TUAN NGO DAC

Compactification des champs de Chtoucas et théorie géométrique des invariants

Astérisque, tome 313 (2007)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2007__313__1_0>

ASTÉRISQUE 313

COMPACTIFICATION DES CHAMPS DE CHTOUCAS ET THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

Tuan Ngo Dac

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Tuan Ngo Dac
CNRS - Université de Paris Nord, LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail : ngodac@math.univ-paris13.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11R58, 11G09, 14G35, 14D20, 14L24.

Mots clefs. — Chtoucas - Variétés modulaires de Drinfeld - Modules des fibrés sur les courbes - Corps de fonctions - Théorie géométrique des invariants.

COMPACTIFICATION DES CHAMPS DE CHTOUCAS ET THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS

Tuan Ngo Dac

Résumé. — Dans la preuve de Drinfeld et Lafforgue de la correspondance de Langlands pour GL_r sur les corps de fonctions, l'étape la plus difficile consiste à construire des compactifications des espaces de module (ou plutôt des champs) de chtoucas de Drinfeld. Pour vérifier la propreté, Lafforgue a utilisé la réduction semistable à la Langton et une analyse détaillée des propriétés modulaires qui définissent les compactifications. Si l'on espère démontrer la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions pour d'autres groupes réductifs, une des questions naturelles est de généraliser les compactifications de Lafforgue dans le contexte d'un groupe réductif arbitraire. Dans ce cas, l'approche de Lafforgue semble difficile à mettre en œuvre.

Ce texte présente une façon de construire des compactifications des champs de chtoucas à modifications multiples qui généralisent celle des champs de chtoucas de Drinfeld. Notre approche repose sur une méthode plus générale : la théorie géométrique des invariants. Dans le cas des champs de chtoucas de Drinfeld, nous retrouvons les compactifications de Lafforgue et découvrons de nouvelles compactifications, entre autres des compactifications qui sont duales de celles de Lafforgue. De plus, notre méthode est susceptible de produire des compactifications des champs de G-chtoucas pour un groupe réductif quelconque G.

***Abstract* (Compactification of the stacks of shtukas and geometric invariant theory)**

In the proof of Drinfeld and Lafforgue of the Langlands correspondence for GL_r over function fields, the most difficult part is to construct compactifications of moduli spaces (or stacks) classifying Drinfeld's shtukas. If one hopes to prove the Langlands correspondence over function fields for other reductive groups G, it is natural to generalize the above constructions for the stacks of G-shtukas. However, the approach of Lafforgue based on the semistable reduction due to Langton seems difficult to carry out.

In this article, we use the geometric invariant theory to give a new method to construct compactifications of moduli spaces of Drinfeld's shtukas. This rediscovers not only the compactications constructed by Drinfeld and Lafforgue, but also gives rise to new families of compactications.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Champs de chtoucas de Drinfeld et leurs compactifications

Soit X une courbe algébrique projective, lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Soit $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$; on notera

$$\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k.$$

D'après Drinfeld, un chtouca (à droite) de rang r et de degré d sur la courbe $\overline{X}$ consiste en un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r et de degré d sur $\overline{X}$ et une modification de $\mathcal{E}$ par son transformé de Frobenius $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_k)^*\mathcal{E} = \mathcal{E}^\sigma$:

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma,$$

telle que les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ soient de longueur 1, et supportés par deux points ∞ et 0 de $\overline{X}$. On peut mettre les chtoucas de rang r et de degré d en famille et définir leur champ classifiant $\mathrm{Cht}^{r,d}$. Ce champ est algébrique au sens de Deligne-Mumford et muni d'un morphisme naturel

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}^{r,d} \longrightarrow X \times X$$

qui est lisse de dimension relative $2r - 2$.

Une des difficultés majeures dans les travaux de Drinfeld et Lafforgue réside dans le fait que ce champ n'est pas de type fini et *a fortiori* n'est pas propre. Pour la surmonter, d'abord (cf. [**8**]), à tout polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ assez convexe qui joue le rôle d'un paramètre de troncature, Lafforgue associe un sous-champ ouvert de type fini $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ de $\mathrm{Cht}^{r,d}$, qui classifie les chtoucas de rang r et de degré d, dont le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$ est majoré par p.

Ensuite, dans [**9**], il propose une compactification $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ de cet ouvert qui est défini comme solution d'un problème de module. On introduit d'abord les pseudo-homomorphismes complets – une notion qui généralise celle d'isomorphisme – et définit les chtoucas dégénérés. Essentiellement, un chtouca dégénéré de rang r et de degré d sur la courbe $\overline{X}$ consiste en un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r et de degré d, une modification de $\mathcal{E}$ par un fibré vectoriel $\mathcal{E}''$ de même rang

$$\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$$

telle que les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ soient de longueur 1, et un pseudo-homomorphisme complet

$$\mathcal{E}^\sigma \Longrightarrow \mathcal{E}''$$

qui vérifie certaines conditions supplémentaires.

On montre l'existence d'un champ algébrique au sens d'Artin $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$ classifiant les chtoucas dégénérés de rang r et de degré d. Puis il définit le champ de chtoucas itérés $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ en imposant une liste de conditions ouvertes. Il est muni encore d'un morphisme vers $X \times X$ et d'un morphisme vers le champ $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$. Ce dernier a une stratification évidente indexée par les familles $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ vérifiant $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = r$. Cette stratification induit une stratification $\{\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}\}_{\underline{r}}$ sur $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ et chaque strate $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ admet une description modulaire : elle classifie essentiellement les familles de chtoucas de rang $r_1, r_2 - r_1, \ldots, r_k - r_{k-1}$. La strate ouverte qui correspond à la famille triviale $(0 < r)$ est le champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$. Et le champ $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$ vérifie la partie d'existence (mais non d'unicité) du critère valuatif de propreté. Puis Lafforgue définit des conditions de troncature de type combinatoire pour obtenir $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ et analyse ces conditions sur les strates $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$. Par la réduction semistable à la Langton, il prouve :

***Théorème* (Lafforgue).** — *Supposons que le polygone p est assez convexe. Alors le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \longrightarrow X \times X$$

est propre.

Pour le prouver, il utilise le critère valuatif de propreté. Il se place sur la fibre générique du chtouca qu'il s'agit de faire dégénérer ; cette fibre a une structure de φ-espace et il définit la notion de φ-réseau itéré dans un φ-espace. Chaque tel réseau définit un chtouca dégénéré. La réduction semistable à la Langton consiste à transformer un réseau itéré en un autre et, par une série de telles transformations, Lafforgue réussit à trouver un unique φ-réseau itéré tel que le chtouca dégénéré associé est un chtouca itéré et qu'il vérifie les conditions de troncature.

La théorie géométrique des invariants

On renvoie le lecteur au livre [**13**] pour plus de détails de cette théorie. Étant donné un schéma quasi-projectif Y muni d'une action d'un groupe réductif G, la théorie géométrique des invariants produit des ouverts U de Y invariants par l'action de G tels que le quotient $U//G$ existe. Le théorème fondamental de cette théorie est le suivant. Soit Y un schéma quasi-projectif muni d'une action d'un groupe réductif G. Supposons que cette action se relève en une linéarisation sur un fibré inversible ample $\mathcal{L}$ de Y.

On peut associer à cette linéarisation l'ouvert Y^s des points stables et l'ouvert des points semistables Y^{ss} de Y :

$$Y^s \subset Y^{ss} \subset Y.$$

Alors le quotient $Y^{ss}/\!/G$ existe ; il est quasi-projectif. Les points géométriques du quotient $Y^s/\!/G$ sont en bijection avec les orbites de G dans Y^s. De plus, si Y est projectif, alors $Y^{ss}/\!/G$ est projectif.

Si Y est projectif, il existe un critère numérique, dit de Hilbert-Mumford, pour déterminer les ensembles des points stables et semistables. Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ un sous-groupe à un paramètre et soit x un point de Y ; comme Y est projective, donc propre, on peut définir

$$x_0 = \lim_{t \to 0} \lambda(t)x.$$

Ce point x_0 est un point fixe de Y sous l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ via λ. Cela implique que l'action de $\mathbb{G}_m$ sur la fibre de $\mathcal{L}$ en x_0 est donnée par un caractère

$$t \longmapsto t^r, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

On pose

$$\mu(x, \lambda) = -r.$$

Le critère numérique de Hilbert-Mumford dit que x est semistable (resp. stable) si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ, on a $\mu(x, \lambda) \geq 0$ (resp. $\mu(x, \lambda) > 0$).

Récemment, Thaddeus, Dolgachev et Hu ont étudié comment varient les différents quotients lorsque l'on fait varier la linéarisation. L'espace des linéarisations possibles est divisé en un nombre fini de polyèdres ou « chambres ». Le quotient ne change pas à l'intérieur d'une chambre mais, lorsque l'on franchit un mur qui sépare deux chambres, les quotients sont reliés par une transformation birationnelle qui, sous certaines hypothèses supplémentaires, est un flip au sens de Mori, c'est-à-dire le composé d'un éclatement et d'une contraction. On renvoie aux articles [**2**], [**18**], [**20**] pour plus de détails. Il y a plusieurs applications de ce principe de variation des quotients, par exemple, [**16**], [**15**].

Notre apport

Venons-en à notre contribution. Dans ce travail, nous commençons par appliquer la théorie géométrique des invariants pour trouver des compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld. Nous travaillons avec les champs $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$ de chtoucas dégénérés munis d'une structure de niveau en un sous-schéma fermé fini N de X. Il est muni d'un morphisme représentable et fini sur $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X \times X} (X - N)^2$ et d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$; le quotient de son espace grossier associé par ce groupe fini est l'espace grossier associé à $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X \times X} (X - N)^2$.

Fixons un polygone p_0 assez convexe en fonction de X et de r. Nous introduisons un champ $\mathcal{Y}$ qui est un $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur au-dessus de l'ouvert $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0}$ de $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$, où h dépend du degré d. Nous construisons un morphisme quasi-projectif, $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-équivariant ψ de $\mathcal{Y}$ vers un espace projectif $\mathcal{Z}$. Ce dernier est muni d'un fibré inversible ample $\mathcal{L}$ qui est équivariant par rapport à l'action de PGL_h, mais admet plusieurs $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisations. Sur $\mathcal{Z}$, on a ainsi une famille de $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisations de $\mathcal{L}$ indexée par les polygones $q : [0,r] \to \mathbb{R}$, avec $q(0) = q(r) = 0$.

Nous montrons d'abord (cf. théorème II.6.1) :

Théorème A. — *Soit $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ un polygone de troncature assez convexe en fonction de X et de r. On choisit un polygone $q : [0,r] \to \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier $0 < s < r$, on ait $p(s) < q(s) < p(s) + 1$ et sur $\mathcal{Z}$, on considère la linéarisation associée à q.*

Alors, pour un point géométrique y de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent est de type $\underline{r}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$\psi(y)$ est semistable (resp. stable) ;*

ii) *pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\text{resp.} <),$$

où $\mathcal{E}$ est le fibré vectoriel sous-jacent au chtouca dégénéré défini par y.

La stratégie de la preuve est la suivante. Nous utilisons le critère numérique de Hilbert-Mumford pour déterminer l'ensemble des points semistables et stables et puis l'ensemble des points $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ et $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^s)$. Remarquons que $\mathcal{Y}$ admet une stratification induite par celle de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$. Sur chaque strate, nous trouvons les conditions de semistabilité ii) qui sont explicites et de type combinatoire. Notons aussi que la condition combinatoire ii) définit un champ ouvert $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$.

Puis nous montrons (cf. théorème IV.4.1, corollaire IV.4.4) :

Théorème B. — *On conserve les notations du théorème précédent. Supposons que $q = \mathrm{card}(\mathbb{F}_q)$ est assez grand par rapport à r. De plus, supposons que le polygone q vérifie que $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) = \psi^{-1}(\mathcal{Z}^s)$. Alors le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q} \longrightarrow X \times X$$

est propre.

(Notons que nous pouvons supprimer l'hypothèse sur $q = \mathrm{card}(\mathbb{F}_q)$ pour $r \leq 4$.)

Pour le démontrer, nous modifions légèrement l'espace projectif $\mathcal{Z}$ ainsi que le morphisme $\psi : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$. Nous prouvons une version analogue du théorème A. Puis nous utilisons le critère valuatif de propreté. Nous nous plaçons sur la fibre générique du chtouca sous-jacent. Contrairement à la preuve de Lafforgue où l'on part d'un φ-réseau itéré et le transforme en un autre pour que les conditions de troncature soient vérifiées, le réseau nous est donné dès le départ. Par conséquent, sur la fibre spéciale, nous disposons d'un « pré-chtouca dégénéré » qui vérifie les conditions de semistabilité. Il s'agit de prouver qu'il est un chtouca dégénéré et qu'il vérifie les conditions de troncatures. Par conséquent, la preuve est divisée en plusieurs étapes

(étapes $a) - d)$) : chaque étape correspond essentiellement à une condition dans la liste. L'étape la plus longue et la plus difficile est l'étape c). Il s'agit de vérifier que le réseau donné est un φ-réseau itéré. Notons que la condition technique sur q n'apparaît que dans cette étape.

Puis dans le chapitre VI, nous montrons qu'avec différents choix du polygone q qui vérifie l'hypothèse du théorème précédent, nous trouvons les compactifications de Lafforgue, ainsi que les compactifications dites duales. Il apparaît d'autres compactifications $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ qui peuvent se voir comme des intermédiaires entre ces deux familles de compactifications.

Dans le dernier chapitre, nous étendons notre méthode pour compactifier les champs de chtoucas à modifications multiples considérés par Ngo Bao Chau [**14**] et Y. Varshavsky [**22**]. Rappelons que le champ Cht^r de chtoucas de Drinfeld de rang r classifie les fibrés vectoriels de rang r sur la courbe X, qui sont reliés à leur transformé de Frobenius par une modification élémentaire. Si l'on remplace la modification élémentaire par une modification quelconque, on obtient une généralisation des champs de chtoucas de Drinfeld, que l'on appelle *les champs de chtoucas à modifications multiples.*

On note

$$\mathbb{Z}^r_+ = \big\{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r \ ; \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r\big\}.$$

À toute collection admissible $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}^r_+$, on associe le champ algébrique de chtoucas à modifications multiples $\mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}}$. Lorsque $r \geq 2$, il n'est pas propre, ni même de type fini, donc on a besoin aussi de le compactifier. Nous introduisons la notion de chtouca dégénéré à modifications multiples qui généralise celle de chtouca dégénéré (de Drinfeld). Le champ classifiant ces objets admet aussi une stratification indexée par les familles $\underline{r}$.

La méthode de Lafforgue ainsi que ses conditions de troncature sur chaque strate semblent difficiles à généraliser. Par contre, notre méthode se généralise avec quelques petites modifications. En particulier, nos conditions de semistabilité restent les mêmes. Ainsi nous obtenons différentes compactifications $\mathrm{ChtDeg}^{r,d,q}_{\underline{\lambda}}$ de $\mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}}$ indexées par les polygones $q : [0, r] \to \mathbb{R}$.

L'organisation de ce texte

Ce texte rassemble la thèse de l'auteur à l'Université de Paris 11 (chapitres I–VI) et un travail ultérieur (chapitre VII). Ce texte est composée de sept chapitres : sauf le premier chapitre qui est un résumé du problème de compactification, les six chapitres qui suivent sont consacrés à démontrer les résultats énoncés précédemment.

Le chapitre I consiste en une introduction au problème de compactification des champs de chtoucas. Il contient la définition des chtoucas de Drinfeld et de leurs structures de niveau, les propriétés de leurs champs classifiants et le procédé de troncatures par le polygone canonique de Harder-Narasimhan. Puis il introduit le schéma des pseudo-homomorphismes complets, la définition des chtoucas dégénérés et des chtoucas itérés, de leurs champs classifiants et la description modulaire de leurs strates naturelles. Enfin, il analyse les conditions de troncature sur chaque strate et énonce le théorème de compactification de Lafforgue.

Les chapitres II et III appliquent la théorie géométrique des invariants (cf. théorème II.6.1). Il introduit d'abord le fourre-tout $\mathcal{Y}$ muni d'un morphisme équivariant ψ vers un espace projectif $\mathcal{Z}$. Ce dernier est muni d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation d'un fibré inversible ample. Puis il applique le critère numérique de Hilbert-Mumford pour déterminer les points semistables (resp. stables) et les points de $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ (resp. de $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{s})$) et analyse en détails les conditions de semistabilité sur chaque strate.

Le chapitre IV et V donnent une démonstration du théorème B (cf. corollaire IV.4.4). Il introduit un morphisme $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-équivariant du même fourre-tout $\mathcal{Y}$ dans un nouveau espace projectif $\mathcal{Z}$ (qui diffère légèrement de celui construit dans le chapitre II). Cet espace $\mathcal{Z}$ est muni aussi d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation d'un fibré inversible ample. Puis il détermine les points de $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ (resp. de $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{s})$) et analyse en détails les conditions de semistabilité sur chaque strate. Enfin, sous l'hypothèse que q est très grand par rapport à r, il vérifie que le morphisme $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \to \mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2$ est propre, ce qui permet de conclure.

Le chapitre VI analyse les différentes compactifications des champs de chtoucas pour différents choix du polygone q. Parmi eux, nous retrouvons les compactifications définies par Lafforgue, et nous découvrons les compactifications duales.

Le chapitre V étend la méthode précédente pour construire des compactifications des champs de chtoucas à modifications multiples. Il contient la définition des chtoucas à modifications multiples et de leurs structures de niveau, les propriétés de leurs champs classifiants et le procédé de troncature par le polygone canonique de Harder-Narasimhan. Puis il introduit la notion de chtouca dégénéré à modifications multiples et de leurs champs classifiants. Enfin, il construit des compactifications en utilisant la méthode développée dans les chapitres précédents.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à exprimer ma très profonde gratitude envers mon directeur de thèse Laurent Lafforgue pour ce qu'il m'a appris durant ces dernières années, pour sa disponibilité, pour son encouragement permanent, pour son soutien moral dans les moments difficiles et pour sa patience de lire les textes que je lui soumettais.

Je remercie aussi Vladimir Drinfeld, Michel Brion et Ngô Bao Châu pour leur aide et leur encouragement.

Enfin, je remercie profondément les rapporteurs pour leur patience, leurs relectures attentives et leurs très nombreuses remarques, critiques et corrections. Ils m'ont permis de corriger plusieurs erreurs et d'améliorer la rédaction de ce texte.

CHAPITRE I

CHTOUCAS DE DRINFELD : RAPPELS

Ce chapitre consiste en une introduction au problème de compactification des champs (et des espaces de module) de chtoucas. On renvoie le lecteur aux articles de Drinfeld [**3**], [**4**], et de Lafforgue [**8**], [**9**], [**10**] pour les démonstrations.

I.1. Notations

On fixe une fois pour toutes un entier $r \geq 2$. Une *famille* $\underline{r}$ est une suite croissante d'entiers $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, avec $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = r$. Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$; on notera s^- le plus grand élément $t \in \underline{r} \cup \{0\}$ tel que $t < s$ et s^+ le plus petit élément $t \in \underline{r}$ tel que $t \geq s$. On les appelle le prédécesseur et le successeur de s dans $\underline{r}$.

Fixons une fois pour toutes une courbe algébrique projective lisse géométriquement connexe X sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. On fixe aussi une clôture algébrique $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$; on notera $\overline{X}$ le produit fibré

$$\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}_q} k.$$

Tous les schémas et tous les champs considérés seront définis sur $\mathbb{F}_q$. Soient Y et Z deux tels objets ; $Y \times Z$ désignera le produit fibré $Y \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q} Z$.

Soit S un schéma (sur $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$) ; on notera $\operatorname{Frob}_S : S \to S$ le morphisme de Frobenius sur S qui est l'identité sur l'ensemble sous-jacent et qui sur le faisceau de structure $\mathcal{O}_S$ est l'élévation à la puissance q. Si $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur le produit $X \times S$; on notera $\mathcal{E}^\sigma$ le fibré vectoriel $(\mathrm{Id}_X \times \operatorname{Frob}_S)^* \mathcal{E}$ sur $X \times S$.

I.2. Chtoucas de Drinfeld

I.2.1. Définition. — On note Vec^r le champ algébrique classifiant les fibrés vectoriels de rang r sur la courbe X. Puis on définit :

Définition I.2.1. — *Le champ* Hecke^r *associe à tout schéma S les données formées de*

i) *un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur $X \times S$,*

ii) *deux morphismes* $\infty : S \to X$ *et* $0 : S \to X$,

iii) *une modification* $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ *de* $\mathcal{E}$ *par deux fibrés vectoriels* $\mathcal{E}'$ *et* $\mathcal{E}''$ *de rang* r *sur* $X \times S$, *dont les conoyaux sont supportés par les graphes des morphismes* ∞ *et* 0 *respectivement et sont localement libres de rang* 1 *sur* $\mathcal{O}_S$.

Le champ Hecke^r est algébrique, muni d'un morphisme représentable et projectif vers le champ Vec^r

$$\mathrm{Hecke}^r \longrightarrow X^2 \times \mathrm{Vec}^r, \quad (\mathcal{E}, \mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'') \longmapsto (\infty, 0, \mathcal{E}).$$

Drinfeld a défini (cf. [**8**, déf. I.1]) :

Définition I.2.2. — *Soit* S *un schéma ; on appelle* chtouca à droite (*resp.* à gauche) *de rang* r *sur* S *la donnée formée de*

i) *un fibré vectoriel* $\mathcal{E}$ *de rang* r *sur* $X \times S$;

ii) *deux morphismes* $\infty : S \longrightarrow X$ *et* $0 : S \longrightarrow X$;

iii) *une modification* $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ (*resp.* $\mathcal{E} \hookleftarrow \mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{E}''$) *de* $\mathcal{E}$ *par deux fibrés vectoriels* $\mathcal{E}'$ *et* $\mathcal{E}''$ *de rang* r *sur* $X \times S$, *dont les conoyaux sont supportés par les graphes des morphismes* ∞ *et* 0 *respectivement et sont localement libres de rang* 1 *sur* $\mathcal{O}_S$;

iv) *un isomorphisme* $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^*\mathcal{E} = \mathcal{E}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$.

Dans la suite et sauf mention explicite du contraire, les chtoucas seront tous à droite et on dira simplement chtouca pour chtouca à droite.

Le champ $\mathrm{Cht}^{\mathrm{r}}$ classifiant les chtoucas est un champ algébrique au sens de Deligne-Mumford (cf. [**8**, section I.2]) ; il s'inscrit dans un diagramme cartésien de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cht}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Hecke}^r & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r \times \mathrm{Vec}^r, \end{array}$$

dont les morphismes horizontaux sont

$$(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma) \longmapsto \mathcal{E}, \quad (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'') \longmapsto (\mathcal{E}, \mathcal{E}''),$$

et dont les morphismes verticaux sont

$$(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma) \longmapsto (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''), \quad \mathcal{E} \longmapsto (\mathcal{E}, \mathcal{E}^\sigma).$$

En associant à un chtouca son pôle ∞ et son zéro 0, on définit un morphisme

$$(\infty, 0) : \mathrm{Cht}^{\mathrm{r}} \longrightarrow X \times X$$

qui est lisse, purement de dimension relative $2r - 2$ (cf. [**8**, section I.2, th. 9]).

On décompose Cht^r en

$$\mathrm{Cht}^r = \coprod_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Cht}^{r,d},$$

où le champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$ classifie les chtoucas $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma)$ avec $\deg \mathcal{E} = d$. Chaque sous-champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$ a un nombre fini de composantes connexes et est localement de type fini puisque lisse sur $X \times X$; par contre, il n'est pas de type fini.

I.2.2. Structures de niveau

Définition I.2.3. — *Soit N un niveau de X, autrement dit un sous-schéma fermé fini de X et soit S un schéma. Une structure de niveau N d'un chtouca*

$$\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma)$$

de rang r sur S, dont le zéro et le pôle évitent le niveau N consiste en un isomorphisme

$$u : \mathcal{E}_{N\times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^r_{N\times S},$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{N\times S} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "u"'] & \mathcal{E}_{N\times S} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}'_{N\times S} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{E}^\sigma_{N\times S} \arrow[d, "u^\sigma"] \\ \mathcal{O}^r_{N\times S} \arrow[rrr, equal] & & & \mathcal{O}^r_{N\times S}. \end{tikzcd}$$

On notera Cht^r_N le champ classifiant les chtoucas munis d'une structure de niveau N ; le morphisme d'oubli de structure de niveau

$$\mathrm{Cht}^r_N \longrightarrow \mathrm{Cht}^r \times_{X\times X} (X-N)\times(X-N)$$

est représentable, fini, étale, galoisien de groupe de Galois $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ (cf. [**8**, section I.3, prop. 5]).

I.2.3. Filtration de Harder-Narasimhan

Définition I.2.4. — a) *Appelons* polygone *une application*

$$p : [0,r] \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $p(0) = p(r) = 0$ et p soit affine sur tout intervalle $[i-1,i]$, avec $1 \leq i \leq r$.

b) *Un polygone p est dit* rationnel *si tous les nombres $\{p(i)\}_{0<i<r}$ sont rationnels.*

c) *Un polygone p est dit* convexe *si, pour tout entier i, avec $0 < i < r$, on a*

$$-p(i+1) + 2p(i) - p(i-1) \geq 0.$$

d) *Un polygone p est dit* assez convexe par rapport à un réel μ *si tous les termes $-p(i-1)+2p(i)-p(i+1)$, avec $0<i<r$, sont assez grands par rapport à μ.*

e) *Soit d un entier; un polygone p est dit* entier par rapport à d *si tous les termes $p(i)+id/r$, avec $0<i<r$, sont entiers.*

Remarquons que se donner un polygone p est équivalent à se donner une suite de réels $\{p(i)\}_{0<i<r}$. La définition suivante sera utilisée par la suite.

Définition I.2.5. — *Soient p, q deux polygones; on dit que q* est compris strictement entre p *et* $p+\mathbf{1}$ *et on notera $q \in\,]p, p+\mathbf{1}[$, si l'on a l'inégalité stricte*

$$p(i) < q(i) < p(i)+1,$$

pour tout entier i, avec $0 < i < r$.

Rappelons maintenant la notion de fibré vectoriel semistable sur $\overline{X}$.

Définition I.2.6. — *Étant donné $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r sur $\overline{X}$, on appelle* pente *de $\mathcal{E}$ et on note $\mu(\mathcal{E})$ le quotient* $\deg \mathcal{E} / \operatorname{rg} \mathcal{E}$ *; puis on pose*

$$\mu^+(\mathcal{E}) = \sup \big\{ \mu(\mathcal{F}) \ ;\ \mathcal{F} \textit{ est un sous-fibré maximal non trivial de } \mathcal{E} \big\},$$
$$\mu^-(\mathcal{E}) = \inf \big\{ \mu(\mathcal{E}/\mathcal{F}) \ ;\ \mathcal{F} \textit{ est un sous-fibré maximal non trivial de } \mathcal{E} \big\}.$$

Définition I.2.7. — *Avec les notations ci-dessus, un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur $\overline{X}$ est* semistable (*resp.* stable) *si, pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité $\mu(\mathcal{F}) \leq \mu(\mathcal{E})$ (resp. $\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$).*

Dans [**6**], Harder et Narasimhan prouvent :

Proposition I.2.8. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r sur $\overline{X}$; il existe alors une unique filtration de $\mathcal{E}$ par des sous-fibrés maximaux*

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_k = \mathcal{E}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

i) *Les fibrés vectoriels $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k/\mathcal{E}_{k-1}$ sont semistables.*

ii) $\mu(\mathcal{E}_1) > \mu(\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1) > \cdots > \mu(\mathcal{E}_k/\mathcal{E}_{k-1})$.

On l'appelle la filtration canonique de Harder-Narasimhan *de $\mathcal{E}$.*

On associe à cette filtration le polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, dont les seules ruptures de pente sont en les entiers $\operatorname{rg} \mathcal{E}_i$ et qui, en ces entiers, vaut

$$p(\operatorname{rg} \mathcal{E}_i) = \deg \mathcal{E}_i - \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_i}{r} \deg \mathcal{E}.$$

On l'appelle le polygone canonique de Harder-Narasimhan associé à *$\mathcal{E}$ et on le note $p(\mathcal{E})$; il vérifie les propriétés suivantes :*

i) *il est convexe (cf. définition I.2.4 c)) ;*

ii) *soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}$; alors*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} \deg \mathcal{E} + p(\operatorname{rg} \mathcal{F}).$$

Voici une conséquence immédiate de l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan (cf. [**6**]).

Proposition I.2.9. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r sur $\overline{X}$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel maximal non trivial de $\mathcal{E}$ avec $\mu^+(\mathcal{E}/\mathcal{F}) < \mu^-(\mathcal{F})$. La filtration de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}$ est alors un raffinement de la filtration $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$.*

I.2.4. Troncature. — On sait (cf. section I.2.1) que tout sous-champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$, avec $d \in \mathbb{Z}$, n'est pas de type fini ; on va définir les différents ouverts de type fini de $\mathrm{Cht}^{r,d}$ grâce à la filtration de Harder-Narasimhan.

Définition I.2.10. — *Soit $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \xleftarrow{\sim} \mathcal{E}^\sigma)$ un chtouca sur* $\operatorname{Spec} k$ *; on appelle* sous-objet *de $\widetilde{\mathcal{E}}$ la donnée de deux sous-fibrés maximaux vectoriels $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ de même rang telle que les plongements $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}^\sigma \hookrightarrow \mathcal{E}'$ envoient $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^\sigma$ dans $\mathcal{F}'$. On associe à ce sous-objet son* rang $\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}} = \operatorname{rg} \mathcal{F}$ *et son* degré $\deg \widetilde{\mathcal{F}} = \deg \mathcal{F}$.

Soit $0 = \widetilde{\mathcal{F}}_0 \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \widetilde{\mathcal{F}}_k = \widetilde{\mathcal{E}}$ une filtration de $\widetilde{\mathcal{E}}$ par des sous-objets ; on peut lui associer un polygone $p : [0, r] \to \mathbb{R}$, dont les seules ruptures de pente sont en les entiers $\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}_i$ et qui, en ces entiers, vaut

$$p(\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}_i) = \deg \widetilde{\mathcal{F}}_i - \frac{\operatorname{rg} \widetilde{\mathcal{F}}_i}{r} \deg \widetilde{\mathcal{E}}.$$

On montre (cf. [**8**, section II.2, th. 5]) que, parmi les polygones associés aux filtrations de $\widetilde{\mathcal{E}}$, il y a un polygone qui est plus grand que tous les autres ; ce polygone est appelé *le polygone canonique de Harder-Narasimhan de* $\widetilde{\mathcal{E}}$, on le note $p(\widetilde{\mathcal{E}})$; la filtration la moins fine, qui le définit, est appelée *la filtration canonique de Harder-Narasimhan de* $\widetilde{\mathcal{E}}$.

Lafforgue prouve (cf. [**9**, th. II.8]) :

Proposition I.2.11. — *Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone convexe ; dans le champ $\mathrm{Cht}^{r,d}$, il existe alors un unique ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ tel qu'un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartienne à cet ouvert si et seulement si le polygone canonique de Harder-Narasimhan associé à $\widetilde{\mathcal{E}}$ soit majoré par p. Le champ $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ est de type fini. De plus, $\mathrm{Cht}^{r,d}$ est la réunion filtrante des ouverts $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$.*

Le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est majoré *a priori* par celui de $\mathcal{E}$. Sous certaines hypothèses, on prouve la réciproque (cf. [**8**, section II.2, lemme 10]) :

Proposition I.2.12. — *Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone assez convexe en fonction de X et de r ; alors un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartient à l'ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,p}$ si et seulement si le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$ est majoré par p.*

I.3. Chtoucas dégénérés. Chtoucas itérés

I.3.1. Pseudo-homomorphismes complets. Homomorphismes complets. — On considère le foncteur H qui à tout anneau A associe l'ensemble

$$\prod_{1 \leq s \leq r-1} \operatorname{Hom}(\bigwedge^s A^r, \bigwedge^s A^r) \times \operatorname{Isom}(\bigwedge^r A^r, \bigwedge^r A^r) \times A^{r-1};$$

il est représentable par un schéma que l'on note encore H. On note H^r l'ouvert dense de H défini en demandant que tous les morphismes $u_s \in \operatorname{Hom}(\bigwedge^s A^r, \bigwedge^s A^r)$, avec $1 \leq s \leq r$, soient partout non-nuls. Puis on définit $\Omega^r_{(r)}$ comme le sous-schéma localement fermé de H^r formé des uplets

$$(u_1, u_2, \ldots, u_r, \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1})$$

tels que

i) les $\{\ell_i\}_{1 \leq i \leq r-1}$ sont partout inversibles,

ii) u_1 est un isomorphisme,

iii) on a $\bigwedge^s u_1 = \ell_1^{s-1} \ell_2^{s-2} \cdots \ell_{s-1} u_s$, pour $1 \leq s \leq r$.

On note Ω^r (resp. Ω) l'adhérence schématique de $\Omega^r_{(r)}$ dans H^r (resp. H) ; on voit bien que $\Omega \cap \mathrm{H}^r = \Omega^r$. Le schéma Ω^r (resp. Ω) est appelé *le schéma des homomorphismes complets de rang r* (resp. *le schéma des pseudo-homomorphismes complets de rang r*). Le schéma Ω est exactement le semi-groupe de Vinberg de GL_r, cf. [**23**] et [**1**].

La proposition suivante est due à Lafforgue et Vinberg, cf. [**23**], [**9**, section 1a] et [**1**, chap. 6] :

Proposition I.3.1. — a) *Le schéma des homomorphismes complets Ω^r (resp. le schéma des pseudo-homomorphismes complets Ω) contient $\mathrm{GL}_r \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ comme ouvert dense et il est muni de deux actions à droite et à gauche de $\mathrm{GL}_r \times \mathbb{G}_m^{r-1}$.*

b) *Le schéma Ω est normal.*

c) *Le schéma Ω^r est lisse et son bord est un diviseur à croisements normaux.*

d) *Les strates de bord $\Omega^r_{\underline{r}}$ de Ω^r sont indexées par les familles $\underline{r}$; elles ont la description modulaire suivante. Soit $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ une famille qui vérifie $0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = r$; on note $\Omega^r_{\underline{r}}$ le sous-schéma localement fermé défini en demandant que $\ell_s = 0$ pour tout $s \in \underline{r}$ et que les autres soient partout inversibles. Alors ce schéma représente le foncteur qui à tout anneau A associe l'ensemble des uplets*

$$(u_1, u_2, \ldots, u_r, \ell_1, \ldots, \ell_{r_1-1}, \ell_{r_1+1}, \ldots, \ell_{r_2-1}, \ell_{r_2+1}, \ldots)$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) *les ℓ_i sont partout inversibles,*

ii) *$u_1 : A^r \to A^r$ est un homomorphisme de rang partout égal à r_1,*

iii) *$u_2 : \ker u_1 \to A^r / \operatorname{Im} u_1$ est un homomorphisme de rang partout égal à $r_2 - r_1$,*

iv) *$u_3 : \ker u_2 \to (A^r / \operatorname{Im} u_1)/ \operatorname{Im} u_2$ est un homomorphisme de rang partout égal à $r_3 - r_2$,*

v) *etc.*

Comme GL_r agit à droite et à gauche sur le schéma Ω^r (resp. Ω), on peut parler de la notion d'homomorphisme complet (resp. la notion de pseudo-homomorphisme complet) $\mathcal{F} \Rrightarrow \mathcal{G}$ entre deux fibrés vectoriels $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ de rang r sur un schéma S.

Définition I.3.2. — *Soit S un schéma et soient $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1 \le i \le r-1}$ des couples où $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible sur le schéma S et ℓ_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$; un homomorphisme complet (resp. un pseudo-homomorphisme complet) de type $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1 \le i \le r-1}$*

$$\mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{G}$$

entre deux fibrés vectoriels $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ de rang r sur S consiste en un ensemble d'homomorphismes

$$u_s : \bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{1 \le i < s} \mathcal{L}_i^{\otimes (s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{G}, \quad 1 \le s \le r,$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) *On a $\bigwedge^s u_1 = \ell_1^{s-1} \ell_2^{s-2} \cdots \ell_{s-1} u_s$, pour $1 \le s \le r$.*

ii) *Pour un (et donc pour tout) choix de trivialisations de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et des $\mathcal{L}_i$ localement sur S, la famille $(u_1,\dots,u_r,\ell_1,\dots,\ell_{r-1})$ appartient au schéma Ω^r (resp. Ω).*

Soit $\underline{r}=(r_1,r_2,\dots,r_k)$ une famille ; un homomorphisme complet (resp. un pseudo-homomorphisme complet) est dit *de type* $\underline{r}$ si l'on a

$$\ell_s=\begin{cases}0 & \text{si } s\in\underline{r},\\ \text{inversible} & \text{si } s\notin\underline{r}.\end{cases}$$

On peut donc identifier les fibrés inversibles $(\mathcal{L}_s)_{s\notin\underline{r}}$ munis d'une section globale inversible ℓ_s avec le couple $(\mathcal{O}_S,1)$; d'après la proposition I.3.1, cet homomorphisme complet consiste en :

i) une filtration décroissante $\mathcal{F}\supsetneq\mathcal{F}_{r_1}\supsetneq\cdots\supsetneq\mathcal{F}_{s^-}\supsetneq\mathcal{F}_s\supsetneq\cdots\supsetneq\mathcal{F}_{r_k}=0$ $(s\in\underline{r})$ de $\mathcal{F}$ par des sous-fibrés maximaux de corangs respectifs $r_1,\dots,s^-,s,\dots,r_k$;

ii) une filtration croissante $0\subsetneq\mathcal{E}_{r_1}\subsetneq\cdots\subsetneq\mathcal{E}_{s^-}\subsetneq\mathcal{E}_s\subsetneq\cdots\subsetneq\mathcal{E}_{r_k}=\mathcal{E}$ $(s\in\underline{r})$ de $\mathcal{E}$ par des sous-fibrés maximaux de rang $r_1,\dots,s^-,s,\dots,r_k$ respectivement ;

iii) des isomorphismes

$$\mathcal{F}_{s^-}/\mathcal{F}_s\otimes\bigotimes_{\substack{i\in\underline{r}\\ i<s}}\mathcal{L}_i\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-},\quad s\in\underline{r}.$$

(*On renvoie le lecteur à la section I.1 pour la notation s^-.*)

I.3.2. Chtoucas dégénérés

Définition I.3.3. — *Le* champ algébrique ChtDeg^r *de chtoucas dégénérés est le foncteur qui à tout schéma S associe les données formées :*

i) *d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ de rang r sur $X\times S$;*

ii) *deux morphismes $\infty : S\to X$ et $0 : S\to X$;*

iii) *d'une modification $\mathcal{E}\hookrightarrow\mathcal{E}'\hookleftarrow\mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ par deux fibrés vectoriels $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ de rang r sur $X\times S$, dont les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'/\mathcal{E}''$ sont supportés par les graphes des morphismes ∞ et 0 respectivement et sont localement libres de rang 1 sur $\mathcal{O}_S$;*

iv) *des couples $(\mathcal{L}_i,\ell_i)_{1\le i\le r-1}$, où $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible sur S et ℓ_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$;*

v) *d'un pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{E}^\sigma\Rightarrow\mathcal{E}''$ de type $(\mathcal{L}_i,\ell_i)_{1\le i\le r-1}^{\otimes(q-1)}$, ce qui veut dire, une famille d'homomorphismes*

$$u_s:\bigwedge^s\mathcal{E}^\sigma\otimes\bigotimes_{1\le i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes q(s-i)}\longrightarrow\bigwedge^s\mathcal{E}''\otimes\bigotimes_{1\le i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)},\quad 1\le s\le r,$$

ou

$$u_s:\bigwedge^s\mathcal{E}^\sigma\otimes\bigotimes_{1\le i<s}\mathcal{L}_i^{\otimes(q-1)(s-i)}\longrightarrow\bigwedge^s\mathcal{E}'',\quad 1\le s\le r,$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

a) *pour un (et donc pour tout) choix de trivialisations de $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}^\sigma$ et des $\mathcal{L}_i$ localement sur $X\times S$, la famille $(u_1,\dots,u_r,\ell_1^{q-1},\dots,\ell_{r-1}^{q-1})$ appartient au schéma Ω (cf. section I.3.1);*

b) *génériquement au-dessus de tout point géométrique de S, aucun u_s qui peut se voir sous la forme*

$$u_s : \Big(\bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\Big)^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E} \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

n'est nilpotent.

Le champ ChtDeg^r est algébrique au sens d'Artin et localement de type fini (cf. [**9**, prop. 1.5]).

Soit d un entier et soit $\underline{r}$ une famille ; on notera $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$ le sous-champ de ChtDeg^r classifiant les chtoucas dégénérés $\widetilde{\mathcal{E}}$ de degré d, c'est-à-dire $\deg \mathcal{E} = d$; et $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{r}}$ le sous-champ de ChtDeg^r classifiant les chtoucas dégénérés de degré d et de type $\underline{r}$.

