Astérisque

PIERRE COLMEZ

Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham

Astérisque, tome 319 (2008), p. 187-212

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__187_0>

Astérisque
319, 2008, p. 187–212

CONDUCTEUR D'ARTIN D'UNE REPRÉSENTATION DE DE RHAM

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous munissons l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ de Fontaine d'une filtration par « valuation de convergence ». Cette filtration est stable par l'action de $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et sa restriction à $\overline{K}$ coïncide avec la filtration induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification. Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, cette filtration induit une filtration croissante de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et on montre que, si V est potentiellement semi-stable, l'invariant numérique naturel associé à cette filtration coïncide avec le conducteur d'Artin de la représentation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ du groupe de Weil-Deligne de K.

***Abstract* (Artin conductor of a de Rham representation).** — We endow Fontaine's ring $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ with a filtration defined by means of "valuation of convergence". This filtration is stable the action of $\mathscr{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ and its restriction to $\overline{K}$ coincides with the filtration induced by the filtration of $\mathscr{G}_K$ by ramification subgroups. If V is a de Rham representation, this filtration induces an increasing filtration on $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ and we show that the natural numerical invariant attached to this filtration coincides, if V is potentially semi-stable, with the Artin conductor of the representation $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ of the Weil-Deligne group of K.

Introduction

0.1. Notations. — Soit k_F un corps parfait de caractéristique p et soit $F = W(k_F)[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F. Ceci fait de F un corps complet pour la valuation discrète v_p normalisée par $v_p(p) = 1$, et dont le corps résiduel est k_F.

Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $F^{\mathrm{nr}} \subset \overline{F}$ l'extension maximale non ramifiée de F. La valuation v_p s'étend de manière unique à $\overline{F}$, et on note C le complété de $\overline{F}$ pour v_p. Si L est un sous-corps de C, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers.

Si $K \subset \overline{F}$ est une extension finie de F, on note $K_0 = K \cap F^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non ramifiée de F contenue dans K, $e_K = [K : K_0]$ l'indice de ramification absolu de K, $v_K = e_K^{-1} v_p$ la valuation de $\overline{K} = \overline{F}$ normalisée par $v_K(K^*) = \mathbf{Z}$, et $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ de K. Ce groupe est muni de sa filtration par les sous-groupes $\mathscr{G}_K^s$, $s \geq -1$, *de ramification*, et $\mathscr{G}_K^0$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathscr{G}_K$ tandis que le sous-groupe d'inertie sauvage de $\mathscr{G}_K$ est la réunion des $\mathscr{G}_K^s$ pour $s > 0$. La filtration sur $\mathscr{G}_K$ induit une filtration croissante de $\overline{K}$ par des sous-corps $\overline{K}^{(r)}$, avec $\overline{K}^{(r)} = \cap_{s>r-1} \overline{K}^{\mathscr{G}_K^s}$. En particulier, $\overline{K}^{(r)}$ est l'extension maximale non ramifiée K^{nr} de K, si $r < 1$ et $\overline{K}^{(1)}$ est l'extension maximale modérément ramifiée de K.

0.2. La filtration de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par valuation de convergence. — Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau de Fontaine. C'est un anneau topologique muni d'une action continue de $\mathscr{G}_F$ et, algébriquement, c'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C. Il est donc abstraitement isomorphe à $C[[T]]$ et $\overline{F}$ s'identifie à la clôture algébrique de F dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, mais il n'existe pas d'isomorphisme de $C[[T]]$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui soit continu ou qui commute avec l'action de $\mathscr{G}_F$. Malgré tout, on peut introduire une notion de rayon de convergence ou plutôt *valuation de convergence* d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui permet de munir $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ d'une filtration par des sous-anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$, pour $r \geq 0$, et cette filtration est stable sous l'action de $\mathscr{G}_K$. Le premier résultat concernant cette filtration est qu'elle permet de retrouver la filtration de $\overline{K} = \overline{F}$ induite par la filtration de $\mathscr{G}_K$ par les sous-groupes de ramification.

Théorème 0.1. — *Si $r \geq 0$, alors*

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)} \cap \overline{K} = \overline{K}^{(r)}.$$

Remarque 0.2. — Le lien entre ramification supérieure et valuation de convergence de fonctions analytiques a été mis en évidence par Deligne [**8**]. Il est à la base de la théorie d'Abbès et Saito [**1**] de la ramification supérieure dans le cas d'un corps résiduel non parfait. Le point de départ (cf. prop 2.3) de la démonstration du théorème 0.1 est le résultat de Deligne, mais passer par $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour définir la valuation de convergence présente l'avantage esthétique d'être complètement intrinsèque.

0.3. Conducteurs d'Artin et de Swan des représentations de de Rham. — Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, à poids [(1)] de Hodge-Tate ≤ 0, la filtration précédente sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit une filtration

(1) Cette condition assure que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$. Il est un peu délicat de définir une filtration par valuation de convergence sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}]$ tout entier, la multiplication par t pouvant diminuer la valuation de convergence. Il est probable que ce phénomène ne se produit pas pour les éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dont les conjugués sous $\mathscr{G}_F$ engendrent un sous-espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$; c'est en tout cas le cas pour les périodes des représentations de de Rham comme le montre le cor. 5.13. En particulier, on en déduit les égalités $c_{\mathrm{Art},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V(-1)) = c_{\mathrm{Sw},K}(V)$, ce qui permet d'étendre les définitions de $c_{\mathrm{Art},K}$ et $c_{\mathrm{Sw},K}$ au cas d'une représentation de de Rham quelconque.

sur le $K\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-module libre $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)=(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V)^{\mathscr{G}_K}$ par des sous-$K\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-modules libres $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}(V)$, pour $r\geq 0$. Ceci nous permet d'attacher à V des invariants numériques $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ définis par :

$$c_{\mathrm{Art},K}(V)=\sum_{r\geq 0}r\cdot\dim\big(\cap_{s>r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)/\cup_{s<r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)\big),$$
$$c_{\mathrm{Sw},K}(V)=\sum_{r\geq 1}(r-1)\cdot\dim\big(\cap_{s>r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)/\cup_{s<r}\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}(V)\big).$$

Les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont appelés respectivement *conducteur d'Artin* et *conducteur de Swan* de V. Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant.

Théorème 0.3. — *Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ d'image finie, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont respectivement les conducteurs d'Artin et de Swan de V.*

Ce résultat est une simple traduction du th. 0.1. Les deux résultats suivants sont plus profonds, mais sont des conséquences immédiates du fait que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable [(2)], du fait que le conducteur d'Artin (resp. de Swan) d'une représentation d'image finie est un entier d'après le théorème de Hasse-Arf, nul si et seulement si le groupe d'inertie (resp. d'inertie sauvage) agit trivialement, et du théorème 0.6 ci-dessous faisant le lien entre les invariants $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ et les conducteurs d'Artin et de Swan du module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

Théorème 0.4. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors $c_{\mathrm{Art},K}(V)$ et $c_{\mathrm{Sw},K}(V)$ sont des entiers ≥ 0.*

Théorème 0.5. — *Si V est une E-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

(i) *V est cristalline si et seulement si $c_{\mathrm{Art},K}(V)=0$;*

(ii) *V devient semi-stable sur une extension modérément ramifiée de K si et seulement si $c_{\mathrm{Sw},K}(V)=0$.*

0.4. $(\varphi,N,\mathscr{G}_K)$-modules et représentations p-adiques. — Un E-$(\varphi,N,\mathscr{G}_K)$-module D est un $F^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$-module libre de rang fini, muni des structure suivantes :

(i) une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant continûment pour la topologie discrète [(3)],

---

(2) Ce fait, conjecturé par Fontaine, est maintenant un théorème grâce aux travaux de Berger [**4**] ramenant cette conjecture à la conjecture de Crew pour les équations différentielles p-adiques, et ceux d'André [**3, 2**], Mebkhout [**15**] et Kedlaya [**14**] fournissant trois démonstrations indépendantes de la conjecture de Crew. On pourra consulter [**5**] pour une vue d'ensemble de ces travaux. Signalons que, depuis, deux démonstrations de la conjecture de Fontaine ne faisant pas intervenir la théorie des équations différentielles p-adiques ont vu le jour [**6, 13**].

(3) $\mathscr{G}_K$ agit donc à travers un quotient fini ; $\sigma\in\mathscr{G}_K$ agit par $\sigma\otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}E$.

(ii) une action semi-linéaire injective[4] du Frobenius φ commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$,

(iii) une action linéaire de N commutant à l'action de $\mathscr{G}_K$ et vérifiant[5] la relation de commutation $N\varphi = p\varphi N$.

Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$, le module

$$\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \cup_{L\subset\overline{F}}(\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L},$$

où L parcourt les extensions finies de K contenue dans $\overline{F}$, est un E-$(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module. De plus, si V est potentiellement semi-stable, l'application naturelle

$$\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) \to \overline{K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

est un isomorphisme.

A un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module[6] D, on sait associer son conducteur d'Artin $c_{\mathrm{Art},K}(D)$ et son conducteur de Swan $c_{\mathrm{Sw},K}(D)$ par les formules.

$$c_{\mathrm{Sw},K}(D) = \sum_{r\geq 0} r \cdot \dim(\cap_{s>r} D^{\mathscr{G}_K^s} / \cup_{s<r} D^{\mathscr{G}_K^s}),$$

$$c_{\mathrm{Art},K}(D) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) + \dim D - \dim(D^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0}.$$

Ces deux invariants sont en fait des entiers d'après le théorème de Hasse-Arf.

Notre résultat principal est alors le suivant :

Théorème 0.6. — *Si V est une E-représentation potentiellement semi-stable de $\mathscr{G}_K$, à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Remerciements.— Je remercie le rapporteur pour sa lecture attentive.

---

(4) Cette action est donc bijective. φ agit par $\varphi \otimes 1$ sur $F^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} E$.

(5) L'action de N est donc nilpotente.

(6) Si k_F est un corps fini, et donc si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on sait associer [**9**] à un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, une représentation $W(D)$ du groupe de Weil-Deligne WD_K de K, en tordant l'action de $g \in \mathrm{W}_K \subset \mathscr{G}_K$ par une puissance convenable de φ de manière à rendre linéaire l'action du sous-groupe de Weil W_K de K. Par ailleurs, si W est une représentation de WD_K, on définit (cf. [**7**]) les conducteurs d'Artin et de Swan de W par exactement les mêmes formules que celles qui nous ont servi à définir les conducteurs d'Artin et de Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, ce qui montre que, si D est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module, alors

$$c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(W(D)) = c_{\mathrm{Sw},K}(D).$$

La définition des conducteurs d'Artin et Swan d'un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module est donc la généralisation naturelle de la définition habituelle.

