Astérisque

GÉRARD LAUMON

Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois

Astérisque, tome 302 (2005), p. 1-66

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__1_0>

Astérisque
302, 2005, p. 1–66

FONCTIONS ZÊTAS DES VARIÉTÉS DE SIEGEL DE DIMENSION TROIS

par

Gérard Laumon

Résumé. — Ces notes reprennent pour l'essentiel le contenu de mon article « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », en y remplacant partout le système de coefficients constant par un système de coefficients arbitraire.

***Abstract* (Zeta functions of Siegel threefolds).** — In these notes I extend the results of my paper "Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$" to the case of an arbitrary system of coefficients.

Ces notes reprennent pour l'essentiel le contenu de mon article « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ » [**0**], en y remplacant partout le système de coefficients constant par un système de coefficients arbitraire. Le résultat principal (24.1) est une expression spectrale pour la cohomologie à supports compacts des variétés de Siegel de dimension 3 à valeurs dans un tel système de coefficients, cette cohomologie étant considérée comme un module sur le produit de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ et du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ce résultat dépend du « Lemme fondamental », plus précisément des hypothèses 15.1, 16.1 et 19.2. Ces hypothèses résultent probablement des travaux de Hales [**Ha3**], [**Ha4**] et Waldspurger [**5**], mais faute de référence précise je ne peux l'affirmer. Elles résultent aussi en grande partie de travaux non publiés de Schröder et Weissauer [**6**] (par exemple, dans les prépublications « A special case of the fundamental lemma I, II, III and IV » incluses dans [**6**], Weissauer démontre l'hypothèse 15.1 dans le cas où γ_H *est régulier dans* H *et la caractéristique résiduelle est différente de* 2, en utilisant les résultats de la thèse de Schröder).

Des résultats similaires aux nôtres, voire plus complets, ont été obtenus par Harder [**Har**] et Weissauer [**6**].

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F46, 14F20, 14G10, 22E55.
Mots clefs. — Fontions zêtas, formule des traces d'Arthur-Selberg, variétés de Shimura.

J'utilise librement la bibliographie de [**0**] (et sa numérotation). Quelques références plus récentes ([**1**] à [**6**]) ont été ajoutées à la fin de ces notes.

Je remercie les organisateurs du Semestre Borel 2000 sur les formes automorphes de me permettre de publier ces notes. Je remercie aussi les organisateurs de la Conférence sur les formes automorphes à l'IAS de Princeton en avril 2001 de m'avoir donné l'occasion de faire un exposé sur ce sujet.

PARTIE I
LA GÉOMÉTRIE

1. Le groupe algébrique GSp(4)

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note I_n la matrice identité de taille $n \times n$.

Pour tout anneau (commutatif unitaire) R, on désigne par un indice R l'extension des scalaires à R.

On considère le $\mathbb{Z}$-module libre $V = \mathbb{Z}^4$ et la forme alternée non dégénérée qui est définie par

$$(v, w) = v_1 w_4 + v_2 w_3 - v_3 w_2 - v_4 w_1, \ \forall\, v, w \in V.$$

et qui a pour matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique de V où $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

On munit l'anneau $C = \mathrm{gl}(4, \mathbb{Z})$ des matrices 4×4 à coefficients entiers de l'involution $* : C \to C$ qui est induite par cette forme alternée et qui est donc donnée par

$$x^* = J\,{}^{\mathrm{t}}\!x J^{-1}.$$

On note $G = \mathrm{GSp}(4)$ le schéma en groupes défini par

$$\begin{aligned} G(R) &= \{x \in C_R \mid \exists\, c(x) \in R^\times \text{ tel que } x^* x = c(x) I_4\} \\ &= \{x \in \mathrm{GL}(4, R) \mid \exists\, c(x) \in R^\times \text{ tel que } {}^{\mathrm{t}}\!x J x = c(x) J\} \end{aligned}$$

pour tout anneau R. Le multiplicateur $c : G \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est un caractère algébrique dont le noyau est le schéma en groupes $G_1 = \mathrm{Sp}(4)$.

Si on écrit $x = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{gl}(4, R)$ par blocs de taille 2×2, la relation ${}^{\mathrm{t}}\!x J x = c(x) J$ équivaut aux relations

$$\begin{cases} {}^{\mathrm{t}}\!ASC = {}^{\mathrm{t}}CSA, \\ {}^{\mathrm{t}}BSD = {}^{\mathrm{t}}DSB, \\ {}^{\mathrm{t}}\!ASD - {}^{\mathrm{t}}CSB = c(x) S. \end{cases}$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{gsp}(4)$ de G est la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{gl}(4)$ formée des $x \in \mathrm{gl}(4)$ pour lesquels il existe un scalaire $c'(x)$ tel que

$$ {}^{\mathrm{t}}xJ + Jx = c'(x)J, $$

c'est-à-dire tel que

$$ {}^{\mathrm{t}}CS = SC, \ {}^{\mathrm{t}}BS = SB \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}AS + SD = c'(x)S $$

si on écrit $x = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs de taille 2×2. La forme linéaire $c' : \mathfrak{g} \to \mathbb{G}_{\mathrm{a}}$ est bien sûr la dérivée à l'origine du caractère algébrique c et son noyau est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{sp}(4)$ de G_1.

Les schémas en groupes G_1 et G sont de dimension 10 et 11 respectivement.

2. Le demi-plan de Siegel

Soit $h : \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R} \to C_{\mathbb{R}}$ l'homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres (unitaires) défini par

$$ h(i) = J^{-1} = -J. $$

C'est un $*$-homomorphisme : on a $h(z)^* = h(\overline{z})$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La forme $\mathbb{R}$-bilinéaire $(v, h(i)w) = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4$ sur $V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^4$ est à valeurs réelles et est symétrique et définie positive.

On note simplement h^{-1} l'inverse de la restriction de h à $\mathbb{C}^\times$ vue comme homomorphisme de $\mathbb{R}$-schémas en groupes de la restriction à la Weil $\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})$ dans $G_{\mathbb{R}}$. On peut décomposer $(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}))_{\mathbb{C}}$ en un produit de deux copies de $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$ indexées par les deux homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres de $\mathbb{C}$ dans lui-même (l'identité et la conjugaison complexe). On note $\mu_h : \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ la restriction de $(h^{-1})_{\mathbb{C}}$ au facteur correspondant à l'identité de $\mathbb{C}$. Concrètement, on a

$$ \mu_h(z) = \begin{pmatrix} \frac{z+1}{2} & & & i\frac{z-1}{2} \\ & \frac{z+1}{2} & i\frac{z-1}{2} & \\ & -i\frac{z-1}{2} & \frac{z+1}{2} & \\ -i\frac{z-1}{2} & & & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix} = I_G \begin{pmatrix} z & & & \\ & z & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} I_G^{-1} $$

où

$$ I_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. $$

Lemme 2.1. — *Le couple (G, h^{-1}) vérifie les conditions de Deligne-Shimura suivantes :*

(1) *L'image par h^{-1} du sous-groupe « diagonal » $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{R}} \subset \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})$ est centrale dans $G_{\mathbb{R}}$.*

(2) *Considérons l'action de* $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}}$ *sur l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ *qui est composée du cocaractère* μ_h *et de l'action adjointe de* $G_{\mathbb{C}}$. *Ses poids dans* $X^*(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})=\mathbb{Z}$ *sont* -1 *avec multiplicité* 3, 0 *avec multiplicité* 5 *et* 1 *avec multiplicité* 3.

(3) *La forme réelle de* $G_{1,\mathbb{R}}$ *obtenue en tordant* $G_{1,\mathbb{R}}$ *par l'automorphisme intérieur de conjugaison par* $h^{-1}(i)$ *est compacte. En d'autres termes, le sous-groupe*

$$\{x\in C_{\mathbb{C}}\mid x^*x=I_4 \quad \text{et} \quad h^{-1}(i)\overline{x}h(i)=x\}\subset G_1(\mathbb{C})$$

est compact.

Démonstration. — La condition (1) est triviale.

La condition (2) résulte de la remarque suivante : on a $I_G J I_G^{-1}=J$ et donc, pour tout $z\in\mathbb{C}^\times$, l'action adjointe de $\mu_h(z)$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à l'action par conjugaison de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(z,z,1,1)$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Les espaces propres pour cette dernière action sont

$$\{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\C&0\end{smallmatrix}\right)\mid {}^{\mathrm{t}}CS=SC\}\text{ pour le poids }-1,$$

$$\{\left(\begin{smallmatrix}A&0\\0&D\end{smallmatrix}\right)\mid {}^{\mathrm{t}}AS+SD\in\mathbb{C}S\}\text{ pour le poids }0$$

et

$$\{\left(\begin{smallmatrix}0&B\\0&0\end{smallmatrix}\right)\mid {}^{\mathrm{t}}BS=SB\}\text{ pour le poids }1.$$

Enfin, si on note $\mathrm{U}(4,\mathbb{R})$ est le groupe unitaire compact $\{x\in\mathrm{GL}(4,\mathbb{C})\mid {}^{\mathrm{t}}\overline{x}x=I_4\}$, l'égalité

$$\{x\in C_{\mathbb{C}}\mid x^*x=I_4 \quad \text{et} \quad h^{-1}(i)\overline{x}h(i)=x\}=\{x\in\mathrm{U}(4,\mathbb{R})\mid J\overline{x}=xJ\},$$

entraîne la condition (3). □

Le groupe de Lie réel $G(\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur l'espace des $*$-homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbb{C}\to C_{\mathbb{R}}$. Le fixateur de h pour cette action est le sous-groupe

$$K'_\infty=\{x\in G(\mathbb{R})\mid Jx=xJ\}$$

et la $G(\mathbb{R})$-orbite X_∞ de h est donc isomorphe à $G(\mathbb{R})/K'_\infty$.

Le groupe K'_∞ est compact modulo son centre. Plus précisément, on a

$$K'_\infty=\mathbb{R}_+^\times K_\infty\subset G(\mathbb{R})$$

où

$$K_\infty=\{x\in G(\mathbb{R})\mid {}^{\mathrm{t}}xx=I_4\}$$

est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. Ce dernier sous-groupe admet deux composantes connexes découpées par les deux valeurs possibles ±1 du multiplicateur c sur K_∞.

Lemme 2.2. — *La composante neutre* $K_{1,\infty}\subset G_1(\mathbb{R})$ *de* K_∞ *est isomorphe au groupe unitaire*

$$U(2,\mathbb{R})=\{g\in\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})\mid {}^{\mathrm{t}}\overline{g}g=I_2\}.$$

Démonstration. — La matrice J définit une structure complexe sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V_{\mathbb{R}}$. Plus précisément, l'isomorphisme de $V_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{C}^2$ donné par

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \longmapsto (v_1 + iv_4, v_2 + iv_3)$$

échange la multiplication à gauche par J sur la vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ et la multiplication par i sur $(v_1 + iv_4, v_2 + iv_3)$. On a donc une identification de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ au sous-groupe

$$\{x \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid xJx^{-1} = J\} \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$$

par laquelle l'anti-involution $g \mapsto {}^{\mathrm{t}}\bar{g}$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ correspond à l'anti-involution $x \mapsto {}^{\mathrm{t}}x$. Il est clair que $U(2, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ correspond par cette identification au sous-groupe

$$\{x \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \mid xJx^{-1} = J \quad \text{et} \quad x{}^{\mathrm{t}}x = I_4\} \subset \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}),$$

c'est-à-dire au noyau de $c : K_\infty \to \{\pm 1\}$. □

Il résulte du lemme 2.1 que le quotient $X_\infty = G(\mathbb{R})/K'_\infty$ est un domaine hermitien symétrique. En fait, soit $\mathcal{H}_+$ le demi-plan de Siegel

$$\mathcal{H}_+ = \{\Omega \in \mathrm{gl}(2, \mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}(S\Omega) = S\Omega \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(S\Omega) \gg 0\}$$

des matrices complexes Ω de taille 2×2 telles que $S\Omega$ soit symétrique et ait une partie imaginaire définie positive, et soit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \cup (-\mathcal{H}_+) \subset \mathrm{gl}(2, \mathbb{C}).$$

Alors, le groupe $G(\mathbb{R})$ (resp. $G_1(\mathbb{R})$) agit à gauche sur $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{H}_+$) par

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \Omega = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$$

et le fixateur du point $\Omega = iS \in \mathcal{H}_+$ est exactement K'_∞ (resp. $K_{1,\infty}$). On peut donc identifier X_∞ à $\mathcal{H}$ et le munir de la structure complexe induite par celle de $\mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$.

3. Variétés de Siegel de dimension 3

On considère l'anneau topologique $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ des adèles de $\mathbb{Q}$. L'anneau topologique des adèles finis $\mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ n'est autre que $\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ où $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On forme le groupe adélique $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ et on note $K = G(\widehat{\mathbb{Z}}) \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ le sous-groupe compact ouvert maximal standard. On a évidemment $K = \prod_p K_p$ où p parcourt les nombres premiers et $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$.

On fixe un entier $N \geqslant 3$ et on note

$$K(N) = \mathrm{Ker}(G(\widehat{\mathbb{Z}}) \longrightarrow G(\widehat{\mathbb{Z}}/N\widehat{\mathbb{Z}})) \subset K$$

le noyau de la réduction modulo N. On a $K(N) = \prod_p K(N)_p$ où $K(N)_p = \mathrm{Ker}(G(\mathbb{Z}_p) \to G(\mathbb{Z}_p/N\mathbb{Z}_p)) \subset K_p$ avec égalité pour tous les p qui ne divisent pas N.

L'application $x \mapsto x(\widehat{V})$ identifie le quotient discret $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K$ à l'ensemble des $\widehat{\mathbb{Z}}$-réseaux $\widehat{H} \subset V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ qui sont autoduaux pour la forme symplectique $V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}} \times V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}} \to \mathbb{A}_{\mathrm{f}}$ induite par celle de V, c'est-à-dire à l'ensemble des familles indexées par les nombres premiers p de $\mathbb{Z}_p$-réseaux autoduaux $H_p \subset V_{\mathbb{Q}_p}$ telles que $H_p = V_{\mathbb{Z}_p}$ pour presque tout p. Cette identification se relève en une bijection du quotient $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N)$ sur l'ensemble des paires $(\widehat{H}, \overline{\eta})$ formées d'un $\widehat{\mathbb{Z}}$-réseau autodual $\widehat{H} \subset V_{\mathbb{A}_{\mathrm{f}}}$ et d'une structure de niveau N principale sur $\widehat{H}$, c'est-à-dire d'un isomorphisme $\overline{\eta} : \widehat{V}/N\widehat{V} \xrightarrow{\sim} \widehat{H}/N\widehat{H}$ compatible aux structures symplectiques à valeurs dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Le groupe $G(\mathbb{Q})$ agit proprement et librement sur la variété analytique complexe $X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))$ et le quotient

$$G(\mathbb{Q})\backslash[X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))]$$

est par définition la *variété analytique complexe de Siegel de dimension* 3 *et de niveau* N.

Soit S un schéma. Pour tout schéma abélien A sur un schéma S, on note $\varepsilon_A \in A(S)$ l'origine de A, $\sigma : A \times_S A \to A$ son morphisme d'addition et $\mathrm{pr}_i : A \times_S A \to A$, $i = 1, 2$, les deux projections canoniques. On rappelle que le S-schéma abélien $\widehat{A}$ dual de A est le S-schéma de modules des fibrés en droites $\mathcal{L}$ sur A munis d'une rigidification $\varepsilon_A^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_S$ et d'un isomorphisme

$$\mathrm{pr}_1^*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_{A\times_S A}} \mathrm{pr}_2^*\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \sigma^*\mathcal{L}$$

compatible à la rigidification ci-dessus et qui fait du $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-torseur associé à $\mathcal{L}$ une extension de A par $\mathbb{G}_{\mathrm{m},S}$.

Si N est inversible sur S, les S-schémas en groupes $A[N]$ et $\widehat{A}[N]$, noyaux de la multiplication par N dans A et $\widehat{A}$ respectivement, sont finis étales et sont en dualité à valeurs dans le S-schéma en groupes fini étale $\mu_{N,S}$ des racines N-ième de l'unité, par l'accouplement de Weil

$$A[N] \times_S \widehat{A}[N] \longrightarrow \mu_{N,S}$$

(si $a \in A[N]$ et $\mathcal{L} \in \widehat{A}[N]$, la fibre en a de $\mathcal{L}^{\otimes N}$ admet deux rigidifications qui diffèrent par une racine N-ième de l'unité).

Soit toujours S un schéma sur lequel N est inversible. On note $(V/NV)_S$ le S-schéma en groupes constant de valeur V/NV, muni de l'accouplement parfait $(\cdot,\cdot)_N$: $(V/NV)_S \times_S (V/NV)_S \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{N})_S$ induit par la forme alternée non dégénérée sur V. On considère alors l'ensemble

$$\mathcal{S}_N(S) = \{(A, \lambda, \zeta, \eta)\}$$

des classes d'isomorphie des quadruplets $(A, \lambda, \zeta, \eta)$ formés de :

– un S-schéma abélien A de dimension 2,

– une *polarisation principale* λ, c'est-à-dire un isomorphisme $\lambda : A \xrightarrow{\sim} \widehat{A}$ de S-schémas abéliens tel que $\widehat{\lambda} : \widehat{\widehat{A}} \to A$ soit égal à λ, compte tenu de l'isomorphisme de bi-dualité $A \xrightarrow{\sim} \widehat{\widehat{A}}$, et que, pour tout point géométrique s de S, $\lambda_s : A_s \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_s$ soit une polarisation,

– une racine primitive N-ième de l'unité ζ sur S, ou ce qui revient au même un isomorphisme $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S \xrightarrow{\sim} \mu_{N,S}$,

– une *structure de niveau N principale* η, c'est-à-dire un isomorphisme de S-schémas en groupes $(V/NV)_S \xrightarrow{\sim} A[N]$ qui échange l'accouplement parfait $(\cdot,\cdot)_N$ ci-dessus et l'accouplement parfait $A[N] \times A[N] \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S$ que l'on déduit de l'accouplement de Weil à l'aide de ζ et de l'isomorphisme $A[N] \xrightarrow{\sim} \widehat{A}[N]$ défini par la polarisation principale λ.

L'application $S \mapsto \mathcal{S}_N(S)$ se prolonge de manière évidente en un foncteur $\mathcal{S}_N$ sur la catégorie des $\mathbb{Z}[1/N]$-schémas.

***Théorème 3.1* (Mumford, *cf.* [Fa-Ch]).** — *Le foncteur $\mathcal{S}_N$ est représentable par un $\mathbb{Z}[1/N]$-schéma quasi-projectif et lisse, purement de dimension 3, que l'on note encore $\mathcal{S}_N$.* □

Soit $F = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/N}) \subset \mathbb{C}$ l'extension abélienne de $\mathbb{Q}$ obtenue par adjonction d'une racine primitive N-ième de l'unité ; on note $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Au dessus de l'anneau $\mathcal{O}[1/N]$, on a une identification canonique du schéma en groupes fini étale μ_N des racines N-ième de l'unité avec le schéma en groupes constant de valeur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

On vérifie que le $\mathbb{Z}[1/N]$-schéma $\mathcal{S}_N$ est la restriction à la Weil

$$\mathcal{S}_N = \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}[1/N]}^{\mathcal{O}[1/N]} \mathcal{M}_N$$

de $\mathcal{O}[1/N]$ à $\mathbb{Z}[1/N]$ du $\mathcal{O}[1/N]$-schéma quasi-projectif et lisse $\mathcal{M}_N$ qui classifie les triplets (A, λ, η) où A, λ et η sont comme ci-dessus pour $\zeta = e^{2\pi i/N}$.

A chaque $\Omega \in \mathcal{H}_+$ on peut associer la surface abélienne complexe

$$A_\Omega = \mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}^2 + S\Omega\mathbb{Z}^2)$$

et la polarisation principale λ_Ω de A_Ω induite par la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ de matrice $\mathrm{Im}(S\Omega)^{-1}$. On a

$$A_\Omega[N] = \big((\tfrac{1}{N}\mathbb{Z})^2 + S\Omega(\tfrac{1}{N}\mathbb{Z})^2\big) \,/\, \big(\mathbb{Z}^2 + S\Omega\mathbb{Z}^2\big)$$

et on a donc une identification symplectique canonique de $A_\Omega[N]$ à $(V/NV)_S$, c'est-à-dire une structure de niveau N principale η_Ω sur A_Ω.

***Proposition 3.2*.** — *Si on pose*

$$\Gamma(N) = \mathrm{Ker}(G_1(\mathbb{Z}) \longrightarrow G_1(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})) \subset G_1(\mathbb{Z}) \subset G_1(\mathbb{R}),$$

l'application $\Omega \mapsto (A_\Omega, \lambda_\Omega, \eta_\Omega)$ induit un isomorphisme de variétés analytiques complexes

$$\Gamma(N)\backslash\mathcal{H}_+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_N(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$$

de but la variété analytique associée au $\mathbb{C}$-schéma $\mathcal{M}_{N,\mathbb{C}}$ déduit de $\mathcal{M}_N$ par l'extension des scalaires $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbb{C}$. □

Corollaire 3.3. — *La variété analytique complexe $\mathcal{S}_N(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ associée au $\mathbb{C}$-schéma $\mathcal{S}_{N,\mathbb{C}}$ déduit de $\mathcal{S}_N$ par le changement de base $\mathbb{Z}[1/N] \hookrightarrow \mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe à la variété analytique de Siegel de dimension* 3 *et de niveau N, $\mathcal{S}_N(\mathbb{C})^{\mathrm{an}} \cong G(\mathbb{Q})\backslash[X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))]$.*

Démonstration. — Soit $G(\mathbb{Q})_+$ le sous-groupe des $x \in G(\mathbb{Q})$ tels que $c(x) > 0$. On vérifie tout d'abord que $G(\mathbb{Q})_+$ est le stabilisateur dans $G(\mathbb{Q})$ de la composante connexe $\mathcal{H}_+$ de $\mathcal{H} = X_\infty$ et donc que

$$G(\mathbb{Q})_+\backslash[\mathcal{H}_+ \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))] \cong G(\mathbb{Q})\backslash[X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))].$$

Le théorème d'approximation forte pour $G_1(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) = \mathrm{Sp}(4, \mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ assure que l'application

$$G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N) \longrightarrow \mathbb{Q}_+^\times\backslash\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^\times/c(K(N)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times/(1 + N\widehat{\mathbb{Z}}) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$$

induite par le multiplicateur c est bijective. (L'image par le multiplicateur $c : G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \to \mathbb{A}_{\mathrm{f}}^\times$ du sous-groupe compact ouvert $K(N) \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ n'est autre que $1 + N\widehat{\mathbb{Z}} \subset \widehat{\mathbb{Z}}^\times$).

Si l'on fixe pour chaque $i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ un représentant $x_i \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ de la double classe image inverse de i par l'application ci-dessus, on a donc

$$G(\mathbb{Q})_+\backslash[\mathcal{H}_+ \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))] = \coprod_{i \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \Gamma_i(N)\backslash\mathcal{H}_+,$$

où on a posé $\Gamma_i(N) = G(\mathbb{Q})_+ \cup x_i K(N) x_i^{-1} = G_1(\mathbb{Q}) \cup x_i K(N) x_i^{-1}$.

On conclut en remarquant que

$$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times. \qquad \square$$

Le groupe fini $K/K(N)$ agit sur le $\mathbb{Z}[1/N]$-schéma $\mathcal{S}_N$ par

$$(kK(N), (A, \lambda, \zeta, \eta)) \longmapsto (A, \lambda, \zeta, \eta \circ \overline{k})$$

où $\overline{k}$ est l'automorphisme de $(V/NV)_S$ induit par $k \in K$. Si $N' > 3$ divise N, le quotient pour cette action de $\mathcal{S}_N$ par le sous-groupe $K(N')/K(N) \subset K/K(N)$ n'est autre que $\mathcal{S}_{N'}[1/N]$.

Pour chaque $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$, on dispose d'une correspondance de Hecke

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_N(g) \arrow[d, "c_1(g)"'] \arrow[dr, "c_2(g)"] & \\
\mathcal{S}_N[1/NP_g] \arrow[r, dashed, "c(g)"'] & \mathcal{S}_N[1/NP_g]
\end{tikzcd}$$

sur $\mathcal{S}_N[1/NP_g] = \mathbb{Z}[1/NP_g] \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} \mathcal{S}_N$ où

– P_g est le produit des nombres premiers p ne divisant pas N et tels que $g_p \notin \mathbb{Q}_p^\times K_p$,

– si on note par N_g le plus petit entier > 0 multiple de NP_g tel que $K_{N_g} \subset K(N) \cap g^{-1}K(N)g$ (N_g a donc les mêmes facteurs premiers que NP_g), $\mathcal{S}_N(g)$ est le quotient du schéma $\mathcal{S}_{N_g}$ par l'action du sous-groupe fini $(K(N) \cap g^{-1}K(N)g)/K(N_g) \subset K/K(N)$.

Plus précisément, supposons tout d'abord que $g \in \mathrm{gl}(4, \widehat{\mathbb{Z}}) \cap \mathrm{GSp}(4, \mathbb{A}_{\mathrm{f}})$. Alors,

– le morphisme fini étale $c_1(g)$ est induit par l'inclusion $K(N)\cap g^{-1}K(N)g \subset K(N)$ et envoie donc la classe d'un S-point (A,λ,ζ,η) de $\mathcal{S}_{N_g}$ sur le S-point $(A_1 = A, \lambda_1 = \lambda, \zeta_1 = \zeta^{N_g/N}, \eta_1)$ de $\mathcal{S}_N[1/N_g]$ où la structure de niveau N principale $\eta_1 : (V/NV)_S = ((N_g/N)V/N_gV)_S \xrightarrow{\sim} A[N]$ est induite par la structure de niveau N_g principale $\eta : (V/N_gV) \xrightarrow{\sim} A[N_g]$,

– le morphisme fini étale $c_2(g)$ est induit par le plongement $K(N)\cap g^{-1}K(N)g \hookrightarrow K(N)$, $k \mapsto gkg^{-1}$, et envoie donc la classe d'un S-point (A,λ,ζ,η) de $\mathcal{S}_{N_g}$ sur le S-point $(A_2, \lambda_2, \zeta_2 = \zeta^{N_g/N}, \eta_2)$ de $\mathcal{S}_N[1/N_g]$ où A_2 est le quotient de A par le sous-S-schéma en groupes fini et plat de $A[N_g] \subset A$ image par η du noyau du morphisme

$$(V/N_gV)_S \longrightarrow (V/N_gV)_S$$

induit par l'endomorphisme g de $\widehat{V} = \widehat{\mathbb{Z}}^4$, et où λ_2 et η_2 sont déduits de λ et η de manière évidente.

On remarque ensuite que, pour $g = aI_4$ central avec $a \in \mathbb{Z}\cap\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{\times}$, on a $\mathcal{S}_N(g) = \mathcal{S}_N$ et $c(aI_4)$ est un automorphisme de $\mathcal{S}_N$.

Enfin, on écrit un élément général g sous la forme $g = a^{-1}g_0$ pour $g_0 \in \mathrm{gl}(4,\widehat{\mathbb{Z}}) \cap \mathrm{GSp}(4,\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ et $a \in \widehat{\mathbb{Z}}\cap\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{\times}$ et on pose $c(g) = c(aI_4)^{-1}\circ c(g_0)$.

Par construction, la correspondance $c(g)$ ne dépend que de la double classe de g dans $K(N)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N)$.

4. Représentations de dimension finie de G et systèmes locaux

Soient

$$T = \{t = \mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3,t_4) \mid t_1t_4 = t_2t_3 = c(t)\} \subset G$$

le tore maximal des matrices diagonales dans G et $B = TU$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures dans G. Si on note additivement le groupe $X^*(T)$ des caractères algébriques de T et α_1 et α_2 les éléments de $X^*(T)$ définis par

$$\alpha_1(t) = t_1/t_2 \quad \text{et} \quad \alpha_2(t) = t_2/t_3 = t_2^2/c(t),$$

l'ensemble $R = R(G,T) \subset X^*(T)$ des racines de T dans G est égal à

$$R = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1+\alpha_2) = (t_1/t_3)^{\pm1} = (t_2/t_4)^{\pm1}, \pm(2\alpha_1+\alpha_2) = (t_1/t_4)^{\pm1}\}.$$

De plus, le sous-ensemble $R^+ = R(B,T)$ des racines positives relativement à B est égal à

$$R^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1+\alpha_2, 2\alpha_1+\alpha_2\}$$

et l'ensemble $\Delta = \Delta(B,T)$ des racines simples dans R^+ est égal à

$$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Le groupe de Weyl W^G de (G,T) admet la présentation

$$\langle 1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma \mid \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \sigma^2 = 1, \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1, \sigma\varepsilon_1 = \varepsilon_2\sigma\rangle$$

où $\varepsilon_1 = s_{2\alpha_1+\alpha_2}$, $\varepsilon_2 = s_{\alpha_2}$, $\sigma = s_{\alpha_1}$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma = s_{\alpha_1+\alpha_2}$ sont les réflexions associées aux racines $2\alpha_1 + \alpha_2$, α_2, α_1 et $\alpha_1 + \alpha_2$ respectivement.

