Astérisque

ERIC URBAN

Sur les représentations p-adiques associées aux représentations cuspidales de $GSp_{4/\mathbb{Q}}$

Astérisque, tome 302 (2005), p. 151-176

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2005__302__151_0>

Astérisque
302, 2005, p. 151–176

SUR LES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES ASSOCIÉES AUX REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES DE $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$

par

Eric Urban

Résumé. — Soit π une représentation cuspidale cohomologique de $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ qui est non ramifiée en p. Nous démontrons que le polynôme caractéristique de l'automorphisme de Frobenius agissant sur le φ-module filtré de la représentation galoisienne p-adique associée à π s'exprime en termes des paramètres de Langlands de la composante locale de π en p.

***Abstract* (On the p-adic Galois representations associated to the cuspidal representations of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$)**

Let π be a cohomological cuspidal representation of $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$ which is unramified at p. We prove that the characteristic polynomial of the Frobenius automorphism acting on the filtred φ-module of the p-adic Galois representation associated to π is expressed in terms of the Langlands parameters of the local component of π at p.

0. Introduction

Soit $\pi = \bigotimes_v \pi_v$ une représentation cuspidale de $\mathrm{GSp}_{4\,/\mathbb{Q}}$ dont la composante archimédienne π_∞ appartient à la série discrète. Dans [**W3**] (voir aussi les travaux de Harder et Laumon [**H**], [**L96, L05**]), Weissauer a montré l'existence d'un système compatible de représentations galoisiennes (de rang 4) $\{\rho_{\pi,\ell}\}_\ell$ associé à π au sens que pour tout p tel que π_p soit non ramifiée et différent de ℓ, $\rho_{\pi,\ell}$ est non ramifié en p et le polynôme caractéristique de $\rho_{\pi,\ell}(\mathrm{Frob}_p)$ est donné par

$$Q_{\pi,p}(X) = (X-\alpha_p)(X-\beta_p)(X-\gamma_p)(X-\delta_p)$$

où $(\alpha_p,\beta_p,\gamma_p,\delta_p)$ sont les paramètres de Hecke de π_p. Pour $\ell = p$, on sait par un théorème de Faltings (*cf.* [**F**]) que la restriction de $\rho_{\pi,p}$ à $G_{\mathbb{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ est cristalline. Soit $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p}) = (V(\rho_{\pi,p}) \otimes B_{\mathrm{cris}})^{G_{\mathbb{Q}_p}}$ où B_{cris} est l'anneau des périodes

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F46, 11F80, 11F85, 14C15, 14C17, 11S37.
Mots clefs. — Représentation galoisiennes p-adiques, représentation cuspidales, formes modulaires de Siegel, motifs.

Ce travail a été partiellement financé par la NSF et le CNRS.

p-adiques de Fontaine. Ce dernier est muni d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et du Frobenius absolu Φ_{cris}. Comme ces actions commutent, on récupère une action linéaire de Φ_{cris} sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p})$. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 1. — *Soit p un nombre premier tel que π soit non-ramifiée en p. Alors le polynôme caractéristique de Φ_{cris} agissant sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p})$ est $Q_{\pi,p}(X)$*

Le résultat analogue dans le cas de $\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ résulte de la construction du motif associé à π et du théorème de Katz-Messing. Par ailleurs, notre méthode permettrait aussi de retrouver ce résultat sans construire le motif associé. Nous en déduirons les corollaires ci-dessous dans les cas ordinaires. Nous renvoyons le lecteur à [**TU**] et [**U1**] pour les définitions d'ordinarité (pour les représentations automorphes) que nous utilisons dans les énoncés suivants qui sont les généralisations naturelles des définitions classiques. Rappelons toutefois que ordinaire pour le parabolique de Siegel signifie que l'opérateur de Hecke $T(p)$ « classique » opère par une unité p-adique. On note $\mathcal{N}$ le caractère cyclotomique donnant l'action de $G_{\mathbb{Q}}$ sur les racines de l'unité une puissance de p.

Corollaire 1. — *Soit π une représentation cuspidale cohomologique de* $\mathrm{GSp}_{4\,/\mathbb{Q}}$ *de poids cohomologique $(a, b; a+b)$ (cf. paragraphe 3.3) telle que π soit non ramifiée en p.*

(i) *Si π est ordinaire en p pour le sous-groupe parabolique de Siegel alors*

$$\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\mathcal{N}^{-a-b-3} \end{pmatrix}$$

avec ε_1 et ε_2 des caractères non ramifiés.