1. Conducteur d'Artin d'un élément de $\overline{K}$

1.1. Définition. — Nous renvoyons à [**16**] pour la définition des groupes de ramification. Si $x \in \overline{K}$, on note $c_{\mathrm{Art},K}(x)$ la borne inférieure de l'ensemble des $s \geq 0$ tels que $\mathscr{G}_K^{s-1}$ laisse fixe x. Le sous-corps $\overline{K}^{(r)}$ de $\overline{K}$ défini dans l'introduction est alors l'ensemble des $x \in \overline{K}$ vérifiant $c_{\mathrm{Art},K}(x) \leq r$. En particulier, $c_{\mathrm{Art},K}(x) = 0$ si et seulement si $K(x)$ est une extension non ramifiée de K, $c_{\mathrm{Art},K}(x) \geq 1$ si $K(x)$ est une extension ramifiée de K, et $c_{\mathrm{Art},K}(x) = 1$ si et seulement si $K(x)$ est une extension modérément ramifiée de K.

On dit que $\delta : \overline{K} \to \mathbf{R}_+$ est un *conducteur* sur $\overline{K}$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) $\delta(x) = 0$ si $x \in K^{\mathrm{nr}}$;

(ii) $\delta(x+y) \leq \sup(\delta(x), \delta(y))$ et $\delta(xy) \leq \sup(\delta(x), \delta(y))$ si $x, y \in \overline{K}$;

(iii) $\delta(g(x)) = \delta(x)$ si $x \in \overline{K}$ et $g \in \mathscr{G}_K$.

Il est immédiat que $c_{\mathrm{Art},K} : \overline{K} \to \mathbf{R}^+$ est un conducteur sur $\overline{K}$. Le lemme suivant montre que pour connaître un conducteur, il suffit de connaître sa valeur sur les uniformisantes, ce que nous utiliserons abondamment dans la suite.

Lemme 1.1. — *Si $\delta : \overline{K} \to \mathbf{R}_+$ est un conducteur, si $y \in \overline{K}$, si L est la plus petite extension galoisienne de K contenant y, et si π_L est une uniformisante de L, alors $\delta(y) = \delta(\pi_L)$.*

Démonstration. — Il résulte des propriétés (i) et (ii) que $\delta(z) \leq \sup(\delta(y_1), \ldots, \delta(y_n))$ si $y_1, \ldots, y_n \in \overline{K}$ et $z \in K(y_1, \ldots, y_n)$. On déduit de ceci, de la propriété (iii) et du fait que L est engendré par y et ses conjugués, que $\delta(z) \leq \delta(y)$ si $z \in L$. En particulier, $\delta(\pi_L) \leq \delta(y)$.

Par ailleurs L est inclus dans $K^{\mathrm{nr}}(\pi_L)$ et donc $\delta(z) \leq \delta(\pi_L)$ si $z \in L$. En particulier, $\delta(y) \leq \delta(\pi_L)$, ce qui permet de conclure. □

1.2. Conducteur d'Artin d'une uniformisante. — Soient L une extension finie galoisienne de K ; soient $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ et $G_0 \subset G$ le sous-groupe d'inertie. Soit π_L une uniformisante de L.

Proposition 1.2. — *On a*

$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = \Big(\sum_{g \in G_0 - \{1\}} v_K(g(\pi_L) - \pi_L)\Big) + \Big(\sup_{g \in G_0 - \{1\}} v_K(g(\pi_L) - \pi_L)\Big).$$

Démonstration. — Si $g \in G_0$, soit $i(g)$ l'entier défini par $v_K(g(\pi_L) - \pi_L) = i(g) v_K(\pi_L)$. Si $t > 0$, soit $G_t = \{g \in G, i(g) \geq t+1\}$. Les G_t sont les sous-groupes d'inertie de G (en numérotation inférieure). On a $G_t = \{1\}$ si t est assez grand et on note $t_0(L)$ la borne inférieure des $t > 0$ vérifiant $G_t = \{1\}$. On a aussi

$$(t_0(L)+1)v_K(\pi_L) = \sup_{g\in G_0-\{1\}} v_K(g(\pi_L)-\pi_L),$$

et comme $\frac{v_K(g(\pi_L)-\pi_L)}{v_K(\pi_L)} \in \mathbf{N}$ et le groupe G est fini, on a $t_0 = t_0(L) \in \mathbf{N}$.

Par définition de la numérotation supérieure, on a $G_t = G^{\varphi_{L/K}(t)}$, où $\varphi_{L/K}(t)$ est la fonction de Herbrand définie par

$$\varphi_{L/K}(t) = \int_0^t \frac{1}{[G_0 : G_u]} du = v_K(\pi_L)\int_0^t |G_u|\, du.$$

Par définition de t_0, on a $G_t = \{1\}$ si $t > t_0$ et $G_{t_0} \neq \{1\}$, et donc G^s agit trivialement sur π_L si $s > \varphi_{L/K}(t_0)$, alors que $G^{\varphi_{L/K}(t_0)}$ n'agit pas trivialement sur π_L. On en déduit la formule

$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = 1 + \varphi_{L/K}(t_0(L)).$$

Soit $i(g,u)$ la fonction définie par $i(g,u) = 0$ si $u > i(g)-1$ et $i(g,u) = 1$ si $u \leq i(g)-1$, de telle sorte que $|G_u| = \sum_{g\in G} i(g,u)$. On a alors

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) &= 1+\varphi_{L/K}(t_0) = 1 + v_K(\pi_L)\int_0^{t_0} |G_u|\, du = 1 + v_K(\pi_L)\int_0^{t_0} \sum_{g\in G_0} i(g,u)du \\ &= 1 + v_K(\pi_L)\Big(t_0 + \sum_{g\in G_0-\{1\}} (i(g)-1)\Big) \\ &= 1 - |G_0|v_K(\pi_L) + v_K(\pi_L)\Big(t_0 + 1 + \sum_{g\in G_0-\{1\}} i(g)\Big), \end{aligned}$$

et comme $v_K(\pi_L) = \frac{1}{|G_0|}$, et $i(g)v_K(\pi_L) = v_K(g(\pi_L)-\pi_L)$ si $g\neq 1$, et $(t_0+1)v_K(\pi_L) = \sup_{g\in G_0-\{1\}} v_K(g(\pi_L)-\pi_L)$, cela permet de conclure. □

Corollaire 1.3. — *$c(L) = (v_K(\pi_L))^{-1} c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$ est un entier.*

2. Conducteur d'Artin et valuation de convergence de séries entières

2.1. Valuation de convergence raffinée d'une série entière. — Soit $\widetilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\cup(\mathbf{R}\times\{-,+\})\cup\{-\infty,+\infty\}$. Si $r\in\mathbf{R}$, on note simplement r^- [resp. r^+] l'élément $(r,-)$ [resp. $(r,+)$] de $\widetilde{\mathbf{R}}$. On munit $\widetilde{\mathbf{R}}$ de la relation d'ordre totale évidente définie par

(i) $-\infty \leq x$ et $x \leq +\infty$ quel que soit $x\in\widetilde{\mathbf{R}}$;
(ii) $r^- < r < r^+$ si $r\in\mathbf{R}$;
(iii) $r^+ < s^-$ si $r,s\in\mathbf{R}$ vérifient $r<s$.

Finalement, si $x\in\widetilde{\mathbf{R}}$, on définit $-x\in\widetilde{\mathbf{R}}$ de la manière habituelle si $x\in\mathbf{R}$ et par

$$-(-\infty) = +\infty \text{ et } -(+\infty) = -\infty; \quad -(r^-) = (-r)^+ \text{ et } -(r^+) = (-r)^- \text{ si } r\in\mathbf{R}.$$

Si $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbf{R}$, on note $\operatorname{linf} x_k \in \mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ la limite inférieure de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et on définit la *limite inférieure raffinée* $\operatorname{linf}' x_k \in \widetilde{\mathbf{R}}$ de la suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$, par la formule

$$\operatorname{linf}' x_k = \begin{cases} -\infty & \text{si } \operatorname{linf} x_k = -\infty, \\ r^- & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \operatorname{linf} k\cdot(x_k - r) = -\infty, \\ r & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \operatorname{linf} k\cdot(x_k - r) \in \mathbf{R}, \\ r^+ & \text{si } \operatorname{linf} x_k = r \text{ et } \lim k\cdot(x_k - r) = +\infty, \\ +\infty & \text{si } \lim x_k = +\infty, \end{cases}$$

Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \in C[[T]]$, on définit la *valuation de convergence raffinée* $\mathrm{Val}_K(f) \in \widetilde{\mathbf{R}}$ par la formule

$$\mathrm{Val}_K(f) = -\Big(\operatorname{linf}' \frac{v_K(a_k)}{k}\Big).$$

On a alors

$$\mathrm{Val}_K(f) = \begin{cases} -\infty & \Leftrightarrow f \text{ est analytique sur } C \text{ tout entier}, \\ r^- & \Leftrightarrow f \text{ est analytique sur la boule fermée } v_K(T) \geq r \\ & \qquad \text{et ne converge pas si } v_K(T) < r, \\ r & \Leftrightarrow f \text{ est analytique bornée sur la boule } v_K(T) > r \\ & \qquad \text{et ne converge pas si } v_K(T) = r, \\ r^+ & \Leftrightarrow f \text{ est analytique non bornée sur la boule } v_K(T) > r, \\ +\infty & \Leftrightarrow f \text{ ne converge que pour } T = 0. \end{cases}$$

2.2. Le sous-anneau $C[[T]]^{(r)}$ de $C[[T]]$. — Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $C[[T]]^{(r)}$ l'ensemble des $f \in C[[T]]$ vérifiant $\mathrm{Val}_K(f) \leq r$; c'est, d'après ce qui précède, un sous-anneau de $C[[T]]$ de fonctions analytiques bornées ou pas sur une boule ouverte ou fermée suivant les cas.

Si $r \in \mathbf{R}$, on définit la valuation $v_K^{(r)}$ sur $C[[T]]^{(r)}$ par

$$v_K^{(r)}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k\Big) = \inf_{k\in\mathbf{N}} v_K(a_k) + kr.$$

Ceci fait de $C[[T]]^{(r)}$ un anneau de Banach et $C[[T]]^{(r^-)}$ en est un sous-anneau complet.

