sur $\mathbb{R}^d/(2\mathbb{Z})^d$) à un cocycle arbitrairement proche d'un cocycle constant. En particulier, un cocycle presque réductible ne peut pas être non uniformément hyperbolique. Cette propriété a été confirmée dans de nombreux cas : $SL(2,\mathbb{R})$ [**16**], $SO(3,\mathbb{R})$ [**19**], $SU(N)$ [**36**], $GL(N,\mathbb{R})$ [**18**]. Le fait que « presque tout » cocycle soit réductible a été vérifié dans de nombreuses familles à un paramètre : la famille de

Schrödinger [**16**], certaines familles dans des groupes compacts [**37**], certaines familles dans $GL(N,\mathbb{C})$ [**26**]. Le fait qu'il y ait un $\mathscr{G}_\delta$ dense de cocycles non réductibles a été vérifié dans la famille de Schrödinger [**16, 47**] et dans $SO(3,\mathbb{R})$ [**19**].

Voici une formulation précise d'un résultat de réductibilité « presque partout » :

> il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho,\kappa,\tau)$ telle que, pour toute fonction analytique $V : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ avec $|V|_\rho < \varepsilon_0$ et pour tout $\alpha \in DC(\kappa,\tau)$, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\,\cdot\,,E;V))$ est réductible pour presque tout $E \in \mathbb{R}$.

Dans la catégorie $\mathscr{C}^\infty$, on pourrait être amené à penser que la vision locale est la même que dans la catégorie analytique, mais pas grand chose n'a été démontré. Parmi les quelques résultats, un d'entre eux affirme que les cocycles réductibles en $SO(3,\mathbb{R})$ et $SU(N)$ sont $\mathscr{C}^\infty$-denses proches de cocycles constants [**36**].

La théorie de perturbation de KAM utilisée pour obtenir ces résultats dépend très sensiblement des propriétés arithmétiques de $\alpha$ décrites par la classe $DC(\kappa,\tau)$. Ceci est reflété dans la dépendance du voisinage $\mathscr{U}$ et de la constante $\varepsilon_0$ en $\kappa$ et $\tau$, qui (d'après les estimations que l'on peut obtenir) décroissent quand $\kappa$ décroît ou quand $\tau$ croît. Des résultats qui sont valables pour toutes fréquences $\alpha$ dans l'ensemble de mesure totale

$$DC = \cup_{\kappa,\tau>0} DC(\kappa,\tau)$$

et pour toute matrice $A$ proche d'une constante – le cas semi-global – sont au-delà de la théorie de perturbation. Ceci est bien sûr d'autant plus vrai pour le cas vraiment global lorsque la matrice $A$ est arbitraire et pas proche d'une constante. Les résultats globaux de petits diviseurs sont rares, le théorème de conjugaison des difféomorphismes du cercle étant le plus connu [**28**].

Durant ces cinq à dix dernières années, deux méthodes globales supplémentaires ont été développées. Une d'entre elles est dynamique et basée sur la renormalisation, et elle donne des résultats plutôt globaux pour des cocycles à valeurs dans $SU(2)$ et $SL(2,\mathbb{R})$. L'autre est basée sur la localisation de l'opérateur de Schrödinger et sur la dualité, et elle donne des résultats semi-globaux pour les cocycles de Schrödinger.

## 3. DU GLOBAL AU LOCAL – RENORMALISATION

La renormalisation a été utilisée dans [**48**] pour étudier les dynamiques de cocycles dans le groupe compact $\mathbb{T}\times SU(2)$. Plus tard, elle a servi dans [**35**] pour démontrer la $\mathscr{C}^0$-densité de cocycles réductibles en $\mathbb{T}\times SU(2)$. La méthode a été étendue à la catégorie $\mathscr{C}^\infty$ dans [**38**], et ensuite adaptée au groupe non compact $\mathbb{T}\times SL(2,\mathbb{R})$ dans [**39**] et, plus récemment, dans [**5**]. Des idées similaires ont aussi été utilisées dans [**21**] pour étudier un problème de perturbation singulier et, à un certain degré, dans [**27**].

Dans cette section, nous allons traiter du travail de Krikorian et Avila [**5, 39**] sur la renormalisation de cocycles de classe $\mathscr{C}^\infty$ ou analytiques en $\mathbb{T}\times SU(2)$ et $\mathbb{T}\times SL(2,\mathbb{R})$.

### 3.1. Renormalisation et paires commutantes

Soit $\alpha \in ]0,1[$. Soient, pour $k \geq 0$,

$$\alpha_{k+1} = \frac{1}{\alpha_k} - \left[\frac{1}{\alpha_k}\right], \quad \alpha_0 = \alpha,$$
$$a_{k+1} = \left[\frac{1}{\alpha_k}\right],$$
$$\beta_k = \alpha_k \beta_{k-1}, \quad \beta_{-1} = 1,$$

et

$$\begin{aligned} p_{k+2} &= a_{k+2}p_{k+1} + p_k \quad & p_1 &= 1 \quad & p_0 &= 0 \\ q_{k+2} &= a_{k+2}q_{k+1} + q_k \quad & q_1 &= a_1 \quad & q_0 &= 1 \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ dénote la partie entière.

L'application $]0,1[ \ni \alpha \mapsto \frac{1}{\alpha} - \left[\frac{1}{\alpha}\right] \in [0,1[$ – connue comme l'application de Gauss – est ergodique par rapport à une mesure invariante absolument continue [**40**]. Cela implique, par exemple, que, pour tout ensemble $D \subset ]0,1[$ de mesure positive,

$$\#\{k \geq 0 : \alpha_k, \alpha_{k+1} \in D\} = \infty$$

pour presque tout $\alpha_0 \in D$ – notons cet ensemble $\mathscr{R}D$.

