

Astérisque

OUSSAMA HIJAZI

**Géométrie différentielle, physique mathématique,
mathématiques et société (II) - Volume en l'honneur de
Jean Pierre Bourguignon - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 322 (2008), p. I-XVI

http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__322__R1_0

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

322

ASTÉRISQUE

2008

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE,
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (II)

Volume en l'honneur de
Jean Pierre BOURGUIGNON

Oussama HIJAZI, éditeur

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ousama Hijazi

Institut Élie Cartan (IÉCN) Université Henri Poincaré, Nancy I, B.P. 239,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

hijazi@iecn.u-nancy.fr

Classification mathématique par sujet (2000). — 11Axx, 14J45, 14M99, 14N35, 20Gxx, 30H05, 32H02, 32M15, 32Q99, 35H10, 35J60, 49Q05, 53A10, 53A30, 53C10, 53C20, 53C21, 53C25, 53C44, 53C55, 53D20, 53D45, 58A14, 58E12, 58J05, 58J20.

Mots-clefs. — Application tangente, caractéristique de Cauchy, compactification, connectivité rationnelle, continuation analytique, courbe analytique complexe, courbe rationnelle minimale, courbure, distribution, enveloppe projective, équations hypoelliptiques, espace de métriques kählériennes, exposeurs et somme-produit, faisceau tangent de nef, flot de Kähler-Ricci, hélicoïdes, invariants de Gromov-Witten, Kähler, métriques de Kähler-Einstein, métriques extrémales de Calabi, nombres de saturation, nombres premiers, orbites affines, problème de Plateau, prolongation, Q -courbure, rigidité de déformation, stabilité, structure de Poincaré-Einstein, structure géométrique, surface minimale proprement plongée, symplecticité, système différentiel, tamis, théorie d'index et théorème de point fixe associés, théorie de Hodge, théorie du degré, transport parallèle, variété des tangentes rationnelles minimales, variétés de Kähler, volume renormalisé.

TABLE GÉNÉRALE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (I) *Astérisque 321 (2008)*

James Simons & Dennis Sullivan — <i>Structured bundles define differential K-theory</i>	1
Nigel Hitchin — <i>Einstein metrics and magnetic monopoles</i>	5
Kefeng Liu, Xiaofeng Sun & Shing-Tung Yau — <i>Geometry of Moduli Spaces</i>	31
Robert L. Bryant — <i>Gradient Kähler Ricci Solitons</i>	51
Denis Auroux — <i>Special Lagrangian fibrations, mirror symmetry and Calabi-Yau double covers</i>	99
Jeff Cheeger & Bruce Kleiner — <i>Characterization of the Radon-Nikodym Property in terms of inverse limits</i>	129
Xiuxiong Chen & Yudong Tang — <i>Test configuration and geodesic rays</i> ...	139
Rafe Mazzeo — <i>Flexibility of singular Einstein metrics</i>	169
Piotr T. Chruściel & João Lopes Costa — <i>On uniqueness of stationary vacuum black holes</i>	195
Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki & Akira Yoshioka — <i>A new nonformal noncommutative calculus : Associativity and finite part regularization</i>	267

**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (II)**
Astérisque 322 (2008)

Claire Voisin — <i>Rationally connected 3-folds and symplectic geometry</i>	1
Sun-Yung Alice Chang & Paul C. Yang — <i>The Q-curvature Equation in Conformal Geometry</i>	23
Jean-Michel Bismut — <i>A survey of the hypoelliptic Laplacian</i>	39
Gang Tian — <i>New results and problems on Kähler-Ricci flow</i>	71
Vestislav Apostolov, David M. J. Calderbank, Paul Gauduchon & Christina W. Tønnesen-Friedman — <i>Extremal Kähler metrics on ruled manifolds and stability</i>	93
Ngaiming Mok — <i>Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents</i>	151
David Hoffman & Brian White — <i>On the number of minimal surfaces with a given boundary</i>	207
Peter Sarnak — <i>Equidistribution and Primes</i>	225
Reese Harvey, Blaine Lawson & John Wermer — <i>The projective hull of certain curves in \mathbb{C}^2</i>	241