Soit $r \in \mathbf{R}$. Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \in C[[T]]^{(r^-)}$ est non nul, soit $d^{(r)}(f)$ le plus grand entier k tel que l'on ait $v_K^{(r)}(f) = v_K(a_k) + kr$. On dispose alors du résultat suivant :

Proposition 2.1. — (i) *Si $g \in C[[T]]^{(r^-)}$, alors il existe $y \in C[[T]]^{(r^-)}$ et $z \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(f)$ uniques, tels que l'on ait $g = yf + z$. De plus, $v_K^{(r)}(z) \geq v_K^{(r)}(g)$ et $v_K^{(r)}(y) \geq v_K^{(r)}(g) - v_K^{(r)}(f)$.*

(ii) *$C[[T]]^{(r^-)}$ est un anneau principal.*

Remarque 2.2. — (i) Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) comme le montre la démonstration du cor. 5.10 par exemple.

(ii) Les anneaux $C[[T]]^{(r)}$ et $C[[T]]^{(r^+)}$ ne sont pas principaux mais presque ; ce sont des anneaux de Bézout (tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments est principal, tout idéal fermé est principal).

2.3. Conducteur d'Artin d'uniformisantes et valuation de convergence. — Soit L une extension finie galoisienne de K, soit π_L une uniformisante de L, et soit $P \in K^{\mathrm{nr}}[X]$ le polynôme minimal de π_L sur K^{nr}. On a $P(\pi_L) = 0$ et $P'(\pi_L) \neq 0$, ce qui implique, d'après le théorème des fonctions implicites, que P induit un isomorphisme analytique d'un voisinage de π_L sur un voisinage de 0. On note $f \in \pi_L + UL[[U]]$ l'inverse de cet isomorphisme qui est donc une solution de l'équation $P(f) = U$.

Proposition 2.3. — *On a*
$$c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) = \mathrm{Val}_K(f).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 2.4. — *Soient L une extension finie de K et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ avec $v_K(\alpha_n) \leq \cdots \leq v_K(\alpha_1) < +\infty$, et soient $\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ et $Q(X) = X(X+\alpha_1)\cdots(X+\alpha_n)$. Alors $x \mapsto \beta^{-1}Q(x)$ est un automorphisme analytique de la boule $\{x,\ v_K(x) > v_K(\alpha_1)\}$ et son inverse F appartient à $T\mathscr{O}_L[[\alpha_1^{-1}T]]$, mais ne converge pas pour $v_K(T) = v_K(\alpha_1)$.*

Démonstration. — Considérons l'application $f \mapsto \psi(f) = T + f - (\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1}Q(f)$. Soit $f \in T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$. Comme $f - \beta^{-1}Q(f) = f \cdot (1 - (1 + \frac{f}{\alpha_1}) \cdots (1 + \frac{f}{\alpha_n}))$, et comme $\frac{f}{\alpha_i} \in \mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$, on a $\psi(f) \in T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$. Par ailleurs, si f et g sont deux éléments de $TL[[T]]$ vérifiant $f - g \in T^k L[[T]]$, alors $\psi(f) - \psi(g) \in T^{k+1}L[[T]]$. On en déduit le fait que ψ est une application de $T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$ dans lui-même, contractante pour la topologie T-adique pour laquelle $T\mathscr{O}_L[[\frac{T}{\alpha_1}]]$ est complet. Elle y admet donc un unique point fixe F, et ce point fixe vérifie $\beta^{-1}Q(F(T)) = T$; c'est donc l'inverse formel de $\beta^{-1}Q$ et comme F converge si $v_K(x) > v_K(\alpha_1)$, c'est l'inverse analytique de $\beta^{-1}Q$ sur la boule $\{x,\ v_K(x) > v_K(\alpha_1)\}$. Finalement, F ne converge pas pour $v_K(x) = v_K(\alpha_1)$ car sinon ce serait un inverse analytique de $\beta^{-1}Q$ sur la boule $\{x,\ v_K(x) \geq v_K(\alpha_1)\}$ et $(\alpha_1 \cdots \alpha_n)^{-1}Q$ n'est pas injectif sur cette boule (puisque $P(0) = P(-\alpha_1) = 0$). □

Soient $t_0 = t_0(L)$ et $c = c(L)$. Le résultat suivant est une version renforcée de la prop. 2.3 car $c(L)v_K(\pi_L) = c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$ par définition de $c(L)$ (cf. cor. 1.3).

Corollaire 2.5. — *Si on écrit $f(U)$ sous la forme $\pi_L + \pi_L^{1+t_0}\sum_{i=1}^{+\infty} a_i\cdot(\pi_L^{-c}U)^i$, les a_i sont éléments de $\mathscr{O}_L$ et a_i ne tend pas vers 0 quand i tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soient $g_1,\dots,g_{e-1}$ les éléments de $G_0-\{1\}$ ordonnés de telle sorte que, si $\alpha_i = \pi_L - g_i(\pi_L)$, on ait $v_K(\alpha_i)\geq v_K(\alpha_j)$ si $i\leq j$. En particulier, on a

$$v_K(\alpha_1) = (1+t_0)v_K(\pi_L) \quad \text{et} \quad v_K(\alpha_1) + \sum_{i=1}^{e-1} v_K(\alpha_i) = cv_K(\pi_L)$$

d'après la prop. 1.2 et la définition de $t_0(L)$ donnée au cours de la démonstration de cette proposition.

Soit $Q\in L[X]$ le polynôme défini par $Q(X) = P(X+\pi_L)$, et soit $\beta = \alpha_1\dots\alpha_{e-1}$. On a $Q(X) = X\prod_{i=1}^{e-1}(X+\alpha_i)$ et, si $F(T)\in TL[[T]]$ est la solution formelle de l'equation $\beta^{-1}Q(F(T)) = T$, alors $f(U) = \pi_L + F(\beta^{-1}U)$. Il suffit donc d'utiliser le lemme 2.4 pour conclure. □

3. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

3.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Soit $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble[(7)] des suites $x = (x^{(0)},\dots,x^{(n)},\dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x+y=s$, avec $s^{(n)} = \lim_{m\to+\infty}(x^{(n+m)}+y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x\cdot y = t$, avec $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$. Alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$, et qui contient une clôture algébrique $\overline{k}_F$ de k_F. Si $x\in\mathscr{O}_C$, on choisit un élément $\tilde{x} = (\tilde{x}^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ avec $\tilde{x}^{(0)} = x$.

Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. Il contient l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\overline{k}_F$ et donc aussi l'anneau $\mathscr{O}_{F^{\mathrm{nr}}}$ de l'extension maximale non ramifiée F^{nr} de F. Si $x\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$, on note $\overline{x}\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$ sa réduction modulo p, et si $x\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ peut alors s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n]$, où $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. L'application $x = \sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n]\mapsto\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}p^n x_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sur $\mathscr{O}_C$, et l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ est un idéal principal dont $x\in\ker\theta$ est un générateur si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) = 1$; par exemple $\xi = [\tilde{p}]-p$ est un générateur de $\ker\theta$.

Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et prolongeons θ, par $\mathbf{Q}_p$-linéarité, en un morphisme surjectif de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ sur C. L'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ est encore principal, et on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ pour la topologie $\ker\theta$-adique. Par construction, θ s'étend par continuité en un morphisme surjectif de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur C, et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C et d'idéal maximal $\ker\theta$.

(7) Nous renvoyons aux articles [**10**] ou [**12**] pour la démonstration des résultats de ce numéro ; dans ces articles (et bien d'autres), les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ sont notés respectivement R et $W(R)$.

Notons que $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ s'identifie naturellement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. La topologie naturelle sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cong \varprojlim(\widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^{n+1})$ est la topologie de la limite projective, chaque $\widetilde{\mathbf{B}}^+/(\ker\theta)^{n+1}$ étant un espace de Banach p-adique de boule unité $\widetilde{\mathbf{A}}^+/(\ker\theta)^{n+1}$. En particulier, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est complet comme limite projective d'espaces de Banach. On peut aussi décrire la topologie de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ comme suit. Si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, soit $w_n(x)$ le plus grand élément w de $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ tel que $x \in p^w\widetilde{\mathbf{A}}^+ + (\ker\theta)^{n+1}$. Les w_n forment une famille de semi-valuations sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et la topologie naturelle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est la topologie (de Fréchet) induite par cette famille de semi-valuations.

Le groupe $\mathscr{G}_F$ opère naturellement et continûment sur $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et on a $w_n(\sigma(x)) = w_n(x)$ si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\sigma \in \mathscr{G}_F$.

Plus généralement, si $K \subset \overline{F}$ est une extension finie de F, et si π_K est une uniformisante de K, tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^n[x_n]$, où $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. L'application $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^n[x_n] \mapsto \theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^n x_n^{(0)}$ est un morphisme surjectif d'anneaux de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ sur $\mathscr{O}_C$, et l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est un idéal principal dont $x \in \ker\theta$ est un générateur si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) = 1/e_K$; par exemple $\xi_K = [\tilde{\pi}_K] - \pi_K$ est un générateur de $\ker\theta$. Notons (provisoirement) $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ le complété de $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ pour la topologie $\ker\theta$-adique. L'inclusion de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ induit un morphisme naturel de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$, et ce morphisme étant un isomorphisme, nous identifierons dans la suite les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ sans plus de commentaire. En particulier, $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ et donc à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Ceci nous permet de définir, si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, $w_{K,n}(x)$ comme le plus grand élément w de $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ tel que $x \in \pi_K^w\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K] + (\ker\theta)^{n+1}$. L'action de $\mathscr{G}_K \subset \mathscr{G}_F$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ laisse $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ stable ; on a donc $w_{K,n}(\sigma(x)) = w_{K,n}(x)$ si $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\sigma \in \mathscr{G}_K$.

Proposition 3.1. — *Si ω est un générateur de l'idéal* $\ker\theta$ *de* $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, *si* $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, *et si* $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite décroissante d'éléments de* $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$, *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $w_n \leq w_{K,n}(x)$ *quel que soit* $n \in \mathbf{N}$ *;*

(ii) *il existe une suite* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ *telle que l'on ait* $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^{w_n} a_n \omega^n$ *dans* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (avec la convention $\pi_K^{+\infty} = 0$).

