

Astérisque

OUSSAMA HIJAZI

**Géométrie différentielle, physique mathématique,
mathématiques et société (I) : Volume en l'honneur de
Jean Pierre Bourguignon - Pages préliminaires**

Astérisque, tome 321 (2008), p. I-XVI

http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__321__R1_0

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

321

ASTÉRISQUE

2008

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE,
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (I)

Volume en l'honneur de
Jean Pierre BOURGUIGNON

Oussama HIJAZI, éditeur

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Ousama Hijazi

Institut Élie Cartan (IÉCN) Université Henri Poincaré, Nancy I, B.P. 239,
54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

hijazi@iecn.u-nancy.fr

Classification mathématique par sujet (2000). — 14D21, 14H15, 14J32, 19E08, 35J70, 46L65, 46XX, 51N30, 51XX, 53C21, 53C25, 53C26, 53C28, 53C55, 53C55, 53C56, 53D10, 53D12, 53D55, 55N15, 57N65, 58D27, 58G11, 58J28, 83C57.

Mots-clefs. — Algèbre de Weyl, calcul transcendantal, configuration de test, conjecture de Strominger-Yau-Zaslow, connexions, courbe spectrale, dégénération torique, équation de Monge-Ampère, équations de Bogomolny, espace dual séparable, espaces de modules, fibrations lagrangiennes spéciales, fibrés structurés, flot de Ricci, forme de Chern-Simons, formes normales, hyperkähler, invariant χ , invariant de Futaki, Kähler quaternionique, K -théorie différentielle, limite inverse, métriques d'Einstein, monopole, problèmes de modules, propriété de Radon-Nikodym, propriété normante asymptotique, rayon géodésique, revêtements doubles de Calabi-Yau, singularités coniques, solitons, symétrie miroir, théorèmes d'unicité, trous noirs stationnaires.

TABLE GÉNÉRALE

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE, MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (I) *Astérisque 321 (2008)*

James Simons & Dennis Sullivan — <i>Structured bundles define differential K-theory</i>	1
Nigel Hitchin — <i>Einstein metrics and magnetic monopoles</i>	5
Kefeng Liu, Xiaofeng Sun & Shing-Tung Yau — <i>Geometry of Moduli Spaces</i>	31
Robert L. Bryant — <i>Gradient Kähler Ricci Solitons</i>	51
Denis Auroux — <i>Special Lagrangian fibrations, mirror symmetry and Calabi-Yau double covers</i>	99
Jeff Cheeger & Bruce Kleiner — <i>Characterization of the Radon-Nikodym Property in terms of inverse limits</i>	129
Xiuxiong Chen & Yudong Tang — <i>Test configuration and geodesic rays</i> ...	139
Rafe Mazzeo — <i>Flexibility of singular Einstein metrics</i>	169
Piotr T. Chruściel & João Lopes Costa — <i>On uniqueness of stationary vacuum black holes</i>	195
Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki & Akira Yoshioka — <i>A new nonformal noncommutative calculus : Associativity and finite part regularization</i>	267

**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (II)**
Astérisque 322 (2008)

Claire Voisin — <i>Rationally connected 3-folds and symplectic geometry</i>	1
Sun-Yung Alice Chang & Paul C. Yang — <i>The Q-curvature Equation in Conformal Geometry</i>	23
Jean-Michel Bismut — <i>A survey of the hypoelliptic Laplacian</i>	39
Gang Tian — <i>New results and problems on Kähler-Ricci flow</i>	71
Vestislav Apostolov, David M. J. Calderbank, Paul Gauduchon & Christina W. Tønnesen-Friedman — <i>Extremal Kähler metrics on ruled manifolds and stability</i>	93
Ngaiming Mok — <i>Geometric structures on uniruled projective manifolds defined by their varieties of minimal rational tangents</i>	151
David Hoffman & Brian White — <i>On the number of minimal surfaces with a given boundary</i>	207
Peter Sarnak — <i>Equidistribution and Primes</i>	225
Reese Harvey, Blaine Lawson & John Wermer — <i>The projective hull of certain curves in \mathbb{C}^2</i>	241



Photo : Jean-François Dars - CNRS Image

**GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE,
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE,
MATHÉMATIQUES ET SOCIÉTÉ (I)**

**Volume en l'honneur de
Jean Pierre BOURGUIGNON**

Oussama HIJAZI, éditeur

Résumé. — Ces deux volumes regroupent des articles originaux de recherche portant sur différentes facettes de la géométrie différentielle, l'analyse sur les variétés, la géométrie complexe, la géométrie algébrique, la théorie des nombres et la relativité générale.