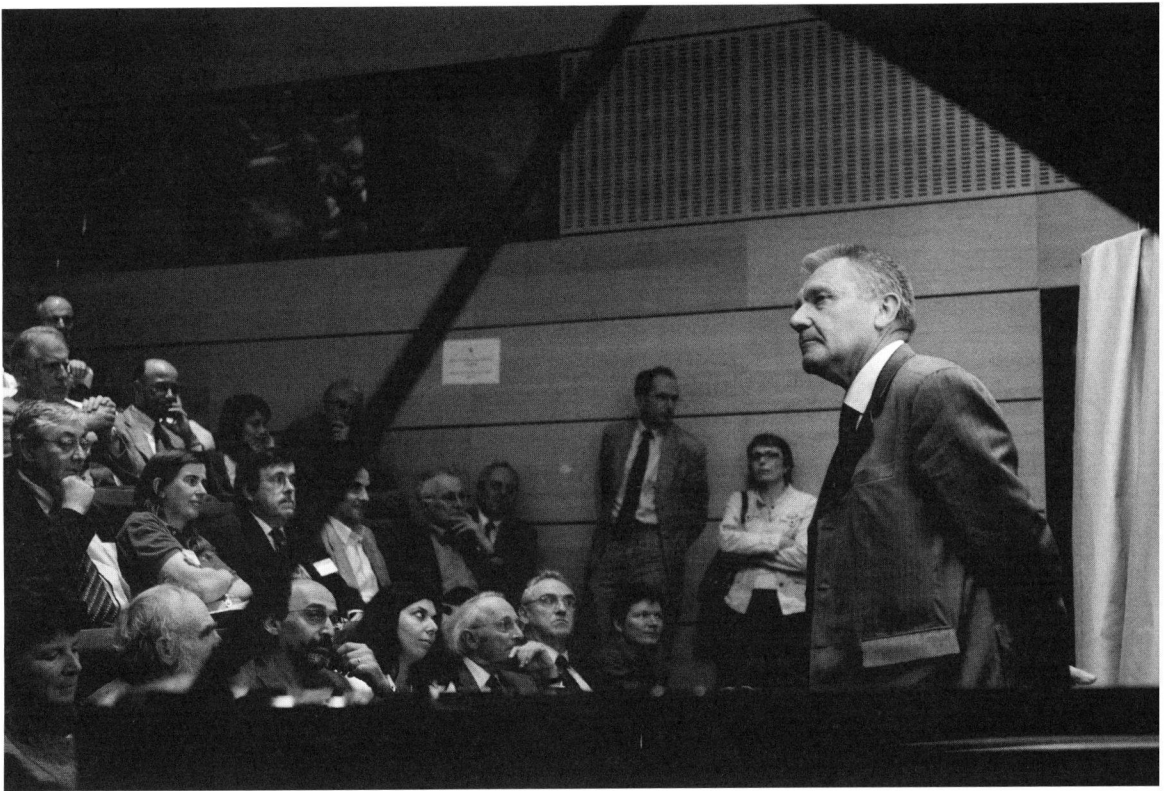


Photo : Jean-François Dars - CNRS Image

**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE,
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (II)**

**Volume en l'honneur de
Jean Pierre BOURGUIGNON**

Oussama HIJAZI, éditeur

Résumé. — Ces deux volumes regroupent des articles originaux de recherche portant sur différentes facettes de la géométrie différentielle, l'analyse sur les variétés, la géométrie complexe, la géométrie algébrique, la théorie des nombres et la relativité générale.

Ils sont issus du Colloque « Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société » pour célébrer les 60 ans de Jean Pierre Bourguignon, qui s'est tenu du 27 au 31 août 2007 à l'Institut des Hautes Études Scientifiques et à l'École polytechnique.

Abstract (Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society)

These two volumes contain original research articles on various aspects of differential geometry, analysis on manifolds, complex geometry, algebraic geometry, number theory and general relativity.

They derive from the Conference “Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society” to celebrate the 60th birthday of Jean-Pierre Bourguignon, held from the 27th to 31st of August 2007 at the Institut des Hautes Études Scientifiques and at the École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

Claire Voisin — <i>Rationally connected 3-folds and symplectic geometry</i>	1
0. Introduction	1
Thanks	6
1. Study of the rationally connected fibration of Y	7
2. The case where X is an almost conic bundle	10
3. Proofs of the main results	18
References	20
Sun-Yung Alice Chang & Paul C. Yang — <i>The Q-curvature Equation in Conformal Geometry</i>	23
1. Introduction	23
2. Conformally covariant operators and the Q -curvature equation	24
3. A Gauss-Bonnet formula for noncompact 4-manifolds	27
Step I	27
Step II	28
Step III	28
Remarks	29
4. Poincaré-Einstein structure and renormalized volume	29
5. Renormalized volume in higher dimensions	32
References	37
Jean-Michel Bismut — <i>A survey of the hypoelliptic Laplacian</i>	39
Introduction	39
1. The case of the circle	41
1.1. Elliptic and hypoelliptic operators	41
1.2. The Kolmogorov operator and Hörmander's theorem	42
1.3. The hypoelliptic Laplacian as a Hodge Laplacian	48