Pour $k \geq 0$, soient

$$A^{(k)}(\theta) = A_{(-1)^k q_k}(\theta)$$

et

$$V_k = (\beta_k, A^{(k)}) = (\alpha, A)^{(-1)^k q_k}.$$

($V_k$ est un homéomorphisme en $\mathbb{T} \times G$.) Alors

Proposition 3.1. — *Il existe une fonction $Z : \mathbb{R} \to G$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que*

$$(0, Z)^{-1} \circ V_k \circ (0, Z) = (\beta_k, I).$$

*Si $Z'$ est une autre application de ce type, alors $Z'Z^{-1}$ est $\beta_k$-périodique.*

Pour $SL(2,\mathbb{R})$, un résultat analogue est aussi prouvé dans la catégorie analytique dans [**5**].

Soit $L_\beta$ la dilatation

$$\mathbb{R} \times G \ni (x, X) \mapsto (\beta x, X) \in \mathbb{R} \times G;$$

définissons

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k &= L_{\beta_{k-1}}^{-1} \circ V_{k-1} \circ L_{\beta_{k-1}} = (1, A^{(k-1)}(\beta_{k-1}\,\cdot)) \\ \tilde{V}_k &= L_{\beta_{k-1}}^{-1} \circ V_k \circ L_{\beta_{k-1}} = (\alpha_k, A^{(k)}(\beta_{k-1}\,\cdot)). \end{aligned}$$

Alors

PROPOSITION 3.2. — (i) $\tilde{U}_k \circ \tilde{V}_k = \tilde{V}_k \circ \tilde{U}_k$.

(ii) *Il existe une fonction* $Z : \mathbb{R} \to G$ *de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *telle que*

$$(0, Z)^{-1} \circ \tilde{U}_k \circ (0, Z) = (1, I).$$

*Soit*

$$W_k = (0, Z)^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z).$$

(iii) $W_k$ *est* 1*-périodique.*

(iv) *Si* $Z'$ *est une autre fonction comme dans* (ii)*, alors* $W_k$ *et*

$$(0, Z')^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z')$$

*sont* $\mathscr{C}^\infty$*-conjugués. Ils sont donc deux représentants de la même classe de* $\mathscr{C}^\infty$*-conjugaison* $[\tilde{V}_k]$.

(v) *Si* $(\alpha, A)$ *et* $(\alpha, B)$ *sont* $\mathscr{C}^\infty$*-conjugués, alors*

$$[\tilde{V}_k(A)] = [\tilde{V}_k(B)].$$

Si on définit pour $x_* \in \mathbb{T}$

$$V_{k,x_*} = T_{x_*}^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ T_{x_*} = (\beta_k, A^{(k)}(\cdot + x_*)),$$

où $T_{x_*}$ est la translation

$$\mathbb{R} \times G \ni (x, X) \mapsto (x + x_*, X) \in \mathbb{R} \times G,$$

alors nous avons les mêmes résultats pour $\tilde{U}_{k,x_*}, \tilde{V}_{k,x_*}$.

### 3.2. Du global au local

Dans le cas de $SU(2)$, soit

$$\eta_k(\theta) = (\partial A^{(k)}(\theta))(A^{(k)}(\theta))^{-1},$$

où $\partial = \frac{\partial}{\partial\theta}$. $\eta_k(\theta)$ est un élément de l'algèbre de Lie $su(2)$ qui est munie de la norme

$$\left\| \begin{pmatrix} it & u \\ -\bar{u} & -it \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{t^2 + |u|^2}.$$

Par un calcul explicite, on démontre que

$$\|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq a_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

d'où on déduit que

$$u_k =: \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} + \beta_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

décroît quand $k$ augmente. Ce n'est pas difficile de voir que sa limite, $J(\alpha, A)$, est une invariante de conjugaison, et on vérifie facilement que cette invariante est égale à 0 si $A$ est constante et égale à $2\pi r$ si $A$ est un des $E_r$. De l'estimation

$$\|\eta_k\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \leq q_k \|\eta_0\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}$$

on déduit que l'invariante est petite si $A$ est $\mathscr{C}^1$-proche d'une constante.

Les résultats principaux de Krikorian sont maintenant

THÉORÈME 3.3 ([**38**]). — *Soient $A$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $\alpha \in \mathscr{R}DC(\kappa,\tau)$. Soit $s \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $k$ tel que $\alpha_k \in DC(\kappa,\tau)$ et que la classe $[\tilde{V}_k]$ soit $\varepsilon$-proche, en topologie $\mathscr{C}^s$, ou bien à un cocycle constant (si $J(\alpha, A) = 0$) ou bien à un cocycle $(\alpha_k, E_r)$ (si $J(\alpha, A) > 0$).*

Que la classe $[\tilde{V}_k]$ soit proche de $(\alpha_k, B)$ veut simplement dire qu'elle contient un représentant $W_k$ qui est proche de ce cocycle.