Les co-racines correspondant aux racines simples α_1 et α_2 sont les co-caractères $\alpha_1^\vee$ et $\alpha_2^\vee \in X_*(T) = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}, T)$ définis par
$$\alpha_1^\vee(u) = (u, u^{-1}, u, u^{-1}) \quad \text{et} \quad \alpha_2^\vee(u) = (1, u, u^{-1}, 1).$$

Considérons les $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels en dualité $X^*(T)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\otimes X^*(T)$ et $X_*(T)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \otimes X_*(T)$ et notons $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^*(T)_\mathbb{Q} \times X_*(T)_\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'accouplement de dualité. Le *réseau des poids*
$$\{\mu \in X^*(T)_\mathbb{Q} \mid \langle\mu, c^\vee\rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \langle\mu, \alpha_i^\vee\rangle \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2\} \subset X^*(T)_\mathbb{Q},$$
où $c^\vee \in X_*(T)$ est défini par $c^\vee(u) = (1, 1, u, u)$, coïncide ici avec $X^*(T)$ et l'*ensemble des poids dominants* est le sous-ensemble
$$X^*(X)^+ = \{\mu \in X^*(T) \mid \langle\mu, \alpha_i^\vee\rangle \geqslant 0,\ i = 1, 2\}$$
de $X^*(T)$.

Dans la suite, on identifie $X^*(T)$ au sous-groupe de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^2$ formé des $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2)$ tels que $\mu_0 \equiv \mu_1 + \mu_2 \pmod 2$ en envoyant μ sur le caractère
$$\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4) \longmapsto c(t)^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2} t_1^{\mu_1} t_2^{\mu_2}.$$
On a alors
$$X^*(X)^+ = \{\mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2) \mid \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant 0\}.$$

Les poids fondamentaux sont les caractères algébriques de T définis par $\omega_0(t)=c(t)$, $\omega_1(t)=t_1$ et $\omega_2(t)=t_1t_2$. L'ensemble $\{\omega_0 = 2\oplus(0,0), \omega_1 = 1\oplus(1,0), \omega_2 = 2\oplus(1,1)\}$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $X^*(T)$ et $\lambda_0\omega_0+\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2 = (2\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)\oplus(\lambda_1+\lambda_2, \lambda_2) \in X^*(T)$ est dominant si et seulement si λ_1 et λ_2 sont tous les deux $\geqslant 0$.

Pour chaque $\mu \in X^*(T)^+$ il existe une (et une seule à isomorphisme près) représentation algébrique irréductible V_μ de $G_\mathbb{Q}$ de plus haut poids μ. De plus, toutes les représentations algébriques irréductibles de $G_\mathbb{Q}$ sont de cette forme. La représentation contragrédiente $V_\mu^\vee$ de V_μ est isomorphe à $V_{\mu^\vee}$ où on a posé $\mu^\vee = (-\mu_0) \oplus (\mu_1, \mu_2) \in X^*(T)^+$. La représentation V_{ω_0} est évidemment le caractère c, la représentation V_{ω_1} est la représentation standard $V_\mathbb{Q}$ de dimension 4 et la représentation V_{ω_2} est la représentation de dimension 6 qui est la deuxième puissance extérieure $\bigwedge^2 V_\mathbb{Q}$ de la représentation standard. On remarque que le déterminant $\bigwedge^4 V_\mathbb{Q}$ de la représentation standard n'est autre que le caractère c^2 et que la puissance extérieure 3-ième $\bigwedge^3 V_\mathbb{Q}$ est canoniquement isomorphe à $c \otimes V_\mathbb{Q}$.

Soit W une représentation algébrique de dimension finie de $G_\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$. On définit le système local de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $\mathcal{W}^{\mathrm{an}}$ sur la variété analytique $\mathcal{S}_N(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ par
$$G(\mathbb{Q})\backslash\left([X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))] \times W\right) \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash[X_\infty \times (G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/K(N))].$$
On remarque que, si $W = V_\mathbb{Q}$ est la représentation standard de $G_\mathbb{Q} = \mathrm{GSp}(4)_\mathbb{Q}$, la fibre en $(A, \lambda, \zeta, \eta) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{C})$ de $\mathcal{V}_\mathbb{Q}^{\mathrm{an}} = \mathcal{W}^{\mathrm{an}}$ est le premier groupe d'homologie rationnelle

$H_1(A, \mathbb{Q})$ de A, et que, si W est obtenu en appliquant un foncteur polynomial à $V_{\mathbb{Q}}$ ($W = V_{\mathbb{Q}}^{\vee}$, $W = \mathrm{Sym}^i V_{\mathbb{Q}}$, $W = \bigwedge^i V_{\mathbb{Q}}$, ...), $\mathcal{W}^{\mathrm{an}}$ est obtenu en appliquant le même foncteur polynomial à $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{an}}$.

Lemme 4.1. — *Pour tout nombre premier ℓ, il existe un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse naturel $\mathcal{W}_\ell$ sur $\mathcal{S}_N[1/\ell] = \mathbb{Z}[1/N\ell] \otimes_{\mathbb{Z}[1/N]} \mathcal{S}_N$ dont la restriction à $\mathcal{S}_N(\mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ est $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{W}^{\mathrm{an}}$.*

Si $W = V_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{W}_\ell = \mathcal{V}_{\mathbb{Q}_\ell}$ a pour fibre en un point géométrique $(A, \lambda, \zeta, \eta)$ de $\mathcal{S}_N[1/\ell]$ le module de Tate $\mathbb{Q}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} T_\ell(A)$ et si W est obtenu en appliquant un foncteur polynomial à $V_{\mathbb{Q}}$, $\mathcal{W}_\ell$ est obtenu en appliquant le même foncteur polynomial à $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}_\ell}$. □

Pour tout $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$, la correspondance de Hecke $c(g) = (c_1(g), c_2(g)) : \mathcal{S}_{N_g} \to \mathcal{S}_N[1/N_g]$ se relève canoniquement au $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse $\mathcal{W}_\ell$ au sens où on a un isomorphisme canonique

$$c_2(g)^* \mathcal{W}_\ell \xrightarrow{\sim} c_1(g)^* \mathcal{W}_\ell.$$

Tout comme $c(g)$, ce relèvement de dépend que de la double classe $K(N)gK(N)$.

5. Le nombre de Lefschetz et la conjecture de Deligne

On fixe dans la suite $\mu \in X^*(T)^+$ et un nombre premier ℓ, et on note $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^{\vee}$ le dual du $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau lisse sur $\mathcal{S}_N[1/\ell]$ correspondant à la représentation V_μ, de sorte que $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^{\vee}$ correspond à la représentation contragrédiente $V_\mu^{\vee} = V_{\mu^\vee}$ de V_μ. On fixe aussi une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$. On dispose alors des groupes de cohomologie ℓ-adique

$$H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^{\vee})$$

munis de l'action continue de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ par transport de structures.

Pour tout $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$, la correspondance de Hecke $c(g)$ et son relèvement à $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^{\vee}$ définissent des endomorphismes, que l'on notera encore $c(g)$, des groupes de cohomologie ci-dessus puisque les morphismes de schémas $c_1(g), c_2(g)$ sont finis étales.

Soit

$$C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})$$

la $\mathbb{Q}$-algèbre de Hecke des fonctions $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \to \mathbb{Q}$ à support compact et bi-invariantes à droite et à gauche par $K(N)$. Le produit de cette algèbre est le produit de convolution défini par la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ normalisée par $\mathrm{vol}\, K(N) = 1$. Chaque $f \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})$ est une combinaison linéaire finie à coefficients rationnels de fonctions caractéristiques de doubles classes $K(N)gK(N)$. On munit les groupes de cohomologie ℓ-adique ci-dessus d'une structure de $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})$-module en faisant agir

$$f = \sum_i a_i 1_{K(N)g_iK(N)}$$

par l'endomorphisme $\sum_i a_i c(g_i)$. L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ est linéaire pour cette structure de module et on peut donc voir les groupes de cohomologie $H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^{\vee})$ comme des $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-modules.

Notre but est de calculer le $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N),\mathbb{Q})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-module virtuel

$$\sum_i(-1)^i[H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell})].$$

Pour cela il suffit de déterminer la trace

$$\mathrm{tr}(f\times\gamma)=\sum_i(-1)^i\,\mathrm{Tr}(f\times\gamma,H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell}))$$

quels que soient $f\in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N),\mathbb{Q})$ et $\gamma\in\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. En utilisant le théorème de densité de Cebotarev, on voit qu'il suffit même de déterminer la trace

$$\mathrm{tr}(f\times\Phi_p^j)$$

pour tout f, pour tous les nombres premiers p sauf éventuellement un nombre fini dépendant de f et pour tous les entiers j assez grands relativement aux choix de f et de p. Ici, Φ_p désigne un élément de Frobenius géométrique fixé arbitrairement dans $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Nous allons réinterpréter cette dernière trace comme un somme de termes locaux. Fixons un nombre premier p ne divisant pas le produit ℓN, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}\subset\overline{\mathbb{Q}}_p$. Si $\overline{\mathbb{F}}_p$ est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ qui est le corps résiduel de la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on a des homomorphismes de groupes de Galois uniquement déterminés par ces choix

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longleftarrow\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\longrightarrow\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$$

et on peut prendre pour Φ_p l'image par l'inclusion $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)\hookrightarrow\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ d'un relèvement arbitraire du générateur topologique $\mathrm{Frob}_p:\alpha\mapsto\alpha^{1/p}$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p)$.

Pour chaque entier i, on a un morphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{F}}_p,\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell})\longrightarrow H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{Q}}_p,\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell})\cong H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell}).$$

En utilisant l'existence de compactifications toroïdales relatives du morphisme structural $\mathcal{S}_N\to\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[1/N])$ (*cf.* [**Fa-Ch**]) et les résultats généraux de Grothendieck, on montre facilement que :

Proposition 5.1. — *Pour chaque entier i, le morphisme ci-dessus est un isomorphisme.* □

L'isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{F}}_p,\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell})\cong H^i_{\mathrm{c}}(\mathcal{S}_N\otimes\overline{\mathbb{Q}},\mathcal{V}^\vee_{\mu,\ell})$$

que l'on vient d'obtenir est aussi équivariant pour l'action de la sous-$\mathbb{Q}$-algèbre

$$C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}^p_{\mathrm{f}})//K(N)^p,\mathbb{Q})$$

de l'algèbre de Hecke $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N),\mathbb{Q})$ formée des f de la forme $f=f^p1_{K_p}$ où $f^p:G(\mathbb{A}^p_{\mathrm{f}})\to\mathbb{Q}$ est à support compact et bi-invariante à droite et à gauche par la composante $K(N)^p$ en dehors de p de $K(N)$, et où $1_{K_p}:G(\mathbb{Q}_p)\to\mathbb{Q}$ est la fonction caractéristique de K_p. Plus précisément, pour tout $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p) \times \{1\} \subset G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$, p ne divise pas N_g et $c(g)$ induit une correspondance sur $\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p$, notée encore

$$c(g) = (c_1(g), c_2(g)) : \mathcal{S}_{N_g} \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow (\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p) \times_{\mathbb{F}_p} (\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p),$$

et on fait agir

$$f^p = \sum_i a_i 1_{K(N)^p g_i K(N)^p} \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)//K(N)^p, \mathbb{Q})$$

sur $H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)$ par l'endomorphisme $\sum_i a_i c(g_i)$. On a donc

$$\operatorname{tr}(f^p 1_{K_p} \times \Phi_p^j) = \sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(f^p \times \mathrm{Frob}_p^j, H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee))$$

quels que soient $f^p \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)//K(N)^p, \mathbb{Q})$ et $j \in \mathbb{Z}$.

On cherche maintenant à appliquer la formule des points fixes de Grothendieck-Lefschetz. Rappelons que l'automorphisme Frob_p de $H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)$ est aussi induit par l'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{Frob}_{\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p}$ du $\mathbb{F}_p$-schéma $\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p$ et son relèvement canonique à $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee$. Si $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$ et si j est un entier $\geqslant 1$, l'endomorphisme $1_{K(N)^p g K(N)^p} \times \mathrm{Frob}_p^j$ de $H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)$ est donc aussi induit par la correspondance $c^j(g) = (c_1(g), \mathrm{Frob}_{\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p}^j \circ c_2(g))$ et son relèvement naturel à $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee$

Fixons provisoirement $g \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$. Si j est assez grand relativement à g, plus précisément si

$$p^j > [K(N_g) : K(N)],$$

les points fixes

$$\mathrm{Fix}(c^j(g)) = \{x \in \mathcal{S}_{N_g}(\overline{\mathbb{F}}_p) \mid c_1(g) = \mathrm{Frob}_{\mathcal{S}_N \otimes \mathbb{F}_p}^j (c_2(g)(x)) = x\}$$

sont isolés et transversaux d'après une remarque de Zink. Pour chaque $x \in \mathrm{Fix}(c^j(g))$, la correspondance $c^j(g)$ induit un endomorphisme $c^j(g)_x$ de la fibre $(\mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)_x$ de $\mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee$ en x. Le nombre de Lefschetz est alors par définition le nombre ℓ-adique

$$\mathrm{Lef}(c^j(g)) = \frac{1}{\deg(c_1(g))} \sum_{x \in \mathrm{Fix}(c^j(g))} \operatorname{Tr}(c^j(g)_x, (\mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)_x).$$

Le théorème suivant est un cas particulier d'une conjecture de Deligne (prouvée en général par Fujiwara [**1**])

***Théorème 5.2* (Pink [Pi]).** — *Il existe un entier $j(g) > [K(N_g) : K(N)]$ tel que, pour tout entier $j \geqslant j(g)$, on ait la formule des points fixes*

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{Tr}(c^j(g), H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{F}}_p, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee)) = \mathrm{Lef}(c^j(g)). \qquad \square$$

Plus généralement, pour tout

$$f^p = \sum_i a_i 1_{K(N)^p g_i K(N)^p} \in C_c(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)//K(N)^p, \mathbb{Q})$$

et pour tout entier $j > \sup_i\{[K(N_{g_i}) : K(N)]\}$, on définit le nombre de Lefschetz associé à f^p et j par

$$\mathrm{Lef}(f^p; j) = \sum_i a_i \,\mathrm{Lef}(c^j(g_i)).$$

Alors, le théorème de Pink admet la variante évidente suivante : *Il existe un entier* $j(f^p) > 0$ *tel que, pour tout* $j \geqslant j(f^p)$, *le nombre de Lefschetz* $\mathrm{Lef}(f^p; j)$ *soit défini et on ait la formule des points fixes*

$$\mathrm{tr}(f^p \times \Phi_p^j) = \mathrm{Lef}(f^p; j).$$

PARTIE II
LE COMPTAGE DES POINTS FIXES D'APRÈS KOTTWITZ

On fixe un nombre premier p ne divisant pas ℓN, une fonction $f^p : G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p) \to \mathbb{Q}$ invariante par translations à droite et à gauche par $K(N)^p$ et un entier $j \geqslant j(f^p)$.

6. Les intégrales orbitales $\mathrm{O}_\gamma^G(f^p)$ et $\mathrm{TO}_\delta^G(\varphi_j)$

Pour tout $\gamma \in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$, on définit l'intégrale orbitale

$$\mathrm{O}_\gamma^G(f^p) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)\backslash G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)} f^p(g^{-1}\gamma g) \frac{\mathrm{d}\, g^p}{\mathrm{d}\, g_\gamma^p}$$

où $G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$ est le centralisateur de γ dans $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$, où $\mathrm{d}\, g^p$ est la mesure de Haar sur $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$ qui donne le volume 1 à $K(N)^p$ et où $\mathrm{d}\, g_\gamma^p$ est une mesure de Haar arbitraire sur $G_\gamma(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$.

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$. Pour tout entier $j \geqslant 1$ on note simplement $\mathbb{Q}_{p^j}$ l'extension non ramifiée de degré j de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ et $\mathbb{Z}_{p^j}$ son anneau des entiers. On note $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$ l'élément de Frobenius arithmétique.

On considère le groupe p-adique $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ et son sous-groupe compact maximal hyperspécial $K_{p^j} = G(\mathbb{Z}_{p^j})$. On munit $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ de la mesure de Haar $\mathrm{d}\, g_j$ pour laquelle K_{p^j} est de volume 1. L'algèbre de Hecke $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j})$ est la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions $f : G(\mathbb{Q}_{p^j}) \to \mathbb{C}$ invariantes par translations à droite et à gauche par K_{p^j} et à support compact. On note encore σ l'automorphisme de $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ obtenu en appliquant l'élément de Frobenius arithmétique aux entrées matricielles.

L'isomorphisme de Satake, noté $f \mapsto f^\vee$, identifie l'algèbre de Hecke ci-dessus à la $\mathbb{C}$-algèbre

$$\mathbb{C}[X_*(T)]^{W^G}$$

où le groupe de Weyl $W^G = N_G(T)/T$ agit de manière évidente.

Soit $\nu_h \in X_*(T)$ le co-caractère $u \mapsto \operatorname{diag}(u,u,1,1)$ qui est conjugué dans $G_{\mathbb{C}}$ au co-caractère μ_h introduit dans la section 2. On définit la fonction

$$\varphi_j \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j})$$

comme la fonction caractéristique de la double classe

$$K_{p^j}\nu_h(p)K_{p^j}.$$

Il est facile de voir que la transformée de Satake de φ_j est

$$\varphi_j^\vee = p^{3j/2}\sum_{\nu\in W^G\cdot\nu_h}[\nu].$$

La norme d'un élément $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^j})$ est par définition l'élément

$$\mathcal{N}_j(\delta) = \delta\sigma(\delta)\cdots\sigma^{j-1}(\delta) \in G(\mathbb{Q}_{p^j})$$

et son σ-centralisateur dans $\operatorname{Res}_{\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p}(G_{\mathbb{Q}_{p^j}})$ est un $\mathbb{Q}_p$-schéma en groupes G_δ^σ tel que

$$G_\delta^\sigma(\mathbb{Q}_p) = \{x \in G(\mathbb{Q}_{p^j}) \mid x^{-1}\delta\sigma(x) = \delta\}.$$

Pour $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^j})$ de norme $\mathcal{N}_j(\delta)$ semi-simple et toute mesure de Haar $\mathrm{d}\,g_\sigma^\delta$ sur $G_\sigma^\delta(\mathbb{Q}_p)$, on définit l'intégrale orbitale tordue

$$\mathrm{TO}_\delta^G(\varphi_j) = \int_{G_\sigma^\delta(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_{p^j})}\varphi_j(g_j^{-1}\delta\sigma(g_j))\frac{\mathrm{d}\,g_j}{\mathrm{d}\,g_\sigma^\delta}.$$

7. La constante $c(\gamma_0;\gamma,\delta)$

Appelons *triplet admissible* tout triplet $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ où

– γ_0 est un élément semi-simple et $G(\mathbb{R})$-elliptique de $G(\mathbb{Q})$,

– γ est un élément de $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ dont chaque composante γ_q est $G(\overline{\mathbb{Q}}_q)$-conjugué à γ_0, où $\overline{\mathbb{Q}}_q$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_q$,

– δ est un élément de $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ pour lequel $c(\delta) \in p\mathbb{Z}_{p^j}^\times$ et dont la norme $\mathcal{N}_j(\delta)$ est $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$-conjugué à γ_0.

Pour un tel triplet admissible, Kottwitz a défini (*cf.* [**Ko1**]) une forme intérieure I du $\mathbb{Q}$-schéma en groupes réductif I_0 centralisateur de γ dans $G_{\mathbb{Q}}$, ayant les propriétés suivantes : $I_{\mathbb{Q}_q}$ est isomorphe au centralisateur de γ_q pour tout nombre premier $q \neq p$, $I_{\mathbb{Q}_p}$ est isomorphe au σ-centralisateur de δ et $I_{\mathbb{R}}/A_{G,\mathbb{R}}$ est isotrope sur $\mathbb{R}$.

Les mesures de Haar $\mathrm{d}\,g_\gamma^p$ sur $G_\gamma(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ et $\mathrm{d}\,g_\delta^\sigma$ sur $G_\delta^\sigma(\mathbb{Q}_p)$ induisent des mesures de Haar $\mathrm{d}\,i^p$ et $\mathrm{d}\,i_p$ sur $I(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ et $I(\mathbb{Q}_p)$ respectivement.

La constante $c(\gamma_0;\gamma,\delta)$ est par définition le produit

$$c(\gamma_0;\gamma,\delta) = \operatorname{Ker}\big[\ker^1(\mathbb{Q},I_0)\to\ker^1(\mathbb{Q},G)\big]\operatorname{vol}(I(\mathbb{Q})\backslash I(\mathbb{A}_\mathrm{f}),\mathrm{d}\,i^p\,\mathrm{d}\,i_p)$$

où

$$\ker^1(\mathbb{Q},\cdot) = \operatorname{Ker}\big[H^1(\mathbb{Q},\cdot)\to H^1(\mathbb{R},\cdot)\times\textstyle\prod_v H^1(\mathbb{Q}_v,\cdot)\big].$$

Bien entendu $H^1(\mathbb{Q},\cdot)$ et $H^1(\mathbb{Q}_v,\cdot)$ sont les groupes de cohomologie galoisienne de degré 1 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ et $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)$ respectivement.

8. La formule de Kottwitz pour le nombre de Lefschetz

D'après la description adélique des $\overline{\mathbb{F}}_p$-points de $\mathcal{S}_N$ due à Kottwitz [**Ko1**], le nombre de Lefschetz est égal à

$$\mathrm{Lef}(f^p;j)=\sum_{\gamma_0}\sum_{\substack{(\gamma,\delta)\\ \alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)=1}} c(\gamma_0;\gamma,\delta)\,\mathrm{Tr}(\gamma_0,V_\mu)\,\mathrm{O}_\gamma^G(f^p)\,\mathrm{TO}_\delta^G(\varphi_j) \tag{8.1}$$

où

– la première somme porte sur un système de représentants des $G(\overline{\mathbb{Q}})$-classes de conjugaison d'éléments semi-simples $\gamma_0\in G(\mathbb{Q})$ qui sont $G(\mathbb{R})$-elliptiques,

– la seconde somme porte sur un système de représentants des classes d'équivalence de couples $(\gamma,\delta)\in G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)\times G(\mathbb{Q}_{p^j})$ pour lesquels le triplet $(\gamma_0;\gamma,\delta)$ est admissible ; deux tels couples (γ,δ) et (γ',δ') sont équivalents si et seulement si γ et γ' sont conjugués dans $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)$ et δ et δ' sont σ-conjugués dans $G(\mathbb{Q}_{p^j})$,

– $\alpha(\gamma_0;\gamma,\delta)$ est l'invariant de Kottwitz ; c'est un caractère du groupe fini abélien

$$\mathcal{K}(I_0/\mathbb{Q})=\bigcap_v Z(\widehat{I}_0)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)}$$

où $Z(\widehat{I}_0)$ est le centre du dual de Langlands de I_0 (pour notre groupe G particulier, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_v/\mathbb{Q}_v)$ agit trivialement sur le centre $Z(\widehat{G})$ de $\widehat{G}$ quel que soit la place v de $\mathbb{Q}$) ; ce caractère est le produit des restrictions à $\mathcal{K}(I_0/\mathbb{Q})$ de caractères

$$\alpha_\infty(\gamma_0)\in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})}),\ \alpha_p(\gamma_0;\delta)\in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})$$

et

$$\alpha_q(\gamma_0;\gamma_q)\in X^*(Z(\widehat{I}_0)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_q/\mathbb{Q}_q)})$$

pour tous les nombres premiers $q\neq p$.

PARTIE III
STABILISATION DES TERMES ELLIPTIQUES D'APRÈS KOTTWITZ

9. Expression stabilisée pour $\mathrm{Lef}(f^p;j)$

L'expression (8.1) peut être stabilisée ([**Ko2**]) en

$$\mathrm{Lef}(f^p;j)=\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^G(f^G)+\iota(G,H)c(\Delta)\,\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H) \tag{9.1}$$

pour certaines fonctions

$$f^G = f_\infty^G f^p b_j^G(\varphi_j) \quad \text{et} \quad f^H = f_\infty^H h^p b_j^H(\varphi_j),$$

pour une constante

$$\iota(G,H) = \tau(G)\tau(H)^{-1} |\operatorname{Aut}(H,s,\eta)/H_{\mathrm{ad}}(\mathbb{Q})|^{-1}$$

et pour une constante $c(\Delta) \in \mathbb{C}^\times$ qui est le rapport entre le facteur de transfert global $\Delta_{\mathbb{A}}$ de Langlands et Shelstad et le produit des facteurs de transfert locaux

$$\prod_v \Delta_v$$

normalisés comme le fait Kottwitz pour $v=\infty$ et $v=p$, et par les structures entières de G et H sur $\mathbb{Z}_q$ pour tout nombre premier $v=q\neq p$ (Hales [Ha 1]).

Nous allons rappeler dans la suite de cette partie III la définition des fonctions f^G et f^H et ainsi que des expressions $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^G(f^G)$ et $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H)$. Nous monterons de plus que, pour nos groupes et nos fonctions particulières,

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^G(f^G) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^G(f^G) \quad \text{et} \quad \mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^H(f^H)$$

sont simplement les parties elliptiques des côtés géométriques des formules des traces pour (G,f^G) et (H,f^H) respectivement, et que

$$\iota(G,H) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad c(\Delta) = -1,$$

de sorte que nous aurons obtenu l'expression

$$\operatorname{Lef}(f^p;j) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^G(f^G) - \frac{1}{4}\mathrm{T}_{\mathrm{e}}^H(f^H) \tag{9.2}$$

pour le nombre de Lefschetz.

10. Représentations de $G(\mathbb{R})$ et la fonction f_∞^G

On identifie le groupe dual $\widehat{G} = \mathrm{GSpin}(5,\mathbb{C})$ de G à $\mathrm{GSp}(4,\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(4,\mathbb{C})$ par la représentation spinorielle. Le tore dual du tore maximal $T \subset G$ est le tore complexe

$$\widehat{T} = (\mathbb{C}^\times)^4/\{(\widehat{u},\widehat{u}^{-1},\widehat{u}^{-1},\widehat{u}) \mid \widehat{u}\in\mathbb{C}^\times\}.$$

Le caractère $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1,\mu_2) \in X^*(T)$ définit par dualité un co-caractère $\widehat{\mu} \in X_*(\widehat{T})$,

$$\widehat{\mu}(z) = (z^{\mu_1}, z^{(\mu_0-\mu_1+\mu_2)/2}, z^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}, 1)\cdot\{(\widehat{u},\widehat{u}^{-1},\widehat{u}^{-1},\widehat{u}) \mid \widehat{u}\in\mathbb{C}^\times\}.$$

On a un plongement naturel

$$\iota : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G},\ \widehat{t} \longmapsto \operatorname{diag}(\widehat{t}_1\widehat{t}_2, \widehat{t}_1\widehat{t}_3, \widehat{t}_2\widehat{t}_4, \widehat{t}_3\widehat{t}_4)$$

d'image le tore maximal des matrices diagonales de $\widehat{G}$. Le composé de ι et du co-caractère $\widehat{\mu}$ de $\widehat{T}$ est le co-caractère

$$\widehat{u} \longmapsto \operatorname{diag}(\widehat{u}^{(\mu_0+\mu_1+\mu_2)/2}, \widehat{u}^{(\mu_0+\mu_1-\mu_2)/2}, \widehat{u}^{(\mu_0-\mu_1+\mu_2)/2}, \widehat{u}^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}).$$

Soient $W_{\mathbb{C}}$ et $W_{\mathbb{R}}$ les groupes de Weil des corps locaux $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$: on a $W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^{\times}$ et $W_{\mathbb{R}} = W_{\mathbb{C}} \cup W_{\mathbb{C}}\tau$ où $\tau^2 = -1 \in W_{\mathbb{C}}$ et $\tau z \tau^{-1} = \overline{z}$ pour tout $z \in W_{\mathbb{C}}$. Le L-groupe ${}^{\mathrm{L}}G$ de $G_{\mathbb{R}}$ est le produit direct $\widehat{G} \times W_{\mathbb{R}}$.