Démonstration. — L'implication (ii)⇒(i) est immédiate. Prouvons la réciproque. Comme $w_n \leq w_{K,n}(x)$, il existe $b_n \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ tel que $x - p^{w_n}b_n$ soit divisible par ω^{n+1} dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Par ailleurs, la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant décroissante, $b_n - \pi_K^{w_{n-1}-w_n}b_{n-1}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et cet élément étant divisible par ω^n dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, le quotient a_n appartient à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, et on a $p^{w_n}b_n = \sum_{i=0}^{n} \pi_K^{w_i} a_i \omega^i$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$. Ceci permet, en faisant tendre n vers $+\infty$, de conclure. □

Corollaire 3.2. — *Si $n \in \mathbf{N}$ et si $x, y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors*

$$w_{K,n}(x+y) \geq \inf(w_{K,n}(x), w_{K,n}(y)) \quad \text{et} \quad w_{K,n}(xy) \geq \inf_{i+j=n}(w_{K,i}(x) + w_{K,j}(y)).$$

3.2. Valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on définit la valuation de convergence absolue $c_{\mathrm{dR}}(x) \in \widetilde{\mathbf{R}}$ de x par la formule

$$c_{\mathrm{dR}}(x) = -\operatorname{linf}' \frac{w_n(x)}{n}.$$

Plus généralement, si K est une extension finie de F, on définit $c_{\mathrm{dR},K}(x)$ par la formule

$$c_{\mathrm{dR},K}(x) = -\operatorname{linf}' \frac{w_{K,n}(x)}{n}.$$

Remarque 3.3. — Si K est une extension non ramifiée de F, alors $c_{\mathrm{dR},K}(x) = c_{\mathrm{dR}}(x)$ quel que soit $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Par contre, si K est une extension ramifiée de F, le lien entre $c_{\mathrm{dR},K}$ et c_{dR} est nettement plus compliqué comme on peut s'en rendre compte en utilisant, par exemple, le théorème 4.1.

Proposition 3.4. — (i) *Si $x \neq 0$, alors $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq 0$ et $c_{\mathrm{dR},K}(x) = 0$ si et seulement si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$.*

(ii) *$c_{\mathrm{dR},K}(\sigma(x)) = c_{\mathrm{dR},K}(x)$ si $\sigma \in \mathscr{G}_K$ et $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

(iii) *$c_{\mathrm{dR},K}(xy) \geq \inf(c_{\mathrm{dR},K}(x), c_{\mathrm{dR},K}(y))$ et $c_{\mathrm{dR},K}(x+y) \geq \inf(c_{\mathrm{dR},K}(x), c_{\mathrm{dR},K}(y))$ si $x, y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$*

Démonstration. — L'inégalité $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq 0$ est une conséquence de la décroissance de la suite $w_{K,n}(x)$; le reste de la proposition suit de la prop. 3.1, du cor. 3.2 et de l'invariance de $w_{K,n}$ sous l'action de $\mathscr{G}_K$.

Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ l'ensemble des $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vérifiant $c_{\mathrm{dR},K}(x) \geq r$. D'après la proposition 3.4, c'est un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ stable par $\mathscr{G}_K$.

3.3. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $C[[T]]$. — Comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C, il est isomorphe abstraitement à $C[[T]]$. Il n'existe pas de tel isomorphisme qui soit « raisonnable », mais nous allons en utiliser une variante pour donner des formules pour la valuation de convergence d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui sont moins intrinsèques que la définition, mais se prètent mieux aux calculs.

Lemme 3.5. — *L'ensemble des sections $\mathscr{O}_K$-linéaires continues $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ de θ est non vide.*

Démonstration. — Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{O}_C$ dont les images dans $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$ forment une base de $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$ sur k_K, alors $(e_i)_{i\in I}$ est une base de Banach de $\mathscr{O}_C$ sur $\mathscr{O}_K$: tout élément x de $\mathscr{O}_C$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} a_i e_i$, où $(a_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{O}_K$ tendant vers 0 à l'infini (i.e. suivant le filtre des complémentaires des parties finies). De plus, on a $\inf_{i\in I} v_K(a_i) = [v_K(x)]$. Si $s(e_i)$ est n'importe quel élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ vérifiant $\theta(s(e_i)) = e_i$, alors $x = \sum_{i\in I} a_i e_i \mapsto s(x) = \sum_{i\in I} a_i s(e_i)$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ.

Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ, on étend s en une appplication K-linéaire de C dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$. □

Lemme 3.6. — *Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ, si ω est un générateur de l'idéal* $\ker\theta$ *de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, si $a \in C$, et si $k, n \in \mathbf{N}$, alors*

$$w_{K,n}(\omega^k s(a)) = \begin{cases} +\infty & si\ n < k, \\ [v_K(a)] & si\ n \geq k. \end{cases}$$

Démonstration. — Le cas $a = 0$ étant sans intérêt, supposons $a \neq 0$. On peut alors, en multipliant a par une puissance convenable de π_K, se ramener au cas $0 \leq v_K(a) < 1$. Par ailleurs, le résultat étant immédiat si $n < k$, il suffit de traiter le cas $n \geq k$. Comme $v_K(a) \geq 0$, on a $s(a) \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ par hypothèse et donc $w_{K,n}(\omega^k s(a)) \geq 0 = [v_K(a)]$ quels que soient k et n. Il reste à prouver que $w_{K,n}(\omega^k s(a))$ ne peut pas être ≥ 1. Dans le cas contraire, cela signifie qu'il existe $b \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et $c \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ tels que l'on ait $\omega^k s(a) - \pi_K b = \omega^{n+1} c$, et comme $s(a)$ et b appartiennent à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, on en déduit l'appartenance de c à $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ puis la divisibilité de b par ω^k dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ et, finalement, en divisant le tout par ω^k et en appliquant θ au résultat, l'inégalité $v_K(a) \geq 1$ qui est contraire à l'hypothèse. Ceci permet de conclure. □

Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ est une section $\mathscr{O}_K$ linéaire continue de θ et si ω est un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$, on note $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'application

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k \mapsto s_\omega(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(a_k)\omega^k.$$

Proposition 3.7. — (i) *s_ω induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels topologiques de $C[[T]]$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

(ii) *Si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $w_{K,n}(s_\omega(f)) = \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)]$.*

Démonstration. — Pour montrer que s_ω est une bijection, il suffit de constater que l'application inverse $s_\omega^{-1} : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to C[[T]]$ est celle qui à x associe $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, où les a_k sont définis par récurrence par l'algorithme suivant : on part de $x_0 = x$ et, supposant x_k construit, on pose $a_k = \theta(x_k)$ et $x_{k+1} = \omega^{-1}(x_k - s_\omega(a_k))$. On a alors $x = \left(\sum_{k=0}^{n} s_\omega(a_k)\omega^k\right) + \omega^{n+1} x_{n+1}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, ce qui, faisant tendre n vers $+\infty$, permet de conclure.

Maintenant, si $f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k T^k$, on a

$$w_{K,n}(s_\omega(f)) \geq \inf_{k\in\mathbf{N}} w_{K,n}\big(\omega^k s_\omega(a_k)\big) = \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)],$$

d'après le lemme 3.6. Réciproquement, si $m = \inf_{i\leq n}[v_K(a_i)]$ et si n_0 est le plus petit entier $k \leq n$ tel que $[v_K(a_k)] = m$, alors $w_{K,n_0}(\omega^k s_\omega(a_k)) \geq m+1$ si $k < n_0$ et $w_{K,n_0}(\omega^k s_\omega(a_k)) = m$ si $k = n_0$. Ceci implique que $w_{K,n_0}(s_\omega(f)) = m$ et donc $w_{K,n}(s_\omega(f)) \leq w_{K,n_0}(s_\omega(f)) \leq \inf_{k\leq n}[v_K(a_k)]$. On en déduit le (ii) et la bicontinuité de s_ω, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

Corollaire 3.8. — *Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ est l'image de $C[[T]]^{(r)}$ par $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Remarque 3.9. — L'application $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ *n'est pas un morphisme d'anneaux.*

4. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

L'application $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to C$ induit un isomorphisme de la clôture algébrique de K dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $\overline{K}$, ce qui permet de considérer $\overline{K}$ comme un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le but de ce § est de montrer que la filtration de $\overline{K}$ par la ramification supérieure coïncide avec celle induite par la filtration sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par valuation de convergence. Il s'agit donc de démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.1. — *Si $x \in \overline{K}$, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(x) = c_{\mathrm{dR},K}(x).$$

Lemme 4.2. — *$c_{\mathrm{dR},K} : \overline{K} \to \mathbf{R}$ est un conducteur sur $\overline{K}$.*

Démonstration. — La seule propriété d'un conducteur n'apparaissant pas explicitement dans la proposition 3.4 est la nullité de $c_{\mathrm{dR},K}$ sur K^{nr}, mais cela suit du (i) de cette proposition et de ce que $\widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K]$ contient $F^{\mathrm{nr}}[\pi_K] = K^{\mathrm{nr}}$.

Comme $c_{\mathrm{Art},K}$ et $c_{\mathrm{dR},K}$ sont des conducteurs sur $\overline{K}$, il suffit, pour démontrer le théorème 4.1, d'en vérifier l'énoncé dans le cas des uniformisantes des extensions finies galoisiennes ramifiées de K, que l'on peut supposer être totalement ramifiées, quitte à remplacer K par une extension non ramifiée. □

4.1. L'anneau $K[X]_P$.— Soit donc $L \subset \overline{F}$ une extension galoisienne finie, totalement ramifiée, de degré e de K, soit π_L une uniformisante de L et soit $P \in K[X]$ le polynôme minimal de π_L. Le polynôme P est un polynôme d'Eisenstein ; on peut donc l'écrire sous la forme $P(X) = X^e - \pi_K(b_{e-1}X^{e-1} + \cdots + b_1X + 1)$, où π_K est une uniformisante de K et $b_1, \ldots, b_{e-1}$ sont des éléments de $\mathscr{O}_K$. Soit $K[X]_P$ le complété de $K[X]$ pour la topologie P-adique. Tout élément de $K[X]_P$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k$, où $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $K[X]^{(e-1)}$, ensemble des polynômes à coefficients dans K de degré $\leq e-1$. Une telle écriture est dite *minimale.*

Proposition 4.3. — *Soit $\Lambda \subset K[X]_P$ l'ensemble des $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k$, avec $Q_k \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, pour tout k. Alors Λ est un sous-anneau de $K[X]_P$, séparé et complet pour la topologie (π_K, P)-adique, et l'injection naturelle de $\mathscr{O}_K[X]$ dans $K[X]_P$ s'étend par continuité en un isomorphisme d'anneaux de $\mathscr{O}_K[[X]]$ sur Λ.*

Démonstration. — Si $A, B \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, alors AB est de degré $< 2e$, et peut donc s'écrire sous la forme $AB = PQ + R$, avec $Q, R \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$, puisque P est unitaire, à coefficients dans $\mathscr{O}_K$. Ceci permet de montrer que le produit de deux éléments de Λ appartient à Λ. Maintenant, que Λ soit séparé et complet pour la topologie (π_K, P)-adique est immédiat ; le fait que l'injection de $\mathscr{O}_K[X]$ dans $K[X]_P$ s'étende par continuité à $\mathscr{O}_K[[X]]$ suit de l'appartenance de X^e à (π_K, P) ; la surjectivité de $\mathscr{O}_K[[X]] \to \Lambda$ vient de ce que $P \in (\pi_K, X)$, et l'injectivité est une conséquence du fait que tout quotient non trivial de $\mathscr{O}_K[[X]]$ est de longueur finie sur $\mathscr{O}_K$. □

4.2. Le plongement de $K[X]_P$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

Lemme 4.4. — *$\omega = P([\tilde{\pi}_L])$ est un générateur de l'idéal* $\ker\theta$ *de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$.*

Démonstration. — On a $\theta(\omega) = P(\pi_L) = 0$ et donc $\omega \in \ker\theta$. Par ailleurs, le polynôme P étant un polynôme d'Eisenstein, l'image $\overline{\omega}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ de ω modulo π_K est égale à $\tilde{\pi}_L^e$, où $e = \deg(P)$. On a donc $v_{\mathbf{E}}(\overline{\omega}) = ev_p(\pi_L) = v_p(\pi_K)$, ce qui permet de conclure. □

Si $Q(X) = c_{e-1}X^{e-1} + \cdots + c_0 \in K[X]^{(e-1)}$, on définit $v_K(Q)$ comme le minimum des $v_K(c_i)$, pour $0 \leq i \leq e-1$. On a aussi $v_K(Q) = [v_K(Q(\pi_L))]$.