Si $W_k \in [\tilde{V}_k]$ est $\mathscr{C}^s$-proche de $(\alpha_k, E_r)$ mais pas conjugué à $(\alpha_k, E_r)$, alors Krikorian montre par une analyse perturbative poussée que, pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe un $k'$ tel que $\alpha_{k'} \in DC(\kappa,\tau)$ et la classe $[\tilde{V}_{k'}]$ est $\varepsilon'$-proche, en topologie $\mathscr{C}^s$, ou bien à un cocycle constant ou bien à un cocycle $(\alpha_{k'} E_{r'})$ pour un $r' < r$. D'où

THÉORÈME 3.4 ([**38**]). — *Soit $A$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et soit $\alpha \in \mathscr{R}DC(\kappa,\tau)$. Supposons que $(\alpha, A)$ n'est pas conjugué à un $(\alpha, E_r)$. Alors $J(\alpha, A) = 0$.*

En utilisant la densité $\mathscr{C}^\infty$ de réductibilité [**37**], on obtient pour presque tout $\alpha$ que les cocycles réductibles sont $\mathscr{C}^\infty$-denses parmi tous les cocycles $SU(2)$. On aimerait bien conclure que, dans des familles génériques de cocycles à un paramètre, presque tout cocoycle est réductible, mais pour faire cela il nous manque encore le bon résultat local en catégorie $\mathscr{C}^\infty$.

Dans le cas où $G = SL(2,\mathbb{R})$, il est possible de laisser la renormalisation tendre vers $\infty$ et Avila-Krikorian démontre le résultat suivant.

THÉORÈME 3.5 ([**5**]). — *Soit $A$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et soit $\alpha \in RDC(\kappa,\tau)$. Supposons que $(\alpha, A)$ est $L^2$-conjugué à un cocycle de rotations. Alors pour presque tout $x_* \in \mathbb{R}$, la séquence $\{\tilde{V}_{k,x_*} : k \in \mathbb{N}\}$ est $\mathscr{C}^\infty$-précompacte et, pour toute sous-séquence convergente $V_{k_n,x_*}$,*

$$\lim_{k_n \to \infty} [\tilde{V}_{k_n,x_*}]$$

*contient un cocycle à valeurs dans $SO(2,\mathbb{R})$.*

La topologie ici est la convergence uniforme $\mathscr{C}^\infty$ sur des ensembles compacts en $\mathbb{R}$, et le même résultat est aussi valable dans la catégorie analytique.

En utilisant un résultat local de réductibilité presque partout dans la catégorie analytique, nous obtenons, pour presque tout $\alpha$, que pour presque tout $E$ le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\ ,E))$ est soit non uniformément hyperbolique soit réductible.

### 3.3. Estimations *a priori*

Le point clé de ces preuves est d'établir des estimations a priori des dérivées des itérations de $(\alpha, A)$. Dans le cas $SU(2)$ :

PROPOSITION 3.6. — *Soit $r \in \mathbb{N} \setminus 0$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in \mathbb{T}$ tel que*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{0\le j\le r} \beta_{k-1}^{j+1} \left\| |\partial^j \eta_k| + |\partial^j \eta_{k-1}| \right\|_{\mathscr{C}^0(x_k - \frac{\beta_{k-1}}{2}, x_k + \frac{\beta_{k-1}}{2})} = 0$$

*si $J(\alpha, A) = 0$, et*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{1\le j\le r} \beta_{k-1}^{j+1} \left\| |\partial^j \eta_k| + |\partial^j \eta_{k-1}| \right\|_{\mathscr{C}^0(x_k - \frac{\beta_{k-1}}{2}, x_k + \frac{\beta_{k-1}}{2})} = 0$$

*si $J(\alpha, A) > 0$.*

PREUVE (esquisse) — C'est assez immédiat d'obtenir des bornes supérieures indépendantes de $k$

$$\beta_{k-1}^{r+1} \|\partial^r \eta_k\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \le C_r < \infty.$$

Par des estimations de convexité

$$\left\|\partial^j f\right\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \le C'_r \|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}^{1-\frac{j}{r}} \|f\|_{\mathscr{C}^r(\mathbb{T})}^{\frac{j}{r}} \quad 1 \le j \le r,$$

il suffit de démontrer les deux énoncés pour $r = 0$ et $r = 1$ respectivement. Par l'estimation

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} &\le \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} + 2\,\|\partial f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \\ &\le \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} + 2\,\|\partial f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

il suffit de démontrer des estimations dans $L^2(\mathbb{T})$ ou $L^1(\mathbb{T})$ respectivement.

Si $J(\alpha, A) = 0$, on en déduit immédiatement que

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0,$$

d'où on obtient le résultat.

Si $J(\alpha, A) > 0$, le résultat suit de la même façon à partir de la limite

$$\lim_{k\to\infty} \beta_{k-1}^2 \|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} = 0,$$

qu'il s'agit donc de démontrer.

Soit

$$\mu_k = 1 - \frac{u_k}{u_{k-1}}.$$

Comme $J(\alpha, A) > 0$, on en déduit que $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$, et il suffit de montrer que pour $k$ suffisamment grand

$$\begin{aligned} \|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} \le\ & a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ & + \sqrt{4\mu_k}(a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})})^2 \qquad (*) \end{aligned}$$

En effet, celui-ci donne que

$$u'_k =: \beta_{k-1}^2 \|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} + \beta_{k-1}\beta_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})}$$

vérifie

$$u'_k \leq \alpha_{k-1}u'_{k-1} + \sqrt{4\mu_k}M^2 \quad \text{où} \quad M = \sup_k \beta_{k-1} \|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} < \infty.$$

Cette inégalité implique que $u'_k \to 0$ quand $k \to \infty$ et on a gagné.

Donc, il reste à démontrer $(*)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \eta_k &= w_1 + Ad(W_1)w_2 + \cdots + Ad(W_1 \ldots W_{a_k})w_{a_k+1} \\ \partial\eta_k &= \partial w_1 + Ad(W_1)\partial w_2 + \cdots + Ad(W_1 \ldots W_{a_k})\partial w_{a_k+1} \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq a_k+1} [Ad(W_1, \ldots, W_{i-1})w_i, Ad(W_1, \ldots, W_{j-1})w_j] \end{aligned}$$

où

$$w_j(\theta) = \eta_{k-2}(\theta - a_k\beta_{k-1}) \quad j = 1$$

$$w_j(\theta) = \eta_{k-1}(\theta - (a_k - (j-2))\beta_{k-1})^* \quad 2 \leq j \leq a_k + 1,$$

et où $W_j$ est définie de la même façon avec $\eta_{\ldots}$ remplacé par $A^{(\cdots)}$. (Ici $X^*$ est l'adjoint de la matrice $X$.)