On considère le tore maximal $\mathbb{R}$-elliptique

$$T_G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & 0 \\ -y_1 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \neq 0 \right\} \subset G_{\mathbb{R}}.$$

On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} I_G^{-1} T_G(\mathbb{C}) I_G & = & T(\mathbb{C}) \\ \cup & & \cup \\ I_G^{-1} T_G(\mathbb{R}) I_G & = & \{t \in T(\mathbb{C}) \mid t_3 = \overline{t}_2,\ t_4 = \overline{t}_1\} \end{array}$$

dans $G(\mathbb{C})$ où on rappelle que

$$I_G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in G(\mathbb{C}).$$

Le L-groupe de T_G est le produit semi-direct

$${}^{\mathrm{L}}T_G = \widehat{T} \rtimes W_{\mathbb{R}}$$

où $W_{\mathbb{R}}$ agit sur $\widehat{T}$ à travers son quotient $W_{\mathbb{R}}/W_{\mathbb{C}} = \{1, \tau\}$ par

$$\tau(\widehat{t}_1, \widehat{t}_2, \widehat{t}_3, \widehat{t}_4) = (\widehat{t}_4, \widehat{t}_3, \widehat{t}_2, \widehat{t}_1).$$

On définit un plongement

$$\eta : {}^{\mathrm{L}}T_G \hookrightarrow {}^{\mathrm{L}}G$$

qui prolonge le plongement $\iota : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$ ci-dessus, en envoyant τ sur

$$\eta(\tau) = J \times \tau$$

et $z \in \mathbb{C}^{\times} = W_{\mathbb{C}} \subset W_{\mathbb{R}}$ sur

$$\eta(z) = \left(\frac{z^3}{|z|^3}, \frac{z}{|z|}, \frac{\overline{z}}{|z|}, \frac{\overline{z}^3}{|z|^3} \right) \times z.$$

(On remarque que l'image par ι de l'élément $\widehat{\delta} \in X_*(\widehat{T})_{\mathbb{Q}}$ qui correspond à la demi-somme des racines positives $\delta = 0 \oplus (2,1) \in X^*(T)_{\mathbb{Q}}$ est égale $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$.)

Rappels 10.1. — Si S est le $\mathbb{R}$-tore $\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{R}}$, le L-groupe de S est le produit direct ${}^{\mathrm{L}}S = \mathbb{C}^{\times} \times W_{\mathbb{R}}$ et un paramètre de Langlands $W_{\mathbb{R}} \to {}^{\mathrm{L}}S$ envoie nécessairement $z \in \mathbb{C}^{\times} = W_{\mathbb{C}} \subset W_{\mathbb{R}}$ sur $|z|^{2\lambda} \times z$ pour un nombre complexe λ et τ sur $(-1)^{\mu} \times \tau$ pour $\mu \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La correspondance de Langlands associe à un tel paramètre le caractère $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$, $s \mapsto \mathrm{sgn}(t)^{\mu}|t|^{\lambda}$.

Si S le $\mathbb{R}$-tore elliptique $S = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{C}})$, le L-groupe de S est le produit semi-direct ${}^{\mathrm{L}}S = (\mathbb{C}^\times)^2 \rtimes W_\mathbb{R}$ où $W_\mathbb{R}$ agit sur $(\mathbb{C}^\times)^2$ à travers son quotient $W_\mathbb{R}/W_\mathbb{C} = \{1,\tau\}$ et τ permute les deux facteurs. Un paramètre de Langlands $W_\mathbb{R} \to {}^{\mathrm{L}}S$ envoie nécessairement z sur $\big(z^\mu|z|^{\lambda-\mu}, \overline{z}^\mu|z|^{\lambda-\mu}\big)\times z$ pour un entier μ et un nombre complexe λ, et τ sur $(a,b)\times\tau$ où a,b sont deux nombres complexes tels que $ab=(-1)^\mu$. L'orbite d'un tel paramètre de Langlands pour l'action de $\widehat{S} = (\mathbb{C}^\times)^2$ par automorphismes intérieurs est uniquement déterminée par les données de μ et λ. (L'automorphisme intérieur $\mathrm{Int}((x,y))$ envoie $(a,b)\times\tau$ sur $(axy^{-1}, byx^{-1})\times\tau$.) La correspondance de Langlands associe à une telle orbite le caractère $\mathbb{C}^\times = S(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^\times,\ s\mapsto s^\mu|s|^{\lambda-\mu}$. $\square$

Au poids dominant $\mu\in X^*(T)^+$ on associe le caractère

$$\chi_\mu : T_G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times,\ \gamma = I_G\,\mathrm{diag}(t_1,t_2,\overline{t}_2,\overline{t}_1)I_G^{-1} \longmapsto c(\gamma)^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}\, t_1^{\mu_1}t_2^{\mu_2},$$

où $c(\gamma)=|t_1|^2=|t_2|^2$. Le paramètre de Langlands $W_\mathbb{R}\to\widehat{T}\rtimes W_\mathbb{R} = {}^{\mathrm{L}}T$ de χ_μ envoie $z\in\mathbb{C}^\times = W_\mathbb{C}\subset W_\mathbb{R}$ sur

$$\Big(z^{\mu_1}|z|^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}, z^{\mu_2}|z|^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}, \overline{z}^{\mu_2}|z|^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}, \overline{z}^{\mu_1}|z|^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}\Big)\times z$$

et τ sur

$$((-1)^{\mu_1}, (-1)^{\mu_2}, 1, 1)\times\tau.$$

On lui associe aussi le paramètre de Langlands

$$\varphi_\mu : W_\mathbb{R} \longrightarrow {}^{\mathrm{L}}G = \widehat{G}\times W_\mathbb{R}$$

composé du paramètre précédent et du plongement $\eta : {}^{\mathrm{L}}T \hookrightarrow {}^{\mathrm{L}}G$; φ_μ envoie donc z sur

$$\left(\frac{z^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}, \frac{z^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}\right)$$

et τ sur

$$\mathrm{diag}((-1)^{\mu_1+\mu_2}, (-1)^{\mu_1}, (-1)^{\mu_2}, 1)J\times\tau.$$

Ce dernier paramètre de Langlands est elliptique puisque le centralisateur S_{φ_μ} de $\varphi_\mu(W_\mathbb{R})$ dans $\widehat{G}$ est égal à

$$\{x\in\iota(\widehat{T}) \mid xJ=Jx\} = \{(x_1,x_2,x_2,x_1)\in(\mathbb{C}^\times)^4 \mid x_1^2=x_2^2\}$$

et donc que le quotient $S_{\varphi_\mu}/Z(\widehat{G})$ est fini d'ordre 2.

Soient $\Omega_G = \mathrm{N}_{G(\mathbb{C})}(T_G(\mathbb{C}))/T_G(\mathbb{C})$ le groupe de Weyl de $(G(\mathbb{C}),T_G(\mathbb{C}))$ et $\Omega_{G(\mathbb{R})}\subset\Omega_G$ le groupe de Weyl $\mathrm{N}_{G(\mathbb{R})}(T_G(\mathbb{R}))/T_G(\mathbb{R})$ de $(G(\mathbb{R}),T_G(\mathbb{R}))$. La conjugaison par I_G^{-1} identifie Ω_G au groupe de Weyl

$$W^G = \{1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\sigma,\varepsilon_1\varepsilon_2=\varepsilon_2\varepsilon_1,\varepsilon_1\sigma=\sigma\varepsilon_2,\varepsilon_2\sigma=\sigma\varepsilon_1,\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma=\sigma\varepsilon_1\varepsilon_2\}$$

et $\Omega_{G,\mathbb{R}}$ au sous-groupe

$$\{1,\varepsilon_1\varepsilon_2,\sigma,\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma\}.$$

Pour tout $\omega\in\Omega_G$ il existe une (et une seule à isomorphisme près) représentation $\pi_\mu(\omega)$ de la série discrète (modulo le centre), c'est-à-dire essentiellement de carré intégrable, de $G(\mathbb{R})$ ayant le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation de dimension finie V_μ de plus haut poids μ, et dont le caractère $\Theta_{\pi_\mu(\omega)}$ est donné sur l'ouvert

$$T_{G,\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) = \{\gamma = I_G \operatorname{diag}(t_1, t_2, \bar{t}_2, \bar{t}_1) I_G^{-1} \mid t_1 \neq t_2,\ t_1 \neq \bar{t}_2,\ t_1 \neq \bar{t}_1,\ t_2 \neq \bar{t}_2\}$$

des éléments réguliers de $T_G(\mathbb{R})$ par la fonction

$$\gamma \longmapsto (-1)^{q(G)} \sum_{\omega_{\mathbb{R}} \in \Omega_{G(\mathbb{R})}} \frac{\chi_\mu(\omega_{\mathbb{R}}\omega(\gamma))}{D(\omega_{\mathbb{R}}\omega(\gamma))}$$

où $q(G) = 3$ est la moitié de la dimension (réelle) de $X_\infty = G(\mathbb{R})/K'_\infty$ et où $D(\gamma) = (1 - \frac{t_1}{t_2})(1 - \frac{t_1}{\bar{t}_2})(1 - \frac{t_1}{\bar{t}_1})(1 - \frac{t_2}{\bar{t}_2})$. Bien entendu $\pi_\mu(\omega)$ ne dépend que de la classe de ω dans $\Omega_{G(\mathbb{R})}\backslash\Omega_G$, et

$$\Pi_\mu = \{\pi_\mu(\omega) \mid \omega \in \Omega_{G(\mathbb{R})}\backslash\Omega_G\}$$

est le L-paquet de paramètre φ_μ (*cf.* [She 1]). Il est bien connu que, parmi les deux représentations de Π_μ, une et une seule, notée π_μ^{W}, admet un modèle de Whittaker et l'autre, notée π_μ^{H}, est holomorphe.

La distribution stable

$$\mathrm{S}\Theta_{\varphi_\mu} = \Theta_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}} + \Theta_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}$$

est donnée sur l'ouvert $T_{G,\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ de $T_G(\mathbb{R})$ par la fonction

$$\gamma \longmapsto (-1)^{q(G)} \sum_{\omega \in \Omega_G} \frac{\chi_\mu(\omega(\gamma))}{D(\omega(\gamma))} = -\operatorname{Tr}(\gamma, V_\mu).$$

Fixons une mesure de Haar $\mathrm{d}\,g$ sur $G(\mathbb{R})$ et une mesure de Haar $\mathrm{d}\,a$ sur la composante neutre $A_G(\mathbb{R})^0 = \mathbb{R}_+^\times$ de $A_G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ où $A_G = \mathbb{G}_{\mathrm{m},\mathbb{Q}}$ est (le tore maximal $\mathbb{Q}$-déployé dans) le centre de G.

Considérons l'algèbre de convolution $\mathcal{H}(G(\mathbb{R}))$ des fonctions lisses, à support compact modulo le centre, et qui sont K_∞-finies à gauche et à droite sur $G(\mathbb{R})$, et choisissons des pseudo-coefficients $f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}}$ et $f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}$ pour π_μ^{W} et π_μ^{H} dans $\mathcal{H}(G(\mathbb{R}))$. On a donc

$$f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}}(ag) = a^{\mu_0} f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}}(g) \quad \text{et} \quad f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}(ag) = a^{\mu_0} f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}(g)$$

quels que soient $a \in A_G(\mathbb{R})$ et $g \in G(\mathbb{R})$, et

$$\operatorname{tr} \pi(f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}}) = \int_{A_G(\mathbb{R})^0\backslash G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})} f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}}(g^{-1})\Theta_\pi(g)\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \cong \pi_\mu^{\mathrm{W}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$\operatorname{tr} \pi(f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}) = \int_{A_G(\mathbb{R})^0\backslash G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})} f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}(g^{-1})\Theta_\pi(g)\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi \cong \pi_\mu^{\mathrm{H}}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour toute représentation π de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ dont le caractère central est égal à $a \mapsto a^{\mu_0}$.

La fonction f_∞^G est par définition

$$f_\infty^G = -\frac{1}{2}(f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}} + f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}) \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R})). \tag{10.2}$$

Nous allons voir maintenant que cette fonction a les intégrales orbitales stables requises. Pour tout élément semi-simple de $G(\mathbb{R})$, on dispose de sa classe de conjugaison stable ; comme le groupe dérivé $G_{\mathrm{der}} = \mathrm{Sp}(4)$ est simplement connexe, c'est simplement l'ensemble des γ' dans $G(\mathbb{R})$ pour lesquels il existe $\overline{g} \in G(\mathbb{C})$ tel que $\gamma' = \overline{g}^{-1}\gamma\overline{g}$. Cette classe de conjugaison stable est une réunion finie de classes de conjugaison dans $G(\mathbb{R})$. Pour chaque $\gamma' \in G(\mathbb{R})$ stablement conjugué à γ, on note $G_{\gamma'}$ son centralisateur dans $G_\mathbb{R}$; c'est une forme intérieure de G_γ et, en particulier, toute mesure de Haar $\mathrm{d}\,g_\gamma$ sur $G_\gamma(\mathbb{R})$ induit une mesure de Haar $\mathrm{d}\,g_{\gamma'}$ sur $G_{\gamma'}(\mathbb{R})$. On note $e_\infty(G_{\gamma'})$ le signe de Kottwitz du groupe réductif connexe $G_{\gamma'}$. Rappelons que, pour tout groupe réductif I sur $\mathbb{R}$, Kottwitz a posé

$$e_\infty(I) = (-1)^{q(I)-q(I^*)}$$

où I^* est la forme intérieure quasi-déployée de I sur $\mathbb{R}$ et où $2q(I)$ et $2q(I^*)$ sont les dimensions (réelles) des espaces symétriques attachés aux revêtements simplement connexes des groupes dérivés I_{der} et $(I^*)_{\mathrm{der}}$ de I et I^* respectivement.

Ayant fixé arbitrairement $\mathrm{d}\,g_\gamma$, on dispose de l'intégrale orbitale stable

$$\mathrm{SO}_\gamma^G(f_\infty^G) = \sum_{\gamma'} e_\infty(G_{\gamma'}) \int_{G_{\gamma'}(\mathbb{R})\backslash G(\mathbb{R})} f_\infty^G(g^{-1}\gamma' g)\frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,g_{\gamma'}}$$

où γ' parcourt un système de représentants des classes de conjugaison dans $G(\mathbb{R})$ dans la classe de conjugaison stable de γ.

Proposition 10.3. — *Pour tout élément semi-simple $\mathbb{R}$-elliptique γ de $G(\mathbb{R})$ on a*

$$\mathrm{SO}_\gamma^G(f_\infty^G) = \frac{e_\infty(I)}{\mathrm{vol}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash I(\mathbb{R}), \frac{\mathrm{d}\,i}{\mathrm{d}\,a})}\,\mathrm{tr}(\gamma, V_\mu)$$

où I est une forme intérieure de G_γ telle que $A_{G,\mathbb{R}}\backslash I$ soit anisotrope sur $\mathbb{R}$ et où $\mathrm{d}\,i$ est la mesure de Haar induite par $\mathrm{d}\,g_\gamma$ sur $I(\mathbb{R})$.

En outre, pour tout élément semi-simple non $\mathbb{R}$-elliptique γ de $G(\mathbb{R})$ on a

$$\mathrm{SO}_\gamma^G(f_\infty^G) = 0.$$

□

11. L'homomorphisme de changement de base b_j^G

Le morphisme de changement de base

$$b_j^G : C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \longrightarrow C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p) \tag{11.1}$$

est induit, via l'isomorphisme de Satake, par la multiplication par j dans $X_*(T)$. En particulier, on a

$$b_j^G(\varphi_j)^\vee = p^{3j/2} \sum_{\nu\in W^G\cdot\nu_h} [j\nu].$$

Pour tout élément semi-simple de $G(\mathbb{Q}_p)$, on dispose de sa classe de conjugaison stable ; comme le groupe dérivé $G_{\mathrm{der}} = \mathrm{Sp}(4)$ est simplement connexe, c'est simplement l'ensemble des γ' dans $G(\mathbb{Q}_p)$ pour lesquels il existe $\overline{g} \in G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $\gamma' = \overline{g}^{-1}\gamma\overline{g}$. Cette classe de conjugaison stable est une réunion finie de classes de conjugaison dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Pour chaque $\gamma' \in G(\mathbb{Q}_p)$ stablement conjugué à γ, on note $G_{\gamma'}$ son centralisateur dans $G_{\mathbb{Q}_p}$; c'est une forme intérieure de G_γ et, en particulier, toute mesure de Haar $\mathrm{d}\, g_\gamma$ sur $G_\gamma(\mathbb{Q}_p)$ induit une mesure de Haar $\mathrm{d}\, g_{\gamma'}$ sur $G_{\gamma'}(\mathbb{Q}_p)$. On note $e_p(G_{\gamma'})$ le signe de Kottwitz du groupe réductif connexe $G_{\gamma'}$. Rappelons que, pour tout groupe réductif connexe I sur $\mathbb{Q}_p$, Kottwitz a posé

$$e_p(I) = (-1)^{r_p(I) - r_p(I^*)}$$

où I^* est la forme intérieure quasi-déployée de I sur $\mathbb{Q}_p$ et où $r_p(I)$ et $r_p(I^*)$ sont les $\mathbb{Q}_p$-rangs des groupes dérivés I_{der} et $(I^*)_{\mathrm{der}}$ de I et I^* respectivement.

Ayant fixé arbitrairement $\mathrm{d}\, g_\gamma$, on dispose de l'intégrale orbitale stable

$$\mathrm{SO}_\gamma^G(b_j^G(\varphi_j)) = \sum_{\gamma'} e_p(G_{\gamma'}) \int_{G_{\gamma'}(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)} b_j^G(\varphi_j)(g^{-1}\gamma' g) \frac{\mathrm{d}\, g}{\mathrm{d}\, g_{\gamma'}}$$

où γ' parcourt un système de représentants des classes de conjugaison dans $G(\mathbb{Q}_p)$ dans la classe de conjugaison stable de γ ($\mathrm{d}\, g$ est la mesure de Haar normalisée par $\mathrm{vol}(K_p, \mathrm{d}\, g) = 1$).

Comme G est (quasi-)déployé et que G_{der} est simplement connexe, pour tout δ dans $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ dont la norme $\mathcal{N}_j(\delta)$ est semi-simple, il existe $\gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ tel que γ et $\mathcal{N}_j(\delta)$ sont conjugués dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. La classe de conjugaison stable d'un tel γ ne dépend que de la classe de σ-conjugaison de δ dans $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ et G_δ^σ est une forme intérieure de G_γ sur $\mathbb{Q}_p$.

On a alors le cas particulier suivant du lemme fondamental pour le changement de base :

***Théorème 11.2* (Clozel [Cl], Labesse [Lab 1]).** — *Soit γ un élément semi-simple de $G(\mathbb{Q}_p)$. Alors*

$$\mathrm{SO}_\gamma^G(b_j^G(\varphi_j)) = \sum_\delta e_p(G_\delta^\sigma)\, \mathrm{TO}_\delta^G(\varphi_j)$$

où δ parcourt un système de représentants des classes de σ-conjugaison d'éléments de $G(\mathbb{Q}_{p^j})$ dont la norme est conjuguée à γ dans $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et où les mesures de Haar $\mathrm{d}\, g_\delta^\sigma$ sont induites par $\mathrm{d}\, g_\gamma$. □

12. L'expression $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{G}(f^{G})$

Le terme $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{G}(f^{G})$ intervenant dans l'expression stabilisée pour $\mathrm{Lef}(f^{p};j)$ est la partie $\mathbb{Q}$-elliptique de la formule des traces stable pour $(G, f^{G} = f_{\infty}^{G} f^{p} b_{j}^{G}(\varphi_{j}))$, c'est-à-dire

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{G}(f^{G}) = \sum_{\gamma} |(G_{\gamma}^{0}\backslash G_{\gamma})(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(G)\, \mathrm{SO}_{\gamma}^{G}(f^{G}) \tag{12.1}$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de conjugaison stable $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$.

Dans l'expression ci-dessus, $\tau(G)$ est le nombre de Tamagawa de G, c'est-à-dire le volume

$$\tau(G) = \mathrm{vol}\left(G(\mathbb{Q})A_{G}(\mathbb{R})^{0}\backslash G(\mathbb{A}), \frac{\mathrm{d}\, g_{\mathrm{can}}}{\mathrm{d}\, a}\right)$$

pour la mesure canonique $\mathrm{d}\, g_{\mathrm{can}}$ sur $G(\mathbb{A})$ et la mesure de Haar standard $\mathrm{d}\, a = x^{-1}\, \mathrm{d}\, x$ sur $A_{G}(\mathbb{R})^{0} = \mathbb{R}_{+}^{\times}$. Ce nombre intervient naturellement dans la formule ci-dessus à cause de la formule

$$|\mathcal{K}(I_{0}/F)| = \frac{\tau(G)}{\tau(I_{0})}.$$

Par définition, on a

$$\mathrm{SO}_{\gamma}^{G}(f^{G}) = \sum_{\gamma'} e(G_{\gamma'})\, \mathrm{O}_{\gamma'}^{G}(f^{G}), \text{ avec } \mathrm{O}_{\gamma'}^{G}(f^{G}) = \int_{G_{\gamma'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f^{G}(g^{-1}\gamma' g) \frac{\mathrm{d}\, g}{\mathrm{d}\, g_{\gamma'}}$$

où $\gamma' = (\gamma'_{v})_{v}$ parcourt un système de représentants des classes de $G(\mathbb{A})$-conjugaison d'éléments de $G(\mathbb{A})$ dont chaque composante locale γ'_{v} est stablement conjuguée à γ dans $G(\mathbb{Q}_{v})$, où

$$G_{\gamma'}(\mathbb{A}) = {\prod_{v}}' G_{\gamma'_{v}}(\mathbb{Q}_{v}),$$

où

$$e(G_{\gamma'}) = \prod_{v} e_{v}(G_{\gamma'_{v}}) \in \{\pm 1\}$$

et où on a fixé les mesures de la façon suivante. La mesure $\mathrm{d}\, g$ sur $G(\mathbb{A})$ est le produit $\mathrm{d}\, g = \mathrm{d}\, g_{\infty}\, \mathrm{d}\, g^{p}\, \mathrm{d}\, g_{p}$ où $\mathrm{d}\, g_{\infty}$ est la mesure qui sert à définir la fonction f_{∞}^{G}, où $\mathrm{d}\, g^{p}$ est la mesure sur $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^{p})$ qui donne le volume 1 à $K(N)^{p}$ et où $\mathrm{d}\, g_{p}$ est la mesure sur $G(\mathbb{Q}_{p})$ qui donne le volume 1 à K_{p}. Les mesures $\mathrm{d}\, g_{\gamma'}$ sont les mesures sur les centralisateurs $G_{\gamma'}(\mathbb{A})$ des éléments γ' dans $G(\mathbb{A})$ induites par la mesure canonique $\mathrm{d}\, g_{\gamma,\mathrm{can}}$ sur $G_{\gamma}(\mathbb{A})$.

***Lemme 12.2* (Kottwitz).** — *Pour notre groupe $G = \mathrm{GSp}(4)$ et notre fonction particulière f^{G}, on a simplement*

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{G}(f^{G}) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^{G}(f^{G}) := \sum_{\gamma} \tau(G_{\gamma})\, \mathrm{O}_{\gamma}^{G}(f^{G})$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de $G(\mathbb{Q})$-conjugaison d'éléments $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$.

Démonstration. — Comme $G = \mathrm{GSp}(4)$, le centralisateur G_γ de tout élément semi-simple $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ est connexe.

Comme la fonction cuspidale f_∞^G est stable et que $H^1(\mathbb{R}, G) = \{1\}$, on a

$$\mathrm{O}_\gamma^{G,\kappa}(f_\infty^G) = 0$$

pour tout tore maximal $T \subset G_{\mathbb{R}}$, tout $\gamma \in T_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ et tout $\kappa \in \mathcal{K}(T/\mathbb{R})$ non trivial. □

13. Le groupe endoscopique H

A équivalence près G admet un et un seul triplet endoscopique elliptique non trivial (H, s, η_0). Le groupe réductif H sur $\mathbb{Q}$ est égal à

$$H = \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)]$$

où $\mathrm{GL}(1)$ est plongé dans $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$ par $z \mapsto (zI_2, z^{-1}I_2)$, et son groupe dual est le groupe réductif complexe

$$\widehat{H} = \{(\widehat{g}_1, \widehat{g}_2) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{C}) \mid \det \widehat{g}_1 = \det \widehat{g}_2\}.$$

L'élément s de $\widehat{G} = \mathrm{GSp}(4,\mathbb{C})$ est la matrice diagonale

$$s = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1)$$

et l'isomorphisme

$$\eta_0 : \widehat{H} \xrightarrow{\sim} \widehat{G}_s^0 = \widehat{G}_s$$

de $\widehat{H}$ sur la composante neutre du centralisateur de s dans $\widehat{G}$ est donné par

$$\eta_0 : \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Le L-groupe de H est le produit direct ${}^{\mathrm{L}}H = \widehat{H} \times W_{\mathbb{Q}}$ et on prolonge η_0 en

$$\eta = \eta_0 \times \mathrm{Id} : {}^{\mathrm{L}}H = \widehat{H} \times W_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \widehat{G} \times W_{\mathbb{Q}} = {}^{\mathrm{L}}G.$$

On note S le tore maximal $\mathbb{Q}$-déployé

$$S = \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times S_2]$$

de H où S_2 est le tore maximal des matrices diagonales de $\mathrm{GL}(2)$. Ce tore est contenu dans le sous-groupe de Borel

$$B^H = \mathrm{GL}(1)\backslash[B_2 \times B_2]$$

de H où B_2 est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}(2)$. Si, pour $i = 1, 2$, on définit $\beta_i \in X^*(S)$ par

$$\beta_i(\mathrm{diag}(t_1', t_1''), \mathrm{diag}(t_2', t_2'')) = t_i'/t_i'',$$

on a

$$\begin{array}{ll} R^H & = R(H,S) = \{\pm\beta_1, \pm\beta_2\} \\ \cup & \\ R^{H+} & = R(B^H,S) = \{\beta_1,\beta_2\} \end{array}$$

et l'ensemble des racines simples $\Delta^H = \Delta(B^H,S)$ est simplement $\{\beta_1,\beta_2\}$. Le groupe de Weyl W^H de (H,S) admet la présentation

$$W^H = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1, \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1 \rangle$$

où σ_i est la réflexion associée à la racine β_i.

14. La fonction f_∞^H

Le tore dual de S est

$$\widehat{S} = \{((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \times (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \widehat{t}'_1\widehat{t}''_1 = \widehat{t}'_2\widehat{t}''_2\}$$

et on a un plongement naturel

$$\iota^H : \widehat{S} \hookrightarrow \widehat{H},\ ((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)) \longmapsto (\mathrm{diag}(\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), \mathrm{diag}(\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)).$$

On note $j : S \xrightarrow{\sim} T$ l'unique isomorphisme tel que

$$\eta_0 \circ \iota^H \circ \widehat{j} = \iota.$$

On a

$$j(\mathrm{diag}(t'_1, t''_1), \mathrm{diag}(t'_2, t''_2)) = (t'_1t'_2, t'_1t''_2, t''_1t'_2, t''_1t''_2)$$

et j induit le plongement

$$R^H \hookrightarrow R$$

qui envoie $\pm\beta_1$ sur $\pm(\alpha_1+\alpha_2)$ et $\pm\beta_2$ sur $\pm\alpha_1$, et le plongement

$$W^H \hookrightarrow W$$

qui envoie σ_1 sur σ et σ_2 sur $\varepsilon_1\varepsilon_2\sigma$.

Soit Φ_μ^H un système de représentants des classes de $\widehat{H}$-conjugaison de paramètres de Langlands

$$\varphi^H : W_\mathbb{R} \longrightarrow {}^{\mathrm{L}}H$$

tels que $\eta \circ \varphi^H$ soit $\widehat{G}$-conjugué au paramètre φ_μ introduit précédemment. On peut prendre

$$\Phi_\mu^H = \{\varphi_\mu^H, \widetilde{\varphi}_\mu^H\}$$

où φ_μ^H et $\widetilde{\varphi}_\mu^H$ envoient $z \in \mathbb{C}^\times = W_\mathbb{C} \subset W_\mathbb{R}$ sur

$$\left(\mathrm{diag}\left(\frac{z^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}\right), \mathrm{diag}\left(\frac{z^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}\right)\right) \times z$$

et

$$\left(\mathrm{diag}\left(\frac{z^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1-\mu_2+1}}{|z|^{\mu_1-\mu_2+1}}|z|^{\mu_0}\right), \mathrm{diag}\left(\frac{z^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}, \frac{\overline{z}^{\mu_1+\mu_2+3}}{|z|^{\mu_1+\mu_2+3}}|z|^{\mu_0}\right)\right) \times z$$

et $\tau \in W_{\mathrm{R}}$ sur

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\mu_1+\mu_2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\mu_1} \\ (-1)^{\mu_2+1} & 0 \end{pmatrix}\right) \times \tau$$

et

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\mu_1} \\ (-1)^{\mu_2+1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{\mu_1+\mu_2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \times \tau$$

respectivement (on rappelle que $\mu_1 + \mu_2 \equiv \mu_0 \pmod 2$).

Considérons le tore maximal elliptique

$$T_{\mathrm{GL}(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x^2 + y^2 \neq 0 \right\} \subset \mathrm{GL}(2).$$

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, notons σ_n l'unique représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ dont le caractère Θ_{σ_n} est donné sur l'ouvert $T_{\mathrm{GL}(2),\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ des éléments réguliers de $T_{\mathrm{GL}(2)}(\mathbb{R})$ par la fonction lisse

$$e^x \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \longmapsto -e^{(n-1)x} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}.$$

On vérifie que σ_n a le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation irréductible de dimension finie $\mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. On en déduit que la représentation

$$\sigma_n(\lambda) = \sigma_{n,\lambda} := |\det|^{\lambda} \sigma_n$$

de $\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ admet pour paramètre de Langlands

$$\begin{aligned} W_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \times W_{\mathbb{R}} = {}^{\mathrm{L}}\mathrm{GL}(2) \\ z &\longmapsto \mathrm{diag}\left(\frac{z^n}{|z|^n}|z|^{2\lambda+n-1}, \frac{\overline{z}^n}{|z|^n}|z|^{2\lambda+n-1}\right) \times z \\ \tau &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \times \tau \end{aligned}$$

pour tout entier μ et tout nombre complexe λ. (La conjugaison par $\mathrm{diag}(1, (-1)^{\mu}) \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ ne change pas le paramètre.)