Lemme 4.5. — *Si $F \in K[X]_P$ et si $F = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k \in K[X]_P$ est l'écriture minimale de F, alors $F([\tilde{\pi}_L]) = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_k([\tilde{\pi}_L])\omega^k$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et*

$$c_{\mathrm{dR},K}(F([\tilde{\pi}_L])) = -\operatorname{linf} \frac{v_K(Q_k)}{k}.$$

Démonstration. — Soit $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ une section $\mathscr{O}_K$-linéaire de θ vérifiant $s(\pi_L^i) = [\tilde{\pi}_L]^i$ si $0 \leq i \leq e-1$ (une telle section existe car les π_L^i forment une famille libre sur k_K dans $\mathscr{O}_C/\pi_K\mathscr{O}_C$). On a alors $F([\tilde{\pi}_L]) = s_\omega\big(\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k(\pi_L)T^k\big)$; le résultat s'en déduit en utilisant la proposition 3.7. □

Comme $K[X]_P$ est un anneau de valuation discrète complet d'égale caractéristique, son corps résiduel $K[X]_P/(P) \cong K[X]/(P) = L$ s'identifie à un sous-anneau [(8)] de $K[X]_P$.

Proposition 4.6. — *Si $x \in L$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}P^k$ est l'écriture minimale de x dans $K[X]_P$, alors*

$$c_{\mathrm{dR}}(x) = -\mathrm{linf}\, \frac{v_K(Q_{x,k})}{k}.$$

Démonstration. — L'application qui à $F \mapsto F([\tilde{\pi}_L])$ induit un isomorphisme de $K[X]_P$ sur son image dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus, comme $\theta(F([\tilde{\pi}_L])) = F(\pi_L)$, cet isomorphisme induit, en passant aux corps résiduels, l'identification de L avec le sous-corps $K(\pi_L)$ de C. Maintenant, si $x \in L$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}([\tilde{\pi}_L])P([\tilde{\pi}_L])^k$ est un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, algébrique sur K, et dont l'image par θ est égale à x ; comme θ induit l'identité sur $\overline{K}$, on a $x = \sum_{k=0}^{+\infty} Q_{x,k}([\tilde{\pi}_L])P([\tilde{\pi}_L])^k$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et on conclut en utilisant le lemme 4.5. □

4.3. Calcul de $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L)$. — Soit $\pi_L = X + \sum_{k=1}^{+\infty} Q_k P^k$ l'écriture minimale de π_L dans $K[X]_P$, et soit $c = c(L) = e \cdot c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$. Le (i) [resp. le (ii)] de la proposition suivante montre que l'on a $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) \leq c/e$ [resp. $c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) > (c/e)^-$]. On en déduit l'égalité

$$c_{\mathrm{dR},K}(\pi_L) = c_{\mathrm{Art},K}(\pi_L)$$

que l'on cherchait à obtenir.

Proposition 4.7. — (i) *Si $k \geq 1$, il existe $C_k \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$ tel que $Q_k = \pi_K^{[\frac{-kc}{e}]} C_k$.*
(ii) *La suite C_k ne tend pas vers 0 dans $\mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$.*

Démonstration. — Le (i) demandant un peu de préparation, nous allons d'abord démontrer le (ii). Si on reprend les calculs et les notations de la démonstration du cor. 2.5, on voit que $v_K(P(x)) \geq \frac{c}{e}$ si $v_K(x-\pi_L) \geq \frac{t_0+1}{e}$. Ceci implique que, si C_k tend vers 0, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_K^{[\frac{-kc}{e}]} C_k P^k$ converge uniformément sur la boule $v_K(x-\pi_L) \geq \frac{t_0+1}{e}$ et y définit donc une fonction analytique F. Comme cette boule contient un conjugué $g(\pi_L)$ de π_L distinct de π_L, et comme $P(g(\pi_L)) = 0$, on obtient, en évaluant F en $g(\pi_L)$, l'identité $F(g(\pi_L)) = g(\pi_L)$. Comme par ailleurs, F est constante et $F(0) = \pi_L$, on obtient $g(\pi_L) = \pi_L$, ce qui conduit à une contradiction, et permet de conclure. □

Le point de départ de la démonstration du (i) de la proposition 4.7 est le résultat suivant qui est une simple réécriture du cor. 2.5.

(8) Si $D = \frac{1}{P'} \cdot \frac{d}{dX}$ est la dérivation K-linéaire continue de $K[X]_P$ normalisée par $DP = 1$, alors la réduction modulo P induit un isomorphisme du noyau de D sur L ; l'isomorphisme réciproque étant celui qui, à $y = Q(\pi_L)$, $Q \in K[X]^{(e-1)}$, associe $\sum_{k=0}^{+\infty} D^k Q \cdot \frac{(-P)^k}{k!}$.

Lemme 4.8. — *On peut écrire X dans $K[X]_P$ sous la forme*

$$X = \pi_L + \pi_L^{1+t_0} \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_L^{-ci} A_i(\pi_L) P^i,$$

où $A_i \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$ ne tend pas vers 0 quand i tend vers $+\infty$.

Lemme 4.9. — *Soient $c \geq 1$ et $t \geq 2$ des entiers et $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$. Si*

$$Y = X + X^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(X)(X^{-c}T)^i,$$

où T est une variable, alors il existe une unique suite $(B_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{O}_K[[Y]]$ telle que $X = Y + Y^t \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(Y)(Y^{-c}T)^i$.

Démonstration. — Si Z est une variable, soit $S_Z = \mathscr{O}_K[[Z, Z^{-c}T]]$. L'anneau S_Z peut aussi se décrire comme l'anneau des séries de la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} A_i(Z)(T^{-c}Z)^i$ avec $A_i \in \mathscr{O}_K[[Z]]$; il est complet pour la topologie Z-adique.

Maintenant, si $f \in Y + Y^t S_Y$, soit $\phi(f) = f + f^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(f)(f^{-c}T)^i$. Comme $Y^{-1}f \in 1 + YS_Y$, on a $\phi(f) \in Y + Y^t S_Y$. Pour la même raison, $\psi(f) = Y - f^t \sum_{i=1}^{+\infty} A_i(f)(f^{-c}T)^i \in Y + Y^t S_Y$. D'autre part, si $f - g \in Y^n S_Y$, alors $\psi(f) - \psi(g) \in Y^{n+t-1} S_Y$, et comme $t - 1 \geq 1$, cela implique que ψ a un unique point fixe f dans $Y + Y^t S_Y$. Ce point fixe est l'unique solution dans $Y + Y^t S_Y$ de l'équation $\phi(f) = Y$, et on obtient les B_i en écrivant f sous la forme $f = Y + Y^t \sum_{i=1}^{+\infty} B_i(Y)(Y^{-c}T)^i$. □

Corollaire 4.10. — *Il existe une suite $(B_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$ telle que l'on ait, dans $K[X]_P$, l'identité*

$$\pi_L = X + X^{1+t_0} \sum_{i=1}^{+\infty} X^{-ci} B_i P^i.$$

Passons à la démonstration du (i) de la proposition 4.7. On peut écrire $-ic$ sous la forme $e[\frac{-ic}{e}] + r_i$, avec $0 \leq r_i \leq e - 1$, ce qui permet de mettre π_L sous la forme $X + \sum_{i=1}^{+\infty} X^{e[\frac{-ic}{e}]} B_i' P^i$, avec $B_i' = X^{r_i + t_0 + 1} B_i \in \mathscr{O}_K[[X]]$. Par ailleurs, partant de l'identité $X^e = \pi_K(1 + b_1 X + \cdots + b_{e-1} X^{e-1} + \pi_K^{-1} P)$, on peut écrire $X^{e[\frac{-ic}{e}]}$ sous la forme

$$X^{e[\frac{-ic}{e}]} = \pi_K^{[\frac{-ic}{e}]} \sum_{j=0}^{+\infty} E_{i,j} \cdot (\pi_K^{-1} P)^j,$$

où $(E_{i,j})_{j \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[[X]]$. Finalement, on peut écrire $E_{i,j} B_i'$ sous la forme

$$E_{i,j} B_i' = \sum_{h=0}^{+\infty} R_{h,i,j} P^h,$$

où $(R_{h,i,j})_{h\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$. On a alors

$$C_k = \sum_{h+i+j=k} \pi_K^{[\frac{-ci}{e}]-j-[\frac{-ck}{e}]} R_{h,i,j} \in \mathscr{O}_K[X]^{(e-1)}$$

car $\frac{c}{e} = \mu_{\mathrm{Art},K}(\pi_L) \geq 1$, et donc $[\frac{-ci}{e}] - j - [\frac{-ck}{e}] \geq 0$ si $i+j \leq k$. Ceci permet de conclure.