Ils sont issus du Colloque « Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société » pour célébrer les 60 ans de Jean Pierre Bourguignon, qui s'est tenu du 27 au 31 août 2007 à l'Institut des Hautes Études Scientifiques et à l'École polytechnique.

Abstract (Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society)

These two volumes contain original research articles on various aspects of differential geometry, analysis on manifolds, complex geometry, algebraic geometry, number theory and general relativity.

They derive from the Conference "Differential Geometry, Mathematical Physics, Mathematics and Society" to celebrate the 60th birthday of Jean-Pierre Bourguignon, held from the 27th to 31st of August 2007 at the Institut des Hautes Études Scientifiques and at the École polytechnique.

TABLE DES MATIÈRES

James Simons & Dennis Sullivan — <i>Structured bundles define differential K-theory</i>	1
References	3
Nigel Hitchin — <i>Einstein metrics and magnetic monopoles</i>	5
1. Introduction	5
2. Euclidean monopoles	6
2.1. Twistor spaces	9
3. Hyperbolic monopoles	11
3.1. Centres	12
3.2. Rational normal curves	14
4. Charge 2 hyperbolic monopoles	16
4.1. SU(2) monopoles	16
4.2. Orbifold twistor spaces	18
4.3. The contact form	20
4.4. SU(3) monopoles	21
4.5. Axially symmetric monopoles	23
5. New metrics for old	26
References	28
Kefeng Liu, Xiaofeng Sun & Shing-Tung Yau — <i>Geometry of Moduli Spaces</i>	31
1. Introduction	31
2. Fundamentals of Teichmüller and Moduli Spaces	32
3. Canonical Metrics on \mathcal{M}_g	36
4. Notions of Goodness	39
5. The Monge-Ampère Equation and the Goodness	43
6. Rigidity and Gauss-Bonnet Theorem	46

References	49
Robert L. Bryant — <i>Gradient Kähler Ricci Solitons</i>	51
1. Introduction and Summary	51
1.1. Basic facts	52
1.1.1. The associated holomorphic vector field Z	52
1.1.2. The holomorphic volume form Υ	52
1.1.3. The Υ -divergence of Z	52
1.2. Generality	53
1.2.1. Nonsingular extension	53
1.2.2. Singular existence	53
1.3. The positive case	54
1.4. The toric case	55
1.5. Acknowledgement	56
2. Associated Holomorphic Quantities	56
2.1. Preliminaries	56
2.1.1. Tensors and inner products	56
2.1.2. Coordinate expressions and the Ricci form	57
2.1.3. The gradient Kähler Ricci soliton condition	58
2.2. The associated holomorphic volume form	58
2.2.1. Existence of special coordinates	58
2.3. The holomorphic flow	59
2.3.1. The infinitesimal symmetry	60
2.3.2. Z in special coordinates	60
2.3.3. The Υ -divergence of Z	61
2.4. Examples	62
3. Potentials and local generality	65
3.1. Local potentials	66
3.2. Nonsingular extension problems	66
3.2.1. Local reduction to equations	66
3.3. Near singular points of Z	69
3.3.1. Linear parts and linearizability	69
3.3.2. Prescribed eigenvalues	73
3.3.3. Normalizing volume forms	73
3.3.4. Local solitons near a singular point	74
3.3.5. A boundary value formulation	75
4. Poincaré coordinates in the positive case	76
4.1. First consequences	76
4.2. Poincaré coordinates	80

4.3. Coordinate ambiguities	81
4.4. Global consequences	83
4.4.1. Periodic orbits	83
4.4.2. An invariant potential	83
4.4.3. Normalized linearizing coordinates	84
4.4.4. Totally geodesic submanifolds	85
4.4.5. Growth of f in linearizing coordinates	86
5. The toric case	90
5.1. Symmetry reduction in the toric case	90
5.1.1. A singular initial value problem	92
5.1.2. A Lagrangian formulation	95
References	96