Si l'on note

$$\gamma_i = Ad(W_1 \ldots W_{i-1})w_i,$$

alors

$$\|\partial\eta_k\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq a_k \|\partial\eta_{k-1}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \|\partial\eta_{k-2}\|_{L^1(\mathbb{T})} + \sum_{1\leq i<j\leq a_k+1} \|[\gamma_i, \gamma_j]\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Par un calcul dans $su(2)$ on démontre que, pour tout $0 \leq \chi \leq 1$, on a ou bien

$$\left\|\sum_j \gamma_j\right\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq (1-\chi)\sum_j \|\gamma_j\|_{L^2(\mathbb{T})},$$

ou bien

$$\sum_{i<j} \|[\gamma_i, \gamma_j]\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\chi}(\sum_{i<j} \|\gamma_j\|_{L^2(\mathbb{T})})^2.$$

La première alternative implique immédiatement que

$$\|\eta_k\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq (1-\chi)(a_k \|\eta_{k-1}\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|\eta_{k-2}\|_{L^2(\mathbb{T})}),$$

ce qui est impossible pour $k$ suffisamment grand, si l'on prend $\chi = 4\mu_k$. Donc, on a nécessairement la deuxième alternative, ce qui donne $(*)$ et complète la preuve de la proposition.

De la proposition 3.6, on déduit le théorème 3.3. Cette déduction est assez immédiate si $J(\alpha, A) = 0$. En effet, de la proposition 3.6, on obtient (supposons, pour simplifier, que les $x_k$ sont $= 0$) que

$$\tilde{U}_k = (1, e^{H_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)), \quad \tilde{V}_k = (\alpha_k, e^{K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)),$$

où $\mathcal{O}(\varepsilon_k)$ signifie une suite dont la norme $\mathscr{C}^s(]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[)$ tend vers 0. On peut normaliser le premier cocycle

$$(0, Z_k)^{-1} \circ \tilde{U}_k \circ (0, Z_k) = (1, I)$$

par une $Z_k : \mathbb{R} \to SU(2)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ de la forme

$$Z_k(x) = e^{H_k x} + \mathcal{O}(\varepsilon_k).$$

Alors

$$(0, Z_k)^{-1} \circ \tilde{V}_k \circ (0, Z_k) = (\alpha_k, e^{-\alpha_k H_k + K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)),$$

et comme la matrice $e^{-\alpha_k H_k + K_k} + \mathcal{O}(\varepsilon_k)$ est 1-périodique, c'est gagné. Le cas $J(\alpha, A) > 0$ est plus compliqué.

Dans le cas de $SL(2, \mathbb{R})$, quand le cocycle est $L^2$-conjugué à une rotation :

PROPOSITION 3.7. — *Soit $r \in \mathbb{N} \setminus 0$. Alors, pour presque tout $x_* \in \mathbb{T}$, il existe deux constantes $K$ et $n_0$ telles que si*

$$\|k\alpha\| \leq \frac{2}{k} \quad \textit{et} \quad k \geq n_0,$$

*alors*

$$\beta_{k-1}^{r+1} \|\partial^r A_k\|_{\mathscr{C}^0(x_* - \frac{2}{k}, x_* + \frac{2}{k})} \leq (\beta_{k-1} K k)^{r+1} \varepsilon_k,$$

*où $\varepsilon_k \to 0$ quand $k \to \infty$.*

PREUVE (esquisse) — Soit

$$Z(x + \alpha)^{-1} A(x) Z(x) = R(x) \in SO(2\mathbb{R})$$

et

$$\phi(\,\cdot\,) = \|Z(\,\cdot\,)\|^2 = \left\|Z(\,\cdot\,)^{-1}\right\|^2 \in L^1(\mathbb{T}),$$

où $\|\cdot\|$ est la norme d'opérateur.

On vérifie que

$$\left\|A_n(y)^{-1}(A_n(x) - A_n(y))\right\| \leq -1 + \exp\Big(\sum_{k=0}^{n-1} |x - y| \, \|A\|_{\mathscr{C}^0} \, \|\partial A\|_{\mathscr{C}^0} \, \phi(y)\phi(y + k\alpha)\Big),$$

d'où

$$\|A_n(x)\| \leq (K \phi(y) \phi(y + n\alpha))^{\frac{1}{2}}, \quad K = e^{2n|x-y| \|A\|_{\mathscr{C}^0} \phi(y) S(y)},$$

où

$$S(y) = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(y + k\alpha).$$

Par le théorème ergodique, $S(y) < \infty$ pour presque tout $y \in \mathbb{T}$.

Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions

$$i : \{1, \ldots, r\} \to \{0, \ldots, n-1\}$$

et soient

$$\mathscr{R}(i) = i(\{1, \ldots, r\}), \quad s_i = \#\mathscr{R}(i).$$

On en déduit ensuite que

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq (K\phi(y)\phi(y+n\alpha))^{\frac{1}{2}} \sum_{i \in \mathscr{I}} (K\phi(y)\, \|A\|_{\mathscr{C}^0})^{s_i} \prod_{i_p \in \mathscr{R}(i)} \phi(y+i_p\alpha) \left\| \partial^{\# i^{-1}(i_p)} A \right\|_{\mathscr{C}^0},$$

et par des estimations de convexité

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq C^r n^r \phi(y+n\alpha)^{\frac{1}{2}} (c(y) e^{nc(y)|x-y|})^{r+\frac{1}{2}} \, \|A\|_{\mathscr{C}^r},$$

où $c(y) = 2\phi(y)S(y)\, \|A\|_{\mathscr{C}^1}^2$ et $C$ est une constante universelle.