I.3.3. Strates. Dégénérateurs. — On conserve les notations de la section précédente. Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un point géométrique de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}$ de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$. Comme tous les morphismes u_s, avec $1 \leq s \leq r$, ne sont pas nilpotents génériquement, ils ne s'annulent pas génériquement. Il existe donc un ouvert non vide U de X tel qu'en tout point géométrique de U, tous les homomorphismes u_s, avec $1 \leq s \leq r$, ne s'annulent pas. Cela implique que la restriction du pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{E}^\sigma \Rightarrow \mathcal{E}''$ à U est un homomorphisme complet. On dispose donc

▷ d'une filtration décroissante $\mathcal{E}^\sigma = \bar{\mathcal{E}} \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_s \supsetneq \cdots \supsetneq 0$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de $\mathcal{E}^\sigma$ de corangs $r_1, r_2, \ldots, r_k$;

▷ d'une filtration croissante $0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''_s \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de $\mathcal{E}''$ de rangs $r_1, r_2, \ldots, r_k$;

▷ des isomorphismes sur l'ouvert U $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$, $s \in \underline{r}$, où s^- est le prédécesseur de s dans $\underline{r}$, (cf. section I.1).

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$. La restriction de u_s sur l'ouvert U est alors le composé de trois morphismes :

▷ la restriction à U de la surjection

$$\bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma \twoheadrightarrow \bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}\\ t<s}} \det(\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+},$$

▷ l'isomorphisme sur U

$$\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}\\ t<s}} \det(\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}''_t/\mathcal{E}''_{t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}''_{s^+}/\mathcal{E}''_{s^-},$$

▷ la restriction à U de l'injection

$$\bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}''_t/\mathcal{E}''_{t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}''_{s^+}/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}''.$$

Comme le morphisme $u_s : \bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}''$ est défini partout, le morphisme que l'on note w_s,

$$\bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+} \longrightarrow \bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}''_t/\mathcal{E}''_{t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}''_{s^+}/\mathcal{E}''_{s^-}$$

est alors un plongement partout bien défini. Puis le morphisme u_s est le composé de la surjection précédente, de ce plongement et de l'injection précédente.

La filtration précédente de $\mathcal{E}''$ et les modifications $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ induisent des filtrations

$$0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_s \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}, \quad 0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'_s \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'$$

de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de rangs $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Comme génériquement, tous les morphismes u_s $(1 \leq s \leq r)$ ne sont jamais nilpotents, $\mathcal{E}^\sigma_s \cap \bar{\mathcal{E}}_s = 0$ pour tout entier $s \in \underline{r}$, donc $\mathcal{E}^\sigma_s \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ est un sous-fibré vectoriel de rang r de $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma$. En particulier, les quotients $\bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E}^\sigma_s \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ $(s \in \underline{r})$ sont de torsion.

Définition I.3.4. — *Un point x de X est appelé* dégénérateur *du chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ si une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) *il appartient au support de $\bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E}^\sigma_s \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ pour un certain $s \in \underline{r}$;*

b) *il appartient au support du plongement w_s défini précédemment pour un certain $1 \leq s \leq r$.*

En général, on ne peut rien dire sur le nombre de dégénérateurs d'un chtouca dégénéré. Par contre, on prouve :

Proposition I.3.5. — *Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca dégénéré. Supposons que le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$ est majoré par un polygone p_0. Alors le nombre de dégénérateurs de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est borné par une fonction* $\mathrm{Deg}(r, p_0)$ *qui ne dépend que de r et de p_0.*

Démonstration. — Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$. Le plongement

$$w_{s^-+1} : \bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t\leq s^-}} \det(\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t) \otimes \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \hookrightarrow \bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t\leq s^-}} \det(\mathcal{E}''_t/\mathcal{E}''_{t^-}) \otimes \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$$

est un plongement entre deux fibrés vectoriels de même rang ; on a ainsi $\deg \bar{\mathcal{E}}/\bar{\mathcal{E}}_s \leq \deg \mathcal{E}''_s$, donc $d \leq \deg \bar{\mathcal{E}}_s + \deg \mathcal{E}''_s$. Comme $\deg \mathcal{E}''_s \leq \deg \mathcal{E}_s + 1$, on en déduit que le quotient $\bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E}^\sigma_s \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ est de longueur au plus 1. On conclut alors que la réunion des supports des $\bar{\mathcal{E}}/\mathcal{E}^\sigma_s \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ $(s \in \underline{r})$ est pour cardinal majoré par $r-1$.

Pour conclure, il suffit de prouver que la réunion des supports des plongements w_s $(1 \leq s \leq r)$ est pour cardinal majoré en fonction de r et p_0. En effet, soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$; le cardinal du support du plongement w_{s^-+1} est borné par $\deg \bar{\mathcal{E}}_s + \deg \mathcal{E}''_s - d$ qui est majoré en fonction de p_0. D'où la conclusion. □

Définition I.3.6. — *Avec les notations précédentes, si $\mathcal{F}$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}^\sigma$), pour tout entier $s \in \underline{r}$, on définit $\bar{\mathcal{F}}_s$ le sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s$ (resp. $\mathcal{F} \cap \bar{\mathcal{E}}_s$) de $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma$.*

I.3.4. Chtoucas itérés. — Soit S un schéma et soit $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ une famille. Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca dégénéré sur S de rang r et de type $\underline{r}$. Donc

$$\ell_s = \begin{cases} 0 & \text{si } s \in \underline{r}, \\ \text{inversible} & \text{si } s \notin \underline{r}. \end{cases}$$

On peut identifier les fibrés inversibles $(\mathcal{L}_s)_{s \notin \underline{r}}$ munis d'une section globale inversible ℓ_s avec le couple $(\mathcal{O}_S, 1)$.

Définition I.3.7. — *Le champ* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r}$ *de* chtoucas itérés de type $\underline{r}$ *est le sous-champ ouvert de* $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{r}}^r$ *soumis aux conditions ouvertes suivantes :*

a) *Le pseudo-homomorphisme $\mathcal{E}^\sigma \Rightarrow \mathcal{E}''$ est un homomorphisme complet. D'après la section I.3.1, on dispose donc*

$\triangleright$ *d'une filtration croissante $0 \subsetneq \mathcal{E}''_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''_{r_k} = \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}''$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $r_1, \ldots, r_k$ respectivement,*

$\triangleright$ *d'une filtration décroissante $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_k} = 0$ de $\mathcal{E}^\sigma$ par des sous-fibrés maximaux de corangs $r_1, \ldots, r_k$ respectivement,*

$\triangleright$ *des isomorphismes $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}_i^{\otimes(q-1)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$, $s \in \underline{r}$, où $\bar{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}^\sigma$.*

b) *Si l'on note $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$ pour tout $s \in \underline{r}$, alors tous les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}'_s$ sont sans torsion, donc localement libres sur $X \times S$.*

c) *Pour tout $s \in \underline{r}$, le morphisme $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est surjectif ; alors le noyau $\mathcal{E}_s$ de ce morphisme est localement libre sur $X \times S$.*

d) *Pour tout $s \in \underline{r}$, on a $\bar{\mathcal{E}}_{s^-} + \mathcal{E}_s^\sigma = \mathcal{E}^\sigma$.*

Puis le champ $\overline{\mathrm{Cht}^r}$ de *chtoucas itérés* est l'unique sous-champ ouvert de ChtDeg^r, dont pour toute famille $\underline{r}$, la trace dans $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{r}}^r$ est $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r}$. Soit $\underline{r}$ une famille ; on notera $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ le sous-champ de la strate $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^r}$ classifiant les chtoucas itérés de type $\underline{r}$, dont $\deg \mathcal{E} = d$.

Soit S un schéma et soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca itéré de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ sur S ; on lui associe de vrais chtoucas (dont certains sont des chtoucas à gauche) de la manière suivante (cf. [**9**, p. 1009–1010]).

$\triangleright$ D'abord, pour $s = r_1 = 0^+$, on pose $E_{r_1} = \mathcal{E}_{r_1}$ et $E'_{r_1} = \mathcal{E}'_{r_1} = \mathcal{E}''_{r_1}$; on montre que $\widetilde{E}_{r_1} = (E_{r_1} \hookrightarrow E'_{r_1} \hookleftarrow E^\sigma_{r_1})$ est un chtouca à droite de rang r_1 dont le pôle est le pôle ∞ du chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$. En effet, le plongement $E_{r_1} \hookrightarrow E'_{r_1}$ est le plongement canonique ; le plongement $E^\sigma_{r_1} \hookrightarrow E'_{r_1}$ est le composé

$$E^\sigma_{r_1} \longhookrightarrow \mathcal{E}^\sigma \longrightarrow \mathcal{E}^\sigma/\bar{\mathcal{E}}_{r_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_{r_1} = \mathcal{E}'_{r_1} = E'_{r_1}.$$

Ces plongements définissent bien un chtouca à droite $\widetilde{E}_{r_1}$. De plus, on a un isomorphisme canonique $E'_{r_1}/E_{r_1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'/\mathcal{E}$, le pôle du chtouca $\widetilde{E}_{r_1}$ coïncide donc avec le pôle du chtouca initial $\widetilde{\mathcal{E}}$.

▷ Pour tout $s \in \underline{r}$ et $s > r_1 = 0^+$, on pose

$$E_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}_i, \quad E'_s = (\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}^\sigma_s) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}^q_i.$$

On prouve que $\widetilde{E}_s = (E_s \hookleftarrow E'_s \hookrightarrow E^\sigma_s)$ est un chtouca à gauche. En effet, le plongement $E'_s \hookrightarrow E_s$ est le composé

$$\begin{aligned} E'_s = (\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}^\sigma_s) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}^q_i &\longhookrightarrow (\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}^q_i \\ &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}_i \longhookrightarrow (\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}_i = E_s, \end{aligned}$$

et le plongement $E'_s \hookrightarrow E^\sigma_s$ est le composé

$$E'_s = (\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}^\sigma_s) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}^q_i \longhookrightarrow (\mathcal{E}^\sigma_s/\mathcal{E}^\sigma_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i<s}} \mathcal{L}^q_i = E^\sigma_s.$$

Ces plongements définissent un chtouca à gauche $\widetilde{E}_s$. De plus, on peut montrer que le pôle de $\widetilde{E}_s$ coïncide avec le zéro de son prédécesseur $\widetilde{E}_{s^-}$ et que le zéro du dernier chtouca $\widetilde{E}_{r^-}$ coïncide avec le zéro 0 du chtouca itéré initial $\widetilde{\mathcal{E}}$. Les zéros et les pôles des chtoucas $\widetilde{E}_s$ ($s \in \underline{r}$) autres que 0 et ∞ sont exactement les dégénérateurs du chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$.

I.3.5. Troncature. — Soit $p : [0, r] \to \mathbb{R}$ un polygone convexe et $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ une famille. On considère un point géométrique du champ $\overline{\mathrm{Cht}^r_{\underline{r}}}$; d'après la section I.3.4, on dispose :

▷ d'une filtration décroissante $\mathcal{E}^\sigma = \bar{\mathcal{E}} \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_1} \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_k} = 0$ de $\bar{\mathcal{E}}$ par des sous-fibrés maximaux de corangs $r_1, \ldots, r_k$ respectivement,

▷ d'une filtration croissante $0 \subsetneq \mathcal{E}''_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}''_{r_k} = \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}''$ par des sous-fibrés maximaux de rangs $r_1, \ldots, r_k$ respectivement ; elle induit, via la modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$, deux filtrations de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ par des sous-fibrés maximaux

$$0 \subsetneq \mathcal{E}_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{r_k} = \mathcal{E} \quad \text{et} \quad 0 \subsetneq \mathcal{E}'_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'_{r_k} = \mathcal{E}',$$

▷ des isomorphismes $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}$, $\quad s \in \underline{r}$.

D'après Lafforgue [**9**, déf. 1.8], on définit :

Définition I.3.8. — i) *Un* sous-objet *d'un chtouca itéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $\underline{r}$ consiste en deux sous-fibrés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ ayant même rang et tels que le plongement $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}'$ envoie $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}'$ et que, pour tout $s \in \underline{r}$, le plongement $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \mathcal{E}'_s/\mathcal{E}'_{s^-}$ envoie $\mathcal{F}^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\mathcal{F}^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s$ dans $\mathcal{F}' \cap \mathcal{E}'_s/\mathcal{F}' \cap \mathcal{E}'_{s^-}$.*

ii) *Un sous-objet* $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ *est* bon *si* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{F}'$ *sont maximaux et s'il existe un entier* $s\in\underline{r}$ *tel que* $\mathcal{E}_{s^-}\subsetneq\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}_s$ *et* $\mathcal{E}'_{s^-}\subsetneq\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{E}'_s$.

iii) *Un bon sous-objet est de* type I *si* $s=r_1=0^+$ *ou bien si*

$$s>r_1=0^+ \quad \text{et} \quad \deg(\mathcal{F}^\sigma\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-})<\deg(\mathcal{F}/\mathcal{E}_{s^-}).$$

Un bon sous-objet est de type II *si*

$$s>r_1=0^+ \quad \text{et} \quad \deg(\mathcal{F}^\sigma\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-})=\deg(\mathcal{F}/\mathcal{E}_{s^-}).$$

Lafforgue prouve (cf. [**9**, prop. 1.9]) :

Proposition I.3.9. — *Il existe dans le champ* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ *de chtoucas itérés de type* $\underline{r}$ *un unique ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,p}}$ *tel que, pour tout point géométrique de* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$, *ce point soit dans* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,p}}$ *si et seulement si :*

▷ *pour tout* $s\in\underline{r}$, *on ait l'inégalité*

$$p(s)-1<\deg\mathcal{E}_s-\frac{s}{r}\deg\mathcal{E}\le p(s),$$

▷ *pour tout bon sous-objet* $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ *de type I, on ait l'inégalité*

$$\deg\mathcal{F}-\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}\deg\mathcal{E}\le p(\mathrm{rg}\,\mathcal{F}),$$

▷ *pour tout bon sous-objet* $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ *de type II, on ait l'inégalité*

$$\deg\mathcal{F}-\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}\deg\mathcal{E}\le p(\mathrm{rg}\,\mathcal{F})-1.$$

Signalons une autre interprétation du champ $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,p}}$ (cf. [**10**, prop. III.3]), à savoir :

Proposition I.3.10. — *Supposons que le polygone* p *soit assez convexe en fonction de la courbe* X *et de* r. *On associe à tout entier* $0\le s\le r$ *l'unique nombre entier* $d(s)$ *tel que*

$$p(s)-1<d(s)\le p(s).$$

Alors un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ *du champ* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ *appartient à* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,p}}$ *si et seulement si :*

▷ *Pour* $s=r_1=0^+$, *le chtouca à droite* $\widetilde{E}_{r_1}=(E_{r_1}\hookrightarrow E'_{r_1}\hookleftarrow E^\sigma_{r_1})$ *défini dans la section I.3.4 a la propriété : soit* $\mathcal{F}$ *un sous-fibré maximal de* $E_{r_1}=\mathcal{E}_{r_1}$ *; alors* $\deg\mathcal{F}$ *est majoré par*

$$\deg\mathcal{F}\le\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}d+d(\mathrm{rg}\,\mathcal{F})$$

avec égalité si $\mathcal{F}=\mathcal{E}_{r_1}$.

▷ *Pour* $s\in\underline{r}$ *et* $s>r_1=0^+$, *le chtouca à gauche* $\widetilde{E}_s=(E_s\hookleftarrow E'_s\hookrightarrow E^\sigma_s)$ *défini dans la section I.3.4 a la propriété : soit* $\mathcal{F}$ *un sous-fibré maximal non nul de* $E'_s=\mathcal{E}^\sigma_s\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-}$ *; alors* $\deg\mathcal{F}$ *est majoré par*

$$\deg\mathcal{F}\le\frac{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}{r}d+d(s^-+\mathrm{rg}\,\mathcal{F})-d(s^-)-1$$

avec égalité si $\mathcal{F}=\mathcal{E}^\sigma_s\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-}$.

Puis Lafforgue prouve (cf. [**9**, cor. 1.11]) :

Proposition I.3.11. — *Soit p un polygone assez convexe en fonction de X et de r ; il existe alors un champ ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ *du champ* $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d}}$*, dont la trace dans le sous-champ localement fermé* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d}}$ *est* $\overline{\mathrm{Cht}_{\underline{r}}^{r,d,p}}$.

I.4. Le théorème de compactification de Lafforgue

Le résultat principal de l'article [**9**] est le théorème suivant.

Théorème I.4.1 **(cf. [9**, th. 1.12]**)**. — *Soit p un polygone assez convexe en fonction de X et de r ; le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}} \longrightarrow X \times X$$

est alors propre.

On renvoie le lecteur aux articles [**9**], [**7**] pour une preuve complète de ce théorème.

CHAPITRE II

VARIATION DES QUOTIENTS

II.1. La valuation standard

Soit A un anneau de valuation discrète sur $\mathbb{F}_q$; on notera K son corps de fractions, v sa valuation et $\sigma : K \to K$ l'élévation à la puissance q.

Définition II.1.1. — *On appelle* valuation deg *sur un K-espace vectoriel V de dimension r une application*

$$\deg : V \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

i) *Pour tous x et y dans V, $\deg(x+y) \geq \min\{\deg(x), \deg(y)\}$.*

ii) *Pour tout $a \in K$ et pour tout $x \in V$, $\deg(ax) = v(a) + \deg(x)$.*

iii) *Pour une (et donc pour toute) base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de V, il existe une constante C qui dépend de cette base telle que, pour tous $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dans K, on ait*

$$\deg\Big(\sum_{1\leq i\leq r} a_i e_i\Big) \leq \min_{1\leq i\leq r}\{v(a_i)\} + C.$$

Le résultat suivant est classique (cf. [**24**]).

Proposition II.1.2. — *Soit* deg *une valuation sur un K-espace vectoriel V de dimension r ; il existe alors une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de V et une suite de réels $(c_1, c_2, \ldots, c_r)$ telles que l'on ait*

$$\deg\Big(\sum_{1\leq i\leq r} a_i e_i\Big) = \min_{1\leq i\leq r}\{c_i + v(a_i)\}.$$

Drinfeld montre (cf. [**3**]) :

Proposition II.1.3. — *Soit V un K-espace vectoriel de dimension r et soit $\varphi : V^\sigma \to V$ un isomorphisme linéaire, ou de façon équivalente, $\varphi : V \to V$ une application σ-linéaire injectif. Alors il existe une unique valuation $\deg_\varphi$ sur V vérifiant que, pour* *tout* $e \in V$,

$$\deg_\varphi\big(\varphi(e)\big) = q\deg_\varphi(e).$$

Cette valuation sera appelée la valuation standard associée à φ.

Démonstration. — Soit deg une valuation quelconque sur V et soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de V ; la définition d'une valuation entraîne qu'il existe une constante C telle que, pour tous les éléments $a_1, a_2, \dots, a_r$ de K, on ait l'inégalité

$$\Big|\deg\Big(\sum_{1\le i\le r} a_i e_i) - \min_{1\le i\le r}\{v(a_i)\}\Big| \le C.$$

Prouvons d'abord l'unicité de la valuation standard si elle existe. Supposons qu'une telle valuation $\deg_\varphi$ existe ; l'inégalité précédente implique qu'il existe une constante C' telle que, pour tout e dans V, on ait l'inégalité

$$\big|\deg_\varphi(e) - \deg(e)\big| \le C'.$$

Donc $|\deg_\varphi(\varphi^n(e)) - \deg(\varphi^n(e))| \le C'$ pour tout entier positif n ; comme $\deg_\varphi(\varphi^n(e)) = q^n\deg_\varphi(e)$, on en déduit

$$\Big|\deg_\varphi(e) - \frac{\deg(\varphi^n(e))}{q^n}\Big| \le \frac{C'}{q^n}, \quad \forall e \in V,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On obtient ainsi

$$\deg_\varphi(e) = \lim_{n\to\infty}\frac{\deg(\varphi^n(e))}{q^n},$$

ce qui démontre l'unicité de la valuation standard si elle existe.

Démontrons l'existence : on choisit une valuation quelconque deg sur V ; la définition d'une valuation montre qu'il existe une constante C_0 telle que, pour tout $e \in V$, on ait

$$\big|\deg(\varphi(e)) - q\deg(e)\big| \le C_0,$$

ce qui montre que la limite $\lim_{n\to\infty}\deg(\varphi^n(e))/q^n$ existe. Posons

$$\deg_\varphi(e) = \lim_{n\to\infty}\frac{\deg(\varphi^n(e))}{q^n}.$$

C'est une valuation sur V et on a la relation

$$\deg_\varphi(\varphi(e)) = \lim_{n\to\infty}\frac{\deg(\varphi^{n+1}(e))}{q^n} = q\lim_{n\to\infty}\frac{\deg(\varphi^{n+1}(e))}{q^{n+1}} = q\deg_\varphi(e),$$

ce qui achève la démonstration de la proposition II.1.3 □

Proposition II.1.4. — *Soit* V *un* K*-espace vectoriel de dimension* r *et soit* $\varphi : V^\sigma \to V$ *un isomorphisme linéaire. Supposons que* $u : V \to K^r$ *un isomorphisme linéaire tel que* $u^\sigma = u \circ \varphi$. *Alors, pour tout* e *dans* V, *on a la relation*

$$\deg_\varphi(e) = \deg_0\big(u(e)\big),$$

où $\deg_0$ *désigne la valuation canonique sur* K^r.

Démonstration. — Cette proposition résulte immédiatement de l'unicité de la valuation standard (cf. proposition II.1.3). □

II.2. Structures de niveau

Fixons N un niveau de X, autrement dit un sous-schéma fermé fini de X ; le champ $\mathcal{C}^{r,N}$ associe à tout schéma S le groupoïde des familles formées :

i) d'un fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times S$,

ii) des couples $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1 \leq i \leq r-1}$, où $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible sur S et ℓ_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$,

iii) d'un pseudo-homomorphisme complet de type $(\mathcal{L}_i, \ell_i)^{\otimes(q-1)}_{1 \leq i \leq r-1}$

$$\mathcal{F}^\sigma = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{F} \Longrightarrow \mathcal{F},$$

ce qui est équivalent à donner une famille d'homomorphismes

$$u_{s,N} : \big(\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\big)^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

qui satisfait les conditions définies dans la section I.3.1.

On a les morphismes canoniques

$$\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X \times X} (X - N)^2 \longrightarrow \mathcal{C}^{r,N}, \quad \overline{\mathrm{Cht}^{r,d}} \times_{X \times X} (X - N)^2 \longrightarrow \mathcal{C}^{r,N}.$$

Puis on considère le champ $\mathcal{C}$ défini au-dessus $\mathcal{C}^{r,N}$ en ajoutant un pseudo-homomorphisme complet entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}^r_{N \times S}$ de type $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1 \leq i \leq r-1}$, ce qui veut dire, une famille d'homomorphismes

$$v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N \times S}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

qui satisfait les conditions de la définition I.3.2 et on demande de plus qu'ils vérifient

$$v^\sigma_{s,N} = v_{s,N} \circ u_{s,N}, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Dans $\mathcal{C}^{r,N}$, on note $\mathcal{C}^{r,N}_\varnothing$ l'ouvert dense dont toutes les sections globales ℓ_i (où on suppose $1 \leq i \leq r-1$) sont inversibles. Il associe à tout schéma S le groupoïde des fibrés vectoriels $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times S$ munis d'un isomorphisme $\mathcal{F}^\sigma = (\mathrm{Id}_N \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. Alors ce champ est le quotient $\mathrm{GL}_r^N /^\sigma / \mathrm{GL}_r^N$ de la restriction à la Weil GL_r^N de GL_r à N par l'action de lui-même par conjugaison tordue $(u, g) \mapsto (g^\sigma)^{-1} \circ u \circ g$ (cf. [**10**, section III.3]).

Puis on considère le classifiant $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q = \mathrm{GL}_r^N / \mathrm{GL}_r^N$ qui associe à tout schéma S le groupoïde des fibrés vectoriels $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times S$ munis d'un isomorphisme $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^r_{N \times S}$. Puis on considère l'isogénie de Lang $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing} \to \mathcal{C}^{r,N}_\varnothing$:

$$\mathrm{GL}_r^N \longrightarrow \mathrm{GL}_r^N, \quad g \mapsto \sigma(g)^{-1} \circ g.$$

On note $\mathcal{C}^r_N$ l'adhérence de $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}$ dans $\mathcal{C}$; l'action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ sur $\mathcal{C}^r_{N,\varnothing}$ s'étend en une action sur $\mathcal{C}^r_N$.

Proposition II.2.1. — *Le morphisme $\mathcal{C}^r_N \to \mathcal{C}^{r,N}$ est fini.*

Démonstration. — Puisque le morphisme $\mathcal{C}_N^r \to \mathcal{C}^{r,N}$ est affine, il suffit de vérifier qu'il est propre. Une preuve de cette assertion se trouve dans [**10**, prop. III.11]. Il s'agit de vérifier le critère valuatif de propreté pour le morphisme $\mathcal{C}_N^r \to \mathcal{C}^{r,N}$ qui est de type fini des schémas noethériens.

Soit A un anneau de valuation discrète sur $\mathbb{F}_q$ et soit K son corps des fractions. Rappelons qu'un point de $\mathcal{C}^{r,N}$ à valeurs dans $S = \operatorname{Spec} A$ consiste en :

i) un fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de rang r sur $N \times \operatorname{Spec} A$,

ii) des couples $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1\leq i\leq r-1}$, dont $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible sur $\operatorname{Spec} A$ et ℓ_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$,

iii) un pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{F}^\sigma \Rightarrow \mathcal{F}$ de type $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1\leq i\leq r-1}^{\otimes(q-1)}$, donc on dispose d'une famille d'homomorphismes

$$u_{s,N} : \Big(\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\Big)^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1 \leq s \leq r.$$

On suppose que la génerisation de ce point est dans $\mathcal{C}_\varnothing^{r,N}$, autrement dit que sur $N \times \operatorname{Spec} K$, tous les $u_{s,N}$ $(1 \leq s \leq r)$ sont des isomorphismes et qu'elle se relève dans $\mathcal{C}_{N,\varnothing}^r$. Ce relèvement consiste en des isomorphismes

$$v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}_{N\times\operatorname{Spec} K}^r, \quad 1 \leq s \leq r,$$

qui vérifient en particulier les relations

$$v_{s,N}^\sigma = v_{s,N} \circ u_{s,N}, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Il s'agit de prouver que les $v_{s,N}$ sont bien définis en tant qu'homomorphismes sur $N \times \operatorname{Spec} A$ et que $v_{r,N}$ est bien un isomorphisme.

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$; on note encore $u_{s,N}$ l'endomorphisme σ-linéaire de l'espace $\big(\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\big) \otimes_A K$ induit par $u_{s,N}$. D'après la proposition II.1.3, il existe une unique valuation $\deg_{u_{s,N}}$ qui vérifie

$$\deg_{u_{s,N}}\big(u_{s,N}(e)\big) = q \deg_{u_{s,N}}(e),$$

pour tout $e \in \big(\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\big) \otimes_A K$. Puis la proposition II.1.4 montre que, pour tout $e \in \big(\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\big) \otimes_A K$, on a l'égalité

$$\deg_{u_{s,N}}(e) = \deg_0\big(v_{s,N}(e)\big),$$

où $\deg_0$ désigne la valuation canonique sur $\bigwedge^s \mathcal{O}_{N\times\operatorname{Spec} K}^r$.

Comme $u_{s,N}$ stabilise le réseau $\bigwedge^s \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}$, on en déduit que, pour tout e dans ce réseau,

$$\deg_{u_{s,N}}(e) \geq 0.$$

D'où $\deg_0(v_{s,N}(e)) \geq 0$, autrement dit tous les $v_{s,N}$ $(1 \leq s \leq r)$ sont bien définis en tant qu'homomorphismes sur $N \times \operatorname{Spec} A$.

Reste à prouver que $v_{r,N}$ est un isomorphisme. En effet, on prouve un résultat plus fort qui sera utilisé dans la preuve du lemme II.3.4. Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$, et soit N' un sous-niveau de N. Supposons que la restriction $u_{s,N'}$ de $u_{s,N}$ au sous-niveau N' a la propriété suivante :

$$(*) \qquad \ker u_{s,N'} \text{ et } (\operatorname{Im} u_{s,N'})^\sigma \text{ sont en somme directe.}$$

Alors, en tout point fermé x de $N' \times \operatorname{Spec} A$, il existe un élément e du réseau $\bigwedge^s \mathcal{F}_x \otimes \bigotimes_{i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}$ tel que $\deg_{u_{s,N}}(e) = 0$; donc $\deg_0(v_{s,N}(e)) = \deg_{u_{s,N}}(e) = 0$, ce qui implique qu'en ce point, la réduction de $v_{s,N}$ ne s'annule pas. On conclut que la restriction $v_{s,N'}$ de $v_{s,N}$ au sous-niveau N' ne s'annule en aucun point géométrique de $N' \times \operatorname{Spec} A$.

Remarquons que $u_{r,N} : (\bigwedge^r \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<r} \mathcal{L}_i^{\otimes(r-i)})^\sigma \longrightarrow \bigwedge^r \mathcal{F} \otimes \bigotimes_{i<r} \mathcal{L}_i^{\otimes(r-i)}$ est un isomorphisme, donc vérifie la propriété (*). Ainsi $v_{r,N}$ ne s'annule en aucun point géométrique de $N \times \operatorname{Spec} A$, ce qui prouve bien que $v_{r,N}$ est un isomorphisme, et achève la démonstration. $\square$

Puis on note $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$ comme produit fibré de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X-N)^2$ et de $\mathcal{C}_N^r$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} & \longrightarrow & \mathcal{C}_N^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X-N)^2 & \longrightarrow & \mathcal{C}^{r,N}. \end{array}$$

Le morphisme

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \longrightarrow \mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X-N)^2$$

est représentable et fini ; le champ $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$ est muni d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ et le quotient de l'espace grossier associé à $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$ par ce groupe fini est celui associé à $\mathrm{ChtDeg}^{r,d} \times_{X\times X} (X-N)^2$.

II.3. Construction du fourre-tout

II.3.1. Notations. — Dans la suite de ce chapitre, on fixe un polygone $p_0 : [0,r] \to \mathbb{R}$ assez convexe en fonction de la courbe X et de r (cf. définition I.2.4). On choisit un entier positif ε très grand par rapport à p_0, X et r. Puis on choisit un entier positif w et un niveau N sans multiplicités de X qui vérifient les conditions suivantes :

a) Tout point géométrique x de N est supporté par un point fermé de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^w}$.

b) Le terme $|N| - \mathrm{Deg}(r,p_0)w$ est très grand par rapport à ε, p_0, X et r où $|N|$ est la longueur de N, et la fonction $\mathrm{Deg}(r,p_0)$ est définie dans la proposition I.3.5.

Ensuite, on choisit un entier k_0 assez négatif en fonction de $|N|$, ε, p_0, X et r et aussi un entier positif d assez grand en fonction de k_0, $|N|$, ε, p_0, X et r. Enfin, posons $h = d + (1-g)r$, où g désigne le genre de la courbe X.

Remarque II.3.1. — La condition b) intervient uniquement dans les dernières lignes de la preuve du lemme III.3.11.

II.3.2. Lemmes préparatoires. — Avec ce choix des paramètres, on énonce quelques lemmes préparatoires (cf. [**10**, lemmes V.6 et V.10]) qui vont nous servir par la suite.

Lemme II.3.2. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $\overline{X}$ de rang r, de degré d et de polygone canonique de Harder-Narasimhan majoré par p_0. Alors :*

a) $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathcal{E}) = 0$ *et $\mathcal{E}$ est engendré par ses sections globales* $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E})$*, on a donc*

$$\dim \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E}) = h.$$

b) *Pour tout sous-fibré non nul $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, dont le degré vérifie*

$$\deg \mathcal{F} \geq k_0 + \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{E}} \deg \mathcal{E},$$

le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{F}$ et $\deg \mathcal{F} - (\operatorname{rg} \mathcal{F} / \operatorname{rg} \mathcal{E}) \deg \mathcal{E}$ *sont bornés par des constantes qui ne dépendent que de p_0, r et k_0.*

c) *Sous les hypothèses précédentes,* $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathcal{F}) = 0$ *et $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales* $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{F})$*, on a donc l'égalité*

$$\dim \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{F}) = \deg \mathcal{F} + (1-g) \operatorname{rg} \mathcal{F}.$$

Lemme II.3.3. — a) *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur $\overline{X}$ et soit F un sous-espace vectoriel de* $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E})$ *engendrant $\mathcal{E}$ génériquement. Alors le nombre de points x dans $\overline{X}$ (avec multiplicités) tel que F n'engendre pas $\mathcal{E}_x$ est majoré par* $\deg \mathcal{E}$.

b) *Sous les mêmes hypothèses, on a l'inégalité*

$$\dim \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E}) \leq \deg \mathcal{E} + \operatorname{rg} \mathcal{E}.$$

II.3.3. Espace de Gieseker. — Soit $\mathrm{Pic}^d(X)$ la composante de degré d du schéma de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de X ; on note

$$p : X \times \mathrm{Pic}^d(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^d(X)$$

la projection naturelle et $\mathcal{M}$ le fibré inversible universel sur $X \times \mathrm{Pic}^d(X)$. L'espace de Gieseker (cf. [**5**]) est défini comme

$$\mathcal{Z}_0 := \mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}(\bigwedge^r \mathcal{O}^h_{\mathrm{Pic}^d(X)}, p_* \mathcal{M})\big).$$

Soit s un point géométrique de $\mathrm{Pic}^d(X)$ et soit $\mathcal{L}$ le fibré inversible correspondant sur $\overline{X}$; la fibre de $\mathcal{Z}_0$ en s est alors l'espace projectif

$$\mathbb{P}\big(\mathrm{Hom}\,(\bigwedge^r k^h, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L}))\big).$$

II.3.4. Le fourre-tout. — Le champ $\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}$ associe à tout schéma S les familles de couples $(\mathcal{L}_i, \ell_i)_{1\leq i\leq r-1}$, où $\mathcal{L}_i$ est un fibré inversible sur S et ℓ_i est une section globale de $\mathcal{L}_i$; on dispose alors un morphisme

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \longrightarrow \mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}.$$

On note $\mathrm{Vec}^{r,d}$ le champ classifiant les fibrés vectoriels sur la courbe X de rang r et de degré d ; Vec^{r,d,p_0} l'ouvert de $\mathrm{Vec}^{r,d}$, qui classifie les fibrés vectoriels sur la courbe X de rang r, de degré d, et dont le polygone canonique de Harder-Narasimhan est majoré par le polygone p_0 (cf. section I.2.3) ; on a ainsi un morphisme

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \longrightarrow \mathrm{Vec}^{r,d}$$

qui à tout chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ muni d'une structure de niveau N associe le fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$.

Puis on considère $\mathcal{Y}$ le champ défini au-dessus de l'ouvert

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$$

de $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ en ajoutant un homomorphisme surjectif (défini modulo l'action de $\mathbb{G}_m$)

$$\mathcal{O}_X^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$$

pour lequel le morphisme induit $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X^h) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E})$ est un isomorphisme ; le champ $\mathcal{Y}$ est un $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur au-dessus du champ

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0}.$$

Il résulte de la construction par Grothendieck des schémas de Hilbert que $\mathcal{Y}$ est un schéma quasi-projectif.

Puis on note

$$\mathcal{Z}_1 = \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq s\leq r} \bigoplus_{x\in N} \mathrm{Hom}\,\big(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r\big)^{\otimes r!/s}\Big);$$

et on définit $\mathcal{Z}$ comme l'espace produit

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}_1.$$

Le groupe $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ agit de la manière évidente sur $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$. L'action du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur $\mathcal{Z}$ est comme suit. Ce groupe agit trivialement sur l'espace $\mathcal{Z}_0$. Sur le facteur $\mathcal{Z}_1$ de $\mathcal{Z}$, soit $\pi = (\pi_{1,x}^{\otimes r!}, \pi_{2,x}^{\otimes r!/2}, \ldots, \pi_{r,x}^{\otimes r!/r})_{x\in N}$ un point de l'espace vectoriel de dimension finie

$$W = \bigoplus_{1\leq s\leq r} \bigoplus_{x\in N} \mathrm{Hom}\,\big(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r\big)^{\otimes r!/s}.$$

Le groupe $\mathbb{G}_m^{r-1}$ agit sur W de la manière suivante :

$$(\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1}); \pi) \mapsto \pi' = (\pi_{1,x}'^{\otimes r!}, \pi_{2,x}'^{\otimes r!/2}, \ldots, \pi_{r,x}'^{\otimes r!/r})_{x\in N},$$

où

$$\pi'_{1,x}=\pi_{1,x},\ \pi'_{2,x}=\ell_1^{-1}\pi_{2,x},\ \pi'_{3,x}=\ell_1^{-2}\ell_2^{-1}\pi_{3,x},\ \dots,\ \pi'_{r,x}=\ell_1^{1-r}\ell_2^{2-r}\cdots\ell_{r-1}^{-1}\pi_{r,x}.$$

On va construire un morphisme $\mathrm{PGL}_h\times\mathbb{G}_m^{r-1}\times\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$-équivariant $\psi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$. Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$; dans la donnée de y, on dispose :

i) d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\overline{X}$ de rang r et de degré d,

ii) d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{\overline{X}}^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, pour lequel le morphisme induit $\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}^h)\to\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{E})$ est un isomorphisme,

iii) d'un pseudo-homomorphisme complet au niveau N, qui consiste en des homomorphismes linéaires

$$v_{s,N}:\bigwedge^s\mathcal{E}_N\longrightarrow\bigwedge^s\mathcal{O}_N^r,\quad 1\le s\le r.$$

Soit s un entier, avec $1\le s\le r$ et soit x un point géométrique dans N ; on notera $v_{s,x}:\bigwedge^s\mathcal{E}_x\longrightarrow\bigwedge^s\mathcal{O}_x^r$ la restriction de $v_{s,N}$ à x.

On obtient un point géométrique $z=\psi(y)$ de $\mathcal{Z}$ à partir de cette donnée de la manière suivante :

i) Pour obtenir un élément $\pi_0\in\mathcal{Z}_0$, on compose le morphisme induit

$$\bigwedge^r k^h=\bigwedge^r\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}^h)\xrightarrow{\sim}\bigwedge^r\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{E})$$

avec le morphisme naturel

$$\bigwedge^r\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{E})\longrightarrow\mathrm{H}^0\big(\overline{X},\bigwedge^r\mathcal{E}\big).$$

ii) Soit s un entier, avec $1\le s\le r$ et soit x un point dans N ; le composé

$$\bigwedge^s k^h=\bigwedge^s\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{O}_{\overline{X}}^h)\xrightarrow{\sim}\bigwedge^s\mathrm{H}^0(\overline{X},\mathcal{E})\longrightarrow\bigwedge^s\mathcal{E}_x\xrightarrow{v_{s,x}}\bigwedge^s\mathcal{O}_x^r$$

définit un élément de $\pi_{s,x}\in\mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h,\bigwedge^s\mathcal{O}_x^r)$.

Lemme II.3.4. — *Soit s un entier avec $1\le s\le r$. Alors, l'élément suivant n'est pas nul :*

$$\bigoplus_{x\in N}\pi_{s,x}\in\bigoplus_{x\in N}\mathrm{Hom}\big(\bigwedge^s k^h,\bigwedge^s\mathcal{O}_x^r\big).$$

Démonstration. — On note N' le plus grand sous-niveau de N qui ne contient aucun dégénérateur du chtouca dégénéré associé au point $y\in\mathcal{Y}$. La proposition I.3.5 et l'hypothèse sur le niveau N (cf. section II.3.1) impliquent que $N'\neq\varnothing$.

La restriction $u_{s,N'}$ $(1\le s\le r)$ de $u_{s,N}$ au sous-niveau N vérifie la condition : $\ker u_{s,N'}$ et $(\mathrm{Im}\,u_{s,N'})^\sigma$ sont en somme directe. D'après la preuve de la proposition II.2.1, la restriction $v_{s,N'}$ n'est nulle en aucun point géométrique, c'est-à-dire pour tout $x\in N'$, $v_{s,x}\neq0$. Donc l'élément $\bigoplus_{x\in N}\pi_{s,x}\in\bigoplus_{x\in N}\mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h,\bigwedge^s\mathcal{O}_x^r)$ n'est pas nul, c.q.f.d □

Proposition II.3.1. — *Le morphisme $\psi:\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ est quasi-projectif.*

Démonstration. — Il résulte du fait que $\mathcal{Y}$ est un schéma quasi-projectif et que $\mathcal{Z}$ est un schéma projectif, c.q.f.d. □

II.4. Les quotients par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^{r-1}$

Comme le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^{r-1}$ agit trivialement sur l'espace $\mathcal{Z}_0$, on a

$$\mathcal{Z}//\mathbb{G}_m^{r-1} = \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}_1//\mathbb{G}_m^{r-1}.$$

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$ et soit $W_s = \bigoplus_{x\in N} \mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s}$; alors $W = \bigoplus_{1\leq s\leq r} W_s$ et $\mathbb{G}_m^{r-1}$ agit sur W_s via le caractère

$$(\ell_1, \dots, \ell_{r-1}) \mapsto \ell_1^{d_1(s)} \cdots \ell_{r-1}^{d_{r-1}(s)},$$

avec

$$d_i(s) = \begin{cases} \frac{r!}{s}(i-s) & \text{si } 1 \leq i \leq s-1, \\ 0 & \text{si } s \leq i \leq r-1. \end{cases}$$

L'action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur $\mathcal{Z}_1 = \mathbb{P}(W)$ est induite par celle de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur W ; elle fournit naturellement une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation λ du fibré ample $\mathcal{O}(1)$. On peut fabriquer d'autres linéarisations via les deux procédures suivantes :

a) Soit k un entier positif; la puissance symétrique de λ induit une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation λ^k du fibré ample $\mathcal{O}(k)$.

b) Soit $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1})$ une suite d'entiers positifs ou nuls ; la multiplication de λ^k avec le caractère

$$\mathbb{G}_m^{r-1} \longrightarrow \mathbb{G}_m, \quad (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{r-1}) \longmapsto \ell_1^{d_1}\ell_2^{d_2}\cdots\ell_{r-1}^{d_{r-1}}$$

induit une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation $\lambda_{\underline{d}}^k$ du fibré ample $\mathcal{O}(k)$.

L'ensemble des points semistables, l'ensemble des points stables et le quotient de la linéarisation $\lambda_{\underline{d}}^k$ ne dépendent que de la suite $\underline{d}/k = (d_1/k, d_2/k, \dots, d_{r-1}/k)$; on peut alors parler de la $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation $\lambda_{\underline{d}}$ du fibré ample $\mathcal{O}(1)$ associée à une suite $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1})$ de rationnels positifs ou nuls.

Explicitement, le fibré ample $\mathcal{O}(1)$ de $\mathbb{P}(W)$ peut être regardé comme

$$Y = \big\{x_i y_j = x_j y_i \ ; \ (x_1, x_2, \dots) \in W, \ (y_1 : y_2 : \cdots) \in \mathbb{P}(W)\big\},$$

et le morphisme $Y \to \mathbb{P}(W)$ est la projection naturelle. Alors la $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation naturelle $\lambda_{\underline{d}}$ du fibré $\mathcal{O}(1)$ associée à une suite $\underline{d} = (d_1, \dots, d_{r-1})$ de rationnels positifs ou nuls correspond à l'action suivante de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur Y :

$$\big((\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{r-1}), (x_1, x_2, \dots; y_1 : y_2 : \cdots)\big) \longmapsto (x_1', x_2', \dots; y_1' : y_2' : \cdots),$$

où

$$\begin{aligned} x_i' &= \ell_1^{d_1(s)+d_1} \cdots \ell_{r-1}^{d_{r-1}(s)+d_{r-1}} x_i \qquad && \text{si } x_i \in W_s, \\ y_i' &= \ell_1^{d_1(s)} \cdots \ell_{r-1}^{d_{r-1}(s)} y_i && \text{si } y_i \in W_s. \end{aligned}$$

Pour terminer cette section, on va définir quelques nouvelles notations qui seront utilisées par la suite. Soit $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1})$ une suite de rationnels ; on définit une suite $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ de rationnels de somme $\sum_{s=1}^{r} \alpha_s = 1$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 1 - \sum_{2 \leq s \leq r} \alpha_s, \\
\alpha_2 &= \frac{2}{r!}(d_1 - 2d_2 + d_3), \quad \dots \quad, \alpha_{r-1} = \frac{r-1}{r!}(d_{r-2} - 2d_{r-1}), \\
\alpha_r &= \frac{r}{r!} d_{r-1}.
\end{aligned}$$

Observons que la suite $\underline{\alpha}$ détermine la suite $\underline{d}$; de plus, si tous les $\{\alpha_s\}_{1 \leq s \leq r}$ sont strictement compris entre 0 et 1, alors les $\{d_i\}_{1 \leq i \leq r-1}$ correspondants sont positifs.

Désormais, si $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ et $\underline{d} = (d_1, \dots, d_{r-1})$ correspondent, on dira que la $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(1)$ est associée à $\underline{\alpha}$ au lieu de celle associée à $\underline{d}$.

II.5. Choix des paramètres

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ une suite de rationnels positifs de somme 1 et soit s un entier, avec $0 \leq s \leq r$; on définit

$$q(s) = \sum_{1 \leq t \leq s} \alpha_t \varepsilon + \sum_{s < t \leq r} \frac{s}{t} \alpha_t \varepsilon - \frac{s}{r} \varepsilon. \tag{A}$$

(*Rappelons que l'entier positif* ε *est donné au début de ce chapitre* (*cf. section II.3.1*).)

Remarque II.5.1. — a) On voit immédiatement que $q(0) = q(r) = 0$; on obtient alors un polygone rationnel $q : [0, r] \to \mathbb{R}$ au sens de la définition I.2.4.

b) Le polygone q détermine la suite $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. En effet, pour tout entier s, avec $1 \leq s < r$, on a $\alpha_s \varepsilon / s = -q(s+1) + 2q(s) - q(s-1)$, ce qui détermine α_s ; reste à écrire

$$\alpha_r = 1 - \sum_{1 \leq s < r} \alpha_s.$$

c) En général, étant donné un polygone rationnel q, la suite de rationnels $\underline{\alpha}$ associée à q ne vérifie pas l'inégalité $\alpha_s > 0$ pour tout entier $1 \leq s \leq r$.

On va prouver que, sous certaines conditions du polygone q, la suite $\underline{\alpha}$ correspondante est une suite de rationnels positifs.

Lemme II.5.2. — *Soit p est un polygone assez convexe en fonction de X et de r, entier par rapport à d et majoré par p_0 et soit q un polygone rationnel, avec $q \in]p, p + \mathbf{1}[$ (cf. définition I.2.5). Alors la suite $\underline{\alpha}$ associée à q est une suite de rationnels positifs.*

Démonstration. — Puisque p est un polygone assez convexe en fonction de X et de r, q l'est aussi, ce qui implique

$$\alpha_s = \frac{s}{\varepsilon}\big(-q(s+1) + 2q(s) - q(s-1)\big) > 0, \quad \forall s,\ 1 \leq s < r.$$

Puis comme le polygone p est majoré par p_0 et r et p_0 sont négligables devant ε,

$$\alpha_r = 1 - \sum_{1 \leq s < r} \alpha_s$$

est aussi positif, ce qui achève la démonstration. □

II.6. Énonce du théorème principal

On peut énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème II.6.1. — *On utilise les notations des sections précédentes. Soient ε_0, ε_1 deux entiers positifs tels que*

$$r\varepsilon_0 \frac{\varepsilon}{h - \varepsilon} = r!\, \varepsilon_1.$$

Soit p un polygone assez convexe en fonction de X et de r, entier par rapport à d et majoré par p_0. On choisit un polygone rationnel q tel que $q \in]p, p + \mathbf{1}[$, ce qui veut dire, pour tout entier s, avec $0 < s < r$, on a $p(s) < q(s) < p(s) + 1$.

Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ la suite de rationnels positifs de somme 1 qui correspond à q (cf. section II.5); on considère la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1)$ de $\mathcal{Z}$.

Alors, pour un point géométrique $y \in \mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$\psi(y)$ est semistable (resp. stable).*

ii) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\text{(B)} \qquad \deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big) \quad (\text{resp.} <),$$

où les fibrés vectoriels $\overline{\mathcal{F}}_s$ $(s \in \underline{r})$ sont définis dans la définition I.3.6.

La démonstration de ce théorème sera présentée dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III

SEMISTABILITÉ

III.1. Introduction

Ce chapitre démontre le théorème II.6.1. La section III.2 utilise le critère numérique de Hilbert-Mumford pour déterminer les points semistables et stables de $\mathcal{Z}$. Lorsque l'on restreint aux points dans $\psi(\mathcal{Y})$, le critère numérique se simplifie notablement (cf. proposition III.2.2).

Puis la section III.3 donne une preuve du théorème II.6.1 : *un point $\psi(y)$ de la strate de $\mathcal{Y}$ indexée par une famille $\underline{r}$ est semistable si et seulement si le chtouca dégénéré sous-jacent vérifie une condition de semistabilité* explicite et de type combinatoire. Le fait que l'on a « peu de dégénérateurs » joue un rôle important dans cette preuve.

La section III.3.1 démontre l'implication : *un point $\psi(y)$ de la strate de $\mathcal{Y}$ indexée par une famille $\underline{r}$ est semistable implique que le chtouca dégénéré sous-jacent vérifie une condition de semistabilité.* La preuve se repose sur une majoration de certains entiers $\rho_{s,x}$ ($x \in N$) qui interviennent dans le critère numérique (cf. proposition III.3.8).

La section III.3.2 démontre l'implication réciproque : *un point $\psi(y)$ de la strate de $\mathcal{Y}$ indexée par une famille $\underline{r}$ est semistable si le chtouca dégénéré sous-jacent vérifie une condition de semistabilité.* Il s'agit de montrer qu'au moins en un point $x \in N$, l'inégalité obtenue dans la proposition III.3.8 devient une égalité (cf. proposition III.3.10).

III.2. Critère numérique de Hilbert-Mumford

III.2.1. Critère numérique de Hilbert-Mumford pour un point général de $\mathcal{Z}$. — On considère la $\mathrm{SL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1)$ associée à la suite $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$. On note $\underline{d} = (d_1, d_2, \dots, d_{r-1})$ la suite de rationnels associée à la suite $\underline{\alpha}$ (cf. section II.4).

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \to \mathrm{SL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ un sous-groupe à un paramètre non trivial ; il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_h\}$ qui diagonalise l'action induite de $\mathbb{G}_m$ sur SL_h en

$$\lambda(t)e_i = t^{n_i} e_i,$$

où $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_h)$ est une suite (non nulle) décroissante d'entiers, dont la somme vaut zéro et $(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1})$ est une suite d'entiers telle que l'action induite de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{G}_m^{r-1}$ soit $t \mapsto (t^{m_1}, t^{m_2}, \ldots, t^{m_{r-1}})$.

Soit z un point géométrique de $\mathcal{Z}$; la donnée de z contient en particulier

i) un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\overline{X}$,

ii) un homomorphisme linéaire $\pi_0 : \bigwedge^r k^h \longrightarrow \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L})$,

iii) pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, un homomorphisme linéaire $\pi_{s,x} : \bigwedge^s k^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r$.

L'espace $\mathrm{Hom}(\bigwedge^r k^h, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L}))$ se décompose en

$$\mathrm{Hom}(\bigwedge^r k^h, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L})) = \bigoplus_{|I|=r} \mathrm{Hom}(\bigwedge_{i\in I} e_i, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L})),$$

et le groupe $\mathbb{G}_m$ agit sur $\mathrm{Hom}(\bigwedge_{i\in I} e_i, \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L}))$ via le caractère $t \mapsto t^{-\sum_{i\in I} n_i}$.

L'espace $W = \bigoplus_{1\leq s\leq r} \bigoplus_{x\in N} \mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s}$ se décompose en

$$W = \bigoplus_{1\leq s\leq r} \bigoplus_{x\in N} \bigoplus_{|I_s|=s} \mathrm{Hom}\,\Big(\bigwedge_{i\in I_s} e_i, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r\Big)^{\otimes r!/s}, \quad \forall s,\ 1 \leq s \leq r.$$

Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ agit sur $\bigoplus_{x\in N} \mathrm{Hom}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s}$ via le caractère

$$t \longmapsto t^{-\frac{r!}{s}\sum_{i\in I_s} n_i + \sum_{1\leq i\leq r} d_i(s) m_i}.$$

(Les entiers $d_i(s)$ sont définis dans la section II.4.)

On définit :

$$\mu_0(z, \underline{n}) = \max_I \Big\{ \sum_{i\in I} n_i \ ;\ |I| = r,\ \pi_0(\bigwedge_{i\in I} e_i) \neq 0 \Big\},$$

$$\mu_{s,x}(z, \underline{n}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \pi_{s,x} = 0, \\ \frac{r!}{s} \max_{I_s} \big\{ \sum_{i\in I_s} n_i \ ;\ |I_s| = s,\ \pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0 \big\} & \text{si } \pi_{s,x} \neq 0, \end{cases}$$

$$\mu_s(z, \underline{n}) = \max_{x\in N} \big\{ \mu_{s,x}(z, \underline{n}) \big\},$$

$$\mu^s(z, \lambda) = \mu_s(z, \underline{n}) + \frac{r!}{s} \sum_{1\leq t<s} (s-t) m_t - \sum_{1\leq t<r} d_t m_t,$$

$$\mu(z, \lambda) = \varepsilon_0 \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \max_{1\leq s\leq r} \big\{ \mu^s(z, \lambda) \big\}.$$

Pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, posons

$$hM_s = \sum_{1\leq t\leq s-1} (s-t) m_t,$$

avec la convention $M_1 = 0$; on en déduit $m_1 = hM_2$, $m_2 = h(M_3 - 2M_2)$,

$$m_3 = h(M_4 - 2M_3 + M_2),\ \ldots\ ,\ m_{r-1} = h(M_r - 2M_{r-1} + M_{r-2}),$$

puis on obtient

$$\sum_{1\leq t<r} d_t m_t = \sum_{2\leq t\leq r} \frac{hr!}{t}\alpha_t M_t.$$

Avec ces notations, on a alors

$$\begin{aligned}\mu^s(z,\lambda) &= \mu_s(z,\underline{n}) + \frac{r!}{s}\sum_{1\leq t<s}(s-t)m_t - \sum_{1\leq t<r} d_t m_t\\ &= \mu_s(z,\underline{n}) + \frac{hr!}{s}M_s - \sum_{2\leq t\leq r}\frac{hr!}{t}\alpha_t M_t.\end{aligned}$$

Le critère numérique de Hilbert-Mumford implique

Proposition III.2.1. — *Avec les notations ci-dessus, un point géométrique $z \in \mathcal{Z}$ est semistable (resp. stable) par rapport à la* $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$*-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0)\boxtimes\mathcal{O}(\varepsilon_1)$ si et seulement si*

$$\text{(C)}\qquad \mu(z,\lambda) = \varepsilon_0\mu_0(z,\underline{n}) + \varepsilon_1 \max_{1\leq s\leq r}\{\mu^s(z,\lambda)\} \geq 0 \quad (\textit{resp.}\ > 0),$$

pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ.

III.2.2. Critère numérique de Mumford-Hilbert pour un point $z = \psi(y)$ de $\mathcal{Z}$. — Soit $z = \psi(y)$ un point géométrique $\mathcal{Z}$ qui est l'image par ψ d'un point y de $\mathcal{Y}$; d'après le lemme II.3.4, toutes les applications $\bigoplus_{x\in N}\pi_{s,x}$ $(1\leq s\leq r)$ ne s'annulent pas, ce qui implique

$$\mu_s(z,\underline{n}) = \frac{r!}{s}\max_{x\in N}\max_{I_s}\Big\{\sum_{i\in I_s} n_i\ ;\ |I_s| = s,\ \pi_{s,x}\big(\bigwedge_{i\in I_s} e_i\big)\neq 0\Big\}.$$

Déterminons maintenant la valeur minimale de la fonction

$$\begin{aligned}f(M_1 = 0, M_2,\dots,M_{r-1}) &= \max_{1\leq s\leq r}\{\mu^s(z,\lambda)\}\\ &= \max_{1\leq s\leq r}\Big\{\mu_s(z,\underline{n}) + \frac{hr!}{s}M_s - \sum_{2\leq t\leq r}\frac{hr!}{t}\alpha_t M_t\Big\}.\end{aligned}$$

Posons

$$M = \max_{1\leq s\leq r}\Big\{\mu_s(z,\underline{n}) + \frac{hr!}{s}M_s\Big\}.$$

Pour tout entier s, avec $2\leq s\leq r$, on a alors $(hr!/s)M_s \leq M - \mu_s(z,\underline{n})$ et, compte tenu du fait $M_1 = 0$,

$$M \geq \mu_1(z,\underline{n}) = \mu_1(z,\underline{n}) + hr!M_1;$$

ces inégalités entraînent

$$\begin{aligned}\max_{1\leq s\leq r}\{\mu^s(z,\lambda)\} &= M - \sum_{2\leq t\leq r}\frac{hr!}{t}\alpha_t M_t \geq M - \sum_{2\leq t\leq r}\alpha_t\big(M - \mu_t(z,\underline{n})\big)\\ &= \alpha_1 M + \sum_{2\leq t\leq r}\alpha_t\mu_t(z,\underline{n}) \geq \sum_{1\leq s\leq r}\alpha_s\mu_s(z,\underline{n}),\end{aligned}$$

et l'égalité est atteinte si, pour tout $2 \leq s \leq r$,

$$\frac{hr!}{s} M_s = \mu_1(z, \underline{n}) - \mu_s(z, \underline{n}).$$

Le critère numérique de Hilbert-Mumford pour le point $z = \psi(y)$ se simplifie notablement.

Proposition III.2.2. — *Un point géométrique $z = \psi(y)$ est semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1)$ si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ de SL_h, on a l'inégalité*

$$\text{(D)} \qquad \varepsilon_0 \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1 \leq s \leq r} \alpha_s \mu_s(z, \underline{n}) \geq 0 \quad (\textit{resp.} \ > 0),$$

ou de façon équivalente,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \max_I \Big\{ \sum_{i \in I} n_i \ ; \ |I| = r, \ \pi_0\big(\bigwedge_{i \in I} e_i\big) \neq 0 \Big\} \\ + \varepsilon_1 \sum_{1 \leq s \leq r} \frac{r! \, \alpha_s}{s} \max_{x \in N} \max_{I_s} \Big\{ \sum_{i \in I_s} n_i \ ; \ |I_s| = s, \ \pi_{s,x}\big(\bigwedge_{i \in I_s} e_i\big) \neq 0 \Big\} \geq 0 \\ (\textit{resp.} \ > 0). \end{aligned}$$

Soit $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_h)$ une famille décroissante d'entiers de somme 0 ; elle est alors dans le cône engendré par les familles $\underline{n}_t$ $(1 \leq t \leq h)$

$$\begin{gathered} n_{t,1} = n_{t,2} = \cdots = n_{t,t} = h - t, \\ n_{t,t+1} = n_{t,t+2} = \cdots = n_{t,h} = -t. \end{gathered}$$

Pour tout entier t, avec $0 \leq t \leq h$, on note F_t le sous-espace vectoriel de k^h engendré par les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_t$ et $\mathcal{F}_t$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par l'image de F_t dans $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E})$. On dispose ainsi de deux filtrations

$$\begin{gathered} 0 = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{h-1} \subsetneq F_h = k^h, \\ 0 = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_{h-1} \subseteq \mathcal{F}_h = \mathcal{E}. \end{gathered}$$

Puis pour tout entier $0 \leq t \leq h$, pour tout entier $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, posons

$$\rho_{s,x}(F_t) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \pi_{s,x} = 0, \\ \max_{I_s} \{ |\{1, 2, \ldots, t\} \cap I_s| \ ; \ |I_s| = s, \ \pi_{s,x}(\bigwedge_{i \in I_s} e_i) \neq 0 \} & \text{si } \pi_{s,x} \neq 0 ; \end{cases}$$

ces entiers vérifient

$$\rho_{s,x}(F_t) \leq \min\{s, \operatorname{rg} \mathcal{F}_t\}.$$

Plus généralement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h)$ et soit $\mathcal{F}$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F. Soit $\{e_i\}_{1 \leq i \leq f}$ une base de F ; on peut alors compléter cette base pour obtenir une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq h}$ de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h)$; puis pour tout entier $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, on définit

$$\rho_{s,x}(F) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \pi_{s,x} = 0, \\ \max_{I_s}\{|\{1,2,\dots,f\} \cap I_s| \ ; \ |I_s| = s, \ \pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0\} & \text{si } \pi_{s,x} \neq 0. \end{cases}$$

On vérifie sans difficultés que ces entiers ne dépendent pas de la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq f}$ choisie et satisfont les inégalités

$$\rho_{s,x}(F) \leq \min\{s, \operatorname{rg}\mathcal{F}\}, \quad \forall s, \ 1 \leq s \leq r, \ \forall x \in N.$$

Lemme III.2.3. — *Soient s un entier, avec $1 \leq s \leq r$, x un point de N, et $F \subsetneq F'$ deux sous-espaces vectoriels emboîtés de $k^h = \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h)$. On a alors*

$$\rho_{s,x}(F) \leq \rho_{s,x}(F').$$

Démonstration. — C'est évident. □

Avec les notations que l'on vient de définir, on a les formules suivantes :

$$\mu_0(z, \underline{n}_t) = r\Big(\frac{h}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \dim F_t\Big),$$
$$\mu_{s,x}(z, \underline{n}_t) = r!\Big(\frac{h}{s}\rho_{s,x}(F_t) - \dim F_t\Big),$$
$$\mu_s(z, \underline{n}_t) = r!\Big(\frac{h}{s}\max_{x\in N}\{\rho_{s,x}(F_t)\} - \dim F_t\Big).$$

La condition de semistablité (D) de la proposition III.2.2 implique

$$\begin{aligned} 0 &\leq \varepsilon_0\mu_0(z, \underline{n}_t) + \varepsilon_1 \sum_{1\leq s\leq r} \alpha_s \mu_s(z, \underline{n}_t) \\ &= r\varepsilon_0\Big(\frac{h}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \dim F_t\Big) + r!\,\varepsilon_1 \sum_{1\leq s\leq r} \alpha_s\Big(\frac{h}{s}\max_{x\in N}\{\rho_{s,x}(F_t)\} - \dim F_t\Big). \end{aligned}$$

On remplace $r\varepsilon_0\varepsilon/(h-\varepsilon) = r!\,\varepsilon_1$ dans l'équation précédente et utilise le fait que $\sum_{1\leq s\leq r}\alpha_s = 1$ pour obtenir

$$(h-\varepsilon)\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}_t}{r} + \sum_{1\leq s\leq r}\alpha_s\varepsilon\frac{\max_{x\in N}\{\rho_{s,x}(F_t)\}}{s} - \dim F_t \geq 0.$$

On peut énoncer :

Proposition III.2.4. — *Pour qu'un point géométrique $z = \psi(y)$ soit semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0)\boxtimes\mathcal{O}(\varepsilon_1)$, il faut que tout sous-espace vectoriel non trivial F de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h)$ vérifie*

$$\text{(E)} \qquad (h-\varepsilon)\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} + \sum_{1\leq s\leq r}\alpha_s\varepsilon\frac{\max_{x\in N}\{\rho_{s,x}(F)\}}{s} - \dim F \geq 0 \quad (\textit{resp.} \ > 0),$$

où $\mathcal{F}$ désigne le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F.

Plus généralement, si l'on écrit

$$\underline{n} = \sum_t \beta_t \, \underline{n}_t,$$

avec des pondérations $\{\beta_t\}$ positives ou nulles de somme positive, on peut prouver (cf. [**5**]) que l'expression $\mu_0(z, \underline{n})$ est linéaire en fonction de $\underline{n}$; on a donc

$$\mu_0(z, \underline{n}) = r\Big(\frac{h}{r} \sum_t \beta_t \operatorname{rg} \mathcal{F}_t - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big).$$

Par contre, en général, les expressions $\mu_{s,x}(z, \underline{n})$ (avec $1 \leq s \leq r$, $x \in N$) ne sont pas linéaires en fonction de $\underline{n}$; néanmoins, on prouve :

Lemme III.2.5. — *Ces fonctions sont concaves en fonction de $\underline{n}$, autrement dit si $\underline{n} = \sum_t \beta_t \, \underline{n}_t$, pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, on a alors*

$$\mu_{s,x}(z, \underline{n}) \leq \sum_t \beta_t \, \mu_{s,x}(z, \underline{n}_t).$$

Démonstration. — Fixons un entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et un point $x \in N$. Supposons que, pour un certain sous-ensemble I_s de $\{1, 2, \ldots, h\}$ de cardinal s,

$$\pi_{s,x}\big(\bigwedge_{i \in I_s} e_i\big) \neq 0, \quad \text{et} \quad \mu_{s,x}(z, \underline{n}) = \sum_{i \in I_s} n_i.$$

Comme $\pi_{s,x}(\bigwedge_{i \in I_s} e_i) \neq 0$, on en déduit $\mu_{s,x}(z, \underline{n}_t) \geq \sum_{i \in I_s} n_{t,i}$. Ainsi

$$\mu_{s,x}(z, \underline{n}) = \sum_{i \in I_s} n_i = \sum_t \beta_t \sum_{i \in I_s} n_{t,i} \leq \sum_t \beta_t \, \mu_{s,x}(z, \underline{n}_t),$$

ce qui achève la démonstration. □

III.3. Calculs des points semistables et des points stables

III.3.1. Preuve du théorème II.6.1 : première partie. — On montre d'abord :

Proposition III.3.1. — *Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$. Suppsosons que $\psi(y)$ est semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1)$. Alors, pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big) \quad (\textit{resp.} \ <),$$

où les fibrés vectoriels $\overline{\mathcal{F}}_s$ ($s \in \underline{r}$) sont définis dans la définition I.3.6.

La preuve de cette proposition se trouve à la fin de cette section.

Lemme III.3.2. — *Rappelons (cf. section II.5) que*

$$q(t) = \sum_{1 \leq s \leq t} \alpha_s \, \varepsilon + \sum_{t < s \leq r} \frac{t}{s} \alpha_s \, \varepsilon - \frac{t}{r} \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq r.$$

On a alors

$$\sum_{1\leq s\leq r} \frac{\alpha_s\varepsilon}{s} \min\left\{ \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^- \right\} = \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\varepsilon + \sum_{s\in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}) - q(s^-)\big).$$

Démonstration. — Le terme libre dans l'expression $\sum_{s\in\underline{r}}(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-))$ vaut

$$-\sum_{s\in\underline{r}} \Big(\frac{\varepsilon}{r}(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - \frac{\varepsilon}{r}s^-\Big) = -\sum_{s\in\underline{r}} \frac{\varepsilon}{r}\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s = -\frac{\varepsilon}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}.$$

Soit s un entier, avec $1\leq s\leq r$; le coefficient de $\alpha_s\varepsilon$ dans l'expression

$$\sum_{t\in\underline{r}} \big(q(t^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - q(t^-)\big).$$

vaut

$$\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ t\leq s^-}} \frac{1}{s}(t^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t - t^-) + \frac{1}{s}\big(\min\{s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, s\} - s^-\big) = \frac{1}{s}\min\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\}.$$

En combinant tous ces calculs, on obtient

$$\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}\varepsilon + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}) - q(s^-)\big) = \sum_{1\leq s\leq r} \frac{\alpha_s\varepsilon}{s} \min\left\{ \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^- \right\},$$

ce qu'on voulait. La démonstration est donc terminée. □

Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ le chtouca dégénéré sous-jacent au point géométrique $y\in\mathcal{Y}$; il est de type $\underline{r}$; ainsi on sait (cf. section I.3.3) qu'il y a deux filtrations de $\mathcal{E}''$ et de $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux

$$0 \subsetneq \mathcal{E}''_{r_1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}'', \qquad \bar{\mathcal{E}} \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_1} \supsetneq \cdots \supsetneq 0,$$

et des isomorphismes en dehors des dégénérateurs

$$\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}, \quad s\in\underline{r}.$$

Soit s un entier, avec $1\leq s\leq r$; le morphisme $u_s : \bigwedge^s \bar{\mathcal{E}} \to \bigwedge^s \mathcal{E}''$ est alors le composé de trois morphismes :

▷ la surjection $\bigwedge^s \bar{\mathcal{E}} \twoheadrightarrow \bigwedge^{r_1} \bar{\mathcal{E}}/\bar{\mathcal{E}}_{r_1} \otimes \bigwedge^{r_2-r_1} \bar{\mathcal{E}}_{r_1}/\bar{\mathcal{E}}_{r_2} \otimes\cdots\otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+}$,

▷ l'injection $\bigwedge^{r_1} \bar{\mathcal{E}}/\bar{\mathcal{E}}_{r_1} \otimes\cdots\otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+} \hookrightarrow \bigwedge^{r_1} \mathcal{E}''_{r_1} \otimes\cdots\otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}''_{s^+}/\mathcal{E}''_{s^-}$ qui est un isomorphisme en dehors des dégénérateurs et

▷ l'injection $\bigwedge^{r_1} \mathcal{E}''_{r_1} \otimes\cdots\otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}''_{s^+}/\mathcal{E}''_{s^-} \hookrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}''$.

Par conséquent, la restriction $u_{s,N}$ de u_s au niveau N est le composé des restrictions de ces trois morphismes à N. Puisqu'en dehors de 0 et ∞, on a l'isomorphisme $\mathcal{E}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}$, on peut donc remplacer les $\mathcal{E}_s''$ par les $\mathcal{E}_s$ dans les formules ci-dessus. En particulier, la restriction $u_{s,N}$ peut être considérée comme un homomorphisme linéaire

$$u_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma_{\overline{N}} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_{\overline{N}}.$$

L'homomorphisme linéaire $v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{E}_{\overline{N}} \to \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{\overline{N}}$ vérifie

$$v^\sigma_{s,N} = v_{s,N} \circ u_{s,N}.$$

On a aussi deux applications naturelles

$$\psi : \bigwedge^s k^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_{\overline{N}}, \quad \psi^\sigma : \bigwedge^s k^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma_{\overline{N}}.$$

Soit x un point géométrique de $\overline{N}$; on notera $u_{s,x}$ (resp. $v_{s,x}$) la restriction de $u_{s,N}$ (resp. $v_{s,N}$) à x ; puis on notera ψ_x (resp. ψ^σ_x) le composé de l'application ψ (resp. ψ^σ) avec la projection $\mathcal{E}_{\overline{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{E}_x$ (resp. $\mathcal{E}^\sigma_{\overline{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{E}^\sigma_x$). L'homomorphisme linéaire $\pi_{s,x} : k^h \to \bigwedge^s \mathcal{O}^r_x$ est alors le composé $\pi_{s,x} = v_{s,x} \circ \psi_x$.

On note $\sigma_{s,x}$ le composé

$$\sigma_{s,x} = u_{s,x} \circ \psi^\sigma_x : k^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_x.$$

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}^h_{\overline{X}})$ et soit $\{e_i\}_{1\le i\le f}$ une base de F ; on peut le compléter pour obtenir une base $\{e_i\}_{1\le i\le h}$ de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}^h_{\overline{X}})$; puis pour tout entier s, avec $1 \le s \le r$ et pour tout point $x \in N$, on définit

$$\theta_{s,x}(F) = \max_{I_s} \big\{ |\{1, 2, \ldots, f\} \cap I_s| \ ; \ |I_s| = s, \ \sigma_{s,x}(\textstyle\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0 \big\}.$$

On vérifie sans difficulté que ces entiers ne dépendent pas de la base $\{e_i\}_{1\le i\le h}$ choisie.

Lemme III.3.3. — *Pour tout entier s, avec $1 \le s \le r$ et pour tout point $x \in N$, on a l'inégalité*

$$\rho_{s,x}(F) \le \theta_{s,x}(F).$$

Démonstration. — Fixons un entier s, avec $1 \le s \le r$ et un point $x \in N$. D'après la définition de $\rho_{s,x}$ (cf. section III.2.2), il existe un ensemble I_s à s éléments de $\{1, 2, \ldots, h\}$ tel que $\pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$ et

$$\rho_{s,x}(F) = \big|\{1, 2, \ldots, f\} \cap I_s\big|.$$

La condition $\pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$ est équivalente à $v_{s,x} \circ \psi_x(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$, donc $v^\sigma_{s,x} \circ \psi^\sigma_x(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$; comme $v^\sigma_{s,x} = v_{s,x} \circ u_{s,x}$, on obtient

$$v_{s,x} \circ u_{s,x} \circ \psi^\sigma_x(\textstyle\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0,$$

donc $u_{s,x} \circ \psi^\sigma_x(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$, ce qui revient au même, $\sigma_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0$. On en déduit

$$\theta_{s,x}(F) \ge \big|\{1, 2, \ldots, f\} \cap I_s\big| = \rho_{s,x}(F),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque III.3.4. — On notera N' le plus grand sous-niveau de N qui ne contient aucun dégénérateur ; alors toutes les restrictions $u_{s,N'}$ $(1 \leq s \leq r)$ de $u_{s,N}$ au sous-niveau N' vérifient la condition : $\ker u_{s,N'}$ et $(\operatorname{Im} u_{s,N'})^{\sigma}$ sont en somme directe. D'après la preuve de la proposition II.2.1, toutes les restrictions $v_{s,N'}$ ne sont nulles en aucun point géométrique, c'est-à-dire pour tout $x \in N'$, $v_{s,x} \neq 0$. De plus, d'après [?, section III.3b], pour tout point $x \in N'$, $u_{s,x}(e) \neq 0$ si et seulement si $v_{s,x} \circ u_{s,x}(e) \neq 0$.

Cette remarque combinée à la preuve du lemme III.3.3 montre :

Lemme III.3.5. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout entier $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N'$, on a*

$$\rho_{s,x}(F) = \theta_{s,x}(F).$$

Dans la suite de cette section, si $\mathcal{G}$ est un fibré vectoriel sur $\overline{X}$, $\mathcal{G}_x$ désignera alors le germe de $\mathcal{G}$ en un point $x \in \overline{X}$; en particulier, $\mathcal{O}_x$ est le germe du fibré trivial $\mathcal{O}_{\overline{X}}$; c'est un anneau de valuation discrète ; on notera v_x sa valuation.

Soit F un sous-espace vectoriel de k^h et soit $\mathcal{F}$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F ; on notera M_x le sous-$\mathcal{O}_x$-module de $\bar{\mathcal{E}}_x$ engendré par F. Pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, rappelons (cf. définition I.3.6) que $\mathcal{F}_s = \mathcal{F}^{\sigma} \cap \bar{\mathcal{E}}_s$ (avec la convention $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{\sigma}$) ; posons alors

$$\ell(s) = \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_s.$$

Lemme III.3.6. — *Avec les notations ci-dessus, il existe*

i) *une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq r}$ de $\bar{\mathcal{E}}_x$ comme $\mathcal{O}_x$-module,*

ii) *une base $\{f_i\}$ de M_x comme $\mathcal{O}_x$-module et des éléments $\{a_i\}$ de $\mathcal{O}_x$, où les indices i parcourent l'ensemble $\mathcal{A} = \{s^- + j \mid s \in \underline{r}, 1 \leq j \leq \ell(s) - \ell(s^-)\}$,*

ces bases étant telles que :

▷ *pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, l'ensemble $\{e_i\}_{s < i \leq r}$ forme une base de $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ comme $\mathcal{O}_x$-module ;*

▷ *pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$ et pour tout entier j, avec $1 \leq j \leq \ell(s) - \ell(s^-)$, l'élément $f_{s^-+j} - a_{s^-+j} e_{s^-+j}$ soit dans le sous-module $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$.*

Démonstration. — On applique le théorème des diviseurs élémentaires au sous-module $M_x \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/M_x \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ du $\mathcal{O}_x$-module libre $\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$: il existe donc une base $\{e_i\}_{s^-+1 \leq i \leq s}$ de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ et des éléments $\{a_{s^-+j}\}_{1 \leq j \leq \ell(s)-\ell(s^-)}$ tels que $\{a_{s^-+j} e_{s^-+j}\}_{1 \leq j \leq \ell(s)-\ell(s^-)}$ forme une base de $M_x \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/M_x \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x}$. Pour conclure, il suffit de tout relever dans $\bar{\mathcal{E}}_x$, c.q.f.d. □

Lemme III.3.7. — *Pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, on a alors l'inégalité*

$$\theta_{s,x}(F) \leq \min\left\{ \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^- \right\}.$$

Démonstration. — Soit s entier, avec $1 \leq s \leq r$ et soit x un point de N ; la discussion suivant le lemme III.3.2 et le lemme précédent entraînent immédiatement que

$$\begin{aligned}\theta_{s,x}(F) &\leq \sum_{\substack{t \in \underline{r} \\ t \leq s^-}} (\ell(t) - \ell(t^-)) + \min\left\{\ell(s^+) - \ell(s^-), s - s^-\right\} \\ &= \min\left\{\ell(s^+), \ell(s^-) + s - s^-\right\} \leq \min\left\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\right\},\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. □

Proposition III.3.8. — *Pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$, on a alors*

$$\rho_{s,x}(F) \leq \min\left\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\right\}.$$

Démonstration. — Elle résulte directement des lemmes III.3.3 et III.3.7. □

On est armé pour démontrer la proposition III.3.1.

Preuve de la proposition III.3.1. — Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$. Si

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{E}} \deg \mathcal{E} + k_0,$$

le choix de k_0 (cf. section II.3.1) implique

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{E}} \deg \mathcal{E} + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\right).$$

Désormais, on peut supposer que $\deg \mathcal{F} \geq (\operatorname{rg} \mathcal{F}/\operatorname{rg} \mathcal{E}) \deg \mathcal{E} + k_0$.

Le lemme II.3.2 implique que $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathcal{F}) = 0$ et que $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales F. D'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\dim F = \deg \mathcal{F} + (1 - g) \operatorname{rg} \mathcal{F}.$$

Le lemme III.3.2 et la proposition III.3.8 impliquent

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leq s \leq r} \alpha_s \varepsilon \frac{\max_{x \in N}\{\rho_{s,x}(F)\}}{s} &\leq \sum_{1 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s \varepsilon}{s} \min\left\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\right\} \\ &= \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} \varepsilon + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\right).\end{aligned}$$

Puisque $\psi(y)$ est semistable, la proposition III.2.4 est applicable ; on l'applique à F pour obtenir l'inégalité voulue

$$\begin{aligned}0 &\leq (h - \varepsilon) \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} + \sum_{1 \leq s \leq r} \alpha_s \varepsilon \frac{\max_{x \in N}\{\rho_{s,x}(F)\}}{s} - \dim F \\ &\leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\right) - \deg \mathcal{F}.\end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

III.3.2. Preuve du théorème II.6.1 : deuxième partie. — Cette section est consacrée à démontrer l'assertion réciproque de la proposition III.3.1.

Proposition III.3.9. — *Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r}$. Supposons que tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifie*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big) \quad (\text{resp. } <).$$

Alors le point $\psi(y)$ est semistable (resp. stable).

Soit $\{F_t\}_{1 \leq t \leq h}$ une filtration maximale croissante par des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h)$; on notera $\mathcal{F}_t$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F_t ; on obtient ainsi une filtration croissante

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_h.$$

Puis pour tout entier t, avec $1 \leq t \leq h$, on a une filtration décroissante

$$\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t^\sigma \supseteq \cdots \supseteq \overline{\mathcal{F}}_{t,s} = \mathcal{F}_t^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s \supseteq \cdots \supseteq \overline{\mathcal{F}}_{t,r} = 0$$

de $\overline{\mathcal{F}}_t$ par des sous-fibrés maximaux $\{\overline{\mathcal{F}}_{t,s}\}_{s \in \underline{r}}$ induite par la filtration

$$\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^\sigma \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_s \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_r = 0.$$

Proposition III.3.10. — *Avec les notations ci-dessus, on considère l'ensemble*

$$A = \big\{ t \; ; \; \dim F_t \geq \frac{h - \varepsilon}{r} \operatorname{rg} \mathcal{F}_t \big\}.$$

Alors, pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, on a

$$\mu_s(z, \underline{n}) \geq r! \Big(\frac{h}{s} \sum_{t \in A} \beta_t \min \big\{ \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-} + s - s^- \big\} - \sum_t \beta_t \dim F_t \Big).$$

Démonstration. — On note

$$B = \big\{ i \; ; \; \exists\, t \in A \text{ tel que } \operatorname{rg} \mathcal{F}_t = i \big\} = \big\{ i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \big\},$$

et pour tout élément $i_j \in B$, on pose

$$t_j = \min \big\{ t \in A \; ; \; \operatorname{rg} \mathcal{F}_t = i_j \big\}.$$

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$; la filtration $\mathcal{F}_{t_1} \subsetneq \mathcal{F}_{t_2} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{F}_{t_\ell}$ induit une filtration

$$\overline{\mathcal{F}}_{t_1,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_1,s} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{t_2,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_2,s} \subseteq \cdots \subseteq \overline{\mathcal{F}}_{t_\ell,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_\ell,s}$$

du fibré $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s$ par des sous-fibrés vectoriels (pas nécéssairement maximaux) ; à son tour, cette dernière filtration induit une filtration par des sous-fibrés maximaux de $\bar{\mathcal{E}}$:

$$\bar{\mathcal{E}}_s \subseteq \mathcal{A}_{t_1,s} \subseteq \mathcal{A}_{t_2,s} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_{t_\ell,s} \subseteq \bar{\mathcal{E}}_{s^-},$$

telle que, pour tout entier t_j, le sous-fibré $\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s$ ait le même rang que $\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s}$ et le contienne.

À nouveau, si $\mathcal{G}$ est un fibré vectoriel sur $\overline{X}$, alors $\mathcal{G}_x$ désigne le germe de $\mathcal{G}$ en un point $x \in \overline{X}$; $\mathcal{O}_x$ est ainsi le germe du fibré trivial $\mathcal{O}_{\overline{X}}$; c'est un anneau de valuation discrète et on note v_x sa valuation.

On note aussi $M_{t_j,x}$ le sous-$\mathcal{O}_x$-module de $\bar{\mathcal{E}}_x$ engendré par F_{t_j} ; on a ainsi une suite croissante de sous-$\mathcal{O}_x$-modules de $\bar{\mathcal{E}}_x$

$$M_{t_1,x} \subseteq M_{t_2,x} \subseteq \cdots \subseteq M_{t_\ell,x},$$

et pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, une suite croissante de sous-$\mathcal{O}_x$-modules

$$(M_{t_1,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_1,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x}) \subseteq \cdots \subseteq (M_{t_\ell,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_\ell,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x})$$

de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$; enfin, posons

$$\ell(j,s) = \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s.$$

Il existe alors une base $\{e_{s^-+1}, e_{s^-+2}, \ldots, e_s\}$ de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ comme $\mathcal{O}_x$-module telle que, pour tout entier t_j, l'ensemble $\{e_{s^-+1}, e_{s^-+2}, \ldots, e_{s^-+\ell(j,s)}\}$ forme une base de $\mathcal{A}_{t_j,s,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ comme $\mathcal{O}_x$-module.

Puisque $(M_{t_j,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_j,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x})$ est contenu dans $\mathcal{A}_{t_j,s,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ et de même rang, il existe une base

$$\{f_{s^-+1,j}, f_{s^-+2,j}, \ldots, f_{s^-+\ell(j,s),j}\}$$

de $(M_{t_j,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_j,x} \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x})$ comme $\mathcal{O}_x$-module de la forme

$$\begin{aligned}
f_{s^-+1,j} &= a^{(x)}_{s^-+1,j} e_{s^-+1} + * e_{s^-+2} + \cdots + * e_{s^-+\ell(j,s)},\\
f_{s^-+2,j} &= \qquad\qquad a^{(x)}_{s^-+2,j} e_{s^-+2} + \cdots + * e_{s^-+\ell(j,s)},\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\\
f_{s^-+\ell(j,s),j} &= \qquad\qquad\qquad\qquad a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j} e_{s^-+\ell(j,s)},
\end{aligned}$$

où tous les $*$ et tous les éléments $a^{(x)}_*$ sont dans $\mathcal{O}_x$.

On relève tout dans $\bar{\mathcal{E}}_x$, il existe donc une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de $\bar{\mathcal{E}}_x$ telle que

i) pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, $\{e_{s+1}, e_{s+2}, \ldots, e_r\}$ forme une base de $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$,

ii) pour tout entier $1 \le j \le \ell$, il existe une base $\{f_{s^-+1,j}, \ldots, f_{s^-+\ell(j,s),j}\}_{s \in \underline{r}}$ de $M_{t_j,x}$, avec

$$\begin{aligned}
f_{s^-+1,j} &\equiv a^{(x)}_{s^-+1,j} e_{s^-+1} + * e_{s^-+2} + \cdots + * e_{s^-+\ell(j,s)} &&\pmod{\bar{\mathcal{E}}_{s,x}},\\
f_{s^-+2,j} &\equiv \qquad\qquad a^{(x)}_{s^-+2,j} e_{s^-+2} + \cdots + * e_{s^-+\ell(j,s)} &&\pmod{\bar{\mathcal{E}}_{s,x}},\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad\qquad \ddots\\
f_{s^-+\ell(j,s),j} &\equiv \qquad\qquad\qquad\qquad a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j} e_{s^-+\ell(j,s)} &&\pmod{\bar{\mathcal{E}}_{s,x}},
\end{aligned}$$

où tous les $*$ et tous les éléments $a^{(x)}_*$ sont dans $\mathcal{O}_x$.

Lemme III.3.11. — *Il existe un point x dans le sous-niveau N' (défini dans la remarque III.3.4) de N et où on a*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell}\sum_{s\in \underline{r}}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j})+v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j})+\cdots+v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big)=0.$$

Démonstration du lemme III.3.11. — Pour tout entier t_j, notons $\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}$ le sous-fibré de $\bar{\mathcal{E}}$ engendré par le sous-espace vectoriel F_{t_j} ; il est contenu dans $\overline{\mathcal{F}}_{t_j}=\mathcal{F}^{\sigma}_{t_j}$ et de même rang ; son germe en x est $M_{t_j,x}$ et le germe de $\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_s$ ($s\in\underline{r}$) en x est donc $(M_{t_j,x}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_j,x}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s,x})$. La somme

$$v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j})+v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j})+\cdots+v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})$$

est la longueur du quotient de $\mathcal{A}_{t_j,s,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ par le sous-module

$$(M_{t_j,x}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-,x})/(M_{t_j,x}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s,x}).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\deg\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s&-\deg(\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-})/(\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_s)\\&\geq\sum_{x\in N'}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j})+v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j})+\cdots+v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big),\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in\underline{r}}\deg\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s-\deg\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\\&\quad=\sum_{s\in\underline{r}}\big(\deg\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s-\deg(\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_{s^-})/(\overline{\mathcal{F}}'_{t_j}\cap\bar{\mathcal{E}}_s)\big)\\&\quad\geq\sum_{s\in\underline{r}}\sum_{x\in N'}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j})+v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j})+\cdots+v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big).\end{aligned}$$

Pour tout entier s, avec $s\in\underline{r}$, le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\bar{\mathcal{E}}$ est majoré par le polygone p_0, donc

$$\begin{aligned}\deg(\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s)&=\deg\mathcal{A}_{t_j,s}-\deg\bar{\mathcal{E}}_s\\&\leq\deg\mathcal{A}_{t_j,s}+\deg\mathcal{E}_s-d+1\\&\leq\frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s}+p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s})+\frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{E}_s+p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s)-d+1\\&\leq\frac{d}{r}\operatorname{rg}(\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s})+p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s})+p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s)+1,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\underline{r}} &\deg(\mathcal{A}_{t_j,s}/\bar{\mathcal{E}}_s)\\ &\leq \sum_{s\in\underline{r}} \Big(\frac{d}{r}\operatorname{rg}(\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t_j,s}) + p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s}) + p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s) + 1\Big)\\ &\leq \frac{d}{r}\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t_j} + \sum_{s\in\underline{r}}\big(p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s}) + p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s) + 1\big).\end{aligned}$$

D'autre part, comme F_{t_j} engendre $\mathcal{F}'_{t_j}$ génériquement, on sait (cf. lemme II.3.3) que

$$\deg\mathcal{F}'_{t_j} \geq \dim F_{t_j} - \operatorname{rg}\mathcal{F}'_{t_j} \geq \frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_{t_j} - (g+\frac{\varepsilon}{r})\operatorname{rg}\mathcal{F}_{t_j}.$$

En combinant les trois inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{s\in\underline{r}}\sum_{x\in N'} &\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j}) + v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j}) + \cdots + v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big)\\ &\leq \Big(g+\frac{\varepsilon}{r}\Big)\operatorname{rg}\mathcal{F}_{t_j} + \sum_{s\in\underline{r}}\big(p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s}) + p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s) + 1\big).\end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que, pour tout point x dans N', on ait

$$\sum_{1\leq j\leq \ell}\sum_{s\in\underline{r}}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j}) + v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j}) + \cdots + v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big) \geq 1.$$

On déduirait alors

$$\sum_{x\in N'}\sum_{1\leq j\leq \ell}\sum_{s\in\underline{r}}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j}) + v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j}) + \cdots + v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big) \geq |N'|.$$

Les deux dernières inégalités impliquaient

$$\begin{aligned}|N'| &\leq \sum_{x\in N'}\sum_{1\leq j\leq \ell}\sum_{s\in\underline{r}}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j}) + v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j}) + \cdots + v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big)\\ &\leq \sum_{1\leq j\leq\ell}\Big[(g+\frac{\varepsilon}{r})\operatorname{rg}\mathcal{F}_{t_j} + \sum_{s\in\underline{r}}\big(p_0(\operatorname{rg}\mathcal{A}_{t_j,s}) + p_0(\operatorname{rg}\mathcal{E}_s) + 1\big)\Big].\end{aligned}$$

Le terme à droite est borné par ε, p_0, X et r tandis que le terme à droite est minoré par $N - \operatorname{Deg}(r,p_0)w$ (cf. proposition I.3.5). Comme $|N| - \operatorname{Deg}(r,p_0)w$ est supposé assez grand par rapport à ε, p_0, X et r (cf. section II.3.1), on obtenait ainsi une contradiction.

La preuve est donc achevée. □

Revenons à la démonstration de la proposition III.3.10. On fixe un point $x \in N'$ tel que

$$(*)\qquad \sum_{1\leq j\leq \ell}\sum_{s\in\underline{r}}\big(v_x(a^{(x)}_{s^-+1,j}) + v_x(a^{(x)}_{s^-+2,j}) + \cdots + v_x(a^{(x)}_{s^-+\ell(j,s),j})\big) = 0.$$

Pour un élément x dans le germe $\bar{\mathcal{E}}_x$, on notera $\overline{x}$ son image dans la fibre de $\bar{\mathcal{E}}$ en x, que l'on note encore $\bar{\mathcal{E}}_x$. On définit une suite $\{g_i\}_{1\leq i\leq r}$ d'éléments de la fibre $\bar{\mathcal{E}}_x$ comme suit : soit i un entier, avec $1 \leq i \leq r$; on définit

$$g_i = \begin{cases} \bar{f}_{i,1} & \text{si } i - i^- \leq \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_1,i^+}/\bar{\mathcal{E}}_{i^+}, \\ \bar{f}_{i,j} & \text{si } \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_{j-1},i^+}/\bar{\mathcal{E}}_{i^+} < i - i^- \leq \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_j,i^+}/\bar{\mathcal{E}}_{i^+} \text{ et } j > 1, \\ \bar{e}_{i,j} & \text{si } \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_\ell,i^+}/\bar{\mathcal{E}}_{i^+} < i - i^-. \end{cases}$$

L'égalité (*) implique :

Corollaire III.3.12. — *Pour tout $s \in \underline{r}$, $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}$ désignera la fibre de $\bar{\mathcal{E}}_s$ en x. Alors, pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, l'image du produit $\bigwedge_{1\leq i\leq s} g_i$ par la projection*

$$\bigwedge^{s} \bar{\mathcal{E}}_x \twoheadrightarrow \bigwedge^{r_1} \bar{\mathcal{E}}_x/\bar{\mathcal{E}}_{r_1,x} \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-,x}/\bar{\mathcal{E}}_{s^+,x}$$

n'est pas nulle.

On peut relever les éléments $\{g_i\}_{1\leq i\leq r}$ en des éléments $\{h_i\}_{1\leq i\leq r}$ de k^h tels que, pour tout entier $i = t^- + k$ avec $t = i^+$ et $k \leq \operatorname{rg} \mathcal{A}_{t_j,t}/\bar{\mathcal{E}}_t$, l'élément h_i appartienne à F_{t_j}. Avec ce choix, la remarque III.3.4 et le corollaire III.3.12 entraînent que, pour tout entier $1 \leq s \leq r$,

$$\pi_{s,x}\Big(\bigwedge_{1\leq i\leq s} h_i\Big) \neq 0.$$

Rappelons (cf. section III.2.2) que

$$\mu_s(z, \underline{n}) = \frac{r!}{s} \max_{I_s} \Big\{ \sum_{i\in I_s} n_i \ ; \ |I_s| = s, \ \pi_{s,x}\Big(\bigwedge_{i\in I_s} e_i\Big) \neq 0 \Big\};$$

il en résulte

$$\mu_s(z, \underline{n}) \geq r!\Big(\frac{h}{s} \sum_{t\in A} \beta_t \min\{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{F}}_t/\bar{\mathcal{F}}_{t,s}, \operatorname{rg} \bar{\mathcal{F}}_t/\bar{\mathcal{F}}_{t,s^-} + s - s^-\} - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big).$$

La preuve de la proposition III.3.10 est donc terminée. □

On est armé pour donner une preuve de la proposition III.3.9.

Preuve de la proposition III.3.9. — On conserve les notations utilisées précédemment. D'après la proposition III.2.2, pour que $\psi(y)$ soit semistable (resp. stable), il faut vérifier

$$\varepsilon_0\mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1\leq s\leq r} \alpha_s\mu_s(z, \underline{n}) \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$

En effet, la proposition III.3.10 implique

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0\mu_0(z,\underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1\leq s\leq r} \alpha_s \mu_s(z,\underline{n}) \\
&\quad\geq r\varepsilon_0\Big(\frac{h}{r}\sum_t \beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big) \\
&\qquad + \sum_{1\leq s\leq r} r!\,\alpha_s\varepsilon_1\Big(\frac{h}{s}\sum_{t\in A}\beta_t \min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-} + s - s^-\big\} \\
&\qquad\qquad - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big).
\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned}
0 &\leq r\varepsilon_0\Big(\frac{h}{r}\sum_t \beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big) \\
&\quad + \sum_{1\leq s\leq r} r!\,\alpha_s\varepsilon_1\Big(\frac{h}{s}\sum_{t\in A}\beta_t \min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-} + s - s^-\big\} \\
&\qquad - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big).
\end{aligned}$$

En remplaçant $r\varepsilon_0\varepsilon/(h-\varepsilon) = r!\,\varepsilon_1$ dans la formule et utilisant le fait que $\sum_{1\leq s\leq r}\alpha_s = 1$, l'inégalité ci-dessus est équivalente à

$$\begin{aligned}
\sum_t \beta_t \dim F_t &\leq \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_t \beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t \\
&\quad + \sum_{1\leq s\leq r}\frac{\alpha_s\varepsilon}{s}\sum_{t\in A}\beta_t \min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-} + s - s^-\big\}.
\end{aligned}$$

Pour tout $t\notin A$, par définition de l'ensemble A (cf. proposition III.3.10), on a la minoration $(h-\varepsilon)/r\operatorname{rg}\mathcal{F}_t > \dim F_t$, d'où

$$\frac{h-\varepsilon}{r}\sum_{t\notin A}\beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t \geq \sum_{t\notin A}\beta_t \dim F_t.$$

Pour tout $t\in A$, comme F_t engendre $\mathcal{F}_t$ génériquement, d'après le lemme II.3.3,

$$\dim F_t \leq h^0(\overline{X},\mathcal{F}_t) \leq \deg\mathcal{F}_t + \operatorname{rg}\mathcal{F}_t,$$

ce qui montre

$$\deg\mathcal{F}_t \geq \dim F_t - \operatorname{rg}\mathcal{F}_t \geq \frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \Big(g+\frac{\varepsilon}{r}\Big)\operatorname{rg}\mathcal{F}_t;$$

le sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}_t$ satisfait donc l'hypothèse du lemme II.3.2, car k_0 est choisi très négatif en fonction de ε, p_0, X et r (cf. section II.3.1) ; le lemme II.3.2 appliqué à $\mathcal{F}_t$ montre que $\mathrm{H}^1(\overline{X},\mathcal{F}_t) = 0$ et que $\mathcal{F}_t$ est engendré par ses sections globales ; alors :

$$h^0(\overline{X},\mathcal{F}_t) = \deg\mathcal{F}_t + (1-g)\operatorname{rg}\mathcal{F}_t.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{h-\varepsilon}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t + \sum_{1\le s\le r}\frac{\alpha_s\varepsilon}{s}\min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-}+s-s^-\big\}\\
&\quad = \frac{h}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t + \sum_{s\in\underline{r}}\big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t,s}) - q(s^-)\big) \text{ (cf. lemme III.3.2)}\\
&\qquad = (1-g)\operatorname{rg}\mathcal{F}_t + \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}_t}{r}d + \sum_{s\in\underline{r}}\big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-}/\overline{\mathcal{F}}_{t,s}) - q(s^-)\big)\\
&\qquad\quad \ge (1-g)\operatorname{rg}\mathcal{F}_t + \deg\mathcal{F}_t = h^0(\overline{X},\mathcal{F}_t) \ge \dim F_t.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in A}\beta_t\dim F_t \le{}& \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_{t\in A}\beta_t\operatorname{rg}\mathcal{F}_t\\
&+\sum_{1\le s\le r}\frac{\alpha_s\varepsilon}{s}\sum_{t\in A}\beta_t\min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-}+s-s^-\big\}.
\end{aligned}$$

En résumé, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}
\sum_{t}\beta_t\dim F_t \le{}& \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_{t}\beta_t\operatorname{rg}\mathcal{F}_t\\
&+\sum_{1\le s\le r}\frac{\alpha_s\varepsilon}{s}\sum_{t\in A}\beta_t\min\big\{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^+}, \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_t/\overline{\mathcal{F}}_{t,s^-}+s-s^-\big\}.
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. La preuve de la proposition III.3.9 est achevée. □

CHAPITRE IV

COMPACTIFICATION DES CHAMPS DE CHTOUCAS DE DRINFELD

IV.1. Notations

Dans ce chapitre, on fixe un polygone p_0 assez convexe en fonction de la courbe X et de r (cf. définition I.2.4). On choisit un entier positif ε très grand par rapport à p_0, X et r. Puis on choisit un entier positif w et m niveaux $\{N_i\}_{1\leq i\leq m}$ disjoints sans multiplicités de même longueur M tels que

a) Tout point géométrique x de $\coprod_{1\leq i\leq m} N_i$ est supporté par un point fermé de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^w}$.

b) $M - \mathrm{Deg}(r,p_0)w$ est assez grand par rapport à ε, p_0, X et r où la fonction $\mathrm{Deg}(r,p_0)$ est définie dans la proposition I.3.5.

c) m est assez grand par rapport à ε, p_0, X et r.

On notera

$$N = \coprod_{1\leq i\leq m} N_i.$$

Enfin, on choisit un entier d très grand par rapport à m, M, w, ε, p_0, X et r ; on pose $h = d + (1-g)r$, où g est le genre de la courbe X.

IV.2. Construction du fourre-tout

IV.2.1. On reprend la même construction du fourre-tout que celle du chapitre II (cf. section II.3.4) : $\mathcal{Y}$ est le champ défini au-dessus de l'ouvert

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$$

de $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ en ajoutant un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_X^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ (défini modulo l'action de $\mathbb{G}_m$) pour lequel le morphisme induit $\mathrm{H}^0(X,\mathcal{O}_X^h) \to \mathrm{H}^0(X,\mathcal{E})$ est un isomorphisme ; il est un $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur au-dessus du champ

$$\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0};$$

il est un schéma quasi-projectif et muni d'une action naturelle du groupe $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

IV.2.2. La construction de l'espace projectif $\mathcal{Z}$ sera légèrement modifiée : rappelons (cf. section II.3.3) que $\mathcal{Z}_0$ est l'espace de Gieseker ; puis on note

$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1\leq s\leq r}\bigoplus_{x\in N_i} \operatorname{Hom}\big(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r\big)^{\otimes r!/s}\Big), \quad 1 \leq i \leq m,$$

et on définit

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \prod_{1\leq i\leq m} \mathcal{Z}_i;$$

cet espace projectif est muni aussi d'une action du groupe $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$.

IV.2.3. On construit maintenant un morphisme $\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ qui est $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$-équivariant. Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$; la donnée de y contient :

i) un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $\overline{X}$ de rang r et de degré d,

ii) un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{\overline{X}}^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, pour lequel le morphisme induit

$$\mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E})$$

est un isomorphisme,

iii) un pseudo-homomorphisme complet au niveau N, qui consiste en des homomorphismes linéaires

$$v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{E}_N \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}_N^r, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$ et soit x un point de N ; on notera

$$v_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}_x \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r$$

la restriction de $v_{s,N}$ à x.

À partir de cette donnée, on obtient un point géométrique $z = \psi(y)$ de $\mathcal{Z}$ de la façon suivante :

i) Pour obtenir un élément π_0 de $\mathcal{Z}_0$, on compose le morphisme induit

$$\bigwedge^r k^h = \bigwedge^r \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E})$$

avec le morphisme naturel $\bigwedge^r \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\overline{X}, \bigwedge^r \mathcal{E})$.

ii) Pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, pour tout entier i, avec $1 \leq i \leq m$ et pour tout point $x \in N$, le composé

$$\pi_{s,x} : \bigwedge^s k^h = \bigwedge^s \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}^h) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{E}) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_x \xrightarrow{v_{s,x}} \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r$$

définit un élément de $\operatorname{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)$. L'hypothèse sur N_i (cf. section IV.1) et le lemme II.3.4 impliquent que l'élément $\bigoplus_{x\in N_i} \pi_{s,x} \in \bigoplus_{x\in N_i} \operatorname{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)$ est non nul.

Lemme IV.2.1. — *Il existe un fibré inversible $\mathcal{M}$ relativement ample par rapport au morphisme*

$$\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z} \times (X - N)^2,$$

qui est muni d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$*-linéarisation.*

Démonstration. — On note $\mathcal{Y}_2$ le champ qui à tout schéma S associe le groupoïde des familles constituées :

i) d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ de rang r, de degré d vérifiant qu'en tout point géométrique $s \in S$, le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}_s$ est majoré par p_0,

ii) d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}^h_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ tel qu'en tout point géométrique $s \in S$, la restriction $\mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}^h_{X_s}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{E}_s)$ soit un isomorphisme,

iii) d'une famille d'éléments $\{\ell_i\}_{1\le i\le r-1}$ de $\mathrm{H}^0(S, \mathcal{O}_S)$,

iv) d'un pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{E}_{N\times S} \Rightarrow \mathcal{O}^r_{N\times S}$ de type $(\mathcal{O}_S, \ell_i)_{1\le s\le r-1}$ (cf. définition I.3.2), c'est-à-dire un ensemble d'homomorphismes linéaires

$$v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{E}_{N\times S} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N\times S}, \quad 1 \le s \le r,$$

vérifiant en particulier les conditions suivantes :

▷ on a $\bigwedge^s v_{1,N} = \ell_1^{s-1}\ell_2^{s-2}\cdots\ell_{s-1}v_{s,N}, \quad 1 \le s \le r,$

▷ $v_{r,N}$ est toujours un isomorphisme.

On note $\mathcal{Y}_3$ le champ qui à tout schéma S associe le groupoïde des familles constituées :

i) d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ de rang r, de degré d vérifiant qu'en tout point géométrique $s \in S$, le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}_s$ est majoré par p_0,

ii) d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}^h_{X\times S} \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ tel qu'en tout point géométrique $s \in S$, la restriction $\mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}^h_{X_s}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{E}_s)$ soit un isomorphisme,

iii) d'une famille d'homomorphismes linéaires $v_{s,N} : \bigwedge^s \mathcal{E}_{N\times S} \to \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N\times S}$, avec $1 \le s \le r$, vérifiant que $v_{r,N}$ est toujours un isomorphisme.

On définit le champ $\mathcal{Y}_1$ au-dessus de $\mathcal{Y}_2$ en ajoutant une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$ telle que les quotients $\mathcal{E}'/\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}''/\mathcal{E}'$ soient de longueur 1, et supportés par deux points ∞ et 0 dans $X - N$.

On note

$$\psi_0 : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}_1, \quad \psi_1 : \mathcal{Y}_1 \longrightarrow \mathcal{Y}_2 \times (X-N)^2, \quad \psi_2 : \mathcal{Y}_2 \longrightarrow \mathcal{Y}_3$$

les morphismes canoniques. En imitant la construction du morphisme $\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$, on obtient un morphisme $\psi_3 : \mathcal{Y}_3 \to \mathcal{Z}$. Tous les champs $\mathcal{Y}_i$ $(i = 1,2,3)$ sont munis d'une action de $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ et les morphismes ψ_i $(i = 0,1,2,3)$ sont $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-équivariants. De plus, on voit bien que le morphisme $\mathcal{Y} \to \mathcal{Z} \times (X-N)^2$ est le composé de ψ_0, ψ_1, $\psi_2 \times \mathrm{id}_{(X-N)^2}$ et $\psi_3 \times \mathrm{id}_{(X-N)^2}$.

On vérifie aisément que les morphismes d'oubli canoniques ψ_0 et ψ_2 sont quasi-affines. Pour conclure, il nous suffit de démontrer les lemmes IV.2.2 et IV.2.3.

Lemme IV.2.2. — *Il existe un fibré inversible relativement ample par rapport au morphisme*

$$\psi_1 : \mathcal{Y}_1 \longrightarrow \mathcal{Y}_2 \times (X-N)^2,$$

qui est muni d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$*-linéarisation.*

Preuve du lemme IV.2.2. — On a un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_1 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathrm{Hecke}^r \times_{(X\times X)} (X-N)^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Y}_2 \times (X-N)^2 & \longrightarrow & \mathrm{Vec}^r \times (X-N)^2. \end{array}$$

Comme $\mathrm{Hecke}^r \times_{(X\times X)} (X-N)^2 \to \mathrm{Vec}^r \times (X-N)^2$ est un morphisme projectif, il existe un fibré inversible $\mathcal{N}$ qui est relativement ample par rapport à ce morphisme. Alors le pull-back $f^*\mathcal{N}$ est un fibré inversible relativement ample par rapport au morphisme

$$\mathcal{Y}_1 \longrightarrow \mathcal{Y}_2 \times (X-N)^2,$$

et il est muni naturellement d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation, c.q.f.d. □

Lemme IV.2.3. — *Le morphisme $\psi_3 : \mathcal{Y}_3 \to \mathcal{Z}$ est quasi-affine.*

Preuve du lemme IV.2.3. — On considère le champ $\widetilde{\mathrm{Vec}}^r$ qui associe à tout schéma S le groupoïde des données constituées :

▷ d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur $X \times S$ de rang r, de degré d et de polygone canonique de Harder-Narasimhan majoré par p_0,

▷ d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{X\times S}^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ tel qu'en tout point géométrique $s \in S$, la restriction $\mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}^h) \to \mathrm{H}^0(X_s, \mathcal{E}_s)$ soit un isomorphisme.

On sait d'une part que le morphisme naturel $\widetilde{\mathrm{Vec}}^r \to \mathcal{Z}_0$ est une immersion localement fermée, voir par exemple [?, prop. 7.1]. D'autre part, la partie discrète de $\mathcal{Y}_3$, ce qui veut dire, la famille d'homomorphismes linéaires $\mathcal{E}_N \Rightarrow \mathcal{O}_N^r$ se plonge dans l'espace

$$\mathcal{Z}' = \Big\{ \bigoplus_i z_i \in \mathbb{P}\big(\bigoplus_i \bigoplus_{1\le s\le r} \bigoplus_{x\in N_i} \mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s}\big) \ ; \ z_i \neq 0 \Big\}.$$

Par conséquent, $\mathcal{Y}_3 \to \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}'$ est quasi-affine. Rappelons que $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \prod_i \mathcal{Z}_i$; le morphisme canonique $\mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$ est affine car $\mathcal{Z}' \to \prod_i \mathcal{Z}_i$ est affine. Étant le composé de $\mathcal{Y}_3 \to \mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}'$ et $\mathcal{Z}_0 \times \mathcal{Z}' \to \mathcal{Z}$, ψ_3 est donc quasi-affine, c.q.f.d. □

La preuve du lemme IV.2.1 est achevée. □

IV.3. Les quotients par le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m^{r-1}$

Posons

$$W^i = \bigoplus_{1\le s\le r} \bigoplus_{x\in N_i} \mathrm{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s}, \quad 1 \le i \le m;$$

l'action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur W_i est décrite dans la section II.4 ; celles-ci induisent donc une action de $\mathbb{G}_m^{r-1}$ sur $\prod_{1\le i\le m} \mathcal{Z}_i = \prod_{1\le i\le m} \mathbb{P}(W^i)$; à son tour, la dernière action nous fournit une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation λ du fibré ample $\mathcal{M} = \boxtimes_{1\le i\le m} \mathcal{O}(1)$. On peut fabriquer d'autres linéarisations via les deux procédures suivantes :

a) Soit k un entier positif ; la puissance symétrique de λ induit une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation λ^k du fibré ample $\mathcal{M}^{\otimes k}$.

b) Soit $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{r-1})$ une famille d'entiers positifs ou nuls ; la multiplication de λ^k avec le caractère

$$\mathbb{G}_m^{r-1} \longrightarrow \mathbb{G}_m, \quad (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1}) \longmapsto \ell_1^{d_1} \ell_2^{d_2} \cdots \ell_{r-1}^{d_{r-1}}$$

induit une $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation $\lambda_{\underline{d}}^k$ du fibré ample $\mathcal{M}^{\otimes k}$.

L'ensemble des points semistables, l'ensemble des points stables et le quotient de la linéarisation $\lambda_{\underline{d}}^k$ ne dépendent que des nombres $\underline{d}/k = (d_1/k, d_2/k, \ldots, d_{r-1}/k)$; on peut donc parler de la $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré ample $\mathcal{M} = \boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(1)$ associée à une suite de rationnels $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{r-1})$.

Soit $\underline{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_{r-1})$ une suite de rationnels ; on peut lui associer une suite de rationnels $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ de somme 1 (cf. section II.4) ; de plus, la suite $\underline{\alpha}$ détermine $\underline{d}$.

Dans la suite de ce chapitre, si deux suites $\underline{\alpha}$ et $\underline{d}$ correspondent, on dira que la $\mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(1)$ est associée à $\underline{\alpha}$ au lieu de celle associée à $\underline{d}$.

IV.4. Énonce du théorème principal. Application

IV.4.1. On peut énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème IV.4.1. — a) *Soient ε_0, ε_1 deux nombres entiers positifs tels que*

$$r\varepsilon_0 \frac{\varepsilon}{h - \varepsilon} = r!\, m\varepsilon_1.$$

Soit p un polygone assez convexe en fonction de X et de r, entier par rapport à d (cf. définition I.2.4) et majoré par p_0. On choisit un polygone rationnel q tel que, pour tout entier s, avec $0 < s < r$, on ait $p(s) < q(s) < p(s) + 1$. Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ la suite de rationnels positifs de somme 1 qui correspond à q (cf. section II.5). On considère la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(\varepsilon_1))$ de $\mathcal{Z}$.

Alors, pour un point géométrique $y \in \mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$\psi(y)$ est semistable (resp. stable).*

ii) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big) \quad (\text{resp. } <).$$

b) *Supposons q est assez grand par rapport à r. Alors le morphisme suivant est propre :*

$$\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \longrightarrow (X - N)^2 \times \mathcal{Z}^{ss}.$$

La preuve de la première partie de ce théorème se repose essentiellement sur celle du théorème II.6.1 et elle se trouve plus loin dans ce chapitre. La deuxième partie qui est plus technique sera démontrée dans le chapitre suivant.

IV.4.2. Donnons une application de ce théorème. On conserve les notations et les hypothèses du théorème IV.4.1.

Proposition IV.4.2. — *Il existe un sous-champ ouvert* $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ *dans le champ de chtoucas dégénérés tel qu'un point géométrique* $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \longleftrightarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow \mathcal{E}^\sigma)$ *de type* $\underline{r}$ *appartienne à ce sous-champ si et seulement si, pour tout sous-fibré vectoriel non trivial* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{E}$*, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \mathrm{rg}\, \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big).$$

Hypothèse IV.4.3. — Soit q un polygone rationnel tel que, pour tout entier s, avec $0 < s < r$, on ait $p(s) < q(s) < p(s) + 1$ et que les deux conditions suivantes soient équivalentes :

i) Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \mathrm{rg}\, \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big).$$

ii) Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \mathrm{rg}\, \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big).$$

Soit q un polygone rationnel qui vérifie l'hypothèse précédente, le théorème IV.4.1 entraîne que $\psi(y)$ est semistable si et seulement si $\psi(y)$ est stable.

Corollaire IV.4.4. — *On conserve les hypothèses du théorème IV.4.1. On suppose de plus que le polygone q vérifie l'hypothèse IV.4.3. Alors le morphisme suivant est propre :*

$$\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q} \times_{X \times X} (X - N)^2 \longrightarrow (X - N)^2.$$

Démonstration. — D'après le lemme IV.2.1, il existe un fibré inversible $\mathcal{M}$ relativement ample par rapport au morphisme

$$\psi_1 : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z} \times (X - N)^2,$$

qui est muni d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation.

On note $\mathcal{L}$ le fibré inversible très ample $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(\varepsilon_1))$ sur $\mathcal{Z}$. Pour un entier positif n_0 assez grand, le fibré inversible $\psi_1^* \mathcal{L}^{n_0} \otimes \mathcal{M}$ est ample sur $\mathcal{Y}$. Puis il existe une immersion

$$\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$$

telle que $\mathbb{P}^n$ soit muni d'une action de $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ qui étend celle de $\mathcal{Y}$; de plus, il existe une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n$ qui étend la linéarisation de $\psi_1^* \mathcal{L}^{n_0} \otimes \mathcal{M}$. On considère l'immersion

$$\mathcal{Y} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times \mathcal{Z} \times (X - N)^2.$$

On note $\mathcal{Y}_0$ la fermeture de $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{P}^n \times \mathcal{Z} \times (X - N)^2$, ψ_0 le morphisme

$$\mathcal{Y}_0 \longrightarrow \mathcal{Z} \times (X - N)^2,$$

et $\mathcal{M}_1$ l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathcal{Y}_0$.

Puisque $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) = \psi_1^{-1}(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2) \to \mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2$ est propre (cf. théorème IV.4.1 b)), l'immersion ouverte

$$\psi_1^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big) \longrightarrow \psi_0^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big)$$

est propre. Comme $\psi_1^{-1}(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2)$ est dense dans $\psi_0^{-1}(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2)$, on obtient

$$\psi_1^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big) = \psi_0^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big).$$

D'après la proposition 5.1 de [**?**], pour n assez grand, on a

$$\mathcal{Y}_0^{ss}(\psi_0^*\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M}_1) \subset \psi_0^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big) = \psi_1^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big),$$
$$\mathcal{Y}_0^{s}(\psi_0^*\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M}_1) \supset \psi_0^{-1}\big(\mathcal{Z}^{s} \times (X - N)^2\big) = \psi_1^{-1}\big(\mathcal{Z}^{s} \times (X - N)^2\big).$$

D'après le théorème IV.4.1 a), $\psi_1^{-1}(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2)$ et $\psi_1^{-1}(\mathcal{Z}^{s} \times (X - N)^2)$ sont égaux, d'où

$$\mathcal{Y}_0^{s}(\psi_0^*\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M}_1) = \mathcal{Y}_0^{ss}(\psi_0^*\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M}_1) = \psi_1^{-1}\big(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2\big).$$

Par conséquent, le quotient $\psi_1^{-1}(\mathcal{Z}^{ss} \times (X - N)^2)/\!/ \mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ existe et il est propre sur $(X - N)^2$. Ce quotient n'est rien d'autre que la préimage de $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ dans $\mathrm{ChtDeg}_N^{r,d}$; on obtient donc le résultat voulu en formant le quotient de ce dernier par le groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$. La preuve est terminée. □

Corollaire IV.4.5. — *On conserve les hypothèses du théorème IV.4.1. On suppose de plus que le polygone q vérifie l'hypothèse IV.4.3. Alors le morphisme suivant est propre :*

$$\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q} \longrightarrow X \times X.$$

Démonstration. — Il résulte du corollaire précédant en faisant varier le niveau N, c.q.f.d. □

On renvoie le lecteur au chapitre VI pour des examples de tels polygones q.

IV.5. Semistabilité

Dans cette section, on donne une preuve de l'assertion a) du théorème IV.4.1.

IV.5.1. Critère numérique de Mumford-Hilbert pour un point géométrique de $\mathcal{Z}$, I. — On considère la $\mathrm{SL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leq i\leq m}\mathcal{O}(\varepsilon_1))$ associée à la suite $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$. On notera $(d_1, d_2, \ldots, d_{r-1})$ la suite des rationnels positifs associée à la suite $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ (cf. section II.4).

Soit $\lambda : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{SL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$ un sous-groupe à un paramètre quelconque ; il existe une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_h\}$ qui diagonalise le sous-groupe à un paramètre induit $\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{SL}_h$ en

$$\lambda(t)e_i = t^{n_i}e_i,$$

où $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_h)$ est une suite décroissante d'entiers dont la somme vaut zéro et une suite d'entiers $(m_1, m_2, \ldots, m_{r-1})$ telle que l'action induite de $\mathbb{G}_m$ sur $\mathbb{G}_m^{r-1}$ s'écrive

$$t \longmapsto (t^{m_1}, t^{m_2}, \ldots, t^{m_{r-1}}).$$

Soit z un point géométrique de $\mathcal{Z}$; dans la donnée de z, on a :
i) un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\overline{X}$ de degré d,
ii) un homomorphisme linéaire $\pi_0 : \bigwedge^r k^h \longrightarrow \mathrm{H}^0(\overline{X}, \mathcal{L})$,
iii) pour tout point x dans N, des homomorphismes linéaires

$$\pi_{s,x} : \overset{s}{\bigwedge} k^h \longrightarrow \overset{s}{\bigwedge} \mathcal{O}_x^r, \quad 1 \leq s \leq r.$$

Avec ces notations, on définit

$$\mu_0(z, \underline{n}) = \max_I \Big\{ \sum_{i\in I} n_i \ ; \ |I| = r, \ \pi_0(\bigwedge_{i\in I} e_i) \neq 0 \Big\},$$

$$\mu_{s,x}(z, \underline{n}) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \pi_{s,x} = 0, \\ \frac{r!}{s} \max_{I_s} \big\{ \sum_{i\in I_s} n_i \ ; \ |I_s| = s, \ \pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0 \big\} & \text{si } \pi_{s,x} \neq 0, \end{cases}$$

$$\mu_{s,i}(z, \underline{n}) = \max_{x\in N_i} \big\{ \mu_{s,x}(z, \underline{n}) \big\},$$

$$\mu_i^s(z, \lambda) = \mu_{s,i}(z, \underline{n}) + \frac{r!}{s} \sum_{1\leq t\leq s-1} (s-t)m_t - \sum_{1\leq t\leq r-1} d_t m_t,$$

$$\mu(z, \lambda) = \varepsilon_0 \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1\leq i\leq m} \max_{1\leq s\leq r} \big\{ \mu_i^s(z, \lambda) \big\}.$$

Comme dans la section III.2.1, pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, on pose

$$hM_s = \sum_{1\leq t<s} (s-t)m_t,$$

avec la convention $M_1 = 0$; on sait (cf. section III.2.1) que

$$\sum_{1\leq t\leq r-1} d_t m_t = \sum_{2\leq t\leq r} \frac{hr!}{t} \alpha_t M_t.$$

Avec ces notations, on obtient

$$\begin{aligned}\mu_i^s(z,\lambda) &= \mu_{s,i}(z,\underline{n}) + \frac{r!}{s}\sum_{1\le t<s}(s-t)m_t - \sum_{1\le t<r} d_t m_t \\ &= \mu_{s,i}(z,\underline{n}) + \frac{hr!}{s}M_s - \sum_{2\le t\le r}\frac{hr!}{t}\alpha_t M_t.\end{aligned}$$

Le critère numérique de Hilbert-Mumford implique :

Proposition IV.5.1. — *Avec les notations ci-dessus, un point géométrique z de $\mathcal{Z}$ est semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0)\boxtimes(\boxtimes_{1\le i\le m}\mathcal{O}(\varepsilon_1))$ si et seulement si on a*

$$\text{(F)}\qquad \mu(z,\lambda) = \varepsilon_0\mu_0(z,\underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1\le i\le m}\max_{1\le s\le r}\{\mu_i^s(z,\lambda)\} \ge 0 \quad (\textit{resp.} > 0),$$

pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ.

IV.5.2. Critère numérique de Mumford-Hilbert pour un point général, II

Soit F un sous-espace vectoriel de k^h et soit $\{f_i\}_{1\le i\le \dim F}$ une base quelconque de F ; on peut compléter cette base pour obtenir une base $\{f_i\}_{1\le i\le h}$ de k^h ; puis pour tout entier s, avec $1\le s\le r$ et pour tout point $x\in N$, on définit

$$\rho_0(F) = \max_I\{|\{1,2,\ldots,\dim F\}\cap I| \ ; \ |I| = r,\ \pi_0(\bigwedge_{i\in I} f_i)\neq 0\},$$

$$\rho_{s,x}(F) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \pi_{s,x} = 0,\\ \max_{I_s}\{|\{1,2,\ldots,\dim F\}\cap I_s| \ ; \ |I_s| = s,\ \pi_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} f_i)\neq 0\} & \text{si } \pi_{s,x}\neq 0.\end{cases}$$

Ces entiers ne dépendent pas de la base $\{f_i\}_{1\le i\le h}$ choisie et satisfont les inégalités évidentes $\rho_0(F)\le r$ et

$$\rho_{s,x}(F)\le \min\{s,\dim F\},\quad \forall s,\ 1\le s\le r,\ \forall x\in N.$$

Lemme IV.5.2. — *Soient s un entier, avec $1\le s\le r$, x un point dans N, et $F\subsetneq F'$ deux sous-espaces vectoriels emboîtés de k^h. On a alors*

$$\rho_0(F)\le\rho_0(F') \quad \textit{et} \quad \rho_{s,x}(F)\le\rho_{s,x}(F').$$

Démonstration. — C'est évident. □

Soit $\underline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_h)$ une suite décroissante d'entiers de somme 0 ; elle appartient alors au cône engendré par les familles $\underline{n}_t$ $(1\le t\le h)$

$$n_{t,1} = n_{t,2} = \cdots = n_{t,t} = h-t,\quad n_{t,t+1} = n_{t,t+2} = \cdots = n_{t,h} = -t.$$

On peut donc écrire

$$\underline{n} = \sum_t \beta_t \underline{n}_t,$$

avec des pondérations $\{\beta_t\}$ positives ou nulles de somme positive. En général, les expressions $\mu_0(z,\underline{n})$, $\mu_{s,x}(z,\underline{n})$ $(1\le s\le r,\ x\in N)$ ne sont pas linéaires en fonction de $\underline{n}$; néanmoins, elles sont concaves, (cf. lemme III.2.5).

Grâce à cette propriété, on prouve :

Proposition IV.5.3. — *Pour qu'un point géométrique z de $\mathcal{Z}$ soit semistable (resp. stable) par rapport à la* $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$*-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré* $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leq i\leq m}\mathcal{O}(\varepsilon_1))$*, il faut que, pour toute filtration non triviale de k^h par des sous-espace vectoriel $\{F_t\}$, pour toute suite $\{\beta_t\}$ de pondérations positives ou nulles de somme positive et pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \dots, M_r)$, on ait l'inégalité*

$$\sum_t \beta_t \dim F_t \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_t \beta_t\rho_0(F_t) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\sum_t \beta_t\rho_{s,x}(F_t)+M_s}{s}\Big\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s} \quad (\textit{resp.} <).$$

En particulier, pour tout sous-espace vectoriel non trivial F de k^h et pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \dots, M_r)$, on a l'inégalité

$$\text{(G)}\qquad \dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{s,x}(F)+M_s}{s}\Big\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s} \quad (\textit{resp.} <).$$

Démonstration. — On choisit une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq r}$ de k^h telle que chaque sous-espace vectoriel F_t soit engendré par les vecteurs $\{e_i\}_{1\leq i\leq \dim F_t}$. Puis on considère la famille $\underline{n} = \sum_t \beta_t \underline{n}_t$ associée aux pondérations $\{\beta_t\}$. Enfin, on considère le sous-groupe à un paramètre $\lambda : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{SL}_h$ associé à la suite $(M_1 = 0, M_2, \dots, M_r)$, la base $\{e_i\}_{1\leq i\leq r}$ et la famille $\underline{n}$. Si $\underline{n} = \underline{n}_t$, on sait (cf. section III.2.2) que

$$\mu_0(z,\underline{n}_t) = r\Big(\frac{h}{r}\rho_0(F_t) - \dim F_t\Big), \quad \mu_{s,x}(z,\underline{n}_t) = r!\Big(\frac{h}{s}\rho_{s,x}(F_t) - \dim F_t\Big).$$

La concativité des fonctions μ_0 et $\mu_{s,x}$ implique

$$\mu_0(z,\underline{n}) \leq \sum_t \beta_t\mu_0(z,\underline{n}_t) \leq r\Big(\frac{h}{r}\sum_t\beta_t\rho_0(F_t) - \sum_t \beta_t\dim F_t\Big),$$

$$\mu_{s,x}(z,\underline{n}) \leq \sum_t \beta_t\mu_{s,x}(z,\underline{n}_t) \leq r!\Big(\frac{h}{s}\sum_t\beta_t\rho_{s,x}(F_t) - \sum_t \beta_t\dim F_t\Big).$$

Donc, pour tout entier i, avec $1 \leq i \leq m$, on a

$$\mu_{s,i}(z,\underline{n}) = \max_{x\in N_i}\{\mu_{s,x}(z,\underline{n})\} \leq r!\Big(\frac{h}{s}\max_{x\in N_i}\Big\{\sum_t \beta_t\rho_{s,x}(F_t)\Big\} - \sum_t\beta_t\dim F_t\Big),$$

donc

$$\mu_i^s(z,\underline{n}) \leq r!\Big(h\max_{x\in N_i}\Big\{\frac{\sum_t\beta_t\rho_{s,x}(F_t)+M_s}{s}\Big\} - \sum_t\beta_t\dim F_t\Big) - \sum_{2\leq t\leq r}\frac{hr!}{t}\alpha_t M_t.$$

On remplace ces inégalités dans la condition de semistabilité (F) de la proposition IV.5.1 pour obtenir

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varepsilon_0\mu_0(z,\underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1\leq i\leq m} \max_{1\leq s\leq r} \{\mu_{i,s}(z,\lambda)\} \\
&\leq r\varepsilon_0\Big(\frac{h}{r}\sum_t \beta_t\rho_0(F_t) - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big) \\
&\quad + r!\,\varepsilon_1 \sum_{1\leq i\leq m} \Big(h \max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}} \Big\{\frac{\sum_t \beta_t\rho_{s,x}(F_t) + M_s}{s}\Big\} - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big) \\
&\quad - m\varepsilon_1 \sum_{2\leq t\leq r} \frac{hr!}{t}\alpha_t M_t.
\end{aligned}$$

Enfin, compte tenu de la relation $r\varepsilon_0\varepsilon/(h-\varepsilon) = r!\,m\varepsilon_1$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\sum_t \beta_t \dim F_t \leq{}& \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_t \beta_t\rho_0(F_t) \\
&+ \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1\leq i\leq m} \max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}} \Big\{\frac{\sum_t \beta_t\rho_{s,x}(F_t) + M_s}{s}\Big\} - \varepsilon \sum_{2\leq s\leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s},
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

IV.5.3. Critère numérique de Mumford-Hilbert pour un point géométrique $z = \psi(y)$ de $\mathcal{Z}$. — Soit $z = \psi(y)$ un point géométrique de $\mathcal{Z}$, qui est l'image d'un point géométrique y de $\mathcal{Y}$; la fonction $\mu_0(z,\underline{n})$ est alors linéaire en fonction de $\underline{n}$ et on a

$$\mu_0(z,\underline{n}_t) = r\Big(\frac{h}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \dim F_t\Big),$$

où $\mathcal{F}_t$ désigne le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F_t. Si l'on écrit

$$\underline{n} = \sum_t \beta_t \underline{n}_t,$$

avec des pondérations positives ou nulles de somme positive, on a alors

$$\mu_0(z,\underline{n}) = r\Big(\frac{h}{r}\sum_t \beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t - \sum_t \beta_t \dim F_t\Big).$$

La proposition IV.5.3 devient donc plus simple.

Proposition IV.5.4. — *Pour qu'un point géométrique $z = \psi(y)$ soit semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1\leq i\leq m}\mathcal{O}(\varepsilon_1))$, il faut que, pour toute filtration non triviale de k^h par des sous-espace vectoriel $\{F_t\}$, pour toute suite $\{\beta_t\}$ de pondérations positives ou nulles de somme* *positive et pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \ldots, M_r)$, on ait l'inégalité*

$$\sum_t \beta_t \dim F_t \leq \frac{h-\varepsilon}{r} \sum_t \beta_t \operatorname{rg} \mathcal{F}_t + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \left\{ \frac{\sum_t \beta_t \rho_{s,x}(F_t) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s} \quad (\textit{resp.} <),$$

où $\mathcal{F}_t$ désigne le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F_t. En particulier, pour tout sous-espace vectoriel non trivial F de k^h, notons $\mathcal{F}$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}$ engendré par F et pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \ldots, M_r)$, on a alors l'inégalité

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r} \operatorname{rg} \mathcal{F} + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \left\{ \frac{\rho_{s,x}(F) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s} \quad (\textit{resp.} <).$$

IV.5.4. Calcul des points semistables et des points stables. — Dans cette section, on va déterminer l'ensemble des points semistables et stables de type $z = \psi(y)$. Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$; on dispose alors d'une filtration décroissante

$$\mathcal{E}^\sigma = \bar{\mathcal{E}} \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_1} \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_2} \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{r_k} = 0$$

de sous-fibrés maximaux de corangs $r_1, r_2, \ldots, r_k = r$ de $\bar{\mathcal{E}}$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}$ et soit s un entier, avec $s \in \underline{r} \cup 0$; on rappelle (cf. définition I.3.6) que $\bar{\bar{\mathcal{F}}}_s$ est le sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s$ de $\bar{\mathcal{E}}$; en particulier, on notera $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ ou $\bar{\bar{\mathcal{F}}}_0$ le fibré vectoriel $\mathcal{F}^\sigma$.

Théorème IV.5.5. — *Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca itéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r}$. Alors le point géométrique $\psi(y)$ est semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(\varepsilon_1))$ si et seulement si, pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \bar{\bar{\mathcal{F}}}_{s^-} / \bar{\bar{\mathcal{F}}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\textit{resp.} <).$$

Démonstration du théorème IV.5.5. — On montre d'abord :

Proposition IV.5.6. — *Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r}$. Supposons que $\psi(y)$ soit semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes_{1 \leq i \leq m} \mathcal{O}(\varepsilon_1))$. Alors pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \bar{\bar{\mathcal{F}}}_{s^-} / \bar{\bar{\mathcal{F}}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\textit{resp.} <).$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré non trivial de $\mathcal{E}$. Si

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{E}} \deg \mathcal{E} + k_0,$$

le choix de k_0 (cf. section IV.1) implique

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{\operatorname{rg} \mathcal{E}} \deg \mathcal{E} + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

On peut désormais supposer que $\deg \mathcal{F} \geq (\operatorname{rg} \mathcal{F}/\operatorname{rg} \mathcal{E}) \deg \mathcal{E} + k_0$.

Le lemme II.3.2 implique que $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \mathcal{F}) = 0$, et que $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales F. D'après le théorème de Riemann-Roch,

$$\dim F = \deg \mathcal{F} + (1-g) \operatorname{rg} \mathcal{F}.$$

Puisque $\psi(y)$ est semistable, on peut appliquer la proposition IV.5.4 : pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \ldots, M_r)$, on a l'inégalité

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r} \operatorname{rg} \mathcal{F} + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \left\{ \frac{\rho_{s,x}(F) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s}$$

On sait (cf. proposition III.3.8) que

$$\rho_{s,x}(F) \leq \min \big\{ \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^- \big\},$$

d'où

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \left\{ \frac{\rho_{s,x}(F) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s} \\ &\qquad \leq \varepsilon \max_{1 \leq s \leq r} \left\{ \frac{\min\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\} + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2 \leq s \leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s}. \end{aligned}$$

Le dernier terme est une fonction de $(M_1 = 0, M_2, \ldots, M_r)$; on sait (cf. section III.2.2) qu'elle atteint la valeur minimum quand

$$M_s = s \min \big\{ \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{1^+}, 1 \big\} - \min \big\{ \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^- \big\}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

et en ce point, elle vaut

$$\sum_{1 \leq s \leq r} \alpha_s \varepsilon \frac{\min\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\}}{s}.$$

En combinant tous ces résultats et en tenant compte du lemme III.3.2, on obtient

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{F} &\leq \frac{h-\varepsilon}{r} \operatorname{rg} \mathcal{F} + \sum_{1 \leq s \leq r} \alpha_s \varepsilon \frac{\min\{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^+}, \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{s^-} + s - s^-\}}{s} \\ &= \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big). \end{aligned}$$

La preuve est terminée. □

Pour terminer la preuve du théorème IV.5.5, on démontre la réciproque.

Proposition IV.5.7. — *Soit y un point géométrique de $\mathcal{Y}$, dont le chtouca dégénéré sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}}$ est de type $\underline{r}$. Supposons que, pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\textit{resp.} <).$$

Alors le point $\psi(y)$ est semistable (resp. stable) par rapport à la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1))$.

Démonstration. — D'après le critère numérique de Hilbert-Mumford, on sait (cf. proposition IV.5.1) que le point $z = \psi(y)$ est semistable (resp. stable) si et seulement si, pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ, on a

$$\mu(z, \lambda) = \varepsilon_0 \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq s \leq r} \{\mu_i^s(z, \underline{n})\} \geq 0 \quad (\text{resp.} >).$$

Fixons un entier i, avec $1 \leq i \leq m$. Le théorème II.6.1 et la proposition III.2.1 montrent déjà que, si pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\text{resp.} <),$$

on a alors

$$\frac{\varepsilon_0}{m} \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \max_{1 \leq s \leq r} \{\mu_i^s(z, \underline{n})\} \geq 0 \quad (\text{resp.} >),$$

pour tout sous-groupe à un paramètre non trivial λ. En sommant toutes ces inégalités, on obtient l'inégalité voulue

$$\mu(z, \lambda) = \varepsilon_0 \mu_0(z, \underline{n}) + \varepsilon_1 \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq s \leq r} \{\mu_{i,s}(z, \underline{n})\} \geq 0 \quad (\text{resp.} >).$$

La preuve est terminée. □

Le théorème IV.5.5 est donc démontré. □

Démonstration du théorème IV.4.1 a). — Cette assertion résulte directement du théorème IV.5.5 que l'on vient de démontrer et du théorème VI.1.1, c.q.f.d. □

CHAPITRE V

PROPRETÉ

Ce chapitre démontre la deuxième partie du théorème IV.4.1.

V.1. Préliminaires

On utilisera le critère valuatif de propreté pour un morphisme de type fini des schémas noethériens. Soit A un anneau de valuation discrète sur $\mathbb{F}_q$; on notera K son corps des fractions, κ son corps résiduel, π une uniformisante, et v sa valuation. On se donne un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{ss} \times (X-N)^2, \end{array}$$

dont le chtouca itéré sous-jacent à la flèche $\operatorname{Spec}(K) \to \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ est un chtouca ; on cherche alors à montrer qu'il existe un prolongement $\operatorname{Spec}(A) \to \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ tel que le diagramme complété reste encore commutatif.

V.1.1. Notations. — On note

$$X_A = X \times \operatorname{Spec} A, \quad X_K = X \times \operatorname{Spec} K, \quad X_\kappa = X \times \operatorname{Spec} \kappa.$$

On notera aussi A_X l'anneau local du schéma X_A en le point générique de la fibre spéciale X_κ ; il est un anneau de valuation discrète, dont π est également une uniformisante. Soit F le corps de fonctions de la courbe X ; alors le corps de fractions K_X de A_X s'identifie au corps de fractions de $F \otimes_{\mathbb{F}_q} K$ et le corps résiduel de A_X s'identifie au corps de fractions de $F \otimes_{\mathbb{F}_q} \kappa$.

On notera aussi σ les endomorphismes de A_X et K_X qui sont induits par $\mathrm{Id}_F \times \mathrm{Frob}_A$ et $\mathrm{Id}_F \times \mathrm{Frob}_K$, respectivement.

V.1.2. La donnée générique. — La flèche $\operatorname{Spec} K \to \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ consiste en une famille formée :

i) d'un fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X_K de rang r, de degré d et de polygone canonique de Harder-Narasimhan majoré par p,

ii) d'une modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ de $\mathcal{E}$, dont le zéro 0 et le pôle ∞ évitent le niveau $N \times \operatorname{Spec} K$,

iii) d'un morphisme surjectif $\mathcal{O}_{X_K}^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$, (défini modulo l'action de $\mathbb{G}_m(K)$) pour lequel le morphisme induit $\mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}^h) \to \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{E})$ est un isomorphisme,

iv) des sections globales inversibles $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{r-1}$ de $\mathcal{O}_{X_K}$, c'est-à-dire des éléments non nuls de K,

v) d'un isomorphisme $u_1 : \mathcal{E}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$; on notera

$$u_{1,N} : \mathcal{E}_{N \times \operatorname{Spec} K}^\sigma \longrightarrow \mathcal{E}_{N \times \operatorname{Spec} K}$$

le composé de la restriction de u_1 à $N \times \operatorname{Spec} K$ avec l'isomorphisme $\mathcal{E}_{N \times \operatorname{Spec} K}'' \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{N \times \operatorname{Spec} K}$.

vi) d'un isomorphisme $v_{1,N} : \mathcal{E}_{N \times \operatorname{Spec} K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{N \times \operatorname{Spec} K}^r$ qui vérifie la relation $v_{1,N}^\sigma = v_{1,N} \circ u_{1,N}$; on notera

$$v_{1,N_i} : \mathcal{E}_{N_i \times \operatorname{Spec} K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{N_i \times \operatorname{Spec} K}^r$$

(resp. $v_{1,x} : \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{x \times \operatorname{Spec} K}^r$) la restriction de $v_{1,N}$ au niveau N_i (resp. x).

Rappelons (cf. section IV.2.2) que $\mathcal{Z}$ est le produit de l'espace de Gieseker $\mathcal{Z}_0$ et les espaces projectifs $\mathcal{Z}_i$ définis comme suit :

$$\mathcal{Z}_i = \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{1 \leq s \leq r} \bigoplus_{x \in N_i} \operatorname{Hom}(\bigwedge^s k^h, \bigwedge^s \mathcal{O}_x^r)^{\otimes r!/s} \Big), \quad 1 \leq i \leq m.$$

Le composé $\operatorname{Spec} K \to \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \to \mathcal{Z}_i$ donne un point de $\mathcal{Z}_i(K)$, noté $(\pi_{s,x})_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}}$. Explicitement, l'application linéaire

$$\pi_{s,x} : \bigwedge^s K^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}_{x \times \operatorname{Spec} K}^r$$

est le composé de l'homomorphisme surjectif

$$\bigwedge^s K^h \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} K}.$$

avec l'isomorphisme

$$\ell_1^{-(s-1)} \ell_2^{-(s-2)} \cdots \ell_{s-1}^{-1} \bigwedge^s v_{1,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} K} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathcal{O}_{x \times \operatorname{Spec} K}^r.$$

On notera $(\pi_{s,x})_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}}$ le relèvement $\operatorname{Spec} A \to \mathcal{Z}_i$ du point $(\pi_{s,x})_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \in \mathcal{Z}_i(K)$.

V.1.3. On rappelle le lemme classique suivant (cf. [**11**]) :

Lemme V.1.1. — *Le foncteur qui à tout fibré vectoriel sur X_A associe d'une part sa restriction à la fibre générique X_K et d'autre part sa fibre au-dessus de* $\operatorname{Spec} A_X$ *est une équivalence de catégories, autrement dit, admet un foncteur quasi-inverse*

$$(\mathcal{E}, M) \longmapsto \mathcal{E}(M).$$

Avec ces notations, on notera $\mathcal{E}^M$ la restriction de $\mathcal{E}(M)$ à la fibre spéciale X_κ.

Soit V la fibre générique de $\mathcal{E}$; elle est un K_X-espace vectoriel de dimension r. L'isomorphisme $\mathcal{E}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$ et la modification $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}''$ induisent un homomorphisme σ-linéaire injectif $\varphi : V \to V$, autrement dit, pour tout élément v dans V et pour tout élément t dans K_X,

$$\varphi(tv) = \sigma(t)\varphi(v).$$

Soit M le réseau de V engendré par l'image de A^h via l'application

$$A^h \hookrightarrow K^h = \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{O}_{X_K}^h) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{E}).$$

Puisque le morphisme $\mathcal{O}_{X_K}^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}$ est défini modulo l'action de $\mathbb{G}_m(K)$, après une extension finie de K, on peut supposer que le réseau M est stable par φ, autrement dit $\varphi(M) \subset M$ et que la réduction

$$\overline{\varphi} : M/\pi M \longrightarrow M/\pi M$$

ne s'annule pas.

D'après le lemme V.1.1, on peut donc associer à ce réseau M la donnée suivante :

i) un fibré vectoriel $\mathcal{E}(M)$ sur X_A de rang r et de degré d,

ii) une modification $\mathcal{E}(M) \hookrightarrow \mathcal{E}'(M) \hookleftarrow \mathcal{E}''(M)$ de $\mathcal{E}(M)$, dont le zéro et le pôle évitent $N \times \operatorname{Spec} A$,

iii) un morphisme $\mathcal{O}_{X_A}^h \to \mathcal{E}(M)$ dont la restriction en la fibre spéciale X_κ est génériquement surjective,

iv) des éléments non nuls $\ell'_1, \ell'_2, \ldots, \ell'_{r-1}$ de A,

v) d'une famille d'homomorphismes partout bien définis sur X_A

$$u_s : \bigwedge^s (\mathcal{E}(M))^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}''(M), \quad 1 \leq s \leq r,$$

qui restent non nuls après réduction à X_κ et qui vérifient les conditions suivantes :

a) le morphisme $u_1 : (\mathcal{E}(M))^\sigma \to \mathcal{E}''(M)$ étend l'isomorphisme $u_1 : \mathcal{E}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}''$ donné plus haut ;

b) on a $\bigwedge^s u_1 = \ell_1'^{(q-1)(s-1)} \ell_2'^{(q-1)(s-2)} \cdots \ell_{s-1}'^{(q-1)} u_s$ pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$;

c) le morphisme u_r est toujours un isomorphisme.

La restriction des homomorphismes $\{u_s\}_{1 \leq s \leq r}$ au niveau $N \times \operatorname{Spec} A$ induit une famille d'homomorphismes linéaires

$$u_{s,N} : \bigwedge^s (\mathcal{E}(M))^\sigma_{N \times \operatorname{Spec} A} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N \times \operatorname{Spec} A}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

qui vérifient

a) $\bigwedge^s u_{1,N} = \ell_1'^{(q-1)(s-1)} \ell_2'^{(q-1)(s-2)} \cdots \ell_{s-1}'^{(q-1)} u_{s,N}$, pour tout entier $1 \leq s \leq r$,

b) $u_{r,N}$ est un isomorphisme.

Définition V.1.2. — *On appellera $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ type du réseau M la famille d'entiers telle que $r_k = r$ et pour tout $1 \leq s < r$,*

$$s \in \underline{r} \iff v(\ell'_s) = 0.$$

Puis on dispose des filtrations (cf. [**9**, § 2b])

$$\begin{gathered} 0=\mathcal{E}_0^M \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_s^M \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_r^M = \mathcal{E}^M, \\ 0={\mathcal{E}'}_0^M \subsetneq \cdots \subsetneq {\mathcal{E}'}_s^M \subsetneq \cdots \subsetneq {\mathcal{E}'}_r^M = {\mathcal{E}'}^M, \\ 0={\mathcal{E}''}_0^M \subsetneq \cdots \subsetneq {\mathcal{E}''}_s^M \subsetneq \cdots \subsetneq {\mathcal{E}''}_r^M = {\mathcal{E}''}^M, \\ (\mathcal{E}^M)^\sigma = \bar{\mathcal{E}}_0^M \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_s^M \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_r^M = 0, \quad s\in \underline{r}, \end{gathered}$$

de $\mathcal{E}^M$, ${\mathcal{E}'}^M$, ${\mathcal{E}''}^M$ et $\bar{\mathcal{E}}^M$ par des sous-fibrés maximaux telles que l'on ait des isomorphismes

$$\bar{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\bar{\mathcal{E}}_s^M \xrightarrow{\sim} {\mathcal{E}''_s}^M/{\mathcal{E}''_{s^-}}^M, \quad s\in\underline{r},$$

sur un ouvert non vide de la fibre spéciale X_κ.

De plus, pour tout entier $1\leq s\leq r$, ces isomorphismes induisent des plongements partout bien définis sur X_κ entre les fibrés vectoriels de même rang

$$\bigwedge^{s^-} \bar{\mathcal{E}}^M/\bar{\mathcal{E}}_{s^-}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\bar{\mathcal{E}}_{s^+}^M \longrightarrow \bigwedge^{s^-} {\mathcal{E}''_{s^-}}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} {\mathcal{E}''_{s^+}}^M/{\mathcal{E}''_{s^-}}^M,$$

et la réduction de l'homomorphisme u_s se décompose

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^s \bar{\mathcal{E}}^M & \xrightarrow{\quad u_s \quad} & \bigwedge^s {\mathcal{E}''}^M \\ \downarrow & & \uparrow \\ \bigwedge^{s^-} \bar{\mathcal{E}}^M/\bar{\mathcal{E}}_{s^-}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\bar{\mathcal{E}}_{s^+}^M & \longrightarrow & \bigwedge^{s^-} {\mathcal{E}''_{s^-}}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} {\mathcal{E}''_{s^+}}^M/{\mathcal{E}''_{s^-}}^M. \end{array}$$

Pour terminer cette section, rappelons ce qu'est un réseau itéré (cf. [**9**, déf. 2.1]).

Définition V.1.3. — *Un réseau M est dit* réseau itéré *si, pour tout entier s, avec $s\in\underline{r}$ et $s\neq r$, on a*

$$(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s^M = 0.$$

V.1.4. Il nous faut montrer que la donnée associée au réseau M définit bien un point y de $\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ et que la flèche $\operatorname{Spec} A \to \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss})$ fait commuter le diagramme complété. La démonstration se divise donc en plusieurs étapes :

a) Montrer d'abord que le morphisme $\mathcal{O}_{X_A}^h \to \mathcal{E}(M)$ est surjectif en la fibre spéciale X_κ et que l'application induite $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}_{X_\kappa}^h) \to \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M)$ est un isomorphisme.

b) Donner une description plus explicite du relèvement

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \prod_{1\leq i\leq m} \mathcal{Z}_i \\ \downarrow & & \| \\ \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & \prod_{1\leq i\leq m} \mathcal{Z}_i. \end{array}$$

c) Montrer que le réseau M est un réseau itéré au sens de la définition V.1.3.

d) Montrer que $v(\ell_s) = v(\ell'_s)$, pour tout $1\leq s\leq r-1$.

V.2. Étape a

V.2.1. On considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \longrightarrow & \psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec} A & \longrightarrow & \mathcal{Z}^{ss} \times (X-N)^2. \end{array}$$

Le morphisme $\operatorname{Spec} K \to \mathcal{Z}_0$ est le composé

$$\bigwedge^r K^h = \bigwedge^r \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{O}^h_{X_K}) \xrightarrow{\sim} \bigwedge^r \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_K, \bigwedge^r \mathcal{E}).$$

Comme le morphisme $\mathcal{O}^h_{X_A} \to \mathcal{E}(M)$ est génériquement surjectif en la fibre spéciale, le relèvement $\operatorname{Spec} A \to \mathcal{Z}_0$ est donc le composé

$$\bigwedge^r A^h = \bigwedge^r \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{O}^h_{X_A}) \longrightarrow \bigwedge^r \mathrm{H}^0\left(X_A, \mathcal{E}(M)\right) \longrightarrow \mathrm{H}^0\left(X_A, \bigwedge^r \mathcal{E}(M)\right).$$

On obtient ainsi la formule suivante pour le terme ρ_0 défini dans la section IV.5.2. Soit F un sous-espace vectoriel de κ^h ; on notera $\mathcal{F}$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}^M$ engendré par l'image de F dans $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M)$ via l'application

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M);$$

on a alors $\rho_0(F) = \operatorname{rg} \mathcal{F}$.

V.2.2. On sait que le morphisme $\operatorname{Spec} \kappa \to \mathcal{Z}$ se factorise à travers $\mathcal{Z}^{ss}$; on peut donc appliquer la proposition IV.5.3 ; ainsi, pour tout sous-espace vectoriel F de κ^h, on a l'inégalité :

$$(*) \qquad \dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1\leq i\leq m} \max_{\substack{1\leq s\leq r \\ x\in N_i}} \left\{\frac{\rho_{s,x}(F) + M_s}{s}\right\} - \varepsilon \sum_{2\leq s\leq r} \frac{\alpha_s M_s}{s}.$$

Proposition V.2.1. — *L'application suivante est bijective :*

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M).$$

Démonstration. — On commence par quelques lemmes préparatoires. Notons F_0 le noyau de l'application

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M).$$

Lemme V.2.2. — *On a la majoration* $\dim F_0 \leq \varepsilon$.

Démonstration du lemme V.2.2. — On applique l'inégalité (*) ci-dessus à F_0 et à la suite $M_1 = M_2 = \cdots = M_r = 0$. La formule de ρ_0 implique que $\rho_0(F_0) = 0$. De plus, on sait (cf. section IV.5.2) que, pour tout point $x \in N$ et pour tout entier $1 \leq s \leq r$, $\rho_{s,x}(F_0) \leq s$. On obtient ainsi la majoration

$$\dim F_0 \leq \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1\leq i\leq m} \max_{\substack{1\leq s\leq r \\ x\in N_i}} \left\{\frac{\rho_{s,x}(F_0)}{s}\right\} \leq \varepsilon,$$

ce qui achève la preuve du lemme V.2.2. □

Lemme V.2.3. — *Pour tout $1 \leq i \leq m$, l'application suivante est surjective :*

$$\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M) \longrightarrow \mathcal{E}^M_{N_i}.$$

Démonstration du lemme V.2.3. — On va prouver que $\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M(-N_i)) = 0$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M(-N_i)) \neq 0$; la dualité de Serre implique qu'il existe un morphisme non nul

$$\mathcal{E}^M(-N_i) \longrightarrow \Omega_{X_\kappa}.$$

On note $\mathcal{F} = \ker(\mathcal{E}^M(-N_i) \to \Omega_{X_\kappa})$; alors la codimension de $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{F})$ dans $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M)$ est majorée par $g + r|N_i| = g + rM$. On note F la préimage de $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{F})$ dans κ^h via l'application

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M).$$

Alors $\dim F \geq h - (g + rM)$. En appliquant l'inégalité (*) au sous-espace vectoriel F, et à $M_1 = M_2 = \cdots = M_r = 0$, on obtient

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \Big\{ \frac{\rho_{s,x}(F_0)}{s} \Big\}.$$

On sait (cf. section IV.5.2) que $\rho_0(F) \leq \operatorname{rg} \mathcal{F} = r - 1$ et que, pour tout point $x \in N$ et pour tout entier $1 \leq s \leq r$, $\rho_{s,x}(F) \leq s$. Le terme à droite est donc majoré par

$$\frac{h-\varepsilon}{r}(r-1) + \varepsilon.$$

Par conséquent, on a l'inégalité $h - (g + rM) \leq \dim F \leq (h - \varepsilon)/r(r-1) + \varepsilon$ ou

$$d \leq \varepsilon + r(2g - 1 + rM);$$

c'est une contradiction car on a supposé (cf. section IV.1) que d est très grand par rapport à M, ε, X et r. La preuve du lemme V.2.3 est achevée. □

La même preuve prouve :

Lemme V.2.4. — *On a*

$$\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M) = 0 \quad \textit{et donc} \quad \dim \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M) = h.$$

De plus, le fibré vectoriel $\mathcal{E}^M$ est engendré par ses sections globales.

Démonstration du lemme V.2.4. — Supposons d'abord que $\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M) \neq 0$. Les arguments utilisés dans la preuve du lemme V.2.3 impliquent $d \leq \varepsilon + r(2g - 1)$. C'est une contradiction car on a supposé (cf. section IV.1) que d est très grand par rapport à ε, X et r. Ainsi $\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M) = 0$ et d'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\dim \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M) = h.$$

De même, on peut prouver que, pour tout point x de X_κ,

$$\mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{E}^M(-x)) = 0,$$

ce qui entraîne que $\mathcal{E}^M$ est engendré par ses sections globales et achève la démonstration du lemme V.2.4. □

Lemme V.2.5. — *Soient N_{i_1}, $N_{i_2}, \ldots, N_{i_{\varepsilon+1}}$ des niveaux contenus dans N. Alors l'application suivante est surjective :*

$$\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M) \longrightarrow \mathcal{E}^M_{N_{i_1} \coprod N_{i_2} \coprod \cdots \coprod N_{i_{\varepsilon+1}}}.$$

Démonstration du lemme V.2.5. — Supposons que l'application ci-dessus n'est pas surjective. Les mêmes arguments dans la preuve du lemme V.2.3 prouvent

$$d \leq \varepsilon + r(2g - 1 + (\varepsilon + 1)rM),$$

c'est une contradiction car on a supposé (cf. section IV.1) que d est très grand par rapport à M, ε, X et r. La preuve du lemme V.2.5 est terminée. □

Lemme V.2.6. — *Sauf pour au plus ε valeurs i dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, l'application*

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathcal{E}^M_{N_i}$$

est surjective.

Démonstration du lemme V.2.6. — Cela résulte du lemme V.2.5 et du fait (cf. lemme V.2.2) que l'image de $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa})$ dans $\mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M)$ est de codimension au plus ε. □

Revenons à la démonstration de la proposition V.2.1. Soit i un entier, $1 \leq i \leq m$, tel que l'application

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathcal{E}^M_{N_i}$$

soit surjective. On va étudier les composantes $(\pi_{s,x})_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}}$ (cf. section V.1.2). Pour tout entier $1 \leq s \leq r$, génériquement, l'application $\pi_{s,x}$ ($x \in N_i$) est le composé du homomorphisme surjectif

$$\bigwedge^s K^h \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathrm{H}^0(X_K, \mathcal{E}) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} K}.$$

avec l'isomorphisme

$$\ell_1^{-(s-1)} \ell_2^{-(s-2)} \cdots \ell_{s-1}^{-1} \bigwedge^s v_{1,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} K} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{x \times \operatorname{Spec} K}.$$

Or le relèvement

$$\bigwedge^s A^h \longrightarrow \bigwedge^s \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{E}(M)) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A}$$

est surjectif, ce qui implique que le relèvement de $\pi_{s,x}$ se factorise à travers de

$$\bigwedge^s A^h \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathrm{H}^0(X_A, \mathcal{E}(M)) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_{x \times \operatorname{Spec} A}.$$

Cela montre bien que l'on a $\rho_{s,x}(F_0) = 0$, pour tout entier $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N_i$.

Compte tenu de cette inégalité et du lemme V.2.6, l'inégalité (*) (cf. début de la section V.2.2) entraîne

$$\dim F_0 \leq \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1 \leq i \leq m} \max_{\substack{1 \leq s \leq r \\ x \in N_i}} \left\{ \frac{\rho_{s,x}(F_0)}{s} \right\} \leq \frac{\varepsilon}{m} \times \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{m}.$$

Comme m est très grand par rapport à ε, on conclut que $\dim F_0 = 0$. L'application linéaire

$$\kappa^h = \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{O}^h_{X_\kappa}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M)$$

est donc injective. Or on sait (cf. lemme V.2.4) que

$$\dim \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{E}^M) = h,$$

ce qui montre que l'application précédente est en fait bijective et achève la preuve de la proposition V.2.1. □

V.3. Étape b

V.3.1. Dans cette section, on cherche à donner une description plus explicite des applications $(\pi_{s,x})_{\substack{1\le s\le r\\ x\in N_i}}$ $(1 \le i \le m)$. La discussion suivant le lemme V.2.6 montre que, pour tout entier s, avec $1 \le s \le r$ et pour tout point $x \in N_i$, l'application $\pi_{s,x}$ est le composé de l'homorphisme surjectif

$$\bigwedge^s A^h \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathrm{H}^0\left(X_A, \mathcal{E}(M)\right) \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{x\times \mathrm{Spec}\, A}$$

avec un homomorphisme linéaire

$$v_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{x\times \mathrm{Spec}\, A} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{x\times \mathrm{Spec}\, A},$$

dont la réduction de $(v_{s,x})_{\substack{1\le s\le r\\ x\in N_i}}$ ne s'annule pas.

Remarque V.3.1. — Cela implique immédiatement que, pour tout entier $1 \le s \le r$, pour tout point $x \in N$ et pour tout sous-espace vectoriel F de κ^h, on a l'inégalité

$$\rho_{s,x}(F) \le \min\{s, \mathrm{rg}\,\mathcal{F}\},$$

où $\mathcal{F}$ désigne le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}^M$ engendré par F.

V.3.2. Il reste à déterminer comment construire ce dernier homomorphisme linéaire

$$\Big(v_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{x\times \mathrm{Spec}\, A} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{x\times \mathrm{Spec}\, A}\Big)_{\substack{1\le s\le r\\ x\in N_i}}.$$

Fixons un entier $1 \le s \le r$. Génériquement, on a une famille d'isomorphismes linéaires

$$\ell_1^{-(s-1)}\ell_2^{-(s-2)}\cdots\ell_{s-1}^{-1}\bigwedge^s v_{1,N_i} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K} \xrightarrow{\sim} \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K},$$

où l'isomorphisme v_{1,N_i} s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E}(M)^\sigma_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K} & \xrightarrow{u_{1,N_i}} & \mathcal{E}(M)_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K} \\
{\scriptstyle v^\sigma_{1,N_i}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v_{1,N_i}} \\
\mathcal{O}^r_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K} & = & \mathcal{O}^r_{N_i\times \mathrm{Spec}\, K}.
\end{array}$$

On considère maintenant l'application

$$\bigwedge^s u_{1,N_i} : \bigwedge^s (\mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} A})^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} A}.$$

Génériquement, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^s \mathcal{E}(M)^\sigma_{N_i\times \operatorname{Spec} K} & \xrightarrow{\bigwedge^s u_{1,N_i}} & \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} K} \\ {\scriptstyle (\bigwedge^s v_{1,N_i})^\sigma}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \bigwedge^s v_{1,N_i}}\Big\downarrow \\ \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \operatorname{Spec} K} & \Longleftrightarrow & \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \operatorname{Spec} K}; \end{array}$$

on sait (cf. proposition II.1.3) qu'il existe une valuation standard $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}$ sur $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} K}$ telle que, pour tout $e \in \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} K}$,

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}\big(\bigwedge^s u_{1,N_i}(e)\big) = q \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e).$$

De plus, si l'on note $\deg_0$ la valuation canonique sur $\bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \operatorname{Spec} K}$, on a alors

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \deg_0(\bigwedge^s v_{1,N_i}(e)),$$

pour tout $e \in \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} K}$ (cf. proposition II.1.4).

Puisque $\bigwedge^s u_{1,N_i}$ stabilise le réseau $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} A}$, l'application

$$\bigwedge^s v_{1,N_i} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} K} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \operatorname{Spec} K}$$

envoie le réseau $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i\times \operatorname{Spec} A}$ dans le réseau $\bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i\times \operatorname{Spec} A}$; on peut donc écrire

$$(\bigwedge^s v_{1,x})_{x\in N_i} = \pi^{\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})}(v'_{s,x})_{x\in N_i},$$

où on note

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) = \min_{x\in N_i}\Big(\min_{e\in \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{x\times \operatorname{Spec} A}} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e)\Big),$$

et où $(v'_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{x\times \operatorname{Spec} A} \to \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{x\times \operatorname{Spec} A})_{x\in N_i}$ est une application non nulle même après réduction.

En résumé, on sait comment relever les différentes applications $(\bigwedge^s v_{1,x})_{x\in N_i}$ $(1 \leq s \leq r)$. Par conséquent, on doit savoir comment relever l'application $(\ell_1^{-(s-1)}\cdots\ell_{s-1}^{-1}\bigwedge^s v_{1,x})_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}$; en effet, il suffit d'écrire

$$\ell_1^{-(s-1)}\ell_2^{-(s-2)}\cdots\ell_{s-1}^{-1}(\bigwedge^s v_{1,x})_{x\in N_i} = \frac{\pi^{\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})}}{\ell_1^{s-1}\cdots\ell_{s-1}}(v'_{s,x})_{x\in N_i}.$$

Notons

$$M^i = \min_{1\leq s\leq r}\Big\{\frac{\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) - v(\ell_1^{s-1}\cdots\ell_{s-1})}{s}\Big\}.$$

Alors $(v'_{s,x}/\pi^{sM^i})_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}$ est le relèvement de $(v_{s,x})_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}$ (on s'autorise ici à considérer des extensions finies ramifiées de K).

Remarque V.3.2. — La réduction de l'application $(v'_{s,x}/\pi^{sM^i})_{x\in N_i}$ est non nulle si et seulement si

$$\frac{\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) - v(\ell_1^{s-1}\cdots\ell_{s-1})}{s} = \min_{1\leq t\leq r}\left\{\frac{\deg(\bigwedge^t u_{1,N_i}) - v(\ell_1^{t-1}\cdots\ell_{t-1})}{t}\right\}.$$

Cette remarque sera utilisée dans la preuve de l'étape d.

V.4. Étape c – Introduction

V.4.1. Le but des quatres sections qui suivent (cf. sections V.4–V.7) est de démontrer la proposition suivante.

Proposition V.4.1. — *Supposons que q est assez grand par rapport à r. Alors le réseau M est un φ-réseau itéré (cf. définition V.1.3).*

V.4.2. Stratégie de la preuve. — On présente dans cette section la stratégie de la preuve. La démonstration complète se trouve dans les sections qui suivent.

Comme le morphisme $\operatorname{Spec}\kappa \to \mathcal{Z}$ se factorise à travers l'ouvert $\mathcal{Z}^{ss}$, la proposition IV.5.3 est applicable :

Pour toute filtration non triviale de κ^h par des sous-espaces vectoriels $\{F_t\}$, pour toute suite $\{\beta_t\}$ de pondérations positives ou nulles de somme positive et pour toute suite de rationnels $(M_1 = 0, M_2, \ldots, M_r)$, on ait l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_t \beta_t \dim F_t \leq{}& \frac{h-\varepsilon}{r}\sum_t \beta_t \operatorname{rg}\mathcal{F}_t\\ &+\frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}\left\{\frac{\sum_t \beta_t\rho_{s,x}(F_t)+M_s}{s}\right\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s},\end{aligned}$$

où on note $\mathcal{F}_t$ le sous-fibré maximal de $\mathcal{E}^M$ engendré par F_t.

On dispose de deux filtrations : une filtration croissante $\{\mathcal{E}_s^M\}_{s\in\underline{r}}$ de $\mathcal{E}^M$ et une filtration décroissante $\{\overline{\mathcal{E}}_s^M\}_{s\in\underline{r}}$ de $\overline{\mathcal{E}}^M$. On notera $\{E_s\}_{s\in\underline{r}}$ et $\{\overline{E}_s\}_{s\in\underline{r}}$ les sections globales des fibrés $\{\mathcal{E}_s^M\}_{s\in\underline{r}}$ et $\{\overline{\mathcal{E}}_s^M\}_{s\in\underline{r}}$, respectivement.

On applique la condition de semistabilité à la réunion de $\{E_s\}_{s\in\underline{r}}$ et de $\{\overline{E}_s\}_{s\in\underline{r}}$ avec les pondérations $\beta_{E_s} = \beta_{\overline{E}_s} = \beta_s$ (le fait que la réunion de deux filtrations n'est pas une filtration n'est pas un problème sérieux). Après un petit calcul, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\underline{r}}\beta_t(d-1) \leq{}& (d-\varepsilon)\sum_{t\in\underline{r}}\beta_t\\ &+\frac{\varepsilon}{m}\sum_{s\in\underline{r}}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}\left\{\frac{\sum_{t\in\underline{r}}\beta_t\big(\rho_{s,x}(E_t)+\rho_{s,x}(\overline{E}_t)\big)+M_s}{s}\right\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s}.\end{aligned}$$

Maintenant, supposons par l'absurde que M n'est pas un φ-réseau itéré. Sous l'hypothèse que q est assez grand par rapport à r, on peut choisir des pondérations entières $\{\beta_s\}_{s\in\underline{r}}$ bornées en fonction de r, et un entier $s_{j_0} \in \underline{r}$ avec la propriété suivante :

Si N_i est un niveau M-régulier (cf. définition V.5.3), pour tout point x de N_i et pour tout entier $1 \leq s \leq r$, on a l'inégalité

$$(*) \qquad \sum_{t\in \underline{r}} \beta_t\big(\rho_{s,x}(E_t)+\rho_{s,x}(\overline{E}_t)\big) \leq s\sum_{t\in \underline{r}} \beta_t,$$

et de plus, pour $s = s_{j_0}$, on a l'inégalité plus stricte

$$(**) \qquad \sum_{t\in \underline{r}} \beta_t\big(\rho_{s_{j_0},x}(E_t)+\rho_{s_{j_0},x}(\overline{E}_t)\big) \leq s_{j_0}\sum_{t\in \underline{r}} \beta_t - 1.$$

Notons que la notion de niveau M-régulier remplace la condition que N_i ne contient aucun dégénérateur. On prouve que, sauf au plus un ensemble dont le cardinal est borné en fonction de p_0 et de r, tous les niveaux N_i sont M-réguliers.

En remplaçant ces majorations dans la condition de semistabilité et en choisissant un choix convenable des $\{M_s\}_{2\leq s\leq r}$, on en déduit

$$-q(s_{j_0}-1)+2q(s_{j_0})-q(s_{j_0}+1) = \frac{\alpha_{s_{j_0}}\varepsilon}{s_{j_0}} \leq \sum_{t\in \underline{r}} \beta_t + \frac{O(p_0,r,\varepsilon)}{m}.$$

Le terme à droite est majoré en fonction de r car les pondérations β sont majorées en fonctions de r et m est très grand par rapport à ε, p_0 et r. Comme p est assez convexe par rapport à r, le terme à gauche est grand par rapport à r. On obtient ainsi une contradiction, ce qui permet de conclure que M est un φ-réseau itéré.

V.5. Étape c – Préliminaires

V.5.1. On prouve d'abord que le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré $\mathcal{E}^M$ est en fait majoré par p, donc par p_0.

Lemme V.5.1. — *Le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}^M$ est majoré par p, donc par p_0.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré maximal non trivial de $\mathcal{E}^M$ et soit F le sous-espace de κ^h des sections globales de $\mathcal{F}$; on applique la proposition IV.5.3 au sous-espace vectoriel F : pour tous les paramètres $(M_2, M_3, \dots, M_r)$ (et $M_1 = 0$ toujours),

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq s\leq r\\ x\in N_i}}\left\{\frac{\rho_{s,x}(F)+M_s}{s}\right\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s}.$$

On sait (cf. section IV.5.2 et remarque V.3.1) que

i) $\rho_0(F) \leq \operatorname{rg}\mathcal{F}$,

ii) $\rho_{s,x}(F) \leq \min\{s, \operatorname{rg}\mathcal{F}\}$ pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N$.

On en déduit

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + \varepsilon\max_{1\leq s\leq r}\left\{\frac{\min\{s,\operatorname{rg}\mathcal{F}\}+M_s}{s}\right\} - \varepsilon\sum_{2\leq s\leq r}\frac{\alpha_s M_s}{s}.$$

On choisit $M_s = s - \min\{s, \operatorname{rg}\mathcal{F}\}$, $1 \leq s \leq r$, et on les remplace dans l'inégalité ci-dessus pour obtenir (cf. définition de $q(t)$ dans la section II.5)

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + \varepsilon \sum_{1\leq s\leq r} \alpha_s \frac{\min\{s, \operatorname{rg}\mathcal{F}\}}{s} = \frac{h}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + q(\operatorname{rg}\mathcal{F}).$$

D'autre part, la formule de Riemann-Roch implique

$$\begin{aligned}\dim F &= \dim \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{F})\\ &\geq \dim \mathrm{H}^0(X_\kappa, \mathcal{F}) - \dim \mathrm{H}^1(X_\kappa, \mathcal{F}) = \deg\mathcal{F} + (1-g)\operatorname{rg}\mathcal{F}.\end{aligned}$$

On combine les deux inégalités et un petit calcul nous donne

$$\deg\mathcal{F} \leq \frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + q(\operatorname{rg}\mathcal{F}) = \frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + p(\operatorname{rg}\mathcal{F}) + q(\operatorname{rg}\mathcal{F}) - p(\operatorname{rg}\mathcal{F}).$$

Comme $(d/r)\operatorname{rg}\mathcal{F} + p(\operatorname{rg}\mathcal{F})$ est un entier et le terme $q(\operatorname{rg}\mathcal{F}) - p(\operatorname{rg}\mathcal{F})$ est strictement compris entre 0 et 1, on déduit

$$\deg\mathcal{F} \leq \frac{d}{r}\operatorname{rg}\mathcal{F} + p(\operatorname{rg}\mathcal{F}),$$

ce qui montre bien que le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}^M$ est majoré par p, donc par p_0, c.q.f.d. □

Lemme V.5.2. — *En tout point x de N sauf un sous-ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de r et p_0, les applications*

$$u_{s,x} : \bigwedge^s \overline{\mathcal{E}}_x^M \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_x^M, \quad 1 \leq s \leq r,$$

se décomposent en

$$\begin{array}{ccc}\bigwedge^s \overline{\mathcal{E}}_x^M & \xrightarrow{\hspace{6em}} & \bigwedge^s \mathcal{E}_x^M \\ \big\downarrow & & \big\uparrow \\ \bigwedge^{s^-} \overline{\mathcal{E}}_x^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-,x}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} \overline{\mathcal{E}}_{s^-,x}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^+,x}^M & \xrightarrow{\ \sim\ } & \bigwedge^{s^-} \mathcal{E}_{s^-,x}^M \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}_{s^+,x}^M/\mathcal{E}_{s^-,x}^M.\end{array}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'en dehors un ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de r et p_0, les plongements (cf. section V.1.3)

$$\bigwedge^{s^-} \overline{\mathcal{E}}^M/\overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M \otimes \overline{\mathcal{E}}_{s^-}^M/\overline{\mathcal{E}}_s^M \hookrightarrow \bigwedge^{s^-} \mathcal{E}_{s^-}^{\prime\prime M} \otimes \mathcal{E}_s^{\prime\prime M}/\mathcal{E}_{s^-}^{\prime\prime M}, \quad s \in \underline{r},$$

deviennent des isomorphismes. Comme les deux fibrés vectoriels de deux côtés ont les mêmes rangs, il suffit de montrer que la différence de leurs degrés est majorée en fonction de r et p_0, ce qui résulte directement du lemme précédent. La preuve est donc terminée. □

V.5.2. Niveaux M-réguliers

Définition V.5.3. — *Un niveau N_i $(1 \leq i \leq m)$ est dit M-*régulier *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

a) *Tout point géométrique $x \in N_i$ admet les décompositions du lemme V.5.2.*

b) *Pour tout entier $s \in \underline{r}$, avec $(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s^M = 0$, N_i ne contient aucun point dans le support de $\bar{\mathcal{E}}/(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \oplus \bar{\mathcal{E}}_s^M$.*

Remarque V.5.4. — a) La condition « N_i est M-régulier » remplace la condition « N_i ne contient aucun dégénérateur ».

b) Les lemmes V.5.1 et V.5.2 entraînent que tout niveau N_i sauf un ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de p_0 et r est M-régulier.

V.5.3. Dans la suite de cette section V.5, fixons un niveau M-régulier N_i ; on considère l'application σ-linéaire

$$u_{1,N_i} : \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A} \longrightarrow \mathcal{E}(M)^\sigma_{N_i \times \operatorname{Spec} A} \longrightarrow \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A};$$

cette application s'inscrit dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A} & \xrightarrow{u_{1,N_i}} & \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A} \\ {\scriptstyle v_{1,N_i}} \big\downarrow & & {\scriptstyle v_{1,N_i}} \big\downarrow \\ \mathcal{O}^r_{N_i \times \operatorname{Spec} A} & \xrightarrow{\text{Frob}} & \mathcal{O}^r_{N_i \times \operatorname{Spec} A}. \end{array}$$

On écrira $\mathcal{E}(M)_x$ (respectivement $\mathcal{E}(M)_{N_i}$, $\mathcal{O}^r_x$, $\mathcal{O}^r_{N_i}$) au lieu de $\mathcal{E}(M)_{x \times \operatorname{Spec} A}$ (resp. $\mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} A}$, $\mathcal{O}^r_{x \times \operatorname{Spec} A}$, $\mathcal{O}^r_{N_i \times \operatorname{Spec} A}$) pour alléger les notations.

Quitte à remplacer A par une extension finie, il existe toujours des bases $\{e_{1,x}, e_{2,x}, \ldots, e_{r,x}\}$ et $\{f_{1,x}, f_{2,x}, \ldots, f_{r,x}\}$ de $\mathcal{E}(M)_x$ $(x \in N_i)$ telles que

$$\begin{aligned} u_{1,N_i}(e_{1,x}) &= \pi^{n_1} f_{1,\mathrm{Frob}(x)}, \\ u_{1,N_i}(e_{2,x}) &= \pi^{n_2} f_{2,\mathrm{Frob}(x)}, \\ &\vdots \\ u_{1,N_i}(e_{r,x}) &= \pi^{n_r} f_{r,\mathrm{Frob}(x)}, \end{aligned}$$

où les entiers $\{n_s\}$ sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} n_1 &= 0, \\ n_2 &= (q-1)v(\ell'_1), \\ &\vdots \\ n_r &= (q-1)v(\ell'_1 \ell'_2 \cdots \ell'_{r-1}). \end{aligned}$$

(*Rappelons que les éléments $\ell'_s \in A$ $(1 \leq s \leq r)$ sont donnés dans la section V.1.3.*)

Remarque V.5.5. — a) Le fait que le réseau M est de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ (cf. définition V.1.2) implique

$$0 = n_1 = \cdots = n_{r_1} < n_{r_1+1} = \cdots = n_{r_2} < \cdots$$

b) Pour tout entier $s \in \underline{r}$, comme le niveau N_i est M-régulier, on a la décomposition du lemme V.5.2 en x, d'où

$\triangleright$ $\mathcal{E}^M_{s,x}$ est engendré par $\bar{f}_{1,x}, \bar{f}_{2,x}, \ldots, \bar{f}_{s,x}$, les réductions modulo π de $f_{1,x}$, $f_{2,x}, \ldots, f_{s,x}$,

$\triangleright$ $\overline{\mathcal{E}}^M_{s,x}$ est engendré par $\bar{e}^\sigma_{s+1,x}, \bar{e}^\sigma_{s+2,x}, \ldots, \bar{e}^\sigma_{r,x}$, les réductions modulo π de $e^\sigma_{s+1,x}$, $e^\sigma_{s+2,x}, \ldots, e^\sigma_{r,x}$.

V.5.4. On rappelle maintenant les notations et les résultats de la section V.3. Rappelons qu'il existe une valuation standard $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}$ sur $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} K}$ vérifiant que, pour tout $e \in \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i \times \operatorname{Spec} K}$,

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}\big(\bigwedge^s u_{1,N_i}(e)\big) = q \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e), \quad \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \deg_0\big(\bigwedge^s v_{1,N_i}(e)\big),$$

où $\deg_0$ désigne la valuation canonique sur $\bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i \times \operatorname{Spec} K}$. Grâce à cette valuation, on montre que l'application $\bigwedge^s v_{1,N_i}$ envoie le réseau $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i}$ dans le réseau $\bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i}$; on a ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i} \arrow[r, "\bigwedge^s u_{1,N_i}"] \arrow[d, "\bigwedge^s v_{1,N_i}"'] & \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i} \arrow[d, "\bigwedge^s v_{1,N_i}"'] \\
\bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i} \arrow[r, "\mathrm{Frob}"'] & \bigwedge^s \mathcal{O}^r_{N_i}.
\end{tikzcd}$$

Rappelons que $v_{1,x} : \mathcal{E}(M)_x \to \mathcal{O}^r_x$ désigne la restriction de v_{1,N_i} à $x \times \operatorname{Spec} A$; on peut écrire

$$\big(\bigwedge^s v_{1,x}\big)_{x\in N_i} = \pi^{\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})}(v'_{s,x})_{x\in N_i},$$

où $(v'_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_x)_{x\in N_i}$ est une application non nulle après réduction. Pour tout point $x \in N_i$, on notera

$$\bar{v}'_{s,x} : \bigwedge^s \mathcal{E}^M_x \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{O}^r_x$$

la réduction de $v'_{s,x}$. (*Rappelons* (*cf. section V.3*) *que*

$$\deg\big(\bigwedge^s u_{1,N_i}\big) = \min_{x\in N_i}\big(\min_{e\in\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e)\big).)$$

Revenons à l'application $v_{1,x} : \mathcal{E}(M)_x \to \mathcal{O}^r_x$. D'après le théorème des diviseurs élémentaires, il existe une base $\{a_{i,x}\}_{1\le i\le r}$ de $\mathcal{O}^r_x$ et une suite croissante d'entiers $\{m_{i,x}\}_{1\le i\le r}$ telles que $\{\pi^{m_{i,x}} a_{i,x}\}_{1\le i\le r}$ soit une base de l'image $v_{1,x}(\mathcal{E}(M)_x)$. On notera $\{e'_{i,x}\}_{1\le i\le r}$ la base de $\mathcal{E}(M)_x$ induite par $\{\pi^{m_{i,x}} a_{i,x}\}_{1\le i\le r}$.

Proposition V.5.6. — *Avec les notations précédentes, si un élément e de $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x$ s'écrit sous la forme $e = \sum_{|I|=s} a_I \bigwedge_{i\in I} e'_i$, $a_I \in A$, alors*

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \min_{|I|=s}\Big\{v(a_I) + \sum_{i\in I} m_{i,x}\Big\}.$$

En particulier, on a

$$\min_{e\in\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = m_{1,x} + m_{2,x} + \cdots + m_{s,x}.$$

Démonstration. — Il résulte directement de la discussion qui précède et de l'égalité

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \deg_0\big(\bigwedge^s v_{1,N_i}(e)\big). \qquad \square$$

V.5.5. Soit s un entier, avec $0 \le s \le r$; on notera $\mathcal{M}_{s,x}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_x^M$ engendré par $\bar{e}'_{s+1,x}, \bar{e}'_{s+2,x}, \dots, \bar{e}'_{r,x}$. Introduisons encore une nouvelle notion.

Définition V.5.7. — *Soit s un entier, avec $1 \le s \le r$ et soit x un point de N_i. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_x^M$ et soit $\{e_i\}_{1\le i\le \dim F}$ une base de F ; on peut donc la compléter en une base $\{e_i\}_{1\le i\le r}$ de $\mathcal{E}_x^M$ et on définit*

$$\varrho_{s,x}(F) = \max_{I_s}\big\{|\{1,\dots,\dim F\}\cap I_s| \ ;\ |I_s| = s,\ \bar{v}'_{s,x}(\bigwedge_{i\in I_s} e_i) \neq 0\big\};$$

Cet entier est indépendant de la base choisie et vérifie

$$\varrho_{s,x}(F) \le \min\{s, \dim F\}.$$

L'intérêt de cette notion réside dans la proposition suivante.

Proposition V.5.8. — *Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}^M$ et soit F l'espace des sections globales de $\mathcal{F}$. Alors pour tout entier s, avec $1 \le s \le r$ et pour tout point $x \in N_i$,*

$$\rho_{s,x}(F) \le \varrho_{s,x}(\mathcal{F}_x).$$

Démonstration. — On sait (cf. section V.3) que l'homomorphisme linéaire $\bigwedge^s \kappa^h \to \mathcal{O}_x^r$ se décompose en deux morphismes : l'application surjective $\bigwedge^s \kappa^h \to \mathcal{E}_x^M$ et un multiple de $\bar{v}'_{s,x}$. Compte tenu des défintions des termes $\rho_{s,x}$ et $\varrho_{s,x}$ (cf. section IV.5.2 et définition V.5.7), on en déduit aussitôt l'inégalité voulue, c.q.f.d. $\square$

Si $\bar{v}'_{s,x}$ est l'application nulle ou, ce qui revient au même,

$$\min_{e\in\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) > \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}),$$

on a alors $\varrho_{s,x}(F) = 0$, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}_x^M$.

Dans le cas contraire $\bar{v}'_{s,x} \neq 0$, ce qui veut dire,

$$\min_{e\in\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}),$$

alors $\bar{v}'_{s,x}(\bar{e}_1 \wedge \bar{e}_2 \wedge \cdots \wedge \bar{e}_s) \neq 0$ si et seulement si, pour un (donc pour tout) choix de relèvements $\{e_i\}_{1\le i\le s}$ dans $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_x$ de $\{\bar{e}_i\}_{1\le i\le s}$, on a

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_s) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}).$$

On a ainsi la formule suivante pour $\varrho_{s,x}$: pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}_x^M$,

$$\varrho_{s,x}(F) = \min\big\{\dim F/F\cap \mathcal{M}_{s^{++},x}, \dim F/F\cap\mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}\big\},$$

où

▷ s^{--} est le plus grand entier $t < s$ tel que $m_{t,x} < m_{t+1,x}$,
▷ s^{++} est le plus petit entier $t \geq s$ tel que $m_{t,x} < m_{t+1,x}$.

Remarque V.5.9. — a) Les entiers positifs $m_{i,x}$ et les éléments $e'_{i,x}$ sont définis dans la discussion précédant la proposition V.5.6. Les sous-espaces vectoriels $\mathcal{M}_{s^{++},x}$, $\mathcal{M}_{s^{--},x}$ de $\mathcal{E}_x^M$ sont définis dans la début de cette section.

b) Les entiers s^{--}, s^{++} dépendent du point x.

Proposition V.5.10. — *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{E}_x^M$. Pour tout entier $1 \leq s \leq r$, on a alors*

$$\varrho_{s,x}(F \cap G) + \varrho_{s,x}(F + G) \leq \varrho_{s,x}(F) + \varrho_{s,x}(G).$$

Démonstration. — Fixons un entier s, avec $1 \leq s \leq r$. Si $\bar{v}'_{s,x}$ est l'application nulle, tous les termes dans l'inégalité sont nuls, l'inégalité voulue est évidente. On peut supposer donc que $\bar{v}'_{s,x}$ ne s'annule pas ; en particulier, on a la formule explicite plus haut. On distingue trois cas et démontre l'inégalité voulue dans chaque cas.

Cas 1. — On suppose

$$\dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} > \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--},$$

ce qui est équivalent à

$$\dim F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x}/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} > s - s^{--}.$$

Le quotient $F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x}/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$ se plonge dans $(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x}/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$, d'où $\dim(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x}/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} > s - s^{--}$ ou

$$\dim(F+G)/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} > \dim(F+G)/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}.$$

Par conséquent,

$$\varrho_{s,x}(F) = \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--},$$
$$\varrho_{s,x}(F+G) = \dim(F+G)/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}.$$

Si $\varrho_{s,x}(G) = \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}$, alors

$$\begin{aligned}
\varrho_{s,x}(F) + \varrho_{s,x}(G) &= \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--} \\
&\qquad + \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--} \\
&\geq \dim(F+G)/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--} \\
&\qquad + \dim(F \cap G)/(F \cap G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--} \\
&\geq \varrho_{s,x}(F+G) + \varrho_{s,x}(F \cap G).
\end{aligned}$$

Sinon, on doit avoir $\varrho_{s,x}(G) = \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$, alors

$$\begin{aligned}
\varrho_{s,x}(F) - \varrho_{s,x}(F+G) &= \dim(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{--},x}/F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} - \dim(F+G)/F \\
&\geq \dim(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} - \dim(F+G)/F \\
&\geq \dim(F \cap G)/(F \cap G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} - \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} \\
&\geq \varrho_{s,x}(F \cap G) - \varrho_{s,x}(G),
\end{aligned}$$

autrement dit,

$$\varrho_{s,x}(F) + \varrho_{s,x}(G) \geq \varrho_{s,x}(F+G) + \varrho_{s,x}(F \cap G).$$

Cas 2. — On suppose

$$\dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} > \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}.$$

Un argument similaire montre aussi

$$\varrho_{s,x}(F) + \varrho_{s,x}(G) \geq \varrho_{s,x}(F+G) + \varrho_{s,x}(F \cap G).$$

Cas 3. — Il nous reste à traiter le cas où on a simutanément

$$\dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} \leq \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--},$$
$$\dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} \leq \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}.$$

Cela implique $\varrho_{s,x}(F) = \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$ et $\varrho_{s,x}(G) = \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$, d'où

$$\begin{aligned}\varrho_{s,x}(F) + \varrho_{s,x}(G) &= \dim F/F \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} + \dim G/G \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} \\ &\geq \dim(F+G)/(F+G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} + \dim(F \cap G)/(F \cap G) \cap \mathcal{M}_{s^{++},x} \\ &\geq \varrho_{s,x}(F+G) + \varrho_{s,x}(F \cap G).\end{aligned}$$

En résumé, dans tous les cas, on obtient l'inégalité voulue. La preuve de la proposition V.5.10 est achevée. □

V.5.6.

Lemme V.5.11. — *Supposons que*

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j \in I} e_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}),$$

pour un certain point $x \in N_i$ et un certain ensemble I à s éléments. On a alors

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \frac{\sum_{j \in I} n_j}{q-1}.$$

Et puis pour tout point $y \in N_i$, on a l'inégalité

$$m_{1,y} + m_{2,y} + \cdots + m_{s,y} \geq \frac{\sum_{j \in I} n_j}{q-1}.$$

Démonstration. — Compte tenu du fait que $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$ est la valuation standard pour $\bigwedge^s u_{1,N_i}$, on a

$$\begin{aligned} q \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) &= q \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j \in I} e_{j,x}) = \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge^s u_{1,N_i}(\bigwedge_{j \in I} e_{j,x})) \\ &= \sum_{j \in I} n_j + \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j \in I} f_{j,\mathrm{Frob}(x)}) \geq \sum_{j \in I} n_j + \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}).\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \sum_{j\in I} n_j/(q-1)$. La première assertion est donc démontrée. Puis pour tout point $y \in N_i$, la proposition V.5.6 entraîne

$$m_{1,y} + m_{2,y} + \cdots + m_{s,y} = \min_{e\in\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_y} \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) \geq \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \frac{\sum_{j\in I} n_j}{q-1}.$$

La preuve du lemme V.5.11 est donc terminée. □

Corollaire V.5.12. — *On a toujours*

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

En particulier, pour tout point $y \in N_i$, on a toujours l'inégalité

$$m_{1,y} + m_{2,y} + \cdots + m_{s,y} \geq \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

Démonstration. — Il existe toujours un point $x \in N_i$ et un ensemble I à s éléments tels que $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$. D'après le lemme précédent, on a

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \frac{\sum_{j\in I} n_j}{q-1} \geq \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

En particulier, pour tout point $y \in N_i$, on a l'inégalité

$$m_{1,y} + m_{2,y} + \cdots + m_{s,y} \geq \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

La preuve est terminée. □

Lemme V.5.13. — *Supposons que*

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} f_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}),$$

pour un certain point $x \in N_i$ et un certain ensemble I à s éléments. On a alors

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \leq \frac{\sum_{j\in I} n_j}{q-1}.$$

Démonstration. — Compte tenu du fait que $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$ est la valuation standard pour $\bigwedge^s u_{1,N_i}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} n_j + \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) &= \sum_{j\in I} n_j + \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} f_{j,x}) \\ &= \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}\big(\bigwedge^s u_{1,N_i}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,\mathrm{Frob}^{-1}(x)})\big) \\ &= q\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,\mathrm{Frob}^{-1}(x)}) \geq q\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}).\end{aligned}$$

On obtient ainsi $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \leq \sum_{j\in I} n_j/(q-1)$. La preuve est terminée. □

V.6. Étape c – Début de la preuve

Supposons par l'absurde que le réseau M n'est pas un réseau itéré (cf. définition V.1.3). Il existe donc un élément $s_0 \in \underline{r}$ tel que

$$(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s^M = 0, \text{ pour tout entier } s \in \underline{r}, \text{ avec } s \leq s_0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{E}_{s_0^+}^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_{s_0^+}^M \neq 0.$$

Soit N_i un réseau M-régulier. Rappelons (cf. remarque V.5.5) que, pour tout point $x \in N_i$, $\mathcal{E}_{s,x}^M$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_x^M$ engendré par les réductions $\bar{f}_{1,x}$, $\bar{f}_{2,x}, \dots, \bar{f}_{s,x}$ et $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}^M$ est le sous-espace vectoriel de $\bar{\mathcal{E}}_x^M$ engendré par les réductions $\bar{e}_{s+1,x}^\sigma, \bar{e}_{s+2,x}^\sigma, \dots, \bar{e}_{r,x}^\sigma$. Par abus de langage, on notera aussi $\bar{\mathcal{E}}_{s,x}^M$ le sous-espace de $\mathcal{E}_x^M$ engendré par les réductions $\bar{e}_{s+1,x}, \bar{e}_{s+2,x}, \dots, \bar{e}_{r,x}$.

V.6.1. On conserve les notations des sections V.4 et V.5 ; en particulier, on travaille toujours avec un niveau N_i qui est M-régulier.

Proposition V.6.1. — *Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$, tel que $(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s^M = 0$. Pour tout point $x \in N_i$:*

a) *On a*

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) = \frac{\sum_{1\leq j\leq s} n_j}{q-1} \quad \textit{et} \quad m_{1,x} + m_{2,x} + \cdots + m_{s,x} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

b) *On a $s = s^{++}$ et $\mathcal{M}_{s,x} = \bar{\mathcal{E}}_{s,x}^M$; autrement dit, il est le sous-espace vectoriel engendré par $\bar{e}_{s+1,x}, \bar{e}_{s+2,x}, \dots, \bar{e}_{r,x}$. De plus, pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}_x^M$, on a la formule*

$$\varrho_{s,x}(F) = \dim F/F \cap \bar{\mathcal{E}}_{s,x}^M.$$

c) *Si l'on écrit $\bigwedge_{1\leq j\leq s} f_{j,x} = \sum_{|I|=s} a_I \bigwedge_{j\in I} e'_{j,x}$, $a_I \in A$, alors $v(a_{\{1,2,\dots,s\}}) = 0$.*

Démonstration. — a) Soit deg la valuation canonique sur le réseau $\bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i}$; d'après la preuve de la proposition II.1.3, pour tout $e \in \bigwedge^s \mathcal{E}(M)_{N_i}$, on a la formule

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(e) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\deg((\bigwedge^s u_{1,N_i})^n(e))}{q^n}.$$

Puisque $(\mathcal{E}_s^M)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}_s^M = 0$ et N_i est M-régulier (cf. définition V.5.3), les sous-espaces vectoriels $\mathcal{E}_{s,N_i}^M$ et $\bar{\mathcal{E}}_{s,N_i}^M$ de $\mathcal{E}_{N_i}^M$ ont pour l'intersection 0. Par conséquent, pour tout entier n et pour tout point $x \in N_i$,

$$\deg\big((\bigwedge^s u_{1,N_i})^n(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,x})\big) = \sum_{1\leq j\leq n} q^{j-1} \sum_{1\leq j\leq s} n_j,$$

donc

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,x}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{1\leq j\leq n} q^{j-1} \sum_{1\leq j\leq s} n_j}{q^n} = \frac{\sum_{1\leq j\leq s} n_j}{q-1}.$$

On sait (cf. corollaire V.5.12) que $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \geq \sum_{1\leq j\leq s} n_j/(q-1)$. Compte tenu du fait que $\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \leq \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,x})$, on en déduit

$$(*) \qquad \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) = \frac{\sum_{1\leq j\leq s} n_j}{q-1},$$

ce qui montre déjà la première assertion.

b) L'égalité (*) montre que $\bar{v}'_{s,x} \neq 0$: on peut donc appliquer la formule précédant la remarque V.5.9 pour calculer $\varrho_{s,x}$.

La première assertion combinée au lemme V.5.11 implique que, pour tout point $x \in N_i$ et pour tout ensemble I à s éléments de $\{1, 2, \ldots, r\}$, avec $I \neq \{1, 2, \ldots, s\}$, on a l'inégalité $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,x}) > \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$, ce qui entraîne $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s,x}) = 0$. D'après la formule explicite pour $\varrho_{s,x}$, on a

$$\min\left\{\dim \bar{\mathcal{E}}^M_{s,x}/\bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}, \dim \bar{\mathcal{E}}^M_{s,x}/\bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} \cap \mathcal{M}_{s^{--},x} + s - s^{--}\right\} = 0$$

ainsi $\bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} \cap \mathcal{M}_{s^{++},x}$. Comme $\dim \bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} = r - s \geq \dim \mathcal{M}_{s^{++},x} = r - s^{++}$, on en déduit que $s = s^{++}$ et $\bar{\mathcal{E}}^M_{s,x} = \mathcal{M}_{s^{++},x}$, ce qui démontre la deuxième assertion.

c) Finalement, on a

$$\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} f_{j,x}) = q \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,\mathrm{Frob}^{-1}(x)}) - \sum_{1\leq j\leq s} n_j = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}),$$

et la dernière assertion en résulte aussitôt.

La preuve est donc achevée. □

Corollaire V.6.2. — *Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$ et $1 \leq s \leq s_0$. Pour tout point $x \in N_i$:*

a) *On a*

$$\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) = \frac{\sum_{1\leq j\leq s} n_j}{q-1}.$$

En particulier, $m_{1,x} + m_{2,x} + \cdots + m_{s,x} = (n_1 + n_2 + \cdots + n_s)/(q-1)$.

b) *Pour tout sous-espace vectoriel F de $\mathcal{E}^M_x$, on a la formule*

$$\varrho_{s,x}(F) = \min\left\{\dim F/F \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s^+,x}, \dim F/F \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s^-,x} + s - s^-\right\}.$$

Démonstration. — Il résulte de la proposition V.6.1. □

Lemme V.6.3. — *Soit s un entier dans $\underline{r}$ tel que $(\mathcal{E}^M_s)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}^M_s = 0$. Pour tout point $x \in N_i$, on a alors*

$$m_{s,x} \leq \frac{n_s}{q-1}.$$

Démonstration. — En effet, comme $(\mathcal{E}^M_s)^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}^M_s = 0$, la proposition V.6.1 montre

$$m_{1,x} + m_{2,x} + \cdots + m_{s,x} = \frac{n_1 + n_2 + \cdots + n_s}{q-1}.$$

Ainsi on a

$$q\frac{\sum_{1\le j\le s} n_j + n_{s^+} - n_s}{q-1} \le q\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \le q\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\le j\le s} e_{j,x})$$
$$= \sum_{1\le j\le s} n_j + \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\le j\le s} f_{j,\mathrm{Frob}(x)})$$
$$\le \sum_{1\le j\le s} n_j + \frac{\sum_{1\le j\le s_0} n_j + (s-s_0)n_{s_{\ell+1}}}{q-1},$$

ce qui revient au même,

$$\sum_{s_0+1\le j\le s} (n_j - n_{s_0^+}) + q(n_{s^+} - n_s) \le (s-s_0)(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}),$$

ce qui implique

$$n_{s^+} - n_s \le (s-s_0)(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q \le r(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q$$

ce qu'on voulait, c.q.f.d. □

Lemme V.6.8. — *Pour tout entier $0\le j\le \ell$, on a alors*

$$n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+} \le r^2(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q.$$

Démonstration. — Le choix des s_j (cf. la discussion après la définition V.6.5) montre que tout entier $s\in \underline{r}$, avec $s_j < s < s_{j+1}$, n'est pas spécial et donc vérifie l'hypothèse du lemme V.6.7 ; on en déduit

$$n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+} = \sum_{\substack{s\in\underline{r}\\ s_j<s<s_{j+1}}} (n_{s^+} - n_s) \le \sum_{\substack{s\in\underline{r}\\ s_j<s<s_{j+1}}} r(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q \le r^2(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q,$$

ce qui démontre le lemme. □

V.6.3.

Lemme V.6.9. — *Il existe des entiers non négatifs $n, m_0, \dots, m_\ell$ tels que :*

a) $0 < n \le (2r^2)^{\ell+1} \le (2r^2)^r$, *qui est donc borné en fonction de r ;*

b) *la suite $\{m_j\}$ est croissante, avec $m_0 = 0$ et $m_\ell = n$;*

c) *on a la majoration*

$$\max_{0\le j\le \ell}\left\{\left|n\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}} - m_j\right|\right\} \le \frac{1}{2r^2}.$$

Démonstration. — Soit x un réel ; on note $[x]$ la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$. On considère $(2r^2)^\ell + 1$ nombres $(\{a\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\})_{0\le j\le \ell}$, avec $0\le a\le (2r^2)^{\ell+1}$; ils appartiennent tous au cube d'unité $[0,1]^{\ell+1}$. Donc au moins deux d'entre eux, disons

$a\frac{n_{s_{j+1}}-n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}}-n_{s_0^+}}$ et $b\frac{n_{s_{j+1}}-n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}}-n_{s_0^+}}$, avec $0 \leq a < b \leq (2r^2)^{\ell+1}$, appartiennent au même petit cube $[c/(2r^2), (c+1)/(2r^2)]^{\ell+1}$ pour un certain entier $0 \leq c < 2r^2$. On pose

$$n = b - a \quad \text{et} \quad m_j = \left[b\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\right] - \left[a\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\right],\ 0 \leq j \leq \ell,$$

ainsi on démontre déjà toutes les assertions sauf l'assertion que $m_1 = 0$. Reste à la prouver. En effet, le lemme V.6.8 appliquée à $j = 0$ montre

$$\frac{n_{s_1} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}} \leq \frac{r}{q}.$$

On choisit q assez grand par rapport à r de telle sorte que l'on peut choisir $m_1 = 0$, c.q.f.d. □

Dans la suite, on notera $\beta_j = m_j - m_{j-1}$, pour $1 \leq j \leq \ell$; les entiers β_j sont positifs ou nuls de somme n.

Proposition V.6.10. — *Soit N_i un niveau M-régulier. Pour tout point $x \in N_i$ et pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, on a alors*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Démonstration. — Remarquons que si $\bar{v}'_{s,x} = 0$, tous les termes à gauche sont nuls, l'inégalité est alors évidente. On peut donc supposer que $\bar{v}'_{s,x} \neq 0$. On distingue quatre cas : $1 \leq s \leq s_0$, $s = s_{\ell+1}$, $s_{\ell+1} < s \leq r$ et $s_0 < s < s_{\ell+1}$.

Cas 1 : $1 \leq s \leq s_0$.

Soit j un entier, avec $1 \leq j \leq \ell$; on applique le corollaire V.6.2 b) à s et à $\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$, compte tenu du fait que $\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x} \subset \mathcal{M}_{s^+,x} = \overline{\mathcal{E}}^M_{s^+,x} \subset \mathcal{M}_{s^-,x} = \overline{\mathcal{E}}^M_{s^-,x}$ (cf. proposition V.6.1 b)) :

$$\varrho_{s,x}(\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = 0;$$

de plus, $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s$, ce qui entraîne que $\varrho_{s,x}(\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s$. On a alors

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Cas 2 : $s = s_{\ell+1}$.

Soit j un entier, avec $1 \leq j \leq \ell$; on applique la proposition V.6.1 b) à $s = s_{\ell+1}$ et à $\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$, compte tenu du fait que $\mathcal{M}_{s_{\ell+1},x} = \overline{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x} \subset \overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$:

$$\varrho_{s_{\ell+1},x}(\overline{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = s_{\ell+1} - s_j;$$

Ainsi on a

$$q\frac{\sum_{1\leq j\leq s} n_j + n_{s^+} - n_s}{q-1} \leq q\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) \leq q\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} e_{j,x})$$
$$= \sum_{1\leq j\leq s} n_j + \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{1\leq j\leq s} f_{j,\mathrm{Frob}(x)})$$
$$\leq \sum_{1\leq j\leq s} n_j + \frac{\sum_{1\leq j\leq s_0} n_j + (s-s_0)n_{s_{\ell+1}}}{q-1},$$

ce qui revient au même,

$$\sum_{s_0+1\leq j\leq s} (n_j - n_{s_0^+}) + q(n_{s^+} - n_s) \leq (s-s_0)(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}),$$

ce qui implique

$$n_{s^+} - n_s \leq (s-s_0)(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q \leq r(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q$$

ce qu'on voulait, c.f.q.d. □

Lemme V.6.8. — *Pour tout entier $0 \leq j \leq \ell$, on a alors*

$$n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+} \leq r^2(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q.$$

Démonstration. — Le choix des s_j (cf. la discussion après la définition V.6.5) montre que tout entier $s \in \underline{r}$, avec $s_j < s < s_{j+1}$, n'est pas spécial et donc vérifie l'hypothèse du lemme V.6.7 ; on en déduit

$$n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+} = \sum_{\substack{s\in\underline{r}\\ s_j<s<s_{j+1}}} (n_{s^+} - n_s) \leq \sum_{\substack{s\in\underline{r}\\ s_j<s<s_{j+1}}} r(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q \leq r^2(n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+})/q,$$

ce qui démontre le lemme. □

V.6.3.

Lemme V.6.9. — *Il existe des entiers non négatifs $n, m_0, \ldots, m_\ell$ tels que :*

a) $0 < n \leq (2r^2)^{\ell+1} \leq (2r^2)^r$, *qui est donc borné en fonction de r ;*

b) *la suite $\{m_j\}$ est croissante, avec $m_0 = 0$ et $m_\ell = n$;*

c) *on a la majoration*

$$\max_{0\leq j\leq \ell}\left\{\left|n\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}} - m_j\right|\right\} \leq \frac{1}{2r^2}.$$

Démonstration. — Soit x un réel ; on note $[x]$ la partie entière de x et $\{x\} = x - [x]$. On considère $(2r^2)^\ell + 1$ nombres $(\{a\frac{n_{s_{j+1}}-n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}}-n_{s_0^+}}\})_{0\leq j\leq \ell}$, avec $0 \leq a \leq (2r^2)^{\ell+1}$; ils appartiennent tous au cube d'unité $[0,1]^{\ell+1}$. Donc au moins deux d'entre eux, disons

$a\frac{n_{s_{j+1}}-n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}}-n_{s_0^+}}$ et $b\frac{n_{s_{j+1}}-n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}}-n_{s_0^+}}$, avec $0 \leq a < b \leq (2r^2)^{\ell+1}$, appartiennent au même petit cube $[c/(2r^2),(c+1)/(2r^2)]^{\ell+1}$ pour un certain entier $0 \leq c < 2r^2$. On pose

$$n = b - a \quad \text{et} \quad m_j = \left[b\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\right] - \left[a\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\right],\ 0 \leq j \leq \ell,$$

ainsi on démontre déjà toutes les assertions sauf l'assertion que $m_1 = 0$. Reste à la prouver. En effet, le lemme V.6.8 appliquée à $j = 0$ montre

$$\frac{n_{s_1} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}} \leq \frac{r}{q}.$$

On choisit q assez grand par rapport à r de telle sorte que l'on peut choisir $m_1 = 0$, c.f.q.d. □

Dans la suite, on notera $\beta_j = m_j - m_{j-1}$, pour $1 \leq j \leq \ell$; les entiers β_j sont positifs ou nuls de somme n.

Proposition V.6.10. — *Soit N_i un niveau M-régulier. Pour tout point $x \in N_i$ et pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, on a alors*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Démonstration. — Remarquons que si $\bar{v}'_{s,x} = 0$, tous les termes à gauche sont nuls, l'inégalité est alors évidente. On peut donc supposer que $\bar{v}'_{s,x} \neq 0$. On distingue quatre cas : $1 \leq s \leq s_0$, $s = s_{\ell+1}$, $s_{\ell+1} < s \leq r$ et $s_0 < s < s_{\ell+1}$.

Cas 1 : $1 \leq s \leq s_0$.

Soit j un entier, avec $1 \leq j \leq \ell$; on applique le corollaire V.6.2 b) à s et à $\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$, compte tenu du fait que $\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x} \subset \mathcal{M}_{s^+,x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s^+,x} \subset \mathcal{M}_{s^-,x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s^-,x}$ (cf. proposition V.6.1 b)) :

$$\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = 0;$$

de plus, $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s$, ce qui entraîne que $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s$. On a alors

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Cas 2 : $s = s_{\ell+1}$.

Soit j un entier, avec $1 \leq j \leq \ell$; on applique la proposition V.6.1 b) à $s = s_{\ell+1}$ et à $\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$, compte tenu du fait que $\mathcal{M}_{s_{\ell+1},x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x} \subset \bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$:

$$\varrho_{s_{\ell+1},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = s_{\ell+1} - s_j;$$

de plus, $\varrho_{s_{\ell+1},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq \dim \mathcal{E}^M_{s_j,x} = s_j$, donc $\varrho_{s_{\ell+1},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{\ell+1},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s_{\ell+1}$. On a alors

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s_{\ell+1},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{\ell+1},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s_{\ell+1} \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Cas 3 : $s_{\ell+1} < s \leq r$.

On utilise la formule précédant la remarque V.5.9 pour calculer $\varrho_{s,x}$. Soit j un entier, avec $1 \leq j \leq \ell$; compte tenu du fait que $\mathcal{M}_{s^{++},x} \subset \mathcal{M}_{s^{--},x} \subset \mathcal{M}_{s_{\ell+1},x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x} \subset \bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}$, on obtient

$$\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = s - s_j ;$$

de plus, $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq \dim \mathcal{E}^M_{s_j,x} = s_j$, ce qui entraîne que $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s$. On a alors

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

Cas 4 : $s_0 < s < s_{\ell+1}$.

Calculons d'abord $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{t,x})$ et $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{t,x})$, avec $t \in \underline{r}$, $1 \leq t \leq s_0$. Compte tenu du fait que $\mathcal{M}_{s^{++},x} \subset \mathcal{M}_{s^{--},x} \subset \mathcal{M}_{s_0,x} = \bar{\mathcal{E}}^M_{s_0,x} \subset \bar{\mathcal{E}}^M_{t,x}$ et que $\bar{\mathcal{E}}^M_{t,x} \cap \mathcal{E}^M_{t,x} = 0$, on obtient

$$\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{t,x}) = s - t, \quad \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{t,x}) = t.$$

Calculons maintenant $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x})$ et $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_{\ell+1},x})$. Compte tenu du fait que $\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x} = \mathcal{M}_{s_{\ell+1},x} \subset \mathcal{M}_{s^{++},x} \subset \mathcal{M}_{s^{--},x}$ et que $\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x} + \mathcal{E}^M_{s_{\ell+1},x} = \mathcal{E}^M_x$, on obtient

$$\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x}) = 0, \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_{\ell+1},x}) = s.$$

Il existe un ensemble I (resp. J) à s éléments de $\{1, 2, \ldots, r\}$ vérifiant les conditions suivantes :

i) Pour tout entier $t \in \underline{r}$, l'ensemble $I \cap \{t^- + 1, t^- + 2, \ldots, t\}$ (resp. $J \cap \{t^- + 1, t^- + 2, \ldots, t\}$) est pour cardinal $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{t^-,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{t,x})$ (resp. $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{t,x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{t^-,x})$).

ii) $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$ (respectivement $\deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} f_{j,x}) = \deg(\bigwedge^s u_{1,N_i})$).

Remarquons que $\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x}) = 0$. Le lemme V.5.11 implique donc

$$\begin{aligned}
\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) &= \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} e_{j,x}) \\
&\geq \frac{\sum_{j\in I} n_j}{q-1} = \frac{\sum_{t\in\underline{r}} n_t(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{t^-,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{t,x}))}{q-1} \\
&\geq \frac{\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ t\leq s_0}} n_t(t-t^-) + \sum_{0\leq j\leq \ell} n_{s_j^+}(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_j,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_{j+1},x}))}{q-1}.
\end{aligned}$$

Remarquons que $\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_{\ell+1},x}) = s = \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_x)$ et le lemme V.5.13 implique donc

$$\begin{aligned}\deg(\bigwedge^s u_{1,N_i}) &= \deg_{\bigwedge^s u_{1,N_i}}(\bigwedge_{j\in I} f_{j,x}) \\ &\leq \frac{\sum_{j\in J} n_j}{q-1} = \frac{\sum_{t\in \underline{r}} n_t(\varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{t,x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{t^-,x}))}{q-1} \\ &\leq \frac{\sum_{\substack{t\in \underline{r}\\ t\leq s_0}} n_t(t-t^-) + \sum_{0\leq j\leq \ell} n_{s_{j+1}}(\varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_{j+1},x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_j,x}))}{q-1}.\end{aligned}$$

En combinant ces deux inégalités, on déduit

$$\sum_{0\leq j\leq \ell} n_{s_j^+}\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_j,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_{j+1},x})\big) \leq \sum_{0\leq j\leq \ell} n_{s_{j+1}}\big(\varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_{j+1},x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_j,x})\big).$$

Posons $a_j = \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_j,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_{j+1},x})$ et $b_j = \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_{j+1},x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_j,x})$ $(0\leq j\leq \ell)$; donc $0\leq a_j\leq r$, $0\leq b_j\leq r$ et

$$\begin{aligned}\sum_{0\leq j\leq \ell} a_j &= \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_0,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_{\ell+1},x}) = s - s_0, \\ \sum_{0\leq j\leq \ell} b_j &= \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_{\ell+1},x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_0,x}) = s - s_0,\end{aligned}$$

ainsi $\sum_{0\leq j\leq \ell} a_j = \sum_{0\leq j\leq \ell} b_j$. On en déduit

$$\sum_{0\leq j\leq \ell} (n_{s_j^+} - n_{s_0^+})a_j \leq \sum_{0\leq j\leq \ell} (n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+})b_j,$$

ou, ce qui revient au même,

$$0 \leq \sum_{0\leq j\leq \ell} (b_j - a_j)\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}} + \sum_{0\leq j\leq \ell} a_j \frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}.$$

On en déduit

$$\sum_{0\leq j\leq \ell} (b_j - a_j)m_j \geq \sum_{0\leq j\leq \ell} (b_j - a_j)\Big(m_j - n\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\Big) - n\sum_{0\leq j\leq \ell} a_j \frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_j^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}.$$

D'après les choix de m_j et n (cf. lemme V.6.9), le premier terme à droite est minoré par

$$-\sum_{0\leq j\leq \ell} \big|b_j - a_j\big| \cdot \Big|m_j - n\frac{n_{s_{j+1}} - n_{s_0^+}}{n_{s_{\ell+1}} - n_{s_0^+}}\Big| \geq -\sum_{0\leq j\leq \ell} \frac{r}{2r^2} \geq -\frac{r^2}{2r^2} = -\frac{1}{2}$$

et d'après le lemme V.6.8, le deuxième terme à droite est minoré par

$$-n\sum_{0\leq j\leq \ell} a_j \frac{r^2}{q} \geq -n\frac{r^4}{q}.$$

Le terme à droite est ainsi minoré par $-\frac{1}{2} - nr^4/q > -1$, car q est supposé assez grand par rapport à r. Par conséquent,

$$\sum_{0\leq j\leq \ell} (b_j - a_j)m_j \geq 0.$$

En remplaçant $a_j = \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_j,x}) - \varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_{j+1},x})$, $b_j = \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_{j+1},x}) - \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_j,x})$, $\beta_j = m_j - m_{j-1}$ dans la formule, on obtient l'inégalité voulue

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big)\\
&\qquad\leq m_\ell\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{\ell+1},x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_{\ell+1},x})\big) - m_0\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_0,x}) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_0,x})\big)\\
&\qquad= s(m_\ell - m_0) = s\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j,
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition V.6.10. □

Proposition V.6.11. — *Soit N_i un niveau M-régulier et soit j_0 un entier, avec $1 \leq j_0 \leq \ell$ et $\beta_{j_0} > 0$. Pour tout point $x \in N_i$, et pour tout entier s, avec $1 \leq s \leq r$, on a alors une inégalité plus forte*

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s_{j_0}\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j - 1.$$

Démonstration. — La proposition est évidente si $\bar{v}'_{s_{j_0},x} = 0$. On peut donc supposer que $\bar{v}'_{s_{j_0},x} \neq 0$. La proposition V.6.6 fournit la formule

$$\varrho_{s_{j_0},x}(F) = \dim F/F \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0},x}.$$

Alors :

i) Pour $0 < j < j_0$, on a $\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = s_{j_0} - s_j$ et $\varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})) \leq \dim \mathcal{E}^M_{s_j,x} = s_j$, ce qui implique

$$\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s_{j_0}.$$

ii) Pour $j = j_0$, on a $\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0},x}) = 0$; comme $(\mathcal{E}^M_{s_{j_0}})^\sigma \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0}} \neq 0$, $\mathcal{E}^M_{s_{j_0},x} \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0},x} \neq 0$ et donc $\varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})) \leq \dim \mathcal{E}^M_{s_{j_0},x}/\mathcal{E}^M_{s_{j_0},x} \cap \bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0},x} \leq s_{j_0} - 1$, ce qui implique

$$\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_{j_0},x}) + \varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_{j_0},x}) \leq s_{j_0} - 1.$$

iii) Pour $j_0 < j \leq \ell$, on a $\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) = 0$ et $\varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})) \leq s_{j_0}$, ce qui implique

$$\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x}) \leq s_{j_0}.$$

Mettons ces inégalités ensemble pour obtenir l'inégalité voulue

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j\big(\varrho_{s_{j_0},x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x}) + \varrho_{s_{j_0},x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big) \leq s_{j_0}\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j - \beta_{j_0} \leq s_{j_0}\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j - 1,$$

ce qui achève la preuve de la proposition V.6.11. □

V.7. Étape c – Fin de la preuve

V.7.1. On commence par la définition suivante.

Définition V.7.1. — *Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_a$ et $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_b$ des sous-fibrés vectoriels maximaux de $\mathcal{E}^M$. L'écriture*

$$\mathcal{F}_1 + \cdots + \mathcal{F}_a \geq \mathcal{G}_1 + \cdots + \mathcal{G}_b + C$$

signifiera :

i) $\deg(\mathcal{F}_1) + \cdots \deg(\mathcal{F}_a) \leq \deg(\mathcal{G}_1) + \cdots + \deg(\mathcal{G}_b) + C$,

ii) $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) + \cdots + \mathrm{rg}(\mathcal{F}_a) = \mathrm{rg}(\mathcal{G}_1) + \cdots + \mathrm{rg}(\mathcal{G}_b)$,

iii) *en tout niveau N_i sauf un ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de r et de p_0, on a, pour tout entier $1 \leq s \leq r$ et pour tout point $x \in N_i$,*

$$\varrho_{s,x}(\mathcal{F}_{1,x}) + \cdots + \varrho_{s,x}(\mathcal{F}_{a,x}) \geq \varrho_{s,x}(\mathcal{G}_{1,x}) + \cdots + \varrho_{s,x}(\mathcal{G}_{b,x}).$$

Lemme V.7.2. — *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-fibrés maximaux de $\mathcal{E}^M$ tels que les entiers $\deg \mathcal{F} - (\mathrm{rg}\, \mathcal{F}/r)d$ et $\deg \mathcal{G} - (\mathrm{rg}\, \mathcal{G}/r)d$ soient minorés en fonction de r et p_0. On a alors l'écriture*

$$\mathcal{F} + \mathcal{G} \geq \mathcal{F} \vee \mathcal{G} + \mathcal{F} \cap \mathcal{G},$$

où $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ désigne la somme maximalisée de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}^M$.

Démonstration. — Il est évident que l'on a

$$\mathrm{rg}\, \mathcal{F} + \mathrm{rg}\, \mathcal{G} = \mathrm{rg}(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) + \mathrm{rg}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}),$$
$$\deg \mathcal{F} + \deg \mathcal{G} \leq \deg(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) + \deg(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}).$$

Comme le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}^M$ est majoré par p, donc par p_0 (cf. lemme V.5.1), l'hypothèse du lemme entraîne qu'en tout point x du niveau N sauf un ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de r et p_0, on a les relations suivantes dans $\mathcal{E}_x^M$:

$$\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x = (\mathcal{F} \vee \mathcal{G})_x, \chi \mathcal{F}_x \cap \mathcal{G}_x = (\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_x.$$

En un tel point, la proposition V.5.10 montre

$$\begin{aligned}\varrho_{s,x}(\mathcal{F}_x) + \varrho_{s,x}(\mathcal{G}_x) &\geq \varrho_{s,x}(\mathcal{F}_x + \mathcal{G}_x) + \varrho_{s,x}\big((\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_x\big)\\ &\geq \varrho_{s,x}\big((\mathcal{F} \vee \mathcal{G})_x\big) + \varrho_{s,x}\big((\mathcal{F} \cap \mathcal{G})_x\big),\end{aligned}$$

pour tout entier $1 \leq s \leq r$. La preuve est donc terminée. □

Proposition V.7.3. — *On conserve les notations de la section précédente. On a alors l'écriture*

$$\sum_{1 \leq j \leq \ell} \beta_j \mathcal{E}^M \geq \sum_{1 \leq j \leq \ell} \beta_j (\mathcal{E}_{s_j}^M + \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M + 1).$$

Démonstration. — On vérifie les conditions de la définition V.7.1. La condition i) résulte de l'inégalité $\deg \mathcal{E}_{s_j}^M + \deg \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M = \deg \mathcal{E}_{s_j}''^M - 1 + \deg \bar{\mathcal{E}}_{s_j}'^M \geq d - 1$. La condition ii) est évidente. Finalement, iii) résulte de la remarque V.5.4 et la proposition V.6.10. □

Revenons maintenant à la preuve de la proposition V.4.1. Observons que tous les fibrés vectoriels $\{\bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M\}_{1\leq j\leq \ell}$ et $\{\mathcal{E}_{s_j}^M\}_{1\leq j\leq \ell}$ vérifient l'hypothèse du lemme V.7.2. En effet, pour tout entier $1 \leq j \leq r$,

$$\deg \mathcal{E}_{s_j}^M + \deg \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M \geq d-1.$$

Puisque le polygone canonique de Harder-Narasimhan de $\mathcal{E}^M$ est majoré par p, donc par p_0, on en déduit que $\deg \mathcal{E}_{s_j}^M - (\operatorname{rg} \mathcal{E}_{s_j}^M/r)d$ et $\deg \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M - (\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M/r)d$ sont minorés en fonction de r et de p_0.

Partant de la famille constituée de tous les fibrés vectoriels $\{\bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M\}_{1\leq j\leq \ell}$ (où $\bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M$ est compté β_j fois) et $\{\mathcal{E}_{s_j}^M\}_{1\leq j\leq \ell}$ (où $\mathcal{E}_{s_j}^M$ est compté β_j fois), on remplace deux fibrés vectoriels par leur somme maximalisée et leur intersection autant de fois que nécessaire pour obtenir une filtration croissante $\mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_k$ de sous-fibrés maximaux de $\mathcal{E}^M$, avec $k = 2\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j$.

D'après le lemme V.7.2 et la proposition V.7.3, on a l'écriture

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j \mathcal{E}^M \geq \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j(\mathcal{E}_{s_j}^M + \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M + 1) \geq \sum_{1\leq j\leq k} \mathcal{F}_j + \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j.$$

On notera F_j le sous-espace des sections globales de $\mathcal{F}_j$ ($1 \leq j \leq k$). On applique la condition de semistabilité de la proposition IV.5.3 à la filtration $F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_\ell$ avec des pondérations valant 1 partout ; on obtient ainsi

$$\sum_{1\leq j\leq k} \deg F_j \leq \frac{h-\varepsilon}{r} \sum_{1\leq j\leq k} \operatorname{rg} \mathcal{F}_j + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1\leq i\leq m} \max_{\substack{1\leq s\leq r \\ x\in N_i}} \left\{ \frac{\sum_{1\leq j\leq k} \rho_{s,x}(F_j) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2\leq t\leq r} \frac{\alpha_t M_t}{t}.$$

Comme $h = d + r(1-g)$ et $\dim F_j \geq \deg \mathcal{F}_j + (1-g) \operatorname{rg} \mathcal{F}_j$, on en déduit

$$(*) \qquad \sum_{1\leq j\leq k} \deg \mathcal{F}_j \leq \frac{d-\varepsilon}{r} \sum_{1\leq j\leq k} \operatorname{rg} \mathcal{F}_j + \frac{\varepsilon}{m} \sum_{1\leq i\leq m} \max_{\substack{1\leq s\leq r \\ x\in N_i}} \left\{ \frac{\sum_{1\leq j\leq k} \rho_{s,x}(F_j) + M_s}{s} \right\} - \varepsilon \sum_{2\leq t\leq r} \frac{\alpha_t M_t}{t}.$$

L'écriture $\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j \mathcal{E}^M \geq \sum_{1\leq j\leq k} \mathcal{F}_j + \sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j$ implique une minoration du membre à gauche

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j(d-1) \leq \sum_{1\leq j\leq k} \deg \mathcal{F}_j.$$

D'autre part, l'écriture $\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j(\mathcal{E}_{s_j}^M + \bar{\mathcal{E}}_{s_j}^M) \geq \sum_{1\leq j\leq k} \mathcal{F}_j$ implique qu'en tout niveau N_i sauf un ensemble dont le cardinal est majoré en fonction de r et p_0, on a

$$\sum_{1\leq j\leq \ell} \beta_j \big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}_{s_j,x}^M) + \varrho_{s,x}(\mathcal{E}_{s_j,x}^M)\big) \geq \sum_{1\leq j\leq k} \varrho_{s,x}(\mathcal{F}_{j,x}),$$

pour tout point $x \in N_i$ et pour tout entier $1 \leq s \leq r$.

Pour un tel point x qui est de plus dans un niveau M-régulier, on sait (cf. proposition V.6.10) que

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq k}\rho_{s,x}(F_j) &\leq \sum_{1\leq j\leq k}\varrho_{s,x}(\mathcal{F}_{j,x}) \quad \text{(cf. proposition V.5.8)}\\ &\leq \sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j\big(\varrho_{s,x}(\bar{\mathcal{E}}^M_{s_j,x})+\varrho_{s,x}(\mathcal{E}^M_{s_j,x})\big)\\ &\leq \begin{cases}\rho_s = s\sum_{1\leq j\leq\ell}\beta_j & \text{si } s\neq s_{j_0},\\ \rho_{s_{j_0}} = s_{j_0}\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j - 1 & \text{si } s = s_{j_0}.\end{cases}\end{aligned}$$

Pour un point x quelconque, on a toujours

$$\sum_{1\leq j\leq k}\rho_{s,x}(F_j)\leq sk = 2s\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j.$$

On choisit maintenant $M_s = s\rho_1 - \rho_s$, $1\leq s\leq r$. Compte tenu de ce choix et des inégalité ci-dessus, l'inégalité (*) entraîne que

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq j\leq\ell}\beta_j(d-1) &\leq \frac{d-\varepsilon}{r}\sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j r + \varepsilon\max_{1\leq s\leq r}\Big\{\frac{\rho_s+M_s}{s}\Big\}\\ &\qquad\qquad - \varepsilon\sum_{2\leq t\leq r}\frac{\alpha_t M_t}{t} + \frac{O(p_0,r,\varepsilon)}{m}\\ &= \sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j d - \frac{\alpha_{s_{j_0}}\varepsilon}{s_{j_0}} + \frac{O(p_0,r,\varepsilon)}{m},\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\frac{\alpha_{s_{j_0}}\varepsilon}{s_{j_0}} \leq \sum_{1\leq j\leq \ell}\beta_j + \frac{O(p_0,r,\varepsilon)}{m} = O(r) + \frac{O(p_0,r,\varepsilon)}{m}.$$

Comme $\alpha_{s_{j_0}}\varepsilon/s_{j_0} = -q(s_{j_0}+1)+2q(s_{j_0})-q(s_{j_0}-1)$ est assez grand par rapport à r et que m est très grand par rapport à ε, p_0 et r, on obtient ainsi une contradiction. La preuve de la proposition V.4.1 est donc achevée.

V.8. Étape d

D'après l'étape c, le réseau M est un φ-réseau itéré. On donne dans cette section une preuve de la proposition suivante :

Proposition V.8.1. — *Pour tout entier $1\leq s\leq r-1$, on a les égalités*

$$v(\ell_s) = v(\ell'_s).$$

Démonstration. — Comme M est un φ-réseau itéré, en tout niveau M-régulier N_i, on sait (cf. corollaire V.6.2) que

$$\deg\Big(\bigwedge^s u_{1,N_i}\Big) = \frac{n_1+\cdots+n_s}{q-1} = v(\ell_1'^{\,s-1}\ldots\ell'_{s-1}),\quad \forall 1\leq s\leq r.$$

Supposons qu'il existe un indice $1 \leq s \leq r$ tel que

$$\frac{v(\ell_1'^{s-1}\cdots\ell_{s-1}'/\ell_1^{s-1}\cdots\ell_{s-1})}{s} > \min_{1\leq t\leq r}\Big\{\frac{v(\ell_1'^{t-1}\cdots\ell_{t-1}'/\ell_1^{t-1}\cdots\ell_{t-1})}{t}\Big\}.$$

D'après la remarque V.3.2, la réduction de $(v'_{s,x}/\pi^{sM^i})_{x\in N_i}$ est nulle si N_i est un niveau M-régulier, ce qui implique que, pour tout sous-espace vectoriel non nul F de κ^h et pour tout $x \in N_i$, on a

$$\rho_{s,x}(F) = -\infty.$$

Soit F un sous-espace vectoriel arbitraire de κ^h ; on applique à F la proposition IV.5.3 pour obtenir

$$\dim F \leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq t\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{t,x}(F)+M_t}{t}\Big\} - \varepsilon\sum_{2\leq t\leq r}\frac{\alpha_t M_t}{t}.$$

On distingue deux cas : $s = 1$ et $s > 1$.

▷ $s = 1$. — On choisit un entier T assez négatif et on pose $M_t = tT - t$, pour tout entier $2 \leq t \leq r$. Comme $\rho_{t,x}(F) \leq t$, on a

$$\max_{\substack{1\leq t\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{t,x}(F)+M_t}{t}\Big\} \leq \begin{cases} T & \text{si le niveau } N_i \text{ est } M\text{-régulier,}\\ 1 & \text{sinon,}\end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim F &\leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq t\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{t,n}(F)+M_t}{t}\Big\} - \varepsilon\sum_{2\leq t\leq r}\frac{\alpha_t M_t}{t}\\ &\leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \varepsilon\Big(\alpha_1 T - \frac{O(p_0,r)}{m}(T-1) + \sum_{2\leq t\leq r}\alpha_t\Big).\end{aligned}$$

On obtient une contradiction en faisant tendre T vers $-\infty$ car

$$\alpha_1 - \frac{O(p_0,r)}{m} = \frac{1}{\varepsilon}\big(-q(2)+2q(1)-q(0)\big) - \frac{O(p_0,r)}{m} > 0$$

puisque m est très grand par rapport à ε, p_0 et r (cf. section IV.1).

▷ $s > 1$. — On choisit un entier T assez positif, on pose $M_2 = \cdots = M_{s-1} = M_{s+1} = \cdots = M_r = 0$ et $M_s = sT$. Alors

$$\max_{\substack{1\leq t\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{t,x}(F)+M_t}{t}\Big\} \leq \begin{cases} 1 & \text{si le niveau } N_i \text{ est } M\text{-régulier,}\\ T+1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\dim F &\leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \frac{\varepsilon}{m}\sum_{1\leq i\leq m}\max_{\substack{1\leq t\leq r\\ x\in N_i}}\Big\{\frac{\rho_{t,x}(F)+M_t}{t}\Big\} - \varepsilon\sum_{2\leq t\leq r}\frac{\alpha_t M_t}{t}\\ &\leq \frac{h-\varepsilon}{r}\rho_0(F) + \varepsilon\Big[1 - \frac{O(p_0,r)}{m} - \Big(\alpha_s - \frac{O(p_0,r)}{m}\Big)T\Big].\end{aligned}$$

On obtient une contradiction en faisant tendre T vers $+\infty$ car $\alpha_s - O(p_0, r)/m > 0$. En effet, si $s \neq r$, on utilise la formule

$$\alpha_s - \frac{O(p_0,r)}{m} = \frac{s}{\varepsilon}\big(- q(s+1) + 2q(s) - q(s-1)\big) - \frac{O(p_0,r)}{m} > 0$$

puisque m est très grand par rapport à ε, p_0 et r (cf. section IV.1). Si $s = r$, on utilise la formule

$$\begin{aligned}\alpha_r - \frac{O(p_0,r)}{m} &= 1 - \sum_{1\leq s\leq r-1} \alpha_s - \frac{O(p_0,r)}{m} \\ &= 1 - \sum_{1\leq s\leq r-1} \frac{s}{\varepsilon}\big(- q(s+1) + 2q(s) - q(s-1)\big) - \frac{O(p_0,r)}{m}\end{aligned}$$

puisque ε est très grand par rapport à r et p_0, et m est très grand par rapport à ε, p_0 et r (cf. section IV.1).

Par conséquent, pour tout entier $1 \leq s \leq r$, on doit avoir

$$\frac{v(\ell_1'^{s-1} \cdots \ell_{s-1}' / \ell_1^{s-1} \cdots \ell_{s-1})}{s} = \min_{1\leq t\leq r} \Big\{ \frac{v(\ell_1'^{t-1} \cdots \ell_{t-1}' / \ell_1^{t-1} \cdots \ell_{t-1})}{t} \Big\}.$$

Pour $s = 1$, on a $v(\ell_1'^{s-1} \cdots \ell_{s-1}' / \ell_1^{s-1} \cdots \ell_{s-1})/s = 0$, donc, pour tout $1 \leq s \leq r$, on obtient

$$\frac{v(\ell_1'^{s-1} \cdots \ell_{s-1}' / \ell_1^{s-1} \cdots \ell_{s-1})}{s} = 0.$$

Cela implique $v(\ell_s) = v(\ell_s')$, pour tout entier $1 \leq s \leq r-1$. □

CHAPITRE VI

NOUVELLES COMPACTIFICATIONS DES CHAMPS DE CHTOUCAS DE DRINFELD

Dans ce chapitre, on donne plusieurs examples des polygones rationnels q qui vérifient l'hypothèse IV.4.3 et en déduit de nouvelles compactifications des champs de chtoucas de Drinfeld.

Fixons un entier d et un polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ qui est assez convexe par rapport à X et r et entier par rapport à d. On suppose que tous les polygones rationnels q considérés dans ce chapitre vérifient $p(s) < q(s) < p(s)+1$, pour tout entier $0 < s < r$.

VI.1. Compactifications de Lafforgue

On considère un polygone rationnel q qui vérifient la condition suivante : pour tout entier $0 < s < r$, la suite $q(s) - p(s)$ est strictement décroissante. On va montrer que q vérife l'hypothèse IV.4.3 et la compactification $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ n'est rien d'autres que la compactification $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ définie par Lafforgue dans la section I.3.5.

Théorème VI.1.1. — *Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca dégénéré sur* Spec k *de rang r, de degré d et de type $\underline{r}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifie l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \bar{\mathcal{F}}_{s^-} / \bar{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big).$$

b) *Tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifie l'inégalité stricte*

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \bar{\mathcal{F}}_{s^-} / \bar{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \big).$$

c) *Le chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{E}}$ est en fait un chtouca itéré et appartient à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$, ce qui veut dire :*

i) *Pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, on a les égalités*

$$\deg \mathcal{E}_s = \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + p(s), \quad \deg \bar{\mathcal{E}}_s = \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d - p(s) - 1.$$

En particulier,

▷ *pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$ et $s < r$, on a $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$,*

▷ *pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, l'homomorphisme $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ est surjectif.*

ii) *Pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$, on a $\mathcal{E}^\sigma_{s^-} + \bar{\mathcal{E}}_s = \mathcal{E}^\sigma$.*

iii) *Pour tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_{r_1}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(\operatorname{rg} \mathcal{F}).$$

iv) *Pour tout entier s, avec $s \in \underline{r}$ et $s > r_1$ et pour tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ non nul de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}^\sigma_s$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-) - 1.$$

Démonstration. — On va montrer que b) ⇒ a) ⇒ c) ⇒ b).

Il est évident que b) ⇒ a).

Montrons maintenant que a) ⇒ c). On va appliquer la condition a) aux différents sous-fibrés vectoriels de $\mathcal{E}$.

▷ On applique a) à $\mathcal{E}_s$; on a alors

$$\begin{aligned}
\deg \mathcal{E}_s &\leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + \sum_{t \in \underline{r}} \big(q(t^- + \operatorname{rg}(\mathcal{E}^\sigma_s \cap \bar{\mathcal{E}}_{t^-})/(\mathcal{E}^\sigma_s \cap \bar{\mathcal{E}}_t)) - q(t^-)\big) \\
&= \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + q(s) \quad (\text{car } q(0) = 0) \\
&= \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + p(s) + q(s) - p(s).
\end{aligned}$$

Comme $(\operatorname{rg} \mathcal{E}_s/r)d + p(s)$ est un entier et la différence $q(s) - p(s)$ est strictement comprise entre 0 et 1, on en déduit

$$\deg \mathcal{E}_s \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + p(s).$$

▷ On applique a) à $\bar{\mathcal{E}}_s$; on a alors

$$\begin{aligned}
\deg \bar{\mathcal{E}}_s &\leq \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d + \sum_{t \in \underline{r}} \big(q(t^- + \operatorname{rg}(\bar{\mathcal{E}}_s \cap \bar{\mathcal{E}}_{t^-})/(\bar{\mathcal{E}}_s \cap \bar{\mathcal{E}}_t)) - q(t^-)\big) \\
&= \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d - q(s) \quad (\text{car } q(r) = 0) \\
&= \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d - p(s) - 1 + p(s) + 1 - q(s).
\end{aligned}$$

Comme $(\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s/r)d - p(s) - 1$ est un entier et la différence $q(s) - p(s)$ est strictement comprise entre 0 et 1, on en déduit

$$\deg \bar{\mathcal{E}}_s \leq \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d - p(s) - 1.$$

On a donc $\deg \mathcal{E}_s \geq d - \deg \bar{\mathcal{E}}_s - 1 \geq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + p(s)$, ce qui implique

$$\deg \mathcal{E}_s = \frac{\operatorname{rg} \mathcal{E}_s}{r} d + p(s), \quad \deg \bar{\mathcal{E}}_s = \frac{\operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_s}{r} d - p(s) - 1.$$

Comme $\deg \mathcal{E}_s + \deg \bar{\mathcal{E}}_s = d - 1$, $\widetilde{\mathcal{E}}$ est un chtouca itéré (cf. [**9**, prop. 8, § 2]). Reste à prouver qu'il appartient à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$. Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$ et $r_1 < s \leq r$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel non trivial de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^{\sigma}$; observons que

$$\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \underline{r} \text{ et } t \geq s, \\ \operatorname{rg} \mathcal{F} & \text{si } t \in \underline{r} \text{ et } t \leq s^-. \end{cases}$$

▷ On applique a) à $\mathcal{F}$; on a alors

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{F} \leq & \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{t \in \underline{r}} \big(q(t^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-} / \overline{\mathcal{F}}_t) - q(t^-) \big) \\ = & \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + q(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - q(s^-) \\ = & \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-) \\ & \qquad + \big(q(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) \big) - \big(q(s^-) - p(s^-) \big). \end{aligned}$$

Comme $(\operatorname{rg} \mathcal{F}/r)d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-)$ est un entier, et la suite $q(t) - p(t)$ $(1 \leq t \leq r)$ est strictement décroissante, on en déduit

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-) - 1.$$

Reste à prouver que tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_{r_1}$ vérifie

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(\operatorname{rg} \mathcal{F}).$$

Observons

$$\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \underline{r} \text{ et } t \geq r_1, \\ \operatorname{rg} \mathcal{F} & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

▷ On applique a) à $\mathcal{F}$; on a alors

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{F} & \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{t \in \underline{r}} \big(q(t^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-} / \overline{\mathcal{F}}_t) - q(t^-) \big) \\ & = \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + q(\operatorname{rg} \mathcal{F}) \\ & = \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(\operatorname{rg} \mathcal{F}) + q(\operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(\operatorname{rg} \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Comme $(\operatorname{rg} \mathcal{F}/r)d + p(\operatorname{rg} \mathcal{F})$ est un entier et la différence $q(\operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(\operatorname{rg} \mathcal{F})$ est strictement comprise entre 0 et 1, on en déduit

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(\operatorname{rg} \mathcal{F}).$$

Reste à montrer que c) $\Rightarrow$ b). On va utiliser les notations et les résultats des sections I.2.3 et I.3. On commence par montrer les lemmes suivants.

Lemme VI.1.2. — *Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$ et $s > r_1 = 0^+$. Alors la filtration de Harder-Narasimhan de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}$ est un raffinement de la filtration*

$$0 \subsetneq \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma \subseteq \bar{\mathcal{E}}_{s^-}.$$

En particulier, soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel non nul de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}$, de rang

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} \leq \operatorname{rg}(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma).$$

On a alors la majoration

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-) - 1.$$

Démonstration du lemme VI.1.2. — Prouvons ce lemme par la récurrence descendante. Pour $s = r$, la première assertion est évidente. La deuxième assertion résulte du fait que $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartient à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ (cf. condition c) iii) appliquée à $s = r$).

Supposons que l'on a montré ce lemme pour $s^+ \in \underline{r}$. On va montrer ce lemme pour $s \in \underline{r}$. Pour la première assertion, d'après la proposition I.2.9, il suffit de vérifier que

$$\mu^+(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma) < \mu^-(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma).$$

Rappelons (cf. section I.3.4) que, pour $s \in \underline{r}$ et $s > r_1 = 0^+$, on a un chtouca à gauche $\widetilde{E}_s = (\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_s \hookleftarrow \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma \hookrightarrow (\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_s)^\sigma)$. Comme $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartient à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$, tout sous-fibré non nul $\mathcal{F}$ de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma$ vérifie

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \mathcal{F}) - p(s^-) - 1$$

avec égalité si $\mathcal{F} = \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma$; comme p est convexe, on a l'estimation

$$\mu^-(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma) \geq \frac{d}{r} + p(s) - p(s-1).$$

Le fibré vectoriel $\bar{\mathcal{E}}_s$ se plonge dans $\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma$ et le quotient est de longueur 1 ; cela entraîne que $\mu^+(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma) \leq \mu^+(\bar{\mathcal{E}}_s) + 1$. L'hypothèse de récurrence implique

$$\mu^+(\bar{\mathcal{E}}_s) + 1 \leq \frac{d}{r} + p(s+1) - p(s),$$

donc

$$\mu^+(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma) \leq \frac{d}{r} + p(s+1) - p(s).$$

Puisque le polygone p est assez convexe en fonction de X et de r, on obtient

$$\begin{aligned}\mu^+(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} / \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma) &\leq \frac{d}{r} + p(s+1) - p(s) \\ &< \frac{d}{r} + p(s) - p(s-1) \leq \mu^-(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma).\end{aligned}$$

D'après la proposition I.2.9, la filtration de Harder-Narasimhan de $\bar{\mathcal{E}}_s$ est un raffinement de la filtration $0 \subsetneq \bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma \subseteq \bar{\mathcal{E}}_{s^-}$. La deuxième assertion résulte de la première et du fait que $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartient à $\overline{\mathrm{Cht}^{r,d,p}}$ (cf. condition c).

La preuve du lemme VI.1.2 est ainsi achevée. □

Lemme VI.1.3. — *Soit s un entier, avec $s \in \underline{r}$ et $s > r_1 = 0^+$ et soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}$, dont $\overline{\mathcal{F}}_s = 0$ et $\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \neq 0$. On a alors*

$$\deg \overline{\mathcal{F}}_{s^-} \leq \frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}}{r} d + p(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}) - p(s^-) - 1.$$

Démonstration du lemme VI.1.3. — Puisque $\overline{\mathcal{F}}_{s^-}$ est un sous-fibré de $\bar{\mathcal{E}}_{s^-}$ et que l'on a $\overline{\mathcal{F}}_{s^-} \cap \bar{\mathcal{E}}_s = \overline{\mathcal{F}}_s = 0$, on en déduit

$$\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-} \leq \operatorname{rg} \bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s = \operatorname{rg}(\bar{\mathcal{E}}_{s^-} \cap \mathcal{E}_s^\sigma).$$

Reste à appliquer le lemme VI.1.2 à $\overline{\mathcal{F}}_{s^-}$ pour obtenir l'inégalité voulue, c.q.f.d. □

Revenons à la preuve du fait que c) ⇒ b). On considère le quotient $\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t$:

i) Si $t = 0^+$, ce quotient est un sous-fibré de $\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t = E'_t$, on a alors

$$\deg \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t \leq \frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t}{r} d + p(\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) + 1.$$

ii) Si $r_1 = 0^+ < t < r$, ce quotient est un sous-fibré de $\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t = E_t$; d'après la proposition I.3.10, on a l'inégalité

$$\deg \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t \leq \frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t}{r} d + p(t^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - p(t^-).$$

iii) Si $t = r$, ce quotient est un sous-fibré de $\bar{\mathcal{E}}_{t^-}/\bar{\mathcal{E}}_t = E'_t$; d'après la proposition I.3.10, et sauf si $\overline{\mathcal{F}}_{t^-} = \overline{\mathcal{F}}_t = 0$, on a l'inégalité

$$\deg \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t \leq \frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t}{r} d + p(t^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - p(t^-) - 1.$$

Posons

$$\delta(t) = q(t) - p(t), \quad 0 \leq t \leq r.$$

Les nombres $\{\delta(t)\}_{0 \leq t \leq r}$ sont compris entre 0 et 1 ; on a $\delta(0) = \delta(r) = 0$ et la suite $\{\delta(t)\}_{1 \leq t \leq r}$ est strictement décroissante.

Supposons que $\overline{\mathcal{F}}_s = 0 \neq \overline{\mathcal{F}}_{s^-}$ pour un certain entier s, avec $s \in \underline{r}$ et $r_1 = 0^+ < s$. Si $\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1} \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\deg \mathcal{F} = \sum_{\substack{t \in \underline{r} \\ t \leq s}} \deg \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t &= \deg \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1} + \sum_{\substack{t \in \underline{r} \\ r_1 < t < s}} \deg \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t + \deg \overline{\mathcal{F}}_{s^-} \\
&\leq \Big(\frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1}}{r} d + p(\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1}) + 1\Big) \\
&\quad + \sum_{\substack{t \in \underline{r} \\ r_1 < t < s}} \Big(\frac{\operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t}{r} d + p(t^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - p(t^-)\Big)
\end{aligned}$$

$$+\Big(\frac{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}}{r}d+p(s^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-})-p(s^-)-1\Big)$$

(d'après la discussion ci-dessus et le lemme VI.1.3)

$$\leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{t\in\underline{r},t\leq s}\big(p(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-p(t^-)\big)$$

$$\leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{t\in\underline{r}}\big(q(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-q(t^-)\big) - \sum_{t\in\underline{r},t\leq s}\big(\delta(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-\delta(t^-)\big)$$

$$< \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{t\in\underline{r}}\big(q(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-q(t^-)\big),$$

car

$$\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ t\leq s}}\big(\delta(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-\delta(t^-)\big)=\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ t\leq s^-}}\big(\delta(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-\delta(t)\big)+\delta(s^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-})$$

est une somme des termes positifs ou nuls, avec au moins un terme strictement positif : pour les termes dans la somme, c'est grâce à l'hypothèse que $\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1}\neq 0$ et que $\delta(i)$ est décroissante pour $1\leq i\leq r$; pour le dernier terme, c'est parce que $\delta(i)>0$ pour $0\leq i\leq r$; de plus, au moins un terme est strictement positif car le sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ n'est pas trivial.

Si $\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}/\overline{\mathcal{F}}_{r_1}=0$, on a alors

$$\deg\mathcal{F}=\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ t\leq s}}\deg\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t=\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ r_1<t<s}}\deg\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t+\deg\overline{\mathcal{F}}_{s^-}$$

$$\leq \sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ r_1<t<s}}\Big(\frac{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t}{r}d+p(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-p(t^-)\Big) +\Big(\frac{\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}}{r}d+p(s^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-})-p(s^-)-1\Big)$$

(d'après la discussion ci-dessus et le lemme VI.1.3)

$$=\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ r_1<t\leq s}}\big(p(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-p(t^-)\big)-1$$

$$=\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{t\in\underline{r}}\big(q(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-q(t^-)\big) - \sum_{\substack{t\in\underline{r}\\ r_1<t\leq s}}\big(\delta(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-\delta(t^-)\big)-1$$

$$<\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d+\sum_{t\in\underline{r}}\big(q(t^-+\operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t)-q(t^-)\big)$$

car

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{t\in \underline{r}\\ r_1<t\leq s}} &\big(\delta(t^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - \delta(t^-)\big) + 1\\ &= \sum_{\substack{t\in \underline{r}\\ r_1<t\leq s^-}} \big(\delta(t^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{t^-}/\overline{\mathcal{F}}_t) - \delta(t)\big) + \delta(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}) + \big(1-\delta(r_1)\big)\end{aligned}$$

est une somme des termes positifs ou nuls, dont le dernier terme es strictement positif : pour les termes dans la somme, c'est grâce à l'hypothèse que $\delta(i)$ est décroissante pour $1 \leq i \leq r$; pour l'avant-dernier terme, c'est parce que $\delta(i) \geq 0$ pour $0 \leq i \leq r$; et pour le dernier terme, c'est parce que $\delta(i) < 1$ pour $0 \leq i \leq r$.

Reste à considérer le cas $\overline{\mathcal{F}}_{r_1} = 0$. Il nous faut vérifier $\deg \mathcal{F} < (\operatorname{rg}\mathcal{F}/r)d + q(\operatorname{rg}\mathcal{F})$, ce qui est évident car tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ vérifie

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d + p(\operatorname{rg}\mathcal{F}) < \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d + q(\operatorname{rg}\mathcal{F}).$$

La preuve du théorème VI.1.1 est terminée. □

Grâce au théorème VI.1.1 et au corollaire IV.4.4, on retrouve le théorème de Lafforgue :

Corollaire VI.1.4. — *Supposons que q est assez grand par rapport à r. Alors le morphisme $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,p} \to X \times X$ est propre.*

VI.2. Compactifications duales

VI.2.1. On étudie une autre classe de polygones rationnels q. On considère un polygone rationnel q vérifie la condition suivante : pour tout entier $0 < s < r$, la suite $q(s) - p(s)$ est strictement croissante. On laisse au lecteur de vérifier l'analogue du théorème VI.1.1.

Théorème VI.2.1. — *Soit $(\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{E}' \hookleftarrow \mathcal{E}'' \Leftarrow \mathcal{E}^\sigma)$ un chtouca dégénéré géométrique de type $\underline{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

b) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r}d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

c) *On a :*

- ▷ $\deg \mathcal{F} \leq (\operatorname{rg}\mathcal{F}/r)d + p(\operatorname{rg}\mathcal{F})$, *pour tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$;*
- ▷ *pour tout $s \in \underline{r}$, les égalités*

$$\deg \mathcal{E}_s = \frac{\operatorname{rg}\mathcal{E}_s}{r}d + p(s), \quad \deg \bar{\mathcal{E}}_s = \frac{\operatorname{rg}\bar{\mathcal{E}}_s}{r}d - p(s) - 1;$$

en particulier, si $s \in \underline{r}$ *et* $s < r$, *on a* $\mathcal{E}'_s = \mathcal{E}''_s$, *et pour tout* $s \in \underline{r}$, *l'homomorphisme* $\mathcal{E}'_s \to \mathcal{E}'/\mathcal{E}$ *est surjectif;*

▷ *pour tout* $s \in \underline{r}$, *le fibré vectoriel* $\mathcal{E}^\sigma_{s^-} \oplus \bar{\mathcal{E}}_s$ *est maximal dans* $\bar{\mathcal{E}}$;

▷ *pour tout* $s \in \underline{r}$ *et pour tout sous-fibré vectoriel* $\mathcal{E}^\sigma_{s^-} \oplus \bar{\mathcal{E}}_s \subseteq \mathcal{F} \subsetneq \bar{\mathcal{E}}$, *on a les inégalités* $\deg \mathcal{F} \leq (\mathrm{rg}\, \mathcal{F}/r)d + p(\mathrm{rg}\, \mathcal{F} - r + s) - p(s) - 1$.

VI.2.2. Le théorème VI.1.1 et le corollaire IV.4.4 impliquent

Théorème VI.2.2. — *Si* q *assez grand par rapport à* r, *alors le champ* $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q}$ *est propre au-dessus de* $X \times X$. *On l'appelle la* compactification duale *et on le note aussi* $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,p}_{\mathrm{duale}}$.

Remarque VI.2.3. — a) On sait (cf. [**8**, chap. I.1d] et [**9**]) que, sur les champs de chtoucas dégénérés de rang r, il y a un opérateur de passage aux duaux qui transforme un chtouca à droite en un chtouca à gauche et un chtouca à gauche en un chtouca à droite. Or la compactification introduite par Lafforgue n'est pas stable par cet opérateur dès que $r > 2$. Plus précisément, la condition que, pour tout $s \in \underline{r}$, la somme $\mathcal{E}^\sigma_s + \bar{\mathcal{E}}_{s^-}$ soit égale à $\bar{\mathcal{E}}$ n'est pas stable par dualité. La duale de cette condition est exactement la condition que, pour tout $s \in \underline{r}$, le fibré $\mathcal{E}^\sigma_{s^-} + \bar{\mathcal{E}}_s$ soit maximal dans $\bar{\mathcal{E}}$. Donc la nouvelle compactification que l'on vient de définir est la compactification duale de celle de Lafforgue.

b) Dans le cas $r = 2$, la compactification de Drinfeld est autoduale car les conditions précédentes ne paraissent pas.

VI.2.3. On peut donner une description des différentes strates de la compactification duale $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,p}_{\mathrm{duale}}$ qui est semblable à celle des champs de chtoucas itérés dans la section I.3.4.

Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca dégénéré de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$ dans $\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,p}_{\mathrm{duale}}$; à partir de ce chtouca itéré, on peut construire des vrais chtoucas (mais certains sont des chtoucas à gauche).

D'abord, pour tout entier $s \in \underline{r}$, avec $s < r$, on note

$$E_s = \mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-} \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i, \quad E'_s = (\mathcal{E}^\sigma/\bar{\mathcal{E}}_s \oplus \mathcal{E}^\sigma_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i^q.$$

On peut montrer que $\widetilde{E}_s = (E_s \hookrightarrow E'_s \hookleftarrow E^\sigma_s)$ est un chtouca à droite. En effet, le plongement $E_s \hookrightarrow E'_s$ est le composé

$$\begin{aligned} E_s = (\mathcal{E}_s/\mathcal{E}_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i &\hookrightarrow (\mathcal{E}''_s/\mathcal{E}''_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i \\ &\xrightarrow{\sim} (\bar{\mathcal{E}}_{s^-}/\bar{\mathcal{E}}_s) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i^q \hookrightarrow E'_s = (\mathcal{E}^\sigma/\bar{\mathcal{E}}_s \oplus \mathcal{E}^\sigma_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i \in \underline{r} \\ i < s}} \mathcal{L}_i^q. \end{aligned}$$

Le plongement $E'_s \hookrightarrow E^\sigma_s$ est le plongement naturel

$$E^\sigma_s = (\mathcal{E}^\sigma_s/\mathcal{E}^\sigma_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i\in \underline{r}\\ i<s}} \mathcal{L}^q_i \longrightarrow (\mathcal{E}^\sigma/\bar{\mathcal{E}}_s \oplus \mathcal{E}^\sigma_{s^-}) \otimes \bigotimes_{\substack{i\in \underline{r}\\ i<s}} \mathcal{L}^q_i = E'_s.$$

Ces plongements définissent bien un chtouca à droite $\widetilde{E}_s$. De plus, on peut montrer que le pôle de $\widetilde{E}_{r_1}$ coïncide avec le pôle ∞ de $\widetilde{\mathcal{E}}$ et le pôle de $\widetilde{E}_s$ coïncide avec le zéro de son prédécesseur $\widetilde{E}_{s^-}$.

Si $s = r$, on note $E_s = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{r^-}$ et $E'_s = \mathcal{E}''/\mathcal{E}''_{r^-}$. Alors on montre que $\widetilde{E}_s = (E_s \hookleftarrow E'_s \hookrightarrow E^\sigma_s)$ est un chtouca à gauche de rang r_1, dont le zéro est le zéro 0 du chtouca dégénéré $\widetilde{\mathcal{E}}$. En effet, le plongement $\mathcal{E}''/\mathcal{E}''_{r^-} \hookrightarrow \mathcal{E}'/\mathcal{E}'_{r^-} = \mathcal{E}/\mathcal{E}_{r^-}$ est le plongement naturel. Le plongement $\mathcal{E}''/\mathcal{E}''_{r^-} \hookrightarrow \mathcal{E}^\sigma/\mathcal{E}^\sigma_{r^-}$ est le composé

$$\mathcal{E}''/\mathcal{E}''_{r^-} \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{E}}_{r^-} \hookrightarrow \mathcal{E}^\sigma \longrightarrow \mathcal{E}^\sigma/\mathcal{E}^\sigma_{r_1}.$$

Ces plongements définissent bien un chtouca à gauche $\widetilde{E}_{r_1}$. De plus, on peut montrer que le zéro du chtouca $\widetilde{E}_r$ coïncide avec le zéro du $\widetilde{\mathcal{E}}$.

VI.3. D'autres compactifications

Dans cette section, on montre que, sous certaines conditions supplémentaires, le polygone q vérifie l'hypothèse IV.4.3.

Proposition VI.3.1. — *Soit $q : [0,r] \to \mathbb{R}$ un polygone rationnel qui vérifie la condition : pour toute famille $\underline{r}$ et pour tout $\{d_s\}_{s\in\underline{r}}$ tel que $0 \le d_s \le s - s^-$ et $0 < \sum_{s\in\underline{r}} d_s < r$, le nombre*

$$\sum_{s\in\underline{r}} \big(\delta(s^- + d_s) - \delta(s^-)\big)$$

n'est pas un entier, où $\delta(t) = q(t) - p(t)$ pour $0 \le t \le r$. Alors ce polygone vérifie l'hypothèse IV.4.3.

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un sous-fibré vectoriel non trivial de $\mathcal{E}$ tel qu'on ait l'inégalité

$$\deg \mathcal{F} \le \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

L'hypothèse sur le polygone q implique que le nombre

$$\frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

n'est pas un entier. On a donc une inégalité stricte

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg}\mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}\overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big).$$

Par conséquent, le polygone q vérifie l'hypothèse IV.4.3, c.q.f.d. □

Cette proposition combinée au corollaire IV.4.4 nous permet de construire d'autres compactifications qui sont en quelque sorte des intermédiaires entre les compactifications de Lafforgue et les compactifications duales.

Théorème VI.3.1. — *Sous les hypothèses précédentes et supposons que q est assez grand par rapport à r, alors le morphisme*

$$\overline{\mathrm{Cht}}^{r,d,q} \longrightarrow X \times X$$

est propre.

Remarque VI.3.2. — D'après Dolgachev-Hu [**2**] et Thaddeus [**20**], l'espace des linéarisations possible est divisé en un nombre fini de chambres. À l'intérieur d'une chambre, l'ensemble des points semistables et l'ensemble des points stables sont égaux et le quotient ne change pas. Les chambres sont séparés par des murs. Dans le cas général, certains murs peuvent être de codimensions 0, (cf. [**17**]).

Dans notre cas, la propriété $\psi(y)$ *est semistable* $\Leftrightarrow$ $\psi(y)$ *est stable* implique que l'ensemble des points semistables et l'ensemble des points stables sont égaux, autrement dit la linéarisation associée est dans une certaine chambre. Les murs sont contenus dans l'ensemble des polygones q qui ne vérifient pas les deux conditions du théorème VI.3.1. En particulier, les murs sont tous de codimensions positives.

CHAPITRE VII

COMPACTIFICATIONS DES CHAMPS DE CHTOUCAS À MODIFICATIONS MULTIPLES

On étend notre méthode pour trouver des compactifications des champs de chtoucas à modifications multiples considérés par Ngo Bao Chau [**14**] et Yakov Varshavsky [**22**].

VII.1. Chtoucas à modifications multiples

On rappelle la notion de chtouca à modifications multiples. On utilise les notations dans l'article de Ngo Bao Chau [**14**]. On renvoie le lecteur à [**14**] et [**22**] pour les démonstrations.

VII.1.1. Modifications des fibrés vectoriels. Modifications itérées

Définition VII.1.1. — *Soit $\overline{T}$ un sous-schéma fermé fini de $\overline{X}$ et soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ deux fibrés vectoriels de rang r sur la courbe $\overline{X}$; une $\overline{T}$-*modification *de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est un isomorphisme entre les fibrés vectoriels*

$$\varphi : \mathcal{E}_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{\overline{X}-\overline{T}}.$$

Soit x un point géométrique dans $\overline{T}$; on note $\mathcal{O}_x$ le complété de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ en x et F_x son corps des fractions. Étant donnée une modification

$$\varphi : \mathcal{E}_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{\overline{X}-\overline{T}}$$

entre deux fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de rang r sur $\overline{X}$, on en déduit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V'$ entre les fibres génériques de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$, qui à son tour induit un isomorphisme $V_x \xrightarrow{\sim} V'_x$. Le complété de $\mathcal{E}$ en x définit un réseau dans V_x, celui de $\mathcal{E}'$ en x définit un réseau dans V'_x. Si l'on identifie V_x avec V'_x, d'après le théorème des diviseurs élémentaires, la position relative de ces deux réseaux est donnée par une suite croissante d'entiers

$$\lambda_x = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r).$$

On pose

$$\mathrm{inv}(x) = \lambda_x.$$

On note

$$\mathbb{Z}^r_+ = \big\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{Z}^r \ ; \ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r\big\}.$$

On peut donc associer à toute $\overline{T}$-modification $\mathcal{E}_{\overline{X}-\overline{T}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_{\overline{X}-\overline{T}}$ une fonction

$$\mathrm{inv} : |\overline{T}| \longrightarrow \mathbb{Z}^r_+, \quad x \longmapsto \mathrm{inv}(x).$$

Sur $\mathbb{Z}^r_+$, on définit un ordre partiel : $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\leq \lambda'_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\leq \lambda'_1 + \lambda'_2, \\ &\vdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{r-1} &\leq \lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{r-1}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r &= \lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_r. \end{aligned}$$

Définition VII.1.2. — *Étant donné un élément $\lambda \in \mathbb{Z}^r_+$, le champ* Hecke^r_λ *associe à tout schéma S les données formées :*

i) *d'un points x de X à valeurs dans S,*

ii) *deux fibrés vectoriels $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de rang r sur $X \times S$,*

iii) *d'un isomorphisme $\varphi : \mathcal{E}_{|X\times S-\mathrm{graphe}(x)} \to \mathcal{E}'_{|X\times S-\mathrm{graphe}(x)}$ tel qu'en tout point géométrique s de S, la $x(s)$-modification induite vérifie l'inégalité* $\mathrm{inv}(x(s)) \leq \lambda$.

Proposition VII.1.3. — *Le morphisme*

$$\mathrm{Hecke}^r_\lambda \longrightarrow X \times \mathrm{Vec}^r$$

qui associe à $(x, \mathcal{E}, \mathcal{E}', \varphi)$ le couple $(x, \mathcal{E})$ est un morphisme représentable et projectif. En particulier, le champ Hecke^r_λ *est algébrique.*

On aura besoin aussi des modifications itérées.

Définition VII.1.4. — *Étant donnée une suite $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in \big(\mathbb{Z}^r_+\big)^n$, le champ* $\mathrm{Hecke}^r_{\underline{\lambda}}$ *associe à tout schéma S les données :*

i) *de n points $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X à valeurs dans S,*

ii) *de $(n+1)$ fibrés vectoriels $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ de rang r sur $X \times S$,*

iii) *pour tout entier $1 \leq i \leq n$, d'un isomorphisme*

$$\varphi_i : \mathcal{E}_{i-1\,|X\times S-\mathrm{graphe}(x_i)} \longrightarrow \mathcal{E}_{i\,|X\times S-\mathrm{graphe}(x_i)},$$

tel qu'en tout point géométrique s de S, la $x_i(s)$-modification induite vérifie l'inégalité $\mathrm{inv}(x_i(s)) \leq \lambda^i$.

On voit bien que ce champ est le produit fibré

$$\mathrm{Hecke}^r_{\underline{\lambda}} = \mathrm{Hecke}^r_{\lambda_1} \times_{\mathrm{Vec}^r} \mathrm{Hecke}^r_{\lambda_2} \times_{\mathrm{Vec}^r} \cdots \times_{\mathrm{Vec}^r} \mathrm{Hecke}^r_{\lambda_n}.$$

La proposition VII.1.3 implique alors

Proposition VII.1.5. — *Le morphisme*

$$\mathrm{Hecke}^r_{\underline{\lambda}} \longrightarrow X^n \times \mathrm{Vec}^r$$

qui associe à $(x_1, \dots, x_n, \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n, \varphi_i)$ *la donnée* $(x_1, x_2, \dots, x_n, \mathcal{E}_0)$ *est un morphisme représentable et projectif. En particulier, le champ* $\mathrm{Hecke}^r_{\underline{\lambda}}$ *est algébrique.*

VII.1.2. Chtoucas à modifications multiples. — On dit que $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in (\mathbb{Z}^r_+)^n$ est *admissible* si si

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \lambda^i_j = 0.$$

Dans la suite, nous fixons une suite admissible $\underline{\lambda} = (\lambda^1, \dots, \lambda^n) \in (\mathbb{Z}^r_+)^n$.

Définition VII.1.6. — *Le champ* $\mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}}$ *associe à tout schéma* S *les données :*

i) *de* n *points* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *de* X *à valeurs dans* S,

ii) *de* $(n+1)$ *fibrés vectoriels* $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ *de rang* r *sur* $X \times S$,

iii) *pour tout entier* $1 \leq i \leq n$, *d'un isomorphisme*

$$\varphi_i : \mathcal{E}_{i-1\,|X \times S - \mathrm{graphe}(x_i)} \longrightarrow \mathcal{E}_{i\,|X \times S - \mathrm{graphe}(x_i)},$$

tel qu'en tout point géométrique s *de* S, *la* $x_i(s)$*-modification induite vérifie l'inégalité* $\mathrm{inv}(x_i(s)) \leq \lambda^i$,

iv) *d'un isomorphisme* $(\mathrm{Id}_X \times \mathrm{Frob}_S)^* \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_n$.

Ce champ s'inscrit dans un diagramme cartésien de champs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Vec}^r \arrow[d] \\ \mathrm{Hecke}^r_{\underline{\lambda}} \arrow[r] & \mathrm{Vec}^r \times \mathrm{Vec}^r, \end{tikzcd}$$

dont les morphismes horizontaux sont

$$(x_1, \dots, x_n, \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_n) \longmapsto \mathcal{E}_0, \quad (x_1, \dots, x_n, \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n) \longmapsto (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_n),$$

et les morphismes verticaux sont

$$(x_1, \dots, x_n, \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_0^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n, \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n), \quad \mathcal{E}_0 \longmapsto (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0^\sigma).$$

On montre que le champ $\mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}}$ de chtoucas à modifications multiples est algébrique au sens de Deligne-Mumford.

Définition VII.1.7. — *Le morphisme naturel* $\mathrm{Cht}^r_{\underline{\lambda}} \to X^n$ *est appelé* morphisme caractéristique.

Si l'on note $\mu = (1, 0, \dots, 0)$ et $\mu^\vee = (0, 0, \dots, -1)$, alors le champ $\mathrm{Cht}^r_{(\mu, \mu^\vee)}$ est le champ Cht^r de chtoucas de Drinfeld considéré par Drinfeld et Lafforgue (cf. chap. I).

Soit d un entier ; on notera $\mathrm{Cht}^{r,d}_{\underline{\lambda}}$ le sous-champ classifiant des chtoucas à modifications multiples $\underline{\lambda}$ de rang r et de degré d, c'est-à-dire $\deg \mathcal{E}_0 = d$.

VII.1.3. Structures de niveau. Troncature

Définition VII.1.8. — *Étant donné un sous-schéma fermé fini N de X, une* structure de niveau N *sur un chtouca $\widetilde{\mathcal{E}}$ de rang r sur un schéma S, dont les points associés $x_1, x_2, \dots, x_n$ évitent N consiste en un isomorphisme*

$$u : \mathcal{E}_{0\,|N\times S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^r_{N\times S}$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{E}_{0\,|N\times S} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{1\,|N\times S} & \xrightarrow{\sim} & \cdots & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}_{n\,|N\times S} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{E}^\sigma_{0\ |N\times S} \\
{\scriptstyle u}\big\downarrow & & & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle u^\sigma} \\
\mathcal{O}^r_{N\times S} & = & = & = & = & = & = & = & \mathcal{O}^r_{N\times S}.
\end{array}$$

On introduit les conditions de troncature grâce au polygone canonique de Harder-Narasimhan qui généralisent celles des champs de chtoucas de Drinfeld (cf. section I.2.4).

Proposition VII.1.9. — *Étant donné un polygone $p : [0,r] \to \mathbb{R}$ assez convexe en fonction de la courbe X, de r, de n et de $\underline{\lambda}$, il existe dans le champ $\mathrm{Cht}^{r,d}_{\underline{\lambda}}$ un unique sous-champ ouvert $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_{\underline{\lambda}}$ tel qu'un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ appartienne à cet ouvert si et seulement si le polygone canonique de Harder-Narasimhan du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}_0$ soit majoré par p.*

Le champ $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_{\underline{\lambda}}$ est de type fini, séparé mais il n'est pas propre. De plus, $\mathrm{Cht}^{r,d}_{\underline{\lambda}}$ est la réunion filtrante des ouverts $\mathrm{Cht}^{r,d,p}_{\underline{\lambda}}$.

VII.2. Chtoucas dégénérés à modifications multiples

VII.2.1. Définition

Définition VII.2.1. — *Le champ $\mathrm{ChtDeg}^r_{\underline{\lambda}}$ de chtoucas dégénérés à modifications multiples associe à tout schéma S les données :*

i) *de n points $x_1, x_2, \dots, x_n$ de X à valeurs dans S,*

ii) *de $(n+1)$ fibrés vectoriels $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ de rang r sur $X \times S$,*

iii) *pour tout entier $1 \leq i \leq n$, d'un isomorphisme*

$$\varphi_i : \mathcal{E}_{i-1\,|X\times S-\mathrm{graphe}(x_i)} \longrightarrow \mathcal{E}_{i\,|X\times S-\mathrm{graphe}(x_i)},$$

tel qu'en tout point géométrique s de S, la $x_i(s)$-modification induite vérifie l'inégalité $\mathrm{inv}(x_i(s)) \leq \lambda^i$,

iv) *d'un pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{E}^\sigma_0 \Rightarrow \mathcal{E}_n$ de type $(\mathcal{L}_i, \ell_i)^{\otimes(q-1)}_{1\leq i\leq r-1}$, autrement dit une famille d'homomorphismes*

$$u_s : \bigwedge^s \mathcal{E}^\sigma_0 \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes q(s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_n \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

ou

$$u_s : \bigwedge^s \mathcal{E}_0^\sigma \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(q-1)(s-i)} \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_n, \quad 1 \leq s \leq r,$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

▷ *Pour un (et donc pour tout) choix de trivialisations de $\mathcal{E}_0^\sigma$, $\mathcal{E}_n$ et des $\mathcal{L}_i$ localement sur S, la famille $(u_1, \ldots, u_r, \ell_1^{q-1}, \ldots, \ell_{r-1}^{q-1})$ appartient au schéma des pseudo-homomorphismes complets Ω (cf. section I.3.1).*

▷ *Génériquement au-dessus de tout point géométrique de S, chaque u_s qui peut se voir sous la forme*

$$u_s : \Big(\bigwedge^s \mathcal{E}_0 \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}\Big)^\sigma \longrightarrow \bigwedge^s \mathcal{E}_0 \otimes \bigotimes_{1\leq i<s} \mathcal{L}_i^{\otimes(s-i)}, \quad 1 \leq s \leq r,$$

n'est pas nilpotent.

On a la décomposition

$$\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^r = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d},$$

où le champ $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d}$ classifie les chtoucas dégénérés à modifications multiples de degré d, autrement dit $\deg \mathcal{E}_0 = d$.

Pour toute famille $\underline{r}$, on dispose aussi de la notion de chtouca dégénéré à modifications multiples de type $\underline{r}$. On notera $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda},\underline{r}}^{r,d}$ le sous-champ classifiant les chtoucas dégénérés à modifications multiples de rang r, de degré d et de type $\underline{r}$.

VII.2.2. Strates. Dégénérateurs. — On conserve les notations de la section précédente. Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un point géométrique de $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d}$ de type $\underline{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_k)$. Comme tous les morphismes u_s, avec $1 \leq s \leq r$, ne sont pas nilpotents génériquement, ils ne s'annulent pas génériquement. Il existe donc un ouvert non vide U de X tel qu'en tout point géométrique de U, tous les homomorphismes u_s, avec $1 \leq s \leq r$, ne s'annulent pas. Cela implique que la restriction du pseudo-homomorphisme complet $\mathcal{E}_0^\sigma \Rightarrow \mathcal{E}_n$ à U est un homomorphisme complet. On dispose :

▷ d'une filtration décroissante $\mathcal{E}_0^\sigma = \bar{\mathcal{E}}_0 \supsetneq \cdots \supsetneq \bar{\mathcal{E}}_{0,s} \supsetneq \cdots \supsetneq 0$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de $\mathcal{E}_0^\sigma$ de corang $r_1, r_2, \ldots, r_k$,

▷ d'une filtration croissante $0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{n,s} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_n$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de $\mathcal{E}_n$ de rang $r_1, r_2, \ldots, r_k$,

▷ des isomorphismes sur l'ouvert U $\bar{\mathcal{E}}_{0,s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{0,s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{n,s}/\mathcal{E}_{n,s^-}$, $s \in \underline{r}$, où s^- est le prédécesseur de s dans $\underline{r}$ (cf. section I.1).

Soit s un entier, avec $1 \leq s \leq r$. La restriction de u_s sur l'ouvert U est alors le composé de trois morphismes :

▷ la restriction à U de la surjection

$$\bigwedge^s \mathcal{E}_0^\sigma \twoheadrightarrow \bigotimes_{\substack{t\in\underline{r}\\ t<s}} \det(\bar{\mathcal{E}}_{0,t^-}/\bar{\mathcal{E}}_{0,t}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \bar{\mathcal{E}}_{0,s^-}/\bar{\mathcal{E}}_{0,s^+},$$

▷ l'isomorphisme sur U

$$\bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\overline{\mathcal{E}}_{0,t^-}/\overline{\mathcal{E}}_{0,t}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \overline{\mathcal{E}}_{0,s^-}/\overline{\mathcal{E}}_{0,s^+} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}_{n,t}/\mathcal{E}_{n,t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}_{n,s^+}/\mathcal{E}_{n,s^-},$$

▷ la restriction à U de l'injection

$$\bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}_{n,t}/\mathcal{E}_{n,t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}_{n,s^+}/\mathcal{E}_{n,s^-} \hookrightarrow \bigwedge^{s} \mathcal{E}_n.$$

Comme le morphisme $u_s : \bigwedge^s \mathcal{E}_0^\sigma \to \bigwedge^s \mathcal{E}_n$ est défini partout, le morphisme que l'on note w_s,

$$\bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\overline{\mathcal{E}}_{0,t^-}/\overline{\mathcal{E}}_{0,t}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \overline{\mathcal{E}}_{0,s^-}/\overline{\mathcal{E}}_{0,s^+} \longrightarrow \bigotimes_{\substack{t\in \underline{r}\\ t<s}} \det(\mathcal{E}_{n,t}/\mathcal{E}_{n,t^-}) \otimes \bigwedge^{s-s^-} \mathcal{E}_{n,s^+}/\mathcal{E}_{n,s^-}$$

est alors un plongement partout bien défini. Puis le morphisme u_s est le composé de la surjection précédente, de ce plongement et de l'injection précédente.

La filtration de $\mathcal{E}_n$ et les modifications $\mathcal{E}_i \dashrightarrow \mathcal{E}_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ induisent des filtrations

$$0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_{i,s} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_i$$

de $\mathcal{E}_i$ par des sous-fibrés vectoriels maximaux de rang $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Comme génériquement, les morphismes u_s $(1 \leq s \leq r)$ ne sont jamais nilpotents, $\mathcal{E}_{0,s}^\sigma \cap \overline{\mathcal{E}}_{0,s} = 0$ pour tout entier $s \in \underline{r}$, donc $\mathcal{E}_{0,s}^\sigma \oplus \overline{\mathcal{E}}_{0,s}$ est un sous-fibré vectoriel de rang r de $\overline{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0^\sigma$.

Définition VII.2.2. — *Un point x de X est un* dégénérateur *du chtouca dégénéré à modifications multiples $\widetilde{\mathcal{E}}$ si une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) *il appartient au support de $\overline{\mathcal{E}}_0/\mathcal{E}_{0,s}^\sigma \oplus \overline{\mathcal{E}}_{0,s}$ pour un certain $s \in \underline{r}$;*

b) *il appartient au support du plongement w_s défini précédemment pour un certain $1 \leq s \leq r$.*

On prouve aisément une version analogue de la proposition I.3.5 :

Proposition VII.2.3. — *Soit $\widetilde{\mathcal{E}}$ un chtouca dégénéré à modifications multiples. Supposons que le polygone canonique de Harder-Narasimham du fibré vectoriel sous-jacent $\mathcal{E}$ est majoré par un polygone p_0. Alors le nombre de dégénérateurs de $\widetilde{\mathcal{E}}$ est borné par une fonction* $\mathrm{Deg}(\underline{\lambda}, n, r, p_0)$ *qui ne dépend que de $\underline{\lambda}$, de n, de r et de p_0.*

Définition VII.2.4. — *Avec ces notations, si $\mathcal{F}$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{E}_0$, pour tout entier $s \in \underline{r}$, on définit $\overline{\mathcal{F}}_s$ le sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}^\sigma \cap \overline{\mathcal{E}}_{0,s}$ de $\overline{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0^\sigma$.*

VII.3. Compactification des champs de chtoucas à modifications multiples

Notre construction est calquée avec quelques petites adaptations de celles des chapitres précédents.

VII.3.1. Notations. — Dans ce chapitre, on fixe un polygone p_0 assez convexe en fonction de la courbe X et de r (cf. définition I.2.4). On choisit un entier positif ε très grand par rapport à p_0, X et r. Puis on choisit un entier positif w et m niveaux $\{N_i\}_{1\leq i\leq m}$ disjoints sans multiplicités de même longueur M tels que :

a) Tout point géométrique x de $\coprod_{1\leq i\leq m} N_i$ est supporté par un point fermé de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^w}$.

b) $M - \mathrm{Deg}(\underline{\lambda}, n, r, p_0)w$ est assez grand par rapport à ε, p_0, X, r, n et $\underline{\lambda}$ où la fonction $\mathrm{Deg}(\underline{\lambda}, n, r, p_0)$ est définie dans la proposition VII.2.3.

c) m est assez grand par rapport à ε, p_0, X, r, n et $\underline{\lambda}$.

On notera

$$N = \coprod_{1\leq i\leq m} N_i.$$

On choisit enfin un entier d très grand par rapport à m, M, w, ε, p_0, X et r ; on pose $h = d + (1-g)r$, où g est le genre de la courbe X.

VII.3.2. Structures de niveau. — Rappelons qu'on a déjà défini les champs $\mathcal{C}^r_N$ et $\mathcal{C}^{r,N}$ dans la section II.2. On note $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N}$ comme produit fibré de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda}} \times_{X^n} (X-N)^n$ et de $\mathcal{C}^r_N$ au-dessus de $\mathcal{C}^{r,N}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}^r_N \arrow[d] \\ \mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda}} \times_{X^n} (X-N)^n \arrow[r] & \mathcal{C}^{r,N}. \end{tikzcd}$$

Le morphisme

$$\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N} \longrightarrow \mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda}} \times_{X^n} (X-N)^n$$

est représentable et fini ; le champ $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N}$ est muni d'une action du groupe fini $\mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$ et le quotient de l'espace grossier associé à $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N}$ par ce groupe fini est celui associé à $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda}} \times_{X^n} (X-N)^n$.

VII.3.3. On va construire le fourre-tout $\mathcal{Y}_{\underline{\lambda}}$; c'est le champ défini au-dessus de l'ouvert

$$\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$$

de $\mathrm{ChtDeg}^{r,d}_{\underline{\lambda},N} \times_{\mathbb{A}^{r-1}/\mathbb{G}_m^{r-1}} \mathbb{A}^{r-1}$ en ajoutant un homomorphisme surjectif (défini modulo l'action de $\mathbb{G}_m$)

$$\mathcal{O}_X^h \twoheadrightarrow \mathcal{E}_0,$$

pour lequel le morphisme induit $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X^h) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{E}_0)$ est un isomorphisme. On voit bien que le champ $\mathcal{Y}_{\underline{\lambda}}$ est un schéma quasi-projectif et, qu'il est un $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur au-dessus du champ

$$\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda},N}^{r,d} \times_{\mathrm{Vec}^{r,d}} \mathrm{Vec}^{r,d,p_0}.$$

VII.3.4. On reprend l'espace projectif $\mathcal{Z}$ de la section IV.2.2. On peut définir de la même manière un morphisme $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1} \times \mathrm{GL}_r(\mathcal{O}_N)$-équivariant $\psi : \mathcal{Y}_{\underline{\lambda}} \to \mathcal{Z}$ qui généralise le morphisme $\psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ du chapitre VI.

VII.3.5. On rappelle aussi qu'étant donnée une suite de rationnels positifs $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ de somme 1, on peut lui associer une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1))$ de $\mathcal{Z}$ pour chaque couple d'entiers $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ (cf. section IV.3).

VII.3.6. Variations des quotients. — On peut énoncer le théorème principal qui généralise le lemme IV.2.1 et le théorème IV.4.1.

Théorème VII.3.1. — a) *Il existe un fibré inversible $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{Y}_{\underline{\lambda}}$ relativement ample par rapport à $\psi : \mathcal{Y}_{\underline{\lambda}} \to \mathcal{Z}$; il est muni d'une $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation.*

b) *Soient ε_0, ε_1 deux nombres entiers positifs tels que*

$$r\varepsilon_0 \frac{\varepsilon}{h - \varepsilon} = r!\, m\varepsilon_1.$$

Soit p un polygone assez convexe en fonction de X, r, n et $\underline{\lambda}$, entier par rapport à d et majoré par p_0. On choisit un polygone rationnel $q : [0, r] \to \mathbb{R}$ tel que $p(s) < q(s) < p(s) + 1$ pour tout entier $0 < s < r$. Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ la suite de rationnels positifs de somme 1 associée à q ; on considère la $\mathrm{PGL}_h \times \mathbb{G}_m^{r-1}$-linéarisation associée à $\underline{\alpha}$ du fibré $\mathcal{O}(\varepsilon_0) \boxtimes (\boxtimes \mathcal{O}(\varepsilon_1))$ de $\mathcal{Z}$.

Alors, pour un point géométrique y de $\mathcal{Y}_{\underline{\lambda}}$, dont le chtouca dégénéré à modifications multiples sous-jacent $\widetilde{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_0^\sigma \Rightarrow \mathcal{E}_n)$ est de type $\underline{r}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *$\psi(y)$ est semistable (resp. stable) ;*

ii) *pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\mathrm{rg}\, \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s \in \underline{r}} \left(q(s^- + \mathrm{rg}\, \overline{\mathcal{F}}_{s^-} / \overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-) \right) \quad (\textit{resp.} <),$$

où les fibrés $\mathcal{F}_s$ sont définis dans la définition VII.2.4.

c) *Supposons que q est assez grand par rapport à r. Alors le morphisme*

$$\psi^{-1}(\mathcal{Z}^{ss}) \longrightarrow (X - N)^n \times \mathcal{Z}^{ss}$$

est propre.

Démonstration. — Compte tenu de la proposition VII.2.3 et de la discussion dans la preuve du théorème VII.3.1, la preuve de ce théorème est similaire à celle du théorème IV.4.1. □

VII.3.7. Différentes compactifications. — Sous certaines conditions supplémentaires sur le polygone q, on peut démontrer une version plus forte du théorème VII.3.1 b), c'est-à-dire $\psi(y)$ *est semistable si et seulement si* $\psi(y)$ *est stable.*

Théorème VII.3.2. — *Soit p un polygone assez convexe en fonction de X, r, n et $\underline{\lambda}$, entier par rapport à d. On choisit un polygone rationnel $q : [0,r] \to \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :*

▷ *pour tout entier $0 < s < r$, on a $p(s) < q(s) < p(s) + 1$;*

▷ *pour tout type $\underline{r}$ et pour tout uplet $\{d_s\}_{s\in\underline{r}}$ qui vérifie que $0 \leq d_s \leq s - s^-$ et que $0 < \sum_{s\in\underline{r}} d_s < r$, le nombre $\sum_{s\in\underline{r}}(\delta(s^- + d_s) - \delta(s^-))$ n'est pas un entier, où $\delta(t) = q(t) - p(t)$ pour $0 \leq t \leq r$.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big) \quad (\textit{resp.} <).$$

ii) *Pour tout sous-fibré vectoriel non trivial $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on a l'inégalité*

$$\deg \mathcal{F} < \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg} \overline{\mathcal{F}}_{s^-}/\overline{\mathcal{F}}_s) - q(s^-)\big) \quad (\textit{resp.} <).$$

Démonstration. — La preuve suit de près celle de la proposition VI.3.1, c.q.f.d. □

La propriété $\psi(y)$ *est semistable* $\Leftrightarrow$ $\psi(y)$ *est stable* nous permet de déduire les compactifications des champs de chtoucas à modifications multiples.

Théorème VII.3.3. — *Soit p un polygone assez convexe en fonction de X, r, n et $\underline{\lambda}$, entier par rapport à d et majoré par p_0. On choisit un polygone rationnel $q : [0,r] \to \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :*

▷ *pour tout entier $0 < s < r$, on a $p(s) < q(s) < p(s) + 1$;*

▷ *pour tout type $\underline{r}$ et pout tout uplet $\{d_s\}_{s\in\underline{r}}$ qui vérifie que $0 \leq d_s \leq s - s^-$ et que $0 < \sum_{s\in\underline{r}} d_s < r$, le nombre $\sum_{s\in\underline{r}}(\delta(s^- + d_s) - \delta(s^-))$ n'est pas un entier, où $\delta(t) = q(t) - p(t)$ pour $0 \leq t \leq r$.*

Alors :

a) *Il existe dans le champ $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d}$ un sous-champ ouvert $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d,q}$ tel qu'un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $\underline{r}$ appartienne à cet ouvert si et seulement s'il vérifie la condition suivante : pour tout sous-fibré vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on ait l'inégalité :*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{\operatorname{rg} \mathcal{F}}{r} d + \sum_{s\in\underline{r}} \big(q(s^- + \operatorname{rg}(\mathcal{F}^\sigma \cap \overline{\mathcal{E}}_{0,s^-}/\mathcal{F}^\sigma \cap \overline{\mathcal{E}}_{0,s})) - q(s^-)\big).$$

La strate ouvert de $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d,q}$ qui correspond à la partition triviale $(0 < r)$ est exactement le champ de chtoucas à modifications multiples $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}^{r,d,p}$.

b) *De plus, si q est assez grand par rapport à r, le morphisme caractéristique*

$$\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d,q} \longrightarrow X^n$$

est propre. En particulier, le champ $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{r,d,q}$ lui-même est propre.

Dans le cas $r = 2$, on obtient le corollaire suivant qui était déjà connu de Varshavsky [**21**] :

Corollaire VII.3.4. — *Soit d un entier et $p : [0,2] \to \mathbb{R}$ un polygone assez convexe en fonction de X, r, n et $\underline{\lambda}$, entier par rapport à d. Alors il existe dans le champ $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{2,d}$ un sous-champ ouvert $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{2,d,p}$ tel que :*

▷ *un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $(0 < 2)$, autrement dit un chtouca à modifications multiples appartienne à cet ouvert si et seulement si, pour tout sous-fibré vectoriel inversible $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}_0$, on ait l'inégalité :*

$$\deg \mathcal{F} \leq \frac{d}{2} + p(1),$$

▷ *un point géométrique $\widetilde{\mathcal{E}}$ de type $(0 < 1 < 2)$ appartienne à cet ouvert si et seulement si les fibrés inversibles $\mathcal{E}_{0,1}$ (de $\mathcal{E}_0$) et $\bar{\mathcal{E}}_{0,1}$ (de $\mathcal{E}_0^\sigma$) vérifient les inégalités :*

$$\deg \mathcal{E}_{0,1} \leq \frac{d}{2} + p(1), \quad \deg \bar{\mathcal{E}}_{0,1} \leq \frac{d}{2} - p(1) - 1.$$

La strate ouvert de $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{2,d,p}$ qui correspond à la partition triviale $(0 < 2)$ est exactement le champ de chtoucas à modifications multiples $\mathrm{Cht}_{\underline{\lambda}}^{2,d,p}$.

De plus, le morphisme caractéristique

$$\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{2,d,p} \longrightarrow X^n$$

est propre. En particulier, le champ $\mathrm{ChtDeg}_{\underline{\lambda}}^{2,d,p}$ lui-même est propre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brion (M.) & Kumar (S.) – *Frobenius splitting methods in geometry and representation theory*, Progress in Mathematics, vol. 231, Birkhäuser, Boston, MA, 2005.

[2] Dolgachev (I.) & Hu (Y.) – *Variation of geometric invariant theory quotients*, IHÉS Publ. Math., t. **87** (1998), pp. 5–56.

[3] Drinfeld (V.) – *Varieties of modules of F-sheaves*, Funct. Anal. Appl., t. **21** (1987), pp. 107–122.

[4] ______, *Cohomology of compactified manifolds of modules of F-sheaves of rank* 2, J. Soviet Math., t. **46** (1989), pp. 1789–1821.

[5] Gieseker (D.) – *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Annals of Math., t. **106** (1977), pp. 45–60.

[6] Harder (G.) & Narasimhan (M. S.) – *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann., t. **212** (1975), pp. 215–248.

[7] Lafforgue (L.) – *Cours à l'Institut Tata sur les chtoucas de Drinfeld et la correspondance de Langlands*, Prépublication IHÉS, M/02/45.

[8] ______, *Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson*, Astérisque, t. **243** (1997).

[9] ______, *Une compactification des champs classifiant les chtoucas de Drinfeld*, J. Amer. Math. Soc., t. **11** (1998), pp. 1001–1036.

[10] ______, *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, Invent. Math., t. **147** (2002), pp. 1–241.

[11] Langton (S. G.) – *Valuative criteria for families of vector bundles on algebraic varieties*, Annals of Math., t. **101** (1975), pp. 88–110.

[12] LAUMON (G.) & MORET-BAILLY (L.) – *Champs algébriques*, vol. 39, Springer, 1999.

[13] MUMFORD (D.), FOGARTY (J.) & KIRWAN (F.) – *Geometric Invariant Theory*, 3rd enlarged ed., vol. 34, Springer, 1994.

[14] NGO BAO CHAU – *$\mathcal{D}$-chtoucas de Drinfeld à modifications symétriques et identité de changement de base*, Ann. Sci. École Norm. Sup, t. **39** (2006), pp. 197–243.

[15] OKONEK (CH.), SCHMITT (A.) & TELEMAN (A.) – *Master spaces for stable pairs*, Topology, t. **38** (1999), pp. 117–139.

[16] OKONEK (CH.) & TELEMAN (A.) – *Master spaces and the coupling principe : from geometric invariant theory to gauge theory*, Comm. Math. Phys., t. **205** (1999), pp. 437–458.

[17] RESSAYRE (N.) – Appendix of *'Variation of geometric invariant theory quotients'*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., t. **87** (1998), pp. 5–56.

[18] ______, *The GIT-equivalence for G-line bundles*, Geom. Dedicata, t. **81** (2000), pp. 295–324.

[19] SESHADRI (C. S.) – *Quotient spaces modulo reductive algebraic groups*, Annals of Math., t. **95** (1972), pp. 511–556.

[20] THADDEUS (M.) – *Geometric invariant theory and flips*, J. Amer. Math. Soc., t. **9** (1996), pp. 691–723.

[21] VARSHAVSKY (Y.) – *Exposés à l'Institut Tata*, 2001.

[22] ______, *Moduli spaces of principal F-bundles*, Selecta Math., t. **10** (2004), pp. 131–166.

[23] VINBERG (E. B.) – On reductive algebraic semigroups, in *'Lie groups and Lie algebras', E. B. Dynkin's seminar*, Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2, t. **169** (1995), pp. 145–182.

[24] WEIL (A.) – *Basic number theory, 3rd ed.*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 144, Springer, 1974.