5. $\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et sa filtration par valuation de convergence

5.1. Les anneaux $\mathbf{B}^+_{\max}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$. — Si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est tel que son image $\overline{\alpha}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = 1$, le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{\alpha}{p}]$ de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ ne dépend pas de α. On note $\mathbf{A}_{\max}$ son complété pour la topologie p-adique et $\mathbf{B}^+_{\max} = \mathbf{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. En particulier, on peut prendre pour α un générateur ω de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ et tout élément de $\mathbf{B}^+_{\max}$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^+$ tendant vers 0 pour la topologie p-adique. Cette série convergeant dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, cela nous fournit un morphisme de $\mathbf{B}^+_{\max}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Proposition 5.1. — *Le morphisme $\mathbf{B}^+_{\max} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ défini ci-dessus est injectif et identifie $\mathbf{B}^+_{\max}$ avec le sous-anneau $\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},F}$ de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$.*

Démonstration. — Si $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est une section $\mathscr{O}_F$-linéaire continue de θ, on peut écrire tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$, et donc tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ de manière unique sous la forme $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{-k}s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$ telle qu'il existe $k_0(x) \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $a_k \in p^{k-k_0(x)}\mathscr{O}_C$ si $k \geq k_0(x)$. On peut donc décrire $\mathbf{A}_{\max}$ comme l'ensemble des séries $\sum_{k=0}^{+\infty} p^{-k}s(a_k)\omega^k$, où $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$ tendant vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Ceci permet, en utilisant la proposition 3.7, de conclure. □

Comme $v_{\mathbf{E}}(\varphi(\overline{\alpha})) \geq 1$ si $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) = 1$, on a $\frac{\varphi(\alpha)}{p} \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\frac{1}{p}]$ et φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\max}$ et $\mathbf{B}^+_{\max}$. Cette action de φ est injective mais pas surjective. Pour remédier à ce problème, on introduit le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{B}^+_{\max})$ de $\mathbf{B}^+_{\max}$ sur lequel φ est bijectif.

Proposition 5.2. — (i) *Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$ vérifie $0 \leq r < 1$, alors φ induit un isomorphisme de $\mathbf{B}^{(r)}_{\mathrm{dR},F}$ sur $\mathbf{B}^{(r/p)}_{\mathrm{dR},F}$ et on a $c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x)) = p^{-1}c_{\mathrm{dR}}(x)$.*

(ii) $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence du (i). En effet, si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire x sous la forme $\varphi^n(y_n)$ avec $y_n \in \mathbf{B}^+_{\max} = \mathbf{B}^{(1-)}_{\mathrm{dR},F}$, et donc $c_{\mathrm{dR}}(x)=p^{-n}c_{\mathrm{dR}}(y)\leq p^{-n}$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$. On en déduit l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}\subset\mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$. Réciproquement, si $x\in\mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}$, alors $c_{\mathrm{dR}}(x)<p^{-n}$ et donc $x\in\varphi^n(\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},F})$, quel que soit $n\in\mathbf{N}$; d'où l'inclusion $\mathbf{B}^{(0^+)}_{\mathrm{dR},F}\subset\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.

Le (i), quant à lui, est une conséquence immédiate des lemmes 5.3 et 5.4 ci-dessous. □

Lemme 5.3. — *Soit $r\in\mathbf{R}$ vérifiant $0\leq r<1$ et soit $x\in\mathbf{B}^+_{\max}$. Alors*
(i) $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r\Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x))\leq p^{-1}r$.
(ii) $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r^-\Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi(x))\leq p^{-1}r^-$.

Démonstration. — Soit ω un générateur de l'idéal $\ker\theta$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. Il existe $v\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que l'on ait $\varphi(\omega)=\omega^p+pv$. Soit $w_n=w_n(x)$. On peut, d'après la prop. 3.1, écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}p^{w_n}\omega^na_n$ avec $a_n\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$, et on a

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}p^{w_n}(\omega^p+pv)^n\varphi(a_n)=\sum_{j=0}^{+\infty}\omega^{pj}\Big(\sum_{n\geq j}\binom{n}{j}p^{n-j+w_n}v^{n-j}\varphi(a_n)\Big).$$

Soit $w'_j=\inf_{n\geq j}(n-j+w_n)$. La formule ci-dessus montre que $w_{pj}(\varphi(x))\geq w'_j$. Écrivons w_n sous la forme $rn+\alpha(n)$.

Si $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r$, il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que l'on ait $\alpha(n)\geq C$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$ et donc $w_{pj}(\varphi(x))\geq C-rj$ quel que soit $j\in\mathbf{N}$; on en déduit l'implication (i).

Si $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r^-$, alors $\alpha(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et comme $w_{pj}(\varphi(x))\geq -rj+\inf_{n\geq j}\alpha(n)$, cela permet de démontrer l'implication (ii). □

Lemme 5.4. — *Soit $r\in\mathbf{R}$ vérifiant $0\leq r<1/p$ et soit $x\in\mathbf{B}^+_{\max}$. Alors*
(i) $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r\Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi^{-1}(x))\leq pr$.
(ii) $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r^-\Rightarrow c_{\mathrm{dR}}(\varphi^{-1}(x))\leq pr^-$.

Démonstration. — Il existe $v_2\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$ tel que l'on ait $(\varphi^{-1}(\omega))^p=\omega+pv_2$. Soit $w_n=w_n(x)$. On peut alors écrire x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}p^{w_n}\omega^na_n$, avec $a_n\in\widetilde{\mathbf{A}}^+$, et on a

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}p^{w_n}(\varphi^{-1}(\omega))^n\varphi^{-1}(a_n)\\&=\sum_{j=0}^{+\infty}\omega^j\Big(\sum_{b=0}^{p-1}\sum_{m\geq j}\binom{m}{j}p^{m-j+w_{pm+b}}v_2^{m-j}\varphi^{-1}(\omega^ba_{pm+b})\Big).\end{aligned}$$

Soit $w'_j=\inf_{0\leq b\leq p-1,m\geq j}(m-j+w_{pm+b})$. La formule ci-dessus montre que $w_j(\varphi^{-1}(x))\geq w'_j$. Écrivons w_n sous la forme $rn+\alpha(n)$.

Si $c_{\mathrm{dR}}(x)\leq r$, il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que l'on ait $\alpha(n)\geq C$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$ et donc $w_j(\varphi^{-1}(x))\geq C-r(pj+p-1)$, pour tout $j\in\mathbf{N}$. On en déduit le (i).

Si $c_{\mathrm{dR}}(x) \leq r^-$, alors $\alpha(n)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et comme $w_j(\varphi(x)) \geq -r(pj+p-1) + \inf_{0\leq b\leq p-1, m\geq j} \alpha(pm+b)$, cela permet de démontrer l'implication (ii). $\square$

5.2. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et $K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.— La série définissant $\log\frac{[\tilde{p}]}{p}$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et on note $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ le sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\log\frac{[\tilde{p}]}{p}]$ de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Cet anneau est stable sous l'action de $\mathscr{G}_F$. Si $L \subset \overline{K}$ est une extension algébrique de K, on note $L\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ le sous-anneau de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ engendré par L et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.

Si K est une extension finie de F, la série définissant $\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K}$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et, si e est l'indice de ramification de K sur F, on a

$$\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K} = \frac{1}{e}\Big(\log\frac{[\tilde{p}]}{p} + \log[\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}] + \log(p^{-1}\pi_K^e)\Big),$$

et comme $\log[\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}] \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\log(p^{-1}\pi_K^e) \in K$ puisque $v_{\mathbf{E}}(\tilde{\pi}_K^{-e}\tilde{p}) = v_p(p^{-1}\pi_K^e) = 0$, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 5.5. — *On a* $K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = (K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})\big[\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K}\big]$.

Proposition 5.6. — (i) *Les* $(\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K})^j$, $j \in \mathbf{N}$, *forment une famille libre sur* $\mathbf{B}^{(1)}_{\mathrm{dR},K}$.

(ii) *Si* $\mathbf{Z}_{(p)} = \mathbf{Q}\cap\mathbf{Z}_p$ *et* $I = \mathbf{Z}_{(p)}\cap[0,1[$, *les* π_K^i, $i\in I$, *forment une famille libre sur* $\mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},K}$.

Démonstration. — Soit $s : \mathscr{O}_C \to \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$ une section $\mathscr{O}_K$-linéaire continue de θ et soit $\omega = [\tilde{\pi}_K] - \pi_K$. Soit $\tilde{s}_\omega : C[[X]] \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ l'application obtenue en composant l'application de $C[[X]]$ dans $C[[T]]$ envoyant X sur $\pi_K^{-1}T$, avec $s_\omega : C[[T]] \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Passer de T à X revient à décaler toutes les valuations de convergence de 1, et $\tilde{s}_\omega$ induit un isomorphisme de $C[[X]]^{(r)}$ sur $\mathbf{B}^{(r+1)}_{\mathrm{dR},K}$ quel que soit $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, $r \geq -1$. Notons que $\tilde{s}_\omega$ n'est pas un morphisme d'anneaux mais que l'on a quand-même $\tilde{s}_\omega(fg) = \tilde{s}_\omega(f)\tilde{s}_\omega(g)$ si f ou g est dans $K[[X]]$.

Passons à la démonstration du (i). On a $\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K} = \log(1+\frac{\omega}{\pi_K})$ et donc, si a_j, $0 \leq j \leq d$ est une famille d'éléments de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ telle que $\sum_{j=0}^d a_j(\log\frac{[\tilde{\pi}_K]}{\pi_K})^j = 0$, on a $\sum_{j=0}^d \tilde{s}_\omega^{-1}(a_j)(\log(1+X))^j = 0$ dans $C[[X]]$. Par ailleurs, si $a_j \in \mathbf{B}^{(1)}_{\mathrm{dR},K}$, alors $\tilde{s}_\omega^{-1}(a_j) \in C[[X]]^{(0)}$ et on est ramené à démontrer que les $(\log(1+X))^j$, $j\in\mathbf{N}$, forment une famille libre sur $C[[X]]^{(0)}$. Or, si $\sum_{j=0}^d b_j\cdot(\log(1+X))^j = 0$ avec $b_j \in C[[X]]^{(0)}$ si $0\leq j\leq d$, alors b_0 est divisible par $\log(1+X)$ dans $C[[X]]^{(0^+)}$, et un argument de polygones de Newton montre que cela implique $b_0 = 0$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire la nullité des b_j, ce qui permet de conclure.