Maintenant, presque tout $x_*$ est un point de continuité mesurable pour $\phi$ et $S$, c'est-à-dire que, pour presque tout $x_*$, on a : il existe $n_0 = n_0(x_*)$ tel que pour tout $n \geq n_0$, l'ensemble des

$$y \in [x_* - \frac{4}{n}, x_* + \frac{4}{n}],$$

tels que $|\phi(y) - \phi(x_*)| \geq 1$ ou $|S(y) - S(x_*)| \geq 1$, est de mesure $< \frac{2}{n}$. D'où on obtient : il existe $n_0 = n_0(x_*)$ tel que pour tout $n \geq n_0$ tel que $\|n\alpha\| \leq \frac{2}{n}$, l'ensemble des

$$y \in [x_* - \frac{2}{n}, x_* + \frac{2}{n}],$$

tels que $|\phi(y) - \phi(x_*)| \geq 1$ ou $|S(y) - S(x_*)| \geq 1$ ou $|\phi(y+n\alpha) - \phi(x_*)| \geq 1$ , est de mesure $< \frac{4}{n}$.

En mettant tout ensemble, on obtient, pour presque tout $x_*$ et pour tout $n \geq n_0$ tel que $\|n\alpha\| \leq \frac{2}{n}$, que

$$\|\partial^r A_n(x)\| \leq C^r n^r (\phi(x_*))^{\frac{1}{2}} (\tilde{c}(x_*) e^{2\tilde{c}(x_*)})^{r+\frac{1}{2}} \, \|A\|_{\mathscr{C}^r}$$

pour $|x - x_*| \leq \frac{2}{n}$. Ceci termine la preuve de la proposition.

## 4. LOCALISATION D'ANDERSON

Considérons l'opérateur de Schrödinger

$$H_\theta = H_{\theta,\lambda V,\alpha} = -\Delta + \lambda\{V(\theta + n\alpha) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

On dit que $H_\theta$ admet la *localisation d'Anderson* s'il est purement ponctuel (c'est-à-dire si les vecteurs propres de $H_\theta$ constituent une base pour $l^2(\mathbb{Z})$) et que ses vecteurs propres ont une décroissance exponentielle.

Il existe des exemples de $H_{\theta,\lambda V,\alpha}$ avec un spectre continu pour tout $\theta$ et pour $\lambda$ arbitrairement grande si $\alpha$ n'est pas diophantienne [**23**] ou si $V$ n'est pas lisse mais, pour $\alpha$ diophantienne et $V$ lisse, il y a des résultats de perturbation pour spectre ponctuel et localisation d'Anderson.

## 4.1. Résultats locaux

Dans les travaux phare de Frölich-Spencer-Wittver [**22**] et Sinai [**51**] de la fin des années 1980, il a été démontré que :

si $\alpha \in DC(\kappa, \tau)$ et si $V$ est une fonction $\mathscr{C}^2$ avec exactement un maximum et un minimum générique, alors il existe une constante $\lambda_0 = \lambda_0(V, \kappa, \tau)$ telle que, pour $|\lambda| > \lambda_0$, $H_{\theta,\lambda V,\alpha}$ admet la localisation d'Anderson pour presque tout $\theta \in \mathbb{T}$.

Ce résultat a plus tard été généralisé à d'autres fonctions $V$, et à des opérateurs à décroissance exponentielle,

$$\tilde{\Delta}u(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k u(n-k), \qquad |a_k| \leq C_1 e^{-C_2|k|} \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

au lieu du laplacien $\Delta$ [**1, 12, 17**].

Il y a de nombreuses relations entre la famille d'opérateurs $H_\theta = H_\theta$ et la famille des cocycles de Schrödinger associée $(\alpha, A(\ , E))$. Par exemple l'exposant de Lyapunov $\gamma(E)$ de $(\alpha, A(\ , E))$ est égal à

$$\tilde{\gamma}(E) =: \inf_{n\geq 1} \frac{1}{N} \int_{\mathbb{T}} \log(F(n,\theta,E))d\theta,$$

où $F(n, \theta, E)$ est

$$\max(|det(H_\theta^n - E)|, |\det(H_{\theta+\alpha}^{n-1} - E)|, |\det(H_\theta^{n-1} - E)|, |\det(H_{\theta+\alpha}^{n-2} - E)|)$$

et $H_\theta^n$ est la restriction de $H_\theta$ à $l^2(\{0, 1, \ldots, n-1\})$ (avec des conditions de bord de Dirichlet). De plus, par un théorème de Kotani, si $H_\theta$ est purement ponctuel pour presque tout $\theta$, alors $\gamma(E) > 0$ pour presque tout $E$ [**45**].

## 4.2. Résultats semi-globaux

Autour de 2000, il y a eu des progrès importants vers des résultats plus globaux pour les modèles analytiques. Bourgain et Jitomirskaya ont démontré

THÉORÈME 4.1 ([**9**]). — *Soit $\alpha$ diophantienne et soit*

$$K_\varphi u(n) = -\tilde{\Delta}u(n) + \lambda 2\cos(\varphi + n\alpha)u(n) \quad n \in \mathbb{Z},\ \varphi \in \mathbb{T},$$

*où $\tilde{\Delta}$ est un opérateur à décroissance exponentielle. Alors il existe une constante $\lambda_0$ (indépendante de $\alpha$) telle que, pour $|\lambda| > \lambda_0$, $K_\varphi$ admette la localisation d'Anderson pour tout $\varphi$ dans un ensemble $\Phi$ de mesure de Lebesgue totale.*

$\Phi$ a une description explicite et contient en particulier $\varphi = 0$.