Denis Auroux — *Special Lagrangian fibrations, mirror symmetry and Calabi-Yau double covers* 99

1. Introduction	100
Acknowledgements	101
2. The SYZ conjecture and mirror symmetry	102
2.1. Motivation	102
2.2. Special Lagrangian fibrations and T-duality	103
2.3. Mirror symmetry for Calabi-Yau manifolds	105
2.4. Mirror symmetry in the complement of an anticanonical divisor	107
3. Special Lagrangian fibrations and double covers	114
3.1. Special Lagrangians and Calabi-Yau double covers	114
3.2. Example: $\mathbb{C}P^1$ and elliptic curves	116
3.3. Example: Elliptic surfaces	118
3.4. Example: $\mathbb{C}P^2$ and K3	120
3.5. Towards mirror symmetry for double covers	122
References	126

Jeff Cheeger & Bruce Kleiner — *Characterization of the Radon-Nikodym Property in terms of inverse limits* 129

1. Introduction	129
Relation with previous work	130
Applications to metric measure spaces	131
Acknowledgement	131
2. Inverse systems	131
3. The proof of Theorem 1.4	134
4. A variant of the Determining Property	135

5. GFDA versus ANP	137
References	137
Xiuxiong Chen & Yudong Tang — <i>Test configuration and geodesic rays</i>	
1. Introduction	139
Acknowledgments	143
2. Preliminary	143
2.1. Geodesic rays in Kähler potential space	143
2.2. Test configuration and equivariant embedding	145
3. Relative $C^{1,1}$ geodesic ray from smooth test configuration	146
3.1. Existence	146
3.2. Special cases: geodesic line and Toric variety	148
4. Connection between algebraic notions and geometric notions	149
4.1. Algebraic ray and geodesic ray	149
4.2. Bounded ambient geometry and test configuration	151
4.3. Futaki invariant, \aleph invariant and geodesic stability	151
5. Monge-Ampère equation on Simple test configurations	154
5.1. Construction of $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{M}$	154
5.2. One side of the Correspondence	156
5.3. The other side of the correspondence	156
6. Openness of super regular solution	159
7. Geodesic ray from Toric degenerations	161
7.1. Basics of Toric degeneration	161
Example	162
7.2. Explicit calculation of the $C^{1,1}$ geodesic ray	162
References	166
Rafe Mazzeo — <i>Flexibility of singular Einstein metrics</i>	
1. Introduction	169
2. Iterated cone-edge spaces	173
3. Surfaces with conic singularities	174
4. Conifolds in dimension 3	178
5. Higher dimensions and codimensions	182
6. Methods	185
6.1. The Einstein equation and Bianchi gauge	185
6.2. Conic and edge operators	187
References	191

Piotr T. Chruściel & João Lopes Costa — <i>On uniqueness of stationary vacuum black holes</i>	195
1. Introduction	195
1.1. Static case	198
2. Preliminaries	200
2.1. Asymptotically flat stationary metrics	200
2.2. Domains of outer communications, event horizons	201
2.3. Killing horizons, bifurcate horizons	202
2.3.1. Near-horizon geometry	203
2.4. Globally hyperbolic asymptotically flat domains of outer communications are simply connected	204
3. Zeros of Killing vectors	205
4. Horizons and domains of outer communications in regular space-times ..	208
4.1. Sections of horizons	208
4.2. The structure of the domain of outer communications	213
4.3. Smoothness of event horizons	220
4.4. Event horizons vs Killing horizons in analytic vacuum space-times ..	221
5. Stationary axisymmetric black hole space-times: the area function	223
5.1. Integrability	224
5.2. The area function for a class of space-times with a commutative group of isometries	225
5.3. The ergoset in space-time dimension four	239
6. The reduction to a harmonic map problem	242
6.1. The orbit space in space-time dimension four	242
6.2. Global coordinates on the orbit space	243
6.3. All horizons non-degenerate	244
6.4. Global coordinates on $\langle\langle \mathcal{M}_{\text{ext}} \rangle\rangle$	247
6.5. Boundary conditions at non-degenerate horizons	248
6.5.1. The Ernst potential	250
6.6. The harmonic map problem: existence and uniqueness	255
6.7. Candidate solutions	256
7. Proof of Theorem 1.3	257
7.1. Rotating horizons	257
7.2. Non-rotating case	258
8. Concluding remarks	259
Acknowledgements	260
References	260
Index	265

