Astérisque

OLIVIER SCHIFFMANN

Variétés carquois de Nakajima [d'après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, ...]

Astérisque, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 976, p. 295-344

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__295_0>

© Société mathématique de France, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59e année, 2006-2007, n° 976, p. 295 à 344

VARIÉTÉS CARQUOIS DE NAKAJIMA
[d'après Nakajima, Lusztig, Varagnolo, Vasserot, Crawley-Boevey, ...]

par **Olivier SCHIFFMANN**

1. INTRODUCTION

Les variétés de Nakajima trouvent leurs origines au début des années 90 dans la construction d'espaces de modules de connexions anti-autoduales – les *espaces de modules d'instantons* – sur certaines classes de variétés réelles hyperkählériennes de dimension quatre – les *espaces ALE* – cf. [**1**], [**40**], [**41**]. Pour un bon choix de structure complexe dans la famille hyperkählérienne, ces espaces s'identifient à des espaces de modules de fibrés holomorphes sur les résolutions minimales $\widetilde{\mathbb{C}^2 /\!/ \Gamma}$ des singularités de Klein (ou plutôt sur leur compactification naturelle). Via la correspondance de McKay [**19**], elle-même basée sur une observation remarquable de McKay, ces derniers espaces de modules admettent une description explicite comme quotient hyperkählérien d'un certain espace de représentations d'un carquois de type affine ($A_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ ou $E_{6,7,8}^{(1)}$).

Ce modèle explicite a permis à Nakajima de construire, sur l'homologie de ces « variétés de carquois », une action de l'algèbre de Kac-Moody affine $\widehat{\mathfrak{g}}$ – de même type $A_n^{(1)}, D_n^{(1)}$ ou $E_{6,7,8}^{(1)}$ – par convolution par certaines correspondances bien choisies. On obtient ainsi une représentation intégrable de plus haut poids de $\mathfrak{g}$. Ce pont entre la géométrie des espaces de modules d'instantons d'un côté et la théorie des représentations des algèbres de Kac-Moody affines de l'autre est très utile pour les deux parties prenantes : il permet de relier les nombres de Betti à certains caractères de représentations de $\widehat{\mathfrak{g}}$, de construire des symétries relevant, au niveau des espaces de modules, l'action du groupe de Weyl, etc. ; il permet aussi de réaliser géométriquement certains invariants fins des représentations de $\widehat{\mathfrak{g}}$, comme le cristal de Kashiwara (cf. Section 6.).

La définition de ces « variétés de carquois de Nakajima » se généralise sans difficulté à *n'importe quel carquois* Q. On obtient ainsi une famille de triplets $(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}), \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}), \pi)$ où $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété algébrique symplectique

lisse, $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété algébrique affine (en général singulière) et où $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est un morphisme propre (cf. [**60**]). Ici $\mathbf{v},\mathbf{w}$ sont deux vecteurs de dimensions (arbitraires) pour Q. Les constructions géométriques de représentations mentionnées plus haut s'étendent aussi à ce cadre général [**62**] et on obtient ainsi des représentations d'algèbres de Kac-Moody (symétriques) arbitraires. Même si, comme expliqué plus haut, la motivation initiale est d'ordre purement géométrique (voire même de géométrie différentielle), ce travail trouve naturellement sa place dans la continuité de ceux de Ringel [**71**] et Lusztig [**45**] sur les groupes quantiques et les carquois.

Il apparaît très clairement que le triplet $(\mathfrak{M}(\mathbf{w}), \mathfrak{M}_0(\mathbf{w}), \pi)$ (où on a posé $\mathfrak{M}(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w}) = \bigcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$) est un analogue de la désingularisation de Springer $T^*\mathcal{B} \to \mathcal{N}$ du cône nilpotent d'une algèbre de Lie simple $\mathbb{C}$ par le fibré cotangent de sa variété drapeaux $\mathcal{B}$. La construction de Nakajima de représentations intégrables d'algèbres de Kac-Moody s'apparente ainsi à la construction de Springer de représentations de groupes de Weyl dans l'homologie des fibres de Springer. Par un théorème fameux dû à Kazhdan-Lusztig [**38**] et, indépendamment, à Ginzburg [**16**], on réalise la correspondance de Deligne-Langlands en construisant toutes les représentations irréductibles de dimension finie d'une algèbre de Hecke affine dans la K-théorie des fibres de Springer ; Nakajima a obtenu dans [**64**] un résultat similaire : les représentations irréductibles des algèbres affines quantiques se réalisent dans la K-théorie des fibres de l'application $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$. On en déduit une formule de caractère pour ces représentations irréductibles faisant intervenir une nouvelle classe de polynômes, quelque peu semblables aux polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Il existe néanmoins quelques différences notables avec la désingularisation de Springer. Par exemple, les variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{w})$ ont plusieurs composantes connexes (celles-ci sont reliées entre elles par la structure de cristal de Kashiwara). De plus, les variétés carquois sont définies pour toutes les algèbres de Kac-Moody alors que les constructions de variété drapeaux et de résolutions de Springer pour les groupes de Kac-Moody sont beaucoup plus délicates. Notons enfin qu'il existe un autre modèle géométrique pour les représentations d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$, basé, lui, sur la grassmanienne affine $\mathcal{G}r$ de $\mathfrak{g}$ (cf. e.g. [**54**]). Le problème, qui nous paraît important, de comprendre le lien unissant ce modèle avec celui des variétés de Nakajima est encore largement ouvert (cf. [**55**] en type A).

Le plan de cet exposé est le suivant. Les sections 2 et 3 sont consacrées au schéma de Hilbert de points sur $\mathbb{C}^2$ et aux espaces de modules de fibrés équivariants sur $\mathbb{P}^2$, qui sont des exemples concrets de variétés de Nakajima (associées au carquois de type $A_0^{(1)}$ et aux carquois affines respectivement) et dans lesquels la plupart des phénomènes sont déja présents. Les variétés de Nakajima (pour un carquois général) sont définies dans la section 4. Les constructions de Nakajima de représentations en homologie et en

K-théorie sont le sujet des sections 5 et 7 respectivement. La section 6 est dédiée aux propriétés de fibrations des variétés carquois et à la structure de cristal de Kashiwara dont on peut munir l'ensemble de ses composantes irréductibles. La dernière section se veut un pointeur vers quelques-uns des développements plus récents ; le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans les nombreux autres survols du sujet [**65**], [**59**], ...

Remerciements.— L'auteur remercie chaleureusement P. Baumann, D. Hernandez, H. Nakajima et É. Vasserot pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

2. SCHÉMA DE HILBERT DE POINTS DE $\mathbb{C}^2$

2.1. Définition

Soit $n \geq 1$ un entier et soit $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ le schéma de Hilbert paramétrant les sous-schémas de dimension zéro et de longueur n de $\mathbb{C}^2$. À un tel sous-schéma $Z \subset \mathbb{C}^2$, on peut associer son anneau de fonctions régulières A_Z et son idéal de définition I_Z

$$0 \longrightarrow I_Z \longrightarrow \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow A_Z \longrightarrow 0$$

et, ensemblistement, on a

$$(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \big\{ I \text{ idéal de } \mathbb{C}[x,y] \mid \dim \mathbb{C}[x,y]/I = n \big\}.$$

On sait depuis Grothendieck que $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ peut être muni d'une structure de variété algébrique. De plus, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est lisse (car $\mathbb{C}^2$ est une surface, [**13**]), irréductible, de dimension $2n$, et l'application *de Hilbert-Chow*

$$\pi : (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to S^n\mathbb{C}^2$$

qui associe à un sous-schéma Z son support (compté avec multiplicité) est une résolution de singularités. En d'autres termes, π est un morphisme propre qui se restreint en un isomorphisme

$$\pi : \pi^{-1}(S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2$$

où

$$S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2 = \big\{ (z_1, \ldots, z_n) \in S^n\mathbb{C}^2 \mid z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j \big\}$$

est le lieu lisse de $S^n\mathbb{C}^2$. La fibre exceptionnelle la plus intéressante est $(\mathbb{C}^2)^{[n]}_0 := \pi^{-1}((0,0,\ldots,0))$, appelée schéma de Hilbert *ponctuel*.

2.2. Description de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ à l'aide de carquois

Nous allons donner une interprétation algébrique du triplet $\left((\mathbb{C}^2)^{[n]}, S^n\mathbb{C}^2, \pi\right)$ en termes d'espaces de modules de représentation d'un carquois très simple. À un idéal I de $\mathbb{C}[x,y]$ de codimension n, associons le quadruplet (V, B_1, B_2, v) avec

$$\begin{aligned} V &= \mathbb{C}[x,y]/I, \\ v &= 1 \in V, \\ B_1 &\in \mathrm{End}(V), u \mapsto xu, \\ B_2 &\in \mathrm{End}(V), u \mapsto yu. \end{aligned}$$

On voit aisément que

i) $[B_1, B_2] = 0$,

ii) le vecteur v engendre tout V sous l'action de B_1 et B_2.

Inversement, tout quadruplet (V, B_1, B_2, v) avec $\dim V = n$ satisfaisant à i) et ii) provient d'un unique idéal $I \subset \mathbb{C}[x,y]$ défini par

$$I = \left\{ f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \mid f(B_1, B_2) \cdot v = 0 \right\}.$$

Enfin, deux quadruplets (V, B_1, B_2, v) et (V', B_1', B_2', v') déterminent le même idéal I si et seulement si il existe $g : V \xrightarrow{\sim} V'$ pour lequel $gv = v'$, $gB_1g^{-1} = B_1'$ et $gB_2g^{-1} = B_2'$. En d'autres termes, et toujours ensemblistement, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ s'identifie au quotient

$$\left\{ (B_1, B_2, v) \in (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^n)^2 \times \mathbb{C}^n \;\middle|\; \begin{array}{c} [B_1, B_2] = 0 \\ v \text{ engendre } \mathbb{C}^n \text{ sous } B_1, B_2 \end{array} \right\} / GL_n(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

Exemple 2.1. Voyons comment la structure de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ se reflète dans le modèle (2.1). Étant donné que B_1 et B_2 commutent, il sont simultanément trigonalisables. Soit $E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de trigonalisation ; notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, resp. $\mu_1, \ldots, \mu_n$, les coefficients diagonaux de B_1 et B_2 dans E. Si $(\lambda_i, \mu_i) \neq (\lambda_j, \mu_j)$ pour $i \neq j$, on voit facilement que B_1 et B_2 sont simultanément diagonalisables. Ceci correspond aux points de l'ouvert

$$\{ Z = \{z_1, \cdots, z_n\} \mid z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j \} \subset (\mathbb{C}^2)^{[n]}.$$

En général, le morphisme de Hilbert-Chow associe à la $GL_n(\mathbb{C})$-orbite du triplet (B_1, B_2, v) le point

$$\pi\left(GL_n(\mathbb{C}) \cdot (B_1, B_2, v)\right) = ((\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_n, \mu_n)) \in S^n\mathbb{C}^2.$$

Pour voir un exemple de phénomène qui apparaît lorsque B_1 ou B_2 ne sont pas diagonalisables, prenons $n = 2$, et

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0,0).$$

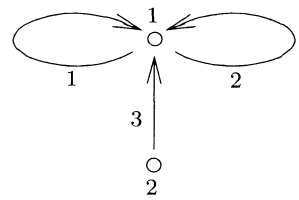
Comme v engendre $\mathbb{C}^2$ sous l'action de B_1 et B_2, on peut, à conjugaison près, supposer que $v = e_2$. Dans ce cas, l'idéal correspondant $I^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{C}[x,y]$ est engendré par les éléments

$$\alpha(y-\mu) - \beta(x-\lambda),\ (x-\lambda)^2,\ (y-\mu)^2.$$

Notons que $I^{\lambda,\mu}_{\alpha,\beta}$ ne dépend que de (λ,μ) et du point $(\alpha:\beta) \in \mathbb{P}^1$. On voit ainsi que, pour $n = 2$, le schéma de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ est isomorphe à l'éclaté de $S^2\mathbb{C}^2$ le long de la diagonale. □

La théorie des représentations des carquois fournit le bon cadre à l'étude de variétés telles que celle définie par (2.1). Rappelons brièvement qu'un carquois n'est rien d'autre qu'un graphe orienté fini $Q = (I, \Omega)$, où I désigne l'ensemble des sommets, Ω celui des arêtes orientées et où Ω est muni d'applications $s : \Omega \to I$ (source) et $t : \Omega \to I$ (but, « target »). Une représentation $\underline{V} = (V_i, x_\sigma)_{i,\sigma}$ de Q sur un corps k est la donnée de k-espaces vectoriels de dimension finie V_i, $i \in I$ et d'applications k-linéaires $x_\sigma : V_{s(\sigma)} \to V_{t(\sigma)}$, $\sigma \in \Omega$. Les représentations de Q sur k forment une catégorie abélienne $\mathrm{Rep}_k\ Q$. On note $\underline{d}(\underline{V}) = (\dim V_i)_i \in \mathbb{N}^I$ le *vecteur de dimension* de $\underline{V}$.

Ainsi, la variété définie par (2.1) *avant le quotient par* $GL_n(\mathbb{C})$ s'identifie-t-elle à l'espace des représentations du carquois

$T_0 =$ 

avec $V_1 = \mathbb{C}^n, V_2 = \mathbb{C}$, qui vérifient de plus

i) $[x_1, x_2] = 0$.

ii) Tout sous-espace $S \subseteq V$ contenant $\mathrm{Im}\ x_3$ et stable par x_1, x_2 est égal à V.

La même variété définie par (2.1) prise *après le quotient* par $GL_n(\mathbb{C})$ s'identifie à l'espace des représentations $\underline{V}$ de T_0 de vecteur de dimension $\underline{d} = (n, 1)$ et vérifiant i) et ii), *mais à isomorphisme près.*

La théorie géométrique des invariants de Mumford [**58**] permet précisément de construire de tels espaces de modules. Rappelons-en rapidement les grandes lignes. Soit G un groupe algébrique réductif complexe et soit M une G-variété. Pour faire le quotient de M par G au sens de Mumford, considérons le fibré en droites trivial $M \times \mathbb{C}$ muni de la G-linéarisation

$$g \cdot (x, z) = (g \cdot x, \chi(g)^{-1} z),$$

où $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ est un caractère. Par définition, un point $x \in M$ est dit *semi-stable* si, pour tout $z \neq 0$, l'adhérence de l'orbite $G \cdot (x, z)$ n'intersecte pas $M \times \{0\}$. Notons $M^{ss} \subset M$ la sous-variété formée des points semi-stables. Un point $x \in M$ est dit *stable* si, pour tout $z \neq 0$, l'orbite $G \cdot (x, z)$ est une sous-variété fermée de $M \times \mathbb{C}$, et si le stabilisateur de x dans G est fini. On note $M^s \subset M$ la sous-variété formée des points stables. La théorie de Mumford nous dit que M^s, M^{ss} sont des ouverts (éventuellement vides) et qu'il existe un quotient géométrique lisse $M^s \to M^s/G$. En ce qui concerne les points semistables on définit une relation d'équivalence sur M^{ss} par $x \sim y$ si $\overline{G \cdot x} \cap \overline{G \cdot y} \cap M^{ss} \neq \varnothing$, et on a

$$M^s/\sim = \operatorname{Proj}\left(\bigoplus_{l \geq 0} A^{G, \chi^l}\right),$$

où $A = \mathbb{C}[M]$ et où, pour $l \geq 0$,

$$A^{G, \chi^l} := \{f \in A \mid g \cdot f = \chi(g)^l f \text{ pour tout } g \in G\}$$

est l'espace des semi-invariants relatifs au caractère χ^l. On note $M/_\chi G$ cette variété algébrique (singulière en général). Il existe une immersion ouverte $M^s/G \subset M/_\chi G$ (ouvert des points stables). Enfin l'inclusion $A^G = A^{G, \chi^0} \subset \bigoplus_{l \geq 0} A^{G, \chi^l}$ induit un morphisme propre $\pi' : M /_\chi G \to M /\!/ G$.

Appliquons cette technique à la sous-variété algébrique fermée $M_{(n,1)}$ de $\operatorname{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) \times \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)^2$ formée des représentations (x_1, x_2, x_3) de T_0 vérifiant i). Le groupe $G = GL_n(\mathbb{C})$ opère naturellement sur $M_{(n,1)}$.

PROPOSITION 2.1. — *Pour $\chi = \det$, il existe des isomorphismes canoniques*

$$M_{(n,1)} /_\chi G \simeq (\mathbb{C}^2)^{[n]}, \qquad M_{(n,1)} /\!/ G \simeq S^n \mathbb{C}^2$$

et l'application π' s'identifie au morphisme de Hilbert-Chow π. De plus, $M^{ss}_{(n,1)} = M^s_{(n,1)}$, i.e. tout point semi-stable est stable.

Preuve. — On doit montrer que $x = (x_1, x_2, x_3)$ est un point semi-stable de $M_{(n,1)}$ si et seulement si il vérifie la condition ii). Supposons que x ne satisfasse pas à ii) ; soit S' un supplémentaire au sous-espace strict $S \subset \mathbb{C}^n$ engendré par $\operatorname{Im} x_3$ sous l'action de x_1, x_2. En considérant l'action sur un point $(x, z) \in M_{(n,1)} \times \mathbb{C}^*$ du sous-groupe

à un paramètre $\lambda : \mathbb{C}^* \to GL_n(\mathbb{C}), t \mapsto Id_S \oplus t^{-1} Id_{S'}$ on voit aisément (en faisant tendre $t \mapsto 0$) que x n'est pas semi-stable. Inversement, supposons que $x = (x_1, x_2, x_3)$ vérifie la condition ii). On va montrer que x est alors semi-stable, et même stable. Soit $g \in GL_n(\mathbb{C})$ un élément du stabilisateur de x. Alors le noyau de $g - Id$ contient Im x_3 et est stable par x_1, x_2. On en déduit que $g = Id$ et donc que x est de stabilisateur trivial. Maintenant, si x n'est pas stable, alors il existe un $z \neq 0$ pour lequel l'orbite $GL_n(\mathbb{C}) \cdot (x, z)$ n'est pas fermée. D'après le critère de Hilbert-Mumford, on peut trouver un sous-groupe $\lambda : \mathbb{C}^* \to GL_n(\mathbb{C})$ pour lequel $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot (x, z)$ existe et n'appartient pas à $GL_n(\mathbb{C}) \cdot (x, z)$. Écrivons la décomposition de $\mathbb{C}^n$ comme λ-module

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m, \qquad \lambda(t)_{|V_m} = t^m Id.$$

Comme $\lim_{t \to 0} \lambda(t) \cdot (x, z)$ existe, on a $x_i(V_m) \subset \bigoplus_{l \geq m} V_l$ et Im $x_3 \subset \bigoplus_{l \geq 0} V_l$. De la condition ii) on déduit donc que $C^n = \bigoplus_{m \geq 0} V_m$. Mais en particulier det $\lambda(t) = t^N$ pour un $N > 0$, ce qui contredit la convergence de $\lambda(t) \cdot (x, z) = (\lambda(t) \cdot x, t^{-N} z)$. Donc x est stable et la première égalité de l'énoncé est démontrée. Noter qu'on a par la même occasion démontré que $M^s_{(n,1)} = M^{ss}_{(n,1)}$.