$\lambda_0$ dépend bien sûr de $\tilde{\Delta}$, mais seulement de son taux de décroissance exponentielle.

Ce théorème est une généralisation d'un résultat célèbre de Jitomirskaya sur l'opérateur de presque Mathieu ($\tilde{\Delta} = \Delta$) [**30**].

Il y a une différence importante dans cette approche par rapport à la preuve perturbative : démontrer la positivité de $\tilde{\gamma}(E)$ est une partie essentielle de la preuve (au lieu d'en être une conséquence), et la positivité est ensuite utilisée pour obtenir des estimations de $(H_\theta^n - E)^{-1}$. Dans le modèle du théorème 4.1, nous savons par sous-harmonicité [**29**] que

$$\tilde{\gamma}(E) \geq \log |\frac{\lambda}{2}|,$$

qui est donc positive quand $|\lambda| > 2$.

Un deuxième résultat important est

THÉORÈME 4.2 ([**10**]). — *Soit $\gamma(E,\alpha)$ l'exposant de Lyapunov du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot\,, E))$ avec un potentiel analytique. Alors*

$$E \mapsto \gamma(E,\alpha)$$

*est continu pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, et*

$$(E,\alpha) \mapsto \gamma(E,\alpha)$$

*est continu à tout point $(E,\alpha)$ avec $\alpha$ irrationnelle.*

La preuve est basée sur un argument de grandes déviations et sur le principe d'avalanche développés par Bourgain, Goldstein et Schlag dans leur étude sur la localisation des opérateurs de Schrödinger quasi-périodiques [**8**]. Cela nous mènerait trop loin de discuter de ces travaux importants qui méritent à eux seuls un exposé.

## 5. DUALITÉ

L'argument de dualité est maintenant classique [**2**]. Voici comment ça marche. Soit $K_\varphi$ l'opérateur

$$\varepsilon \sum_k \hat{V}(k) v(n-k) - 2\cos(\varphi + n\alpha) v(n) \quad n \in \mathbb{Z},$$

où les $\hat{V}(k)$ sont les coefficients de Fourier d'une fonction $V : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$. Supposons que, pour un $\varphi \in \mathbb{T}$, il existe un vecteur propre $v = \{v(n) : n\mathbb{Z}\}$ à décroissance exponentielle, $K_\varphi v = Ev$, et soit

$$U(\theta) = \sum_k v(k) e^{i2\pi k\theta}.$$

Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{T}$,

$$u = \{u(n) = e^{i2\pi n\varphi} U(\theta + n\alpha) : n \in \mathbb{Z}\}$$

est une solution de l'équation

$$H_\theta u(n) = -\Delta u(n) + \varepsilon V(\theta + n\alpha) u(n) = E u(n) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Une solution de cette forme s'appelle une *solution de Floquet* ou une *onde de Bloch* quasi-périodique. On démontre que l'existence d'une telle solution implique la réductibilité du cocycle $(\alpha, A(\,\cdot\,, E; \varepsilon V))$.

Par cet argument et par la localisation d'Anderson de l'opérateur de presque Mathieu pour la phase $\varphi = 0$ [**30**], Puig a déduit sa solution du problème de « 10 Martini ».

THÉORÈME 5.1 ([**46**]). — *Si $\alpha$ est diophantienne, alors pour tout $\lambda \neq 0, \pm 2$, le spectre de l'opérateur de presque Mathieu est un ensemble de Cantor.*

Récemment ceci a été étendu à tout $\alpha$ irrationnelle [**4**].

L'argument de dualité a été développé en [**24**] où il est démontré que si $K_\varphi$ est purement ponctuel pour presque tout $\varphi$, alors $H_\theta$ est purement absolument continu pour presque tout $\theta$. Ce résultat, combiné avec le théorème 4.1, nous montre que $H_\theta$ est purement absolument continu pour presque tout $\theta$ si $|\frac{1}{\varepsilon}| > \lambda_0$ [**9**]. Puig a été le premier à bien comprendre les conséquences dynamiques de ce résultat.

THÉORÈME 5.2 ([**47**]). — *Il existe une constante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho)$ telle que, pour toute fonction analytique $V : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ avec $|\varepsilon V|_\rho < \varepsilon_0$ et tout $\alpha \in DC$, le cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\,\cdot\,, E; \varepsilon V))$ est réductible pour presque tout $E \in \mathbb{R}$.*

Voici l'argument. Soit $H : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$ l'opérateur

$$(Hu)(\theta, n) = (H_\theta u(\theta, \,\cdot\,))(n),$$

et soit $f \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z})$. Nous avons la relation suivante entre les mesures spectrales de $H$ et $H_\theta$ :

$$\mu_{H,f}(A) = \int_{\mathbb{T}} \mu_{H_\theta, f(\theta,\,\cdot\,)}(A) d\theta$$

pour tous les ensembles de Borel $A$ en $\mathbb{R}$. Comme le spectre $\sigma(H_\theta)$ est indépendant de $\theta$, on en déduit que

$$\sigma(H) = \sigma(H_\theta).$$

Considérons l'opérateur unitaire $U : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T})$,

$$(Uf)(n, \theta) = (\mathcal{F}_2^{-1} \mathcal{F}_1 f)(n, \theta + n\alpha),$$

où

$$\mathcal{F}_1 : L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}), \quad \mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$$