Par suite, le L-paquet $\Pi(\varphi_\mu^H)$ (resp. $\Pi(\widetilde{\varphi}_\mu^H)$) est constitué d'une et d'une seule classe d'isomorphie de représentations irréductibles de la série discrète, à savoir

$$\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-2}{2}\right) \otimes \sigma_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2}\right)$$

(resp.

$$\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2}\right) \otimes \sigma_{\mu_1+\mu_2+3}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-2}{2}\right)).$$

Pour chaque entier $n \geqslant 1$, soit $f_n : \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ un pseudo-coefficient pour la représentation irréductible σ_n de la série discrète de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. La fonction f_n est lisse, à support compact modulo le centre $\mathbb{R}^\times$ de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$-finie à droite et à gauche, et la fonction

$$g \longmapsto f_n(\lambda)(g) := |\det g|^{\lambda} f_n(g)$$

est un pseudo-coefficient de $\sigma_n(\mu;\lambda)$. Avec ces notations,

$$h(\varphi_\mu^H) = f_{\mu_1+\mu_2+3}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-2}{2}\right) \otimes f_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2}\right)$$

(resp.

$$h(\widetilde{\varphi}_\mu^H) = f_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2}\right) \otimes f_{\mu_1+\mu_2+3}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-2}{2}\right))$$

est un pseudo-coefficient de l'unique représentation du L-paquet $\Pi(\varphi_\mu^H)$ (resp. $\Pi(\widetilde{\varphi}_\mu^H)$), et on peut prendre pour fonction f_∞^H le combinaison linéaire

$$f_\infty^H = (-1)^3[h(\varphi_\mu^H) - h(\widetilde{\varphi}_\mu^H)].$$

(On vérifie que $\langle \mu_h, s\rangle = 1$ et que $\det \omega_*(\varphi_\mu^H) = 1$ et $\det \omega_*(\widetilde{\varphi}_\mu^H) = -1$ avec les notations de Kottwitz).

15. La fonction h^p

Pour chaque nombre premier $q \neq p$, soit Δ_q le facteur de transfert de Langlands et Shelstad pour (H, s, η) sur $\mathbb{Q}_q$ normalisé par les structures entières de G et H sur $\mathbb{Z}_q$ (Hales).

La fonction $h^p : H(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p) \to \mathbb{C}$ est n'importe quelle fonction à support compact telle que, pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ semi-simple et (G,H)-régulier, on ait

$$\mathrm{SO}_{\gamma_H}^H(h^p) = \sum_\gamma \Big(\prod_{q\neq p} \Delta_q(\gamma_{H,q},\gamma_q) e_q(G_{\gamma_q})\Big) \mathrm{O}_\gamma^G(f^p)$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$-conjugaison des éléments semi-simples de $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^p)$ qui proviennent de γ_H et où G_{γ_q} est le centralisateur dans $G_{\mathbb{Q}_q}$ de la composante γ_q de γ en q.

Bien sûr l'existence d'une telle fonction h^p suppose que, pour tout nombre premier $q \neq p$ on dispose de l'hypothèse suivante, et donc du transfert d'après Waldspurger (*cf.* [**5**]).

Hypothèse 15.1 **(Lemme fondamental pour l'unité de l'algèbre de Hecke)**
Pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_q)$ semi-simple et (G,H)-régulier, on a

$$\mathrm{SO}_{\gamma_H}^H(1_{K_q^H}) = \sum_\gamma \Delta_q(\gamma_H,\gamma) e_q(G_\gamma)\, \mathrm{O}_\gamma^G(1_{K_q})$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de $G(\mathbb{Q}_q)$-conjugaison des éléments semi-simples de $G(\mathbb{Q}_q)$ qui proviennent de γ_H. □

16. L'homomorphisme de changement de base b_j^H

Considérons le $\mathbb{Q}_p$-schéma en groupes

$$G_j = \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p}(G_{\mathbb{Q}_{p^j}})$$

de L-groupe

$$ {}^{\mathrm{L}}G_j = \widehat{G}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p), $$

où le produit semi-direct est défini par la règle

$$ \sigma \cdot (\widehat{g}_1, \ldots, \widehat{g}_j) = (\widehat{g}_2, \ldots, \widehat{g}_j, \widehat{g}_1) \cdot \sigma $$

pour σ l'élément de Frobenius de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$. Choisissons arbitrairement des éléments $s_1, \ldots, s_j$ dans le centralisateur $\{\mathrm{diag}(a, a', a', a) \mid a, a' \in \mathbb{C}\}$ de $\eta_0(\widehat{H})$ dans $\widehat{G}$ de telle sorte que

$$ s_1 \cdots s_j = s = \mathrm{diag}(1, -1, -1, 1). $$

Alors la classe de $\widehat{G}^j$-conjugaison de l'homomorphisme de L-groupes

$$ \widetilde{\eta} : {}^{\mathrm{L}}H = \widehat{H} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \widehat{G}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) = {}^{\mathrm{L}}G $$

qui envoie $(\widehat{h}, 1)$ sur $((\eta_0(\widehat{h}), \ldots, \eta_0(\widehat{h})), 1)$ et $(1, \sigma)$ sur $((s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_j^{-1}), \sigma)$ ne dépend pas des choix des $s_1, \ldots, s_j$ et induit, via les isomorphismes de Satake

$$ C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_*(T)]^{W^G} \cong \mathbb{C}[\widehat{T}/W^G] $$

et

$$ C_{\mathrm{c}}(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[X_*(S)]^{W^H} \cong \mathbb{C}[\widehat{S}/W^H], $$

l'homomorphisme d'algèbres de Hecke

$$ b_j^H : C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_{p^j})//K_{p^j}) \longrightarrow C_{\mathrm{c}}(H(\mathbb{Q}_p)//K_p^H). $$

Concrètement, compte tenu des plongements $\iota : \widehat{T} \hookrightarrow \widehat{G}$ et $\iota^H : \widehat{S} \hookrightarrow \widehat{H}$, $\widetilde{\eta}$ induit un homomorphisme $\widehat{S} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \to \widehat{T}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p)$ qui, composé avec l'homomorphisme

$$ \widehat{T}^j \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \widehat{T} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p), \ ((\widehat{t}_1, \ldots, \widehat{t}_j), \sigma^i) \longmapsto (\widehat{t}_1 \cdots \widehat{t}_j, \sigma^i), $$

dual du plongement diagonal de $T_{\mathbb{Q}_p}$ dans $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p}(T_{\mathbb{Q}_{p^j}})$, n'est autre que l'homomorphisme

$$ \widehat{S} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) \longrightarrow \widehat{T} \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p^j}/\mathbb{Q}_p) $$

qui envoie $(((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_2, \widehat{t}''_2)), 1)$ sur la classe de $((\widehat{t}'^j_1/\widehat{t}''^j_2, \widehat{t}''^j_2, \widehat{t}''^j_1, 1), 1)$ et $(1, \sigma)$ sur la classe de $((-1, -1, 1, 1), \sigma)$, et b_j^H est induit par la restriction de ce dernier homomorphisme à $\widehat{S} \times \{\sigma\}$. En particulier, on a

$$ b_j^H(\varphi_j)^\vee((\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1), (\widehat{t}'_1, \widehat{t}''_1)) \equiv p^{3j/2}(\widehat{t}'^j_1 + \widehat{t}''^j_1 - \widehat{t}'^j_2 - \widehat{t}''^j_2) \ (\mathrm{mod}\ (\widehat{t}'^j_1\widehat{t}''^j_1 - \widehat{t}'^j_2\widehat{t}''^j_2)). $$

***Hypothèse 16.1* (Lemme fondamental tordu).** — Pour tout $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_p)$ semi-simple et (G, H)-régulier, on a

$$ \mathrm{SO}^H_{\gamma_H}(b_j^H(\varphi_j)) = \sum_\delta \langle \alpha_p(\gamma_0; \delta), s\rangle \Delta_p(\gamma_H, \gamma_0) e_p(G^\sigma_\delta)\, \mathrm{TO}^G_\delta(\varphi_j) $$

où γ_0 est un élément fixé de $G(\mathbb{Q}_p)$ qui provient de γ_H et où la somme porte sur un ensemble de représentants des classes de σ-conjugaison d'éléments $\delta \in G(\mathbb{Q}_{p^j})$ dont la norme $\mathcal{N}_j(\delta)$ est conjuguée à γ_0 sous $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

17. L'expression $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H)$

Le terme $\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H)$ intervenant dans l'expression stabilisée pour $\mathrm{Lef}(f^p;j)$ est la partie $\mathbb{Q}$-elliptique et (G,H)-régulière de la formule des traces stable pour $(H, f^H = f_\infty^H h^p b_j^H(\varphi_j))$, c'est-à-dire

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H) = \sum_{\gamma_H} |(H_{\gamma_H}^0 \backslash H_{\gamma_H})(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(H)\, \mathrm{SO}_{\gamma_H}^H(f^H)$$

où γ_H parcourt un système de représentants des classes de conjugaison stable semi-simples, $\mathbb{Q}$-elliptiques et (G,H)-régulières dans $H(\mathbb{Q})$.

En fait, la théorie de l'endoscopie pour le $\mathbb{Q}$-groupe réductif H est triviale. Plus précisément :

Lemme 17.1. — *Pour tout corps local ou global F de caractéristique nulle et pour tout $\gamma_H \in H(F)$ semi-simple, on a*

$$\mathcal{K}(H_{\gamma_H}^0/F) = \{1\}.$$

Démonstration. — On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(1) \longrightarrow H \longrightarrow \mathrm{PGL}(2) \times \mathrm{PGL}(2) \longrightarrow 1$$

et la théorie de l'endoscopie pour $\mathrm{PGL}(2)$ est triviale. □

On a donc

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^{*}(f^H) = \sum_{\gamma_H} |H_{\gamma_H}^0(\mathbb{Q}) \backslash H_{\gamma_H}(\mathbb{Q})|^{-1} \tau(H_{\gamma_H}^0)\, \mathrm{O}_{\gamma_H}^H(f^H),$$

où γ_H parcourt un système de représentants des classes de conjugaison semi-simples, $\mathbb{Q}$-elliptiques et (G,H)-régulières dans $H(\mathbb{Q})$.

Soit k un corps caractéristique nulle. On vérifie facilement qu'un élément semi-simple

$$\gamma_H = k^\times \cdot (\gamma_1, \gamma_2) \in H(k)$$

est (G,H)-régulier si et seulement si

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1''} \neq \frac{\alpha_2'}{\alpha_2''} \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_1'}{\alpha_1''} \neq \frac{\alpha_2''}{\alpha_2'}$$

où α_i', α_i'' sont les valeurs propres de γ_i dans une clôture algébrique de k. On en déduit :

Lemme 17.2. — *On a*

$$\mathrm{O}_{\gamma_H}^H(f_\infty^H) = 0$$

pour tout élément semi-simple $\gamma_H \in H(\mathbb{R})$ qui n'est pas (G,H)-régulier.

Démonstration. — Cela résulte de la descente de Harish-Chandra si γ_H n'est pas $\mathbb{R}$-elliptique. On peut donc supposer que $\gamma_H = \mathbb{R}^\times \cdot (\gamma_1, \gamma_2)$ est $\mathbb{R}$-elliptique, c'est-à-dire que γ_1, γ_2 sont $\mathbb{R}$-elliptiques semi-simples dans $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Pour tout $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ qui est $\mathbb{R}$-elliptique semi-simple, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_\gamma^{\mathrm{GL}(2)}(f_n(\lambda)) &= |\det\gamma|^\lambda\, \mathrm{O}_\gamma^{\mathrm{GL}(2)}(f_n)\\ &= -|\det\gamma|^\lambda\, \mathrm{tr}(\gamma, \mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2))\\ &= -|\alpha'\alpha''|^\lambda \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha'-\alpha''} = -(\alpha'\alpha'')^\lambda \frac{\alpha'^n - \alpha''^n}{\alpha'-\alpha''}\end{aligned}$$

où $\alpha', \alpha'' = \overline{\alpha}' \in \mathbb{C}$ sont les deux valeurs propres de γ. Par suite, $\mathrm{O}_{\gamma_H}^H(f_\infty^H)$ est égal au produit de

$$\frac{(\alpha_1'\alpha_1''\alpha_2'\alpha_2'')^{(\mu_0-\mu_1-\mu_2)/2}}{(\alpha_1'-\alpha_1'')(\alpha_2'-\alpha_2'')}$$

par la différence de

$$\begin{aligned}(\alpha_1'\alpha_1'')^{\mu_2}(\alpha_2'\alpha_2'')^{-1}(\alpha_1'^{\mu_1-\mu_2+1} - \alpha_1''^{\mu_1-\mu_2+1})(\alpha_2'^{\mu_1+\mu_2+3} - \alpha_2''^{\mu_1+\mu_2+3})\\ -(\alpha_1'\alpha_1'')^{-1}(\alpha_2'\alpha_2'')^{\mu_2}(\alpha_1'^{\mu_1+\mu_2+3} - \alpha_1''^{\mu_1+\mu_2+3})(\alpha_2'^{\mu_1-\mu_2+1} - \alpha_2''^{\mu_1-\mu_2+1}).\end{aligned}$$

Mais, comme on suppose que γ_H n'est pas (G,H) régulier, on a

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1''} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2''} \text{ ou } \frac{\alpha_1'}{\alpha_1''} = \frac{\alpha_2''}{\alpha_2'}$$

et cette différence est nulle. □

Par suite, on a simplement

$$\mathrm{ST}_{\mathrm{e}}^{H,*}(f^H) = \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^H(f^H) = \sum_{\gamma_H} |H_{\gamma_H}^0(\mathbb{Q})||H_{\gamma_H}(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(H_{\gamma_H}^0)\,\mathrm{O}_{\gamma_H}^H(f^H)$$

où γ_H parcourt un système de représentants des classes de conjugaison $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $H(\mathbb{Q})$.

PARTIE IV
EXPRESSION SPECTRALE

18. Un cas particulier de la formule des traces d'Arthur-Selberg

Soient G un groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}$ et M_0 un sous-groupe de Levi minimal de G. Pour simplifier, on suppose ici que G est déployé sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que $M_0 = T$ est un tore maximal de G qui est déployé sur $\mathbb{Q}$. Pour que le résultat principal de cette section ne soit pas vide, on suppose de plus que $G_{\mathbb{R}}$ admet un tore maximal elliptique sur $\mathbb{R}$.

On utilise librement les notations d'Arthur ([**Ar1**] à [**Ar8**]). En particulier, on a l'ensemble $\mathcal{L}$ des sous-groupes de Levi de G contenant T et, pour chaque $M \in \mathcal{L}$, l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ des sous-groupes paraboliques P de G qui admettent M comme facteur de Levi. On note $\mathcal{P}$ la réunion disjointe des $\mathcal{P}(M)$ et pour chaque $P \in \mathcal{P}$,

$P = M_P N_P$ son unique décomposition de Levi telle que $M_P \in \mathcal{L}$. Pour chaque $M \in \mathcal{L}$, on a aussi le tore (déployé) maximal A_M contenu dans le centre de M et les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\mathfrak{a}_M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(M), \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_M^G = \mathrm{Ker}(\mathfrak{a}_M \longrightarrow \mathfrak{a}_G)$$

où la projection $(\cdot)_G : \mathfrak{a}_M \to \mathfrak{a}_G$ est induite par la flèche de restriction $X^*(G) \to X^*(M)$.

La flèche de restriction $X^*(M) \to X^*(A_M)$ induit un isomorphisme

$$\mathbb{R} \otimes X_*(A_M) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_M$$

et l'injection $\mathfrak{a}_G \cong \mathbb{R} \otimes X_*(A_G) \hookrightarrow \mathbb{R} \otimes X_*(A_M) \cong \mathfrak{a}_M$ scinde l'extension $0 \to \mathfrak{a}_M^G \to \mathfrak{a}_M \to \mathfrak{a}_G \to 0$.

On fixe un sous-groupe compact maximal

$$K_{\max} = \prod_v K_{\max,v} = K_{\max,\infty} K_{\max,\mathrm{f}}$$

de $G(\mathbb{A})$ qui est admissible relativement à T. Pour chaque $P \in \mathcal{P}$, on a l'application

$$H_P : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathfrak{a}_{M_P}$$

définie par $H_P(g) = H_{M_P}(m)$ pour tout $g = mnk \in M_P(\mathbb{A}) N_P(\mathbb{A}) K_{\max} = G(\mathbb{A})$ et

$$e^{H_{M_P}(m)(\chi)} = \prod_v |\chi(m_v)|_v, \ \forall \chi \in X^*(M_P), \ \forall m \in M_P(\mathbb{A}).$$

Pour tout ensemble fini S de places (resp. de nombres premiers), on a aussi la restriction

$$H_{P,S} : G(\mathbb{Q}_S) \longrightarrow \mathfrak{a}_{M_P} \ (\text{resp. } H_{P,\mathrm{f}}^S : G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^S) \longrightarrow \mathfrak{a}_{M_P})$$

de H_P à $G(\mathbb{Q}_S)$ (resp. $G(\mathbb{A}_\mathrm{f}^S)$).

Pour tout $M \in \mathcal{L}$, Arthur pose

$$\mathfrak{a}_{M,q} = H_{M,q}(M(\mathbb{Q}_q)) \subset \mathfrak{a}_M$$

quel que soit le nombre premier q et

$$\mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}} = \bigoplus_q \mathfrak{a}_{M,q},$$

et il définit $s : \mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}} \to \mathfrak{a}_M$ par

$$s(X) = \sum_q X_q.$$

On fixe un caractère $\xi : A_G(\mathbb{R})^0 \to \mathbb{C}^\times$ et on note $\mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \xi)$ l'espace des fonctions $f_\infty : G(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ lisses, $K_{\max,\infty}$-finies à droite et à gauche, de $A_G(\mathbb{R})^0$-caractère ξ, c'est-à-dire telles que $f_\infty(ag) = \xi(a) f_\infty(g)$, $\forall a \in A_G(\mathbb{R})^0, \forall g \in G(\mathbb{R})$, et à support compact modulo $A_G(\mathbb{R})^0$.

Le *terme constant* $f_{\infty,P}$ de $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\xi)$ le long d'un parabolique $P = M_P N_P \in \mathcal{P}$ est la fonction $f_{\infty,P} : M_P(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_{\infty,P}(m) = \delta_{P(\mathbb{R})}(m)^{1/2} \int_{K_{\max,\mathbb{R}}} \int_{N_P(\mathbb{R})} f_\infty(k^{-1}mnk)\,\mathrm{d}\,n\,\mathrm{d}\,k.$$

Définition 18.1. — Une fonction $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\xi)$ est dite *très cuspidale* si elle est invariante par $K_{\max,\infty}$-conjugaison et si, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P \subsetneq G$, on a

$$f_{\infty,P}(m) = 0,\ \forall\, m \in M_P(\mathbb{R}).$$

Pour tout $M \in \mathcal{L}$, on note $\Pi_2(M(\mathbb{R}),\xi) \subset \Pi_{\mathrm{temp}}(M(\mathbb{R}),\xi)$ des systèmes de représentants des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $M(\mathbb{R})$ de $A_G(\mathbb{R})^0$-caractère ξ, c'est-à-dire dont la restriction du caractère central à $A_G(\mathbb{R})^0$ est égale à ξ, qui sont essentiellement de carré intégrable et essentiellement tempérées respectivement.

Une fonction très cuspidale $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\xi)$ est automatiquement *cuspidale* au sens où, pour tout $P \in \mathcal{P}$, $P \subsetneq G$, on a

$$\mathrm{tr}\,\pi_\infty(f_{\infty,P}) = \int_{A_G(\mathbb{R})^0\backslash M_P(\mathbb{R})} f_{\infty,P}(m^{-1})\Theta_{\pi_\infty}(m)\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}\,a} = 0$$

quel que soit $\pi_\infty \in \Pi_{\mathrm{temp}}(M_P(\mathbb{R}),\xi)$.

Une fonction cuspidale $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\xi)$ est dite *stable* si de plus sa trace est supportée par la série discrète, c'est-à-dire si

$$\mathrm{tr}\,\pi_\infty(f_\infty) = 0$$

pour tout $\pi_\infty \in \Pi_{\mathrm{temp}}(G(\mathbb{R}),\xi) \smallsetminus \Pi_2(G(\mathbb{R}),\xi)$, et si

$$\mathrm{tr}\,\pi'_\infty(f_\infty) = \mathrm{tr}\,\pi''_\infty(f_\infty)$$

pour tous $\pi'_\infty, \pi''_\infty \in \Pi_2(G(\mathbb{R}),\xi)$ qui sont dans un même paquet de Langlands.

Arthur a introduit des distributions

$$\mathcal{H}(G(\mathbb{R}),\xi) \longrightarrow \mathbb{C},\ f_\infty \longmapsto {}^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi_\infty, X, f_\infty),$$

pour $M \in \mathcal{L}$, $\pi_\infty \in \Pi_{\mathrm{temp}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathfrak{a}_M$. Ces distributions sont très compliquées, mais leurs restrictions aux fonctions cuspidales stables peuvent se calculer à l'aide des formules de Harish-Chandra pour les caractères des séries discrètes.

Plus précisément, pour tout $M \in \mathcal{L}$ et tout $\rho_\infty \in \Pi_2(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R}))$ définissons le caractère tronqué $\Phi_M^G(\rho_\infty) : M(\mathbb{R}) \cap G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \cap G(\mathbb{R})^1 \to \mathbb{C}$ par

$$\Phi_M^G(\rho_\infty,\gamma) = \begin{cases} |D^G(\gamma)|^{\frac{1}{2}}\Theta_{\rho_\infty}(\gamma) & \text{si } \gamma \text{ est } \mathbb{R}\text{-elliptique dans } M(\mathbb{R}), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

On rappelle qu'Arthur note $G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ l'ouvert des éléments réguliers de $G(\mathbb{R})$, $G(\mathbb{R})^1 = \mathrm{Ker}(H_{G,\infty} : G(\mathbb{R}) \to \mathfrak{a}_G)$ et

$$D^G(\gamma) = \det(1 - \mathrm{Ad}(\gamma), \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{z}_\gamma)$$

où $\mathfrak{z}_\gamma$ est l'algèbre de Lie du centralisateur de γ dans $M_\mathbb{R}$.

***Proposition 18.2* (Arthur [Ar7]).** — *Soit $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \xi)$ une fonction cuspidale dont la trace est supportée par $\Pi_2(G(\mathbb{R}), \xi)$. Alors,*

$$^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi_\infty, X, f_\infty) \neq 0$$

seulement si $\pi_\infty \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$. De plus, si tel est le cas, on a

$$^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi_\infty, X, f_\infty) = \sum_{\sigma_\infty} {}^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi_\infty, X, \sigma_\infty) \operatorname{tr} \sigma_\infty(f_\infty)$$

où σ_∞ parcourt $\Pi_2(G(\mathbb{R}), \xi)$ et les expressions

$$^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi_\infty, X, \sigma_\infty)$$

pour $\sigma_\infty \in \Pi_2(G(\mathbb{R}), \xi)$ fixé et M, π_∞ et X variables sont uniquement déterminées par les relations de récurrence suivantes :

(i) *on a*

$$^{\mathrm{c}}D_G^G(\pi_\infty, X, \sigma_\infty) = \begin{cases} e^{-\xi(X)} & si\ \pi_\infty = \sigma_\infty(-\xi) := e^{-\xi(H_{G,\infty}(\cdot))}\sigma_\infty, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

où le caractère $\xi : A_G(\mathbb{R})^0 \to \mathbb{C}^\times$ est vu comme un élément de $(\mathfrak{a}_G)^*_\mathbb{C}$,

(ii) *pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, tout $\gamma^1 \in M(\mathbb{R})^1$ et tout $X \in \mathfrak{a}_M$ tels que $\gamma^1 e^X \in G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$, on a*

$$\sum_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ M \subset L \subset G}} (-1)^{\dim(\mathfrak{a}_L^G)} \sum_{\rho_\infty} \Phi_M^L(\rho_\infty^\vee, \gamma^1 e^{X^L}) {}^{\mathrm{c}}D_L^G(\rho_\infty, X_L, \sigma_\infty) = 0$$

où ρ_∞ parcourt $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0 \backslash L(\mathbb{R}))$, où $\rho_\infty^\vee$ est la représentation contragrédiente de ρ_∞ et où on a décomposé X en $X_L + X^L$ dans $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_L \oplus \mathfrak{a}_M^L$. □

D'après les formules de Harish-Chandra, une fois fixé un sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{P}(M)$ et donc une chambre de Weyl ouverte

$$\mathfrak{a}_P^+ = \{X \in \mathfrak{a}_M \mid \alpha(X) > 0,\ \forall\, \alpha \text{ racine de } A_M \text{ dans } P\},$$

on peut écrire la restriction du caractère tronqué $\Phi_M^G(\rho_\infty, \gamma)$ à l'ouvert

$$\{\gamma = \gamma^1 e^{X^G} \mid \gamma^1 \in M(\mathbb{R})^1,\ X^G = H_{M,\infty}(\gamma) \in \mathfrak{a}_P^+ \cap \mathfrak{a}_M^G\}$$

de $M(\mathbb{R}) \cap G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}) \cap G(\mathbb{R})^1$, sous la forme d'une combinaison linéaire à support fini

$$\Phi_M^G(\rho_\infty, \gamma^1 e^{X^G}) = \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^G)^*_\mathbb{C}} \phi_P^G(\rho_\infty, \gamma^1, \Lambda) e^{-\Lambda(X^G)}.$$

Bien sûr, on peut dans ce qui précède remplacer G par un sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}$ contenant M. On en déduit qu'il existe des constantes

$$^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, f_\infty) = \sum_{\sigma_\infty} {}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, \sigma_\infty) \operatorname{tr} \sigma_\infty(f_\infty)$$

où σ_∞ parcourt $\Pi_2(G(\mathbb{R}),\xi)$, telles que

$$^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi'_\infty, X, \sigma_\infty) = \sum_{\Lambda\in(\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}} {}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, \sigma_\infty)e^{-\Lambda(X)}$$

quel que soit $X \in \mathfrak{a}_P^+$.

Remarque 18.3. — La somme ci-dessus est finie. En effet, pour chaque $M \in \mathcal{L}$ pour lequel c'est possible, choisissons un tore maximal $\mathbb{R}$-elliptique T_M de $M_{\mathbb{R}}$ de telle sorte que, pour tous $M \subset L$ dans $\mathcal{L}$, on ait $T_M = A_{M,\mathbb{R}}(T_M \cap T_L)$ quand cela a un sens.

Soit $\mathfrak{t}_M \subset \mathfrak{m}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie de T_M contenue dans celle de $M_{\mathbb{R}}$. Choisissons un élément $x \in G(\mathbb{C})$, qui commute à $T_M(\mathbb{C}) \cap T_G(\mathbb{C})$, tel que $xT_G(\mathbb{C})x^{-1} = T_M(\mathbb{C})$. La conjugaison par x induit un isomorphisme du groupe de Weyl $\Omega_G = \mathrm{N}_{G(\mathbb{C})}(T_G(\mathbb{C}))/T_G(\mathbb{C})$ sur le groupe de Weyl $\mathrm{N}_{G(\mathbb{C})}(T_M(\mathbb{C}))/T_M(\mathbb{C})$ et l'isomorphisme $(\mathfrak{t}_M)^*_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} (\mathfrak{t}_G)^*_{\mathbb{C}}$ dual de $\mathrm{Ad}(x)$ est équivariant pour les actions naturelles de ces groupes de Weyl.

A chaque représentation irréductible admissible σ_∞ de $G(\mathbb{R})$ est attaché un caractère infinitésimal χ_{σ_∞} qui est une orbite dans $(\mathfrak{t}_G)^*_{\mathbb{C}}$ sous l'action de Ω_G. Pour tout $M \in \mathcal{L}$, on note encore $\chi_{\sigma_\infty} \subset (\mathfrak{t}_M)^*_{\mathbb{C}}$ l'orbite sous $\mathrm{N}_{G(\mathbb{C})}(T_M(\mathbb{C}))/T_M(\mathbb{C})$ correspondante.