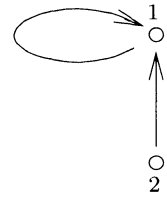
L'identification $M_{(n,1)} /\!/ G \simeq S^n \mathbb{C}^2$ ainsi que l'assertion concernant le morphisme de Hilbert-Chow sont évidentes (cf. Exemple 2.1). □

En d'autres termes, on a réalisé $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ et $S^n \mathbb{C}^2$ de manière précise comme des espaces de modules de représentations du carquois T_0 de dimension $\underline{d} = (n, 1)$, *vérifiant la condition* i). On va voir au paragraphe suivant que cette condition est elle-même très naturelle. À l'aide de la proposition 2.1, les propriétés du morphisme π (propreté, désingularisation, ...) peuvent se voir comme des conséquences de la théorie géométrique des invariants.

2.3. Structure symplectique de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$

Par un théorème de Fujiki, le schéma de Hilbert $X^{[n]}$ de n points sur une surface symplectique complexe (X, ω) est lui aussi muni d'une forme symplectique $\omega^{[n]}$ (obtenue par extension de la forme ω^n définie sur l'ouvert $X^{[n]}_{(1^n)} = \{(z_1, \ldots, z_n) \mid z_i \neq z_j$ pour $i \neq j\}$). Comme on va le voir, lorsque $X = \mathbb{C}^2$, cette structure symplectique admet elle aussi une interprétation naturelle en termes d'espaces de modules de représentations de carquois.

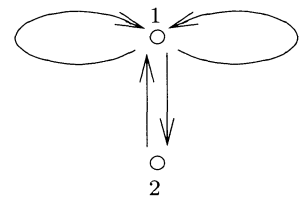
Pour cela, considérons le carquois

$T =$ 

et notons $E_{(n,1)} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ l'espace des représentations de dimension $(n,1)$. Le groupe $G = GL_n(\mathbb{C})$ opère naturellement sur $E_{(n,1)}$. On peut donner un sens à l'espace de module $\mathcal{E}_{(n,1)} = E_{(n,1)}/G$ mais l'objet qui nous intéresse ici est plutôt le « fibré cotangent » $T^*\mathcal{E}_{(n,1)}$ de $\mathcal{E}_{(n,1)}$. Pour le définir, on considère le *quotient symplectique*, ou *quotient de Marsden-Weinstein* de$T^*E_{(n,1)}$ par G, construit de la manière suivante. L'espace

$$\overline{E}_{(n,1)} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^2 \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$$

des représentations de dimension $(n,1)$ du carquois $\overline{T}$ *double* de T :

$\overline{T} =$ 

dont nous noterons les éléments (B_1, B_2, i, j) s'identifie, via la fonction trace

$$(B_1, B_2, i, j) \mapsto Tr(B_1 B_2 + ij),$$

à $T^*E_{(n,1)}$ et la forme symplectique canonique ω s'y écrit

$$\omega\left((B_1, B_2, i, j), (B_1', B_2', i', j')\right) = Tr\left(B_1 B_2' - B_2 B_1' + ij' - i'j\right). \tag{2.2}$$

L'application moment relative à l'action de G sur $T^*E_{(1,n)}$ se calcule facilement :

$$\begin{aligned} \mu : \overline{E}_{(n,1)} &\to \mathfrak{g}^* = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})^* \simeq \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \\ (B_1, B_2, i, j) &\mapsto [B_1, B_2] + ij. \end{aligned}$$

Par définition, le quotient symplectique de $\overline{E}_{(n,1)}$ par G est le quotient de $\mu^{-1}(0)$ par G. Là encore, on peut effectuer un tel quotient de deux manières : « à la Mumford » $\mu^{-1}(0)\,/_\chi\, G$ en choisissant un caractère $\chi : G \to \mathbb{C}^*$, ou de manière « algébro-géométrique » brutale $\mu^{-1}(0)\,//\,G$.

PROPOSITION 2.2. — *Pour $\chi = \det$, on a canoniquement :*

$$\mu^{-1}(0) /_\chi G \simeq M_{(n,1)} /_\chi G \simeq (\mathbb{C}^2)^{[n]},$$

$$\mu^{-1}(0) // G \simeq M_{(n,1)} // G \simeq S^n\mathbb{C}^2$$

et le morphisme naturel $\mu^{-1}(0)/_\chi G \twoheadrightarrow \mu^{-1}(0) // G$ est égal au morphisme de Hilbert-Chow π.

Preuve. — En utilisant la proposition 2.1, il suffit de montrer que, pour tout (B_1, B_2, i, j) stable et vérifiant $[B_1, B_2] + ij = 0$, on a $j = 0$. Ceci résulte d'un calcul direct (voir [**63**], Prop. 2.8.). □

Ainsi, on peut interpréter $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ comme étant le fibré cotangent à l'espace des modules des représentations du carquois T de dimension $(n, 1)$ (sans relations).

COROLLAIRE 2.3. — *Le schéma de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, équipé de la forme* (2.2), *est une variété symplectique.*

On vérifie sans peine en utilisant la forme explicite (2.2) de ω que le schéma de Hilbert ponctuel $(\mathbb{C}^2)_0^{[n]}$ est une sous-variété coisotrope de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. De fait, $\pi^{-1}(\Delta_x) \simeq (\mathbb{C}^2)_0^{[n]} \times \mathbb{C}$ (où $\Delta_x = \{(z, \ldots, z) \mid z \in \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^2\}$ est la diagonale de $S^n\mathbb{C} \subset S^n\mathbb{C}^2$) est une sous-variété *lagrangienne* de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$.

2.4. Cohomologie de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$

La (co)homologie de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est connue depuis les travaux d'Ellingsrud et Strømme [**12**]. Soit Π_n l'ensemble des partitions de l'entier n. La longueur d'une partition λ est notée $l(\lambda)$. Notons H_* (resp. H^*) l'homologie de Borel-Moore et la cohomologie à coefficients rationnels.

THÉORÈME 2.4 ([**12**]). — *On a, pour tout $0 \leq i \leq n$*

$$\dim H_{2i}((\mathbb{C}^2)^{[n]}, \mathbb{Q}) = \#\{\lambda \in \Pi_n \mid l(\lambda) = n - i\}, \tag{2.3}$$

$$\dim H_{2i+1}((\mathbb{C}^2)^{[n]}, \mathbb{Q}) = 0. \tag{2.4}$$

Preuve (esquisse). — Considérons l'action du tore $T = (\mathbb{C}^*)^2$ sur $\mathbb{C}^2$ définie par $(t_1, t_2) \cdot (x, y) = (t_1 x, t_2 y)$; soit $\rho : T \times (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to (\mathbb{C}^2)^{[n]}$ l'action induite sur le schéma de Hilbert. Les points fixes de ρ correspondent aux idéaux $I \subset \mathbb{C}[x, y]$ de codimension n qui sont engendrés par des monômes. On montre que de tels idéaux sont en bijection naturelle avec les partitions λ de n via la correspondance

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \mapsto \xi_\lambda = \left\langle y^{\lambda_1}, xy^{\lambda_2}, \ldots, x^{r-1}y^{\lambda_r}, x^r \right\rangle.$$

Ces points fixes étant isolés, on en déduit une décomposition cellulaire « à la Bialynicki-Birula » de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$:

$$(\mathbb{C}^2)^{[n]} = \bigsqcup_{\lambda \in \Pi_n} C_\lambda, \tag{2.5}$$

$$C_\lambda = \left\{ \xi \in (\mathbb{C}^2)^{[n]} \mid \lim_{z \mapsto 0} z \cdot \xi = \xi_\lambda \right\}. \tag{2.6}$$

La relation (2.4) s'ensuit. Pour obtenir (2.3), il reste à voir que $C_\lambda \simeq \mathbb{C}^{n+\lambda_1} = \mathbb{C}^{n+l(\lambda')}$, ce qui découle d'un calcul précis de l'action de T sur l'espace tangent $T_{\xi_\lambda}(\mathbb{C}^2)^{[n]}$. □

En particulier, si on note $P_t(X) = \sum_{l \geq 0} \dim H^l(X, \mathbb{Q}) t^l$ le polynôme de Poincaré en cohomologie d'une variété algébrique X, on a

$$P_t((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \sum_{\lambda \in \Pi_n} t^{2(n-l(\lambda))}$$

et en formant la série génératrice, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t((\mathbb{C}^2)^{[n]}) = \prod_{l=1}^{\infty} \frac{1}{1 - t^{2l-2} q^l}.$$

En d'autres termes, il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels bigradués

$$\Psi : \bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i \leq n} H^{2i}((\mathbb{C}^2)^{[n]}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots], \tag{2.7}$$

où on a posé $deg(p_i) = (2(i-1), i)$. L'espace de droite de (2.7) apparaît souvent en physique, notamment en théorie conforme des champs, sous le nom d'*espace de Fock bosonique*. Il est naturellement muni d'une action de l'algèbre de Heisenberg

$$\mathbb{H} := \mathbb{C}[p_{\pm 1}, p_{\pm 2}, \dots] / \langle [p_i, p_j] = i \delta_{i+j,0},\ i, j \in \mathbb{Z}^* \rangle$$

(cf. [**31**]). Nakajima [**63**] (voir aussi [**21**]) a construit *géométriquement*, à l'aide de correspondances bien choisies, une action de $\mathbb{H}$ dans $\bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i \leq n} H^{2i}((\mathbb{C}^2)^{[n]}, \mathbb{Q})$, et en particulier a défini un isomorphisme *canonique* Ψ comme dans (2.7), respectant les structures de $\mathbb{H}$-modules.

Plus remarquable encore, et répondant à une question de Vaffa et Witten [**75**], Nakajima a étendu ce résultat à une surface quasiprojective lisse X *arbitraire* : l'espace $\bigoplus_{n \geq 0} \bigoplus_{i \leq n} H^{\mathrm{sing}}_{2i}(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ s'identifie alors à l'espace de Fock de l'algèbre de Clifford-Heisenberg modelée sur le super-espace vectoriel $H_*(X, \mathbb{Q})$ (voir [**61**]). Les nombres de Betti de $X^{[n]}$ avaient été précédemment déterminés par Göttsche ([**20**]).

La théorie des variétés carquois de Nakajima, dont $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ peut être considéré comme un exemple quelque peu dégénéré, fournit de nombreuses autres constructions de telles représentations intéressantes d'origine géométrique. Avant de voir, dans la prochaine section, une autre classe d'exemples de variétés de carquois liées cette fois

aux espaces de modules de faisceaux sans torsion sur $\mathbb{P}^2$, terminons par quelques remarques :

Remarque 2.5. — i) Il existe un autre moyen, applicable lui aussi à toute surface quasiprojective lisse X, de calculer la cohomologie de $X^{[n]}$, qui se base sur des techniques de cohomologie d'intersection et sur le fait remarquable suivant : *le morphisme de Hilbert-Chow* $\pi : X^{[n]} \to S^n X$ *est « semi-small » au sens de Goresky-Macpherson.*

ii) La structure multiplicative de $H^*((\mathbb{C}^2)^{[n]}, \mathbb{Q})$ s'exprime elle aussi de manière agréable via l'isomorphisme Ψ de (2.7) (voir [**82**], [**43**]).

iii) La (co)homologie du schéma de Hilbert ponctuel est également bien comprise : $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est irréductible ([**5**]) et admet une décomposition cellulaire similaire à (2.5). De fait, $(\mathbb{C}^2)_0^{[n]}$ est une rétraction par déformation de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$.

3. ESPACE DE MODULES DE FAISCEAUX SANS TORSION SUR $\mathbb{P}^2$

Il y a (au moins) deux directions dans lesquelles on peut généraliser le problème de modules duquel $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est la solution. D'une part, on peut interpréter $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ comme l'espace des modules des faisceaux cohérents de torsion sur $\mathbb{C}^2$, et considérer de manière plus générale les faisceaux cohérents de rang r. D'autre part, pour tout sous-groupe fini $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$, on peut s'intéresser au schéma de Hilbert $(\mathbb{C}^2)_\Gamma^{[n]}$ paramétrant les sous-schémas de longueur n de $\mathbb{C}^2$ qui sont Γ-invariants, ou plus généralement aux faisceaux cohérents de rang r sur $\mathbb{C}^2$ munis d'une Γ-structure.

Comme on va le voir, il existe, dans ces deux situations aussi, une description de l'espace de module en question en termes de représentations de carquois.

3.1. Faisceaux sans torsion de rang supérieur

Plutôt que des faisceaux cohérents de rang r sur $\mathbb{C}^2$, il est préférable, du point de vue des espaces de modules, de considérer les faisceaux cohérents de rang r sur $\mathbb{P}^2$ munis d'une trivialisation le long de la droite $\mathbb{P}^1_\infty \subset \mathbb{P}^2$ à l'infini.

THÉORÈME 3.1 ([**70**]). — *L'espace des modules* $\mathfrak{M}(n, r)$ *paramétrant les faisceaux sans torsion* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathbb{P}^2$ *de rang* r, *vérifiant* $c_2(\mathcal{F}) = n$ *et munis d'une trivialisation* $\phi : \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^1_\infty} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\infty}^{\oplus r}$ *est isomorphe au quotient de l'espace des quadruplets*

$$(B_1, B_2, i, j) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^2 \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^n) \oplus \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r)$$

vérifiant

i) $[B_1, B_2] + ij = 0$,

ii) $\mathrm{Im}\, i$ *engendre* $\mathbb{C}^n$ *sous l'action de* B_1 *et* B_2,

par l'action naturelle du groupe $GL_n(\mathbb{C})$.

Preuve (esquisse). — On utilise la résolution (de Koszul) du faisceau structural de la diagonale $\Delta \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$

(3.1)

$$0 \longrightarrow \Lambda^2 \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \boxtimes Q\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \boxtimes Q \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathcal{P}^2} \longrightarrow \mathcal{O}_\Delta \longrightarrow 0 \ ,$$

où Q est le « faisceau d'Euler » défini par la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus 3} \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \ .$$

Tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ s'écrit

$$\mathcal{F} = (p_1)_*(p_2^* \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_\Delta) \tag{3.2}$$

où p_1, p_2 désignent les deux projections $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. On peut développer (3.2) en tenant compte de (3.1) à l'aide d'une suite spectrale. Lorsque $\mathcal{F}$ est sans torsion, cette suite spectrale dégénère au rang deux et le rang un se réduit à

(3.3)

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \otimes H^1(\mathcal{F}(-2)) \xrightarrow{a} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \otimes H^1(\mathcal{F}(-1) \otimes Q) \xrightarrow{b} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes H^1(\mathcal{F}(-1))$$

avec donc Ker a = Coker b = 0 et Ker b/Im $a \simeq \mathcal{F}$. Le complexe (3.3) est appelé *monade de Beilinson* associée à $\mathcal{F}$. Posons $V = H^1(\mathcal{F}(-2)), V' = H^1(\mathcal{F}(-1))$ et $\overline{W} = H^1(\mathcal{F}(-1) \otimes Q)$. De $c_1(\mathcal{F}) = 0, c_2(\mathcal{F}) = n$, on déduit en utilisant Riemann-Roch que dim V = dim V' = n et dim $\overline{W} = 2n + r$. En prenant z_0, z_1, z_2 comme coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$, on peut écrire

$$a = a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2, \qquad b = b_0 z_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2$$

avec $a_i \in \mathrm{Hom}(V, W)$ et $b_i \in \mathrm{Hom}(W, V')$. À l'aide de l'isomorphisme $\phi : \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^1_\infty} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\infty}^{\oplus r}$ on montre par une étude précise que $b_1 a_2 : V \xrightarrow{\sim} V'$ permet d'identifier V etV', et que la suite

$$V \oplus V \xrightarrow{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}} \overline{W} \xrightarrow{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}} V \oplus V$$

permet d'identifier $\overline{W}$ à $V \oplus V \oplus W$ où $W = \mathrm{Ker}\, b_1 \cap \mathrm{Ker}\, b_2$ et dim $W = r$. On peut ainsi se ramener, grâce à la relation $ab = 0$, à

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1_V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1_V \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1_V & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1_V & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$a_0 = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ j \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} -B_2 & B_1 & i \end{pmatrix}$$

avec $B_i \in \mathrm{End}(V)$, $i \in \mathrm{Hom}(W,V)$ et $j \in \mathrm{Hom}(V,W)$. De la relation $a_0 b_0 = 0$ on tire la relation i) : $[B_1, B_2] + ij = 0$. Enfin, on montre que l'injectivité de a et la surjectivité de b sont équivalentes à la condition ii) de l'énoncé du théorème.

De cette manière, on associe à $(\mathcal{F}, \phi)$ un quadruplet (B_1, B_2, i, j) défini à conjugaison près et vérifiant i) et ii). Il reste à remarquer que cette opération est inversible, et fonctorielle. □

Remarque 3.2. — i) On retrouve, pour $r = 1$, la description de $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ de la section 2.1. En effet, si $\mathcal{F}$ est un faisceau sans torsion de rang un, alors $\mathcal{F}^{**}$ est localement libre, trivial car $c_1(\mathcal{F}^{**}) = 0$, et le quotient $\mathcal{F}^{**}/\mathcal{F}$ est de torsion. On obtient ainsi un isomorphisme

$$\mathfrak{M}(n,1) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{C}^2)^{[n]}, \qquad (\mathcal{F}, \phi) \mapsto \mathcal{F}^{**}/\mathcal{F}.$$

ii) Il existe, pour $r > 1$, un analogue du morphisme de Hilbert-Chow. Soit $\mathfrak{M}_0^{reg}(n,r)$ l'espace des modules des faisceaux localement libres $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^2$, vérifiant $c_2(\mathcal{F}) = n$ et munis d'une trivialisation $\phi : \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^1_\infty} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\infty}^{\oplus r}$. Posons

$$\mathfrak{M}_0(n,r) = \bigsqcup_{0 \le k \le n} \mathfrak{M}_0^{reg}(n-k,r) \times S^k(\mathbb{C}^2).$$

L'application de Hilbert-Chow s'écrit alors (au niveau des points)

$$\pi : \mathfrak{M}(n,r) \to \mathfrak{M}_0(n,r), \qquad (\mathcal{F}, \phi) \mapsto (\mathcal{F}^{**}, \phi, \ supp(\mathcal{F}^{**}/\mathcal{F})).$$

C'est un morphisme propre (voir le théorème 3.5 pour une description de $\mathfrak{M}_0(n,r)$ et π en termes de carquois).