sont les transformées de Fourier respectivement dans les premier et second variables. Alors $K = UHU^{-1}$ est l'opérateur

$$(Ku)(n,\varphi) = (K_\varphi u(\,\cdot\,,\varphi))(n).$$

Par le théorème 4.1, nous concluons que si $|\varepsilon| < \varepsilon_0(\rho)$, alors $H_\theta$ est purement absolument continu pour presque tout $\theta$. Par le théorème de Ishii-Pastur [**45**], cela implique que l'exposant de Lyapunov $\gamma(E)$ du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\,\cdot\,,E))$ est zéro pour presque tout $E \in \sigma(H)$, donc, par le théorème 4.2, pour tout $E \in \sigma(H)$ (à l'exception d'une partie isolée où le spectre peut être de mesure zéro, qu'on peut négliger).

Soit maintenant $X \subset \sigma(H)$ un ensemble de Borel tel que, pour tout $E \in X$, le cocycle $(\alpha, A(\,\cdot\,,E;V))$ n'est pas réductible. Ceci implique que l'équation $H_\theta u = Eu$ n'a pas de solution de Floquet. Donc

$$X \subset \sigma(K) \setminus \cup_{\varphi\in\Phi}\{\text{valeurs propres de } K_\varphi\}.$$

Soit $\delta_0 \in l^2(\mathbb{Z})$ l'élément $\delta_0(n) = \delta_0^n$. Nous pensons à $\delta_0$ comme élément de $L^2(\mathbb{T}\times\mathbb{Z})$ et de $L^2(\mathbb{Z}\times\mathbb{T})$ par identification triviale $\delta_0(\theta,\,\cdot\,) = \delta_0(\,\cdot\,) = \delta_0(\,\cdot\,,\varphi)$. Alors $U\delta_0 = \delta_0$. On a donc $\mu_{K_\varphi,\delta_0}(X) = 0$ pour tout $\varphi \in \Phi$, donc $\mu_{K,\delta_0}(X) = 0$, donc $\mu_{H,\delta_0}(X) = 0$. Mais $\mu_{H,\delta_0}$ est la densité d'états de $H_\theta$, et on sait [**13**] que, pour tout ensemble de Borel $Y \subset \gamma^{-1}(0)$, $\mu_{H,\delta_0}(Y) > 0$ si $\mathrm{Leb}(Y) > 0$. Donc $\mathrm{Leb}(X)$ est nécessairement $= 0$. Cela conclut la preuve du théorème 5.2.

Il existe un résultat intéressant de Bourgain dans [**7**]. Pour tout polynôme trigonométrique $V : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ avec un maximum non-dégénéré, il existe un $\theta$ tel que l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbb{T}^2 : \sigma_{pp}(H_{\theta,V,\alpha}) \neq \varnothing\}$$

a une mesure de Lebesgue positive. Ceci montre que les résultats pour une fréquence ne peuvent être généralisés à plusieurs fréquences sans précaution.

## RÉFÉRENCES

[1] C. ALBANESE – KAM theory in momentum space and quasiperiodic Schrödinger operators, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **10** (1993), p. 1–97.

[2] S. AUBRY & G. ANDRÉ – Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices, in *Group theoretical methods in physics (Proc. Eighth Internat. Colloq., Kiryat Anavim, 1979)*, Ann. Israel Phys. Soc., vol. 3, Hilger, 1980, p. 133–164.

[3] A. Avila, J. Bochi & D. Damanik – Cantor spectrum for Schrödinger operators with potential arising from generalized skew-shifts, prépublication arXiv:0709.2667.

[4] A. Avila & S. Y. Jitomirskaya – The ten Martini problem, prépublication arXiv:math/0503363.

[5] A. Avila & R. Krikorian – Reducibility or nonuniform hyperbolicity for quasiperiodic Schrödinger cocycles, *Ann. of Math.* **164** (2006), p. 911–940.

[6] J. Bourgain – Hölder regularity of integrated density of states for the almost Mathieu operator in a perturbative regime, *Lett. Math. Phys.* **51** (2000), p. 83–118.

[7] ———, On the spectrum of lattice Schrödinger operators with deterministic potential. II, *J. Anal. Math.* **88** (2002), p. 221–254.

[8] ———, *Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications*, Annals of Mathematical Studies, Princeton Univ. Press, 2004.

[9] J. Bourgain & S. Y. Jitomirskaya – Absolutely continuous spectrum for 1D quasiperiodic operators, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 453–463.

[10] ———, Continuity of the Lyapunov exponent for quasiperiodic operators with analytic potential, *J. Statist. Phys.* **108** (2002), p. 1203–1218.

[11] C. Chavaudret – Reducibility of quasi-periodic cocycles in linear Lie groups, manuscrit, 2008.

[12] V. A. Chulaevsky & E. I. Dinaburg – Methods of KAM-theory for long-range quasi-periodic operators on $\mathbf{Z}^{\nu}$. Pure point spectrum, *Comm. Math. Phys.* **153** (1993), p. 559–577.

[13] P. Deift & B. Simon – Almost periodic Schrödinger operators. III. The absolutely continuous spectrum in one dimension, *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), p. 389–411.

[14] E. I. Dinaburg & Y. G. Sinaĭ – The one-dimensional Schrödinger equation with quasiperiodic potential, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **9** (1975), p. 8–21.

[15] L. H. Eliasson – Perturbations of stable invariant tori for Hamiltonian systems, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **15** (1988), p. 115–147.

[16] ———, Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation, *Comm. Math. Phys.* **146** (1992), p. 447–482.