Démontrons maintenant le (ii). Si $i \in I$, on a $\pi_K^i = [\tilde{\pi}_K^i](1+\frac{\omega}{\pi_K})^{-i}$ et donc, si $\sum_{i\in I} a_i\pi_K^i = 0$, alors $\sum_{i\in I}\tilde{s}_\omega^{-1}([\tilde{\pi}_K^i]a_i)\cdot(1+X)^{-i} = 0$ dans $C[[X]]$. Par ailleurs, si $a_i \in \mathbf{B}^{(1^-)}_{\mathrm{dR},K}$, alors $\tilde{s}_\omega^{-1}([\tilde{\pi}_K^i]a_i) \in C[[X]]^{(0^-)}$, et on est ramené à démontrer que les $(1+X)^{-i}$, $i \in I$, forment une famille libre sur $C[[X]]^{(0^-)}$, ce qui se fait sans problème en regardant le comportement d'une combinaison linéaire au voisinage de $X=-1$. □

5.3. Le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Soit $r \in \mathbf{R}$. On utilise l'isomorphisme $s_\omega : C[[T]]^{(r)} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ pour définir la valuation $v_K^{(r)}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$ par la formule $v_K^{(r)}(x) = v_K^{(r)}(s_\omega^{-1}(x))$.

Lemme 5.7. — *Si $a, b \in C$, alors*

$$v_K\big(\theta\big(\omega^{-1}(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b))\big)\big) \geq v_K(a) + v_K(b) - 1.$$

Démonstration. — En multipliant a et b par des puissances convenables de π_K, on se ramène au cas $0 \leq v_K(a), v_K(b) < 1$ et $v_K(a)+v_K(b) > 1$, le résultat étant trivial si $v_K(a)+v_K(b) \leq 1$.

Soient $a_0, b_0 \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\theta([a_0]) = a$ et $\theta([b_0]) = b$. On peut alors écrire $s_\omega(a)$, $s_\omega(b)$ et $s_\omega(ab)$ sous la forme

$$s_\omega(a) = [a_0] + a_1\omega, \quad s_\omega(b) = [b_0] + b_1\omega \quad \text{et} \quad s_\omega(ab) = \pi_K\big([\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0] + c\omega\big),$$

avec $a_1, b_1, c \in \widetilde{\mathbf{A}}^+[\pi_K]$. On en tire la formule

$$s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b) = \omega(\pi_K c - [\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0] - [a_0]b_1 - [b_0]a_1 - \omega a_1 b_1),$$

et la minoration

$$\begin{aligned} v_K\big(\theta\big(\omega^{-1}(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b))\big)\big) &\geq \inf(1, v_{\mathbf{E}}(a_0), v_{\mathbf{E}}(b_0), v_{\mathbf{E}}(\tilde{\pi}_K^{-1}a_0b_0)) \\ &= \inf(1, v_K(a), v_K(b), v_K(a)+v_K(b)-1), \end{aligned}$$

qui permet de conclure au vu des conditions mises sur a et b. □

Lemme 5.8. — *Si $r \geq 1$ et si $f, g \in C[[T]]^{(r)}$, alors*

$$v_K^{(r)}\big(s_\omega(fg) - s_\omega(f)s_\omega(g)\big) \geq v_K^{(r)}(f) + v_K^{(r)}(g) + r - 1.$$

Démonstration. — Il suffit de prouver le resultat pour $f = aT^i$ et $g = bT^j$ auquel cas on est ramené à prouver l'inégalité

$$\begin{aligned} (i+j+1)r + v_K^{(r)}\big(\omega^{-1}\big(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b)\big)\big) &= v_K^{(r)}\big(\omega^{i+j}\big(s_\omega(ab) - s_\omega(a)s_\omega(b)\big)\big) \\ \geq v_K^{(r)}(\omega^i s_\omega(a)) + v_K^{(r)}(\omega^j s_\omega(b)) + r - 1 &= v_p(a) + v_p(b) + (i+j+1)r - 1, \end{aligned}$$

qui est une conséquence directe du lemme 5.7. □

Proposition 5.9. — *Si $r \in \mathbf{R}$ est > 1, si $a \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$, et si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$, alors il existe $y \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $z \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(s_\omega^{-1}(a))$, uniques, tels que $x = ay + s_\omega(z)$.*

Démonstration. — Posons $x_0 = x$ et définissons par récurrence, en utilisant le (i) de la prop. 2.1, des éléments x_k, y_k de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $z_k \in C[T]$ de degré $< d^{(r)}(s_\omega^{-1}(a))$, en écrivant $s_\omega^{-1}(x_k)$ sous la forme $s_\omega^{-1}(x_k) = s_\omega^{-1}(a)s_\omega^{-1}(y_k) + z_k$ et en posant $x_{k+1} = x_k - ay_k - s_\omega(z_k)$. On a alors $v_K^{(r)}(z_k) \geq v_K^{(r)}(x_k)$ et

$$v_K^{(r)}(x_{k+1}) = v_K^{(r)}\big(s_\omega(s_\omega^{-1}(a)s_\omega^{-1}(y_k)) - ay_k\big) \geq v_K^{(r)}(s_\omega^{-1}(x_k)) + r - 1,$$

d'après le lemme 5.8. Comme $r > 1$, cela implique que les séries $\sum_{k=0}^{+\infty} y_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k$ convergent dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ et $C[T]$ respectivement, et les sommes y et z de ces séries vérifient $ay + s_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(x_k - x_{k+1}) = x$. Ceci permet de conclure. □

Corollaire 5.10. — *Si $r \in \mathbf{R}$ est > 1, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ est un anneau principal.*

Démonstration. — Soit I un idéal non nul de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$. La proposition précédente montre que $s_\omega^{-1}(I) \cap C[T]$ est non réduit à 0, et que, si P est un élément non nul de $s_\omega^{-1}(I) \cap C[T]$ de degré minimal, alors $s_\omega(P)$ est un générateur de I, ce qui permet de conclure. □

Proposition 5.11. — *Soit $r \in \mathbf{R}$, $r > 1$, et soit*[9] *$\overline{K}^{(r^-)} = \overline{K} \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$. Si $e_1, \dots, e_d \in \overline{K}$ sont linéairement indépendants sur $\overline{K}^{(r^-)}$, alors ils le sont encore sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$.*

Démonstration. — Soit $a_1e_1 + \cdots + a_ke_k = 0$ une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ de longeur minimale. Soit L une extension finie de K contenant $e_1, \dots, e_k$. Appliquant $\sigma \in \mathscr{G}_L$ à la relation $a_1e_1 + \cdots + a_ke_k = 0$, utilisant le fait que $\sigma(e_i) = e_i$ si $1 \leq i \leq k$ et la minimalité de notre relation, on en déduit les relations $a_1\sigma(a_i) = a_i\sigma(a_1)$ quels que soient $1 \leq i \leq k$ et $\sigma \in L$. Ceci implique que $\frac{a_i}{a_1} \in L$ quel que soit i. Comme par ailleurs $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ est un anneau principal, il est intégralement clos dans son corps des fractions et donc $\frac{a_i}{a_1} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)} \cap L \subset \overline{K}^{(r^-)}$. Ceci permet de conclure. □

5.4. L'anneau $\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}$. — Si $r \in \widetilde{\mathbf{R}}$, on note $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+})^{(r)}$ l'anneau $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}) \cap \mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r)}$.

Proposition 5.12. — *La filtration de $\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}$ par valuation de convergence est donnée par*

$$\begin{aligned}
&(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+})^{(r^+)} = (\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+})^{(r)} = \overline{K}^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}\\
\textit{et } &(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+})^{(r^-)} = \overline{K}^{(r^-)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+} \quad \textit{si } r \in \mathbf{R} \textit{ et } r > 1,\\
&(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+})^{(1^+)} = \overline{K}^{(1)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^{+}
\end{aligned}$$

---

[9] Comme $c_{\mathrm{dR},K}(x) \in \mathbf{R}$ si $x \in \overline{K}$, on voit que $\overline{K}^{(r^-)}$ est aussi la réunion des $\overline{K}^{(s)}$ pour $s < r$ bien que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(r^-)}$ soit strictement plus gros que la réunion des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR},K}^{(s)}$, $s < r$.

$$\textit{et } (\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(1)} = \overline{K}^{(1)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}},$$
$$(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r)} = K\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \quad \textit{si } r\in\widetilde{\mathbf{R}} \textit{ et } 0^+\leq r\leq 1^-,$$
$$(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(0)} = \widetilde{\mathbf{B}}^+[\pi_K].$$

Démonstration. — Soit $x\in\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. On peut écrire x sous la forme $x=\sum_{i=1}^n\alpha_ix_i$ avec $\alpha_i\in\overline{K}$ et $x_i\in\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. Soit L une extension finie de K contenant les α_i et, si $r\in\mathbf{R}$, soit $L^{(r)}=L\cap\overline{K}^{(r)}$. Les $L^{(r)}$ forment une filtration croissante exhaustive de L et, L étant de dimension finie sur K, cette filtration ne comporte qu'un nombre fini de sauts $0=r_1,\dots,r_d$. Soit r le plus petit élément de $\{r_1,\dots,r_d\}$ tel que x appartienne à $L^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. Soit $e_1=1,e_2,\dots,e_k$ une base de $L^{(r)}$ sur $L^{(r^-)}$. Comme $\overline{K}^{(r^-)}$ est une extension galoisienne de K, et $L^{(r^-)}=L^{(r)}\cap\overline{K}^{(r^-)}$, les e_i, $1\leq i\leq k$ forment encore une famille libre sur $\overline{K}^{(r^-)}$.

On peut alors écrire x sous la forme $x=\sum_{i=1}^k\beta_ie_i$ avec $\beta_i\in L^{(r^-)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et les β_i, $i\geq 2$ non tous nuls. Maintenant, si $r>1$, alors, d'une part $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}\subset\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$ et, d'autre part, d'après la proposition 5.11, les e_i forment encore une famille libre sur $\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$; on a donc $x\notin\mathbf{B}^{(r^-)}_{\mathrm{dR},K}$. Comme $c_{\mathrm{dR},K}(x)\leq r$ puisque $x\in L^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$, on en déduit l'égalité $c_{\mathrm{dR},K}(x)=r$. Ceci permet de démontrer les égalités $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r)}=\overline{K}^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ et $(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r^-)}=\overline{K}^{(r^-)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$, puis l'égalité

$$(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(r^+)}=\cap_{s>r}(\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(s)}=(\cap_{s>r}\overline{K}^{(s)})\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}=\overline{K}^{(r)}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log},$$

cette dernière suite d'égalité étant encore valable si $r=1$. Les trois égalités restantes sont alors des traductions des propositions 5.6 et 5.2 et du (i) de la prop. 3.4. □

Corollaire 5.13. — *Si $x\in\overline{K}\cdot\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ vérifie $c_{\mathrm{dR},K}(x)>0^+$, et si $u\in\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ est non nul, alors $c_{\mathrm{dR},K}(ux)=c_{\mathrm{dR},K}(x)$.*

Remarque 5.14. — Une petite modification de la démonstration de la prop. 5.12 permet de montrer que l'application de $\overline{K}[u]\otimes_{F^{\mathrm{nr}}}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, envoyant $\alpha u^k\otimes\beta$ sur $\alpha\beta\cdot(\log\frac{[\tilde{p}]}{p})^k$, est injective. En particulier, cela montre que

(i) $\log\frac{[\tilde{p}]}{p}$ est transcendant sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$,

(ii) $K\otimes_{K_0}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}\to\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est injective.