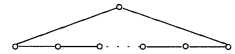
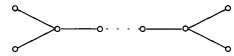
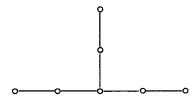
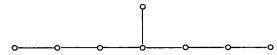
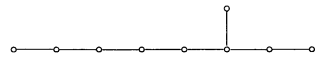
3.2. Faisceaux cohérents Γ-équivariants

Fixons à présent un sous-groupe fini $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C})$, et considérons l'extension du théorème 3.1 au cadre Γ-équivariant. Il nous faut d'abord introduire quelques notations relatives à Γ.

Soit $\{S_i \mid i \in I\}$ l'ensemble des représentations simples de Γ, et soit L la représentation naturelle de Γ dans $\mathbb{C}^2$. Pour $a \in I$ on a une décomposition

$$S_a \otimes L \simeq \bigoplus_{b \in I} S_b^{\oplus \rho_{ab}}.$$

Comme $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{C}) = SP(2,\mathbb{C})$, L est autoduale d'où $\rho_{ab} = \rho_{ba}$. Le *graphe de McKay* de Γ est le graphe G_Γ d'ensemble de sommets I et dans lequel les sommets a et b sont reliés par ρ_{ab} arêtes (non orientées). McKay a fait l'observation remarquable suivante : l'application $\Gamma \mapsto G_\Gamma$ établit une bijection entre les sous-groupes finis non triviaux de $SL(2,\mathbb{C})$ (pris à conjugaison près) et les diagrammes de Dynkin affines simplement lacés :

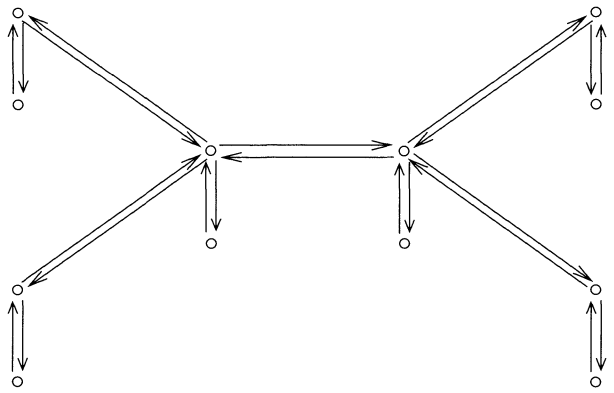
Groupe Γ	Graphe G_Γ	Type
Cyclique $\mathcal{C}_{n+1}$		$A_n^{(1)}$
Diédral $\mathcal{D}_{2n}$		$D_n^{(1)}$
Tétraédral		$E_6^{(1)}$
Octaédral		$E_7^{(1)}$
Icosaédral		$E_8^{(1)}$

On peut rajouter à ce tableau une ligne correspondant au cas dégénéré de $\Gamma = \{Id\}$:

Trivial		$A_0^{(1)}$

Considérons le carquois $\overline{T}_\Gamma$ dont l'ensemble des sommets est $I' = I \times \{0,1\}$, dans lequel ρ_{ab} arêtes orientées relient le sommet $(a,1)$ au sommet $(b,1)$ et dans lequel les sommets $(a,1)$ et $(a,0)$ sont reliés par une paire d'arêtes d'orientation opposée. On notera $\overline{\Omega}$ l'ensemble des arêtes reliant des sommets $(a,0)$, $(b,0)$ pour $a,b \in I$. L'inversion du sens des flèches définit une involution (sans points fixes) $h \mapsto \overline{h}$ de $\overline{\Omega}$.

Exemple 3.1. Si Γ est de type $D_5^{(1)}$, alors $\overline{T}_\Gamma$ est égal à :



Soit $(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in \mathbb{N}^I \times \mathbb{N}^I = \mathbb{N}^{I'}$ un vecteur de dimension de $\overline{T}_\Gamma$, avec $\mathbf{v} = (v_a)_{a\in I}, \mathbf{w} = (w_a)_{a\in I}$. Posons $V_a = \mathbb{C}^{v_a}$ et $W_a = \mathbb{C}^{w_a}$. L'espace des représentations de $\overline{T}_\Gamma$ de dimension $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est

$$\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \bigoplus_{h\in\overline{\Omega}} \mathrm{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}) \oplus \bigoplus_{a\in I} \mathrm{Hom}(W_a, V_a) \oplus \bigoplus_{a\in I} \mathrm{Hom}(V_a, W_a).$$

Les éléments de $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ seront notés $(B_h, i_a, j_a)_{h,a}$. Les groupes $G_\mathbf{v} = \prod_{a\in I} GL(V_a)$ et $G_\mathbf{w} = \prod_{a\in I} GL(W_a)$ opèrent par conjugaison sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$.

Pour finir, on choisit une fonction $\epsilon : \overline{\Omega} \to \{\pm 1\}$ vérifiant $\epsilon(h) + \epsilon(\overline{h}) = 0$.

THÉORÈME 3.3 (Nakajima). — *Soient* $\mathbf{V},\mathbf{W}$ *deux représentations de* Γ *de dimension finie. Posons* $\mathbf{v} = (v_a)_{a\in I}, \mathbf{w} = (w_a)_{a\in I}$ *avec*

$$v_a = \dim \mathrm{Hom}(S_a, \mathbf{V}), \qquad w_a = \dim \mathrm{Hom}(S_a, \mathbf{W}).$$

L'espace des modules $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ *paramétrant les faisceaux sans torsion* Γ*-équivariants* $\mathcal{F}$ *sur* $\mathbb{P}^2$ *satisfaisant* $H^1(\mathcal{F}(-1)) \simeq \mathbf{V}$, *et munis d'une trivialisation* Γ*-équivariante* $\phi : \mathcal{F}_{|\mathbb{P}^1_\infty} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_\infty} \otimes \mathbf{W}$, *est isomorphe au quotient de l'espace des représentations* $(B_h, i_a, j_a)_{h,a} \in \overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ *de* $\overline{T}_\Gamma$ *vérifiant*

i) $\forall\, a \in I$,

$$\sum_{\substack{h\in\overline{\Omega}\\ s(h)=a}} \epsilon(\overline{h}) B_{\overline{h}} B_h + i_a j_a = 0,$$

ii) $\bigoplus_a \mathrm{Im}\, i_a$ *engendre* $\bigoplus_a V_a$ *sous l'action des opérateurs* B_h $(h \in \overline{\Omega})$,

par l'action du groupe $G_\mathbf{v}$.

Preuve (esquisse). — La preuve, que l'on trouvera écrite dans [**77**], se base sur une version Γ-équivariante de la description de Beilinson de faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^2$ en termes de monades (cf. preuve du théorème 3.1). □

Remarque 3.4. — La version Γ-équivariante du morphisme de Hilbert-Chow est la suivante. Soit $\mathfrak{M}_0^{\Gamma,reg}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \subset \mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ la sous-variété paramétrant les faisceaux $\mathcal{F}$ localement libres ; posons

$$\mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \bigsqcup_{0\leq k\leq n} \mathfrak{M}_0^{\Gamma,reg}(\mathbf{v}',\mathbf{w}) \times (S^{l(\mathbf{v},\mathbf{v}')}(\mathbb{C}^2))^\Gamma,$$

avec $l(\mathbf{v},\mathbf{v}') = \sum_a (v_a - v'_a)\dim S_a$. L'application de Hilbert-Chow s'écrit alors

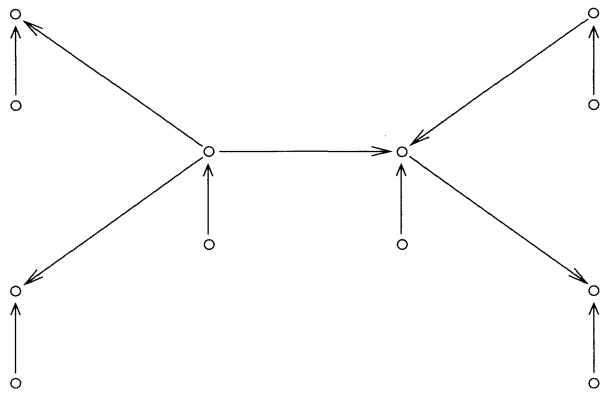
$$\pi : \mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w}), \qquad (\mathcal{F},\phi) \mapsto (\mathcal{F}^{**},\phi,\ supp(\mathcal{F}^{**}/\mathcal{F})).$$

C'est un morphisme propre (ici aussi, une description de $\mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et π en termes de carquois est donnée dans le théorème 3.5).

3.3. Structure symplectique

Tout comme $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, les espaces $\mathfrak{M}(n,r)$ et $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ possèdent une structure symplectique naturelle, héritée de celle de $\mathbb{P}^2$. Et comme pour $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$, on peut interpréter les constructions de $\mathfrak{M}(n,r)$ et $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ données au paragraphe précédent comme des quotients *symplectiques*.

Par simplicité, nous traiterons les cas $\Gamma = \{Id\}$ et $\Gamma \neq \{Id\}$ de manière simultanée en considérant que le graphe de McKay de $\{Id\}$ est le carquois de type $A_0^{(1)}$. Fixons donc un sous-groupe Γ de $SL(2,\mathbb{C})$. Soit T_Γ un carquois obtenu à partir du graphe G_Γ en orientant de manière arbitraire les arêtes, en rajoutant pour chaque sommet de G_Γ un autre sommet ainsi qu'une arête orientée du nouveau sommet vers l'ancien. Un exemple rendra la construction plus claire : si Γ est de type $D_5^{(1)}$ on peut prendre T_Γ comme suit :



Notons qu'il existe plusieurs choix pour T_Γ, et que le carquois $\overline{T}_\Gamma$ peut se voir comme le « double » (au niveau des arêtes) de T_Γ. Comme au paragraphe précédent, on notera $I' = I \times \{0,1\}$ les sommets de T_Γ et Ω les arêtes de T_Γ qui proviennent de G_Γ, de sorte que $\overline{\Omega}$ soit le double de Ω. Pour tout vecteur de dimension $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ de T_Γ, on pose $V_a = \mathbb{C}^{v_a}, W_a = \mathbb{C}^{w_a}$ et on note

$$E_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \bigoplus_{h\in\Omega} \mathrm{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}) \oplus \bigoplus_{a\in I} \mathrm{Hom}(W_a, V_a)$$

l'espace des représentations de T_Γ de dimension $(\mathbf{v},\mathbf{w})$. Comme toujours, les groupes $G_\mathbf{v} = \prod_a GL(V_a)$ et $G_\mathbf{w} = \prod_a GL(W_a)$ opèrent sur $E_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$. Conformément aux notations du paragraphe précédent nous écrirons $(B_h, i_a)_{h,a}$ les éléments de $E_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$. Enfin, on choisit l'application $\epsilon : \overline{\Omega} \to \{\pm 1\}$ de telle sorte que $\epsilon(h) = 1$ si $h \in \Omega$.

Identifions $T^*E_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ à $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ via l'accouplement

$$\left((B_h, i_a)_{h,a}, (B'_{\overline{h}}, j'_a)_{h,a}\right) = Tr\left(\sum_{h\in\Omega} \epsilon(h) B_h B'_{\overline{h}} + \sum_a i_a j_a\right).$$

La forme symplectique induite sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ s'écrit

$$\omega\ : ((B_h, i_a, j_a)_{h,a}, (B'_h, i'_a, j'_a)_{h,a}) = Tr\left(\sum_{h\in\overline{\Omega}} \epsilon(\overline{h}) B_{\overline{h}} B'_h + \sum_a (i_a j'_a - i'_a j_a)\right).$$

L'action de $G_{\mathbf{v}}$ sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est symplectique, d'application moment

$$\mu : \overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \to \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}^* \simeq \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$$

$$(B_h, i_a, j_a)_{h,a} \mapsto \sum_a \left(\sum_{\substack{h \in \overline{\Omega} \\ s(h)=a}} \epsilon(\overline{h}) B_{\overline{h}} B_h + i_a j_a \right).$$

En particulier, la condition i) du théorème 3.3 n'est rien d'autre que l'équation de moment $\mu((B_h, i_a, j_a)_{h,a}) = 0$. Le quotient symplectique de l'action de $G_{\mathbf{v}}$ sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est par définition le quotient de $\mu^{-1}(0)$ par $G_{\mathbf{v}}$, quotient que l'on peut effectuer de deux manières :

THÉORÈME 3.5. — *Pour $\chi = \det : G_{\mathbf{v}} \to \mathbb{C}^*$, $(g_a)_a \mapsto \prod_a \det(g_a)$, on a*

$$\mu^{-1}(0)/_{\chi}\, G_{\mathbf{v}} \simeq \mathfrak{M}^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$\mu^{-1}(0) \,//\, G_{\mathbf{v}} \simeq \mathfrak{M}_0^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

et le morphisme naturel $\mu^{-1}(0)/_{\chi}\, G_{\mathbf{v}} \to \mu^{-1}(0) \,//\, G_{\mathbf{v}}$ coïncide avec le morphisme de Hilbert-Chow.

Preuve (esquisse). — Pour montrer la première assertion, il faut vérifier que la condition de stabilité pour $\chi = \det$ coïncide avec la condition ii) du théorème 3.3. La démonstration est essentiellement la même que celle de la proposition 2.1. Pour les autres assertions, voir [**77**]. □

COROLLAIRE 3.6. — *Pour tout sous-groupe fini $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{M}^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une variété symplectique.*

3.4. Résolutions de singularités de Klein

Ceci correspond au cas $r = 1$ et Γ non trivial.

THÉORÈME 3.7 (Kronheimer, Ginzburg-Kapranov, Ito-Nakamura)

Soit Γ un sous-groupe non trivial de $SL(2, \mathbb{C})$, soit $\mathbf{V}$ la représentation régulière de Γ et $\mathbf{W} = \mathbb{C}$ la représentation triviale. On pose $\mathbf{v} = (v_a)_{a \in I}$, $\mathbf{w} = (w_a)_{a \in I}$ où

$$v_a = \dim \mathrm{Hom}(S_a, \mathbf{V}), \qquad w_a = \dim \mathrm{Hom}(S_a, \mathbf{W}).$$

Alors

$$\mathfrak{M}_0^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \simeq \mathbb{C}^2 \,//\, \Gamma \tag{3.4}$$

et $\pi : \mathfrak{M}^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0^{\Gamma}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est la résolution minimale des singularités.

Preuve (esquisse). — Posons $n = |\Gamma|$. Il est facile de voir, en comparant les algèbres de fonctions, que $(S^n\mathbb{C}^2)^\Gamma \simeq \mathbb{C}^2/\!/\Gamma$. D'après la proposition 2.2, on a $S^n\mathbb{C}^2 \simeq \mathfrak{M}_0^{\{Id\}}(n,1)$. L'action d'un élément $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ de Γ sur $\simeq \mathfrak{M}_0^{\{Id\}}(n,1)$ s'écrivant

$$\gamma \cdot (B_1, B_2, i, j) = (a\gamma B_1\gamma^{-1} + c\gamma B_2\gamma^{-1}, b\gamma B_1\gamma^{-1} + d\gamma B_2\gamma^{-1}, \gamma i\gamma^{-1}, \gamma j\gamma^{-1})$$

où Γ opère sur $\mathbb{C}^n$ par la représentation régulière et sur $\mathbb{C}$ par la représentation triviale, on montre que $(\mathfrak{M}_0^{\{Id\}}(n,1))^\Gamma \simeq \mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$, d'où (3.4). Un raisonnement similaire montre que $((\mathbb{C}^2)^{[n]})^\Gamma = (\mathfrak{M}^{\{Id\}}(n,1))^\Gamma \simeq \mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$. Comme $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ est lisse, il en va de même pour sa sous-variété de points fixes sous l'action du groupe fini Γ, et $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est lisse. Comme toute Γ-orbite de $\mathbb{C}^2$ différente de $\{0\}$ est libre, on a $(S^n\mathbb{C}^2)^\Gamma \cap S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2 = (S^n\mathbb{C}^2)^\Gamma \backslash \{n\cdot 0\}$. Étant donné que $\pi : (\mathbb{C}^2)^{[n]} \to S^n\mathbb{C}^2$ se restreint en un isomorphisme $\pi^{-1}(S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2) \xrightarrow{\sim} S^n_{(1^n)}\mathbb{C}^2$, on a

$$\pi : \pi^{-1}(\mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w}) \setminus \{n\cdot 0\}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w}) \backslash \{n\cdot 0\}.$$

Soit X la composante connexe de $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ contenant $\pi^{-1}(\mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})\backslash\{n\cdot 0\})$. D'après ce qui précède, $\pi : X \to \mathfrak{M}_0^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une résolution des singularités. Comme X est symplectique par le corollaire 3.6, $K_X = 0$ et donc π est une (la) résolution minimale. Pour conclure, il reste juste à démontrer que $X = \mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$, i.e. que $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est connexe. Mais si X' est une autre composante connexe, on a forcément $X' \subset \pi^{-1}(n\cdot 0)$ donc X' est coisotrope. Ceci contredit le fait que $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est symplectique. □

Remarque 3.8. — i) Cette description des résolutions des singularités kleiniennes en termes de carquois est essentiellement due à Kronheimer [**40**] (redécouverte de façon indépendante plus tard par Ginzburg-Kapranov [**17**], et Ito-Nakamura [**28**]), et a en grande partie motivé le travail de Nakajima. Une interprétation des variétés $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v},\mathbf{w})$ pour d'autres valeurs de $\mathbf{v},\mathbf{w}$ est donnée dans [**41**] : on obtient ainsi des espaces de modules *de fibrés vectoriels sur* les résolutions minimales de singularités kleiniennes (les « espaces ALE »).

ii) Comme mentionné dans l'introduction, les variétés de carquois fournissent des morphismes $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ très similaires à la résolution de Springer $T^*\mathcal{B} \to \mathcal{N}$ du cône nilpotent d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. Le théorème 3.7 illustre bien ce principe : un théorème fameux de Slodowy [**74**] dit que les singularités kleiniennes ainsi que leurs résolutions minimales se plongent dans la résolution de Springer. Il existe même, en type A, des isomorphismes explicites entre les variétés carquois $M(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et $M_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et les « slices » de Slodowy et leur désingularisation (cf. [**60**] et [**52**]).