[17] ———, Discrete one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators with pure point spectrum, *Acta Math.* **179** (1997), p. 153–196.

[18] ———, Almost reducibility of linear quasi-periodic systems, in *Smooth ergodic theory and its applications (Seattle, WA, 1999)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 69, Amer. Math. Soc., 2001, p. 679–705.

[19] ———, Ergodic skew-systems on $\mathbb{T}^d \times \mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **22** (2002), p. 1429–1449.

[20] R. FABBRI & R. A. JOHNSON – Genericity of exponential dichotomy for two-dimensional differential systems, *Ann. Mat. Pura Appl.* **178** (2000), p. 175–193.

[21] A. FEDOTOV & F. KLOPP – Anderson transitions for a family of almost periodic Schrödinger equations in the adiabatic case, *Comm. Math. Phys.* **227** (2002), p. 1–92.

[22] J. FRÖHLICH, T. SPENCER & P. WITTWER – Localization for a class of one-dimensional quasi-periodic Schrödinger operators, *Comm. Math. Phys.* **132** (1990), p. 5–25.

[23] A. Y. GORDON – The point spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator, *Uspehi Mat. Nauk* **31** (1976), p. 257–258.

[24] A. Y. GORDON, S. Y. JITOMIRSKAYA, Y. LAST & B. SIMON – Duality and singular continuous spectrum in the almost Mathieu equation, *Acta Math.* **178** (1997), p. 169–183.

[25] S. HADJ AMOR – Sur la densité d'état de l'opérateur de Schrödinger quasi-périodique unidimensionnel, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **343** (2006), p. 423–426.

[26] H. HE & J. YOU – Full measure reducibility of generic one-parameter family of quasi-periodic linear systems, manuscrit, 2006.

[27] B. HELFFER & J. SJÖSTRAND – Semiclassical analysis for Harper's equation. III. Cantor structure of the spectrum, *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **39** (1989), p. 1–124.

[28] M.-R. HERMAN – Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Publ. Math. I.H.É.S.* **49** (1979), p. 5–233.

[29] ———, Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnol′d et de Moser sur le tore de dimension 2, *Comment. Math. Helv.* **58** (1983), p. 453–502.

[30] S. Y. JITOMIRSKAYA – Metal-insulator transition for the almost Mathieu operator, *Ann. of Math.* **150** (1999), p. 1159–1175.

[31] R. A. JOHNSON – Analyticity of spectral subbundles, *J. Differential Equations* **35** (1980), p. 366–387.

[32] R. A. JOHNSON & J. MOSER – The rotation number for almost periodic potentials, *Comm. Math. Phys.* **84** (1982), p. 403–438.

[33] R. A. JOHNSON & G. R. SELL – Smoothness of spectral subbundles and reducibility of quasiperiodic linear differential systems, *J. Differential Equations* **41** (1981), p. 262–288.

[34] À. JORBA & C. SIMÓ – On the reducibility of linear differential equations with quasiperiodic coefficients, *J. Differential Equations* **98** (1992), p. 111–124.

[35] R. KRIKORIAN – $C^0$-densité globale des systèmes produits-croisés sur le cercle réductibles, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19** (1999), p. 61–100.

[36] ______, Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts, *Astérisque* **259** (1999).

[37] ______, Réductibilité presque partout des flots fibrés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), p. 187–240.

[38] ______, Global density of reducible quasi-periodic cocycles on $\mathbf{T}^1 \times \mathrm{SU}(2)$, *Ann. of Math.* **154** (2001), p. 269–326.

[39] ______, Reducibility, differentiable rigidity and Lyapunov exponents for quasi-periodic cocycles on $\mathbb{T} \times SL(2, \mathbb{R})$, prépublication arXiv:math/0402333.

[40] R. MAÑÉ – *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Ergebnisse Math. Grenzg. (3), vol. 8, Springer, 1987.

[41] J. MOSER – Convergent series expansions for quasi-periodic motions, *Math. Ann.* **169** (1967), p. 136–176.

[42] J. MOSER & J. PÖSCHEL – An extension of a result by Dinaburg and Sinaĭ on quasiperiodic potentials, *Comment. Math. Helv.* **59** (1984), p. 39–85.

[43] M. G. NERURKAR – On the construction of smooth ergodic skew-products, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **8** (1988), p. 311–326.

[44] V. I. OSELEDEC – A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **19** (1968), p. 179–210.

[45] L. PASTUR & A. FIGOTIN – *Spectra of random and almost-periodic operators*, Grund. Math. Wiss., vol. 297, Springer, 1992.

[46] J. PUIG – Cantor spectrum for the almost Mathieu operator, *Comm. Math. Phys.* **244** (2004), p. 297–309.

[47] ______, A nonperturbative Eliasson's reducibility theorem, *Nonlinearity* **19** (2006), p. 355–376.

[48] M. RYCHLIK – Renormalization of cocycles and linear ODE with almost-periodic coefficients, *Invent. Math.* **110** (1992), p. 173–206.

[49] B. SIMON – Kotani theory for one-dimensional stochastic Jacobi matrices, *Comm. Math. Phys.* **89** (1983), p. 227–234.

[50] Y. G. SINAĬ – Structure of the spectrum of a Schrödinger difference operator with almost periodic potential near the left boundary, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **19** (1985), p. 42–48, 96.

[51] ______, Anderson localization for one-dimensional difference Schrödinger operator with quasiperiodic potential, *J. Statist. Phys.* **46** (1987), p. 861–909.

L. Hakan ELIASSON

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris VII
UMR 7586 du CNRS
Case 7052
2 place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05
*E-mail* : hakane@math.jussieu.fr