Hideki Omori, Yoshiaki Maeda, Naoya Miyazaki & Akira Yoshioka	
— <i>A new nonformal noncommutative calculus: Associativity and finite part regularization</i>	
	267
1. Introduction	267
2. General ordered expressions and IOP	270
2.1. Fundamental product formulas and intertwiners	270
2.2. Extension of products and intertwiners	271
3. Star exponential functions	273
3.1. General properties of $*$ -exponential functions	274
3.2. Star-exponentials of quadratic forms in the normal ordered expression	276
3.3. Intertwiners for exponential functions of quadratic forms	277
3.4. The general ordered expression of $e_*^{t(z + \frac{1}{i\hbar} u \circ v)}$	279
3.5. Star exponential functions of general quadratic forms	280
4. Criteria for associativity	282
4.1. Remarks on star exponential functions	282
4.2. Basic criteria for associativity for the extended product	283
5. Vacuums and their matrix element expressions	286
6. Inverses and their analytic continuation	288
6.1. The Hadamard finite part procedure	288
6.2. Basic properties of the inverse of $z + \frac{1}{i\hbar} u \circ v$	290
6.3. Analytic continuation of inverses	292
References	296

AVANT-PROPOS

Le colloque « Géométrie différentielle, physique mathématique, mathématiques et société » pour célébrer les 60 ans de Jean Pierre Bourguignon, organisé par des anciens élèves et amis, s'est tenu du 27 au 31 août 2007 à l'Institut des Hautes Études Scientifiques et à l'École polytechnique.

Ce colloque fut l'occasion de réunir de nombreux mathématiciens prestigieux d'horizons très différents qui ont chaleureusement accepté de donner une conférence, témoignant ainsi de leur amitié et de leur considération pour tout ce que Jean Pierre Bourguignon a fait pour la communauté mathématique nationale et internationale.

Les points forts de cette semaine intense (six conférences par jour) furent le niveau scientifique exceptionnel des exposés, la dynamique interactive entre les conférenciers et le public, l'exposé sur la K-théorie différentielle de Jim Simons, toujours fasciné par les mathématiques après 25 années à la tête de la société financière Renaissance Technologies, la superbe conférence d'Étienne Ghys sur l'« attracteur étrange de Lorentz », l'ambiance amicale et la diversité des sujets et activités proposées à l'image des intérêts et des investissements de Jean Pierre Bourguignon.

Grâce à la mobilisation remarquable d'un grand nombre de personnes et d'institutions, cette fête a été une véritable réussite. La manifestation a reçu le soutien financier des instances nationales et internationales de la recherche mathématique, ce qui a permis au colloque de se dérouler dans d'excellentes conditions (le beau temps revenu en cette fin de mois d'août y a contribué) et de permettre à nombre de jeunes mathématiciens européens et américains de participer.

Ce colloque ne pouvait avoir lieu sans le soutien financier des institutions suivantes : Centre National de la Recherche Scientifique, Ministère de l'Éducation Nationale, Ministère des Affaires Étrangères, Conseil Régional Ile de France, National Science Foundation, Clay Mathematics Institute, Institut des Hautes Études Scientifiques, École polytechnique, Institut Élie Cartan, Nancy, Université de Tours, IRMA Strasbourg, et du soutien logistique du personnel de l'Institut des Hautes Études Scientifiques et de l'École polytechnique.

Un grand merci à Madame Élisabeth Jasserand (Institut des Hautes Études Scientifiques) et à Madame Michèle Lavallette (École polytechnique) pour leur mobilisation extrêmement efficace. Merci également à Springer, et en particulier à Madame Catriona Byrne, pour le divertissement artistique et culturel.

La complicité, le dialogue et l'implication de mes collègues (et amis de Jean Pierre Bourguignon) Mireille Chaleyat-Maurel et Robert J. Stanton, dans toutes les phases de l'organisation de ce colloque, ont été des atouts indispensables pour son succès.

Oussama Hijazi