4. DÉFINITION DES VARIÉTÉS CARQUOIS

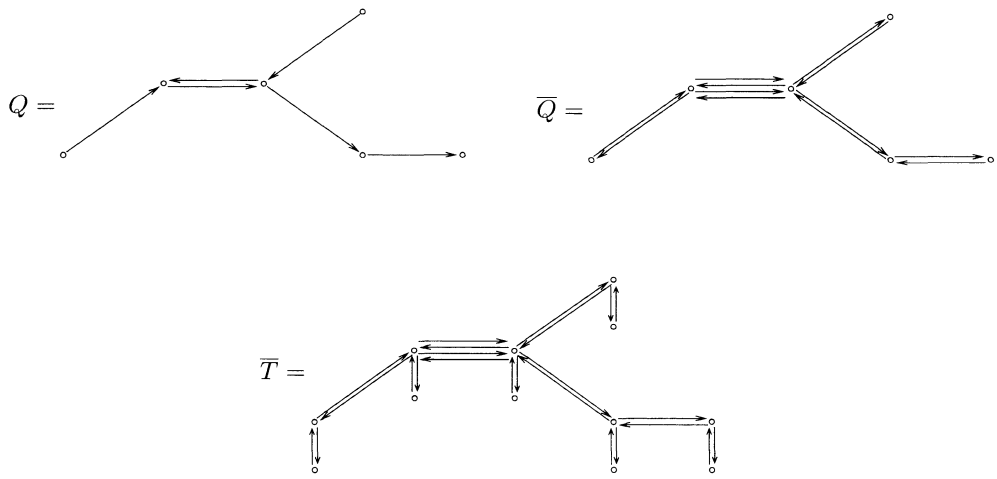
Dans cette section, nous donnons la définition des variétés carquois de Nakajima en général ainsi que leurs premières propriétés géométriques.

4.1. Définition

Soit $Q = (I, \Omega)$ un carquois fini, dont nous supposerons pour simplifier qu'il ne contient pas de lacets, c'est-à-dire de sommet relié à lui-même par une arête, et qu'il ne contient, plus généralement, pas de cycles orientés. Pour toute arête orientée h, nous noterons $\overline{h}$ l'arête orientée opposée.

Considérons le carquois double $\overline{Q} = (I, \overline{\Omega})$ où $\overline{\Omega} = \{h \mid h \in \Omega\} \sqcup \{\overline{h} \mid h \in \Omega\}$. On définit une fonction $\epsilon : \overline{\Omega} \to \{\pm 1\}$ par $\epsilon(h) = 1$ si $h \in \Omega$ et $\epsilon(h) = -1$ si $\overline{h} \in \Omega$.

Enfin, soit $\overline{T}$ le carquois d'ensemble de sommets $I' = I \times \{0, 1\}$ obtenu en dédoublant les sommets de $\overline{Q}$ et en rajoutant une paire d'arêtes d'orientations opposées reliant chaque sommet de $\overline{Q}$ à son double. Voici un exemple :



Soit $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{N}^I \times \mathbb{N}^I$, $\mathbf{v} = (v_a)_{a \in I}, \mathbf{w} = (w_a)_{a \in I}$ un vecteur de dimension de $\overline{T}$. Posons $V_a = \mathbb{C}^{v_a}$, $W_a = \mathbb{C}^{w_a}$. Comme précédemment, nous noterons $(B_h, i_a, j_a)_{h \in \overline{\Omega}, a \in I}$ les éléments de l'espace des représentations

$$\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} = \bigoplus_{h \in \overline{\Omega}} \mathrm{Hom}(V_{s(h)}, V_{t(h)}) \oplus \bigoplus_{a} \mathrm{Hom}(W_a, V_a) \oplus \bigoplus_{a} \mathrm{Hom}(V_a, W_a)$$

de $\overline{T}$ de dimension $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Les groupes $G_{\mathbf{v}} = \prod_a GL(V_a)$ et $G_{\mathbf{w}} = \prod_a GL(W_a)$ opèrent sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$.

Comme à la section précédente, $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est naturellement muni d'une forme symplectique :

$$\omega\ : ((B_h, i_a, j_a)_{h,a}, (B'_h, i'_a, j'_a)_{h,a}) = Tr\left(\sum_{h\in\overline{\Omega}} \epsilon(\overline{h}) B_{\overline{h}} B'_h + \sum_a (i_a j'_a - i'_a j_a)\right),$$

et l'action de $G_{\mathbf{v}}$ sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est symplectique, d'application moment

$$\mu :\ \overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} \to \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}^* \simeq \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$$

$$(B_h, i_a, j_a)_{h,a} \mapsto \sum_a \left(\sum_{\substack{h\in\overline{\Omega}\\ s(h)=a}} \epsilon(\overline{h}) B_{\overline{h}} B_h + i_a j_a\right).$$

Les variétés carquois associées à Q et aux vecteurs de dimension $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont obtenues par quotient symplectique de $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ par $G_{\mathbf{v}}$:

DÉFINITION 4.1. — *Soient* $\chi = \det^{-1} : G_{\mathbf{v}} \to \mathbb{C}^*,\ (g_a) \mapsto \prod \det(g_a)^{-1}$. *On pose*

$$\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathfrak{M}^Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mu^{-1}(0) /_\chi G_{\mathbf{v}},$$

$$\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathfrak{M}_0^Q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mu^{-1}(0) // G_{\mathbf{v}},$$

et on note $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *le morphisme projectif naturel.*

PROPOSITION 4.2. — *Un point* (B_h, i_a, j_a) *de* $\mu^{-1}(0)$ *est stable pour* $\chi = \det^{-1}$ *si et seulement si la condition suivante est satisfaite : tout sous-espace* $S \subset \bigoplus_a V_a$ *contenu dans* $\operatorname{Ker} \bigoplus_a j_a$ *et invariant par les opérateurs* B_h *(pour* $h \in \overline{\Omega}$*) est trivial.*

Preuve. — Identique à celle de la proposition 2.1 □

Remarque 4.3. — i) On a choisi, dans la définition de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, le caractère $\chi = \det^{-1}$ *inverse* à celui qui apparaît naturellement dans les sections 2 et 3. En particulier, les variétés $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sont différentes des variétés de carquois $\mathfrak{M}^Q(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ associées à un carquois affine. Néanmoins, ici, le choix de la condition de stabilité n'a pas d'influence sur la *topologie* du quotient symplectique $\mu^{-1}(0)/G_{\mathbf{v}}$: les variétés $\mathfrak{M}^\Gamma(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}^Q(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ correspondent à deux structures complexes différentes sur le *même* espace (cf. Section 8).

ii) Par définition, $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ paramètre les $G_{\mathbf{v}}$-orbites *fermées* dans $\mu^{-1}(0)$. L'application « de Hilbert-Chow » π associe à une $G_{\mathbf{v}}$-orbite stable l'unique $G_{\mathbf{v}}$-orbite fermée contenue dans son adhérence de Zariski. On trouvera dans [**62**] une caractérisation explicite de cette $G_{\mathbf{v}}$-orbite fermée.

4.2. Propriétés géométriques de $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$

Pour $a,b \in I$, $a \neq b$, notons ρ_{ab} le nombre d'arêtes reliant a à b dans Q. Soit $C = (c_{ab})_{a,b\in I}$ la matrice symétrique $I \times I$ définie par

$$c_{ab} = 2\delta_{a,b} - \rho_{ab} - \rho_{ba}. \tag{4.1}$$

Si $\mathbf{z} = (z_a) \in \mathbb{N}^I$ et $\mathbf{y} = (y_a) \in \mathbb{N}^I$, on pose $\langle \mathbf{z}, \mathbf{y} \rangle = \sum_a z_a y_a$.

THÉORÈME 4.4. — *$\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété symplectique lisse connexe et de dimension $\langle \mathbf{v}, 2\mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle$.*

Preuve. — Commençons par remarquer que toute $G_{\mathbf{v}}$-orbite de $\mu^{-1}(0)^s$ est régulière : en effet, si $(g_a)_a \in \mathrm{Stab}_{G_{\mathbf{v}}}(B_h, i_a, j_a)_{h,a}$, alors le sous-espace $\bigoplus_a \mathrm{Im}\,(g_a - Id)$ est B_h-invariant et contenu dans $\mathrm{Ker} \bigoplus_a j_a$, donc trivial, et donc $g_a = Id$ pour tout a. Montrons maintenant que $\mu^{-1}(0)^s$ est lisse (alors que $\mu^{-1}(0)$ ne l'est pas en général). Ceci est une conséquence du fait que la restriction de l'application moment μ à $\mu^{-1}(0)^s$ est une submersion : si $\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbf{v}}$ est orthogonal à $\mathrm{Im}\; d\mu_{(B_h,i_a,j_a)}$, alors $\mathrm{Im}\;\xi$ est B_h-invariant et contenu dans $\mathrm{Ker} \bigoplus_a j_a$, donc $\xi = 0$. Enfin, on a

$$\dim \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \dim \mu^{-1}(0)^s - \dim G_{\mathbf{v}} = \dim \overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}} - 2\dim G_{\mathbf{v}},$$

d'où l'on déduit la formule de dimension. La démonstration de la connexité (voir [**8**]) est beaucoup plus subtile et repose (entre autre) sur l'existence de *foncteurs de réflexion* (cf. Section 8.2). □

La variété affine $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est en général singulière (par exemple, si le carquois Q est un diagramme de Dynkin affine comme dans la section 2, $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est difféomorphe à un quotient $\mathbb{C}^2/\!\!/\Gamma$). Le théorème 4.4 montre que lorsque celle-ci est non vide, $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une désingularisation (crépante) de $\pi(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})) \subseteq \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$. Un peu plus précisément, notons $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \subset \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ l'ouvert (éventuellement vide) formé des $G_{\mathbf{v}}$-orbites fermées régulières (i.e. de stabilisateur trivial). Alors, de telles orbites sont toujours stables (cf. [**60**], Prop. 3.24.) et le morphisme π induit un isomorphisme $\pi^{-1}(\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v},\mathbf{w})) \simeq \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v},\mathbf{w})$. On sait en outre que $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une variété irréductible *normale* (cf. [**9**]).

La variété $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ contient toujours un point 0 correspondant à $B_h = j_a = i_a = 0$ pour tout $h \in \overline{\Omega}$ et $a \in I$. La fibre spéciale $\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}) := \pi^{-1}(0)$ joue un rôle crucial dans la théorie. Par construction, c'est une sous-variété projective coisotrope de $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$. Bien plus est vrai :

THÉORÈME 4.5 ([**60**], Th. 5.8). — *$\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$, homotope à $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$.*

Preuve. — La démonstration du fait que $\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est lagrangienne sera esquissée dans la section 6.4. En ce qui concerne la seconde assertion, voir [**60**], Section 5.4. □

Il existe sur $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ une action algébrique de $\mathbb{C}^*$, analogue à celle définie sur le schéma de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ (voir Section 2.4.). Elle est simplement donnée par

$$z\cdot(B_h,i_a,j_a)_{h,a}=(z^{(1-\epsilon(h))/2}B_h,i_a,zj_a). \tag{4.2}$$

Posons $\mathfrak{F}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})^{\mathbb{C}^*}$. Il est facile de voir que $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})^{\mathbb{C}^*}=\{0\}$. Le morphisme π étant $\mathbb{C}^*$-équivariant, on a $\mathfrak{F}(\mathbf{v},\mathbf{w})\subset\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$. La variété lisse $\mathfrak{F}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ n'est en général *pas* de dimension zéro. Néanmoins, il existe une décomposition « à la Bialynicki-Birula »

$$\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})=\bigcup_i\Big\{x\in\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\mid\lim_{z\mapsto\infty}z\cdot x\in\mathfrak{F}_i\Big\}$$

où $\{\mathfrak{F}_i\}_i$ désignent les composantes connexes de $\mathfrak{F}(\mathbf{v},\mathbf{w})$.

Terminons cette section sur les propriétés générales des variétés carquois par le cas le plus simple, celui des diagrammes de Dynkin de type fini. Pour $\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}$ (i.e. $v'_a\leq v_a$ pour tout a), il existe un plongement canonique $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}',\mathbf{w})\hookrightarrow\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ induit par l'inclusion $V'_a=\mathbb{C}^{v'_a}\hookrightarrow\mathbb{C}^{v_a}=V_a$.

THÉORÈME 4.6 ([**62**], Cor. 10.11.). — *Soit Q un diagramme de Dynkin de type fini. Pour tout $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{N}^I$, on a*

$$\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})=\bigcup_{\mathbf{v}'\leq\mathbf{v}}\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}',\mathbf{w}),$$

et l'application $\pi:\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})\to\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est une résolution des singularités « semi-small » au sens de Goresky-MacPherson.

4.3. Variété des triplets et correspondances de Hecke

Soit $c\in I$ et soient $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w}$ des vecteurs de dimension satisfaisant $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1=e_c$ (on note $(e_a)_a$ la base canonique de $\mathbb{Z}^I$). Considérons la sous-variété fermée $\mathfrak{B}_c^+(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})\subset\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ constituée des paires $\big((B_h^1,i_a^1,j_a^1)_{h,a},(B_h^2,i_a^2,j_a^2)_{h,a}\big)$ pour lesquelles il existe $\xi_a:V_a^1\simeq V_a^2$ pour $a\neq c$ et $\xi_c:V_c^1\hookrightarrow V_c^2$ satisfaisant

$$B_h^2\xi_a=\xi_aB_h^1,\qquad\xi_ai_a^1=i_a^2,\qquad j_a^1=j_a^2\xi_a$$

pour tout $a\in I$ et $h\in\overline{\Omega}$. Intuitivement, $\mathfrak{B}_c^+(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ paramétrise les paires de représentations les « plus proches » l'une de l'autre, i.e. reliées par une modification élémentaire. C'est l'analogue direct des *correspondances de Hecke* dans la théorie des formes automorphes sur les corps de fonctions.

Munissons $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ de la forme symplectique $(\omega_1,-\omega_2)$, où ω_1 et ω_2 sont les formes symplectiques canoniques de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$.

PROPOSITION 4.7 ([**62**], Thm. 5.7.). — *La correspondance de Hecke* $\mathfrak{B}_c^+(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ *est une sous-variété lagrangienne lisse de* $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$.

Lorsque $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = e_c$, on définit de même la correspondance de Hecke $\mathfrak{B}_c^-(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})$.

Soient à présent $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ des vecteurs de dimension arbitraires. La *variété des triplets* (ou *variété de Steinberg*) est le produit fibré

$$\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) := \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \underset{\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})}{\times} \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}). \tag{4.3}$$

Noter que $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}', \mathbf{w}) \hookrightarrow \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ si $\mathbf{v}' \leq \mathbf{v}$; donc on peut considérer la limite inductive $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w}) = \bigcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et (4.3) a bien un sens. On pose

$$\mathfrak{Z}(\mathbf{w}) = \bigsqcup_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} \mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}).$$

Soit $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{w}) = \bigcup_{\mathbf{v}} \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Si Q est de type fini, alors d'après le théorème 4.4 on a $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{w}) = \mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$ mais en général $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{w})$ est un ouvert strict de $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$. On pose

$$\mathfrak{Z}^{reg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) = \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \underset{\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{w})}{\times} \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}).$$

THÉORÈME 4.8. — *La sous-variété* $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ *est lagrangienne.*

Preuve. — Elle sera esquissée dans la section 6.4. □

Noter que lorsque $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \pm e_c$ la correspondance de Hecke $\mathfrak{B}_c^{\pm}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ est une composante irréductible de $\mathfrak{Z}^{reg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$.

5. ALGÈBRE DE CONVOLUTION ET ALGÈBRES DE KAC-MOODY

Dans cette section, nous décrivons le résultat principal de [**62**] : la réalisation dans la cohomologie des fibres du morphisme $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ de représentations intégrables d'algèbres de Kac-Moody. On se fixe une fois pour toutes un carquois Q comme dans la Section 4.1.

Commençons par un bref rappel concernant les algèbres de Kac-Moody (voir [**30**]).

5.1. Algèbres de Kac-Moody et représentations intégrables

La matrice C associée à Q par (4.1) est une matrice de Cartan généralisée symétrique, i.e. on a $c_{aa} = 2$ pour tout $a \in I$ et $c_{ab} = c_{ba} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ pour tout $a \neq b$. À une telle donnée correspond une algèbre de Lie de Kac-Moody $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_C$ définie par générateurs et relations comme suit.

DÉFINITION 5.1. — i) *Soit $C = (c_{ab})_{a,b\in I}$ une matrice de Cartan généralisée. Une réalisation de C est une paire d'espaces vectoriels $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^*$ en dualité munis d'ensemble de vecteurs linéairement indépendants $\Pi = \{\alpha_a \mid a \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$, $\Pi^\vee = \{\alpha_a^\vee \mid a \in I\} \subset \mathfrak{h}$ tels que* $\dim \mathfrak{h} = 2|I| - \operatorname{rang}(C)$ *et satisfaisant $\langle \alpha_a^\vee, \alpha_b \rangle = c_{ab}$ pour tout a, b.*

ii) *L'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ est la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie engendrée par des éléments $\{e_a, f_a \mid a \in I\}, h \in \mathfrak{h}$ soumis aux relations suivantes* :

$$
\begin{aligned}
&[h, h'] = 0 \\
&[h, e_b] = \alpha_b(h) e_b \\
&[h, f_b] = -\alpha_b(h) f_b \\
&[e_a, f_b] = \delta_{ab} h_a \\
&ad^{1-c_{ab}}(e_a)(e_b) = 0 \\
&ad^{1-c_{ab}}(f_a)(f_b) = 0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

pour tout $a, b \in I$ et $h, h' \in \mathfrak{h}$.

Lorsque C est une matrice de Cartan usuelle, on retrouve la présentation de Serre des algèbres de Lie simples complexes ; dans tous les autres cas, $\mathfrak{g}$ est de dimension infinie. Si C est associé à un diagrame de Dynkin affine de type $X^{(1)}$ (cf. Tableau section 3.2.), $\mathfrak{g}$ est isomorphe à l'algèbre affine $\widehat{\mathfrak{g}}_X \simeq \mathfrak{g}_X \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$.

La structure des algèbres de Kac-Moody possède beaucoup de points communs avec celle des algèbres de Lie simples complexes. En particulier, $\mathfrak{g}$ se décompose en espaces radiciels pour l'action adjointe de $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

où α parcourt le système de racines $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{g}$.

Une représentation V de $\mathfrak{g}$ est dite intégrable si, pour tout $a \in I$, les opérateurs e_a et f_a sont localement nilpotents dans V. Les représentations de $\mathfrak{g}$ qui sont intégrables et de plus haut poids sont bien connues. Posons

$$P^+ = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \langle \lambda, \alpha_a^\vee \rangle \in \mathbb{N}_{\geq 0} \text{ pour tout } a \in I\}.$$

Pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, notons $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$ le module de Verma de plus haut poids λ ; soit $L(\lambda)$ son unique quotient irréductible. Alors $L(\lambda)$ est intégrable si et seulement si $\lambda \in P^+$, et toute représentation intégrable de plus haut poids se décompose comme

une somme directe de modules $L(\lambda)$. De plus, le caractère de $L(\lambda)$ pour $\lambda \in P^+$ est donné par la formule de caractère de Weyl-Kac :

$$ch(L_\lambda) = \frac{\sum_{w\in W} \epsilon(w) e^{w\cdot\lambda}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-e^{-\alpha})^{\dim \mathfrak{g}_\alpha}}, \tag{5.2}$$

où W est le groupe de Weyl de $\mathfrak{g}$ et Δ^+ est l'ensemble des racines positives. Il est commode d'introduire les poids fondamentaux $\Lambda_a \in P^+$, déterminés par les relations $\langle \Lambda_a, \alpha_b^\vee \rangle = \delta_{ab}$. Ceux-ci sont reliés aux racines simples par la matrice de Cartan : $\alpha_a = \sum_b c_{ab}\Lambda_b$.