On a

$$T_M(\mathbb{R}) = A_M(\mathbb{R})^0(T_M(\mathbb{R}) \cap K_{\max,\infty})$$

où $T_M(\mathbb{R}) \cap K_{\max,\infty}$ est un groupe de Lie compact. On a donc une décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_M = \mathfrak{a}_M \oplus \mathfrak{t}_M^{\mathrm{anis}}$ et par dualité une décomposition $(\mathfrak{t}_M)^*_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{t}_M^{\mathrm{anis}})^*_{\mathbb{C}}$. Pour chaque représentation irréductible admissible π'_∞ de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$, le caractère infinitésimal $\chi_{\pi'_\infty}$ peut être vu comme une orbite dans $(\mathfrak{t}_M^{\mathrm{anis}})^*_{\mathbb{C}}$ sous l'action du groupe de Weyl $\Omega_M = \mathrm{N}_{M(\mathbb{C})}(T_M(\mathbb{C}))/T_M(\mathbb{C}) \subset \mathrm{N}_{G(\mathbb{C})}(T_M(\mathbb{C}))/T_M(\mathbb{C})$.

Avec ces notations, on vérifie que ${}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi_\infty, \Lambda, \sigma_\infty) \neq 0$ seulement si

$$(\Lambda + \chi_{\pi_\infty}) \cap \chi_{\sigma_\infty} \neq \varnothing$$

dans $(\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{t}_M^{\mathrm{anis}})^*_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{t}_M)^*_{\mathbb{C}}$. □

On note $C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ l'espace des fonctions $f : G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \to \mathbb{C}$ localement constantes et à support compact.

Le *terme constant* f_P de $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ le long d'un parabolique $P \in \mathcal{P}$ est la fonction $f_P : M_P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_P(m) = \delta_{P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})}(m)^{1/2} \int_{K_{\max,\mathrm{f}}} \int_{N_P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})} f(k^{-1}mnk)\,\mathrm{d}\,n\,\mathrm{d}\,k.$$

Définition 18.4. — Soit $C \in \mathbb{R}_+$. Une fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ est dite *fortement C-régulière* si, pour tout $P \in \mathcal{P}$. $P \subsetneq G$, et tout $m \in M_P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ tels que

$$f_P(m) \neq 0,$$

on a

$$|\alpha(H_{M,\mathrm{f}}(m))| > C$$

quel que soit la racine α de A_M dans G.

Le théorème suivant se déduit facilement de la formule des traces d'Arthur sous sa forme non invariante (*cf.* [**Ar3**] et [**Ar6**]).

Théorème 18.5. — *Soient $f_\infty \in \mathcal{H}(G(\mathbb{R}), \xi)$ une fonction très cuspidale stable. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que du support de f_∞ et ayant la propriété suivante. Pour toute fonction $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ qui est fortement C-régulière, on a*

$$\begin{aligned}\sum_\gamma |G_\gamma^0(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma(\mathbb{Q})|^{-1}\tau(G_\gamma^0)\, \mathrm{O}_\gamma^G(f_\infty f)&\\ = \sum_{M\in\mathcal{L}} \frac{|W^M|}{|W^G|} \sum_\pi m_{\mathrm{disc}}^M(\pi) \sum_{\pi'_\infty} a_\infty^M(\pi_\infty, \pi'_\infty)&\\ \times \sum_{P\in\mathcal{P}(M)} \sum_{\Lambda\in(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*} {}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, f_\infty) \sum_{\substack{X\in\mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}}\\ s(X)\in\mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(s(X))} f_M(\pi_{\mathrm{f}}, X)&\end{aligned}$$

où γ parcourt un système de représentants des classes de $G(\mathbb{Q})$-conjugaison d'éléments $\mathbb{Q}$-elliptiques semi-simples dans $G(\mathbb{Q})$, où π parcourt $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A}))$ et π'_∞ parcourt $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, et où les notations sont explicitées ci-dessous.

On a fixé arbitrairement une mesure de Haar $\mathrm{d}\,g$ sur $G(\mathbb{A})$ et on a utilisé cette mesure dans les deux membres de la formule des traces ci-dessus. On a muni les $A_M(\mathbb{R})^0$ des mesures de Haar $\mathrm{d}\,a_M$ induites, via les isomorphismes $H_{M,\infty}$, par les mesures de Lebesgue (convenablement normalisées) sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{a}_M$.

L'intégrale orbitale

$$\mathrm{O}_\gamma^G(f_\infty f) = \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} (f_\infty f)(g^{-1}\gamma g) \frac{\mathrm{d}\,g}{\mathrm{d}\,g_{\gamma,\mathrm{can}}}$$

est calculée pour la mesure canonique $\mathrm{d}\,g_{\gamma,\mathrm{can}}$ sur $G_\gamma(\mathbb{A})$ et

$$\tau(G_\gamma^0) = \mathrm{vol}(A_G(\mathbb{R})^0 G_\gamma^0(\mathbb{Q})\backslash G_\gamma^0(\mathbb{A}), \frac{\mathrm{d}\,g_{\gamma,\mathrm{can}}}{\mathrm{d}\,a})$$

est le nombre de Tamagawa de la composante neutre du centralisateur de γ.

On a noté W^M le groupe de Weyl de (M, T).

L'ensemble $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A}))$ est un système de représentants des classes d'équivalence de représentations irréductibles unitaires de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A})$ qui interviennent discrètement, avec multiplicité (finie) $m_{\mathrm{disc}}^M(\pi)$, dans $L^2(A_M(\mathbb{R})^0 M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A}))$.

Une *représentation standard* de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ est une induite parabolique (avec la normalisation unitaire)

$$\mathcal{I}_{P^M}^M(\sigma_{\infty,\lambda})$$

à partir d'une représentation irréductible $\sigma_{\infty,\lambda}$ de $L(\mathbb{R})$ pour un sous-groupe de Levi $L \in \mathcal{L}$, $L \subset M$: la représentation $\sigma_{\infty,\lambda} = e^{\lambda(H_{L,\infty}(\cdot))}\sigma_\infty$ est obtenue par torsion d'une représentation $\sigma_\infty \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ par un caractère non nécessairement unitaire $\lambda \in (\mathfrak{a}_L^M)^*_{\mathbb{C}}$, et l'induction est effectuée le long d'un sous-groupe parabolique P^M de M qui admet L comme facteur de Levi. Deux telles représentations standard sont dites *équivalentes* si elles ont le même caractère ; ce caractère ne dépend pas de P^M et on le note simplement

$$\Theta_{L,\sigma_\infty,\lambda}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence des représentations standard de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ dont le caractère infinitésimal est fixé est fini. Le caractère Θ_{π_∞} de toute représentation irréductible admissible π_∞ de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients entiers

$$\Theta_{\pi_\infty} = \sum_{\pi'_\infty} a_\infty^M(\pi_\infty, \pi'_\infty)\Theta_{\pi'_\infty}$$

où π'_∞ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence des représentations standard de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ ayant le même caractère infinitésimal que π_∞. Du fait de nos hypothèses de cuspidalité de f_∞ et de régularité de f, dans la formule des traces ci-dessus seuls comptent les coefficients $a_\infty^M(\pi_\infty, \pi'_\infty)$ pour lesquels $\pi'_\infty \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$.

Pour toute représentation irréductible admissible π_{f} de $M(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$, on note $i_M(\pi_{\mathrm{f}})$ la représentation virtuelle de $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ associée à la représentation induite $\mathcal{I}_P^G(\pi_{\mathrm{f}})$ de la représentation $\pi_{\mathrm{f}} \otimes 1_{N_P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})}$ de $P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ à $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ (avec la normalisation unitaire) pour n'importe quel parabolique P dans $\mathcal{P}(M)$, de sorte que

$$\operatorname{tr} i_M(\pi_{\mathrm{f}}, f) = \operatorname{tr} \mathcal{I}_P^G(\pi_{\mathrm{f}}, f) = \operatorname{tr} \pi_{\mathrm{f}}(f_P)$$

pour toute fonction lisse et à support compact f sur $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$. Alors, pour tout $X \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}}$, $f_M(\pi_{\mathrm{f}}, X)$ est l'intégrale

$$f_M(\pi_{\mathrm{f}}, X) = \int_{i\mathfrak{a}^*_{M,\mathrm{f}}} \operatorname{tr} i_M(\pi_{\mathrm{f},\lambda}, f)e^{\lambda(X)}\,\mathrm{d}\,\lambda$$

où

$$\pi_{\mathrm{f},\lambda}(m) = e^{\lambda(H_{M,\mathrm{f}}(m))}\pi_{\mathrm{f}}(m),\ \forall\, m \in M(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}),$$

et où $\mathrm{d}\,\lambda$ est la mesure de Haar du groupe compact $i\mathfrak{a}^*_{M,\mathrm{f}} = \prod_q i\mathfrak{a}^*_M/\operatorname{Hom}(\mathfrak{a}_{M,q}, 2\pi i\mathbb{Z})$ de volume total 1.

Remarque 18.6. — En pratique, on dispose d'un nombre premier p, d'une fonction $f^p \in C_{\mathrm{c}}^\infty(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ et d'une fonction $f_p : G(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C}$, invariante à gauche et à droite par le sous-groupe compact maximal hyperspécial $K_{\max,p}$, dont la transformée de Satake s'écrit

$$f_p^\vee = \sum_{\nu\in\operatorname{Supp}(f_p^\vee)} a_\nu b[\nu]$$

pour un sous-ensemble fini $\mathrm{Supp}(f_p^\vee)$ de $X_*(T)$ et des coefficients $a_\nu, b \in \mathbb{C}^\times$, et f est de la forme $f^p f_{p,j}$ où $f_{p,j} : G(\mathbb{Q}_p) \to \mathbb{C}$, elle aussi invariante à gauche et à droite par $K_{\max,p}$, a pour transformée de Satake

$$f_{p,j}^\vee = \sum_{\nu \in \mathrm{Supp}(f_p^\vee)} a_\nu b^j [j\nu]$$

pour un entier $j > 0$ que l'on peut choisir aussi grand que l'on veut. On a

$$(f_{p,j})_M(\pi_p, X_p) = \sum_{\substack{\nu \in \mathrm{Supp}(f_p^\vee) \\ j\nu_M \log p = -X_p}} a_\nu b^j \nu(t_{\pi_p})^j$$

pour toute représentation admissible irréductible non ramifiée π_p de $M(\mathbb{Q}_p)$ de paramètre de Langlands $t_{\pi_p} \in \widehat{T}$.

Pour tout ensemble fini de nombres premiers S et toute fonction $f^S \in C_c(G(\mathbb{A}_f^S))$, on pose

$$C(f^S) = \sup_{P,\alpha,m} \{|\alpha(H_{M,f}^S(m))|\}$$

où P parcourt $\mathcal{P} \smallsetminus \{G\}$, α parcourt l'ensemble des racines de A_{M_P} dans G et m parcourt le support de f_P^S dans $M_P(\mathbb{A}_f^S)$.

Deux cas se présentent :

– Soit, pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, toute racine α de A_M dans G et tout $\nu \in \mathrm{Supp}(f_p^\vee)$, on a $\alpha(\nu_M) \neq 0$ où on rappelle que $(\cdot)_M : \mathfrak{a}_T \to \mathfrak{a}_M$ est la projection canonique, et alors f est fortement C-régulière dès que

$$j > \frac{C + C(f^p)}{\inf_{M,\alpha,\nu}\{|\alpha(\nu_M)| \log p\}}$$

où M parcourt $\mathcal{L} \smallsetminus \{G\}$, α parcourt l'ensemble des racines de A_M dans G et ν parcourt $\mathrm{Supp}(f_p^\vee)$. De plus, si tel est le cas, pour tout $M \in \mathcal{L}$, tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,f} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(s(X))} f_M(\pi_f, X) &= \mathrm{tr}\, i_M(\pi_{f,\Lambda}^p, f^p) \sum_{\substack{X_p \in \mathfrak{a}_{M,p} \\ X_p \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(X_p)} (f_{p,j})_M(\pi_p, X_p) \\ &= \mathrm{tr}\, i_M(\pi_{f,\Lambda}^p, f^p) \sum_{\substack{\nu \in \mathrm{Supp}(f_p^\vee) \\ -\nu_M \in \mathfrak{a}_P^+}} p^{j\Lambda(\nu_M)} a_\nu b^j \nu(t_{\pi_p})^j\end{aligned}$$

si π_p est non ramifié de paramètre de Langlands $t_{\pi_p} \in \widehat{T}$, et on a

$$\sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,f} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(s(X))} f_M(\pi_f, X) = 0$$

sinon.

– Soit il existe $M \in \mathcal{L}$, une racine α de A_M dans G et $\nu \in \operatorname{Supp}(f_p^\vee)$ tels que $\alpha(\nu_M) = 0$. Dans ce cas, f n'est C-régulière pour aucun entier j. Cependant, on peut choisir un nombre premier auxiliaire $q \neq p$ de telle sorte que $f^p = 1_{K_{\max,q}} f^{q,p}$ et remplacer la composante $1_{K_{\max,q}}$ de f^p en q par une fonction variable $f_q \in C_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_{\max,q})$ aussi générale que l'on veut. La fonction $f_q f^{q,p} f_{p,j}$ est alors fortement C-régulière dès que d'une part, pour tout $M \in \mathcal{L}$, $M \subsetneq G$, et toute racine α de A_M dans G telle que $\alpha(\nu_{p,M}) = 0$ pour l'un des $\nu_p \in \operatorname{Supp}(f_p^\vee)$, on a

$$|\alpha(\nu_{q,M})| \log q > C + C(f^{q,p}),\ \forall\, \nu_q \in \operatorname{Supp}(f_q^\vee),$$

et que d'autre part

$$j > \sup_{M,\nu_p,\alpha,\nu_q} \left\{ \frac{C + C(f^{q,p}) + |\alpha(\nu_{q,M})| \log q}{|\alpha(\nu_{p,M})| \log p} \right\}$$

où M parcourt $\mathcal{L} \smallsetminus \{G\}$, ν_p parcourt $\operatorname{Supp}(f_p^\vee)$, α parcourt l'ensemble des racines de A_M dans G telles que $\alpha(\nu_{p,M}) \neq 0$ et ν_q parcourt $\operatorname{Supp}(f_q^\vee)$. De plus, si tel est le cas, pour tout $M \in \mathcal{L}$, tout $P \in \mathcal{P}(M)$ et tout $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}$, on a alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(s(X))} f_M(\pi_{\mathrm{f}}, X) \\
&\quad = \operatorname{tr} i_M(\pi^{q,p}_{\mathrm{f},\Lambda}, f^{q,p}) \sum_{\substack{X_q \in \mathfrak{a}_{M,q}, X_p \in \mathfrak{a}_{M,p} \\ X_q + X_p \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(X_q + X_p)} f_{q,M}(\pi_q, X_q) (f_{p,j})_M(\pi_p, X_p) \\
&\quad = \operatorname{tr} i_M(\pi^{q,p}_{\mathrm{f},\Lambda}, f^{q,p}) \sum_{\nu \in \operatorname{Supp}(f_p^\vee)} p^{j\Lambda(\nu_M)} a_\nu b^j \nu(t_{\pi_p})^j \sum_{\substack{X_q \in \mathfrak{a}_{M,q} \\ X_q \in j\nu_M \log p + \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(X_q)} f_{q,M}(\pi_q, X_q)
\end{aligned}$$

si π_q et π_p sont non ramifiés et si π_p est de paramètre de Langlands $t_{\pi_p} \in \widehat{T}$, et on a

$$\sum_{\substack{X \in \mathfrak{a}_{M,\mathrm{f}} \\ s(X) \in \mathfrak{a}_P^+}} e^{-\Lambda(s(X))} f_M(\pi_{\mathrm{f}}, X) = 0$$

sinon. □

Exemple 18.7. — Considérons le cas particulier où $G = \mathrm{GL}(2)$ avec son tore maximal T des matrices diagonales, où la fonction très cuspidale f_∞ est (-1) fois un pseudo-coefficient de la représentation de la série discrète $\sigma_n(m)$ de $G(\mathbb{R})$ pour des entiers $n \geqslant 1$ et m, et où $f \in C_c(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}))$ se décompose en $f^p f_{p,j}$ pour la fonction $f_{p,j} \in C_c(G(\mathbb{Q}_p)//G(\mathbb{Z}_p))$ dont la transformée de Satake est donnée par

$$f_{p,j}^\vee = p^{j/2}([(j,0)] + [(0,j)]).$$

Bien entendu on a identifié $X_*(T)$ à $\mathbb{Z}^2$ de la manière évidente.

On suppose que, pour $C \in \mathbb{R}_+$ comme dans le théorème, la fonction f est fortement C-régulière, c'est-à-dire que

$$j > \frac{C + C(f^p)}{\log p}$$

où $C(f^p) = \sup_t\{|\alpha(H^p_{T,\mathrm{f}}(t))|\}$ pour t parcourant le support dans $T(\mathbb{A}^p_\mathrm{f})$ du terme constant f^p_T et α est la racine simple $\alpha(\mathrm{diag}(t_1,t_2)) = t_1/t_2$.

Pour toute représentation π_∞ de carré intégrable de $\mathbb{R}^\times_+\backslash G(\mathbb{R})$ et tout $(x,x) \in \mathfrak{a}_G \subset \mathfrak{a}_T$, on a

$${}^{\mathrm{c}}D^G_G(\pi_\infty,(x,x),\sigma_n(m)) = \begin{cases} e^{-2(m+\frac{n-1}{2})x} & \text{si } \pi_\infty \cong \sigma_n(\frac{1-n}{2}), \\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et, pour tout $\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in T(\mathbb{R})^1 \cong \{\pm 1\}\times\{\pm 1\}$ et tout $(x_1,x_2) \in \mathfrak{a}_T$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{\xi_{1,\infty},\xi_{2,\infty}} & \Phi^T_T(\xi^{-1}_{1,\infty}\times\xi^{-1}_{2,\infty},\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\,{}^{\mathrm{c}}D^G_T(\xi_{1,\infty}\times\xi_{2,\infty},(x_1,x_2),\sigma_n(m)) \\ &= \Phi^G_T(\sigma_n(\tfrac{1-n}{2}),\mathrm{diag}(\varepsilon_1 e^{\frac{x_1-x_2}{2}},\varepsilon_2 e^{-\frac{x_1-x_2}{2}}))e^{-(m+\frac{n-1}{2})(x_1+x_2)}\end{aligned}$$

où $\xi_{1,\infty}$ et $\xi_{2,\infty}$ parcourent les caractères de $\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{R}^\times$ tels que $\xi_{1,\infty}\xi_{2,\infty} = \mathrm{sgn}^{n-1}$.

Or, on a évidemment

$$\Phi^T_T(\xi^{-1}_{1,\infty}\times\xi^{-1}_{2,\infty},\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)) = \xi^{-1}_{1,\infty}(\varepsilon_1)\xi^{-1}_{2,\infty}(\varepsilon_2)$$

et la formule bien connue du caractère de la série discrète $\sigma_n(\frac{1-n}{2})$ sur $T(\mathbb{R})$ se récrit

$$\Phi^G_T(\sigma_n(\tfrac{1-n}{2}),\mathrm{diag}(\varepsilon_1 e^t,\varepsilon_2 e^{-t})) = \begin{cases} 2\varepsilon_1^{n-1}e^{-n|t|} & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par suite, on a

$${}^{\mathrm{c}}D^G_T(\xi_{1,\infty}\times\xi_{2,\infty},(x_1,x_2),\sigma_n(m)) = e^{-(m+\frac{n-1}{2})(x_1+x_2)-\frac{n}{2}|x_1-x_2|},$$

et donc

$${}^{\mathrm{c}}d^G_B(\xi_{1,\infty}\times\xi_{2,\infty},(m-\tfrac{1}{2},m+n-\tfrac{1}{2}),\sigma_n(m)) = 1$$

et

$${}^{\mathrm{c}}d^G_{\overline{B}}(\xi_{1,\infty}\times\xi_{2,\infty},(m+n-\tfrac{1}{2},m-\tfrac{1}{2}),\sigma_n(m)) = 1,$$

pour chacun des deux couples $(\xi_{1,\infty},\xi_{2,\infty})$ de caractères de $\mathbb{R}^\times_+\backslash\mathbb{R}^\times$ tels que $\xi_{1,\infty}\xi_{2,\infty} = \mathrm{sgn}^{n-1}$, où B et $\overline{B}$ sont les sous-groupes de Borel des matrices triangulaires supérieures et inférieures respectivement.

Le second membre de la formule des traces figurant dans le théorème est donc ici égal à

$$\begin{aligned}&-\sum_{\pi}\operatorname{tr}\pi_{\mathrm{f}}^{p}(f^{p})p^{j/2}(z_1(\pi_p)^j+z_2(\pi_p)^j)\\&+\delta_{n,1}\sum_{\chi}\operatorname{tr}(\chi\circ\det)_{\mathrm{f}}^{p}(f^{p})p^{j/2}\chi_p(p)^j(p^{-j/2}+p^{j/2})\\&-\frac{1}{2}\sum_{\xi_1,\xi_2}\operatorname{tr} i_T(\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m-\tfrac{1}{2})\times\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m+n-\tfrac{1}{2}),f^{p})p^{jm}\xi_{2,p}(p)^j\\&-\frac{1}{2}\sum_{\xi_1,\xi_2}\operatorname{tr} i_T(\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m+n-\tfrac{1}{2})\times\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m-\tfrac{1}{2}),f^{p})p^{jm}\xi_{1,p}(p)^j\end{aligned}$$

où π parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $G(\mathbb{A})$ dont la composante archimédienne est $\sigma_n(m)$ et dont la composante π_p en p est non ramifiée et de paramètre de Langlands $\{z_1(\pi_p),z_2(\pi_p)\}$, où $\delta_{n,1}=1$ si $n=1$ et $\delta_{n,1}=0$ sinon, où la deuxième somme, qui n'intervient que si $n=1$, porte sur les caractères χ de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ dont la composante archimédienne est $a\mapsto a^m$ et qui sont non ramifiés en p, et où ξ_1,ξ_2 parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que $\xi_{1,\infty}\xi_{2,\infty}=\mathrm{sgn}^{n-1}$ et qui sont non ramifiés en p.

Comme

$$\operatorname{tr} i_T(\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m+n-\tfrac{1}{2})\times\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m-\tfrac{1}{2}),f^{p})=\operatorname{tr} i_T(\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m-\tfrac{1}{2})\times\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m+n-\tfrac{1}{2}),f^{p})$$

les deux dernières sommes de l'expression ci-dessus sont égales. On peut récrire notre expression sous la forme

$$\begin{aligned}&-\sum_{\pi}\operatorname{tr}\pi_{\mathrm{f}}^{p}(f^{p})p^{j/2}(z_1(\pi_p)^j+z_2(\pi_p)^j)\\&+\delta_{n,1}\sum_{\chi}\operatorname{tr}(\chi\circ\det)_{\mathrm{f}}^{p}(f^{p})\chi_p(p)^j(1+p^j)\\&-\sum_{\chi_1,\chi_2}\operatorname{tr} j_T(\chi_{1,\mathrm{f}}^{p}\times\chi_{2,\mathrm{f}}^{p},f^{p})\chi_{2,p}(p)^j\end{aligned}$$

où π parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $G(\mathbb{A})$ dont la composante archimédienne est $\sigma_n(m)$ et dont la composante π_p en p est non ramifiée et de paramètre de Langlands $\{z_1(\pi_p),z_2(\pi_p)\}$, où la deuxième somme, qui n'intervient que si $n=1$, porte toujours sur les caractères χ de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ dont la composante archimédienne est $a\mapsto a^m$ et qui sont non ramifiés en p, et où χ_1,χ_2 parcourent maintenant les caractères de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que $\chi_{1,\infty}(a)=a^m$ et $\chi_{2,\infty}(a)=a^{m+n-1}$ pour tout $a\in\mathbb{R}_+^\times$ et $\chi_{1,\infty}\chi_{2,\infty}(a)=a^{2m+n-1}$ pour tout $a\in\mathbb{R}^\times$, et qui sont non ramifiés en p.

Pour éviter les demi-entiers, et donc des problèmes de rationalité, on préféré utiliser dans cette dernière expression l'induite non normalisée

$$j_T(\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m)\times\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m+n-1))=i_T(\xi_{1,\mathrm{f}}^{p}(m-\tfrac{1}{2})\times\xi_{2,\mathrm{f}}^{p}(m+n-\tfrac{1}{2})).\qquad\square$$

19. Application à GSp(4)

Nous allons appliquer les résultats de la section précédente à $(G = \mathrm{GSp}(4), f^G)$ d'une part et (H, f^H) d'autre part.

Commençons par expliciter les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathfrak{a}_T$ et $\mathfrak{a}_S$. On identifie $\mathfrak{a}_T$ à

$$\{X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2 + x_3\}$$

de telle sorte que $X \in \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4$ corresponde au co-caractère $u \mapsto (u^{x_1}, u^{x_2}, u^{x_3}, u^{x_4})$ de T. On a donc

$$\mathfrak{a}_T^G = \{X \in \mathfrak{a}_T \mid x_1 + x_4 = x_2 + x_3 = 0\}$$

que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$ par $X = (x_1, x_2, -x_2, -x_1) \mapsto (x_1, x_2)$, et

$$\mathfrak{a}_G = \{X \in \mathfrak{a}_T \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}.$$

que l'on identifie à $\mathbb{R}$ par $X = (x, x, x, x) \mapsto 2x$. En résumé, on a

$$\mathfrak{a}_T = \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_T^G = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$$

où $(\frac{x_0}{2} + x_1, \frac{x_0}{2} + x_2, \frac{x_0}{2} - x_2, \frac{x_0}{2} - x_1)$ correspond à $x_0 \oplus (x_1, x_2)$.

Dualement, on a l'identification évidente de $\mathfrak{a}_T^*$ à

$$\{X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \in \mathbb{R}^4\}/\{(x^*, -x^*, -x^*, x^*) \mid x^* \in \mathbb{R}\}$$

et l'identification de $\mathfrak{a}_T^*$ à

$$\{\Lambda = \lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2\}$$

qui prolonge celle de $X^*(T)$ considérée précédemment. Ces deux identifications sont reliées par les relations $\lambda_0 = x_1^* + x_2^* + x_3^* + x_4^*$, $\lambda_1 = x_1^* - x_4^*$ et $\lambda_2 = x_2^* - x_3^*$. On a

$$(\mathfrak{a}_T^G)^* = \{\Lambda \in \mathfrak{a}_T^* \mid \lambda_0 = 0\}$$

que l'on identifie à $\mathbb{R}^2$ par $\Lambda \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$, et

$$\mathfrak{a}_G^* = \{\Lambda \in \mathfrak{a}_T^* \mid \lambda_1 = \lambda_2 = 0\}$$

que l'on identifie à $\mathbb{R}$ par $\Lambda \mapsto \lambda_0$. En résumé, on a

$$\mathfrak{a}_T^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_T^G)^* = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$$

et l'accouplement de dualité entre $\mathfrak{a}_T^*$ et $\mathfrak{a}_T$ est donné par

$$\langle \lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2), x_0 \oplus (x_1, x_2) \rangle = \frac{\lambda_0 x_0}{2} + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

On identifie $\mathfrak{a}_S$ au quotient

$$\{Y = (y_1', y_1'', y_2', y_2'') \in \mathbb{R}^4\}/\{(y, y, -y, -y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

de manière évidente, et à $\mathfrak{a}_T$ en envoyant la classe de $Y = (y_1', y_1'', y_2', y_2'')$ sur $X = (y_1' + y_2', y_1' + y_2'', y_1'' + y_2', y_1'' + y_2'')$, c'est-à-dire

$$X = (y_1' + y_1'' + y_2' + y_2'') \oplus \left(\frac{y_1' - y_1'' + y_2' - y_2''}{2}, \frac{y_1' - y_1'' - y_2' + y_2''}{2}\right).$$

Dualement, on identifie

$$\mathfrak{a}_S^* = \{Y^* = (y_1'^*, y_1''^*, y_2'^*, y_2''^*) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1'^* + y_1''^* = y_2'^* + y_2''^*\}$$

à $\mathfrak{a}_T^*$ en envoyant la classe de $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$ sur

$$Y^* = (x_1^* + x_2^*, x_3^* + x_4^*, x_1^* + x_3^*, x_2^* + x_4^*),$$

et donc $\Lambda = \lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2)$ sur

$$Y^* = \Big(\frac{\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_0 - \lambda_1 - \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2}{2}, \frac{\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2}{2}\Big).$$

Explicitons maintenant les ensembles de sous-groupes de Levi $\mathcal{L}$ pour G et H. On a $\mathcal{L}^G = \{G, M_1, M_1', M_2, M_2', T\}$ où

$$M_1 = M_{\alpha_1} = \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \lambda A^* \end{pmatrix} \,\middle|\, A \in \mathrm{GL}(2),\ \lambda \in \mathrm{GL}(1)\right\} \cong \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(1),$$

$$M_1' = \dot{s}_{\alpha_2} M_1 \dot{s}_{\alpha_2}^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & \times \\ \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & 0 & \times \end{pmatrix}\right\},$$

$$M_2 = M_{\alpha_2} = \left\{\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\det(A)}{\mu} \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu \in \mathrm{GL}(1),\ A \in \mathrm{GL}(2)\right\} \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$$

et

$$M_2' = \dot{s}_{\alpha_1} M_2 \dot{s}_{\alpha_1}^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}\right\}.$$

(On a posé $A^* = S\,{}^{\mathrm{t}}\!A^{-1} S$ et, pour chaque $w \in W^G$, $\dot{w} \in K_\infty \cap G(\mathbb{Z})$ est la matrice de permutation représentant w.)