2. Hodge theory and the Witten Laplacian	52
2.1. Classical Hodge theory and the Witten Laplacian	52
2.2. The symplectic Witten Laplacian	54
3. The hypoelliptic Laplacian in de Rham theory	55
3.1. The de Rham operator on \mathcal{X}^*	56
3.2. A bilinear form on $\Omega^c(\mathcal{X}^*)$	57
3.3. A Hamiltonian function	57
3.4. A self-adjointness property	59
3.5. The Weitzenböck formula	59
3.6. The hypoelliptic Laplacian	60
3.7. An interpolation property: the limit $b \rightarrow 0$ and classical Hodge theory	60
3.8. An interpolation property: the limit $b \rightarrow +\infty$ and the geodesic flow	62
4. The hypoelliptic Dirac operator	62
4.1. Another approach to hypoellipticity	62
4.2. The hypoelliptic Dirac operator	63
4.3. The hypoelliptic Laplacian in Dolbeault theory	66
4.4. The limit as $b \rightarrow 0$	67
References	68
Gang Tian — <i>New results and problems on Kähler-Ricci flow</i>	71
1. Introduction	72
2. A sharp local existence for Kähler-Ricci flow	72
3. Finite-time singularity	75
4. Extending Kähler-Ricci flow across singular time	81
5. Asymptotic behavior of Kähler-Ricci flow	83
6. The case of algebraic surfaces	88
References	90
Vestislav Apostolov, David M. J. Calderbank, Paul Gauduchon & Christina W. Tønnesen-Friedman — <i>Extremal Kähler metrics on ruled manifolds and stability</i>	93
Introduction	93
Notation and convention	95
1. Extremal metrics on admissible ruled manifolds	95
1.1. Admissible ruled manifolds	95
1.2. Admissible Kähler classes	97
1.3. Admissible momenta and Kähler metrics	98
1.4. Admissible momentum profiles	100
1.5. Standard admissible metrics	100

1.6. Symmetries of admissible Kähler metrics	101
1.7. Ricci form and scalar curvature	104
1.8. Hamiltonian 2-forms	106
1.9. Extremal admissible Kähler class	108
1.10. Hirzebruch-like surfaces	114
2. Relative K -energy and extremal metrics	115
2.1. The space of Kähler metrics	115
2.2. The Chen-Tian Theorem	120
2.3. The relative energy of admissible metrics	122
2.4. A borderline case example	127
3. Extremal metrics and stability	131
3.1. The Futaki character on polarized manifolds	131
3.2. Deformation to the normal cone	133
3.3. The space $\mathcal{D}(M)$ as a test configuration: Polarizations	135
3.4. The space $\mathcal{D}(M)$ as a test configuration: \mathbb{C}^* -actions	137
3.5. The relative Futaki invariant of $\mathcal{D}(M)$	139
Appendix A. The extremal polynomial for $N = 1$	144
References	148

Ngaiming Mok — *Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents*

151	
1. Introduction	152
1.1. Background and motivation	152
1.2. A heuristic picture	153
1.3. Summary and presentation of results	155
Acknowledgement	156
2. Varieties of minimal rational tangents	156
2.1. Minimal rational curves	156
2.2. The universal family of \mathcal{K} -curves and the canonical double fibration	158
2.3. \mathcal{K} -curves marked at a point	159
2.4. The tangent map and varieties of minimal rational tangents	159
2.5. Examples	162
3. Linearly degenerate VMRTs	164
3.1. Distributions and differential systems generated by VMRTs	164
3.2. Integrability of distributions via projective geometry of VMRTs	165
3.3. Fano homogeneous contact manifolds	166
3.4. Applications to rigidity under Kähler deformation	168
4. Holomorphic G-structures and prolongations associated to VMRTs	171