Enfin, on note $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$; c'est la sous-algèbre engendrée par les éléments e_a, f_a, et $h_a = [e_a, f_a]$ pour tout $a \in I$.

5.2. Algèbre de convolution en homologie

Pour X un espace topologique localement compact, on note $H_i(X) = H_i^{BM}(X)$ le i-ième groupe d'homologie de Borel-Moore (i.e. l'homologie singulière des chaînes localement finies) à coefficients rationnels. Rappelons que $H_\bullet(X)$ possède les propriétés suivantes :

- Si $f : X \to Y$ est une application continue propre, il existe une image directe $f_* : H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$.
- Si X, Y sont des variétés algébriques complexes et si $f : X \to Y$ est un morphisme lisse de dimension n, il existe une image inverse $f^* : H_\bullet(X) \to H_{\bullet+2n}(Y)$.
- Si X et Y sont deux sous-variétés fermées d'une variété algébrique complexe M de dimension n, il existe un produit d'intersection (dépendant de M)

$$\cap\ : H_i(X) \otimes H_j(Y) \to H_{i+j-2n}(X \cap Y).$$

Enfin, citons une propriété essentielle qui distingue l'homologie de Borel-Moore de sa singulière cousine :

- Si X est une variété algébrique complexe de dimension n, alors

$$H_{top}(X) := H_{2n}(X) = \bigoplus_i [X_i],$$

où $X_1, \ldots, X_r$ sont les composantes irréductibles de X de dimension n, et où $[X_i]$ désigne la classe fondamentale de X_i.

Les propriétés de $H_\bullet(X)$ énoncées ci-dessus permettent de définir, à la manière de Ginzburg (cf. [7]), une structure d'algèbre associative sur

$$H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) := \bigoplus_{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2} H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}));$$

pour $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}$ des vecteurs de dimension, on considère le produit

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_3, \mathbf{w})$$

muni des projections $p_{ij} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_j, \mathbf{w})$ et on pose

$$\begin{aligned} * \ : H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})) \otimes H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})) &\to H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})) \\ c \otimes c' &\mapsto (p_{13})_* \left(p_{12}^* c \cap p_{23}^* c'\right). \end{aligned}$$

5.3. Réalisation géométrique de $U(\mathfrak{g}')$

Pour $a \in I$, considérons les éléments

$$E_a(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{v}_1} [\mathfrak{B}_a^+(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + e_a, \mathbf{w})],$$

$$F_a(\mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{v}_1} (-1)^{r(\mathbf{v}_1, \mathbf{w})} [\mathfrak{B}_a^-(\mathbf{v}_1 + e_a, \mathbf{v}_1, \mathbf{w}))],$$

où $r(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) := \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) - \dim \mathfrak{M}(\mathbf{v}_1 + e_a, \mathbf{w}))$. Enfin, désignons par $[\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})]$ la classe fondamentale de la diagonale de $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ dans $H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))$, et posons pour $a \in I$

$$H_a = \sum_{\mathbf{v}} \langle e_a, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle [\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})].$$

Noter que les éléments E_a, F_a, H_a appartiennent à la complétion

$$\widehat{H}_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) = \bigoplus_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^I} \left(\prod_{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}} H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})) \right)$$

de $H_{top}(\mathfrak{Z}(w))$, mais que la structure d'algèbre sur $H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ se prolonge à $\widehat{H}_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$.

Le résultat principal de [**62**] s'énonce comme suit :

THÉORÈME 5.2 ([**62**], Thm. 9.4.). — *Pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^I$, il existe un morphisme d'algèbre*

$$\Phi \ : U(\mathfrak{g}') \to \widehat{H}_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$$

tel que $\Phi(e_a) = E_a, \Phi(f_a) = F_a$ et $\Phi(h_a) = H_a$.

Preuve (esquisse). — Il faut vérifier que E_a, F_a, H_a satisfont aux relations de la présentation de Serre (5.1). Les trois première relations de (5.1) sont conséquences des identités faciles

$$[\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})] * [\Delta(\mathbf{v}', \mathbf{w})] = \delta_{\mathbf{v}, \mathbf{v}'} [\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})],$$

$$E_a * [\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})] = [\Delta(\mathbf{v} - e_a, \mathbf{w})] * E_a,$$

$$F_a * [\Delta(\mathbf{v}, \mathbf{w})] = [\Delta(\mathbf{v} + e_a, \mathbf{w})] * F_a.$$

Les deux dernières relations de (5.1) proviennent du fait que l'action adjointe des E_a et F_a est localement nilpotente (cf. [**62**], Lemma 9.3.). La principale difficulté dans la démonstration du théorème réside dans le calcul de $[E_a, F_a]$, qui requiert une analyse fine des questions de transversalité pour certaines intersections dans les

produits triples $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})\times\mathfrak{M}(\mathbf{v}_3,\mathbf{w})$ (cf. [**62**], Lemma 9.8 et Appendix). □

5.4. Réalisation géométrique des représentations

Il est maintenant facile de construire des représentations de $U(\mathfrak{g}')$: pour tout $x\in\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$, l'algèbre $H_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ opère, toujours par convolution, sur l'espace $H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x):=\bigoplus_{\mathbf{v}}H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x)$ où on a posé $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x:=\pi^{-1}(x)\subset\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$. Cette action s'étend à $\widehat{H}_{top}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ et se relève donc en une action de $U(\mathfrak{g}')$.

THÉORÈME 5.3 ([**62**], Thm. 10.2). — *Soit* $x\in\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})$. *En tant que* $U(\mathfrak{g}')$-*module,* $H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x)$ *est isomorphe à* $L(\lambda_{\mathbf{v}_0})$ *où* $\lambda_{\mathbf{v}_0}:=\sum_a w_a\Lambda_a-\sum_a v_{0,a}\alpha_a$.

Preuve (esquisse). — Posons $M_x=\bigoplus_{\mathbf{v}}H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x)$. À l'aide d'un argument de stabilité, on vérifie que l'action de E_a et F_a dans M_x est localement nilpotente pour tout $a\in I$, et donc que M_x est un $U(\mathfrak{g}')$-module intégrable. De plus, $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})_x=\{pt\}$ par définition et $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x=\varnothing$ pour $\mathbf{v}<\mathbf{v}_0$, donc $[\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})_x]$ est un vecteur de plus haut poids de M_x, de poids $\lambda_{\mathbf{v}_0}$. Tout $U(\mathfrak{g}')$-module intégrable de plus haut poids $\lambda_{\mathbf{v}_0}$ étant isomorphe à $L(\lambda_{\mathbf{v}_0})$, il ne reste plus qu'à voir que M_x est engendré par $[\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})_x]$. La démonstration de ce dernier point sera donnée dans la section suivante. □

En particulier, le nombre de composantes irréductibles de dimension maximale de $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x$ peut se déduire de la formule de caractère (5.2). Notons que $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_0$ n'est rien d'autre que la sous-variété lagrangienne $\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ introduite au paragraphe précédent, et on a ainsi

$$\bigoplus_{\mathbf{v}}H_{top}(\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}))\simeq L\left(\sum_a w_a\Lambda_a\right).$$

Notons aussi que $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})=\varnothing$ si $\lambda_{\mathbf{v}_0}\notin P^+$ (cf. [**62**]).

Remarque 5.4. — Les classes fondamentales des composantes irréductibles de $[M(\mathbf{v},\mathbf{w})_x]$ fournissent une base du module M_x, et donc une base de $L(\lambda_{\mathbf{v}_0})$. Cette base s'apparente aux bases « canoniques » et « semi-canoniques » définies par Lusztig dans [**45**], [**51**], mais le lien précis (s'il existe), entre toutes ces bases n'est pas encore compris.

Concluons cette section par un résultat qui donne la structure exacte de l'algèbre $H_{top}(\mathfrak{Z}^{reg}(\mathbf{w}))$, et qui montre que le noyau de l'application $\Phi=\Phi_{\mathbf{w}}$ devient de plus en plus petit à mesure que $\mathbf{w}$ grossit :

THÉORÈME 5.5 ([62], Thm. 10.15). — *Il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$H_{top}(\mathfrak{Z}^{reg}(\mathbf{w})) \simeq \bigoplus_{\mathbf{v}_0} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L(\lambda_{\mathbf{v}_0}))$$

où $\mathbf{v}_0$ *parcourt l'ensemble des vecteurs pour lesquels* $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})$ *est non vide.*

6. STRUCTURE DE CRISTAL DE KASHIWARA

6.1. Fibrations élémentaires

Un trait caractéristique et essentiel des variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, ou plutôt des fibres de l'application de Hilbert-Chow $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, est l'existence d'un « dévissage » par des fibrations en grassmaniennes. Soit $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ un vecteur de dimension et soit $c \in I$ un sommet de Q. Considérons le fibré vectoriel tautologique de rang v_c sur $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ défini par

$$\underline{V}_c = \mu^{-1}(0)^s \underset{G_{\mathbf{v}}}{\times} V_c$$

($G_{\mathbf{v}}$ opère librement sur $\mu^{-1}(0)^s$). Considérons aussi le complexe de fibrés vectoriels tautologiques

$$\underline{V}_c \xrightarrow{\sum B_h + j_c} \bigoplus_{s(h)=c} \underline{V}_{t(h)} \oplus W_c \xrightarrow{\sum \epsilon(h) B_h + j_c} \underline{V}_c \ .$$

Notons $\underline{Q}_c(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ l'homologie du milieu du complexe ci-dessus (c'est un faisceau cohérent)

$$\underline{Q}_c(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{Ker}\left(\sum_{t(h)=c} \epsilon(h) B_h + i_c\right) / \mathrm{Im}\left(\sum_{s(h)=c} B_h + j_c\right).$$

Par construction, $\underline{Q}_c(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ se restreint en un fibré vectoriel sur chacune des sous-variétés localement fermées

$$\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \left\{ (B_h, i_a, j_a) \mid \mathrm{codim}_{V_c}\left(\sum_{t(h)=c} \mathrm{Im}\ B_h + \mathrm{Im}\ i_c\right) = r \right\}$$

de rang égal à

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}\left(\sum_{t(h)=c} \epsilon(h) B_h + i_c\right) - \dim V_c &= r - 2v_c + w_c + \sum_{s(h)=c} v_{t(h)} \\ &= \langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle + r. \end{aligned}$$

Bien sûr, si $r + \langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle < 0$, on a $\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \varnothing$.

Soit $p : \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ l'application naturelle qui consiste à remplacer V_c par $\mathrm{Im}(\sum_{t(h)=c} B_h + i_c)$. D'après ce qui précède, $\underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ se restreint

en un fibré vectoriel de rang $\langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v}\rangle + 2r$ sur $\mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$. On a un morphisme surjectif naturel de corang r de fibrés vectoriels sur $\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$

$$u_c : p^* \underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w}) \twoheadrightarrow \underline{Q}_c(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Le résultat suivant, dont on peut tracer l'origine (sous une forme un peu différente) aux travaux de Lusztig [**46**], est à la base de nombreux arguments par récurrence dans la théorie des variétés carquois :

PROPOSITION 6.1. — *Si* $r < -\langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v}\rangle$, *alors* $\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ *est vide. Sinon l'application* $p : \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \twoheadrightarrow \mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ *s'identifie à la fibration* $Gr_r\ \underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ *en grassmanienne de* r*-plans dans* $\underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$.

Preuve (esquisse). — L'identification $\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to Gr_r\ \underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ est simplement obtenue en associant à un point x de $\mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ le noyau de u_c dans la fibre de $p^*\mathbb{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ au point x. Inversement, un point de $Gr_r\ \underline{Q}_c(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ détermine, via son graphe, une unique application injective $\sum_{s(h)=c} B_h + j_c$. On vérifie que le point (B_h, i_a, j_a) de $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ correspondant est stable et que $\mu((B_h, i_a, j_a)) = 0$. □

6.2. Opérateurs $\widetilde{E}_c, \widetilde{F}_c$

On va maintenant utiliser les fibrations élémentaires introduites au dernier paragraphe pour construire des applications entre les ensembles de composantes irréductibles de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pour différentes valeurs de $\mathbf{v}$.

Soit $x \in \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})$; notons, pour tout $\mathbf{v} \geq \mathbf{v}_0$, $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x = \pi^{-1}(x) \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Fixons $\mathbf{v}$; soit X une composante irréductible de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$. Pour $c \in I$, posons

$$\epsilon_c(X) = \mathrm{Min}_X \mathrm{codim}_{V_c} \left(\sum_{t(h)=c} \mathrm{Im}\ B_h + \mathrm{Im}\ i_c \right), \tag{6.1}$$

où $(B_h, i_a, j_a)_{h,a}$ parcourt X. Comme la fonction de gauche de (6.1) est semi-continue inférieurement, l'égalité dans (6.1) est atteinte sur une partie ouverte non vide de X. En d'autres termes, $\epsilon_c(X)$ est égal à l'unique entier r pour lequel $X \cap \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est un ouvert non vide de X. D'après la proposition 6.1, il existe une fibration en grassmaniennes $p : \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$. Il est facile de voir que $\pi \circ p = \pi$. On en déduit que $p(X \cap \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ est une composante irréductible de $\mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$, et donc que $\overline{p(X \cap \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))}$ est une composante irréductible de $\mathfrak{M}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ (car $\mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ est ouvert dans $\mathfrak{M}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$). On peut résumer ceci par le lemme suivant :

LEMME 6.2. — *Lorsque* $r \geq -\langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v}\rangle$, *l'application* $X \mapsto \overline{p(X \cap \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))}$ *induit une bijection* Ψ_r^c *entre l'ensemble des composantes irréductibles* X *de* $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$

pour lesquelles $\epsilon_c(X) = r$ *et les composantes irréductibles* X' *de* $\mathfrak{M}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})_x$ *pour lesquelles* $\epsilon_c(X') = 0$.

On peut maintenant définir des opérateurs

$$\widetilde{E}_c : X \mapsto \begin{cases} \Psi^c_{r-1} \circ (\Psi^c_r)^{-1}(X) & \text{si } r := \epsilon_c(X) > 0 \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{F}_c : X \mapsto \begin{cases} \Psi^c_{r+1} \circ (\Psi^c_r)^{-1}(X) & \text{si } r := \epsilon_c(X) > -\langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle \\ \varnothing & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\epsilon_c(\widetilde{E}_c(X)) = \epsilon_c(X) - 1$ et $\epsilon_c(\widetilde{F}_c(X)) = \epsilon_c(X) + 1$. De plus, $\widetilde{F}_c(X) = X'$ si et seulement si $\widetilde{E}_c(X') = X$.

On désignera encore par $\widetilde{E}_c$ (resp. $\widetilde{F}_c$) l'endomorphisme de $H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x)$ défini par $[X] \mapsto [\widetilde{E}_c(X)]$ (resp. $[X] \mapsto [\widetilde{F}_c(X)]$).

La propriété suivante montre que $\widetilde{F}_c$ est une approximation « combinatoire » de F_c (à un facteur de renormalisation près). Bien sûr, la même chose vaut pour $\widetilde{E}_c$.

LEMME 6.3. — i) *En posant* $r = \epsilon_c(X)$, *on a*

$$F_c \cdot [X] \in \pm(r+1)\widetilde{F}_c([X]) + \bigoplus_{\epsilon_c(X') > r+1} \mathbb{C}[X'].$$

ii) *Si* $\epsilon_c(X) = r > 0$, *on a*

$$F_c \widetilde{E}_c[X] \in \pm r[x] + \bigoplus_{\epsilon_c(X') > r} \mathbb{C}[X'].$$

Preuve (esquisse). — Les démonstrations des deux énoncés étant similaires, nous donnons juste la première. L'inclusion ouverte

$$i : \mathfrak{M}_{c;\leq r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \bigcup_{r' \leq r} \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \hookrightarrow \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

induit un morphisme de restriction $i^* : H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x) \to H_{top}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x \cap \mathfrak{M}_{c;\leq r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$, et il faut montrer que $i^*(F_c([X])) = \pm(r+1)i^*(\widetilde{F}_c([X]))$. Par définition, on a

$$F_c([X]) = (p_1)_* \left([\mathfrak{B}^-_c(\mathbf{v} + e_c, \mathbf{v}, \mathbf{w})] \cap [p_2^{-1}(X)] \right)$$

où p_1, p_2 désignent les deux projections de $\mathfrak{M}(\mathbf{v} + e_c, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. En utilisant la proposition 6.1 et la définition de $\widetilde{F}_c$, on voit que la restriction de p_1 à

$$p_1^{-1}(\mathfrak{M}_{c;\leq r+1}(\mathbf{v} + e_c, \mathbf{w})) \cap \left(\mathfrak{B}^-_c(\mathbf{v} + e_c, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \cap p_2^{-1}(X) \right)$$

est une fibration en $\mathbb{P}^r$ à support sur $\widetilde{F}_c(X) \cap \mathfrak{M}_{c;\leq r+1}(\mathbf{v} + e_c, \mathbf{w})$. La relation i) s'ensuit (cf. [**62**], Lemma 10.1, pour le calcul explicite du signe). □

6.3. Cristaux de Kashiwara

Motivé par ses travaux sur les base cristallines des représentations des algèbres enveloppantes quantiques, Kashiwara a introduit la notion remarquable de *cristal abstrait* pour une algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}$, et introduit plusieurs catégories intéressantes de cristaux (de plus haut poids, intégrables, extrémaux, etc.), qui sont autant de pendants « combinatoires » aux catégories correspondantes de représentations de $\mathfrak{g}$.

Rappelons-en succinctement la définition. Le lecteur intéressé est invité à consulter [**27**], [**34**] pour un traitement approfondi.

DÉFINITION 6.4. — *Un $\mathfrak{g}$-cristal est la donnée d'un ensemble B muni d'applications*

$$wt : B \to P, \qquad \varepsilon_c : B \to \mathbb{Z}, \qquad \varphi_c : B \to \mathbb{Z}, \qquad (c \in I)$$

où $P = \bigoplus_c \mathbb{Z}\Lambda_c$ désigne le réseau des poids de $\mathfrak{g}$, et

$$\tilde{e}_c : B \to B \sqcup \{0\}, \qquad \tilde{f}_c : B \to B \sqcup \{0\}, \qquad (c \in I)$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

i) $\varphi_c(b) = \varepsilon_c(b) + \langle h_c, wt(b)\rangle$,

ii) *Si $b \in B$ et $\tilde{e}_c(b) \in B$, alors $wt(\tilde{e}_c(b)) = wt(b) + \alpha_c$, $\varepsilon_c(\tilde{e}_c(b)) = \varepsilon_c(b) - 1$ et $\varphi_c(\tilde{e}_c(b)) = \varphi_c(b) + 1$,*

iii) *Si $b \in B$ et $\tilde{f}_c(b) \in B$, alors $wt(\tilde{f}_c(b)) = wt(b) - \alpha_c$, $\varepsilon_c(\tilde{f}_c(b)) = \varepsilon_c(b) + 1$ et $\varphi_c(\tilde{f}_c(b)) = \varphi_c(b) - 1$,*

iv) *Si $b, b' \in B$, on a $\tilde{e}_c(b) = b'$ si et seulement si $\tilde{f}_c(b') = b$.*

Un cristal est dit de plus haut poids si il est engendré (sous l'action des opérateurs $\tilde{e}_c, \tilde{f}_c$) par des sommets $b_1, \ldots, b_r$ satisfaisant $\tilde{e}_c(b_i) = 0$ pour tout i et tout $c \in I$. On définit la notion de morphisme entre deux $\mathfrak{g}$-cristaux, et on peut considérer la catégorie des $\mathfrak{g}$-cristaux de plus haut poids. On définit aussi la notion de produit tensoriel de deux cristaux. Notons qu'il existe plusieurs cristaux non isomorphes (et même intégrables en un sens évident) ayant le même plus haut poids. Néanmoins, Joseph a montré le théorème d'unicité remarquable suivant : on dira qu'une famille $\{B(\lambda) \mid \lambda \in P^+\}$ est *close* si elle est munie d'inclusions de cristaux $i_{\lambda,\mu} : B(\lambda + \mu) \to B(\lambda) \otimes B(\mu)$.

THÉORÈME 6.5 (Joseph, [**29**]). — *Il existe une unique famille close $\{B(\lambda) \,|\lambda \in P^+\}$ de $\mathfrak{g}$-cristaux.*

Le cristal $B(\lambda)$ peut se construire à partir d'une base cristalline pour la représentation $L_q(\lambda)$ de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$. Il « code » une information très fine sur $L(\lambda)$ (bien plus fine, par exemple, que le simple caractère $ch(L(\lambda))$.

Nous en venons au résultat principal de cette section :

THÉORÈME 6.6 (Saito [**72**]). — *Soit* $x \in \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})$. *L'ensemble*

$$B := \bigsqcup_{\mathbf{v} \geq \mathbf{v}_0} Irr(M(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x)$$

des composantes irréductibles de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$ *pour tout* $\mathbf{v}$, *muni des applications*

$$wt : X \in Irr(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x) \mapsto \sum_c w_c \Lambda_c - \sum_c v_c \alpha_c, \qquad \varepsilon_c(X) = \epsilon_c(X),$$

$$\varphi_c(X) = \langle e_c, \mathbf{w} - C \cdot \mathbf{v} \rangle - \epsilon_c(X) \qquad pour\ X \in Irr(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x)$$

et $\tilde{e}_c(X) = \widetilde{E}_c(X)$, $\tilde{f}_c(X) = \widetilde{F}_c(X)$, *est isomorphe au* $\mathfrak{g}$*-cristal* $B(\lambda)$.

Ce théorème remarquable donne un contenu géométrique à la notion de cristal. Un résultat similaire donnant une réalisation géométrique du cristal $B(\infty)$, basé sur des idées de Lusztig ([**46**]), avait été auparavant établi par Kashiwara-Saito [**37**].

Remarque. Il existe une autre réalisation géométrique des cristaux $B(\lambda)$, due à Bravermann et Gaitsgory en termes de la géométrie des cycles de Mirkovic-Vilonen dans la grassmanienne affine (cf. [**4**], [**54**], [**32**]). Le lien unissant ces deux constructions l'une à l'autre, ainsi qu'à la troisième réalisation du même cristal à l'aide de la théorie des chemins de Littelmann [**44**] reste encore largement mystérieux. Pour couronner le tout, Nakajima a découvert une quatrième (!) réalisation des mêmes cristaux en termes de *modèle de monômes*, motivée elle aussi (mais de manière quelque peu différente) par la géométrie des variétés de carquois (cf. [**68**], [**36**], [**26**]).

6.4. Quelques esquisses de démonstration

Pour finir cette section, illustrons l'utilité des fibrations élémentaires $p : \mathfrak{M}_{c;r}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_{c;0}(\mathbf{v} - re_c, \mathbf{w})$ en donnant les démonstrations des théorèmes 4.8 et 5.3.

Théorème 4.8. Commençons par montrer que $\dim(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w})) + \dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w})))$. Il suffit de voir que la même chose est vraie pour l'ouvert $\mathfrak{Z}^{reg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$. Pour cela, on fixe $x \in \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})$ et on va montrer par récurrence sur $\mathbf{v}$ que la fibre $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x := \pi^{-1}(x) \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est pure de dimension

$$\dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) - \dim(\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}))). \tag{6.2}$$

Soit X une composante irréductible de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$. Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, alors (6.2) est trivialement vraie. Sinon, les points de X correspondent à des orbites contenant l'orbite de x dans leur adhérence, et de $\mathbf{v} > \mathbf{v}_0$ on déduit que $\epsilon_c(X) > 0$ pour au moins un $c \in I$ (cf. [**62**], Prop. 7.2). Mais alors $X \cap \mathfrak{M}_{c;\epsilon_c(X)}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une fibration en grassmaniennes sur la composante irréductible $X' = \widetilde{E}_c^{\epsilon_c(X)}(X)$ de $\mathfrak{M}(\mathbf{v} - \epsilon_c(X)e_c, \mathbf{w})_x$. Par hypothèse de récurrence, $\dim(X')$ est donnée par (6.2) ; un calcul direct permet maintenant de vérifier que (6.2) est vraie aussi pour X.

Enfin, pour montrer que $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$ est lagrangienne, on observe que la restriction de la forme symplectique ω à une composante irréductible $X \cap \mathfrak{M}_{c;\epsilon_c(X)}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ satisfait $\omega(u, v) = \omega(p_* u, p_* v)$ et on raisonne comme plus haut par récurrence. □

Noter que la démonstration ci-dessus s'adapte aisément au cas (plus facile) de la sous-variété $\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (Théorème 4.5.).

Théorème 5.3 (suite et fin). – Il reste à voir que M_x est engendré par $[\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})_x]$. Notons provisoirement M' le sous-module de M_x engendré par $[\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0, \mathbf{w})_x]$. Pour toute composante irréductible Y de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$ et tout $c \in I$, on a $\epsilon_c(Y) \leq \langle e_c, \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \rangle$. On va raisonner encore par récurrence. Soit X une composante irréductible de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})_x$ et supposons que $[Y] \in M'$ pour toute composante $Y \subset \mathfrak{M}(\mathbf{v}', \mathbf{w})_x$ avec $\mathbf{v}' < \mathbf{v}$ ou $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$ et $\epsilon_c(Y) > \epsilon_c(X) > 0$. D'après le lemme 6.3. ii), on a

$$\pm \epsilon_c(X)[X] \in F_c[\widetilde{E}_c(X)] + \bigoplus_{\epsilon_c(Y) > \epsilon_c(X)} \mathbb{C}[Y]$$

d'où on tire finalement $[X] \in M'$ comme voulu. □

7. ALGÈBRE DE CONVOLUTION ET ALGÈBRE AFFINE QUANTIQUE

Nous en arrivons à présent à la partie la plus difficile et la plus spectaculaire du travail de Nakajima sur les variétés carquois : la construction des algèbres affines quantiques et de leurs représentations de dimension finie dans la K-théorie des variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ([**64**]). Même si certains des résultats présentés ci-dessous (mais pas tous) sont valables pour un carquois arbitraire, nous fixons pour simplifier une fois pour toutes un carquois *de type fini* $Q = (I, \Omega)$.

7.1. Algèbres affines quantiques

Soit $C = (c_{ab})_{a,b \in I}$ la matrice de Cartan associée, par (4.1), au carquois Q. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie simple complexe correspondante (qui est donc de type A, D ou E).

Drinfeld et Jimbo ont défini, pour toute algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{t}$, une algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{t})$, déformation de l'algèbre de Hopf $U(\mathfrak{t})$. On s'intéresse ici à l'algèbre affine quantique (de niveau zéro) $U_q(L\mathfrak{g})$ où $L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$. La définition de $U_q(L\mathfrak{g})$ dans la présentation dite « de Drinfeld » est la suivante :

DÉFINITION 7.1. — *$U_q(L\mathfrak{g})$ est la $\mathbb{C}(q)$-algèbre engendrée par des éléments $e_{a,r}, f_{a,r}$ $(a \in I, r \in \mathbb{Z})$, q^h $(h \in P^*)$ et $h_{a,m}$ $(a \in I, m \in \mathbb{Z} \backslash \{0\})$, soumis aux relations suivantes* :

$$q^h q^{h'} = q^{h+h'}, \qquad [q^h, h_{a,m}] = 0, \qquad [h_{a,m}, h_{b,n}] = 0,$$

$$q^h e_{a,r} q^{-h} = q^{\langle h,\alpha_a\rangle} e_{a,r}, \qquad q^h f_{a,r} q^{-h} = q^{-\langle h,\alpha_a\rangle} f_{a,r},$$
$$(z - q^{\pm c_{ab}} w)\psi_b^s(z) x_a^\pm(w) = (q^{c_{ab}} z - w) x_a^\pm(w)\psi_b^s(z), \qquad (s \in \{+,-\}),$$
$$[x_a^+(z), x_b^-(w)] = \frac{\delta_{ab}}{q - q^{-1}} \left\{ \delta(\frac{w}{z})\psi_a^+(w) - \delta(\frac{z}{w})\psi_a^-(z) \right\},$$
$$(z - q^{c_{ab}} w) x_a^\pm(z) x_b^\pm(w) = (q^{c_{ab}} z - w) x_b^\pm(w) x_a^\pm(z),$$
$$\sum_\sigma \sum_{k=0}^{1-c_{ab}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - c_{ab} \\ k \end{bmatrix}_q x_a^\pm(z_{\sigma(1)}) \cdots x_a^\pm(z_{\sigma(k)}) x_b^\pm(w) x_a^\pm(z_{\sigma(k+1)}) \cdots x_a^\pm(z_{\sigma(r)})$$

où, dans la dernière relation, $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}_q$ *est le coefficient q-binomial usuel et la somme porte sur toutes les permutations* σ *dans le groupe symétrique* $\mathfrak{S}_{1-c_{ab}}$*, et où on a utilisé les fonctions génératrices suivantes* :

$$\delta(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \qquad x_a^+(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{a,r} z^{-r}, \qquad x_a^-(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{a,r} z^{-r},$$
$$\psi_a^\pm(z) = q^{\pm h_a} exp\left(\pm (q - q^{-1}) \sum_{m=1}^{\infty} h_{k,\pm m} z^{\mp m} \right).$$

Il est important de pouvoir spécialiser le paramètre de déformation q en une valeur $\epsilon \in \mathbb{C}^*$. Pour cela, on considère la sous-$\mathbb{C}[q,q^{-1}]$-algèbre $U_\mathbb{Z}(L\mathfrak{g})$ de $U_q(L\mathfrak{g})$ engendrée par les puissances divisées

$$e_{a,r}^{(n)} := \frac{e_{a,r}^n}{[n]_q!}, \qquad f_{a,r}^{(n)} := \frac{f_{a,r}^n}{[n]_q!},$$

pour $a \in I, r \in \mathbb{Z}$ et par les éléments q^h pour $h \in P^*$. C'est une forme entière de $U_q(L\mathfrak{g})$, i.e. on a $U_q(L\mathfrak{g}) = U_\mathbb{Z}(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}(q)$. Pour tout $\epsilon \in \mathbb{C}^*$, on peut maintenant poser $U_\epsilon(L\mathfrak{g}) := U_\mathbb{Z}(L\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}$ où $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}[q,q^{-1}]$-module via $q \mapsto \epsilon$.

Notons $U_q^+(L\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(L\mathfrak{g})$, resp. $U_q^0(L\mathfrak{g})$) la sous-algèbre engendrée par les $e_{a,r}$ (resp. les $f_{a,r}$, resp. les q^h et $h_{a,m}$). On a la décomposition triangulaire :

$$U_q(L\mathfrak{g}) = U_q^-(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^0(L\mathfrak{g}) \otimes U_q^+(L\mathfrak{g}). \tag{7.1}$$

Un $U_q(L\mathfrak{g})$-module M est dit de l-plus haut poids $(\Lambda, (\Psi_a^\pm(z))_a)$, avec $\Lambda \in P$, $(\Psi_a^\pm(z))_a \in \mathbb{C}[[z^\mp]]^I$ si il existe un vecteur $v \in M$ tel que $U_q^+(L\mathfrak{g}) \cdot v = 0$, $U_q^-(L\mathfrak{g}) \cdot v = M$ et

$$q^h \cdot v = q^{\langle \Lambda, h\rangle} v, \qquad \psi_a^\pm(z) \cdot v = \Psi_a^\pm(z) v \qquad (a \in I, h \in P^*).$$

En utilisant la décomposition (7.1), on montre par des arguments standard qu'il existe, pour toute paire $\mathbf{P} = (\Lambda, (\Psi_a^\pm(z))_a)$, un unique $U_q(L\mathfrak{g})$-module irréducible $L(\mathbf{P})$ de l-plus haut poids égal à $\mathbf{P}$. Notons qu'une représentation de l-plus haut poids, n'est *pas* en général de plus haut poids au sens classique des algèbres de Kac-Moody.

Il existe, comme pour les représentations des algèbres de Lie simples, un critère pour déterminer lesquels des $L(\mathbf{P})$ sont de dimension finie.

THÉORÈME 7.2 (Drinfeld [**11**], Chari-Pressley [**6**]). — *Soit* $\mathbf{P} = (\Lambda, (\Psi_a^{\pm}(z))_a)$ *un l-poids. Le module simple* $L(\mathbf{P})$ *est de dimension finie si et seulement si* $\Lambda \in P^+$ *et il existe des polynômes* $P_a(u) \in \mathbb{C}[u]$ $(a \in I)$ *satisfaisant* $P_a(u) = 1$ *et tels que*

$$\Psi_a^{\pm}(z) = q^{deg\ P_a} \left(\frac{P_a(q^{-1}/z)}{P_a(q/z)} \right)^{\pm},$$

où $(\ )^{\pm}$ *désigne le développement en série en* z^{-1} *et* z *respectivement. De plus, tout* $U_q(L\mathfrak{g})$*-module simple de dimension finie est conjugué (par un automorphisme de* $U_q(L\mathfrak{g})$*) à un unique* $L(\mathbf{P})$.

Les polynômes $P_a(u)$ ci-dessus s'appellent les *polynômes de Drinfeld* de la représentation $L(\mathbf{P})$. Les *représentations fondamentales* $L(\Lambda_{a_0})_s$ sont celles dont les polynômes de Drinfeld sont de la forme

$$P_a(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \neq a_0 \\ 1 - su & \text{si } a = a_0 \end{cases}$$

pour un $a_0 \in I$ et un $z \in \mathbb{C}^*$. Il y a une version identique du théorème ci-dessus pour l'algèbre $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$.

Il existe de nombreuses conjectures concernant les caractères des représentations $L(\mathbf{P})$, le plus souvent inspirées par des problèmes de physique statistique ([**22**], [**42**], [**39**]...). De fait, l'algèbre affine quantique $U_q(L\mathfrak{g})$ joue un rôle prépondérant dans de nombreux domaines de la physique (comme aussi la théorie conforme des champs,...). La théorie des représentations *de dimension finie* de $U_q(L\mathfrak{g})$ est particulièrement riche (encore plus si q est spécialisé à une racine de l'unité), et distincte de la théorie des représentations de dimension finie de l'algèbre non déformée $U(L\mathfrak{g})$. Elle concentre, depuis une quinzaine d'années, de nombreuses recherches (cf. [**39**], [**6**], [**35**], [**25**], [**14**],...).

7.2. Algèbre de convolution en K-théorie équivariante

Soit X une variété algébrique complexe quasi-projective sur laquelle opère un groupe réductif G. On note $K^G(X)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des faisceaux cohérents G-équivariants sur X. Si $X = \{pt\}$, on a $K^G(X) = R(G)$ l'anneau des représentations de G. En général, $K^G(X)$ est naturellement un $R(G)$-module.

Les groupes $K^G(X)$ jouissent des propriétés de fonctorialité suivantes :

- Si X est une G-variété lisse, et si $X' \subset X$ est une sous-variété fermée, alors le groupe de Grothendieck $K^G(X : X')$ des G-faisceaux cohérents sur X à support dans X' est isomorphe à $K^G(X')$.

– Si $f : X \to Y$ est un morphisme propre G-équivariant, il existe une image directe

$$f_* : K^G(X) \to K^G(Y).$$

– Si $\tilde{f} : X \to Y$ est un morphisme lisse G-équivariant entre deux G-variétés lisses, si X' et Y' sont des sous-variétés fermées de X et Y (éventuellement singulières) et $f : X' \to Y'$ une application telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ X' & \xrightarrow{f} & Y' \end{array}$$

soit cartésien, alors il existe une image inverse

$$\tilde{f}^* : K^G(Y) \to K^G(X)$$

qui se restreint en

$$f^* : K^G(X') \simeq K^G(X : X') \to K^G(Y : Y') \simeq K^G(Y').$$

Appliquons ces propriétés à la situation présente des variétés carquois. Pour $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{N}^I$, l'action du groupe $G_{\mathbf{w}}$ sur $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ induit une action de $G_{\mathbf{w}}$ sur $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. On définit une action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (différente de (4.2)) par la formule suivante :

$$z \cdot (B_h, i_a, j_a)_{h,a} = (zB_h, zi_a, zj_a)_{h,a}.$$

L'action de $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*$ sur $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ s'étend de façon évidente à $\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$. Posons

$$K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) = \prod_{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2} K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})).$$

On munit cet espace du produit associatif

$$K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})) \otimes K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})) \to K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}))$$
$$[\mathcal{F}] \otimes [\mathcal{G}] \mapsto (p_{13})_* \left(p_{12}^*([\mathcal{F}]) \overset{L}{\otimes} p_{23}^*([\mathcal{G}]) \right)$$

où le produit tensoriel est pris dans le produit triple $\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_3, \mathbf{w})$. Noter que

$$p_{13}\left((\mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v}_3, w)) \cap (\mathfrak{M}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) \times \mathfrak{Z}(\mathbf{v}2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}))\right) = \mathfrak{Z}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{w})$$

et que la définition ci-dessus a donc bien un sens. La projection $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ induit une inclusion $R(\mathbb{C}^*) \hookrightarrow R(G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*)$. On identifie l'anneau $R(\mathbb{C}^*)$ à $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ en notant q^n la classe du caractère $L_n : z \mapsto z^n$. De cette manière, $K^{G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ est muni d'une structure de $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$-module.

7.3. Réalisation géométrique de $U_q(L\mathfrak{g})$

Dans [**64**], Nakajima a construit un morphisme d'algèbre

$$\Psi : U_q(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]} \mathbb{C}(q).$$

De manière imprécise, Ψ envoie les générateurs q^h, $h_{a,m}$ de la partie « Cartan » de $U_q(L\mathfrak{g})$ sur les classes de faisceaux structuraux des diagonales $\Delta(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})) \subset \mathfrak{Z}(\mathbf{v},\mathbf{v},\mathbf{w})$; les générateurs $e_{c,r}$ et $f_{c,r}$ sont envoyés sur les classes de certains fibrés en droite tautologiques sur les correspondances de Hecke $\mathfrak{B}_a^{\pm}(\mathbf{v} \mp e_c, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Avant de pouvoir être plus précis, il nous faut introduire quelques notations supplémentaires.

Si E est un fibré vectoriel et u une variable formelle, on pose

$$[\Lambda_u E] = \sum_{i=0}^{rang(E)} u^i [\Lambda^i E].$$

Pour tout $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ et $c \in I$, le complexe tautologique

$$\mathbf{C}_c^{\bullet}(\mathbf{v},\mathbf{w}) : \quad L_{-2} \otimes \underline{V}_c \xrightarrow{\sum B_h + j_c} L_{-1} \otimes \left(\bigoplus_{s(h)=c} \underline{V}_{t(h)} \oplus W_c \right) \xrightarrow{\sum \epsilon(h) B_h + i_c} \underline{V}_c$$

est $G_{\mathbf{w}} \times \mathbb{C}^*$-équivariant. Dans le complexe ci-dessus, posons

$$\mathbf{C}'^{\bullet}_c(\mathbf{v},\mathbf{w}) = Coker\,(\sum B_h + j_c), \qquad \mathbf{C}''^{\bullet}_c(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \underline{V}_c[-1]$$

de sorte que, dans $K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}))$, on ait $\mathbf{C}_c^{\bullet}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{C}'^{\bullet}_c(\mathbf{v},\mathbf{w}) + \mathbf{C}''^{\bullet}_c(\mathbf{v},\mathbf{w})$. On définit les matrices $C^{\pm} = (c_{ab}^{\pm})_{a,b\in I}$ par

$$c_{ab}^{+} = \delta_{ab} - \rho_{ab}, \qquad c_{ab}^{-} = \delta_{ab} - \rho_{ba}.$$

Enfin, il existe sur $\mathfrak{B}_c^{+}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ un fibré en droites tautologique $\underline{V}_{2,c}/\underline{V}_{1,c}$, et sur $\mathfrak{B}_c^{-}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{w})$ un fibré en droites tautologique $\underline{V}_{1,c}/\underline{V}_{2,c}$.

On peut à présent définir les images de q^h, $h_{c,m}$, $e_{c,r}$ et $f_{c,r}$ via les formules suivantes :

$$q^h \mapsto \sum_{\mathbf{v}} q^{\langle h, \mathbf{w} - C\cdot\mathbf{v}\rangle} [\mathcal{O}_{\Delta(\mathbf{v},\mathbf{w})}],$$

$$\psi_c^{\pm}(z) \mapsto \sum_{\mathbf{v}} q^{rang(\mathbf{C}_c^{\bullet}(\mathbf{v},\mathbf{w}))} \Delta_* \left(\frac{\Lambda_{-1/qz} \mathbf{C}_c^{\bullet}(\mathbf{v},\mathbf{w})}{\Lambda_{-q/z} \mathbf{C}_c^{\bullet}(\mathbf{v},\mathbf{w})} \right)^{\pm},$$

où $\Delta : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \times \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est la diagonale,

$$e_{c,r} \mapsto \sum_{\mathbf{v}_2} (-1)^{\langle e_c, C^- \cdot \mathbf{v}_2\rangle} \left[(q^{-1} \underline{V}_{2,c}/\underline{V}_{1,c})^{\otimes r - \langle e_c, \mathbf{v}_2\rangle} \otimes \det \mathbf{C}'^{\bullet}_c(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})^* \right],$$

$$f_{c,r} \mapsto \sum_{\mathbf{v}_2} (-1)^{\langle e_c, \mathbf{w} - C^+ \cdot \mathbf{v}_2\rangle} \left[(q^{-1} \underline{V}_{1,c}/\underline{V}_{2,c})^{\otimes r + \langle e_c, \mathbf{w} - \mathbf{v}_2 - C\cdot\mathbf{v}_2\rangle} \otimes \det \mathbf{C}''^{\bullet}_c(\mathbf{v}_2,\mathbf{w})^* \right],$$

qui sont des faisceaux supportés sur $\mathfrak{B}_c^{\pm}(\mathbf{v}_2 \mp e_c, \mathbf{v}_2, \mathbf{w})$.

THÉORÈME 7.3 ([**64**], Thm. 9.4.1.). — *Les formules ci-dessus définissent un morphisme d'algèbre*

$$\Psi : U_q(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes_{\mathbb{C}[q,q^{-1}]} \mathbb{C}(q).$$

La démonstration (difficile) de ce théorème nécessite une analyse fine et très précise de la géométrie des correspondances de Hecke et de leur produit de convolution. Un résultat similaire, donnant une réalisation des algèbres affines quantiques, mais uniquement *en type A*, dans la K-théorie des variétés de Steinberg généralisées de $GL(n)$, avait été démontré auparavant par Ginzburg et Vasserot [**18**], [**81**]. Notons que Ψ n'est ni injectif, ni surjectif en général.

Par abus de notations, on écrira $K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ pour l'image de $K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ dans $K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes \mathbb{C}(q)$ – en d'autres termes, on ignorera, pour simplifier, les questions liées à la torsion dans les groupes de K-théorie. Avec cette convention, on a

THÉORÈME 7.4 ([**64**], Thm. 12.2.1). — *Le morphisme Ψ se restreint en un morphisme*

$$U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g}) \to K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})).$$

7.4. Réalisation de $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-modules de dimension finie

Intéressons-nous maintenant aux $U_q(L\mathfrak{g})$-modules. Bien sûr, dans un $U_q(L\mathfrak{g})$-module irréductible de dimension finie, le centre opère par un caractère. Dans la réalisation K-théorique, ce centre est facile à déterminer : l'application

$$\rho \mapsto \rho \cdot \sum_{\mathbf{v}} [\mathcal{O}_{\Delta(\mathfrak{Z}(\mathbf{v},\mathbf{w}))}]$$

définit un morphisme $R(G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*) \hookrightarrow Z(K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})))$. Un caractère $\chi : R(G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*) \to \mathbb{C}$ est donné par l'évaluation sur un élément semi-simple $a = (s,\epsilon)$ de $G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*$. Pour un tel a, on notera χ_a le caractère correspondant, et $\mathbb{C}_a$ le $R(G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*)$-module de dimension un associé. Enfin, soit $A = \overline{\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}}$ le sous-groupe abélien fermé de $G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*$ engendré par a. Géométriquement, la spécialisation de $K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ au caractère central χ_a peut se faire en deux étapes :

$$K^{G_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \to K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \to K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes_{R(A)} \mathbb{C}_a.$$

Choisissons maintenant un point $x \in \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})$ fixe sous l'action de A. On pose

$$K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x) = \bigoplus_{\mathbf{v}} K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x), \qquad M_{x,a} = K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x) \otimes_{R(A)} \mathbb{C}_a.$$

L'algèbre de convolution $K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))$ opère sur $K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x)$, l'algèbre $K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes \mathbb{C}_a$ opère sur $M_{x,a}$ et on en tire, via Ψ, une action de $U_{\mathbb{Z}}(L\mathfrak{g})$ sur $M_{x,a}$. Comme l'élément central q opère dans $M_{x,a}$ par ϵ, cette dernière action se factorise par $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$. Le

module $M_{x,a}$ est appelé *module standard.* Enfin, $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})_x$ n'étant non vide que pour un nombre fini de valeurs de $\mathbf{v}$, $M_{x,a}$ est un $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-module de dimension finie.

THÉORÈME 7.5 ([**64**], Prop.13.3.1). — *$M_{x,a}$ est un $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-module de plus haut poids égal à $\mathbf{P}_{x,a} := (\lambda_{\mathbf{v}_0}, (\Psi_a^\pm(z))_a)$ où*

$$\lambda_{\mathbf{v}_0} = \sum_a w_a \Lambda_a - \sum_a v_a \alpha_a,$$

$$\Psi_a^\pm(z) = \epsilon^{\langle e_a, \lambda_{\mathbf{v}_0}\rangle} \left(\frac{P_a(\epsilon^{-1}/z)}{P_a(\epsilon/z)}\right)^\pm$$

avec $P_a(u) = \chi_a(\Lambda_{-u}\mathbf{C}^\bullet_{a|\{x\}})$.

Le vecteur de plus haut poids de $M_{x,a}$ est simplement $[\mathcal{O}_{\mathfrak{M}(\mathbf{v}_0,\mathbf{w})_x}] = [\mathcal{O}_{\{pt\}}]$. Comme corollaire immédiat, on voit que $M_{x,a}$ admet le module simple $L(\mathbf{P}_{x,a})$ comme (unique) quotient simple. On vérifie aussi que *toute* collection de polynômes de Drinfeld peut s'obtenir comme $\mathbf{P}_{x,a}$ pour un certain choix de x, a (on peut même prendre $x = 0$). L'analogie avec les modules de Verma n'aura certainement pas échappé au lecteur avisé.

Faisant suite à [**64**], Varagnolo et Vasserot ont décrit précisément les modules standard, *lorsque ϵ n'est pas une racine de l'unité.* De telles représentations sont égales à des produits tensoriels de $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-modules *fondamentaux*

$$M_{x,a} = L(\Lambda_{i_1})_{s_1} \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_{i_n})_{s_n}$$

(les valeurs de i_j, s_j se déduisent de a et x par des formules explicites). Nous renvoyons le lecteur à [**78**] pour un énoncé précis. En particulier, ceci détermine le caractère de $M_{x,a}$.

Les modules $M_{x,a}$ ne sont pas tous distincts. Notons $\rho_z \subset G_{\mathbf{v}}$ le stabilisateur de la $G_{\mathbf{v}}$-orbite associé à un point $z \in \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ (ρ_z est défini à conjugaison près). L'espace $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ entier se stratifie suivant ce stabilisateur

$$\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \bigcup_\rho \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})(\rho). \tag{7.2}$$

Par exemple, $\mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})_{(1)} = \mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ par définition. Les applications $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ sont topologiquement stratifiées par rapport à (7.2) (i.e. la fibration est localement triviale le long de chaque strate). Ceci implique que $M_{x,a}$ et $M_{y,a}$ sont isomorphes si x, y appartiennent à la même strate (c'est en fait une condition nécessaire et suffisante, cf. [**64**], Thm. 14.3.2.).

7.5. Polynômes de Nakajima et formules de multiplicités

Les variétés $\mathfrak{Z}(\mathbf{w})$ permettent de construire les modules standard de $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$. Qu'en est-il des $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-modules simples ? Comme on l'a vu au paragraphe précédent, tout module simple $L(\mathbf{P})$ peut s'obtenir comme quotient irréductible d'un certain module standard $M_{x,a}$. On se trouve donc face au problème de calculer les multiplicités $[M_{x,a} : L(\mathbf{P})]$. La construction K-théorique de $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$ permet justement de calculer ces multiplicités, via un yoga géométrique dû à Ginzburg [**7**], Chap.8 (voir aussi [**38**]) dont nous énonçons les grandes lignes.

On fixe le couple x, a une fois pour toutes. On commence par se ramener à des algèbres de convolution en homologie (de Borel-Moore) via un caractère de Chern, de la façon suivante. La première étape est une localisation aux points fixes en K-théorie ; le théorème de concentration de Thomason fournit un isomorphisme

$$i^* : \ K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w}))_a \xrightarrow{\sim} K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A)_a$$

où $(\ )_a$ désigne la localisation par rapport à $\chi_a^{-1}(0)$ dans $R(A)$. On en déduit un isomorphisme

$$i^* : \ K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})) \otimes \mathbb{C}_a \xrightarrow{\sim} K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \otimes \mathbb{C}_a.$$

Comme A opère trivialement sur $\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A$, on a $K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \simeq K(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \otimes R(A)$ d'où on tire l'identification

$$ev : \ K^A(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \otimes \mathbb{C}_a \xrightarrow{\sim} K(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \otimes \mathbb{C}.$$

Enfin, on considère l'application de Riemann-Roch

$$RR = (1 \boxtimes \mathrm{Td}_{\mathfrak{M}(\mathbf{w})^A}) \cup \mathrm{ch} : \ K(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A) \otimes \mathbb{C} \to H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$$

où Td désigne la classe de Todd et où ch est le caractère de Chern (cf. [**7**], Chap. 5.11). L'application RR est un morphisme d'algèbres de convolution (cf. [**7**], Thm. 5.11.11). La composition de toutes ces applications fournit finalement un morphisme d'algèbre $U_\epsilon(L\mathfrak{g}) \to H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$.

Il existe une suite similaire d'applications

$$M_{x,a} := K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x) \otimes \mathbb{C}_a \xrightarrow{\sim} K^A(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x^A) \otimes \mathbb{C}_a \xrightarrow{\sim} K(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x^A) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{ch}} H_\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x^A, \mathbb{C}).$$

Dans ce cas, l'application ch est un isomorphisme (ceci est loin d'être évident, voir [**64**], Section 7). Finalement, comme le caractère de Chern commute à la convolution, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} U_\epsilon(L\mathfrak{g}) & \longrightarrow & \mathrm{End}(M_{x,a}) \\ \downarrow & & \| \\ H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{End}(H_\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{w})_x^A, \mathbb{C})). \end{array}$$

On est maintenant amené à étudier la décomposition en facteurs simples du $H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$-module $H_\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{w})^A_x, \mathbb{C})$. On utilise là encore un résultat général de Ginzburg ([**7**], Thm. 8.6.7) qui fournit un isomorphisme *d'algèbres* (non graduées)

$$H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ext}^\bullet_{D^b(\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A)}(\pi_!\mathbb{C}_{\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A}, \pi_!\mathbb{C}_{\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A}).$$

Le théorème de décomposition de Beilinson-Bernstein-Deligne nous permet d'écrire

$$\pi_!\mathbb{C}_{\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A} = \bigoplus_{\phi,k} L_{\phi,k} \otimes P_\phi[k], \tag{7.3}$$

pour un certain ensemble $\{P_\phi\}$ de faisceaux pervers simples sur $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$. On a donc, en posant $L_\phi = \bigoplus_k L_{\phi,k}$

$$H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C}) = \bigoplus_{k,\phi,\varphi} \mathrm{Hom}(L_\phi, L_\varphi) \otimes \mathrm{Ext}^k(P_\phi, P_\varphi). \tag{7.4}$$

Comme on a supposé les P_ϕ pervers et simples, on a $\mathrm{Ext}^{<0}(P_\phi, P_\varphi) = 0$ et $\mathrm{Ext}^0(P_\phi, P_\varphi) = \mathbb{C}^{\delta_{\phi,\varphi}}$. Ainsi (7.4) se simplifie

$$H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C}) = \bigoplus_\phi \mathrm{End}(L_\phi) \oplus \bigoplus_{k>0,\phi,\varphi} \mathrm{Hom}(L_\phi, L_\varphi) \otimes \mathrm{Ext}^k(P_\phi, P_\varphi).$$

Comme $\mathrm{Ext}^k(P_\phi, P_\varphi) \cdot \mathrm{Ext}^l(P_\varphi, P_\tau) \subset \mathrm{Ext}^{k+l}(P_\phi, P_\tau)$, le radical de $H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$ est égal à $\bigoplus_{k>0,\phi,\varphi} \mathrm{Hom}(L_\phi, L_\varphi) \otimes \mathrm{Ext}^k(P_\phi, P_\varphi)$, et il s'ensuit que $\{L_\phi\}_\phi$ est une collection complète de modules simples pour $H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$.

Notons $i : \{x\} \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{w})$ l'inclusion. En appliquant le foncteur $H^\bullet(i^!-)$ à (7.3) on obtient

$$H^\bullet(i^!\pi_!\mathbb{C}_{\mathfrak{M}(\mathbf{w})^A}) = H_\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{w})^A_x, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\phi,k} L_\phi \otimes H^k_{|x}(P_\phi).$$

Cette égalité d'espaces vectoriels reste valable dans le groupe de Grothendieck des $H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$-modules ([**7**], Section 8.6).

Le théorème suivant de Nakajima apporte la dernière pierre à l'édifice :

THÉORÈME 7.6 ([**64**], Thm. 14.3.2). — *Supposons que ϵ ne soit pas une racine de l'unité. Alors*

i) *Les faisceaux pervers simples P_ϕ apparaissant dans $\pi_!\mathbb{C}_{\mathfrak{M}(\mathbf{w})^A}$ sont exactement les complexes de cohomologie d'intersection $IC(S, \mathbb{C})$ où S parcourt l'ensemble des strates $\mathfrak{M}_0^{reg}(\mathbf{w})^A(\rho)$ de $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A$.*

ii) *Pour $P_\phi = IC(S, \mathbb{C})$, on a $L_\phi = L(\mathbf{P}_{x,a})$ pour tout $x \in S$. En particulier, le $H_\bullet(\mathfrak{Z}(\mathbf{w})^A, \mathbb{C})$-module simple L_ϕ reste simple en tant que $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-module.*

Les polynômes de Drinfeld $\mathbf{P}_{x,a}$ associés à un point x de $\mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A$ sont définis dans le théorème 7.5.

Comme corollaire immédiat, on a

COROLLAIRE 7.7. — *Supposons que ϵ ne soit pas une racine de l'unité. Alors*

$$[M_{x,a} : L(\mathbf{P}_{y,a})] = \sum_k \dim H^k_{|x}(IC(S_y, \mathbb{C})) \tag{7.5}$$

où $S_y \subset \mathfrak{M}_0(\mathbf{w})^A$ est la strate contenant y.

Ce résultat est bien sûr à mettre en parallèle avec ceux obtenus par Ginzburg et Kazhdan-Lusztig pour les algèbres de Hecke affines [**16**], [**38**]. Les « polynômes de Nakajima » $\sum_k \dim H^k_{|x}(IC(S_y, \mathbb{C}))t^k$ apparaissant dans (7.5) s'apparentent aux polynômes de Kazhdan-Lusztig. Il existe, comme pour ces derniers, un algorithme de calcul ([**69**]) et donc un algorithme permettant de déterminer les caractères de tous les $U_\epsilon(L\mathfrak{g})$-modules simples (toujours lorsque ϵ n'est pas une racine de l'unité). On trouvera dans [**24**] une extension, purement algébrique, de la construction des polynômes de Nakajima au cas général ($\mathfrak{g}$ non simplement lacé). Enfin, notons que Varagnolo a obtenu, en remplaçant dans les constructions ci-dessus la K-théorie équivariante par la cohomologie équivariante, une approche géométrique à la théorie des représentations des *Yangiens* [**76**].

8. DÉVELOPPEMENTS

Dans cette ultime section, nous mentionnons (trop) brièvement quelques autres aspects des variétés carquois de Nakajima, ainsi que quelques développements plus récents.

8.1. *Structure hyperkählérienne.* — Les variétés carquois $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ s'inscrivent naturellement dans une famille *hyperkählérienne* de variétés complexes $\mathfrak{M}_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ pour $\xi \in \mathbb{R}^I \oplus \mathbb{C}^I$, obtenues par réduction hyperkählérienne de l'action de $U_\mathbf{v} = \prod_i U(v_i)$ sur l'espace $\overline{E}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ où les espaces V, W sont maintenant munis d'une structure hermitienne. Les variétés $\mathfrak{M}_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sont lisses pour des valeurs génériques de ξ. Ce point de vue est essentiel dans les démonstrations de plusieurs propriétés fines des variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Lorsque le carquois est de type affine, les variétés $\mathfrak{M}_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ont, comme $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, des interprétations en géométrie (espaces de connexions anti-autoduales sur les espaces ALE [**41**], [**1**]), ou en géométrie non commutative (espaces de modules de faisceaux cohérents sur des plans projectifs non commutatifs [**2**], [**15**]).

8.2. *Foncteurs de réflexion et représentation du groupe de Weyl.* — En s'inspirant des foncteurs de réflexion de Bernstein-Gelfand-Ponomarev dans la théorie des représentations des carquois, Nakajima a construit dans [**67**] *pour des valeurs génériques du paramètre ξ* des isométries hyperkählériennes

$$S_c : \mathfrak{M}_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}_{S_c \cdot \xi}(S_c \star \mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad (c \in I), \tag{8.1}$$

où $S_c \star \mathbf{v}$ est défini afin que $s_c \cdot (\sum w_a \Lambda_a - \sum v_a \alpha_a) = \sum w_a \Lambda_a - \sum (S_a \star \mathbf{v})_a \alpha_a$, et où s_a est la réflexion simple du groupe de Weyl W du carquois Q. Il a de plus montré que ces isométries engendrent une action de W sur *l'ensemble* des variétés carquois $\mathfrak{M}_\xi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (noter que cette action transforme le paramètre ξ correspondant à la structure hyperkählérienne). En conséquence, on obtient par monodromie dans l'espace des paramètres génériques ξ une représentation de W à valeur dans l'homologie $H_\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ lorsque $\sum w_a \Lambda_a - \sum v_a \alpha_a = 0$ (pour n'importe quelle valeur générique de ξ). C'est un analogue de la construction des représentations de Springer des groupes de Weyl due à Slodowy [**74**]. Une version équivalente des transformations (8.1) a été donnée par Lusztig [**49**], voir aussi [**10**]. Le lecteur trouvera dans [**15**] une interprétation de (8.1) en termes d'équivalence de catégories dérivées.

8.3. *Nombres de Betti des variété carquois.*— Les résultats de la section 5 donnent les dimensions des espaces $H_{top}(\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = H_{mid}(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$ pour tout carquois Q et tous vecteurs $\mathbf{v}, \mathbf{w}$. Nakajima a donné dans [**69**] un algorithme récursif (basé sur la réduction aux points fixes sous l'action d'un tore) pour calculer les nombres de Betti de $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ et $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})^A$. Cet algorithme fait simultanément intervenir les variétés carquois pour beaucoup de carquois différents et est difficile à mettre en pratique.

Tamasz Hausel a récemment obtenu une formule pour les nombres de Betti des $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, basée sur un comptage de points sur les corps finis et sur le fait que la structure de Hodge mixte est pure. Ceci fournit, dans le cas d'un carquois arbitraire, une formule close (mais assez complexe) pour le polynôme de Poincaré des variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ([**23**]). On trouvera dans [**57**] un résultat similaire obtenu par une autre approche, purement algébrique. Pour un carquois de type fini, Lusztig a aussi donné une expression conjecturale des nombres de Betti de $\mathfrak{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ (cf. [**48**]), inspirée des formules « fermioniques » de la théorie des représentations des algèbres affines quantiques. Un résultat proche de cette conjecture a été récemment démontré (pour un carquois arbitraire) par Mozgovoy [**56**].
La structure d'algèbre (donnée par le cup produit) sur $H^\bullet(\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est, quant à elle, encore largement méconnue.

8.4. *Produit tensoriel.*— Nakajima [**66**], Malkin [**53**] et Varagnolo-Vasserot [**80**] ont (simultanément (!)) défini une sous-variété lagrangienne $\mathfrak{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r)$ de $\mathfrak{M}(\sum_i \mathbf{w}_i)$ contenant $\mathfrak{L}(\sum_i \mathbf{w}_i)$ et satisfaisant

$$H_{top}(\mathfrak{L}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r)) \simeq L(\lambda_{\mathbf{w}_1}) \otimes \cdots \otimes L(\Lambda_{\mathbf{w}_r}),$$

où on a posé $\Lambda_{\mathbf{w}} = \sum_a w_a \Lambda_a$. La même chose reste vraie au niveau des cristaux de Kashiwara et, lorsque Q est de type fini, on a aussi un résultat similaire pour les groupes de K-théorie. Une conséquence intéressante de ces constructions est l'existence d'une « variété de multiplicités », dont l'homologie est donnée par les coefficients de Littlewood-Richardson généralisés (voir [**53**]).

8.5. *Bases canoniques en K-théorie.*— On suppose ici le carquois Q de type fini. Lusztig [**50**] a conjecturé, et Varagnolo-Vasserot [**79**] ont démontré, l'existence de certaines bases « canoniques » dans les groupes de K-théorie $K^{T_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{L}(\mathbf{w}))$ et $K^{T_{\mathbf{w}}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{M}(\mathbf{w}))$. Ces bases sont déterminées par une propriété métrique et une propriété d'invariance par rapport à une certaine involution, propriétés semblables à celles qui caractérisent les (traces des) faisceaux pervers parmi les faisceaux constructibles.

La motivation principale provient ici de l'analogie avec le cas des algèbres de Hecke affines : Lusztig a défini dans les groupes $K^{T\times\mathbb{C}^*}(\mathcal{B})$ et $K^{T\times\mathbb{C}^*}(T^*\mathcal{B})$ des bases canoniques dont les coefficients matriciaux (les « polynômes de Kazhdan-Lusztig périodiques ») jouent un rôle crucial dans la théorie des représentations des algèbres de Lie réductives sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive (voir [**47**], [**3**]).

8.6. *Analogue global des variétés de carquois.*— Les catégories $\mathrm{Rep}_k\ Q$ sont des exemples de catégories abéliennes de dimension homologique égale à un. Une autre grande classe de telles catégories est fournie par les catégories $Coh_{par}(X)$ de faisceaux cohérents (éventuellement paraboliques) sur une courbe projective lisse X. Un analogue naturel, dans ce cadre global, des variétés $\mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est l'espace des modules des fibrés de Higgs paraboliques $\mathscr{H}iggs_X$; l'analogue correspondant du morphisme $\pi : \mathfrak{M}(\mathbf{v},\mathbf{w}) \to \mathfrak{M}_0(\mathbf{v},\mathbf{w})$ est donné par la fibration de Hitchin $\mu : \mathscr{H}iggs_X \to \bigoplus_i H^0(K^{\otimes i}(-i\cdot D))$. En particulier, la variété lagrangienne $\mathfrak{L}(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \pi^{-1}(0)$ est à relier au *cône global nilpotent* $\Lambda = \mu^{-1}(0)$. Les constructions géométriques des sections 5, 6 et 7 n'ont, pour l'instant, pas d'analogue global, bien que [**33**], [**73**] suggèrent (au moins pour $X = \mathbb{P}^1$) un lien avec des algèbres de lacets d'algèbres de Kac-Moody.

RÉFÉRENCES

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, V. G. Drinfel'd & Y. I. Manin – Construction of instantons, *Phys. Lett. A* **65** (1978), p. 185–187.

[2] V. Baranovsky, V. Ginzburg & A. Kuznetsov – Quiver varieties and a noncommutative $\mathbb{P}^2$, *Compositio Math.* **134** (2002), p. 283–318.

[3] R. Bezrukavnikov, I. Mirković & D. Rumynin – Localization of modules for a semisimple Lie algebra in prime characteristic, à paraître dans Ann. of Math.

[4] A. Braverman & D. Gaitsgory – Crystals via the affine Grassmannian, *Duke Math. J.* **107** (2001), p. 561–575.

[5] J. Briançon – Description de $\mathrm{Hilb}^n C\{x,y\}$, *Invent. Math.* **41** (1977), p. 45–89.

[6] V. Chari & A. Pressley – Quantum affine algebras and their representations, in *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, CMS Conf. Proc., vol. 16, Amer. Math. Soc., 1995, p. 59–78.

[7] N. CHRISS & V. GINZBURG – *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.

[8] W. CRAWLEY-BOEVEY – Geometry of the moment map for representations of quivers, *Compositio Math.* **126** (2001), p. 257–293.

[9] ———, Normality of Marsden-Weinstein reductions for representations of quivers, *Math. Ann.* **325** (2003), p. 55–79.

[10] W. CRAWLEY-BOEVEY & M. P. HOLLAND – Noncommutative deformations of Kleinian singularities, *Duke Math. J.* **92** (1998), p. 605–635.

[11] V. G. DRINFEL'D – A new realization of Yangians and of quantum affine algebras, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **296** (1987), p. 13–17.

[12] G. ELLINGSRUD & S. A. STRØMME – On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, *Invent. Math.* **87** (1987), p. 343–352.

[13] J. FOGARTY – Algebraic families on an algebraic surface, *Amer. J. Math* **90** (1968), p. 511–521.

[14] E. FRENKEL & N. RESHETIKHIN – The q-characters of representations of quantum affine algebras and deformations of $\mathscr{W}$-algebras, in *Recent developments in quantum affine algebras and related topics (Raleigh, NC, 1998)*, Contemp. Math., vol. 248, Amer. Math. Soc., 1999, p. 163–205.

[15] I. FRENKEL, M. KHOVANOV & O. SCHIFFMANN – Homological realization of Nakajima varieties and Weyl group actions, *Compos. Math.* **141** (2005), p. 1479–1503.

[16] V. GINZBURG – Deligne-Langlands conjecture and representations of affine Hecke algebras, prépublication Moscow Univ., 1985.

[17] V. GINZBURG & M. KAPRANOV – Hilbert schemes and Nakajima's quiver varieties, non publié, 1995.

[18] V. GINZBURG & É. VASSEROT – Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n, *Internat. Math. Res. Notices* **3** (1993), p. 67–85.

[19] G. GONZALEZ-SPRINBERG & J.-L. VERDIER – Construction géométrique de la correspondance de McKay, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), p. 409–449 (1984).

[20] L. GÖTTSCHE – The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, *Math. Ann.* **286** (1990), p. 193–207.

[21] I. GROJNOWSKI – Instantons and affine algebras. I. The Hilbert scheme and vertex operators, *Math. Res. Lett.* **3** (1996), p. 275–291.

[22] G. HATAYAMA, A. KUNIBA, M. OKADO, T. TAKAGI & Z. TSUBOI – Paths, crystals and fermionic formulae, in *MathPhys odyssey, 2001*, Prog. Math. Phys., vol. 23, Birkhäuser, 2002, p. 205–272.

[23] T. HAUSEL – Betti numbers of holomorphic symplectic quotients via arithmetic Fourier transform, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **103** (2006), p. 6120–6124.

[24] D. HERNANDEZ – Algebraic approach to q,t-characters, *Adv. Math.* **187** (2004), p. 1–52.

[25] ———, The Kirillov-Reshetikhin conjecture and solutions of T-systems, *J. reine angew. Math.* **596** (2006), p. 63–87.

[26] D. HERNANDEZ & H. NAKAJIMA – Level 0 monomial crystals, *Nagoya Math. J.* **184** (2006), p. 85–153.

[27] J. HONG & S.-J. KANG – *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, 2002.

[28] Y. ITO & I. NAKAMURA – McKay correspondence and Hilbert schemes, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **72** (1996), p. 135–138.

[29] A. JOSEPH – *Quantum groups and their primitive ideals*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 29, Springer, 1995.

[30] V. KAC – *Infinite-dimensional Lie algebras*, third éd., Cambridge University Press, 1990.

[31] V. KAC & A. K. RAINA – *Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Advanced Series in Mathematical Physics, vol. 2, World Scientific Publishing Co. Inc., 1987.

[32] J. KAMNITZER – Crystal structures on Mirković-Vilonen polytopes, prépublication arXiv:math.QA/0505398, 2005.

[33] M. KAPRANOV – Eisenstein series and quantum affine algebras, *J. Math. Sci. (New York)* **84** (1997), p. 1311–1360, Algebraic geometry, 7.

[34] M. KASHIWARA – *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours Spécialisés, vol. 9, Société Mathématique de France, 2002, Edited by Charles Cochet.

[35] ———, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), p. 117–175.

[36] ———, Realizations of crystals, in *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, Contemp. Math., vol. 325, Amer. Math. Soc., 2003, p. 133–139.

[37] M. KASHIWARA & Y. SAITO – Geometric construction of crystal bases, *Duke Math. J.* **89** (1997), p. 9–36.

[38] D. KAZHDAN & G. LUSZTIG – Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras, *Invent. Math.* **87** (1987), p. 153–215.

[39] A. N. KIRILLOV & N. RESHETIKHIN – Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **160** (1987), p. 211–221, 301.

[40] P. KRONHEIMER – The construction of ALE spaces as hyper-Kähler quotients, *J. Differential Geom.* **29** (1989), p. 665–683.

[41] P. KRONHEIMER & H. NAKAJIMA – Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons, *Math. Ann.* **288** (1990), p. 263–307.

[42] A. KUNIBA, T. NAKANISHI & J. SUZUKI – Functional relations in solvable lattice models. I. Functional relations and representation theory, *Internat. J. Modern Phys. A* **9** (1994), p. 5215–5266.

[43] M. LEHN & C. SORGER – Symmetric groups and the cup product on the cohomology of Hilbert schemes, *Duke Math. J.* **110** (2001), p. 345–357.

[44] P. LITTELMANN – Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math. (2)* **142** (1995), p. 499–525.

[45] G. LUSZTIG – Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), p. 365–421.

[46] ———, Affine quivers and canonical bases, *Publ. Math. I.H.É.S.* **76** (1992), p. 111–163.

[47] ———, Bases in equivariant K-theory, *Represent. Theory* **2** (1998), p. 298–369.

[48] ———, Fermionic forms and Betti numbers, prépublication arXiv:math.QA/0005010, 2000.

[49] ———, Quiver varieties and Weyl group actions, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), p. 461–489.

[50] ———, Remarks on quiver varieties, *Duke Math. J.* **105** (2000), p. 239–265.

[51] ———, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, *Adv. Math.* **151** (2000), p. 129–139.

[52] A. MAFFEI – Quiver varieties of type A, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), p. 1–27.

[53] A. MALKIN – Tensor product varieties and crystals : the *ADE* case, *Duke Math. J.* **116** (2003), p. 477–524.

[54] I. MIRKOVIĆ & K. VILONEN – Perverse sheaves on affine Grassmannians and Langlands duality, *Math. Res. Lett.* **7** (2000), p. 13–24.

[55] I. MIRKOVIĆ & M. VYBORNOV – On quiver varieties and affine Grassmannians of type A, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **336** (2003), p. 207–212.

[56] S. MOZGOVOY – Fermionic forms and quiver varieties, prépublication arXiv:math.QA/0610084, 2006.

[57] ———, On the multiplicities of the irreducible highest weight modules over Kac-Moody algebras, prépublication arXiv:math.RT/0609349, 2006.

[58] D. MUMFORD, J. FOGARTY & F. KIRWAN – *Geometric invariant theory*, third éd., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2. Folge, vol. 34, Springer, 1994.

[59] H. NAKAJIMA – A geometric construction of algebras, Lectures at the University of Hong Kong `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/bibli.html`.

[60] ———, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras, *Duke Math. J.* **76** (1994), p. 365–416.

[61] ———, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces, *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), p. 379–388.

[62] ———, Quiver varieties and Kac-Moody algebras, *Duke Math. J.* **91** (1998), p. 515–560.

[63] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, University Lecture Series, vol. 18, American Mathematical Society, 1999.

[64] ———, Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), p. 145–238.

[65] ———, Quiver varieties and McKay correspondence, Lectures at Hokkaido University `http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/bibli.html`, 2001.

[66] ———, Quiver varieties and tensor products, *Invent. Math.* **146** (2001), p. 399–449.

[67] ———, Reflection functors for quiver varieties and Weyl group actions, *Math. Ann.* **327** (2003), p. 671–721.

[68] ———, t-analogs of q-characters of quantum affine algebras of type A_n, D_n, in *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, Contemp. Math., vol. 325, Amer. Math. Soc., 2003, p. 141–160.

[69] ———, Quiver varieties and t-analogs of q-characters of quantum affine algebras, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 1057–1097.

[70] C. OKONEK, M. SCHNEIDER & H. SPINDLER – *Vector bundles on complex projective spaces*, Progress in Mathematics, vol. 3, Birkhäuser, 1980.

[71] C. M. RINGEL – Hall algebras and quantum groups, *Invent. Math.* **101** (1990), p. 583–591.

[72] Y. SAITO – Crystal bases and quiver varieties, *Math. Ann.* **324** (2002), p. 675–688.

[73] O. SCHIFFMANN – Noncommutative projective curves and quantum loop algebras, *Duke Math. J.* **121** (2004), p. 113–168.

[74] P. SLODOWY – *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 815, Springer, 1980.

[75] C. VAFA & E. WITTEN – A strong coupling test of S-duality, *Nuclear Phys. B* **431** (1994), p. 3–77.

[76] M. VARAGNOLO – Quiver varieties and Yangians, *Lett. Math. Phys.* **53** (2000), p. 273–283.

[77] M. VARAGNOLO & É. VASSEROT – On the K-theory of the cyclic quiver variety, *Internat. Math. Res. Notices* **18** (1999), p. 1005–1028.

[78] ———, Standard modules of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **111** (2002), p. 509–533.

[79] ———, Canonical bases and quiver varieties, *Represent. Theory* **7** (2003), p. 227–258.

[80] ———, Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings, in *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, Progr. Math., vol. 210, Birkhäuser, 2003, p. 345–365.

[81] É. VASSEROT – Affine quantum groups and equivariant K-theory, *Transform. Groups* **3** (1998), p. 269–299.

[82] ———, Sur l'anneau de cohomologie du schéma de Hilbert de $\mathbf{C}^2$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332** (2001), p. 7–12.

Olivier SCHIFFMANN

École normale supérieure
Département de Mathématiques et Applications
UMR 8553 du CNRS
45, rue d'Ulm
F–75230 Paris Cedex 05
E-mail : schiffma@dma.ens.fr