Pour le sous-groupe de Levi M_1, on a

$$\mathfrak{a}_{M_1} = \{x_0 \oplus (x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_T \mid x_1 = x_2\}$$

et la projection $\mathfrak{a}_T \to \mathfrak{a}_{M_1}$ envoie $x_0 \oplus (x_1, x_2)$ sur $x_0 \oplus \big(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\big)$. De même, on a

$$\mathfrak{a}_{M_1}^* = \{\lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{a}_T^* \mid \lambda_1 = \lambda_2\}$$

et la projection $\mathfrak{a}_T^* \to \mathfrak{a}_{M_1}^*$ envoie $\lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2)$ sur $\lambda_0 \oplus \big(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}, \frac{\lambda_1+\lambda_1}{2}\big)$. L'identification $M_1 \cong \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(1)$ induit les isomorphismes

$$\mathfrak{a}_{M_1} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(2)} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(1)},\ x_0 \oplus (x, x) \longmapsto (2x + x_0) \oplus x_0,$$

et

$$\mathfrak{a}_{M_1}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(2)}^* \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(1)}^*,\ \lambda_0 \oplus (\lambda, \lambda) \longmapsto \lambda \oplus \frac{\lambda_0 - 2\lambda}{2}.$$

Pour le sous-groupe de Levi M_2, on a

$$\mathfrak{a}_{M_2} = \{x_0 \oplus (x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_T \mid x_2 = 0\}$$

et la projection $\mathfrak{a}_T \to \mathfrak{a}_{M_2}$ envoie $x_0 \oplus (x_1, x_2)$ sur $x_0 \oplus (x_1, 0)$. De même, on a

$$\mathfrak{a}^*_{M_2} = \{\lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{a}^*_T \mid \lambda_2 = 0\}$$

et la projection $\mathfrak{a}^*_T \to \mathfrak{a}^*_{M_2}$ envoie $\lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2)$ sur $\lambda_0 \oplus (\lambda_1, 0)$. L'identification $M_2 \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$ induit les isomorphismes

$$\mathfrak{a}_{M_2} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(1)} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(2)},\ x_0 \oplus (x, 0) \longmapsto (x + \frac{x_0}{2}) \oplus x_0,$$

et

$$\mathfrak{a}^*_{M_2} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}^*_{\mathrm{GL}(1)} \oplus \mathfrak{a}^*_{\mathrm{GL}(2)},\ \lambda_0 \oplus (\lambda, 0) \longmapsto \lambda \oplus \frac{\lambda_0 - \lambda}{2}.$$

On a $\mathcal{L}^H = \{H, L_1, L_2, S\}$ avec

$$L_1 = L_{\beta_1} = \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times S_2]$$

et

$$L_2 = L_{\beta_2} = \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times \mathrm{GL}(2)].$$

Compte tenu de l'identification de $\mathfrak{a}_S$ à $\mathfrak{a}_T$ définie plus haut, on a

$$\mathfrak{a}_{L_1} = \Big\{(y_1' + y_1'' + y_2' + y_2'') \oplus \Big(\tfrac{y_1' - y_1'' + y_2' - y_2''}{2}, \tfrac{y_1' - y_1'' - y_2' + y_2''}{2}\Big) \mid y_1' = y_1''\Big\} = \mathfrak{a}_{M_1'} \subset \mathfrak{a}_T$$

et

$$\mathfrak{a}_{L_2} = \Big\{(y_1' + y_1'' + y_2' + y_2'') \oplus \Big(\tfrac{y_1' - y_1'' + y_2' - y_2''}{2}, \tfrac{y_1' - y_1'' - y_2' + y_2''}{2}\Big) \mid y_2' = y_2''\Big\} = \mathfrak{a}_{M_1} \subset \mathfrak{a}_T,$$

et donc dualement $\mathfrak{a}^*_{L_1} = \mathfrak{a}^*_{M_1'}$ et $\mathfrak{a}^*_{L_2} = \mathfrak{a}^*_{M_1}$.

***Lemme 19.1* (Labesse).** — *On peut choisir les fonctions cuspidales stables f^G_∞ et f^H_∞ de telle sorte qu'elles soient aussi très cuspidales.* □

On fixe maintenant un nombre premier $q \neq p$ qui est à la fois bon pour $K(N)$ (q ne divise pas N) et pour f^p ($f^p = 1_{K_q} f^{q,p}$), et on remplace f^p par

$$\widetilde{f}^p = f_q f^{q,p}$$

où f_q est une fonction auxiliaire dans l'algèbre de Hecke $C_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ pour l'instant arbitraire. Bien entendu, cela nous conduit à remplacer h^p par

$$\widetilde{h}^p = b^H(f_q) h^{q,p}$$

où $h^{q,p}$ est un transfert ordinaire de $f^{q,p}$ pour le facteur de transfert $\prod_{v \neq \infty, q, p} \Delta_v$ convenablement normalisé et où

$$b^H : C_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q) \longrightarrow C_c(H(\mathbb{Q}_q)//K^H_q)$$

est l'homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres induit par l'isomorphisme $j : S \xrightarrow{\sim} T$.

***Hypothèse 19.2* (Lemme fondamental)**. — Pour tout élément semi-simple et (G,H)-régulier $\gamma_H \in H(\mathbb{Q}_q)$, on a

$$\mathrm{SO}^H_{\gamma_H}(b^H(f_q)) = \sum_{\gamma} \Delta_q(\gamma_H,\gamma) e_q(G_\gamma)\, \mathrm{O}^G_\gamma(f_q)$$

où γ parcourt les classes de $G(\mathbb{Q}_q)$-conjugaison des éléments semi-simples de $G(\mathbb{Q}_q)$ qui proviennent de γ_H.

Théorème 19.3. — *Les fonctions très cuspidales stables f^G_∞ et f^H_∞, les nombres premiers $q \neq p$ et les fonctions $f^{q,p}$ et $h^{q,p}$ étant fixées, il existe une constante $D \in \mathbb{R}_+$ telle que, pour toute fonction $f_q \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ et tout entier $j > 0$ qui vérifient*

$$|\alpha(\mu)| \log q > D,\ \forall\, \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1+\alpha_2)\},\ \forall\, \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee),$$

et

$$j > \frac{D + |\alpha(\mu)|\log q}{\log p},\ \forall\, \alpha \in R,\ \forall\, \mu \in \mathrm{Supp}(f_q^\vee),$$

on ait les formules des traces suivantes :

(a) *la formule des traces*

$$T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^G) = J^G_G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{2} J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{2} J^G_{M_2}(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{8} J^G_T(\widetilde{f}^G)$$

pour la fonction $\widetilde{f}^G = f^G_\infty f_q f^{q,p} b^G_j(\varphi_j)$, dans laquelle le terme correspondant à $M \in \mathcal{L}^G$ s'écrit

$$\begin{aligned} J^G_M(\widetilde{f}^G) = {} & \sum_{\pi} m^M_{\mathrm{disc}}(\pi) \sum_{\pi'_\infty} a^M_\infty(\pi_\infty, \pi'_\infty) \\ & \times \sum_{P \in \mathcal{P}(M)} \sum_{\Lambda \in (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}} {}^{\mathrm{c}}d^G_P(\pi'_\infty, \Lambda, f^G_\infty)\, \mathrm{tr}\, i_M(\pi^{q,p}_{\mathrm{f},\Lambda}, f^{q,p}) \\ & \times \sum_{\nu \in W^G\cdot \nu_h} p^{j(\Lambda(\nu_M)+\frac{3}{2})} \nu(t_{\pi_p})^j \sum_{\substack{X_q \in \mathfrak{a}_{M,q} \\ X_q \in j\nu_M \log p + \mathfrak{a}^+_P}} e^{-\Lambda(X_q)} f_{q,M}(\pi_q, X_q) \end{aligned}$$

où π parcourt le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{A}))$ formé des représentations non ramifiées en q et p, de paramètre de Langlands $t_{\pi_p} \in \widehat{T}$ en p, et où $\pi'_{\mathbb{R}}$ parcourt $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$;

(b) *la formule des traces*

$$T_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^H) = J^H_H(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{2} J^H_{L_1}(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{2} J^H_{L_2}(\widetilde{f}^H) + \tfrac{1}{4} J^H_S(\widetilde{f}^H)$$

pour la fonction $\widetilde{f}^H = f^H_\infty b^H(f_q)h^{q,p}b^H_j(\varphi_j)$, *dans laquelle le terme correspondant à* $L \in \mathcal{L}^H$ *s'écrit*

$$\begin{aligned} J^H_L(\widetilde{f}^H) = & \sum_\rho m^L_{\mathrm{disc}}(\rho) \sum_{\rho'_\infty} a^L_\infty(\rho_\infty, \rho'_\infty) \\ & \times \sum_{Q\in\mathcal{P}(L)} \sum_{\mathrm{M}\in(\mathfrak{a}_L)^*_{\mathbb{C}}} {}^{c}d^H_Q(\rho'_\infty, \mathrm{M}, f^H_\infty) \operatorname{tr} i_L(\rho^{q,p}_{\mathrm{f},\mathrm{M}}, h^{q,p}) \\ & \times \sum_\nu \varepsilon(\nu) p^{j(\mathrm{M}(\nu_L)+\frac{3}{2})} \nu(t_{\rho_p})^j \sum_{\substack{Y_q\in\mathfrak{a}_{L,q} \\ Y_q\in j\nu_L \log p+\mathfrak{a}^+_Q}} e^{-\mathrm{M}(Y_q)} b^H(f_q)_L(\rho_q, Y_q) \end{aligned}$$

où ρ *parcourt les représentations dans* $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{A}))$ *qui sont non ramifiées en* q *et* p, *de paramètre de Langlands* $t_{\rho_p} \in \widetilde{T}$ *en* p, *où* ρ'_∞ *parcourt* $\Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$, *où* ν *parcourt le sous-ensemble de* $X_*(S)$ *formé des quatre co-caractères* $\nu'_1(u) = (\mathrm{diag}(u,1), I_2)$, $\nu'_1(u) = (\mathrm{diag}(1,u), I_2)$, $\nu'_2(u) = (I_2, \mathrm{diag}(u,1))$ *et* $\nu''_2(u) = (I_2, \mathrm{diag}(1,u))$ *modulo* $\mathrm{GL}(1)$, *et où* $\varepsilon(\nu'_1) = \varepsilon(\nu''_1) = 1$ *et* $\varepsilon(\nu'_2) = \varepsilon(\nu''_2) = -1$. □

Comme f^G_∞ est K_∞-invariante par conjugaison, on vérifie que

$$J^G_{M'_1}(\widetilde{f}^G) = J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G)$$

et

$$J^G_{M'_2}(\widetilde{f}^G) = J^G_{M_2}(\widetilde{f}^G)\,;$$

c'est ce qui nous a permis de remplacer $\mathcal{L}^G$ par $\{G, M_1, M_2, T\}$ dans la somme sur les M du côté spectral de la formule des traces pour $(G, \widetilde{f}^G)$.

20. Les termes principaux

On rappelle qu'on a fixé un poids dominant $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2) \in X^*(T)^+$ et que

$$f^G_\infty = -\frac{1}{2}(f_{\pi^{\mathrm{W}}_\mu} + f_{\pi^{\mathrm{H}}_\mu})$$

où π^{W}_μ et π^{H}_μ sont à isomorphisme près les deux seules représentations essentiellement de carré intégrable de $G(\mathbb{R})$ ayant le même caractère central et le même caractère infinitésimal que la représentation de dimension finie V_μ.

Pour toute représentation irréductible admissible π_∞ de $G(\mathbb{R})$ considérons sa $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty)$-cohomologie à coefficients dans $V^\vee_\mu$,

$$H^*(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V^\vee_\mu),$$

munie de sa bi-graduation de Hodge naturelle

$$H^n(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V^\vee_\mu) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V^\vee_\mu),$$

et la caractéristique d'Euler-Poincaré correspondante

$$\chi(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V_\mu^\vee) = \sum_n (-1)^n \dim_{\mathbb{C}} H^n(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V_\mu^\vee).$$

Lemme 20.1. — *La fonction f_∞^G est une fonction d'Euler-Poincaré pour V_μ, c'est-à-dire vérifie la relation*

$$\operatorname{tr} \pi_\infty(f_\infty^G) = \frac{1}{4}\chi(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V_\mu^\vee)$$

pour toute représentation admissible irréductible π_∞ de $G(\mathbb{R})$, où

$$4 = |\{\pi_\mu^{\mathrm{W}}, \pi_\mu^{\mathrm{H}}\}| \times |\pi_0(\mathrm{GSp}(4,\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times)|. \qquad \square$$

D'après Vogan et Zuckerman, la liste complète des π_∞ (à isomorphisme près) ayant de la $(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty)$-cohomologie non triviale à coefficients dans $V_\mu^\vee$, et des espaces $H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\infty \otimes V_\mu^\vee)$ non nuls correspondants est la suivante :

– π_μ^{W} et π_μ^{H} avec

$$H^{2,1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{\mathrm{W}} \otimes V_\mu^\vee) \cong H^{1,2}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{\mathrm{W}} \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C}$$

et

$$H^{3,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{\mathrm{H}} \otimes V_\mu^\vee) \cong H^{0,3}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{\mathrm{H}} \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C}\,;$$

– si $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2 = 0)$, une représentation π_μ^1 pour laquelle

$$\begin{aligned} H^{2,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^1 \otimes V_\mu^\vee) &\cong H^{0,2}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^1 \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C} \\ \cong H^{3,1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^1 \otimes V_\mu^\vee) &\cong H^{1,3}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^1 \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C}\,; \end{aligned}$$

– si $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2 = \mu_1)$, deux représentations $\pi_\mu^{2,+}$ et $\pi_\mu^{2,-} = (\operatorname{sgn}\circ c)\pi_\mu^{2,+}$, où $\operatorname{sgn}\circ c : \mathrm{GSp}(4,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$, pour lesquelles on a

$$H^{1,1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{2,\pm} \otimes V_\mu^\vee) \cong H^{3,3}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; \pi_\mu^{2,\pm} \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C}\,;$$

– si $\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$, les représentations $c_\mu^+ = c^{\mu_0/2}$ et $c_\mu^- = (\operatorname{sgn}\circ c)c^{\mu_0/2}$ pour lesquelles on a

$$\begin{aligned} H^{0,0}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; c_\mu^\pm \otimes V_\mu^\vee) &\cong H^{3,3}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; c_\mu^\pm \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C} \\ \cong H^{1,1}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; c_\mu^\pm \otimes V_\mu^\vee) &\cong H^{2,2}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, K'_\infty; c_\mu^\pm \otimes V_\mu^\vee) \cong \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposition 20.2. — *Posons*

$$\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{A}), \mu_0) = \{\pi_{\mu_0} = e^{\mu_0 H_G(\cdot)}\pi \mid \pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A}))\}$$

et

$$m_{\mathrm{disc}}^G(\pi_{\mu_0}) = m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)$$

pour chaque $\pi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A}))$.

Le terme principal $J_G^G(\widetilde{f}^G)$ du côté spectral de la formule des traces pour $(G, \widetilde{f}^G)$ est égal à

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{\substack{\pi \\ \pi_\infty \cong \pi_\mu^{\mathrm{W}}, \pi_\infty^{\mathrm{H}}}} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)\\
&+\sum_{\substack{\pi \\ \pi_\infty \cong \pi_\mu^1}} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{\pi \\ \pi_\infty \cong \pi_\mu^{2,\pm}}} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)\\
&+\sum_{\pi\pi_\infty \cong c_\mu^\pm} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)p^{3j/2}(z_1(\pi_p)^j + z_2(\pi_p)^j + z_3(\pi_p)^j + z_4(\pi_p)^j)
\end{aligned}
$$

où π parcourt le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{A}), \mu_0)$ formé des représentations non ramifiées en p et où $t_{\pi_p} = \mathrm{diag}(z_1(\pi_p), z_2(\pi_p), z_3(\pi_p), z_4(\pi_p)) \in \widehat{T}$ est le paramètre de Langlands de π_p.

Dans l'expression ci-dessus, la seconde somme n'intervient que si $\mu_2 = 0$, la troisième n'intervient que si $\mu_1 = \mu_2$ et la dernière n'intervient que si $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Bien sûr, la dernière somme dans l'expression ci-dessus peut se récrire

$$\sum_\chi \mathrm{tr}(\chi \circ c)_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)p^{3j/2}\chi_p(p)^j(p^{-\frac{3j}{2}} + p^{-j/2} + p^{j/2} + p^{3j/2})$$

où χ parcourt les caractères de Hecke de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ qui sont non ramifiés en p et de composante archimédienne $a \mapsto a^{\mu_0/2}$ ou $a \mapsto \mathrm{sgn}(a)a^{\mu_0/2}$ (ce qui a un sens car on a $\mu_0 \equiv 0 \pmod 2$ dès que $\mu_1 = \mu_2 = 0$).

Démonstration. — Comme ${}^{\mathrm{c}}d_G^G(\pi_\infty, \Lambda, f_\infty^G) = 0$ pour $\Lambda \neq \mu_0 \in \mathbb{C} = (\mathfrak{a}_G)_{\mathbb{C}}^*$, le terme principal $J_G^G(\widetilde{f}^G)$ du côté spectral de la formule des traces pour G est égal à

$$\sum_\pi m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\Big(\sum_{\pi'_\infty} a_\infty^G(\pi_\infty, \pi'_\infty)^{\mathrm{c}}d_G^G(\pi_\infty, \mu_0, f_\infty^G)\Big)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f},\mu_0}^p(\widetilde{f}^p)\sum_{\nu \in W^G\cdot\nu_h} p^{j(\mu_0\nu_G+3)/2}\nu(t_{\pi_p})^j$$

où π parcourt le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{A}))$ formé des représentations non ramifiées en p.

Maintenant, par définition des constantes $a_\infty^G(\pi_\infty, \pi'_\infty)$, l'expression

$$\sum_{\pi'_\infty} a_\infty^G(\pi_\infty, \pi'_\infty)^{\mathrm{c}}d_G^G(\pi'_\infty, \mu_0, f_\infty^G)$$

n'est autre la trace

$$\mathrm{tr}\,\pi_{\infty,\mu_0}(f_\infty^G)$$

puisque f_∞^G est cuspidale stable, et on vérifie que $\nu_G = 1$ quel que soit $\nu \in W^G \cdot \nu_h$.

Par conséquent, on a encore

$$J_G^G(\widetilde{f}^G)=\sum_{\pi} m_{\mathrm{disc}}^G(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi_\infty(f_\infty^G)\,\mathrm{tr}\,\pi_{\mathrm{f}}^p(\widetilde{f}^p)\sum_{\nu\in W^G\cdot\nu_h} p^{3j/2}\nu(t_{\pi_p})^j$$

où π parcourt le sous-ensemble de $\Pi_{\mathrm{disc}}(G(\mathbb{A}),\mu_0)$ formé des représentations non ramifiées en p, d'où la conclusion compte tenu du lemme 20.1. □

On vérifie de même que :

Proposition 20.3. — *Le terme principal $J_H^H(\widetilde{f}^H)$ du côté spectral de la formule des traces pour $(H,\widetilde{f}^H)$ est égal à*

$$\begin{aligned}-&\sum_{\rho_1,\rho_2}\mathrm{tr}\Big(\rho_{1,\mathrm{f}}^p\otimes\rho_{2,\mathrm{f}}^p)(h^p+h^p\circ\iota)p^{3j/2}(z'(\rho_{1,p})^j+z''(\rho_{1,p})^j-z'(\rho_{2,p})^j-z''(\rho_{2,p})^j\Big)\\ +&\sum_{\rho_1,\chi_2}\mathrm{tr}\Big(\rho_{1,\mathrm{f}}^p\otimes(\chi_2\circ\det)_{\mathrm{f}}^p)(h^p+h^p\circ\iota)p^{3j/2}(z'(\rho_{1,p})^j+z''(\rho_{1,p})^j\\ &\qquad\qquad-\chi_{2,p}(p)^j(p^{-j/2}+p^{j/2})\Big)\end{aligned}$$

où, dans la première somme, ρ_1 et ρ_2 parcourent un système de représentants des classes d'isomorphie de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *qui sont non ramifiées en p et de composantes archimédiennes*

$$\rho_{1,\infty}\cong\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-2}{2}\right)\quad et\quad \rho_{2,\infty}\cong\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2}\right),$$

où la seconde somme n'intervient que dans la cas où $\mu_1=\mu_2$ et porte sur les ρ_1 comme ci-dessus et sur les caractères $\chi_2:\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}$ qui sont non ramifiés en p et de composante archimédienne $a\mapsto a^{\mu_0/2}$, où $(z'(\rho_{1,p}),z''(\rho_{1,p}))$ et $(z'(\rho_{2,p}),z''(\rho_{2,p}))$ sont les paramètres de Langlands de $\rho_{1,p}$ et $\rho_{2,p}$ respectivement et où enfin $\iota:H\to H$ est l'involution qui échange les deux facteurs $\mathrm{GL}(2)$. □

21. Formules pour les caractères tronqués

Pour calculer les caractères tronqués qui interviennent dans les formules de récurrence pour les constantes ${}^c d_P^G(\pi'_\infty,\Lambda,f_\infty)$ de la formule des traces d'Arthur, on peut utiliser les formules de Harish-Chandra pour le caractère d'une représentation de la série discrète d'un groupe réductif réel sur un tore maximal arbitraire. Malheureusement, ces formules font à leur tour intervenir des constantes qui sont difficiles à expliciter.

On peut aussi utiliser le fait que le caractère Θ_{π_∞} de toute représentation irréductible admissible π_∞ de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire à coefficients entiers

$$\Theta_{\pi_\infty}=\sum_{\pi'_\infty}a_\infty^M(\pi_\infty,\pi'_\infty)\Theta_{\pi'_\infty}$$

où π'_∞ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence des représentations standard de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$ ayant le même caractère infinitésimal que π_∞.

Une troisième possibilité est d'utiliser une formule de Goresky, Kottwitz et MacPherson ([**3**], [**4**]) que nous allons rappeler maintenant.

Reprenons provisoirement les hypothèses et les notations générales de la section 18. En particulier, on a un groupe réductif connexe G sur $\mathbb{Q}$, muni d'un tore maximal T déployé sur $\mathbb{Q}$, et on suppose que $G_\mathbb{R}$ admet un tore maximal elliptique sur $\mathbb{R}$.

On fixe un sous-groupe de Borel B sur $\mathbb{Q}$ contenant T et on note U son radical unipotent. On note ρ la demi-somme des racines de T dans U. On note W le groupe de Weyl du couple (G,T). Pour chaque sous-groupe de Levi $M \in \mathcal{L}$, on note $W^M \subset W$ le groupe de Weyl du couple (M,T).

Pour chaque $M \in \mathcal{L}$ et chaque $\mu \in X^*(T)$ qui est dominant relativement à $B \cap M$, on note V^M_μ la représentation algébrique irréductible (de dimension finie) de M de plus haut poids μ relativement à $B \cap M$. Pour chaque $\mu \in X^*(T)$ qui est dominant relativement à B, on note $\mu^\vee \in X^*(T)$ le plus haut poids relativement à B de la représentation contragrédiente $(V^G_\mu)^\vee$ de V^G_μ.

Fixons $\mu \in X^*(T)$ dominant relativement à B. Pour tous $M \in \mathcal{L}$ et $P = MN_P \in \mathcal{P}(M)$, on peut former la cohomologie

$$H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee})$$

de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_P$ de N_P à valeurs dans $V^G_{\mu^\vee}$. Cette cohomologie est bornée, de dimension finie et munie d'une action naturelle de M. Pour chaque $\lambda \in X^*(A_M)$, on a un espace poids

$$H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee})_\lambda \subset H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee})$$

pour l'action de $A_M \subset M$ et la cohomologie est la somme directe de ces espaces poids.

Fixons $\nu \in \mathfrak{a}^*_T = \mathbb{R} \otimes X^*(A_T)$ dont la restriction à A_G coïncide avec celle du caractère central de $V^G_{\mu^\vee}$, c'est-à-dire avec $-\xi$ où $\xi = \mu|A_G$, et définissons la cohomologie tronquée

$$H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee})_{\geqslant\nu} = \bigoplus_{\lambda\in X^*(A_M)\lambda(X)\geqslant\nu_M(X),\ \forall X\in\mathfrak{a}^+_P} H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee})_\lambda$$

où $\nu_M \in \mathfrak{a}^*_M$ la restriction de ν à A_M. C'est une représentation algébrique graduée de M et on notera simplement $H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P}$ la représentation algébrique virtuelle correspondante.

Le théorème de Kostant dit que

$$H^*(\mathfrak{n}_P, V^G_{\mu^\vee}) = \bigoplus_{w\in[W^M\backslash W]} V^M_{w(\mu^\vee+\rho)-\rho}$$

où $[W^M\backslash W] \subset W$ est le système des représentants de Kostant des classes dans $W^M\backslash W$, c'est-à-dire le système des éléments qui sont de longueur $\ell(w)$ (relativement à B) minimale dans leur classe, et où la graduation est donnée par la longueur de ces représentants. (Bien sûr, $w(\mu^\vee+\rho)-\rho$ est dominant relativement à $B\cap M$ pour chaque représentant de Kostant w.) On a donc

$$H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P}=\sum_{\substack{w\in[W^M\backslash W]\\ w(\mu^\vee+\rho)_M(X)\geqslant(\nu+\rho)_M(X),\ \forall X\in\mathfrak{a}_P^+}}(-1)^{\ell(w)}V^M_{w(\mu^\vee+\rho)-\rho}.$$

Soit $(H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P})^\vee$ la représentation algébrique virtuelle contragrédiente de $H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P}$. On peut voir $(H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P})^\vee$ comme une représentation virtuelle de $M(\mathbb{R})$ et former l'induite virtuelle ordinaire

$$\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{R})}_{P(\mathbb{R})}((H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P})^\vee),$$

ou ce qui revient au même l'induite virtuelle normalisée (pour la normalisation unitaire)

$$\mathcal{I}^G_P(\delta_P^{-1/2}\otimes(H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P})^\vee),$$

et la représentation virtuelle

$$\sum_{P\in\mathcal{P}}(-1)^{\dim(\mathfrak{a}^G_{M_P})}\,\mathrm{Ind}^{G(\mathbb{R})}_{P(\mathbb{R})}((H^{\geqslant\nu}_{\mu^\vee,P})^\vee)$$

de $G(\mathbb{R})$. On note $\Theta^{\geqslant\nu}_\mu$ la distribution caractère de cette représentation virtuelle. On sait que la restriction à l'ouvert $G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ de $G(\mathbb{R})$ de cette distribution est une fonction analytique réelle.

Soit maintenant Π_μ le paquet de Langlands de représentations de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ ayant les mêmes caractères central et infinitésimal que V^G_μ. On pose

$$\Theta^{\mathrm{L}}_\mu=(-1)^{q(G)}\sum_{\pi\in\Pi_\mu}\Theta_\pi$$

où $q(G)$ est la moitié de la dimension réelle de $A_G(\mathbb{R})^0\backslash G(\mathbb{R})/K_{\max,\infty}$. Harish-Chandra a montré que la restriction à l'ouvert $G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ de $G(\mathbb{R})$ de cette distribution est aussi une fonction analytique réelle.

***Théorème 21.1* (Goresky, Kottwitz et MacPherson).** — *Pour*

$$\nu_{\mathrm{m}}=-\xi-\rho\in\mathfrak{a}^*_T$$

on a l'égalité de fonctions analytiques réelles

$$\Theta^{\mathrm{L}}_\mu=\Theta^{\geqslant\nu_{\mathrm{m}}}_\mu$$

sur $G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$. □

Ce théorème permet de calculer explicitement Θ^{L}_μ. En effet :

– Soient σ une représentation admissible de $M(\mathbb{R})$ et $\pi=\mathcal{I}^G_P(\sigma)$ la représentation induite. La fonction $\Theta_\pi:G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ est supportée sur les éléments qui sont conjugués à un élément de $M(\mathbb{R})$ et, pour tout tore maximal T_M de $M_{\mathbb{R}}$, la restriction de cette fonction à $T_M(\mathbb{R}) \cap G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\Theta_\pi(t_G) = \sum_{\omega_{\mathbb{R}} \in \Omega_{M(\mathbb{R})} \backslash \Omega_{G(\mathbb{R})}} \frac{\Theta_\sigma(\omega_{\mathbb{R}} t_G \omega_{\mathbb{R}}^{-1})}{|D_M^G(\omega_{\mathbb{R}} t_G \omega_{\mathbb{R}}^{-1})|}$$

où $\Omega_{G(\mathbb{R})} = N_{G(\mathbb{R})}(T_M(\mathbb{R}))/T_M(\mathbb{R})$ est le groupe de Weyl de $(G_{\mathbb{R}}, T_M)$ et $\Omega_{M(\mathbb{R})} = N_{M(\mathbb{R})}(T_M(\mathbb{R}))/T_M(\mathbb{R})$ est celui de $(M_{\mathbb{R}}, T_M)$.

– Pour tout tore maximal T_G dans $G_{\mathbb{R}}$ (non nécessairement elliptique) et tout $g \in G(\mathbb{C})$ tel que $gT_G(\mathbb{C})g^{-1} = T(\mathbb{C})$, on a

$$\mathrm{tr}(\gamma, V_\mu^G) = \sum_{\omega} \frac{\chi_\mu(\omega(\gamma))}{D(\omega(\gamma))}, \ \forall \gamma \in T_G(\mathbb{R}) \cap G_{\mathrm{reg}}(\mathbb{R}),$$

où ω parcourt $\Omega_G = N_{G(\mathbb{C})}(T_G(\mathbb{C}))/T_G(\mathbb{C})$, $\chi_\mu(t_G) = \mu(gt_Gg^{-1})$ et $D(t_G) = \prod_{\alpha \in R^+}(1 - \alpha^{-1}(gt_Gg^{-1}))$ est le dénominateur de Weyl. (Bien entendu, R^+ est l'ensemble des racines de T dans U.)

22. Calcul des constantes ${}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, f_\infty^G)$ et ${}^{\mathrm{c}}d_Q^H(\rho'_\infty, \mathrm{M}, f_\infty^H)$

On rappelle qu'on a fixé

$$\mu = \mu_0 \oplus (\mu_1, \mu_2) \in X^*(T)^+ \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_T^G)^* = \mathfrak{a}_T^*$$

et que

$$f_\infty^G = -(f_{\pi_\mu^{\mathrm{W}}} + f_{\pi_\mu^{\mathrm{H}}}).$$

Théorème 22.1. — *Soient* $M = M_1, M_2$ *ou* T, $\pi'_\infty \in \Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0 \backslash M(\mathbb{R}))$ *et* $X = x_0 \oplus (x_1, x_2) \in \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_M^G \subset \mathfrak{a}_G \oplus \mathfrak{a}_T^G = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$.

(i) *Si* $M = M_1 \cong \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(1)$, $X = x_0 \oplus (x, x)$ *et* $\pi'_\infty = \sigma_\infty \times \mathrm{sgn}^a$ *dans* $\Pi_2(A_{M_1}(\mathbb{R})^0 \backslash M_1(\mathbb{R}))$, *identifié à* $\Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{R}^\times)$, *on a*

$${}^{\mathrm{c}}D_{M_1}^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G) = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1 + \mu_2 + 3)|x|} & si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1 - \mu_2 + 1}\left(\frac{\mu_2 - \mu_1}{2}\right), \\ -e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1 - \mu_2 + 1)|x|} & si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1 + \mu_2 + 3}\left(-\frac{\mu_1 + \mu_2 + 2}{2}\right). \end{cases}$$

(ii) *Si* $M = M_2 \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$, $X = x_0 \oplus (x, 0)$ *et* $\pi'_\infty = \mathrm{sgn}^a \times \sigma_\infty$ *dans* $\Pi_2(A_{M_2}(\mathbb{R})^0 \backslash M_2(\mathbb{R}))$, *identifié à* $\Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times \backslash \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}))$, *on a*

$${}^{\mathrm{c}}D_{M_2}^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G) = \begin{cases} e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1 + 2)|x|} & si\ a + \mu_2 \equiv \mu_0 \pmod 2 \\ & et\ si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_2 + 1}\left(-\frac{\mu_2}{2}\right), \\ -e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_2 + 1)|x|} & si\ a + \mu_1 + 1 \equiv \mu_0 \pmod 2 \\ & et\ si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1 + 2}\left(-\frac{\mu_1 + 1}{2}\right). \end{cases}$$

(iii) *Si* $M = T \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1)$, $X = x_0 \oplus (x_1, x_2)$ *et* $\pi'_\infty = \mathrm{sgn}^{a_1} \times \mathrm{sgn}^{a_2} \times \mathrm{sgn}^b$ *dans* $\Pi_2(A_T(\mathbb{R})^0\backslash T(\mathbb{R}))$ *identifié à* $\Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times)$, *on a*

$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{c}}D_T^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G) = &-\frac{1}{2}\big[e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2}-(\mu_1+2)|x_1|-(\mu_2+1)|x_2|} + e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2}-(\mu_2+1)|x_1|-(\mu_1+2)|x_2|}\big]\\ &+\frac{1}{2}\big[e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2}+(\mu_2+1)(|x_1|+|x_2|)-\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2+3)(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)}\\ &\qquad + e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2}-(\mu_1+2)(|x_1|+|x_2|)+\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2+1)(|x_1-x_2|+|x_1+x_2|)}\big]\end{aligned}$$

si $a_1 + a_2 \equiv \mu_0 \pmod 2$.

(iv) *Dans tous les autres cas, on a*

$${}^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G) = 0.$$

On a bien sûr des résultats semblables à (i) et (ii) pour $M = M'_1$ et $M = M'_2$.

Démonstration. — Le caractère central (resp. infinitésimal) commun à π_∞^{W} et π_∞^{H} est celui de V_μ, c'est-à-dire $t \mapsto t^{\mu_0}$ (resp. la W^G-orbite de $\mu_0 \oplus (\mu_1 + 2, \mu_2 + 1)$ dans $\mathfrak{a}_T^* = \mathfrak{a}_G^* \oplus (\mathfrak{a}_T^G)^*$ puisque la demi-somme des racines positives relativement au sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures dans G est $0 \oplus (2, 1)$).

Pour tout entier $n \geqslant 1$, le caractère central (resp. infinitésimal) de la représentation autoduale $\sigma_n\left(\frac{1-n}{2}\right)$ de la série discrète de $\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ est égal à $t \mapsto \mathrm{sgn}(t)^{n-1}$ (resp. $\{\pm(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2})\}$) puisque celui de $\mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$ est $t \mapsto t^{n-1}$ (resp. $\{(n-1, 0), (0, n-1)\}$) et que la demi-somme des racines positives est égale à $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

On en déduit que les fonctions $X \mapsto {}^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G)$ sont des combinaisons linéaires des exponentielles qui figurent dans les formules ci-dessus. On rappelle que

$${}^{\mathrm{c}}d_P^G(\pi'_\infty, \Lambda, f_\infty^G) \neq 0$$

seulement si la restriction du caractère central de $\pi'_{\infty,\Lambda}$ coïncide avec le caractère central commun à π_∞^{W} et π_∞^{H} et si $(\Lambda + \chi_{\pi'_\infty}) \cap \chi_{\pi_\infty^{\mathrm{W}}} = (\Lambda + \chi_{\pi'_\infty}) \cap \chi_{\pi_\infty^{\mathrm{H}}} \neq \varnothing$ avec les notations de la section 18.

Il reste donc à calculer les coefficients qui interviennent dans ces combinaisons linéaires. Pour cela on utilise les relations de récurrence de la section 18 et les résultats de la section précédente. Par exemple, pour $M \in \{M_1, M_2\}$, on a la relation de récurrence

$$\sum_{\pi'_\infty} \Theta_{\pi'^\vee_\infty}(\gamma^1)\,{}^{\mathrm{c}}D_M^G(\pi'_\infty, X, f_\infty^G) = e^{-\xi(X)}[\Phi_M^G((\pi_\mu^{\mathrm{W}})^\vee, \gamma^1 e^{X^G}) + \Phi_M^G((\pi_\mu^{\mathrm{H}})^\vee, \gamma^1 e^{X^G})]$$

où π'_∞ parcourt un sous-ensemble fini de $\Pi_2(A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R}))$, et les résultats de la section précédente permettent de calculer $\Phi_M^G((\pi_\mu^{\mathrm{W}})^\vee, \gamma^1 e^{X^G}) + \Phi_M^G((\pi_\mu^{\mathrm{H}})^\vee, \gamma^1 e^{X^G})$. □

On montre de même :

Théorème 22.2. — *Soient $L = L_1$, L_2 ou S, $\rho'_\infty \in \Pi_2(A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R}))$ et $Y = y_0 \oplus (y_1, y_2) \in \mathfrak{a}_H \oplus \mathfrak{a}_L^H \subset \mathfrak{a}_H \oplus \mathfrak{a}_S^H = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$.*

(i) *Si $L = L_1 = \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times S_2]$, $Y = y_0 \oplus (y, -y)$, $\rho'_\infty = \sigma_\infty \times \mathrm{sgn}^{a'_2} \times \mathrm{sgn}^{a''_2}$ dans $\Pi_2(A_{L_1}(\mathbb{R})^0\backslash L_1(\mathbb{R})) \subset \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times)$, le caractère central de σ_∞ est égal à sgn^{μ_0} et $a'_2 + a''_2 \equiv \mu_0 \pmod 2$, on a*

$$ {}^{\mathrm{c}}D_{L_1}^H(\rho'_\infty, Y, f_\infty^H) = \begin{cases} e^{-\frac{\mu_0 y_0}{2} - (\mu_1+\mu_2+3)|y|} & si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right), \\ -e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1-\mu_2+1)|y|} & si\ \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1+\mu_2+3}\left(-\frac{\mu_1+\mu_2+2}{2}\right). \end{cases} $$

(ii) *Si $L = L_2 = \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times \mathrm{GL}(2)]$, $Y = y_0 \oplus (y, y)$, $\rho'_\infty = \mathrm{sgn}^{a'_1} \times \mathrm{sgn}^{a''_1} \times \sigma_\infty$ dans $\Pi_2(A_{L_2}(\mathbb{R})^0\backslash L_2(\mathbb{R})) \subset \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times) \times \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}))$, $a'_1 + a''_1 \equiv \mu_0 \pmod 2$ et le caractère central de σ_∞ est égal à sgn^{μ_0}, on a*

$$ {}^{\mathrm{c}}D_{L_2}^H(\rho'_\infty, Y, f_\infty^H) = \begin{cases} -e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1+\mu_2+3)|y|} & \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1-\mu_2+1}\left(\frac{\mu_2-\mu_1}{2}\right), \\ e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - (\mu_1-\mu_2+1)|y|} & \sigma_\infty = \sigma_{\mu_1+\mu_2+3}\left(-\frac{\mu_1+\mu_2+2}{2}\right). \end{cases} $$

(iii) *Si $L = S = \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times S_2]$, $Y = y_0 \oplus (y_1, y_2)$,*

$$ \rho'_\infty = \mathrm{sgn}^{a'_1} \times \mathrm{sgn}^{a''_1} \times \mathrm{sgn}^{a'_2} \times \mathrm{sgn}^{a''_2} $$

dans $\Pi_2(A_S(\mathbb{R})^0\backslash S(\mathbb{R})) \subset \Pi_2(\mathbb{R}_+^\times\backslash\mathbb{R}^\times)^4$ et $a'_1 + a''_1 \equiv a'_2 + a''_2 \equiv \mu_0 \pmod 2$, on a

$$ \begin{aligned} {}^{\mathrm{c}}D_S^H(\rho'_\infty, Y, f_\infty^H) &= e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2+1)|y_1+y_2| - \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2+3)|y_1-y_2|} \\ &\quad - e^{-\frac{\mu_0 x_0}{2} - \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2+3)|y_1+y_2| - \frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2+1)|y_1-y_2|}. \end{aligned} $$

(iv) *Dans tous les autres cas, on a*

$$ {}^{\mathrm{c}}D_L^H(\rho'_\infty, Y, f_\infty^H) = 0. \qquad \square $$

Maintenant, on vérifie que :

Lemme 22.3. — *Soient $M \in \mathcal{L}^G$ pour $G = \mathrm{GSp}(4)$ et π_∞ une représentation irréductible unitaire de $A_M(\mathbb{R})^0\backslash M(\mathbb{R})$.*

Si $M = M_1 \cong \mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(1)$, on a

$$ a_\infty^{M_1}(\pi_\infty, \sigma_n(\tfrac{1-n}{2}) \times \mathrm{sgn}^a) = \begin{cases} 1 & si\ \pi_\infty \cong \sigma_n(\frac{1-n}{2}) \times \mathrm{sgn}^a, \\ -1 & si\ n = 1\ et\ \pi_\infty \cong (\mathrm{sgn} \circ \det)^b \times \mathrm{sgn}^a, \\ 0 & sinon, \end{cases} $$

quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et $a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $M = M_2 \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(2)$, on a

$$ a_\infty^{M_2}(\pi_\infty, \mathrm{sgn}^a \times \sigma_n(\tfrac{1-n}{2})) = \begin{cases} 1 & si\ \pi_\infty \cong \mathrm{sgn}^a \times \sigma_n(\frac{1-n}{2}), \\ -1 & si\ n = 1\ et\ \pi_\infty \cong \mathrm{sgn}^a \times (\mathrm{sgn} \circ \det)^b, \\ 0 & sinon, \end{cases} $$

quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et $a, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $M = T \cong \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1) \times \mathrm{GL}(1)$, *on a*

$$a_\infty^T(\pi_\infty, \mathrm{sgn}^{a_1} \times \mathrm{sgn}^{a_2} \times \mathrm{sgn}^b) = \begin{cases} 1 & si\ \pi_\infty \cong \mathrm{sgn}^{a_1} \times \mathrm{sgn}^{a_2} \times \mathrm{sgn}^b, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

quels que soient $a_1, a_2, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

De même, on a :

Lemme 22.4. — *Soient* $L \in \mathcal{L}^H$ *où* H *est le groupe endoscopique de* $\mathrm{GSp}(4)$, *et* ρ_∞ *une représentation irréductible unitaire de* $A_L(\mathbb{R})^0\backslash L(\mathbb{R})$.

Si $L = L_1 \cong \mathrm{GL}(1)\backslash[\mathrm{GL}(2) \times S_2]$, *on a*

$$\begin{aligned} &a_\infty^{L_1}(\rho_\infty, \sigma_n(\tfrac{1-n}{2}) \times \mathrm{sgn}^{a_2'} \times \mathrm{sgn}^{a_2''}) \\ &\qquad = \begin{cases} 1 & si\ \rho_\infty \cong \sigma_n(\tfrac{1-n}{2}) \times \mathrm{sgn}^{a_2'} \times \mathrm{sgn}^{a_2''}, \\ -1 & si\ n = 1\ et\ \rho_\infty \cong (\mathrm{sgn} \circ \det)^{a_1} \times \mathrm{sgn}^{a_2'} \times \mathrm{sgn}^{a_2''}, \\ 0 & sinon, \end{cases} \end{aligned}$$

quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ *et* $a_1, a_2', a_2'', b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $L = L_2 \cong \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times \mathrm{GL}(2)]$, *on a*

$$\begin{aligned} &a_\infty^{L_2}(\rho_\infty, \mathrm{sgn}^{a_1'} \times \mathrm{sgn}^{a_1''} \times \sigma_n(\tfrac{1-n}{2})) \\ &\qquad = \begin{cases} 1 & si\ \rho_\infty \cong \mathrm{sgn}^{a_1'} \times \mathrm{sgn}^{a_1''} \times \sigma_n(\tfrac{1-n}{2}), \\ -1 & si\ n = 1\ et\ \rho_\infty \cong \mathrm{sgn}^{a_1'} \times \mathrm{sgn}^{a_1''} \times (\mathrm{sgn} \circ \det)^{a_2}, \\ 0 & sinon, \end{cases} \end{aligned}$$

quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ *et* $a_1', a_1'', a_2, b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Si $L = S \cong \mathrm{GL}(1)\backslash[S_2 \times S_2]$, *on a*

$$\begin{aligned} &a_\infty^{S}(\rho_\infty, \mathrm{sgn}^{a_1'} \times \mathrm{sgn}^{a_1''} \times \mathrm{sgn}^{a_2'} \times \mathrm{sgn}^{a_2''}) \\ &\qquad = \begin{cases} 1 & si\ \rho_\infty \cong \mathrm{sgn}^{a_1'} \times \mathrm{sgn}^{a_1''} \times \mathrm{sgn}^{a_2'} \times \mathrm{sgn}^{a_2''}, \\ 0 & sinon, \end{cases} \end{aligned}$$

quels que soient $a_1', a_1'', a_2', a_2'' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. □

On peut donc expliciter un peu plus les expressions $J_M^G(\widetilde{f}^G)$ et $J_L^H(\widetilde{f}^H)$ de la section 19.

Théorème 22.5

(i) *L'expression* $J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G)$ *se décompose en les trois sommes suivantes :*

– *la somme*

$$\sum_{\sigma,\chi}\Big[\operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\sum_{X_q} f_{q,M_1}(\sigma_q\times\chi_q,X_q)q^{-\frac{\mu_0x_0}{2}-(\mu_1+\mu_2+3)|x|}\Big)$$
$$\times\operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)\chi_p(p)^j\Big]$$

où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}(\frac{\mu_2-\mu_1}{2})$ et qui sont non ramifiées en q et p, où χ parcourt les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ qui sont non ramifiés en q et p, et où $X_q=x_0\oplus(x,x)$ avec $x_0\in\mathbb{Z}$ et $x\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$,*

– *dans le cas où $\mu_1=\mu_2$ seulement, la somme*

$$-\sum_{\xi,\chi}\Big[\operatorname{tr} i_{M_1}\big((\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\sum_{X_q} f_{q,M_1}((\xi\circ\det)_q\times\chi_q,X_q)q^{-\frac{\mu_0x_0}{2}-(\mu_1+\mu_2+3)|x|}\Big)$$
$$\times\operatorname{tr} i_{M_1}\big((\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}}\xi_p(p)^j(p^{-j/2}+p^{j/2})\chi_p(p)^j\Big]$$

où ξ et χ parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ qui sont non ramifiés en q et p, et où $X_q=x_0\oplus(x,x)$ avec $x_0\in\mathbb{Z}$ et $x\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

– *la somme*

$$-\sum_{\sigma,\chi}\Big[\operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_1-\mu_2+1}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+\mu_2+2}{2}}\chi_p(p)^j$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\sum_{X_q} f_{q,M_1}(\sigma_q\times\chi_q,X_q)q^{-\frac{\mu_0x_0}{2}-(\mu_1-\mu_2+1)|x|}\Big)$$
$$\times\operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_1-\mu_2+1}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),\widetilde{f}^p\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)\chi_p(p)^j\Big]$$

où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}(-\frac{\mu_1+\mu_2+2}{2})$ et qui sont non ramifiées en q et p, où χ parcourt les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ qui sont non ramifiés en q et p, et où $X_q = x_0 \oplus (x,x)$ avec $x_0 \in \mathbb{Z}$ et $x \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.*

(ii) *L'expression $J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G)$ se décompose en les trois sommes suivantes :*

– *la somme*

$$2\sum_{\chi,\sigma}\mathrm{tr}\, i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm{f}}^p(\mu_1+2)\times\sigma_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-2}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)$$

où χ parcourt les caractères de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ de composante archimédienne $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_2}$ *et qui sont non ramifiés en p et où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_2+1}(-\frac{\mu_2}{2})$ et qui sont non ramifiées en p,*

– *dans le cas où $\mu_2 = 0$ seulement, la somme*

$$-2\sum_{\chi,\xi}\mathrm{tr}\, i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm{f}}^p(\mu_1+2)\times(\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-2}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}}\xi_p(p)^j(p^{-j/2}+p^{j/2})$$

où χ et ξ parcourent les caractères de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ de composantes archimédiennes sgn^{μ_0} *et* 1 *respectivement et qui sont non ramifiés en p,*

– *la somme*

$$-2\sum_{\sigma,\chi}\mathrm{tr}\, i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm{f}}^p(\mu_2+1)\times\sigma_{\mathrm{f}}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_2-1}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_2+2}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)$$

où χ parcourt les caractères de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ de composante archimédienne $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_1-1}$ *et qui sont non ramifiés en p et où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_1+2}(-\frac{\mu_1+1}{2})$ et qui sont non ramifiées en p.*

– *L'expression $J_T^G(\widetilde{f}^G)$ est égale à la somme sur les caractères χ_1,χ_2,χ de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que*

$$\chi_{1,\infty}\chi_{2,\infty} = \mathrm{sgn}^{\mu_0}$$

et qui sont non ramifiés en q et p, de l'expression

$$
\begin{aligned}
&-4\,\mathrm{tr}\, i_T\big(\chi_{1,\mathrm{f}}^{p}(\mu_1+2)\times\chi_{2,\mathrm{f}}^{p}(\mu_2+1)\times\chi_{\mathrm{f}}^{p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^{p}\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j\\
&+2\left(\sum_{X_q} f_{T,q}(\chi_{1,q}\times\chi_{2,q}\times\chi_q,X_q)e^{-\frac{\mu_0x_0}{2}-\frac12(\mu_1-\mu_2+1)(x_1+x_2)-\frac12(\mu_1+\mu_2+3)|x_1-x_2|}\right)\\
&\quad\times\mathrm{tr}\, i_T\big(\chi_{1,\mathrm{f}}^{q,p}(\mu_1+2)\times\chi_{2,\mathrm{f}}^{q,p}(-\mu_2-1)\times\chi_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),f^{q,p}\big)\\
&\quad\times p^{j\frac{\mu_0}{2}}\chi_{1,p}(p)^j\chi_{2,p}(p)^j\chi_p(p)^j\\
&+2\left(\sum_{X_q} f_{T,q}(\chi_{1,q}\times\chi_{2,q}\times\chi_q,X_q)e^{-\frac{\mu_0x_0}{2}-\frac12(\mu_1+\mu_2+3)(x_1+x_2)-\frac12(\mu_1-\mu_2+1)|x_1-x_2|}\right)\\
&\quad\times\mathrm{tr}\, i_T\big(\chi_{1,\mathrm{f}}^{q,p}(\mu_2+1)\times\chi_{2,\mathrm{f}}^{q,p}(\mu_1+2)\times\chi_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),f^{q,p}\big)\\
&\quad\times p^{j\frac{\mu_0}{2}}\chi_{1,p}(p)^j\chi_{2,p}(p)^j\chi_p(p)^j
\end{aligned}
$$

où $X_q = x_0 \oplus (x_1, x_2)$ avec $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — Nous nous limiterons à $J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G)$, la preuve pour les autres termes étant du même type.

Soit $\pi = \sigma \times \chi \in \Pi_{\mathrm{disc}}(A_{M_1}(\mathbb{R})^0\backslash M_1(\mathbb{A}))$ qui est non ramifié en q et p.

On remarque tout d'abord que, si $\sigma_\infty \cong \sigma_n(\frac{1-n}{2})$ pour un entier $n \geqslant 1$, alors σ est nécessairement une représentation automorphe cuspidale de $\mathbb{R}_+^\times\backslash \mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$, et que, si $\sigma_\infty \cong (\mathrm{sgn}\circ\det)^b$ pour $b \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, alors σ est nécessairement de la forme $\chi\circ\det$ pour un caractère χ de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$.

On remarque ensuite que $W^G\cdot\nu_h = \{1\oplus(\frac12,\frac12), 1\oplus(\frac12,-\frac12), 1\oplus(-\frac12,\frac12), 1\oplus(-\frac12,-\frac12)\}$ dans $\mathfrak{a}_T$, que l'image de $W^G\cdot\nu_h$ par l'isomorphisme

$$
\mathfrak{a}_T \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{a}_{T_2}\oplus\mathfrak{a}_{\mathrm{GL}(1)},\ x_0\oplus(x_1,x_2)\longmapsto(\frac{x_0}{2}+x_1,\frac{x_0}{2}+x_2)\oplus x_0,
$$

où T_2 est le tore maximal des matrices diagonales dans $\mathrm{GL}(2)$, est égale à $\{(1,1)\oplus 1, (1,0)\oplus 1, (0,1)\oplus 1, (0,0)\oplus 1\}$, et donc que

$$
\nu(t_{\sigma_p\times\chi_p}) = \begin{cases} z'(\sigma_p)z''(\sigma_p)\chi_p(p) & \text{si } \nu = 1\oplus(\frac12,\frac12),\\ z'(\sigma_p)\chi_p(p) & \text{si } \nu = 1\oplus(\frac12,-\frac12),\\ z''(\sigma_p)\chi_p(p) & \text{si } \nu = 1\oplus(-\frac12,\frac12),\\ \chi_p(p) & \text{si } \nu = 1\oplus(-\frac12,-\frac12),\end{cases}
$$

où $\{z'(\sigma_p), z''(\sigma_p)\}$ sont les valeurs propres de Frobenius-Hecke de σ_p, et que

$$
\nu_{M_1} = \begin{cases} 1\oplus(\frac12,\frac12) & \text{si } \nu = 1\oplus(\frac12,\frac12),\\ 1\oplus(0,0) & \text{si } \nu = 1\oplus(\frac12,-\frac12),\\ 1\oplus(0,0) & \text{si } \nu = 1\oplus(-\frac12,\frac12),\\ 1\oplus(-\frac12,-\frac12) & \text{si } \nu = 1\oplus(-\frac12,-\frac12),\end{cases}
$$

dans $\mathfrak{a}_{M_1}$.

On remarque enfin que

$$i_{M_1}(\sigma_{\mathrm{f}} \times \chi_{\mathrm{f}}) = i_{M_1}(\sigma_{\mathrm{f}}^{\vee} \times \omega_{\sigma,\mathrm{f}}\chi_{\mathrm{f}})$$

où $\sigma^{\vee}$ est la représentation contragrédiente de σ et ω_{σ} est son caractère central. □

De façon similaire, on montre :

Théorème 22.6

(i) *L'expression $J_{L_1}^{H}(\widetilde{f}^{H})$ se décompose en les trois sommes suivantes :*

– *la somme*

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma,\chi',\chi''} \Big[&-2\operatorname{tr} i_{L_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^{p}(\tfrac{\mu_0}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime\prime p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), \widetilde{h}^{p}\big)\\ &\quad\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}} \chi_p''(p)^j\\ &+\Big(\sum_{Y_q} \widetilde{h}_{q,L_1}(\sigma_q \times \chi_q' \times \chi_p'', Y_q) q^{-\frac{\mu_0 y_0}{2}-(\mu_1+\mu_2+3)|y|}\Big)\\ &\quad\times \operatorname{tr} i_{L_1}\Big(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime\prime q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), h^{q,p}\Big)\\ &\quad\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}}(z'(\sigma_p)^j + z''(\sigma_p)^j)\Big]\end{aligned}$$

où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}(\frac{\mu_2-\mu_1}{2})$ et qui sont non ramifiées en q et p, où χ' et χ'' parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^{\times}\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times}$ tels que $\omega_\sigma = \chi'\chi''$ et qui sont non ramifiés en q et p, et où $Y_q = y_0 \oplus (y,-y)$ avec $y_0 \in \mathbb{Z}$ et $y \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$,

– *dans le cas où $\mu_1 = \mu_2$ seulement, la somme*

$$\begin{aligned}\sum_{\xi,\chi',\chi''} \Big[&2\operatorname{tr} i_{L_1}\big((\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^{p}(\tfrac{\mu_0}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime\prime p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), \widetilde{h}^{p}\big)\\ &\quad\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}} \chi_p''(p)^j\\ &-\Big(\sum_{Y_q} \widetilde{h}_{q,L_1}((\xi\circ\det)_q \times \chi_q' \times \chi_q'', Y_q) e^{-\frac{\mu_0 y_0}{2}-(\mu_1+\mu_2+3)|y|}\Big)\\ &\quad\times \operatorname{tr} i_{L_1}\big((\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^{p}(\tfrac{\mu_0}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi_{\mathrm{f}}^{\prime\prime q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), \widetilde{h}^{q,p}\big)\\ &\quad\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}} \xi_p(p)^j(p^{-j/2} + p^{j/2})\Big]\end{aligned}$$

où ξ, χ' et χ'' parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^{\times}\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times}$ tels que $\xi^2 = \chi'\chi''$ et qui sont non ramifiés en q et p, et où $Y_q = y_0 \oplus (y,-y)$ avec $y_0 \in \mathbb{Z}$ et $y \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$.

– *la somme*

$$\sum_{\sigma,\chi',\chi''}\Big[2\,\mathrm{tr}\, i_{L_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^{p}(\tfrac{\mu_0}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}'^{p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1-\mu_2+1}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}''^{p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),\widetilde{h}^{p}\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+\mu_2+2}{2}}\chi_p''(p)^j$$
$$-\Big(\sum_{Y_q}\widetilde{h}_{q,L_1}(\sigma_q\times\chi_q'\times\chi_q'',Y_q)q^{-\frac{\mu_0 y_0}{2}-(\mu_1-\mu_2+1)|y|}\Big)$$
$$\times\,\mathrm{tr}\, i_{L_1}\big(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\mu_0}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1-\mu_2+1}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),h^{q,p}\big)$$
$$\times p^{j\frac{\mu_0+3}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)\Big]$$

où σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante à l'infini σ_∞ est isomorphe à $\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}(-\frac{\mu_1+\mu_2+2}{2})$ et qui sont non ramifiées en q et p, où χ' et χ'' parcourent les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que $\omega_\sigma=\chi'\chi''$ et qui sont non ramifiés en q et p, et où $Y_q=y_0\oplus(y,-y)$ avec $y_0\in\mathbb{Z}$ et $y\in\frac12\mathbb{Z}$.*

(ii) *La formule pour $J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H)$ se déduit de celle de $J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H)$ en remplaçant L_1 par L_2, $(y,-y)$ par (y,y) et en permutant $\sigma_{\mathrm{f}}^p(\frac{\mu_0}{2})$ et $(\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}^p(\frac{\mu_0}{2})$ avec $\chi_{\mathrm{f}}'^p(\lambda)\times\chi_{\mathrm{f}}''^p(\mu_0-\lambda)$.*

(iii) *L'expression $J_S^H(\widetilde{f}^H)$ est égale à la somme sur les caractères $\chi_1',\chi_1'',\chi_2',\chi_2''$ de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que*

$$\chi_{1,\infty}'\chi_{1,\infty}''=\chi_{2,\infty}'\chi_{2,\infty}''=\mathrm{sgn}^{\mu_0}$$

et qui sont non ramifiés en q et p, de l'expression

$$-4\left(\sum_{Y_q}h_{S,q}(\chi_{1,q}'\times\chi_{1,q}''\times\chi_{2,q}'\times\chi_{2,q}'',Y_q)e^{-\frac{\mu_0 y_0}{2}-\frac12(\mu_1+\mu_2+3)(y_1+y_2)-\frac12(\mu_1-\mu_2+1)|y_1-y_2|}\right)$$
$$\times\,\mathrm{tr}\, i_S(\chi_{1,\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{1,\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2})$$
$$\times\chi_{2,\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1-\mu_2+1}{2})\times\chi_{2,\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}),h^{q,p})p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_{1,p}''(p)^j$$
$$+4\left(\sum_{Y_q}h_{S,q}(\chi_{1,q}'\times\chi_{1,q}''\times\chi_{2,q}'\times\chi_{2,q}'',Y_q)e^{-\frac{\mu_0 y_0}{2}-\frac12(\mu_1-\mu_2+1)(y_1-y_2)-\frac12(\mu_1+\mu_2+3)|y_1+y_2|}\right)$$
$$\times\,\mathrm{tr}\, i_S(\chi_{1,\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1+\mu_2+3}{2})\times\chi_{1,\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2})$$
$$\times\chi_{2,\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2})\times\chi_{2,\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\mu_0+\mu_1-\mu_2+1}{2}),h^{q,p})p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+\mu_2+2}{2}}\chi_{2,p}''(p)^j$$

où $Y_q=y_0\oplus(y_1,y_2)$ avec $y_0,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$. □

23. Stabilisation des termes paraboliques

Rappelons que le nombre de Lefschetz est égal à

$$\mathrm{Lef}(f^p;j)=\mathrm{T}_{\mathrm{e}}^G(f^G)-\tfrac14\,\mathrm{T}_{\mathrm{e}}^H(f^H).$$

Ceci nous amène à considérer l'expression

$$
\begin{aligned}
(23.1)\qquad \mathrm{T}_{\mathrm{e}}^{G}(\widetilde{f}^{G})-\tfrac{1}{4}\,\mathrm{T}_{\mathrm{e}}^{H}(\widetilde{f}^{H}) = {} & [J_{G}^{G}(\widetilde{f}^{G})-\tfrac{1}{4}J_{H}^{H}(\widetilde{f}^{H})] \\
& +\tfrac{1}{2}[J_{M_1}^{G}(\widetilde{f}^{G})-\tfrac{1}{4}(J_{L_1}^{H}(\widetilde{f}^{H})+J_{L_2}^{H}(\widetilde{f}^{H}))] \\
& +\tfrac{1}{2}J_{M_2}^{G}(\widetilde{f}^{G}) \\
& +\tfrac{1}{8}[J_{T}^{G}(\widetilde{f}^{G})-\tfrac{1}{2}J_{S}^{H}(\widetilde{f}^{H})].
\end{aligned}
$$

pour f_q et j convenablement choisis.

On a regroupé les termes dans le membre de droite en tenant compte de l'endoscopie au niveau des sous-groupes de Levi. En effet

– le groupe endoscopique de M_1 (resp. M_1') déduit de H par descente n'est autre que le sous-groupe de Levi L_2 (resp. L_1) de H,

– il n'y a pas de groupe endoscopique de M_2 déduit de H par descente,

– le groupe endoscopique de T déduit de H par descente n'est autre que le sous-groupe de Levi S de H.

Lemme 23.2. — *Si l'on identifie L_2 à M_1 par*

$$
(\mathrm{diag}(t',t''),A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix})\longmapsto\begin{pmatrix} t'a & t'b & 0 & 0\\ t'c & t'd & 0 & 0\\ 0 & 0 & t''a & -t''b\\ 0 & 0 & -t''c & t''d\end{pmatrix},
$$

alors on a

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr} i_{L_2}(\chi_{\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}+\lambda)\times\chi_{\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}-\lambda)\times\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}),h^{q,p}) \\
&\qquad\qquad = \operatorname{tr} i_{M_1}(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\chi''^{-1}\circ\det)_{\mathrm{f}}^{q,p}(\lambda)\times\chi_{\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}-\lambda),f^{q,p})
\end{aligned}
$$

et

$$
b^{H}(f_q)_{L_2}(\chi_q'\times\chi_q''\times\sigma_q,Y_q)=f_{q,M_1}(\sigma_q(\chi''^{-1}\circ\det)_q\times\chi_q'',X_q)
$$

quelles que soient les représentations χ',χ'',σ telles que $\chi'\chi''=\omega_\sigma$ et quels que soient $\Lambda=\lambda_0\oplus(\lambda,\lambda)$ dans $(\mathfrak{a}_{L_2})_{\mathbb{C}}^*=(\mathfrak{a}_{M_1})_{\mathbb{C}}^*$ et $Y_q=X_q\in\mathfrak{a}_{L_2,q}=\mathfrak{a}_{M_1,q}$.

Si l'on identifie L_1 à M_1' par

$$
(A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\mathrm{diag}(t',t''))\longmapsto\begin{pmatrix} at' & 0 & bt' & 0\\ 0 & at'' & 0 & -bt''\\ ct' & 0 & dt' & 0\\ 0 & -ct'' & 0 & dt''\end{pmatrix},
$$

alors on a

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr} i_{L_1}(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2})\times\chi_{\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}+\lambda)\times\chi_{\mathrm{f}}''^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}-\lambda),h^{q,p}) \\
&\qquad\qquad = \operatorname{tr} i_{M_1'}(\sigma_{\mathrm{f}}^{q,p}(\chi''^{-1}\circ\det)_{\mathrm{f}}^{q,p}(\lambda)\times\chi_{\mathrm{f}}'^{q,p}(\tfrac{\lambda_0}{2}-\lambda),f^{q,p})
\end{aligned}
$$

et

$$
(b^{H}(f_q))_{L_2}(\sigma_q\times\chi_q'\times\chi_q'',Y_q)=f_{q,M_1'}(\sigma_q(\chi''^{-1}\circ\det)_q\times\chi_q'',X_q)
$$

quelles que soient les représentations σ, χ', χ'' *telles que* $\chi'\chi'' = \omega_\sigma$ *et quels que soient* $\Lambda = \lambda_0 \oplus (\lambda, -\lambda)$ *dans* $(\mathfrak{a}_{L_1})^*_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_{M'_1})^*_{\mathbb{C}}$ *et* $Y_q = X_q \in \mathfrak{a}_{L_1,q} = \mathfrak{a}_{M'_1,q}$.

Si l'on identifie S *à* T *par*

$$\mathrm{diag}((t'_1, t''_1), (t'_2, t''_2)) \longmapsto \mathrm{diag}(t'_1t'_2, t'_1t''_2, t''_1t'_2, t''_1t''_2)$$

alors on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} i_S(\chi'^{q,p}_{1,\mathrm{f}}(\tfrac{\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2}{2}) \times \chi''^{q,p}_{1,\mathrm{f}}(\tfrac{\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2}{2}) \times \chi'^{q,p}_{2,\mathrm{f}}(\tfrac{\lambda_0+\lambda_1-\lambda_2}{2}) \times \chi''^{q,p}_{2,\mathrm{f}}(\tfrac{\lambda_0-\lambda_1+\lambda_2}{2}), h^{q,p})\\ = \operatorname{tr} i_T((\chi'_2\chi''^{-1}_1)^{q,p}_{\mathrm{f}}(\lambda_1) \times (\chi''_2\chi''^{-1}_1)^{q,p}_{\mathrm{f}}(\lambda_2) \times \chi''^{q,p}_{1,\mathrm{f}}(\tfrac{\lambda_0-\lambda_1-\lambda_2}{2}), f^{q,p})\end{aligned}$$

et

$$b^H(f_q)_S((\chi'_2\chi''^{-1}_1)_q \times (\chi''_2\chi''^{-1}_1)_q \times \chi'_q \times \chi''_q, Y_q) = f_{q,T}(\sigma_q(\chi''^{-1} \circ \det)_q \times \chi''_q, X_q)$$

quels que soient les caractères $\chi'_1, \chi''_1, \chi'_2, \chi''_2$ *tels que* $\chi'_1\chi''_1 = \chi'_2\chi''_2$ *et quels que soient* $\Lambda = \lambda_0 \oplus (\lambda_1, \lambda_2)$ *dans* $(\mathfrak{a}_S)^*_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}_T)^*_{\mathbb{C}}$ *et* $Y_q = X_q \in \mathfrak{a}_{S,q} = \mathfrak{a}_{T,q}$.

Démonstration. — Si L s'obtient par descente de M, on vérifie que les termes constants de $\widetilde{h}^p$ le long de n'importe quel $Q \in \mathcal{P}(L)$ et de $\widetilde{f}^p$ le long de n'importe quel $P \in \mathcal{P}(M)$ ont les mêmes intégrales orbitales (on utilise pour cela le fait que M n'a pas d'endoscopie et que l'on a normalisé convenablement le facteur de transfert). On conclut par un théorème d'Harish-Chandra. □

On déduit de ce lemme que dans chacune des expressions

$$J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{4}(J^H_{L_1}(\widetilde{f}^H) + J^H_{L_2}(\widetilde{f}^H))$$

et

$$J^G_T(\widetilde{f}^G) - \tfrac{1}{2}J^H_S(\widetilde{f}^H)$$

les termes faisant intervenir les sommes sur $X_q = Y_q$ se simplifient et les autres se regroupent. Plus précisément, on obtient :

Théorème 23.3. — *L'expression* $\mathrm{T}^G_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^G) - \frac{1}{4}\mathrm{T}^H_{\mathrm{e}}(\widetilde{f}^H)$ *est la somme des quatre expressions suivantes :*

(1) *l'expression* $J^G_G(\widetilde{f}^G) - \frac{1}{4}J^H_H(\widetilde{f}^H)$ *qui est explicitée dans la section* 20 *;*

(2) *l'expression* $J^G_{M_1}(\widetilde{f}^G) - \frac{1}{4}(J^H_{L_1}(\widetilde{f}^H) + J^H_{L_2}(\widetilde{f}^H))$ *qui se récrit*

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma,\chi} \operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), \widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j\\ &-\sum_{\xi,\chi} \operatorname{tr} i_{M_1}\big((\xi \circ \det)^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_1+\mu_2+3}{2}) \times \chi^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}), \widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j\\ &-\sum_{\sigma,\chi} \operatorname{tr} i_{M_1}\big(\sigma^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_1-\mu_2+1}{2}) \times \chi^p_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2-1}{2}), \widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+\mu_2+2}{2}}\chi_p(p)^j\end{aligned}$$

où

– *σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante archimédienne* σ_∞ *est isomorphe à* $\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}(\frac{\mu_2-\mu_1}{2})$ *dans la première somme et à* $\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}(-\frac{\mu_1+\mu_2+2}{2})$ *dans la troisième, et qui sont non ramifiées en p,*

– *χ parcourt les caractères de* $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *qui sont non ramifiés en p,*

– *la deuxième somme n'intervient que pour* $\mu_1=\mu_2$ *et porte en outre sur les caractères ξ de* $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *qui sont non ramifiés en p ;*

(3) *l'expression* $J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G)$ *qui est égale à*

$$\sum_{\chi,\sigma}\operatorname{tr} i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm f}^p(\mu_1+2)\times\sigma_{\mathrm f}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-2}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)$$
$$-\sum_{\chi,\xi}\operatorname{tr} i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm f}^p(\mu_1+2)\times(\xi\circ\det)_{\mathrm f}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-2}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}}\xi_p(p)^j(p^{-j/2}+p^{j/2})$$
$$-\sum_{\sigma,\chi}\operatorname{tr} i_{M_2}\big(\chi_{\mathrm f}^p(\mu_2+1)\times\sigma_{\mathrm f}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_2-1}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_2+2}{2}}(z'(\sigma_p)^j+z''(\sigma_p)^j)$$

où

– *χ parcourt les caractères de* $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *de composante archimédienne* $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_2}$ *dans les première et seconde sommes et* $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_1-1}$ *dans la troisième, et qui sont non ramifiés en p,*

– *σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ *dont la composante archimédienne* σ_∞ *est isomorphe à* $\sigma_{\mu_2+1}(-\frac{\mu_2}{2})$ *dans la première somme et* $\sigma_{\mu_1+2}(-\frac{\mu_1+1}{2})$ *dans la seconde, et qui sont non ramifiées en p,*

– *la seconde somme n'intervient que pour* $\mu_2=0$ *et porte en outre sur les caractères ξ de* $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *de composante archimédienne triviale et qui sont non ramifiés en p ;*

(4) *l'expression* $J_T^G(\widetilde{f}^G)-\frac{1}{2}J_S^H(\widetilde{f}^H)$ *qui se récrit*

$$-\sum_{\chi_1,\chi_2,\chi}\operatorname{tr} i_T\big(\chi_{1,\mathrm f}^p(\mu_1+2)\times\chi_{2,\mathrm f}^p(\mu_2+1)\times\chi_{\mathrm f}^p(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2-3}{2}),\widetilde{f}^p\big)p^{j\frac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2}}\chi_p(p)^j$$

où χ_1,χ_2,χ *parcourent les caractères de* $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ *tels que* $\chi_{1,\infty}\chi_{2,\infty}=\mathrm{sgn}^{\mu_0}$ *et qui sont non ramifiés en p.* □

24. Le théorème principal

Fixons dans toute la suite une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$.

Rappelons que, si $\chi:\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\mathbb{C}^\times$ est un caractère (de Hecke) de composante à l'infini $\chi_\infty=\mathrm{sgn}^\mu|\,|^\lambda$ pour $\mu\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\lambda\in\mathbb{Z}$, la théorie du corps de classes abélien associe à χ un corps de nombres $E(\chi)\subset\mathbb{C}$ tel que $\chi(\mathbb{A}_{\mathrm f}^\times)\subset E(\chi)$ et, pour chaque plongement de $E(\chi)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, une représentation ℓ-adique $V(\chi)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de dimension 1 sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, pure de poids -2λ et caractérisée par la propriété suivante :

(∗) si χ est non ramifié en un nombre premier $p \neq \ell$, il en est de même de $V(\chi)$ et on a

$$\operatorname{tr}(\Phi_p^j, V(\chi)) = \chi_p(p)^j, \ \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Par exemple, on a $E(|\,|) = \mathbb{Q}$ et $V(|\,|) = \overline{\mathbb{Q}}_\ell(1)$ puisque $|p|_p = p^{-1}$. Bien sûr, si χ_1 et χ_2 sont deux caractères comme ci-dessus, $E(\chi_1\chi_2)$ est contenu dans le corps composé $E(\chi_1)E(\chi_2) \subset \mathbb{C}$ et, pour tout plongement de $E(\chi_1\chi_2)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et donc aussi de $E(\chi_1)$ et $E(\chi_2)$, on a $V(\chi_1\chi_2) \cong V(\chi_1) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V(\chi_2)$.

Soit σ une représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ de composante à l'infini

$$\sigma_\infty = \sigma_n(\lambda) = |\det|^\lambda \sigma_n$$

où n est un entier $\geqslant 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ et σ_n est la représentation de la série discrète ayant les même caractères central et infinitésimal que la représentation $\mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{C}^2)$. Eichler, Shimura et Deligne ont associé à σ un corps de nombres $E(\sigma) \subset \mathbb{C}$ sur lequel σ_{f} est défini, et pour tout plongement de $E(\sigma)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, une représentation ℓ-adique $V(\sigma)$ de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, de dimension 2 sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, pure de poids $2 - n - 2\lambda$ et caractérisée par la propriété suivante :

(∗) si σ est non ramifiée en un nombre premier $p \neq \ell$, il en est de même de $V(\sigma)$ et on a

$$\operatorname{tr}(\Phi_p^j, V(\sigma)) = p^{j/2}(z'(\sigma_p)^j + z''(\sigma_p)^j), \ \forall j \in \mathbb{Z},$$

où $\{z'(\sigma_p), z''(\sigma_p)\}$ est l'ensemble des valeurs propres de Frobenius-Hecke de σ_p. On vérifie que, si $\omega_\sigma : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ est le caractère central de σ, on a $E(\omega_\sigma) \subset E(\sigma)$ et, pour tout plongement de $E(\sigma)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et donc aussi de $E(\omega_\sigma)$, on a

$$V(\omega_\sigma) = (\wedge^2 V(\sigma))(1).$$

On vérifie aussi que, pour tout caractère $\chi : \mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \mathbb{C}^\times$ du type considéré précédemment, on a $E((\chi \circ \det)\sigma) \subset E(\chi)E(\sigma) \subset \mathbb{C}$ et, pour tout plongement de $E((\chi \circ \det)\sigma)$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et donc aussi de $E(\chi)$ et $E(\sigma)$, on a

$$V((\chi \circ \det)\sigma) \cong V(\chi) \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} V(\sigma).$$

En particulier, on a $E(\sigma(\lambda)) = E(\sigma)$ et $V(\sigma(\lambda)) = V(\sigma)(\lambda)$ quel que soit l'entier λ.

Considérons maintenant le module virtuel

$$W_G = \sum_i (-1)^i [H_{\mathrm{c}}^i(\mathcal{S}_N \otimes \overline{\mathbb{Q}}, \mathcal{V}_{\mu,\ell}^\vee \otimes_{\mathbb{Q}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell)]$$

sur l'algèbre $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})/\!/K(N), \mathbb{Q})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$.

Théorème 24.1. — *Il existe des modules virtuels explicites W_{M_1}, W_{M_2} et W_T sur cette même algèbre tels que, pour tout nombre premier p ne divisant pas ℓN, toute fonction $f^p \in C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}^p)/\!/K(N)^p, \mathbb{Q})$ et tout entier $j > 0$, on ait l'égalité*

$$\operatorname{tr}(f \times \Phi_p^j, W_G + W_{M_1} + W_{M_2} + W_T) = J_G^G(f_\infty^G f^p b_j^G(\varphi_j)) - \tfrac{1}{4} J_H^H(f_\infty^H h^p b_j^H(\varphi_j)).$$

Démonstration. — Pour tout $M \in \mathcal{L}$ et tout $M(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$-module π_{f}, on note

$$j_M(\pi_{\mathrm{f}}) = i_M(\delta_{P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})}^{-1/2}\pi_{\mathrm{f}})$$

le $G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$-module virtuel associé à l'induite non normalisée $\mathcal{J}_P(\pi_{\mathrm{f}}) = \mathcal{I}_P(\delta_{P(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})}^{-1/2}\pi_{\mathrm{f}})$ pour n'importe quel $P \in \mathcal{P}(M)$, et on note

$$j_M(\pi_{\mathrm{f}})^{K(N)}$$

le $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})$-module virtuel des vecteurs fixes sous $K(N)$ correspondant.

On définit les $C_{\mathrm{c}}(G(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})//K(N), \mathbb{Q})[\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-modules virtuels W_{M_1}, W_{M_2} et W_T par :

$$\begin{aligned} W_{M_1} = &- \sum_{\sigma,\chi} V(\chi)(\tfrac{\mu_1+\mu_2-\mu_0}{2}) \otimes j_{M_1}(\sigma_{\mathrm{f}}(\mu_2+3) \times \chi_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2} - 3))^{K(N)} \\ &+ \sum_{\xi,\chi} V(\chi)(\tfrac{\mu_1+\mu_2-\mu_0}{2}) \otimes j_{M_1}((\xi \circ \det)_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_1+\mu_2}{2} + 3) \times \chi_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2} - 3))^{K(N)} \\ &+ \sum_{\sigma,\chi} V(\chi)(\tfrac{\mu_1-\mu_2-\mu_0-2}{2}) \otimes j_{M_1}(\sigma_{\mathrm{f}}(1-\mu_2) \times \chi_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1+\mu_2}{2} - 2))^{K(N)} \end{aligned}$$

où dans les première et troisième sommes σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ de composante archimédienne $\sigma_{\mu_1-\mu_2+1}$ et $\sigma_{\mu_1+\mu_2+3}$ respectivement, où dans les trois sommes χ parcourt les caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$, et où la seconde somme n'intervient que si $\mu_1 = \mu_2$ et porte en outre sur les caractères ξ de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$;

$$\begin{aligned} W_{M_2} = &- \sum_{\chi,\sigma} V(\sigma)(\tfrac{\mu_1-\mu_2-\mu_0}{2}) \otimes j_{M_2}(\chi_{\mathrm{f}}(\mu_1+4) \times \sigma_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2} - 1))^{K(N)} \\ &+ \sum_{\chi,\xi} (V(\xi) + V(\xi)(-1))(\tfrac{\mu_1-\mu_0}{2}) \\ &\qquad \otimes j_{M_2}(\chi_{\mathrm{f}}(\mu_1+4) \times (\xi\circ\det)_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1}{2} - 1))^{K(N)} \\ &+ \sum_{\chi,\sigma} V(\sigma)(\tfrac{\mu_2-\mu_1-\mu_0-2}{2}) \otimes j_{M_2}(\chi_{\mathrm{f}}(\mu_2+3) \times \sigma_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2} - 1))^{K(N)} \end{aligned}$$

où χ parcourt les caractères de $\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ de composante archimédienne $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_2}$ dans les deux premières sommes et $\mathrm{sgn}^{\mu_0-\mu_1-1}$ dans la dernière, où dans les première et troisième sommes σ parcourt un système de représentants des classes d'équivalence de représentations automorphes cuspidales irréductibles de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ de composante archimédienne σ_{μ_2+1} et σ_{μ_1+2} respectivement, et où la seconde somme n'intervient que si $\mu_2 = 0$ et porte en outre sur les caractères ξ de $\mathbb{R}^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$;

$$W_T = \sum_{\chi_1,\chi_2,\chi} V(\chi)(\tfrac{\mu_1+\mu_2-\mu_0}{2}) \otimes j_T(\chi_{1,\mathrm{f}}(\mu_1+4) \times \chi_{2,\mathrm{f}}(\mu_2+2) \times \chi_{\mathrm{f}}(\tfrac{\mu_0-\mu_1-\mu_2}{2} - 3))^{K(N)}$$

où χ_1, χ_2, χ parcourent les triplets de caractères de $\mathbb{R}_+^\times\mathbb{Q}^\times\backslash\mathbb{A}^\times$ tels que $\chi_{1,\infty}\chi_{2,\infty} = \mathrm{sgn}^{\mu_0}$.

Plus précisément, on introduit le corps de nombres $E \subset \mathbb{C}$ composé de tous les corps de nombres $E(\sigma) \subset \mathbb{C}$ et $E(\chi) \subset \mathbb{C}$ pour toutes les représentations σ et tous les caractères χ (ou ξ, χ_1, χ_2) qui interviennent ci-dessus. Puis, pour chaque plongement de E, et donc aussi des corps $E(\sigma)$ et $E(\chi)$, dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ on définit W_{M_1}, W_{M_2} et W_T par les formules ci-dessus.

Posons

$$\begin{aligned}\Delta(f_q, j) := \operatorname{tr}(f_q f^{q,p} \times \Phi_p^j, W_G + W_{M_1} + W_{M_2} + W_T) \\ - [J_G^G(f_\infty^G f_q f^{q,p} b_j^G(\varphi_j)) - \tfrac{1}{4} J_H^H(f_\infty^H b^H(f_q) h^{q,p} b_j^H(\varphi_j))].\end{aligned}$$

D'après le théorème 23.3, on a l'égalité

$$\Delta(f_q, j) = 0$$

pour tous les $f_q \in C_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q, \mathbb{Q})$ et j qui vérifient

$$|\alpha(\mu)| \log q > D, \ \forall\, \alpha \in \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}, \ \forall\, \mu \in \operatorname{Supp}(f_q^\vee),$$

et

$$j > \frac{D + |\alpha(\mu)| \log q}{\log p}, \ \forall\, \alpha \in R, \ \forall\, \mu \in \operatorname{Supp}(f_q^\vee),$$

où $D > 0$ est la constante du théorème 19.3. Plus précisément, on a

$$\operatorname{tr}(f_q f^{q,p} \times \Phi_p^j, W_{M_1}) = -J_{M_1}^G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{4}(J_{L_1}^H(\widetilde{f}^H) + J_{L_2}^H(\widetilde{f}^H)),$$

$$\operatorname{tr}(f_q f^{q,p} \times \Phi_p^j, W_{M_2}) = -J_{M_2}^G(\widetilde{f}^G)$$

et

$$\operatorname{tr}(f_q f^{q,p} \times \Phi_p^j, W_T) = -J_T^G(\widetilde{f}^G) + \tfrac{1}{2} J_S^H(\widetilde{f}^H).$$

Or il est facile de donner un sens à $\Delta(f_q, j)$ pour $f_q \in C_c(G(\mathbb{Q}_q)//K_q)$ et $j > 0$ arbitraires, et de montrer qu'il existe une fonction $c : (\widehat{T}/W^G) \times \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ à support fini telle que

$$\Delta(f_q, j) = \sum_{\widehat{t}, z} c(\widehat{t}, z) f_q^\vee(\widehat{t}) z^j.$$

Il en résulte que $\Delta(f_q, j)$ est identiquement nulle. □

Références

[0] G. Laumon – « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », *Compositio Math.* **105** (1997), p. 267–359.

[1] K. Fujiwara – « Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture », *Invent. Math.* **127** (1997), p. 489–533.

[2] M. Goresky, G. Harder, R. MacPherson & A. Nair – « Local intersection cohomology of Baily-Borel compactifications », `http://www.math.ias.edu/~goresky/tori1.ps`, 2000.

[3] M. Goresky, R. Kottwitz & R. MacPherson – « Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators », *Duke Math. J.* **89** (1997), p. 477–554.

[4] ———, « Correction to "Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators" », *Duke Math. J.* **92** (1998), p. 665–666.

[5] J.-L. WALDSPURGER – « Le lemme fondamental implique le transfert », *Compositio Math.* **105** (1997), p. 153–236.

[6] R. WEISSAUER – « An application of the hard Lefschetz theorem, The Ramanujan conjecture for genus two Siegel modular forms (An application of the trace formula), Character identities and Galois representations related to the group $GSp(4)$, Four dimensional Galois representations, CAP-Localisation, A special case of the fundamental lemma I, II, III, IV », `http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weissaue/papers/ramanuge.dvi`, 1993-1995.

Extrait des références bibliographiques de [0]

[Ar1] J. ARTHUR – « The L^2-Lefschetz numbers of Hecke operators », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 2, p. 257–290.

[Ar2] ______, « The trace formula in invariant form », *Ann. of Math. (2)* **114** (1981), no. 1, p. 1–74.

[Ar3] ______, « The invariant trace formula. I. Local theory », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 2, p. 323–383.

[Ar4] ______, « On a family of distributions obtained from orbits », *Canad. J. Math.* **38** (1986), no. 1, p. 179–214.

[Ar5] ______, « Intertwining operators and residues. I. Weighted characters », *J. Funct. Anal.* **84** (1989), no. 1, p. 19–84.

[Ar6] ______, « The invariant trace formula. II. Global theory », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 3, p. 501–554.

[Ar7] ______, « On elliptic tempered characters », *Acta Math.* **171** (1993), no. 1, p. 73–138.

[Ar8] ______, « Intertwining operators and residues. II. Invariant distributions », *Compositio Math.* **70** (1989), no. 1, p. 51–99.

[Fa-Ch] G. FALTINGS & C.-L. CHAI – *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990, With an appendix by David Mumford.

[Ha3] T. C. HALES – « The fundamental lemma for Sp(4) », *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), no. 1, p. 301–308.

[Ha4] ______, « On the fundamental lemma for standard endoscopy : reduction to unit elements », *Canad. J. Math.* **47** (1995), no. 5, p. 974–994.

[Har] G. HARDER – « Der Vergleich der topologischen und der arithmetischen Spurformel für GSp_4 ».

[Ko1] R. E. KOTTWITZ – « Points on some Shimura varieties over finite fields », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 2, p. 373–444.

[Ko2] ______, « Shimura varieties and λ-adic representations », in *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988)*, Perspect. Math., vol. 10, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 161–209.

[Pi] R. PINK – « On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne », *Ann. of Math. (2)* **135** (1992), no. 3, p. 483–525.

G. LAUMON, CNRS et Université Paris-Sud, UMR 8628, Mathématique, Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France • *E-mail :* `Gerard.Laumon@math.u-psud.fr`