Ces deux résultats (classiques [**11**]) sont à la base de la théorie des (φ,N)-modules filtrés. En particulier, la transcendance de $\log\frac{[\tilde{p}]}{p}$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ permet d'étendre l'action de φ à $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ en posant $\varphi(\log\frac{[\tilde{p}]}{p})=p\log\frac{[\tilde{p}]}{p}$, et de munir $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ de la $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$-dérivation N normalisée par $N(\log\frac{[\tilde{p}]}{p})=-1$. Les actions de φ et N ainsi définies commutent à celle de $\mathscr{G}_F$ et on a $N\varphi=p\varphi N$.

6. Représentations de de Rham

6.1. Le $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module attaché à une représentation de de Rham. — Dans tout ce §, V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$, de dimension d, à poids de Hodge-Tate ≤ 0. Si L est une extension finie de K, soient [(10)]

$$\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}, \quad \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}$$
$$\text{et} \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V) = (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_L}.$$

Alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont des $L \cap F^{\mathrm{nr}}$-espaces vectoriels de dimension $\leq d$ munis d'actions de φ et N, avec $N\varphi = p\varphi N$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)^{N=0}$. Si L est une extension galoisienne de K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont, de plus, munis d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$, qui commute à φ et N, et on retrouve $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},K}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},K}(V)$ en prenant les points fixes par $\mathscr{G}_K$. Comme on a supposé V de de Rham, $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ est un L-espace vectoriel de dimension d, qui est muni, si L est une extension galoisienne de K, d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$ agissant à travers $\mathrm{Gal}(L/K)$, et on retrouve $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V)$ en prenant les points fixes par $\mathscr{G}_K$. Finalement, l'application naturelle de $L \otimes_{L\cap F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$, induite par l'inclusion de $L \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, est injective.

Soit $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V) = \cup_L \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$, où L décrit l'ensemble des extensions finies de K contenue dans $\overline{K}$. C'est un F^{nr}-espace vectoriel qui est *a priori* de dimension $\leq d$, mais est en fait de dimension d car toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable (cf. note 2). Par ailleurs, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est muni d'actions semi-linéaire de φ et linéaire de N, avec $N\varphi = p\varphi N$, et d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_K$, continue pour la topologie discrète sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$, et commutant à φ et N. En résumé, $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est *un $(\varphi, N, \mathscr{G}_K)$-module*. De plus, on a

$$\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V) \cong \overline{K} \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V),$$
$$F^{\mathrm{nr}} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{st},K}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)^{\mathscr{G}_K^0} \quad \text{et} \quad F^{\mathrm{nr}} \otimes_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris},K}(V) = (\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}_K^0}.$$

6.2. Ramification et valuation de convergence. — On munit $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V)$ respectivement des filtrations de ramification et de convergence, en posant, si $r \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = \cap_{s>r} (\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K^{s-1}} = \cup_{L\subset \overline{K}^{(r)}} \mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$$
$$\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \cap_{s>r} (\mathbf{B}^{(s)}_{\mathrm{dR},K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K} = (\mathbf{B}^{(r^+)}_{\mathrm{dR},K} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}.$$

---

(10) On peut définir $\mathbf{D}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}$ en utilisant $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$ au lieu de $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ car, d'une part, les périodes des représentations p-adiques vivent dans des sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ et donc appartiennent au sous-anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, et, d'autre part, on a supposé que les poids de Hodge-Tate de V sont ≤ 0, ce qui permet de remplacer $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ par $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$.

Théorème 6.1. — *Soit V une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0.*

(i) *Si $r \geq 1$, alors* $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K}$.

(ii) *Si $r < 1$, alors* $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \mathbf{D}^{(0)}_{\mathrm{dR},K}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

Démonstration. — Comme $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$ est de dimension finie, la filtration par les $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V)$ n'a qu'un nombre fini de sauts. Il existe donc une extension finie L de K, galoisienne et incluse dans $\overline{K}^{(r)}$, telle que l'on ait $\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = F^{\mathrm{nr}} \otimes_{M_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},M}(V)$, pour toute extension finie galoisienne M de K, contenant L et incluse dans $\overline{K}^{(s)}$, si $s > r$ est assez petit.

Par ailleurs, on a $M \otimes_{M_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st},M}(V) = M \otimes_K (M \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$ par descente étale. On en déduit, en passant à la limite inductive, que

$$\overline{K}^{(s)} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V) = \overline{K}^{(s)} \otimes_K (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K},$$

si $s > r$ est assez petit. On a donc $(\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K} = (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$, pour tout $s > r$ assez petit.

Comme V est potentiellement semi-stable à poids de Hodge-Tate ≤ 0, on a $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$. Il résulte donc de la prop. 5.12 que $\mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) = (\overline{K}^{(s)} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathscr{G}_K}$, si $s > 1$. On en déduit le (i).

Le (ii) est, quant à lui, une conséquence de ce que $(\overline{K} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{(s)} = K \cdot \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$, si $0 < s < 1$ (cf. prop. 5.12). □

Rappelons que ces filtrations permettent (cf. n° 0.3 et n° 0.4) de définir les conducteurs d'Artin et de Swan de V et $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$. Le théorème ci-dessus permet de comparer ces invariants :

Corollaire 6.2. — *Si V est une représentation de de Rham de $\mathscr{G}_K$ à poids de Hodge-Tate ≤ 0, alors*

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \quad \text{et} \quad c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Démonstration. — Le groupe $\mathscr{G}_K$ agissant de manière discrète sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst},K}(V)$, le théorème de Hilbert 90 nous donne, si $r \geq 1$, l'égalité

$$\dim_K (\overline{K} \otimes_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V))^{\mathscr{G}_K} = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst},K}(V),$$

d'où l'on déduit que $\dim_K \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{pst}}(V)$ grâce au (i) du théorème 6.1. On en déduit l'égalité des conducteurs de Swan. Pour démontrer celle des conducteurs d'Artin, constatons que

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \dim V - \sum_{0 \leq r < 1} \dim_K \Big(\mathbf{D}^{(r)}_{\mathrm{dR},K}(V) / \cup_{s<r} \mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V)\Big),$$

et comme $\mathbf{D}^{(s)}_{\mathrm{dR},K}(V) = \mathbf{D}^{(0)}_{\mathrm{dR},K}(V) = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on obtient la formule

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = \dim V - \dim_F \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

Par ailleurs, on a par définition,

$$c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) - c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) = \dim_{F^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) - \dim_{F^{\mathrm{nr}}} (\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}^0_K},$$

et comme $(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)^{N=0})^{\mathscr{G}^0_K} = F^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, on voit que

$$c_{\mathrm{Art},K}(V) - c_{\mathrm{Sw},K}(V) = c_{\mathrm{Art},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) - c_{\mathrm{Sw},K}(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)).$$

Ceci permet de conclure. □

6.3. Application aux E-représentations. — Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ est un E-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action E-linéaire de $\mathscr{G}_K$. Comme E est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, on peut aussi voir une E-représentation V comme une $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension $[E : \mathbf{Q}_p] \dim_E V$.

Proposition 6.3. — *Si V est une E-représentation de $\mathscr{G}_K$ et si L est une extension finie de K, alors $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ sont des $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L \cap F^{\mathrm{nr}})$-modules libres.*

Démonstration. — $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} (L \cap F^{\mathrm{nr}})$ est un produit fini d'extensions finies E_i, $i \in I$, de $L \cap F^{\mathrm{nr}}$ et φ permute ces extensions, ce qui permet de montrer que la dimension de la E_i-composante de $\mathbf{D}_{\mathrm{cris},L}(V)$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{st},L}(V)$ ne dépend pas du choix de i. On en déduit le résultat. □

En général, il est faux que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ soit un $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$-module libre, mais c'est le cas si V est une représentation de de Rham. La proposition précédente permet alors d'étendre tous les résultats du n° 6.2 aux E-représentations et d'obtenir les énoncés mentionnés dans l'introduction.

Remarque 6.4. — Il faut tout de même faire attention au fait que, même si V est de de Rham, la filtration de Hodge sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ (qui n'est utilisée nulle part dans ce texte) n'est pas, en général, constituée de $E \otimes_{\mathbf{Q}_p} L$-modules libres. Le cas le plus simple où ce phénomène apparaît étant celui de la représentation V associé au module de Tate d'un groupe de Lubin-Tate associé à E, qui est une E-représentation de $\mathscr{G}_E$ de dimension 1, mais le Fil^0 de $\mathbf{D}_{\mathrm{dR},L}(V)$ est de dimension $[E : \mathbf{Q}_p] - 1$ sur L et donc ne peux pas être un $E \otimes L$ module libre.

Références

[1] A. Abbes & T. Saito – Ramification of local fields with imperfect residue fields, *Amer. J. Math.* **124** (2002), p. 879–920.

[2] Y. André – Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.

[3] ———, Représentations galoisiennes et opérateurs de Bessel p-adiques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **52** (2002), p. 779–808.

[4] L. Berger – Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 219–284.

[5] P. Colmez – Les conjectures de monodromie p-adiques, *Astérisque* **290** (2003), p. 53–101, Séminaire Bourbaki, vol. 2001/2002, exposé n° 897.

[6] ———, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, ce volume.

[7] P. Deligne – Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, in *Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972)*, Springer, 1973, p. 501–597. Lecture Notes in Math., Vol. 349.

[8] ———, Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0, in *Representations of reductive groups over a local field*, Travaux en Cours, Hermann, 1984, p. 119–157.

[9] J.-M. Fontaine – Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III*, Astérisque, vol. 65, Soc. Math. France, 1979, p. 3–80.

[10] ———, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), p. 529–577.

[11] ———, Le corps des périodes p-adiques, *Astérisque* **223** (1994), p. 59–111.

[12] ———, Représentations p-adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), p. 113–184.

[13] ———, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication, 2004.

[14] K. S. Kedlaya – A p-adic local monodromy theorem, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 93–184.

[15] Z. Mebkhout – Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

[16] J-P. Serre – *Corps locaux*, Hermann, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.

Pierre Colmez, École polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France
Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr