FEDERICO PELLARIN

Aspects de l'indépendance algébrique en caractéristique non nulle [d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu,...]

Astérisque, tome 317 (2008), Séminaire Bourbaki, exp. nº 973, p. 205-242

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__317__205_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 2007
59^e année, 2006-2007, n° 973, p. 205 à 242

ASPECTS DE L'INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE
[d'après Anderson, Brownawell, Denis, Papanikolas, Thakur, Yu,...]

par **Federico PELLARIN**

1. INTRODUCTION

Un célèbre théorème de Baker affirme que si $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ tels que $e^{\ell_i} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout i, alors $1, \ell_1, \ldots, \ell_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Sous ces mêmes conditions, on conjecture aussi que $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont algébriquement indépendants : les nombres $\pi, \log 2, \log 3, \log 5, \ldots$ seraient en particulier algébriquement indépendants.

Le caractère arithmétique des valeurs de la fonction zêta de Riemann $\zeta(n) = \sum_{k\geq 1} k^{-n}$ aux entiers $n \geq 2$ est encore moins connu. On connaît la transcendance de $\zeta(2) = \pi^2/6$ et de $\zeta(2n)$ en général grâce à la transcendance de π et aux formules d'Euler, l'irrationalité de $\zeta(3)$ par Apéry, et l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ d'une infinité de nombres dans l'ensemble $\{\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots\}$ par Ball et Rivoal. On conjecture l'indépendance algébrique des nombres $\pi, \zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$

Des questions similaires se posent pour les valeurs de la fonction gamma d'Euler Γ aux rationnels non entiers. La conjecture de Rohrlich-Lang affirme que les seules relations algébriques entre ces nombres sont obtenues en combinant les équations fonctionnelles connues, mais on sait démontrer seulement l'indépendance algébrique de $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et de $\Gamma(r)$ avec r congru à $1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/6, 5/6$ modulo 1.

Soient $q = p^r$ une puissance d'un nombre premier, $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments, T une indéterminée ; écrivons $A = \mathbb{F}_q[T]$, $K = \mathbb{F}_q(T)$. La valuation opposée du degré (en T) $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ donnée par $v(a/b) = \deg b - \deg a$ donne la valeur absolue $|\cdot|$ définie par $|x| = q^{-v(x)}$.

On note $K_\infty = \mathbb{F}_q((T^{-1}))$ (complété de K pour v). Le degré d'une clôture algébrique $\overline{K_\infty}$ sur K_∞ est infini et $\overline{K_\infty}$ n'est pas complet pour l'unique extension de $|\cdot|$.

Soit C le complété de $\overline{K_\infty}$ pour $|\cdot|$. D'après le lemme de Krasner, C est à la fois algébriquement clos et complet ; son corps résiduel est $\overline{\mathbb{F}_q}$. On note $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et on fixe une fois pour toutes des plongements $\overline{K} \subset \overline{K_\infty} \subset C$.

Nous appellerons *nombres* les éléments de C. Un nombre qui n'est pas dans $\overline{K}$ est un nombre *transcendant*. Des nombres $a_1, \ldots, a_m$ tels que le sous-corps $\overline{K}(a_1, \ldots, a_m)$ de C soit de degré de transcendance m sur $\overline{K}$ sont *algébriquement indépendants*.

Il existe des nombres dans C qui se trouvent en analogie profonde avec les nombres complexes $2\pi i$, $\log n$ avec n entier ≥ 2, $\zeta(n)$ avec $n \geq 2$ (et bien d'autres). On expliquera certains aspects de ces analogies dans ce texte mais nous pouvons dire tout de suite qu'il est possible de retrouver ces nombres dans les *matrices de périodes* de *t-modules*, qui sont essentiellement des groupes additifs $\mathbb{G}_a^d$ munis de certaines actions de A (décrites plus bas). La notion de t-module a été introduite par Anderson ; on peut y attacher des *fonctions exponentielles*. Elle a poussé dans la bonne direction une théorie de la transcendance, de l'indépendance K-linéaire et de l'indépendance algébrique dans C car on dispose aujourd'hui, grâce à Jing Yu, d'un analogue du théorème du sous-espace analytique de Wüstholz pour une classe très générale de t-modules qui sera décrit dans ce texte.

Anderson a aussi introduit les *t-motifs*, qui sont essentiellement des ensembles de morphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires de $\mathbb{G}_a^n$ vers $\mathbb{G}_a$ avec action de A, et des conditions de compatibilité. On peut construire des catégories de t-modules et des catégories de t-motifs anti-équivalentes, mais les t-motifs possèdent des avantages sur les t-modules, remarqués par Anderson, quand on s'intéresse à l'interpolation analytique de leurs périodes.

Guidés par ce point de vue, Anderson, Brownawell et Papanikolas ont démontré un critère d'indépendance linéaire pour les valeurs de solutions de certains systèmes aux *σ-différences*. Ce critère a permis à Papanikolas de démontrer l'analogue de la conjecture d'indépendance algébrique des logarithmes des nombres algébriques mentionnée au début de cette introduction. Par une méthode différente, liée à la méthode de Mahler sur $\mathbb{C}$, Denis a obtenu des cas particuliers de cette conjecture. Grâce au travail de Chieh-Yu Chang et Jing Yu, nous savons calculer toutes les relations de dépendance algébrique entre les valeurs de la fonction zêta de Goss aux entiers positifs. Le critère d'indépendance linéaire d'Anderson, Brownawell et Papanikolas a aussi permis à ces auteurs de déterminer un analogue de la conjecture de Rohrlich-Lang pour les valeurs de la fonction gamma *géométrique* de Thakur.

2. MODULES DE DRINFELD ET t-MODULES

Un *A-réseau* Λ *de rang* $n \geq 1$ (ou plus simplement réseau de rang $n \geq 1$) est un A-module libre de rang $n \geq 1$ *discret* (qui a intersection finie avec toute boule de C). Il en existe de tout rang fini : par exemple $\Lambda = A\lambda_1 + \cdots + A\lambda_n$ quand $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments K_∞-linéairement indépendants de C. Écrivons, par analogie avec la fonction sigma de Weierstrass :

$$e_\Lambda(z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} (1 - z/\lambda). \tag{1}$$

Ce produit converge (uniformément sur les boules) vers une fonction

$$e_\Lambda : C \to C$$

admettant un développement en série entière $e_\Lambda(z) = \sum_{i \geq 0} \alpha_i z^{q^i}$ avec $\alpha_i \in C$, convergeant pour tout $z \in C$. C'est la fonction *exponentielle* de Λ ; elle vérifie $e_{c\Lambda}(cz) = ce_\Lambda(z)$ pour tout $c \in C^\times$, elle est surjective et $\mathbb{F}_q$-linéaire. La dérivée de_Λ/dz de e_Λ est égale à 1, donc e_Λ possède une série réciproque locale en 0 que nous notons $\log_\Lambda$ et qui converge dans toutes les boules de centre 0 ne contenant pas d'élément de Λ.

Soit a un polynôme dans $A = \mathbb{F}_q[T]$. L'analogue du théorème de Liouville pour les séries entières $\sum_i c_i z^i$ convergentes dans toute boule de C (cf. [**44**]) implique l'existence d'un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire $\phi(a)$ à coefficients dans C tel que :

$$e_\Lambda(az) = \phi(a)(e_\Lambda(z)). \tag{2}$$

L'application $a \mapsto \phi(a)$ définit un homomorphisme injectif de $\mathbb{F}_q$-algèbres

$$A \to \mathbf{End}_{\mathbb{F}_q\text{-lin.}}(\mathbb{G}_a/C) = C[\tau]$$

(endomorphismes $\mathbb{F}_q$-linéaires définis sur C), où $C[\tau]$ est l'anneau non commutatif des polynômes en τ avec l'opération $\tau c = c^q \tau$ pour $c \in C$. Ceci induit une nouvelle structure de A-module sur le groupe $\mathbb{G}_a$ et un isomorphisme $C \cong C/\Lambda$. Noter que, si $z \in C$, $a \in A \setminus \{0\}$ et $az \in \Lambda$, alors $e_\Lambda(z)$ est dans le noyau de $\phi(a)$.

Pour $n \geq 1$, il existe des éléments $l_0, \ldots, l_n \in C$ tels que

$$\phi(T) = \sum_{0 \leq i \leq n} l_i \tau^i \quad \text{avec} \quad l_n \neq 0 \quad \text{et} \quad l_0 = T. \tag{3}$$

On en déduit que, pour tout $a \in A$, il existe $l_0(a), \ldots, l_{n \deg(a)}(a) \in C$ tels que

$$\phi(a) = \sum_{0 \leq i \leq n \deg a} l_i(a) \tau^i,$$

avec $l_0(a) = a$, $l_{n \deg a}(a) \neq 0$, et $\phi(\lambda) = \lambda \tau^0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q$.

Définition 2.1. — *Un homomorphisme injectif de $\mathbb{F}_q$-algèbres $\phi : A \to C[\tau]$ satisfaisant* (3) *est appelé* A-module de Drinfeld de rang $n \geq 1$ (*ou plus simplement, module de Drinfeld de rang $n \geq 1$*). *On dit que le module de Drinfeld ϕ est* défini *sur $\overline{K}$ si $l_1, \ldots, l_n \in \overline{K}$.*

L'application $\Lambda \mapsto \phi$ avec $\phi(a)$ comme dans (2) est une bijection entre l'ensemble des réseaux de rang n et l'ensemble des modules de Drinfeld de rang n. On dit que Λ est le *réseau* des périodes de ϕ. Pour construire le réseau des périodes associé à un module de Drinfeld ϕ comme dans (3), il suffit de construire l'exponentielle associée $e_\phi(z) = \sum_i \alpha_i z^{q^i}$. Tenant compte de (2) et de la convention $\alpha_i = 0$ pour $i < 0$, on trouve les relations dans C :

$$(T^{q^i} - T)\alpha_i = l_1(T)\alpha_{i-1}^q + \cdots + l_n(T)\alpha_{i-n}^{q^n}, \quad i \geq 1, \tag{4}$$

auxquelles il convient d'ajouter $\alpha_0 = 1$.

Sauf mention contraire, dans la suite tout module de Drinfeld sera défini sur $\overline{K}$. Soient ϕ_1, ϕ_2 deux modules de Drinfeld. Les *morphismes* $\phi_1 \to \phi_2$ sont les applications $\mathbb{F}_q$-linéaires $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ compatibles aux deux différentes actions de A définissant ϕ_1, ϕ_2. On note $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ le A-module des morphismes de ϕ_1 vers ϕ_2. Un morphisme non nul $\phi_1 \to \phi_2$ est une *isogénie*. Si ϕ_1, ϕ_2 sont de rangs différents, il ne sont pas *isogènes* : il n'existe pas d'isogénie $\phi_1 \to \phi_2$. Si Λ_1, Λ_2 sont les réseaux des périodes associés à ϕ_1, ϕ_2 isogènes, $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ s'identifie à l'ensemble des $z \in C$ tels que $z\Lambda_1 \subset \Lambda_2$. On note $\mathbf{End}(\phi) = \mathbf{Hom}(\phi, \phi)$; c'est une A-algèbre de type fini. En revenant à deux modules de Drinfeld ϕ_1, ϕ_2, $\mathbf{Hom}(\phi_1, \phi_2)$ est aussi un $\mathbf{End}(\phi_1)$-module de rang fini.

2.1. Module de Carlitz

Comme A est principal, les modules de Drinfeld de rang 1 sont tous *isomorphes* entre eux. Le module de Carlitz (cf. [**18**] [(1)]) est le module de Drinfeld de rang 1 associé à l'homomorphisme $A \to C[\tau]$ défini par

$$T \mapsto T\tau^0 + \tau,$$

que l'on note ϕ_{Car}. À l'origine, il a été introduit pour développer une théorie des extensions cyclotomiques de K débouchant sur une solution dans ce contexte au douzième problème de Hilbert (par Carlitz et Hayes [**16, 48, 49**]) et a été le précurseur des modules de Drinfeld.

Le réseau de périodes associé s'écrit $\Lambda = \overline{\pi}A$ pour un certain élément $\overline{\pi}$ défini à multiplication près par un élément de $\mathbb{F}_q^\times$. Dans la suite, on pose $e_{\mathrm{Car}} = e_{\overline{\pi}A}$ et $\log_{\mathrm{Car}} = \log_{\overline{\pi}A}$. Dans ce texte, on étudiera plusieurs propriétés de $\overline{\pi}$ mais il convient tout de suite d'en citer trois : on a $\overline{\pi} \in \mathbb{F}_q(((-T)^{1/(q-1)})) \setminus K_\infty$, $\overline{\pi}^{q-1} \in K_\infty$ et

(1) Dans les premiers travaux, Carlitz étudiait plutôt le module $T \mapsto T\tau^0 - \tau$.

$|\overline{\pi}| = q^{q/(q-1)}$. Ces propriétés découlent toutes de la formule suivante, qui sera démontrée plus bas (valable pour un choix approprié de $(-T)^{1/(q-1)}$) :

$$\overline{\pi} = T(-T)^{1/(q-1)} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - T^{1-q^i})^{-1}. \tag{5}$$

On a $\mathbf{End}(\phi_{\mathrm{Car}}) = A$. Avec les relations (4) on vérifie ensuite qu'avec $[i] = T^{q^i} - T$ $(i \geq 1)$ et $[0] = 1$:

$$e_{\mathrm{Car}}(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{z^{q^i}}{[i][i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}} [0]^{q^i}}, \quad \log_{\mathrm{Car}}(z) = \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i z^{q^i}}{[i][i-1] \cdots [1][0]}, \tag{6}$$

la série $\log_{\mathrm{Car}}$ convergeant pour $|z| < q^{q/(q-1)} = |\overline{\pi}|$.

2.2. Premières approches à la transcendance

Il semblerait que la première construction de nombres transcendants (dans $\overline{K_\infty} \backslash \overline{K}$) soit due à Wade [**70**] en 1941 et concerne les valeurs de la fonction e_{Car}.

THÉORÈME 2.2. — *Pour $a \in \overline{K} \setminus \{0\}$, $e_{\mathrm{Car}}(a) \notin \overline{K}$.*

Pour montrer ce résultat, il utilise les deux propriétés suivantes : tout polynôme de $\overline{K}[t]$ divise un polynôme $\mathbb{F}_q$-linéaire (c'est-à-dire de la forme $\sum_i c_i t^{q^i}$), et les valeurs de e_{Car} sont des limites de suites de valeurs de polynômes $\mathbb{F}_q$-linéaires, qui convergent donc très rapidement.

On en déduit la transcendance de $\overline{e} := e_{\mathrm{Car}}(1)$. Comme $e_{\mathrm{Car}}(\overline{\pi}/T) \in \overline{K}$, on a aussi la transcendance de $\overline{\pi}$. Un survol des multiples approches à la transcendance de $\overline{\pi}$ se trouve dans le texte de l'exposé au séminaire Bourbaki de Hellegouarch [**49**] daté de 1997, voir aussi [**73**]. Une démonstration très simple de $\overline{\pi} \notin \overline{K}$ a été obtenue par de Mathan pour $q \geq 3$ en appliquant un critère de Denis [**32**] analogue de la méthode de Liouville (qui s'applique aussi à $\overline{e}$, des détails se trouvent dans [**66**]). Denis [**30**] a en outre démontré, pour $q \geq 3$, l'indépendance algébrique de $\overline{e}$ et $\overline{\pi}$; si $q = 2$, on sait seulement que $1, \overline{\pi}$ et $\overline{e}$ sont K-linéairement indépendants. Un résultat de transcendance qui évoque le huitième problème de Schneider a aussi été démontré par Dion [**36**] : l'un des deux nombres $e_{\mathrm{Car}}(\overline{e})$ et $e_{\mathrm{Car}}(\overline{e}^2)$ est transcendant, on ne sait pas montrer que ces nombres sont tous les deux transcendants.

Une autre manière de démontrer que $\overline{\pi}$ est transcendant consiste à appliquer la méthode dite « automatique » (la transcendance de $\overline{\pi}$ découle de la transcendance de sa « dérivée logarithmique » par rapport à T, facile à calculer à partir de (5)). Son résultat fondateur est dû à Christol [**21**] ; il a été complété ensuite par Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [**22**] (1980) : une série formelle $\sum_i c_i t^i \in \mathbb{F}_q[[t]]$ est algébrique si et seulement si l'ensemble $\{(c_{p^k n+j})_{n \geq 0}, k \geq 0, 0 \leq j \leq p^k - 1\}$ est un ensemble fini de sous-suites de la suite $(c_n)_{n\geq 0}$. (Cette dernière suite peut alors être « engendrée par un automate fini » au sens de Cobham [**23**].) Dans cet article, les auteurs en déduisent un analogue d'une conjecture généralement attribuée à Mahler qui implique la propriété suivante. Si $p_1 < p_2$ sont deux nombres premiers et si $a : \mathbb{N} \to \{0, \ldots, p_1 - 1\}$ est une application, alors les deux séries formelles $\sum_{i\geq 0} a_i T^i \in \mathbb{F}_{p_1}[[T]], \sum_{i\geq 0} a_i T^i \in \mathbb{F}_{p_2}[[T]]$ sont simultanément algébriques si et seulement si elles sont rationnelles.

La clôture algébrique de K se plonge dans le corps algébriquement clos des *séries généralisées de Hahn* (2). Kedlaya [**50**], en généralisant les méthodes de [**22**], a donné une caractérisation en termes d'automates de ses éléments qui a permis à Adamczewski et Bell [**1**] d'étendre l'analogue de la solution de la conjecture de Mahler ci-dessus aux séries de Hahn.

La méthode automatique a aussi été développée et généralisée par Beals et Thakur [**65, 8, 66**]. Ils étudient, en appliquant des outils de la théorie des langages formels (notamment le « lemme de pompage »), comment certains automates *infinis* engendrent des nombres dans certaines classes et quelles opérations laissent ces classes stables, et obtiennent de remarquables applications à $T^{-q/(q-1)}\overline{\pi}, T^{q/(q-1)}\overline{\pi}^{-1}$ et $\overline{e} \in K_\infty$. Ils obtiennent une classification des nombres dans $\mathbb{F}_q((1/T))$ qui fournit entre autres des critères d'indépendance algébrique.

2.3. t-modules

La notion de t-module est due à Anderson [**4**] ; on considère ci-dessous l'action diagonale de τ sur $\mathbb{G}_a^s$.

DÉFINITION 2.3. — *Un* t-module *de dimension s (défini sur $\overline{K}$) est un couple $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ avec ϕ un homomorphisme injectif de $\mathbb{F}_q$-algèbres $\phi : A \to \mathbf{End}_{\mathbb{F}_q\text{-}lin}(\mathbb{G}_a^s/C) = \mathbf{Mat}_{s\times s}(C[\tau])$ tel que*

$$\phi(T) = a_0\tau^0 + \cdots + a_d\tau^d,$$

où $a_i \in \mathbf{Mat}_{s\times s}(\overline{K})$ sont des matrices avec $a_d \neq 0$ et avec $a_0 - T\tau^0$ matrice nilpotente.

Comme pour les modules de Drinfeld, on vérifie que, pour tout t-module $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ de dimension s, il existe une unique fonction $\mathbb{F}_q$-linéaire $e_\phi : C^s \to \mathbb{G}_a^s(C)$, dont les coordonnées sont développables en séries entières $\sum_i c_i z^i$ convergentes dans toute boule, l'*exponentielle* de G, telle que $e_G(a_0 z) = \phi(T)e_G(z)$. Les notions d'homomorphisme, endomorphisme etc. de t-modules sont les généralisations naturelles de celles relatives aux modules de Drinfeld.

(2) Des séries formelles $\sum_{i\in\mathcal{I}} c_i T^i$ avec $\mathcal{I} \subset \mathbb{Q}$ tel que tout sous-ensemble non vide a un plus grand élément, et $c_i \in \overline{\mathbb{F}_q}$.

Soit $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ un t-module. Un *sous-t-module* F de G de dimension $s' \leq s$ est un sous-groupe algébrique connexe de $\mathbb{G}_a^s$ de dimension s' stable sous l'action de $\phi(A)$. Un t-module sans sous-t-modules propres est un t-module *simple*.

On considère l'opérateur σ inverse de τ ; si $c \in C$, alors $\sigma(c) = c^{1/q}$. Soit $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ un t-module. L'ensemble

$$M^*(G) = \mathbf{Mat}_{s\times 1}(\overline{K}[\sigma])$$

est un $\overline{K}[\sigma]$-module à droite muni d'une action à gauche de A donnée par l'adjointe [**44, 66**] ϕ^* de l'action (à droite) de ϕ sur $\mathbf{Mat}_{s\times 1}(\overline{K}[\tau])$. Par exemple, si $\phi = \phi_{\mathrm{Car}}$, alors $\phi^*(T) = T\sigma^0 + \sigma$. Si $f \in M^*(G)$ et $a \in A$, l'action est $f \mapsto \phi^*(a) \circ f$, ce qui donne à $M^*(G)$ une structure de $\overline{K}[\sigma] \otimes_{\mathbb{F}_q} A$-bimodule. Soit t une indéterminée indépendante ; considérons l'anneau non commutatif $\overline{K}[t, \sigma]$ des polynômes en σ et t avec $t\sigma = \sigma t, tc = ct$ pour $c \in \overline{K}$. L'ensemble $M^*(G)$ est alors muni d'une structure de $\overline{K}[t, \sigma]$-module. Si $M^*(G)$ est libre de rang fini r comme $\overline{K}[t]$-module, alors on dit que le t-module G est *abélien*, de rang r. On appelle $M^*(G)$ le *t-motif dual* associé à G. Si de plus e_ϕ est surjective, alors on dit que G est *abélien uniformisable*. Le noyau de e_ϕ est dans ce cas un réseau de C^s de rang r (la notion de réseau dans ce contexte est l'adaptation naturelle de la notion correspondante en dimension 1).

Un module de Drinfeld de rang n est un t-module abélien uniformisable de dimension 1 et rang n. Tout t-module abélien uniformisable s'identifie, via la fonction exponentielle, à un quotient de C^s par un A-module libre de rang fini (discret), s étant la dimension. L'algèbre des endomorphismes d'un t-module abélien uniformisable de dimension s s'identifie à l'algèbre des matrices $s \times s$ à coefficients dans C qui fixent ce réseau et c'est un A-module de type fini. On peut tracer une analogie entre les t-modules abéliens et uniformisables et les variétés semi-abéliennes complexes définies sur les corps de nombres.

Un t-module $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi = T\tau^0 + N\tau^0)$ avec N nilpotente n'est certainement pas abélien, mais pour tout $a \in A$, le noyau de $\phi(a)$ est un $A/(a)$-module de rang fini (en fait de rang nul) indépendant de a : de tels t-modules sont dits *réguliers*. Les t-modules abéliens sont réguliers, et les t-modules réguliers sont en un sens les plus proches analogues des groupes algébriques commutatifs définis sur les corps de nombres.

2.4. La théorie de l'indépendance linéaire dans les t-modules

Les travaux de Baker sur l'indépendance linéaire des logarithmes des nombres algébriques ont été prolongés aux groupes algébriques commutatifs définis sur les corps de nombres et l'un des résultats les plus importants dans cette direction est le théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz [**77, 11, 76**]. L'analogue drinfeldien de cette théorie a suivi un parcours similaire, le début se situant dans les travaux de Wade, et des survols détaillés se trouvent dans [**14, 66, 76**].

C'est à Jing Yu que l'on doit l'analogue du théorème du sous-groupe analytique de Wüstholz, le *théorème du sous-t-module analytique* [**84**], dont le point clé a été l'analogue drinfeldien du lemme de zéros de Philippon [**56**]. La plus grande difficulté était de montrer que le sous-groupe algébrique obstructeur (au sens de Philippon) était stable sous $\phi(A)$, c'est-à-dire un sous-t-module. À ce sujet, voir aussi [**31**].

THÉORÈME 2.4. — *Soit $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ un t-module régulier d'exponentielle e_ϕ, avec $\phi(g) = a_0(g)\tau^0 + \cdots$, pour tout $g \in A$. Soit $u \in C^s$ tel que $e_\phi(u) \in \mathbb{G}_a^s(\overline{K})$. Soit V le plus petit sous-espace vectoriel de C^s contenant u, défini sur $\overline{K}$, stable par multiplication de $a_0(g)$ pour tout $g \in A$. Alors le sous-$\mathbb{F}_q$-espace vectoriel $e_\phi(V)$ de C^s est égal à $H(C)$ avec H sous-t-module de G.*

On en déduit l'analogue du théorème de Hermite-Lindemann :

THÉORÈME 2.5. — *Soit $G = (\mathbb{G}_a^s, \phi)$ un t-module abélien uniformisable simple d'exponentielle e_ϕ. Si $u = (u_1, \ldots, u_s) \in C^s \setminus \{0\}$ est tel que $e_\phi(u) \in \overline{K}$, alors $u_s \notin \overline{K}$.*

Le théorème 2.4 implique aussi l'analogue du théorème de Baker sur les formes linéaires non homogènes de logarithmes de nombres algébriques :

THÉORÈME 2.6. — *Soit ϕ un module de Drinfeld, soit e_ϕ son application exponentielle. Soient $\ell_1, \ldots, \ell_n \in C$ tels que $e_\phi(\ell_i) \in \overline{K}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si $1, \ell_1, \ldots, \ell_n$ sont $\overline{K}$-linéairement dépendants, alors $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont* **End**(ϕ)*-linéairement dépendants.*

2.4.1. — Il est opportun d'ajouter à ce paragraphe un court historique des résultats remarquables qui ont précédé le théorème 2.4 en renvoyant à [**14, 66**] pour plus de détails.

Dans [**78, 79, 80**], Jing Yu adapte au contexte des modules de Drinfeld les théorèmes de Gelfond-Schneider, Schneider-Lang, le théorème des six exponentielles (voir [**71, 75**] pour la théorie classique en caractéristique zéro). C'est dans ces travaux qu'il élabore la notion de E_q-fonction susceptible d'avoir des bonnes propriétés de croissance analytique et un bon contrôle arithmétique des coefficients des séries de Taylor, et de fournir des résultats de transcendance (les E_q-fonctions sont analogues, dans une certaine mesure, des E-fonctions de Siegel). Les fonctions exponentielles des modules de Drinfeld définis sur $\overline{K}$ en sont des exemples (voir aussi [**66, 69**]), grâce aux équations fonctionnelles (2). Le théorème 2.6, analogue du théorème de Baker pour les modules de Drinfeld, est démontré par Jing Yu dans [**81**] sans besoin d'un lemme de zéros, mais faisant recours à une astuce due à Bertrand et Masser l'obligeant à admettre une hypothèse de séparabilité du corps engendré par les coefficients des formes linéaires pour faire fonctionner la méthode de Schneider-Lang comme dans [**80**]. Dans [**82**], des résultats de transcendance sont obtenus incluant aussi les *quasi-périodes* des modules de Drinfeld (on reviendra sur cette notion plus bas). Noter que, dans [**28, 34**], Denis a également obtenu le théorème 2.6 sans utiliser de lemme de zéros et sans hypothèse de séparabilité.

Citons aussi le travail de Denis et David [**25**], dans lequel est démontré un analogue du théorème de Siegel-Shidlovski pour les valeurs des fonctions de Bessel-Carlitz d'indice entier rationnel sans passer par la méthode de Siegel-Shidlovski, mais en étendant la théorie de transcendance classique (voir par exemple Philippon, [**55**]) via un lemme de zéros [**31**] à des t-modules non uniformisables (mais munis d'exponentielle « faible »). Ce travail permet de retrouver entre autres l'analogue du théorème de Lindemann-Weierstrass pour les modules de Drinfeld obtenu par Thiéry [**68**].

3. INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE D'APRÈS DENIS

Dans ce paragraphe, nous décrirons comment Denis a obtenu, en utilisant la méthode de transcendance dite « de Mahler »(3), le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — *Soient $\beta_1, \dots, \beta_m \in K$ tels que $|\beta_i| < q^{q/(q-1)}$ pour tout $i = 1, \dots, m$; posons $\ell_i = \log_{\mathrm{Car}} \beta_i$ $(i = 1, \dots, m)$. Si $\ell_1, \dots, \ell_m$ sont K-linéairement indépendants, alors ils sont aussi algébriquement indépendants.*

On vérifie que $\log_{\mathrm{Car}}(T^{-1}), \dots, \log_{\mathrm{Car}}(T^{-(q-1)})$ sont K-linéairement indépendants. Donc ils sont algébriquement indépendants.

Pour montrer le théorème 3.1, Denis applique le théorème suivant qu'il démontre dans [**33, 34**], dont la preuve utilise un critère d'indépendance algébrique de Philippon [**57**]. Dans la suite, nous utiliserons les notions de fonction analytique, holomorphe, méromorphe (cf. [**44, 37**]).

THÉORÈME 3.2. — *Soit $L \subset \overline{K}$ une extension finie de K. On considère $f_1, \dots, f_m$ des fonctions holomorphes dans un domaine $|x| > r \geq 1$ à développement de Taylor dans $L((1/x))$. Supposons qu'il existe des éléments $a_i, b_i \in L(x)$ $(i = 1, \dots, m)$ tels que*

$$f_i(x) = a_i(x) f_i(x^q) + b_i(x), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Soit $x_0 \in L$, $|x_0| > r$ tel que, pour tout n, $x_0^{q^n}$ n'est zéro d'aucune des fonctions a_i et n'est pôle d'aucune des fonctions b_i.

Si les séries $f_1, \dots, f_m$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{K}(x)$, alors les nombres $f_1(x_0), \dots, f_m(x_0)$ sont algébriquement indépendants.

(3) Méthode inventée par Mahler, pour obtenir la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs en des nombres algébriques complexes de certaines fonctions solutions d'équations fonctionnelles. Pour avoir un exemple de ces fonctions, on peut penser aux séries $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{d^i}$ sur la boule unité de $\mathbb{C}$, $d > 1$ étant un entier, qui satisfont à $f(x^d) = f(x) - x$.

On considère le produit

$$z(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-Tx^{-q^i})^{-1},$$

qui converge pour $|x|>q^{1/q}$ vers une fonction holomorphe dans $K((1/x))$, se prolongeant à une fonction méromorphe pour $|x|>1$ avec pôles $T^{1/q},T^{1/q^2},\ldots$ (d'où la transcendance de cette fonction sur $\overline{K}(x)$). La formule (5) implique que $z(T)\in\overline{K}\overline{\pi}$. On a aussi l'équation fonctionnelle $z(x)=(1-Tx^{-q})^{-1}z(x^q)$. Le théorème 3.2 s'applique à z et nous donne la transcendance de $\overline{\pi}$.

Plus généralement, on considère les $\mathbb{F}_{q^r}[T]$-modules de Carlitz $\phi_{\mathrm{Car},r}:T\mapsto T\tau^0+\tau^r$ $(r\geq 1)$, dont on sait qu'une période fondamentale $\overline{\pi}_r$ se trouve dans $\overline{\mathbb{F}_{q^r}((1/T))}\subset\overline{K_\infty}$. On trouvera dans [**33**] le résultat suivant de Denis : les nombres $\overline{\pi}=\overline{\pi}_1,\overline{\pi}_2,\ldots$ sont algébriquement indépendants (l'indépendance algébrique de $\overline{\pi}$ et $\overline{\pi}_2$ peut se déduire du résultat de Thiéry [**68**]).

De même, en posant $\Pi(T)=T^{-q}\overline{\pi}(1/T)^{q-1}\in\mathbb{F}_q[[T]]$, notons pour tout $n\geq 0$, $\Pi_n(T)$ la n-ième dérivée divisée de $\Pi(T)$ par rapport à T ([4]). Allouche a posé la question de savoir si les nombres $(\Pi_n(T))_{n\geq 0}$ sont algébriquement indépendants (en d'autres termes, il demande si la série formelle $\Pi(T)$ est *hypertranscendante*). La question reste ouverte mais dans [**34**] Denis démontre l'indépendance algébrique de $\Pi(T)=\Pi_0(T),\ldots,\Pi_{p-1}(T)$.

3.1. Démonstration du théorème 3.1

Nous allons travailler sous l'hypothèse $q\neq 2$ pour simplifier en signalant que le cas $q=2$ est un peu différent, essentiellement par le fait que dans ce cas, $\overline{\pi}$ et $\log_{\mathrm{Car}}(1)$ sont l'un proportionnel à l'autre avec facteur de proportionnalité dans K, comme l'on vérifie facilement.

Soit $\beta\in K_\infty=\mathbb{F}_q((1/T))$. On peut écrire $\beta=\sum_{i\geq i_0}\frac{\beta_i}{T^i}$, $\beta_i\in\mathbb{F}_q$ et on note $\widetilde{\beta}(x)=\sum_{i\geq i_0}\frac{\beta_i}{x^i}\in\mathbb{F}_q((1/x))$.

On considère $\beta_1,\ldots,\beta_m$ comme dans l'énoncé du théorème 3.1. Ce sont en particulier des séries formelles dans $\mathbb{F}_q((1/T))$. Nous définissons les séries :

$$f_j(x)=\widetilde{\beta}_j(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\widetilde{\beta}_j(x)^{q^i}}{(x^q-T)\cdots(x^{q^i}-T)},\quad j=1,\ldots,m.$$

Ces séries, dans $K((1/x))$, définissent des fonctions holomorphes pour $|x|>q^{1/q}$ satisfaisant aux équations fonctionnelles :

$$f_j(x^q)=(T-x^q)(f_j(x)-\widetilde{\beta}_j(x)),$$

(4) Ces dérivées divisées sont définies par la formule $\Pi(T+T')=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi_n(T)T'^n$, T' étant une indéterminée indépendante de T.

qui se prolongent en fonctions méromorphes pour $|x| > 1$ avec une infinité de pôles (aux T^{1/q^i}) ; on en déduit que ce sont des fonctions transcendantes.

Observons de plus que :

$$f_j(T) = \beta_j + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \beta_j^{q^i}}{(T^q - T)\cdots(T^{q^i} - T)} = \log_{\mathrm{Car}} \beta_j = \ell_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Le hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites avec $x_0 = T$ et l'indépendance algébrique de $\ell_1, \ldots, \ell_m$ est prouvée si l'on montre l'indépendance algébrique sur $\overline{K}(x)$ des fonctions $f_1, \ldots, f_m$.

3.1.1. *Indépendance algébrique des fonctions f_i.*— Posons $U = \bigcup_{i \geq 0} \overline{K}(x^{1/p^i})$.

PROPOSITION 3.3. — *Si $f_1, \ldots, f_m$ sont algébriquement dépendantes, alors il existe des éléments $c_1, \ldots, c_m \in \overline{K}$ non tous nuls, $c(x) \in U$, tels que :*

$$c_1 f_1 + \cdots + c_m f_m = c(x).$$

Pour $m = 1$ nous avons déjà remarqué la transcendance des fonctions f_j (d'où la transcendance des logarithmes de Carlitz en question par le théorème 3.2). Nous pouvons donc supposer que $m \geq 2$, que tout sous-ensemble à $m - 1$ éléments de $\{f_1, \ldots, f_m\}$ est formé d'éléments algébriquement indépendants et que $f_1, \ldots, f_m$ sont algébriquement dépendantes. Dans ces circonstances, l'idéal $\mathcal{P}$ des polynômes dans $\mathcal{R} := U[X_1, \ldots, X_m]$ s'annulant en $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, non nul, est premier et principal.

Soit P un générateur de $\mathcal{P}$. On a :

$$\widetilde{P} := P'((T - x^q)(X_1 - \widetilde{\beta_1}(x)), \ldots, (T - x^q)(X_m - \widetilde{\beta_m}(x)) = QP \tag{7}$$

(P' étant le polynôme dans lequel on a substitué x par x^q) et $Q \in U$ est non nul. Si $F \in \mathcal{R}$ est non nul tel que $\widetilde{F}/F \in U$, alors $G = (\partial/\partial X_i)F$, si non nul, satisfait à $\widetilde{G}/G \in U$, et si $F = G^p$, alors on a aussi $\widetilde{G}/G \in U$. Ceci permet de construire un polynôme $G \in \mathcal{R}$ non nul tel que $\widetilde{G}/G \in U$, de la forme $G = A + B^p$, avec A un polynôme linéaire homogène non nul, et B un autre polynôme de $\mathcal{R}$.

Écrivons $A = c_1 X_1 + \cdots + c_m X_m$. Si $i \neq j$ sont deux indices tels que $c_i, c_j \neq 0$, alors puisque B est une puissance p-ième, on a $c_i(x^q)(T - x^q) = c_i(x)Q(x)$, $c_j(x^q)(T - x^q) = c_j(x)Q(x)$. Donc, en posant $r(x) = c_i(x)/c_j(x)$, $r(x^q) = r(x)$. Mais les seules solutions de cette équation fonctionnelle dans U sont les éléments de $\overline{K}$: donc $r(x) \in \overline{K}$.

Montrons que B ne dépend pas de $X_1, \ldots, X_m$. Soit $dX_1^{ps_1} \cdots X_m^{ps_m}$ un monôme de degré maximal non nul de B^p, avec $d \in U$. On a $d(x^q)(T - x^q)^{ps} = d(x)Q(x)$ avec $s = s_1 + \cdots + s_m \geq 1$. Soit i tel que $c_i \neq 0$. Posons cette fois-ci $r(x) = d(x)/c_i(x)$ qui vérifie l'équation fonctionnelle $r(x^q) = (T - x^q)^{1-ps} r(x)$. La seule solution dans U d'une équation fonctionnelle $r(x^q) = (T - x^q)^{s'} r(x)$ avec $s' \neq 0$ est la série nulle. Ici $s' = 1 - ps \neq 0$, donc $d = 0$ et $G = c_0 + \sum_{i=1}^{m} c_i X_i$ avec $c_0 \in U$ et $c_1, \ldots, c_m \in \overline{K}$.

Le degré $\deg c$ d'un élément c de $\bigcup_u \overline{K}((1/x^{1/p^u}))$ est bien défini dans $\bigcup_u \mathbb{Z}[p^{-u}] \cup \{-\infty\}$. Nous allons maintenant montrer que G s'annule en $(f_1, \dots, f_m)$. En revenant à (7) avec G au lieu de P nous trouvons, en comparant les termes de degré 0 en $X_1, \dots, X_m$, $Q = T - x^q$ et

$$c_0(x) = -\sum_{i=1}^{m} c_i \widetilde{\beta}_i(x) + c_0(x^q)/(T - x^q),$$

d'où l'on déduit que $\deg c_0 \leq q/(q-1)$ (on a $\deg \widetilde{\beta}_i < q/(q-1)$ pour tout i). Mais $\deg c_0 \in \mathbb{Z}[p^{-u}]$ pour un certain entier $u \geq 0$ car $c_0 \in U$. Si $q > 2$ on a donc $\deg c_0 < q/(q-1)$.

On déduit de l'égalité précédente pour c_0 que pour tout $s \geq 0$:

(8)
$$c_0(x) = -\sum_{i=1}^{m} c_i \left(\widetilde{\beta}_i(x) + \sum_{j=1}^{s} \frac{(-1)^j \widetilde{\beta}_i(x^{q^j})}{(x^q - T) \cdots (x^{q^j} - T)} \right) + \frac{(-1)^{s+1} c_0(x^{q^{s+1}})}{(x^q - T) \cdots (x^{q^{s+1}} - T)}.$$

On montre, en utilisant l'inégalité $\deg c_0 < q/(q-1)$, que pour $s \to \infty$ la suite de fonctions $c_0(x^{q^{s+1}})/((T - x^q) \cdots (T - x^{q^{s+1}}))$ converge uniformément vers la fonction nulle sur le domaine $\{x \in C, |x| > q^{1/q}\}$ et on en déduit que G s'annule en $(f_1, \dots, f_m)$. Cela montre la proposition 3.3.

En posant $x = T$ dans cette relation, nous obtenons une relation de dépendance $\overline{K}$-linéaire non triviale pour $1, \ell_1, \dots, \ell_m$ qui peut être traitée avec le théorème 2.6. Mais on peut conclure également avec le théorème 2.2.

Il existe $f \geq 0$ minimal tel que les puissances p^f-ièmes de $c_1, \dots, c_m$ sont définies sur une extension finie L de K contenue dans la clôture séparable K^{sep} de K. La trace $L \to K$ se prolonge en $L((1/x)) \to K((1/x))$; son image n'est pas nulle. On parvient donc en multipliant par un élément non nul de A et en calculant une trace, à une relation de dépendance linéaire non triviale

$$b_1 f_1^{p^f} + \cdots + b_m f_m^{p^f} = b(x)$$

avec $b_1, \dots, b_m \in A$ et $b(x) \in U$. Parmi toutes ces relations, celle qui a degré minimal en T montre que $f = 0$ (sinon, on dérive par rapport à T pour en trouver une de degré encore plus petit, puisque $dg^{p^f}/dT = 0$ si $f > 0$). On en déduit que $b(x) \in \overline{K}(x)$.

En posant $x = T$, on parvient à la relation de dépendance linéaire non triviale $b_1 \ell_1 + \cdots + b_m \ell_m = b = b(T)$ avec $b \in \overline{K}$. L'exponentielle e_{Car} du membre de gauche est algébrique. En particulier, $e_{\mathrm{Car}}(b)$ est algébrique, et $b = 0$ d'après le théorème 2.2.

Remarque 3.4. — Un atout potentiel de l'approche de Denis est la possibilité d'obtenir des mesures de transcendance et d'indépendance algébrique car ce genre d'information est souvent produite en méthode de Mahler classique (i.e. sur $\mathbb{C}$).

4. INDÉPENDANCE ALGÉBRIQUE D'APRÈS ANDERSON, BROWNAWELL, PAPANIKOLAS

Dans la suite de ce texte, je présente une autre approche à l'indépendance linéaire et à l'indépendance algébrique, suggérée par la notion de *t-motif*, avec deux résultats clés. Un critère d'indépendance linéaire pour certaines valeurs de solutions de systèmes linéaires aux *σ-différences* dû à Anderson, Brownawell et Papanikolas (inspiré du théorème de Siegel et Shidlovski) [**5**], et un théorème de Papanikolas qui donne des informations cruciales sur les *groupes de Galois* aux σ-différences des systèmes linéaires aux σ-différences *provenant* des t-motifs [**54**].

Ces deux résultats permettent à Papanikolas [**54**] d'en déduire une variante de la *conjecture des périodes* de Grothendieck pour les t-motifs, dont il déduit le théorème suivant, qui implique le théorème 3.1.

THÉORÈME 4.1. — *Soient $\ell_1, \dots, \ell_m \in C$ tels que $e_{\mathrm{Car}}(\ell_i) \in \overline{K}$ $(i = 1, \dots, m)$. Si $\ell_1, \dots, \ell_m$ sont linéairement indépendants sur K, alors ils sont aussi algébriquement indépendants.*

On se propose d'esquisser les idées générales et les outils derrière la preuve du théorème 4.1.

4.1. Arithmétique de valeurs de solutions de systèmes aux σ-différences

Si $f = \sum_i c_i t^i \in L[[t]]$ avec $L = \overline{K}, \overline{K_\infty}, C$ et si $m \in \mathbb{Z}$, alors on pose

$$f^{(m)} := \sum_i c_i^{q^m} t^i \in L[[t]].$$

On étend ces opérateurs aux matrices à coefficients dans $L[[t]]$ en les faisant agir sur les coefficients.

Notons $\mathbb{T}$ le sous-anneau des séries formelles $\sum_i c_i t^i \in \overline{K_\infty}[[t]]$ telles que $|c_i| \to 0$ (qui convergent donc pour $|t| \leq 1$) ; $f \mapsto f^{(1)}$ et $f \mapsto f^{(-1)}$ en sont deux automorphismes. On sait que $\mathbb{T}$ est un anneau principal avec idéaux maximaux de la forme $(t - a)$, $a \in C$ et $|a| \leq 1$ (cela résulte d'une variante appropriée du théorème de préparation de Weierstrass) ; on déduit de cette propriété que le sous-corps des éléments f de $\mathbf{Frac}(\mathbb{T})$ tels que $f^{(-1)} = f$ est égal à $\mathbb{F}_q(t)$, notre *corps des constantes* pour les équations linéaires aux σ-différences.

4.1.1. — Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{T}$ l'anneau des séries formelles $f(t) = \sum_n c_n t^n \in \overline{K}[[t]]$ *strictement entières*, c'est-à-dire de rayon de convergence infini, telles que

$$[K_\infty(c_0, c_1, c_2, \dots) : K_\infty] < \infty,$$

de telle sorte que, si $t_0 \in \overline{K_\infty}$, alors $f(t_0) \in \overline{K_\infty}$ et $f : \overline{K_\infty} \to \overline{K_\infty}$ est surjective. Les applications τ, σ induisent des automorphismes de $\mathcal{E}$.

Anderson, Brownawell et Papanikolas démontrent [**5**, théorème 3.1.1] le critère d'indépendance linéaire suivant :

THÉORÈME 4.2. — *On considère une matrice* $\Phi \in \mathbf{Mat}_{l\times l}(\overline{K}[t])$ *telle que* $\det \Phi = c(t-T)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et* $c \in \overline{K}\setminus\{0\}$. *Soit* $\psi = \psi(t) \in \mathbf{Mat}_{l\times 1}(\mathcal{E})$ *une solution du système*

$$\psi^{(-1)} = \Phi\psi.$$

Soit $\rho \in \mathbf{Mat}_{1\times l}(\overline{K})$ *tel que* $\rho\psi(T) = 0$. *Alors il existe* $P = P(t) \in \mathbf{Mat}_{1\times l}(\overline{K}[t])$ *tel que* $P(T) = \rho$ *et* $P\psi = 0$.

Ce résultat affirme que les relations de dépendance $\overline{K}$-linéaire des valeurs en T des fonctions coordonnées de la matrice colonne ψ proviennent toujours de relations de dépendance $\overline{K}(t)$-linéaire des fonctions elles-mêmes, via la spécialisation $t = T$. On peut montrer [**5**] que si $\Phi(0)$ est inversible, alors $\psi \in \mathbf{Mat}_{l\times 1}(\mathbb{T})$ si et seulement si $\psi \in \mathbf{Mat}_{l\times 1}(\mathcal{E})$.

La preuve du théorème 4.2 est décrite dans [**5**] ; elle le rapproche du théorème de Siegel-Shidlovski. Soit N un entier assez grand divisible par $2l$. On construit par le biais d'un analogue du lemme de Thue et Siegel un élément non nul $h \in \mathbf{Mat}_{1\times l}(\overline{K}[t])$ satisfaisant aux propriétés (i), (ii), (iii) suivantes : (i) les degrés de ses coefficients $h_1, \ldots, h_l$ en t sont $< (1 - 1/2l)N$; (ii) pour tout i et tout coefficient c du polynôme h_i, la *taille* $\|c\|$ (définie comme le maximum des valeurs absolues des conjugués de c dans $\overline{K}$ sur K) est majorée par une constante indépendante de N ; (iii) la fonction $E := h\psi$, strictement entière, satisfait à $E(T^{q^{-(N+s)}}) = 0$ pour $s = 0, \ldots, N-1$. Alors E satisfait à une équation aux σ-différences linéaire d'ordre $\leq l$ à coefficients algébriques. Le point important de la preuve est que l'on montre $E = 0$ pour N assez grand. Pour prouver cette propriété, on suppose le contraire et on étudie le coefficient directeur du développement d'Euler–Mc Laurin de E, qui est dans $\overline{K}\setminus\{0\}$ et on parvient à une contradiction pour N grand, grâce à l'équation aux σ-différences mentionnée ci-dessus et en comparant des estimations provenant de l'inégalité de Liouville et de la formule de Schwarz-Jensen pour les fonctions de $\mathcal{E}$ dans des boules de rayon $|T| = q$. Il n'est pas difficile alors de montrer que ρ est proportionnel à $h(T)$ avec facteur de proportionnalité dans K.

Le théorème 4.2 est bien un critère d'indépendance algébrique, comme le théorème suivant le montre :

THÉORÈME 4.3. — *Sous les hypothèses du théorème* 4.2, *notons* $\psi_1, \ldots, \psi_l$ *les coordonnées de* ψ *et supposons-les algébriquement indépendantes sur* $\overline{K}(t)$. *Alors les nombres* $\psi_1(T), \ldots, \psi_l(T) \in \overline{K}_\infty$ *sont algébriquement indépendants sur* $\overline{K}$.

Admettons par l'absurde le contraire et supposons qu'il existe une relation de dépendance algébrique non triviale de degré $\leq d$ entre $\psi_1(T), \ldots, \psi_l(T)$.

On construit une matrice carrée diagonale par blocs $\widetilde{\Phi}$ à coefficients dans $\overline{K}[t]$:

$$\widetilde{\Phi} = 1 \oplus \Phi \oplus \mathrm{Sym}^2(\Phi) \oplus \cdots \mathrm{Sym}^d(\Phi)$$

(les symboles $\oplus$ définissent des matrices diagonales par blocs de la manière standard et les symboles Sym^s désignent des puissances symétriques de matrices). Clairement, $\det \widetilde{\Phi}$ est proportionnel à une puissance de $t - T$. Ordonnons les monômes unitaires de degré $= 0, \ldots, d$ en $\psi_1(t), \ldots, \psi_l(t)$ afin de construire une matrice colonne $\widetilde{\psi}$ à coefficients dans $\mathcal{E}$ en compatibilité avec la construction de $\widetilde{\Phi}$. Alors $\widetilde{\psi}^{(-1)} = \widetilde{\Phi}\widetilde{\psi}$.

Le théorème 4.2 fournit une relation de dépendance linéaire non triviale à coefficients dans $\overline{K}(t)$ entre les coefficients de $\widetilde{\psi}$, c'est-à-dire une relation de dépendance algébrique non triviale de degré $\leq d$ pour $\psi_1, \ldots, \psi_l$; contradiction.

4.2. Interpolation des périodes

4.2.1. — Le critère d'indépendance linéaire mentionné plus haut est suggéré par la notion de t-motif dual dû à Anderson [**4**] qui a introduit les fonctions interpolant les périodes que nous allons décrire ci-dessous. Suivant [**5**], un t-motif dual est un $\overline{K}[\sigma, t]$-module M qui est libre de rang fini sur $\overline{K}[t]$ et sur $\overline{K}[\sigma]$ tel que, pour tout n assez grand, on ait la propriété suivante. Si $m \in M$, alors $(t-T)^n m$ est dans σM (i.e. $(t-T)^n(M/\sigma M) = 0$). À tout t-module abélien $G = (\mathbb{G}_a^l, \phi)$ nous avons déjà associé le t-motif dual $M^*(G)$. Si M est un t-motif dual, alors on vérifie [**4**] que le quotient de M par le sous-$\overline{K}[t, \sigma]$-module engendré par les éléments de la forme $\sigma m - m$ avec $m \in M$ est muni d'une action de A qui l'identifie à un t-module abélien. Si M est le t-motif dual associé à un t-module abélien, alors le t-module ainsi obtenu est isomorphe au t-module d'origine. Ce type de relation apparaît déjà dans l'article de Mumford [**53**] (voir aussi l'article de Reversat et van der Put [**60**]).

Soit M un t-motif dual. On dit qu'il est *rigide analytiquement trivial*, ou plus simplement *analytiquement trivial* si, étant donnée une base $b = (b_1, \ldots, b_l) \in \mathbf{Mat}_{l\times 1}(M)$ de M comme $\overline{K}[t]$-module, de telle sorte que $\sigma b = \Phi b$ pour une matrice $\Phi \in \mathbf{Mat}_{l\times l}(\overline{K}[t])$ de déterminant $c(t-T)^n$, il existe aussi une matrice $\Psi \in \mathbf{GL}_l(\mathbb{T})$ telle que $\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$. Anderson a démontré [**4**] que si G est un t-module abélien, alors il est uniformisable si et seulement si $M^*(G)$ est analytiquement trivial. De plus, la catégorie des t-modules abéliens uniformisables est équivalente à la catégorie des t-motifs duaux analytiquement triviaux via le foncteur $G \mapsto M^*(G)$.

4.2.2. — Montrons comment on construit des trivialisations analytiques pour les t-motifs duaux associés aux modules de Drinfeld. On considère un module de Drinfeld de rang n :

$$\phi : T \mapsto T\tau^0 + l_1\tau + \cdots + l_n\tau^n,$$

de fonction exponentielle

$$e_\phi(z) = \sum_i \alpha_i z^{q^i}.$$

On vérifie que les zéros de e_ϕ (périodes de ϕ) sont dans $\overline{K_\infty}$.

Soit u un élément de $\overline{K_\infty}$; posons :

$$s_u(t) := \sum_{i=0}^{\infty} e_\phi\left(\frac{u}{T^{i+1}}\right) t^i.$$

On vérifie facilement que $s_u(t) \in \mathbb{T}$. Formellement, on a le développement :

$$s_u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha_i u^{q^i}}{T^{q^i} - t},$$

donc $s_u(t)$ est méromorphe sur C avec pôles simples en $T, T^q, \ldots$ de résidus $-u, -\alpha_1 u^q, \ldots$ et $s_u(t) \in \overline{K_\infty}[[t]]$. En particulier, $s_u(t) - u/(T-t)$ se prolonge en une fonction holomorphe pour $|t| < q^q$.

Si t est dans le domaine de convergence de toutes les séries, alors :

$$l_1 s_u^{(1)}(t) + \cdots + l_n s_u^{(n)}(t) = (\phi(T) - T) s_u(t) \tag{9}$$

($\phi(T)$ agit sur les coefficients).

En particulier $\phi(T) e_\phi(u/T^{i+1}) = e_\phi(u/T^i)$ et on trouve aussi

$$\phi(T) s_u(t) = e_\phi(u) + t s_u(t).$$

Donc, d'après (9),

$$l_1 s_u^{(1)}(t) + \cdots + l_n s_u^{(n)}(t) = (t - T) s_u(t) + e_\phi(u). \tag{10}$$

La série $s_u^{(m)}(t)$ converge pour $|t| < q^{q^m}$. Le résidu de s_u en $t = T$ est $-u$. On en déduit que le terme de gauche dans (10) est bien défini en $t = T$ et

$$l_1 s_u^{(1)}(T) + \cdots + l_n s_u^{(n)}(T) = e_\phi(u) - u. \tag{11}$$

Supposons que u soit de plus une période de ϕ. De (10) on déduit l'équation linéaire aux τ-différences :

$$l_1 s_u^{(1)}(t) + \cdots + l_n s_u^{(n)}(t) = (t - T) s_u(t), \tag{12}$$

tandis que de (11) on déduit la formule d'interpolation :

$$l_1 s_u^{(1)}(T) + \cdots + l_n s_u^{(n)}(T) = -u. \tag{13}$$

Si u_1, u_2 sont deux périodes et $a_1(T), a_2(T)$ deux éléments de A, alors

$$s_{a_1 u_1 + a_2 u_2} = a_1(t) s_{u_1} + a_2(t) s_{u_2}.$$

4.2.3. *Équations linéaires aux σ-différences.* — Pour continuer, nous supposons par commodité que $\mathbf{End}(\phi) = A$. Soit Λ le réseau des périodes de ϕ ; écrivons $\Lambda = Au_1 + \cdots + Au_n$. Pour $i = 1, \ldots, n$, posons $s_i = s_{u_i}$.

Posons maintenant

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (t-T)/l_n & -l_1/l_n & \cdots & -l_{n-1}/l_n \end{pmatrix}, \widehat{\Psi} = \begin{pmatrix} s_1^{(0)} & s_2^{(0)} & \cdots & s_n^{(0)} \\ s_1^{(1)} & s_2^{(1)} & \cdots & s_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_1^{(n-1)} & s_2^{(n-1)} & \cdots & s_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Une adaptation à notre cas de figure du lemme du wronskien ou une application des déterminants de Moore (voir [**40**]) assure que $\widehat{\Psi}$ est inversible ; en fait, pour tout $t_0 \in C$ tel que $|t_0| < 1$, $\det(\widehat{\Psi}(t_0)) \neq 0$ et on peut trouver $\lambda \in \mathbb{F}_q(t)$ tel que $\lambda\widehat{\Psi}(t_0)$ soit inversible pour tout t_0 tel que $|t_0| \leq 1$. On a clairement $(\lambda\widehat{\Psi})^{(1)} = \Theta\lambda\widehat{\Psi}$; soit Ψ la transposée de $(\lambda\widehat{\Psi}^{(1)})^{-1}$. Les coefficients de Ψ sont dans $\mathbb{T}$ et

$$\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi, \tag{14}$$

où Φ est la transposée de Θ, de déterminant $(-1)^{n+1}(t-T)/l_n$. De plus, $\Psi(T)$ est bien définie. On vérifie que nous avons construit une trivialisation analytique du t-motif dual $M^*(\phi)$.

4.2.4. — Dans [**43**], on peut trouver une discussion approfondie sur les bonnes notions des cohomologies de de Rham et Betti d'un t-module, d'après Anderson, Deligne, Gekeler, Jing Yu. Les *quasi-périodes* d'un t-module peuvent être définies car on dispose aussi d'un substitut de l'intégration sur les cycles (cet aspect a été développé par Gekeler pour les modules de Drinfeld [**39, 38**], grâce au formalisme des bi-dérivations de Jing Yu).

Pour notre module de Drinfeld ϕ ci-dessus, la matrice $n \times n$ des périodes et quasi-périodes se construit, tenant compte du travail et des notations de Gekeler (ou de Anderson), tout simplement à partir de la matrice $\widehat{\Psi}(T)$ de la manière suivante. La première ligne est donnée par les périodes choisies $(u_1, \ldots, u_n)$ (résidus de $-s_1, \ldots, -s_n$ en T) ; reste à donner les $n-1$ autres lignes

$$\left(\int_{u_1} \eta_k, \ldots, \int_{u_n} \eta_k\right) := \sum_{i=0}^{\infty} T^i \left(e_\phi\left(\frac{u_1}{T^{i+1}}\right)^{q^k}, \ldots, e_\phi\left(\frac{u_n}{T^{i+1}}\right)^{q^k}\right), \quad k = 1, \ldots, n-1$$

avec η_k *bidérivation* associant T à τ^k. Ces lignes sont les lignes de $\widehat{\Psi}(T)$, de la deuxième à la dernière. En particulier, pour ϕ de rang 2, la deuxième ligne de la matrice $\widehat{\Psi}(T)$ est la matrice ligne (η_1, η_2), η_1, η_2 étant les quasi-périodes associées à u_1, u_2 (comme dans [**39**]). La non-nullité du déterminant de $\Psi(T)$, que nous avons justifiée plus haut grâce au système aux σ-différences, peut se démontrer en suivant Gekeler, en reliant ce déterminant à une forme modulaire parabolique pour $\mathbf{GL}_2(A)$ non nulle sur $C \setminus K_\infty$ (analogue de la forme de poids 12 de Jacobi). L'étude du facteur de proportionnalité permet alors de démontrer l'analogue de la relation de Legendre pour les modules de Drinfeld de rang 2 (où $\mu \in \overline{K}^{\times}$) :

$$u_1\eta_2 - u_2\eta_1 = \mu\overline{\pi}. \tag{15}$$

4.2.5. — Dans le cas $\phi = \phi_{\mathrm{Car}}$ du module de Carlitz, on peut prendre $u = \overline{\pi}$:

$$s_u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\overline{\pi}^{q^i}}{[i][i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}}[0]^{q^i}(T^{q^i} - t)}$$

et on trouve $s_u^{(1)}(T) = -\overline{\pi}$. On a aussi $(t-T)s_u(t) = s_u^{(1)}(t)$. Posons $\Omega(t) := (s_u^{(1)}(t))^{-1}$. On vérifie que cette fonction est strictement entière non constante ; elle s'annule en $T^q, T^{q^2}, \ldots$ donc elle est transcendante. On montre qu'on peut choisir $(-T)^{1/(q-1)}$ de telle sorte que

$$\Omega(t) = (-T)^{-q/(q-1)} \prod_{i=1}^{\infty}(1 - t/T^{q^i}),$$

produit convergeant pour tout t. De plus, Ω satisfait à l'équation aux σ-différences :

$$\Omega^{(-1)} = (t-T)\Omega, \tag{16}$$

et on démontre que le $\mathbb{F}_q(t)$-espace vectoriel engendré par les solutions de cette équation qui sont dans $\mathbf{Frac}(\mathbb{T})$ est de dimension 1. Clairement $\Omega(T) = -1/\overline{\pi}$, d'où l'on déduit la formule (5) dont nous avions promis une preuve. Comme $\Omega \in \mathcal{E}$, on en déduit, en appliquant le théorème 4.3, la transcendance de $\overline{\pi}$.

Revenons au cas d'un module de Drinfeld ϕ quelconque. L'étude de la fonction Ω ci-dessus nous permet d'obtenir un analogue de la formule de Legendre pour ϕ. On revient à la matrice Ψ du sous-paragraphe 4.2.3 ; on sait que $\widetilde{\Delta} := \det(\Psi) \in \mathbf{Frac}(\mathbb{T})$ satisfait à $\widetilde{\Delta}^{(-1)} = (-1)^{n+1}((t-T)/l_n)\widetilde{\Delta}$ et est bien définie en T. En choisissant un élément $d \in \overline{K}$ tel que $d/d^{(-1)} = (-1)^{n+1}/l_n$, on voit que la fonction $\Delta = d\widetilde{\Delta}$ satisfait à $\Delta^{(-1)} = (t-T)\Delta$, donc $\Delta \in \mathbb{F}_q(t)^{\times}\Omega$ et on trouve $\det(\Psi(T)) \in \overline{K}^{\times}\overline{\pi}^{-1}$.

4.3. Autour de la conjecture de Grothendieck, en suivant Papanikolas

La conjecture des périodes de Grothendieck interprète le degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$ du sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{Q}$ et les périodes d'une variété projective lisse V définie sur un corps de nombres (ou d'un *motif* défini sur un corps de nombres) : cette conjecture affirme que ce degré est égal à la dimension du *groupe de Galois motivique* associé à V. Pour cette conjecture, pour des généralisations, et pour le lien avec les conjectures classiques citées dans l'introduction, voir le livre d'André [**7**]. Dans ce paragraphe, nous décrirons un résultat fondamental de Papanikolas [**54**], où il démontre une variante de la conjecture de Grothendieck pour les t-motifs duaux analytiquement triviaux.

On considère un t-motif dual analytiquement trivial M avec trivialisation analytique associée $\Psi = (\psi_{i,j})_{i,j} \in \mathbf{Mat}_{l\times l}(\mathbb{T})$. Le corps $\overline{K}(t, \psi_{i,j}(t))$ engendré par t et les coefficients $\psi_{i,j}$ de la matrice Ψ est stable sous l'action de $f \mapsto f^{(-1)}$ car il existe $\Phi \in \mathbf{Mat}_{l\times l}(\overline{K}(t))$ avec $\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$. Soit Γ le groupe des automorphismes $\overline{K}(t)$-linéaires qui commutent à l'action de $f \mapsto f^{(-1)}$ sur $\overline{K}(t, \psi_{i,j}(t))$.

Le théorème fondamental de Papanikolas dans [**54**] est le suivant.

THÉORÈME 4.4. — *Le groupe Γ est l'ensemble des points $\mathbb{F}_q(t)$-rationnels d'un sous-schéma en groupes réduit G_M de $\mathbf{GL}_l$ défini sur $\mathbb{F}_q(t)$. De plus, le degré de transcendance de $\overline{K}(t, \psi_{i,j}(t))$ sur $\overline{K}(t)$ est égal à la dimension de G_M sur $\mathbb{F}_q(t)$.*

Expliquons comment Papanikolas construit G_M. Un morphisme de t-motifs duaux est un morphisme de $\overline{K}[t,\sigma]$-modules. Les t-motifs duaux forment donc une catégorie. On peut faire plusieurs opérations sur les t-motifs duaux qui enrichissent la structure de cette catégorie. Par exemple, Anderson a démontré que le produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ de deux t-motifs duaux est défini comme étant $M_1 \otimes_{\overline{K}[t]} M_2$ avec action diagonale de σ. Ceci est un t-motif dual et si à l'origine M_1, M_2 sont analytiquement triviaux, il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$. Papanikolas [**54**] démontre qu'une certaine catégorie contenant les t-motifs duaux analytiquement triviaux (à isogénie près et avec les opérations proprement définies de produit tensoriel, somme directe, et en ajoutant les duaux...) est une catégorie tannakienne neutre $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{F}_q(t)$, notre corps de constantes. On appelle les objets de cette catégorie t-motifs duaux, même si c'est un abus de langage puisqu'en général, le dual d'un t-motif dual n'est pas un t-motif dual au sens d'Anderson [(5)].

Par le formalisme usuel des catégories tannakiennes, on associe à tout t-motif dual analytiquement trivial M (avec trivialisation analytique $\Psi \in \mathbf{Mat}_{l\times l}(\mathbb{T})$) une sous-catégorie $\mathcal{T}_M$ de $\mathcal{T}$. Par équivalence tannakienne, $\mathcal{T}_M$ est équivalente à la catégorie des représentations sur $\mathbb{F}_q(t)$ d'un sous-schéma en groupes G_M défini sur $\mathbb{F}_q(t)$ d'un groupe algébrique linéaire, le *groupe de Galois de M*. Le fait que G_M soit réduit est l'un des aspects intéressants du travail de Papanikolas.

En joignant le théorème 4.4 au théorème 4.2, Papanikolas obtient :

THÉORÈME 4.5. — *Le degré de transcendance du corps $\overline{K}(\psi_{i,j}(T))$ est égal à la dimension de G_M sur $\mathbb{F}_q(t)$.*

Pour $M = M^*(\phi_{\mathrm{Car}})$, on a $G_M = \mathbb{G}_m$ qui est le seul sous-groupe algébrique de dimension 1 de $\mathbb{G}_m$ (ceci est équivalent à la transcendance de Ω sur $\overline{K}(t)$, et à la transcendance de $\overline{\pi}$). En d'autres termes, $\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q(t))$ est le groupe de Galois de l'extension

(5) L'élément neutre de la catégorie, noté 1, est égal à $\overline{K}[t]$ avec $\sigma f = f^{(-1)}$ pour $f \in \overline{K}[t]$. Il est donc de rang infini sur $\overline{K}[\sigma]$ et n'est pas un t-motif dual au sens d'Anderson. Noter que $\mathbf{End}(1) = \mathbb{F}_q(t)$. En d'autres termes, les seules solutions dans $\mathbf{Frac}(\mathbb{T})$ de $f^{(-1)} = f$ sont les éléments de $\mathbb{F}_q(t)$.

de « σ-Picard-Vessiot » $\overline{K}(t) \subset \overline{K}(t,\Omega)$. Grâce à (16), on voit que le groupe $\mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q(t))$ agit sur le $\mathbb{F}_q(t)$-espace vectoriel engendré par $1/\Omega$ par multiplication.

4.3.1. — Voici une esquisse de l'utilisation des théorèmes 4.2, 4.4 pour déduire le théorème 4.1. On considère des nombres $\beta_1,\ldots,\beta_m \in \overline{K}^\times$ et on suppose que $|\beta_i| < q^{q/(q-1)}$ pour tout i. On écrit $\ell_0 = \overline{\pi}$ et $\ell_i = \log_{\mathrm{Car}} \beta_i$ et on suppose que $\ell_0,\ldots,\ell_m$ sont K-linéairement indépendants. On va démontrer qu'ils sont aussi algébriquement indépendants (on peut vérifier que ceci implique le théorème 4.1).

Pour $\beta \in \overline{K} \setminus \{0\}$ tel que $|\beta| < q^{q/(q-1)}$, nous posons, suivant Papanikolas dans [**54**] :

$$L_\beta(t) := \beta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \beta^{q^i}}{(T^q - t)(T^{q^2} - t)\cdots(T^{q^i} - t)}.$$

Cette série formelle converge pour tout $t \in C$ tel que $|t| < q^q$ et $L_\beta \in \mathbb{T}$. On vérifie, en utilisant les formules (6), que

$$L_\beta(T) = \log_{\mathrm{Car}}(\beta). \tag{17}$$

De plus, nous avons l'équation aux σ-différences $L_\beta^{(-1)} = \beta^{(-1)} + \frac{L_\beta}{t-T}$. On pose $L_i(z) = L_{\beta_i}(z)$ $(i = 1,\ldots,m)$. On pose aussi $L_0 = -\Omega^{-1}$. On a les équations aux σ-différences

$$L_0^{(-1)} = \frac{L_0}{t-T}, \quad L_i^{(-1)} = \beta_i^{(-1)} + \frac{L_i}{t-T}, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{18}$$
$$L_i(T) = \ell_i, \quad i = 0,\ldots,m.$$

Une remarque très utile dans la suite est que, pour tout $i = 0,\ldots,m$ et pour tout $j \geq 1$, L_i a un pôle simple en T^{q^j} de résidu $(\log_{\mathrm{Car}} \beta)^{q^j}/([j-1]^q[j-2]^{q^2}\cdots[1]^{q^{j-1}}[0]^{q^j})$.

Posons, toujours en suivant Papanikolas :

$$\Phi = \begin{pmatrix} t-T & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1^{(-1)}(t-T) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_m^{(-1)}(t-T) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{(m+1)\times(m+1)}(\overline{K}[t]),$$

et

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Omega & 0 & \cdots & 0 \\ \Omega L_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Omega L_m & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{(m+1)\times(m+1)}(\mathcal{E}).$$

On peut montrer que ces données déterminent, grâce à (18), une trivialisation analytique d'un t-motif dual M, extension de la somme directe de m copies du t-motif dual trivial 1 par $M^*(\phi_{\mathrm{Car}})$ (noter que M n'est pas un t-motif au sens d'Anderson car il est de rang infini sur $\overline{K}[\sigma]$).

On a la proposition suivante.

PROPOSITION 4.6. — *Si les fonctions $L_0, L_1, \dots, L_m$ sont algébriquement dépendantes sur $\overline{K}(t)$, alors il existe des éléments $c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}_q(t)$ non tous nuls, $c \in \overline{K}(t)$, tels que :*

$$c_0 L_0 + c_1 L_1 + \cdots + c_m L_m = c.$$

Si $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$ sont algébriquement dépendants sur $\overline{K}$, le théorème 4.3 implique que les fonctions $L_0, \dots, L_m$ sont algébriquement dépendantes et la proposition nous donne une relation linéaire non triviale. Dans cette relation, $c(t)$ est rationnelle et ne peut pas avoir une infinité de pôles. Ainsi $\sum_i c_i L_i$ est holomorphe et en se souvenant de la description des résidus aux pôles des L_i, nous en déduisons une relation de dépendance K-linéaire entre $\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m$.

Dans [**54**], Papanikolas démontre la proposition 4.6 en calculant explicitement le groupe de Galois G_M de M. En utilisant l'existence d'une surjection $G_M \to \mathbb{G}_m$, Papanikolas obtient l'inclusion :

$$G_M \subseteq \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & I_m \end{pmatrix} \subset \mathbf{GL}_{m+1},$$

avec égalité si et seulement si $L_0, \dots, L_m$ sont algébriquement indépendantes sur $\overline{K}(t)$.

4.3.2. — On peut montrer la proposition 4.6 directement, en suivant un parcours tout à fait similaire à celui que nous avons suivi dans le paragraphe 3.1. En supposant le degré de transcendance de $\overline{K}(t)(L_0, \dots, L_m)$ sur $\overline{K}(t)$ égal à m, on peut construire un élément $c \in U := \bigcup_{n \geq 0} \overline{K}(t^{1/p^n})$ et des éléments $c_0, c_1, \dots, c_m \in \mathbb{F}_q(t)$ de telle sorte que $A := c + \sum_{i=0}^m c_i X_i$ satisfait à $\widetilde{A} = RA$ avec $R \in U$ et

$$\widetilde{A} := c^{(-1)} + c_0 (t-T)^{-1} X_0 + \sum_{i \geq 1} c_i (\beta_i^{(-1)} + (t-T)^{-1} X_i).$$

En étudiant les identités fonctionnelles obtenues pour $X_0 = \cdots = X_m = 0$ et en observant que le supremum $\|c\|$ des valeurs absolues des coefficients de c est $\leq q^{q/(q-1)}$, on démontre que A s'annule en $(L_0, \dots, L_m)$. Seule difficulté heureusement surmontable, le cas où $\|c\| = q^{q/(q-1)}$ (qui correspond par ailleurs à la difficulté supplémentaire dans le paragraphe 3.1 que nous avons évitée en y supposant $q > 2$).

Revenant à la méthode de Papanikolas, on peut voir le calcul du groupe G_M ci-dessus (et donc la proposition 4.6) comme un analogue de la théorie de Kummer (voir [**12**] dans le cadre différentiel). Notant que ce calcul se ramène à celui de son radical unipotent, Charlotte Hardouin en a obtenu la version plus générale suivante, qui pourrait être aussi utilisée pour obtenir d'autres applications du théorème 4.4.

On revient à notre catégorie tannakienne $\mathcal{T}$ et on note ω le foncteur de trivialisation analytique $\omega : \mathcal{T} \to \mathbf{Vect}(\mathbb{F}_q(t))$, $\mathbf{Vect}(\mathbb{F}_q(t))$ étant la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{F}_q(t)$. On a alors [**46**] :

THÉORÈME 4.7. — *Soit Y un objet de $\mathcal{T}$ de groupe de Galois isomorphe à $\mathbb{G}_m$; supposons que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur $\omega(Y)$ soit donnée par le caractère canonique ; soit R l'anneau des endomorphismes de Y et $M_1, \ldots, M_m$ des extensions de 1 par Y qui soient R-linéairement indépendantes dans $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{T}}(1, Y)$. Alors le radical unipotent du groupe de Galois de $M_1 \oplus \cdots \oplus M_m$ est isomorphe à $\omega(Y)^m$.*

Pour tout $i \geq 1$, soit M_i le t-motif extension de 1 par $M^*(\phi_{\mathrm{Car}})$ qui admet pour trivialisation analytique
$$\begin{pmatrix} \Omega & 0 \\ \Omega L_i & 1 \end{pmatrix},$$
de telle sorte que $G_M = G_{M_1 \oplus \cdots \oplus M_m}$. Le théorème 4.7 implique que la dimension de G_M, égale à la dimension de $G_{M_1 \oplus \cdots \oplus M_m}$, est aussi égale à $1 + n$ où n est la dimension du $\mathbb{F}_q(t)$-espace vectoriel engendré par $M_1, \ldots, M_m$ dans $\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{T}}(1, Y)$ et $Y = M^*(\phi_{\mathrm{Car}})$.

On vérifie que n est aussi le plus grand entier s tel qu'aucune équation aux σ-différences
$$(19) \qquad (t - T) f^{(-1)} - f = (t - T) \sum_{i=1}^{s} \mu_i \beta_i^{(-1)}, \quad \mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{F}_q(t) \quad \text{non tous nuls}$$
n'ait de solution $f \in \overline{K}(t)$ (pour un calcul analogue dans le cas des équations aux q-différences, voir [**47**]).

Pour un tel choix de $s = n$, considérons, suivant [**54**], une solution f de (19) dans $\overline{K}(t)$. Les arguments déjà décrits montrent que f est analytique en $t = T$. Il s'ensuit que $f(T) = 0$. On suppose que $\ell_0, \ldots, \ell_m$ sont K-linéairement indépendants. Observons que les solutions de (19) sont de la forme :
$$f = \mu L_0 + \sum_{i=1}^{s} \mu_i L_i, \quad \mu \in \mathbb{F}_q(t).$$
En posant $t = T$ et si $n < m$, on trouve une relation de dépendance K-linéaire entre $\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_s$, ce qui implique une contradiction. Ainsi, $n = m$, d'où le théorème 4.1.

4.3.3. — La connaissance explicite de la dimension du groupe de Galois associé au t-motif dual d'un module de Drinfeld permettrait de résoudre la conjecture suivante (voir [**26**]).

CONJECTURE 4.8. — *Soient ϕ un module de Drinfeld et $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ des périodes de ϕ qui sont $\mathbf{End}(\phi)$-linéairement indépendantes. Alors elles sont aussi algébriquement indépendantes sur K.*

Si ϕ est un module de Drinfeld de rang 2 à *multiplications complexes* (tel que $\mathbf{End}(\phi) \supsetneq A$), Thiéry [**67**] a démontré que le degré de transcendance du sous-corps de C engendré par $\overline{K}$ et les périodes et quasi-périodes de ϕ (qui est aussi le corps engendré par les coefficients de la matrice $\Psi(T)$ associée à ϕ, cf. paragraphe 4.2.4) est égal à 2 ; ceci est l'analogue du théorème de Chudnovski sur les périodes et quasi-périodes de courbes elliptiques à multiplications complexes cité dans l'introduction. On considère à titre d'exemple le module de Drinfeld de rang 2 : $\phi = \phi_{\mathrm{Car},2} : T \mapsto T\tau^0 + \tau^2$ (le $\mathbb{F}_{q^2}[T]$-module de Carlitz vu comme A-module de rang 2). On voit facilement que $\mathbf{End}(\phi) = \mathbb{F}_{q^2}[T]$, de rang 2 sur A, et que le réseau des périodes de ϕ est isomorphe à $A + \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ (ϕ est à multiplications complexes). En considérant une matrice fondamentale de périodes et quasi-périodes $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$, on prouve (Thiéry [**67**]) que u_1, η_1, η_2 sont $\overline{K}$-linéairement dépendants. En utilisant la formule de Legendre (15) on voit que la clôture algébrique du sous-corps de C engendré par $K, u_1, u_2, \eta_1, \eta_2$ est égal à la clôture algébrique de $K(\overline{\pi}, u_2)$, qui est de degré de transcendance 2.

On conjecture que le degré de transcendance de $K(u_1, u_2, \eta_1, \eta_2)$ vaut 4 au cas où $\mathbf{End}(\phi) = A$. Ceci suivrait du théorème 4.4 de Papanikolas si on pouvait démontrer que, dans ce cas, le groupe de Galois associé est égal à $\mathbf{GL}_2$. Dans [**26**], Denis et David démontrent, par des méthodes proches de celle de Jing Yu, que si q n'est pas une puissance de 2, les périodes d'un module de Drinfeld ϕ de rang 2 défini sur $\overline{K}$ tel que $\mathbf{End}(\phi) = A$ sont quadratiquement indépendantes. La question suivante reste donc légitime : peut-on déduire le théorème 4.1 aussi du théorème du sous-t-module de Jing Yu ?

4.4. Retour sur l'interpolation des périodes

Terminons ce paragraphe en comparant les différentes manières d'interpoler les périodes des modules de Drinfeld, suivant Anderson, Brownawell et Papanikolas, ou Denis.

Soit ϕ un module de Drinfeld avec $\phi(T) = T\tau^0 + l_1\tau + \cdots + l_n\tau^n$. Ici il convient de poser des conditions supplémentaires. On suppose que $l_1, \ldots, l_n, u \in \mathbb{F}_q((1/T^{1/e}))$, avec u période de ϕ, pour un certain entier $e \geq 1$ (et pour un choix fixé de $T^{1/e}$). Soit $v = \sum_{i \geq -i_0} v_i/T^{i/e} \in \mathbb{F}_q((1/T^{1/e}))$ (les v_i sont dans $\mathbb{F}_q$). Soit x une nouvelle indéterminée indépendante. On pose

$$\widetilde{v}(x) = \sum_{i \geq -i_0} \frac{v_i}{x^i} \in \mathbb{F}_q((1/x)),$$

de telle sorte que $\widetilde{v}(T^{1/e}) = v$. En particulier, $\widetilde{T} = x^e$.

Considérons la série formelle :

$$z_u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \widetilde{e_\phi\left(\frac{u}{T^{i+1}}\right)}(x) T^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\alpha_i}(x)\widetilde{u}(x)^{q^i}}{x^{eq^i} - T}.$$

Comme $(x^{eq^i} - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^i/x^{(j+1)eq^i}$, on voit que $z_u(x) \in K((1/x))$. En fait, $z_u(x)$ définit une fonction holomorphe pour $|x| > q^{1/e}$, méromorphe pour $|x| > 1$ avec des pôles aux points $T^{1/(eq^i)}$ $(i \geq 0)$. La fonction $z_u(x) - \widetilde{u}(x)/(x^e - T)$ se prolonge en fonction holomorphe sur $|x| > q^{1/eq}$.

Voici le lien formel entre $z_u(x)$ et la série $s_u(t)$ introduite au paragraphe 4.2 : $s_u(t)$ est la série obtenue en faisant les substitutions $(x, T) \mapsto (T^{1/e}, t)$ dans $z_u(x)$. Pour obtenir $z_u(x)$ de $s_u(t)$, il suffira alors d'opérer les substitutions $(T, t) \mapsto (x^e, T)$. On trouve l'équation fonctionnelle linéaire :

$$(x^e - T)z_u(x) + \widetilde{l_1}(x)z_u(x^q) + \cdots + \widetilde{l_n}(x)z_u(x^{q^n}) = 0, \tag{20}$$

et la relation d'interpolation

$$l_1 z_u(x^q) + \cdots + l_n z_u(x^{q^n})|_{x \mapsto T^{1/e}} = -u. \tag{21}$$

Bien entendu, il faut faire attention aux hypothèses que nous avons admises car elles ne sont pas remplies par tous les modules de Drinfeld. Elles sont satisfaites si $\phi = \phi_{\mathrm{Car}}$ est le module de Carlitz car $\overline{\pi} \in \mathbb{F}_q(((-T)^{-1/(q-1)}))$.

5. VALEURS DE LA FONCTION ZÊTA DE CARLITZ-GOSS

Posons $A_+ = \{a \in A, a \text{ unitaire}\}$. Dans [**41**], Goss introduit la fonction ζ, définie sur $C \times \mathbb{Z}_p$ et à valeurs dans C, telle que

$$\zeta(T^n, n) = \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^n} \in K_\infty, \quad n \geq 1.$$

Dans la suite, j'écrirai $\zeta(n)$ pour $\zeta(T^n, n)$.

Dans [**17**], Carlitz avait déjà étudié certaines propriétés arithmétiques liées à ces nombres et dans ce paragraphe je présenterai plusieurs résultats de transcendance et d'indépendance algébrique les concernant.

Pour un entier naturel n, posons $\Gamma_{\mathrm{arith}}(n) := \prod_{i=0}^{s} D_i^{n_i} \in K$, $n_0 + n_1 q + \cdots + n_s q^s$ étant l'écriture en base q de $n-1$ et D_i étant le polynôme $[i][i-1]^q \cdots [1]^{q^{i-1}}$ (cette fonction est liée à la fonction factorielle de Carlitz dans [**17**]). On peut déduire des travaux de Carlitz que $z/e_{\mathrm{Car}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{\Gamma_{\mathrm{arith}}(n+1)}$ pour certains $B_{n+1} \in K$ ([6]). En calculant la dérivée logarithmique du produit infini (1) définissant e_{Car}, on parvient aux relations de Bernoulli-Carlitz : pour tout $m \geq 1$,

$$\frac{\zeta(m(q-1))}{\overline{\pi}^{m(q-1)}} = \frac{B_m}{\Gamma_{\mathrm{arith}}(m(q-1)+1)} \in K. \tag{22}$$

---

[6] La seule raison pour laquelle nous ne pouvons pas dire que ceci a été démontré par Carlitz est qu'il étudiait le module $T \mapsto T\tau_0 - \tau$. Idem pour des autres propriétés.

En particulier,

$$\widetilde{\pi}^{q-1} \quad = \quad (T^q - T) \sum_{a \in A \setminus \{0\}} a^{1-q} \in K_\infty,$$

analogue de la formule d'Euler $\sum_n n^{-2} = \pi^2/6$, d'où la transcendance de $\zeta(m(q-1))$ pour $m \geq 1$ (le théorème 2.2 suffit).

Une autre collection d'identités, essentiellement obtenues par Carlitz dans [**16**] (voir aussi [**49**]), est :

$$\zeta(s) = \mathrm{Li}_s(1), \quad s = 1, \ldots, q-1, \tag{23}$$

où Li_n désigne le n-ième *polylogarithme* de Carlitz ($n \geq 1$) :

$$\mathrm{Li}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{kn} z^{q^k}}{([k][k-1]\cdots[1][0])^n},$$

de telle sorte que $\mathrm{Li}_1(z) = \log_{\mathrm{Car}}(z)$ (la série $\mathrm{Li}_n(z)$ converge pour $|z| < q^{nq/(q-1)}$).

5.1. Puissances tensorielles du module de Carlitz

C'est en partie dans le but d'étendre (23) aux entiers $n \geq q$ qu'Anderson et Thakur [**6**] ont étudié les périodes associées à certains t-modules qu'ils ont ensuite reliées aux valeurs de la fonction zêta de Carlitz (voir aussi [**24**]). En suivant ces auteurs, j'esquisse ci-après les modules en question.

Soit n un entier ≥ 1 ; posons :

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{n \times n}.$$

Nous considérons le T-module de dimension n défini par :

$$\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}(T) = T\tau^0 + N_n \tau^0 + E_n \tau \in \mathbf{End}_{\mathbb{F}_q\text{-lin}}\,(\mathbb{G}_a^n/C),$$

qui est connu sous le nom de *n-ième puissance tensorielle du module de Carlitz.*

La terminologie s'explique en passant par les t-motifs duaux. Ici, $G = (\mathbb{G}_a^n, \phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n})$ est le t-module tel que $M^*(G) = M^*(\phi_{\mathrm{Car}}) \otimes \cdots \otimes M^*(\phi_{\mathrm{Car}})$ (dans [**45**] on calcule explicitement les t-modules associés aux puissances tensorielles, symétriques, alternées d'un module de Drinfeld). On vérifie que, pour tout $n \geq 1$, $\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}$ est abélien, uniformisable, simple, de dimension n et de rang 1.

La première coordonnée de la fonction exponentielle de ce t-module est calculée explicitement au moyen d'une série à coefficients matriciels. On montre qu'elle satisfait à :

$$e_n\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k\geq 0}\frac{x^{q^k}}{([i][i-1]^q\cdots[1]^{q^{k-1}})^n} \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}.$$

Pour $n=2$, la série qui apparaît ci-dessus est liée à la fonction de Bessel J_0 définie par Carlitz dans [**19**], voir aussi [**25**]. En ce qui concerne la fonction $\log_n$, nulle en $(0,\ldots,0)$ et telle que $\log_n\circ e_n = e_n\circ\log_n =$ identité, Anderson et Thakur démontrent que :

$$\log_n\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ \mathrm{Li}_n(x) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

En vue d'un résultat de transcendance, le résultat principal d'Anderson et Thakur dans [**6**] est le suivant.

THÉORÈME 5.1. — *Pour tout $i\leq nq/(q-1)$, il existe $h_{n,i}\in A$ tel que si l'on pose*

$$P_n := \sum_i \phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}(h_{n,i})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T^i \end{pmatrix},$$

alors la dernière coordonnée de P_n est égale à $\Gamma_{arith}(n)\zeta(n)$. De plus il existe $a\in A\setminus\{0\}$ avec $\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}(a)P_n=0$ si et seulement si $q-1$ divise n.

On en déduit que

$$\Gamma_{\mathrm{arith}}(n)\zeta(n) = \sum_{i=0}^{[nq/(q-1)]} h_{n,i}\mathrm{Li}_n(T^i).$$

Pour $1\leq n\leq q-1$, on retrouve (23) ; Anderson et Thakur construisent de plus explicitement une série génératrice pour les nombres $h_{n,i}$.

5.2. Transcendance et indépendance linéaire pour ζ (méthodes classiques)

Les premiers résultats de transcendance concernant les valeurs de ζ semblent être ceux de la thèse de Thakur (1987), obtenus par une variante de la méthode de Wade. Par cette même méthode, de Mathan [**51**] a démontré la transcendance de certains produits de valeurs de ζ aux entiers (voir aussi [**24, 63, 49**]).

Compte tenu des propriétés de $\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}$, le théorème 5.1 et le théorème 2.5 impliquent le

THÉORÈME 5.2. — *Si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in C^n \setminus \{0\}$ et si $e_{\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes n}}(u) \in \overline{K}^n$, alors u_n est transcendant. En particulier, $\zeta(n) \notin \overline{K}$ pour tout $n \geq 1$.*

Le théorème 5.2 peut être généralisé en appliquant le théorème 2.4. Dans [**83**], Jing Yu démontre :

THÉORÈME 5.3. — *Les seules relations de dépendance linéaire sur $\overline{K}$ liant les nombres*

$$1, \overline{\pi}, \ldots, \overline{\pi}^m, \ldots, \zeta(1), \ldots, \zeta(n), \ldots$$

sont celles engendrées par les relations de Bernoulli-Carlitz (22).

Noter que, par la méthode « automatique », Berthé [**10**] avait démontré la transcendance de $\zeta(n)/\overline{\pi}^n$ pour $n = 1, \ldots, q-2$.

5.3. Indépendance algébrique d'après Chieh-Yu Chang et Jing Yu

Pour passer de l'étude des relations linéaires de valeurs de ζ à l'étude des relations algébriques, il faut aussi tenir compte des identités :

$$\zeta(p^k n) = \zeta(n)^{p^k}, \quad n, k \geq 1. \tag{25}$$

Dans [**35**], Denis démontre l'indépendance algébrique de $\overline{\pi}, \zeta(1), \ldots, \zeta(q-2)$. Le résultat principal de cette partie est dû à Chang et Yu [**20**].

THÉORÈME 5.4. — *Les relations de dépendance algébrique liant les nombres*

$$\overline{\pi}, \zeta(1), \zeta(2), \ldots$$

sont engendrées par les relations de Bernoulli-Carlitz (22) *et les relations* (25).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, on conjecture l'indépendance algébrique des nombres complexes $\pi, \zeta(3), \ldots$. Dans [**7**] André montre comment cette conjecture découle de la conjecture des périodes de Grothendieck jointe à la conjecture selon laquelle tout motif de Tate mixte sur $\mathbb{Z}$ provient du groupe fondamental de la droite projective moins trois points. En analogie avec cette conjecture, le théorème 5.4 affirme que $\overline{\pi}$ et les nombres $\zeta(s)$ avec s non divisible ni par $q-1$ ni par p sont algébriquement indépendants.

5.3.1. — Ci-après, je donne quelques éléments de preuve du théorème 5.4. On montre facilement que le $\mathbb{F}_q(t)$-espace vectoriel des solutions de l'équation aux σ-différences homogène $y^{(-1)} = (T-t)^s y$ est de dimension 1 engendré par Ω^s, ce qui donne une trivialisation analytique de $M^*(\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes s})$. On calcule aussi facilement le groupe de Galois de ce t-motif dual ; c'est $\mathbb{G}_m$ pour tout s.

On considère $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \overline{K} \setminus \{0\}$ tels que $|\beta_i| < q^{sq/(q-1)}$. Rappelons que le théorème 4.1 décrit les relations de dépendance algébrique entre $\overline{\pi}^s, \mathrm{Li}_s(\beta_1), \ldots, \mathrm{Li}_s(\beta_m)$ par des relations de dépendance linéaire sur K dans le cas $s=1$. Nous allons voir que ceci se généralise à tout s.

Pour $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \overline{K} \setminus \{0\}$ tels que $|\beta_i| < q^{qs/(q-1)}$, on pose (en suivant Chang et Yu) $L_i(z) = L_{\beta_i,s}(z)$ ($i = 1, \ldots, m$), où

$$L_{\beta,s}(t) := \beta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{is}\beta^{q^i}}{(T^q - t)^s (T^{q^2} - t)^s \cdots (T^{q^i} - t)^s}.$$

On pose aussi $L_0 = (-1)^s \Omega^{-s}$, de telle sorte que $L_i(T) = \mathrm{Li}_s(\beta_i)$ pour tout i et $L_0(T) = \overline{\pi}^s$. On a les équations aux σ-différences

$$L_0^{(-1)} = \frac{L_0}{(t-T)^s}, \quad L_i^{(-1)} = \beta_i^{(-1)} + \frac{L_i}{(t-T)^s}. \quad i = 1, \ldots, m.$$

En considérant :

$$\Phi_s = \begin{pmatrix} (t-T)^s & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1^{(-1)}(t-T)^s & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_m^{(-1)}(t-T)^s & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_s = \begin{pmatrix} \Omega^s \\ \Omega^s L_1 \\ \vdots \\ \Omega^s L_m \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}_{(m+1)\times 1}(\mathbb{T}),$$

on a $\psi_s^{(-1)} = \Phi_s \psi_s$ et on construit facilement une trivialisation analytique Ψ_s d'un t-motif dual $M_{s,m}$ au centre d'une suite exacte de $\overline{K}[t,\sigma]$-modules $0 \to M^*(\phi_{\mathrm{Car}}^{\otimes s}) \to M_{s,m} \to 1^m \to 0$.

On peut calculer le groupe de Galois $G_{s,m} := G_{M_{s,m}}$ de $M_{s,m}$ d'une manière très proche de ce que nous avons esquissé au paragraphe 4.3. On trouve que $G_{s,m}$ est un sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{F}_q(t)$ de $\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & \mathrm{Id}_m \end{pmatrix} \subset \mathbf{GL}_{m+1}$, et le théorème 4.4 nous dit qu'on a égalité précisément quand les fonctions $L_0, L_1, \ldots, L_m$ sont algébriquement indépendantes, condition d'ailleurs équivalente à l'indépendance algébrique des nombres $\overline{\pi}, \mathrm{Li}_s(\beta_1), \ldots, \mathrm{Li}_s(\beta_m)$ d'après le théorème 4.3.

Remarque 5.5. — On a $\zeta(s) \in K_\infty$ et $\overline{\pi} \notin K_\infty$ si $q \geq 3$. Si s n'est pas divisible par $q-1$, $\zeta(s)$ et $\overline{\pi}^s$ sont K-linéairement indépendants. Le théorème 5.1 et les arguments ci-dessus nous donnent l'indépendance algébrique de $\overline{\pi}$ et $\zeta(s)$.

Chang et Yu généralisent cette remarque. Les arguments qu'ils développent permettent de démontrer le résultat suivant (qui implique le théorème 4.1), où $U(r)$ désigne l'ensemble des entiers s avec $1 \leq s \leq r$ non divisibles par $p, q-1$. On a ainsi [**20**] :

THÉORÈME 5.6. — *Pour $r \geq 1$, on considère un sous-ensemble $\mathcal{I}$ non vide de $U(r)$ et, pour tout $s \in \mathcal{I}$, on fixe un entier $n_s \geq 1$. On considère, pour tout $s \in \mathcal{I}$, des nombres $\beta_{s,1}, \ldots, \beta_{s,n_s} \in K \setminus \{0\}$ tels que $|\beta_{i,l}| < q^{qi/(q-1)}$. Si les nombres*

$$\overline{\pi}, Li_s(\beta_{s,1}), \ldots, Li_s(\beta_{s,n_s}), \quad s \in \mathcal{I}$$

sont algébriquement dépendants, alors il existe $s \in \mathcal{I}$ tel que $\overline{\pi}^s, Li_s(\beta_{s,1}), \ldots, Li_s(\beta_{s,n_s})$ soient K-linéairement dépendants.

Pour tout $s \in \mathcal{I}$, on note M_s le t-motif dual M_{s,n_s} dont la construction a été esquissée plus haut, associé à

$$(\beta_1, \ldots, \beta_m) = (\beta_{s,1}, \ldots, \beta_{s,n_s}). \tag{26}$$

En raisonnant par l'absurde, on peut supposer que les nombres $\overline{\pi}, \mathrm{Li}_s(\beta_{s,1}), \ldots, \mathrm{Li}_s(\beta_{s,n_s})$ avec s parcourant $\mathcal{I}$ sont algébriquement dépendants mais que, pour tout $s \in \mathcal{I}$, les $n_s + 1$ nombres $\overline{\pi}, \mathrm{Li}_s(\beta_{s,1}), \ldots, \mathrm{Li}_s(\beta_{s,n_s})$ sont K-linéairement indépendants. Le théorème 4.4 et les remarques ci-dessus impliquent que $G_s = G_{s,n_s}$ est de dimension $n_s + 1$, dans une suite exacte $0 \to \mathbb{G}_a^{n_s} \to G_s \to \mathbb{G}_m \to 1$. De cette suite exacte, on retient que, pour tout s, $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathbb{G}_a^{n_s}$: si $\mu \in \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q(t))$ et $v \in \mathbb{G}_a^{n_s}(\mathbb{F}_q(t))$, alors $\mu(v) = \mu^s v$. Chang et Yu, en comparant les différents poids s, en déduisent que le groupe de Galois G_M du t-motif dual $M = \oplus_{s \in \mathcal{I}} M_s$ est isomorphe à une extension de $\mathbb{G}_m$ par $\mathbb{G}_a^{\Sigma_s n_s}$ et le théorème de Papanikolas 4.4 fournit la contradiction voulue.

Pour déduire le théorème 5.4 du théorème 5.6, on applique le théorème 5.1 et on choisit $\mathcal{I} = U(r)$ et, pour tout $s \in U(r)$:

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{n_s}) = (T^{i_0}, \ldots, T^{i_{m_s}}),$$

où les exposants $0 \leq i_0 < \cdots < i_{m_s} \leq sq/(q-1)$ sont choisis de sorte que

$$\zeta(s) \in K\overline{\pi}^s + K\mathrm{Li}_s(1) + \cdots + K\mathrm{Li}_s(T^{[sq/(q-1)]}) = K\overline{\pi}^s \oplus K\mathrm{Li}_s(T^{i_0}) \oplus \cdots \oplus K\mathrm{Li}_s(T^{i_{m_s}}).$$

Remarque 5.7. — Dans [**66**], Thakur introduit des séries analogues des valeurs *multizêta* complexes :

$$\zeta(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{n_i \in A_+, |n_1| > \cdots > |n_k|} \frac{1}{n_1^{s_1} \cdots n_k^{s_k}}, \quad s_1, \ldots, s_k \geq 1.$$

Il nous a annoncé avoir réussi, en collaboration avec Anderson et Papanikolas, à interpréter certains de ces nombres comme des logarithmes de points algébriques de

t-modules qui sont des extensions itérées de puissances tensorielles du module de Carlitz : des nouvelles applications des théorèmes 4.2 et 4.4 deviennent donc envisageables dans un travail en cours par ces auteurs.

Remarque 5.8. — On peut obtenir, essentiellement par la même méthode de démonstration du paragraphe 3.1, un énoncé plus général que le théorème 3.1 incluant l'indépendance algébrique des valeurs de la fonction zêta de Carlitz-Goss aux entiers ≥ 1 et le cas du théorème 5.6 correspondant aux $\beta_{s,j}$ dans K. Pour ce faire, on utilise, pour $\beta \in K$ tel que $|\beta| < q^{sq/(q-1)}$, les séries

$$\widetilde{\beta}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{is}\widetilde{\beta}(x)^{q^i}}{(x^q - T)^s \cdots (x^{q^i} - T)^s},$$

dont la valeur en $x = T$ est $\mathrm{Li}_s(\beta)$. On termine en appliquant le théorème 2.5 au lieu du théorème 2.2.

6. VALEURS DES FONCTIONS GAMMA

Dans ce paragraphe, je présente les résultats de transcendance et indépendance algébrique concernant *les* fonctions gamma de la théorie drinfeldienne.

Il y a essentiellement deux types de fonction gamma, liées à deux théories cyclotomiques : celle qui se focalise sur les racines de l'unité et celle qui étudie les exponentielles de Carlitz des éléments de l'ensemble $\overline{\pi}K$. Dans [**66**], ces deux fonctions gamma (appelées respectivement *arithmétique* et *géométrique*) sont étudiées en profondeur et je me limiterai ici à un survol des résultats principaux.

La fonction gamma arithmétique $\Gamma_{\mathrm{arith}} : \mathbb{Z}_p \to K_\infty$ a été introduite par Goss dans [**42**] pour interpoler p-adiquement la fonction Γ_{arith} de Carlitz introduite et définie au paragraphe 5. Dans sa thèse et dans [**62**], Thakur détermine les analogues pour Γ_{arith} des formules des compléments et de multiplication pour la fonction gamma d'Euler. Il démontre également que les nombres $\Gamma_{\mathrm{arith}}(1 - a/(q-1))$ sont transcendants pour $0 < a \leq q - 1$, en les reliant à des puissances de $\overline{\pi}$ en analogie avec la transcendance de la valeur de la fonction gamma d'Euler en $1/2$, égale à $\sqrt{\pi}$. En poursuivant les analogies avec la fonction gamma d'Euler, Thakur a démontré [**62, 66**] des analogues des formules de Chowla-Selberg pour Γ_{arith}. Si ϕ est le module de Drinfeld $\phi : T \mapsto T\tau^0 + \tau^2$, alors son réseau de périodes est égal à $Au_1 + Au_2$ avec $u_2/u_1 \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ et

$$\Gamma_{\mathrm{arith}}\left(1 + \frac{1}{1-q^2}\right)^{q^2-1} = \kappa\overline{\pi}^q u_2^{1-q}, \quad \Gamma_{\mathrm{arith}}\left(1 + \frac{q}{1-q^2}\right)^{q^2-1} = \nu(\overline{\pi}u_2)^{1-q} \tag{27}$$

pour $\kappa, \nu \in \overline{K}^\times$. Le résultat de Thiéry mentionné dans le sous-paragraphe 4.3.3 implique alors que $\overline{\pi}, \Gamma_{\mathrm{arith}}(1 + 1/(1-q^2))$ sont algébriquement indépendants (de même pour $\overline{\pi}, \Gamma_{\mathrm{arith}}(1+q/(1-q^2)))$, en analogie avec le résultat impliquant la transcendance de la fonction gamma d'Euler en $1/3, 1/4$ dû à Chudnovski.

Par la méthode automatique, Thakur [**64**] a obtenu la transcendance de $\Gamma_{\mathrm{arith}}(a/f)$ pour tout dénominateur f mais avec certaines restrictions sur a non divisible par f, puis Allouche [**3**] a démontré que $\Gamma_{\mathrm{arith}}(r)$ est transcendant pour r rationnel non entier. Thakur a aussi démontré la transcendance de tous les monômes en les valeurs de Γ_{arith} en $\mathbb{Q}\cap\mathbb{Z}_p$ dont il n'avait pas montré l'algébricité (dans sa thèse). Dans [**52**], Mendès France et Yao ont finalement étendu ce résultat à $\mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$.

La fonction gamma géométrique introduite par Thakur est la fonction déterminée par le produit :

$$\Gamma_{\mathrm{geo}}(z) = z^{-1} \prod_{a\in A_+} \left(1+\frac{z}{a}\right)^{-1}, \quad z \in C \setminus (-A_+ \cup \{0\}),$$

méromorphe sur C (d'inverse entière envoyant A sur A). Thakur [**62, 66**] a découvert plusieurs équations fonctionnelles pour Γ_{geo} (analogues des identités de translation, des compléments et de multiplication de Gauss pour la fonction gamma d'Euler), qui seront appelées *équations fonctionnelles standard.* Ses travaux ont été suivis de résultats de transcendance et d'indépendance algébrique de grande importance, mais qui ne seront pas couverts par ce texte (on pourra consulter [**5, 66**]).

Dans [**61**], Sinha a démontré la transcendance des nombres $\Gamma_{\mathrm{geo}}(a/f)$ avec $a, f \in A_+$, $|a| < |f|$ premiers entre eux, en les identifiant à des coordonnées de périodes de t-modules à *multiplications complexes* G_f définis sur $\overline{K}$ et en appliquant un théorème (analogue de Gelfond-Schneider) de Jing Yu dans [**81**]. Cette idée est en quelque sorte analogue du fait que les valeurs des fonctions bêta classiques sont périodes d'intégrales abéliennes pour les jacobiennes des courbes de Fermat (voir [**72**]).

Brownawell et Papanikolas [**15**] ont généralisé le travail de Sinha en arrivant à interpréter tous les nombres $\Gamma_{\mathrm{geo}}(z)$ avec $z \in K \setminus A_+$ comme des coordonnées de périodes de certains t-modules à « multiplications complexes » définis sur $\overline{K}$ et à en démontrer la transcendance, et les propriétés d'indépendance linéaire. À la base de ce travail, il y a d'une part un « critère du crochet » à la Anderson-Deligne-Thakur (voir [**27, 62**]) qui permet de déterminer les relations de dépendance $\overline{K}$-linéaire entre deux monômes en des valeurs de Π, et d'autre part une application du théorème 2.4 à certaines extensions des t-modules G_f à multiplication complexes (qui sont décrits en détail aussi dans [**66**]), dont la partie délicate consiste à en déterminer tous les sous-t-modules propres.

Ce travail a été ensuite généralisé et étendu car, dans [**5**], Anderson, Brownawell et Papanikolas, en appliquant leur théorème 4.2, ont démontré :

THÉORÈME 6.1. — *Les équations fonctionnelles standard engendrent toutes les relations de dépendance algébrique des valeurs de Γ_{geo} sur $K \setminus (-A_+ \cup \{0\})$.*

Remarque 6.2. — On ne connaît toujours pas de preuve automatique de la transcendance des valeurs de la fonction gamma géométrique autres que celles liées à $\overline{\pi}$ (par exemple, si $q = 2$ et si $z \in K \setminus A$, alors la formule des compléments de Thakur implique $\Gamma_{\mathrm{geo}}(z) \in \overline{K}\overline{\pi}$). Dans [**42**] (voir aussi [**66**]), Goss introduit une fonction gamma de deux variables, définie sur $\mathbb{Z}_p \times C$, se spécialisant sur les deux fonctions gamma (arithmétique et géométrique). Ce serait intéressant d'étudier la transcendance de ses valeurs.

Étant donnés des nombres complexes $\ell_1, \ldots, \ell_m$, la conjecture de Schanuel (voir [**75, 76**]) estime le degré de transcendance du sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par $\ell_1, \ldots, \ell_m, e^{\ell_1}, \ldots, e^{\ell_m}$ et $\mathbb{Q}$. Grâce à un théorème de Nesterenko utilisant certaines propriétés différentielles des formes modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$, on sait que $\pi, e^{\pi}, \Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants [(7)].

Un analogue de la conjecture de Schanuel dans C est proposé par Denis dans [**30**]. Cette conjecture semble inabordable par les méthodes décrites dans ce texte. Denis démontre, pour $q \geq 4$, l'indépendance algébrique de $\overline{\pi}$ et $e_{\mathrm{Car}}((T^q - T)^{1/(q-1)}\overline{\pi})$ (il existe un choix de $(T^q - T)^{1/(q-1)}$ tel que $(T^q - T)^{1/(q-1)}\overline{\pi} \in K_\infty$) et sa méthode s'adapte pour prouver l'indépendance algébrique de $\overline{\pi}$ et $e_{\mathrm{Car}}(\lambda\overline{\pi})$ avec $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$. Voir aussi [**9, 58**] pour l'analogue du théorème de Gelfond.

Un analogue dans C du théorème de Nesterenko concernant les valeurs de formes modulaires de Drinfeld n'est toujours pas disponible à l'heure actuelle, mais il est raisonnable de conjecturer l'indépendance algébrique des trois nombres

$$e_{\mathrm{Car}}(\lambda\overline{\pi}), \overline{\pi}, \Gamma_{\mathrm{arith}}(1 + 1/(1 - q^2))$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^2} \setminus \mathbb{F}_q$ au moins quand $q \geq 4$. Cette conjecture ne semble pas non plus accessible avec les méthodes décrites dans ce texte (mais il n'est pas exclu qu'on puisse la démontrer par une variante de la méthode de Philippon [**59**], voir aussi [**74**]). Dans [**13**], on peut trouver une étude approfondie des propriétés différentielles des *formes modulaires de Drinfeld* pour $\mathbf{GL}_2(A)$ sous la contrainte $q \geq 4$ où l'on remarque des fortes analogies avec les propriétés différentielles des formes modulaires pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ utilisées par Nesterenko dans son théorème.

L'auteur tient à remercier tous ceux qui l'ont aidé et soutenu pendant la rédaction de ce texte, et en particulier, tous les participants au « GdT différentiel » de l'Institut Mathématique de Jussieu, ainsi que B. Adamczewski, J.-P. Allouche, B. Anglès, V. Bosser, L. Denis, E.-U. Gekeler, D. Thakur, M. Waldschmidt. Il remercie également le centre E. de Giorgi de Pise pour les conditions très favorables dans lesquelles il a pu terminer ce travail.

(7) Le résultat de Nesterenko concerne plus généralement les valeurs des fonctions $t, P(t), Q(t), R(t)$ avec P, Q, R les séries de Ramanujan.

RÉFÉRENCES

[1] B. ADAMCZEWSKI & J. BELL – Function fields in positive characteristic and Cobham's theorem, *J. Algebra* **319** (2008), p. 2337–2350.

[2] J.-P. ALLOUCHE – Sur la transcendance de la série formelle Π, *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)* **2** (1990), p. 103–117.

[3] ______, Transcendence of the Carlitz-Goss gamma function at rational arguments, *J. Number Theory* **60** (1996), p. 318–328.

[4] G. W. ANDERSON – t-motives, *Duke Math. J.* **53** (1986), p. 457–502.

[5] G. W. ANDERSON, W. D. BROWNAWELL & M. PAPANIKOLAS – Determination of the algebraic relations among special Γ-values in positive characteristic, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), p. 237–313.

[6] G. W. ANDERSON & D. S. THAKUR – Tensor powers of the Carlitz module and zeta values, *Ann. of Math. (2)* **132** (1990), p. 159–191.

[7] Y. ANDRÉ – *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, vol. 17, Société Mathématique de France, 2004.

[8] R. M. BEALS & D. S. THAKUR – Computational classification of numbers and algebraic properties, *Internat. Math. Res. Notices* **15** (1998), p. 799–818.

[9] P.-G. BECKER, W. D. BROWNAWELL & R. TUBBS – Gel′fond's theorem for Drinfel′d modules, *Michigan Math. J.* **41** (1994), p. 219–233.

[10] V. BERTHÉ – Combinaisons linéaires de $\zeta(s)/\Pi^s$ sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour $1 \leq s \leq q-2$, *J. Number Theory* **53** (1995), p. 272–299.

[11] D. BERTRAND – Lemmes de zéros et nombres transcendants, Séminaire Bourbaki, vol. 1985/86, exp. n° 652, *Astérisque* **145-146** (1987), p. 21–44.

[12] ______, Un analogue différentiel de la théorie de Kummer, in *Approximations diophantiennes et nombres transcendants (Luminy, 1990)*, de Gruyter, 1992, p. 39–49.

[13] V. BOSSER & F. PELLARIN – Hyperdifferential properties of Drinfeld quasi-modular forms, article ID rnn032, 56 pages, `doi:10.1093/imrn/rnn032`, 2008.

[14] W. D. BROWNAWELL – Transcendence in positive characteristic, in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., 1998, p. 317–332.

[15] W. D. BROWNAWELL & M. PAPANIKOLAS – Linear independence of gamma values in positive characteristic, *J. reine angew. Math.* **549** (2002), p. 91–148.

[16] L. CARLITZ – On certain functions connected with polynomials in a Galois field, *Duke Math. J.* **1** (1935), p. 137–168.

[17] ———, An analogue of the von Staudt-Clausen theorem, *Duke Math. J.* **3** (1937), p. 503–517.

[18] ———, A class of polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **43** (1938), p. 167–182.

[19] ———, Some special functions over GF(q, x), *Duke Math. J.* **27** (1960), p. 139–158.

[20] C.-Y. Chang & J. Yu – Determination of algebraic relations among special zeta values in positive characteristic, *Adv. Math.* **216** (2007), p. 321–345.

[21] G. Christol – Ensembles presque periodiques k-reconnaissables, *Theoret. Comput. Sci.* **9** (1979), p. 141–145.

[22] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France & G. Rauzy – Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980), p. 401–419.

[23] A. Cobham – Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), p. 164–192.

[24] G. Damamme & Y. Hellegouarch – Transcendence of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method, *J. Number Theory* **39** (1991), p. 257–278.

[25] S. David & L. Denis – Indépendance algébrique sur les T-modules, *Compositio Math.* **122** (2000), p. 1–22.

[26] ———, Périodes de modules de "l'indépendance quadratique en rang II", *J. Ramanujan Math. Soc.* **17** (2002), p. 65–83.

[27] P. Deligne – Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, in *Automorphic forms, representations and L-functions (Oregon State Univ. 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., 1979, p. 313–346.

[28] L. Denis – Théorème de Baker et modules de Drinfel'd, *J. Number Theory* **43** (1993), p. 203–215.

[29] ———, Dérivées d'un module de Drinfel'd et transcendance, *Duke Math. J.* **80** (1995), p. 1–13.

[30] ———, Indépendance algébrique et exponentielle de Carlitz, *Acta Arith.* **69** (1995), p. 75–89.

[31] ———, Lemmes de multiplicités et T-modules, *Michigan Math. J.* **43** (1996), p. 67–79.

[32] ———, Un critère de transcendance en caractéristique finie, *J. Algebra* **182** (1996), p. 522–533.

[33] ———, Indépendance algébrique de différents π, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **327** (1998), p. 711–714.

[34] ———, Indépendance algébrique des dérivées d'une période du module de Carlitz, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **69** (2000), p. 8–18.

[35] ———, Indépendance algébrique de logarithmes en caractéristique p, *Bull. Austral. Math. Soc.* **74** (2006), p. 461–470.

[36] S. Dion – Théorème de Brownawell-Waldschmidt en caractéristique finie, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **9** (2000), p. 71–90.

[37] J. Fresnel & M. van der Put – *Rigid analytic geometry and its applications*, Progress in Mathematics, vol. 218, Birkhäuser, 2004.

[38] E.-U. Gekeler – On the de Rham isomorphism for Drinfel′d modules, *J. reine angew. Math.* **401** (1989), p. 188–208.

[39] ———, Quasi-periodic functions and Drinfel′d modular forms, *Compositio Math.* **69** (1989), p. 277–293.

[40] D. Goss – von Staudt for $\mathbf{F}_q[T]$, *Duke Math. J.* **45** (1978), p. 885–910.

[41] ———, v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields, *Invent. Math.* **55** (1979), p. 107–119.

[42] ———, The Γ-function in the arithmetic of function fields, *Duke Math. J.* **56** (1988), p. 163–191.

[43] ———, Drinfel′d modules : cohomology and special functions, in *Motives (Seattle, WA, 1991)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., 1994, p. 309–362.

[44] ———, *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, vol. 35, Springer, 1996.

[45] Y. Hamahata – Tensor products of Drinfel′d modules and v-adic representations, *Manuscripta Math.* **79** (1993), p. 307–327.

[46] C. Hardouin – Computation of the Galois groups attached to the Carlitz logarithms according to the method of M. Papanikolas, prépublication de l'I.W.R. (Heidelberg, avril 2006).

[47] ———, Hypertranscendance des systèmes aux différences diagonaux, *Compos. Math.* **144** (2008), p. 565–581.

[48] D. R. Hayes – Explicit class field theory for rational function fields, *Trans. Amer. Math. Soc.* **189** (1974), p. 77–91.

[49] Y. Hellegouarch – Fonctions zêta en caractéristique positive et modules de Carlitz-Hayes, Séminaire Bourbaki, vol. 1997/98, exp. n° 837, *Astérisque* **252** (1998), p. 57–79.

[50] K. S. Kedlaya – Finite automata and algebraic extensions of function fields, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **18** (2006), p. 379–420.

[51] B. de Mathan – Irrationality measures and transcendence in positive characteristic, *J. Number Theory* **54** (1995), p. 93–112.

[52] M. Mendès France & J.-y. Yao – Transcendence and the Carlitz-Goss gamma function, *J. Number Theory* **63** (1997), p. 396–402.

[53] D. Mumford – An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg deVries equation and related nonlinear equation, in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, Kinokuniya Book Store, 1978, p. 115–153.

[54] M. Papanikolas – Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms, *Invent. Math.* **171** (2008), p. 123–174.

[55] P. Philippon – Variétés abéliennes et indépendance algébrique. I, *Invent. Math.* **70** (1982/83), p. 289–318.

[56] ______, Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs, *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), p. 355–383.

[57] ______, Critères pour l'indépendance algébrique dans les anneaux diophantiens, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), p. 511–515.

[58] ______, Une approche méthodique pour la transcendance et l'indépendance algébrique de valeurs de fonctions analytiques, *J. Number Theory* **64** (1997), p. 291–338.

[59] ______, Indépendance algébrique et K-fonctions, *J. reine angew. Math.* **497** (1998), p. 1–15.

[60] M. van der Put & M. Reversat – Krichever modules for difference and differential equations, *Astérisque* **296** (2004), p. 207–225, Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[61] S. K. Sinha – Periods of t-motives and transcendence, *Duke Math. J.* **88** (1997), p. 465–535.

[62] D. S. Thakur – Gamma functions for function fields and Drinfel'd modules, *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), p. 25–64.

[63] ______, Drinfel'd modules and arithmetic in the function fields, *Internat. Math. Res. Notices* **9** (1992), p. 185–197.

[64] ______, Transcendence of gamma values for $\mathbf{F}_q[T]$, *Ann. of Math. (2)* **144** (1996), p. 181–188.

[65] ______, Automata and transcendence, in *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)*, Contemp. Math., vol. 210, Amer. Math. Soc., 1998, p. 387–399.

[66] ______, *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co. Inc., 2004.

[67] A. Thiéry – Indépendance algébrique des périodes et quasi-périodes d'un module de Drinfel'd, in *The arithmetic of function fields (Columbus, OH, 1991)*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., vol. 2, de Gruyter, 1992, p. 265–284.

[68] ______, Théorème de Lindemann-Weierstrass pour les modules de Drinfel'd, *Compositio Math.* **95** (1995), p. 1–42.

[69] R. Tubbs – Analytic subgroups of t-modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (1997), p. 2605–2617.

[70] L. I. Wade – Certain quantities transcendental over $GF(p^n, x)$, *Duke Math. J.* **8** (1941), p. 701–720.

[71] M. Waldschmidt – *Nombres transcendants*, Springer, 1974, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 402.

[72] ______, Diophantine properties of the periods of the Fermat curve, in *Number theory related to Fermat's last theorem, Proc. Conf., Prog. Math.*, vol. 26, 1982, p. 79–88.

[73] ______, Transcendence problems connected with Drinfel'd modules, *İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg.* **49** (1990), p. 57–75 (1993), International Symposium on Algebra and Number Theory (Silivri, 1990).

[74] ______, Sur la nature arithmétique des valeurs de fonctions modulaires, Séminaire Bourbaki, vol. 1996/97, exp. n° 824, *Astérisque* **245** (1997), p. 105–140.

[75] ______, *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 326, Springer, 2000, Transcendence properties of the exponential function in several variables.

[76] ______, Un demi-siècle de transcendance, in *Development of mathematics 1950–2000*, Birkhäuser, 2000, p. 1121–1186.

[77] G. Wüstholz – Algebraische Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen, *Ann. of Math. (2)* **129** (1989), p. 501–517.

[78] J. Yu – Transcendental numbers arising from Drinfel'd modules, *Mathematika* **30** (1983), p. 61–66.

[79] ______, A six exponentials theorem in finite characteristic, *Math. Ann.* **272** (1985), p. 91–98.

[80] ______, Transcendence and Drinfel'd modules, *Invent. Math.* **83** (1986), p. 507–517.

[81] ______, Transcendence and Drinfeld modules : several variables, *Duke Math. J.* **58** (1989), p. 559–575.

[82] ______, On periods and quasi-periods of Drinfel'd modules, *Compositio Math.* **74** (1990), p. 235–245.

[83] ———, Transcendence and special zeta values in characteristic p, *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), p. 1–23.

[84] ———, Analytic homomorphisms into Drinfeld modules, *Ann. of Math. (2)* **145** (1997), p. 215–233.

Federico PELLARIN

Laboratoire LaMUSE
Université de Saint-Étienne
Département de Mathématiques
23, rue du Docteur Paul Michelon
42023 Saint-Étienne Cedex 2
E-mail : federico.pellarin@univ-st-etienne.fr

Note. — Récemment, Chieh-Yu Chang et Matt Papanikolas m'ont informé qu'ils avaient résolu, parmi d'autres problèmes, le cas de la conjecture 4.8 correspondant aux modules de Drinfeld de rang 2, définis sur $\overline{\mathbb{F}_q(T)}$, sans multiplications complexes, sous la contrainte $2 \nmid q$.