4.1. Holomorphic conformal structures	171
4.2. G-structures associated to irreducible Hermitian symmetric spaces of rank ≥ 2	174
4.3. Flatness of G-structures via VMRTs	177
4.4. Prolongation of linear subalgebras of infinitesimal automorphisms of VMRTs	178
4.5. Applications to rigidity under Kähler deformation	182
5. Analytic continuation of VMRT-preserving maps	185
5.1. Characterization of the tautological foliation under a non-degeneracy condition on the Gauss map	185
5.2. Birationality of the tangent map and Cartan-Fubini extension	187
5.3. The Lazarsfeld Problem and other applications of Cartan-Fubini extension	189
6. Parallel transport of the second fundamental form	192
6.1. VMRTs in a differential-geometric context-parallel transport in the solution of the Generalized Frankel Conjecture	192
6.2. Propagation of the second fundamental form along a standard rational curve	194
6.3. Recognition of certain rational homogeneous manifolds from VMRTs at a general point	196
6.4. Projective manifolds with nef tangent bundles and 1-dimensional VMRTs	198
7. Privileged subvarieties of uniruled projective manifolds	200
7.1. Subvarieties saturated with minimal rational curves	200
7.2. A relative version of the Gauss map condition for linear sections of VMRTs	200
7.3. Parallel transport of VMRTs along minimal rational curves	202
References	203
David Hoffman & Brian White — <i>On the number of minimal surfaces with a given boundary</i>	207
1. Introduction	207
2. Counting minimal surfaces	208
2.2. Mean convex ambient manifolds N with piecewise smooth boundary	209
2.5. Counting in the presence of symmetry	212
3. An Integer Invariant	213
4. Counting the number of handles on a surface invariant under an involution	214
4.4. Counting Y -surfaces	216

5. Higher genus helicoids in $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}$	217
5.1. A boundary value problem for minimal Y -surfaces	217
5.2. Existence of a suitable $M \in \mathcal{M}_Y^*(N, \Gamma)$ with $ Y \cap M = k$	219
References	223
Peter Sarnak — <i>Equidistribution and Primes</i>	225
Dirichlet's Theorem	226
Initial Generalizations	226
Two Variables	227
Hardy-Littlewood n -tuple Conjecture	228
Pythagorean Triples	229
Integral Apollonian Packings	230
Affine Orbits and Saturation	232
An Affine Linear Sieve	233
Comments about Proofs	236
Acknowledgements	238
References	238
Reese Harvey, Blaine Lawson & John Wermer — <i>The projective hull of certain curves in \mathbb{C}^2</i>	241
1. Introduction	242
2. The finiteness theorem	243
3. The analyticity theorem	249
4. Boundary Regularity	252
References	254

AVANT-PROPOS

Le colloque « Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société » pour célébrer les 60 ans de Jean Pierre Bourguignon, organisé par des anciens élèves et amis, s'est tenu du 27 au 31 août 2007 à l'Institut des Hautes Études Scientifiques et à l'École polytechnique.

Ce colloque fut l'occasion de réunir de nombreux mathématiciens prestigieux d'horizons très différents qui ont chaleureusement accepté de donner une conférence, témoignant ainsi de leur amitié et de leur considération pour tout ce que Jean Pierre Bourguignon a fait pour la communauté mathématique nationale et internationale.

Les points forts de cette semaine intense (six conférences par jour) furent le niveau scientifique exceptionnel des exposés, la dynamique interactive entre les conférenciers et le public, l'exposé sur la K-théorie différentielle de Jim Simons, toujours fasciné par les mathématiques après 25 années à la tête de la société financière Renaissance Technologies, la superbe conférence d'Étienne Ghys sur l'« attracteur étrange de Lorenz », l'ambiance amicale et la diversité des sujets et activités proposées à l'image des intérêts et des investissements de Jean Pierre Bourguignon.

Grâce à la mobilisation remarquable d'un grand nombre de personnes et d'institutions, cette fête a été une véritable réussite. La manifestation a reçu le soutien financier des instances nationales et internationales de la recherche mathématique, ce qui a permis au colloque de se dérouler dans d'excellentes conditions (le beau temps revenu en cette fin de mois d'août y a contribué) et de permettre à nombre de jeunes mathématiciens européens et américains de participer.

Ce colloque ne pouvait avoir lieu sans le soutien financier des institutions suivantes : Centre National de la Recherche Scientifique, Ministère de l'Éducation Nationale, Ministère des Affaires Étrangères, Conseil Régional Ile de France, National Science Foundation, Clay Mathematics Institute, Institut des Hautes Études Scientifiques, École polytechnique, Institut Élie Cartan, Nancy, Université de Tours, IRMA Strasbourg, et du soutien logistique du personnel de l'Institut des Hautes Études Scientifiques et de l'École polytechnique.

Un grand merci à Madame Élisabeth Jasserand (Institut des Hautes Études Scientifiques) et à Madame Michèle Lavallette (École polytechnique) pour leur mobilisation extrêmement efficace. Merci également à Springer, et en particulier à Madame Catriona Byrne, pour le divertissement artistique et culturel.

La complicité, le dialogue et l'implication de mes collègues (et amis de Jean Pierre Bourguignon) Mireille Chaleyat-Maurel et Robert J. Stanton, dans toutes les phases de l'organisation de ce colloque, ont été des atouts indispensables pour son succès.

Oussama Hijazi