(ii) *Si π est stable à l'infini et π est ordinaire pour le sous-groupe parabolique de Klingen, $\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ stabilise un plan.*

(iii) *Si π est stable à l'infini et π est ordinaire pour le sous-groupe de Borel.*

$$\rho_{\pi,p}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \simeq \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \times & \times & \times \\ 0 & \varepsilon_2\mathcal{N}^{-b-1} & \times & \times \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\mathcal{N}^{-a-2} & \times \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\mathcal{N}^{-a-b-3} \end{pmatrix}$$

avec $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ des caractères non ramifiés.

Remarques

(i) L'importance de la stabilité dans cet énoncé vient du fait qu'elle est équivalente, dans le cas non endoscopique, à l'apparition de tous les poids de Hodge-Tate possibles pour la représentation $\rho_{\pi,p}$; voir paragraphe 1 [**Ta93**] pour ce point. Voir également section 2.3 de [**MT**].

(ii) Si π est ordinaire pour le Borel et π_∞ est générique, à partir des positions respectives des polygones de Hodge et Newton, on voit que tous les poids de Hodge (possibles) doivent intervenir et la représentation est nécessairement stable à l'infini ; lorsqu'elle n'est pas endoscopique.

(iii) Ces résultats sont utilisés dans [**U2**] pour démontrer une première divisibilité vers la conjecture principale pour les représentations modulaires adjointes.

(iv) Par la théorie de [**TU**], on déduit que les représentations galoisiennes associées aux familles de représentations ordinaires de [**TU**] sont ordinaires si au moins une spécialisation de cette famille est stable à l'infini.

Si π est une représentation cuspidale (non cohomologique) dont la composante π_∞ appartient à la limite de la série discrète holomorphe de paramètre de Harish-Chandra sur le mur de la Chambre de Weyl correspondant à la racine longue, Taylor a construit dans [**Ta91**] une représentation galoisienne associée à π et qui se trouve être de dimension 4 grâce aux résultats de Laumon et Weissauer (*cf.* [**U1**]). Comme la construction de Taylor utilise des congruences avec des formes holomorphes cohomologiques, la première partie du Corollaire 1 s'applique aussi à de telles formes. En s'appuyant sur les constructions de [**HST**] et [**Ta94**], on en déduit le corollaire qui suit par les arguments de [**U1**]. Cet énoncé était conjecturé dans *loc. cit.* ce qui en rendait conditionnel le résultat principal.

Corollaire 2. — *Soit σ une représentation cuspidale cohomologique de* $\mathrm{GL}(2)_{/K}$ *pour K un corps imaginaire quadratique sur $\mathbb{Q}$ de caractère central invariant par la conjugaison complexe de K. Soit p un nombre premier décomposé dans $K/\mathbb{Q}$. Alors si σ est ordinaire en une place non ramifié $\wp$ divisant p, la représentation galoisienne p-adique $\varrho_{\sigma,p}$ associée à σ restreinte à un sous-groupe de décomposition en $\wp$ est ordinaire.*

La démonstration du théorème s'articule comme suit. Dans le paragraphe 1, on introduit la catégorie des systèmes compatibles de représentations ℓ-adiques $\mathcal{C}^{S\text{-gr}}$, constituée des systèmes dont tous les sous-quotients ont bonne réduction hors d'un ensemble fini de nombres premiers S avec des polynômes caractéristiques étale et cristallin égaux (cette propriété sera dite de Katz-Messing). Soit X une variété ouverte munie d'une compactification lisse $\overline{X}$ ayant bonne réduction hors de S et de bord ∂X. On montre que tout idempotent de l'algèbre des correspondances sur X (à projections propres) découpe un morceau dans la cohomologie de X vérifiant la propriété de Katz-Messing pourvu que la cohomologie du bord ∂X soit dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. Dans le paragraphe suivant, on vérifie que ce critère est satisfait dans le contexte qui nous intéresse : c'est-à-dire que la cohomologie du bord de la compactification toroïdale du produit fibré de la surface abélienne universelle est un objet de $\mathcal{C}^{S\text{-gr}}$. Au paragraphe 3, on achève la preuve du théorème an appliquant le critère du paragraphe 1 et on prouve les corollaires. En fait, on montre un résultat (voir Théorème 4) sans utiliser le théorème de Weissauer. Ce dernier est utilisé dans [**U2**] pour donner une autre preuve de l'existence de la représentation galoisienne $\rho_{\pi,p}$ de dimension 4 dans le cas ordinaire en utilisant le résultat publié [**L96**] de Laumon lorsque celui de Weissauer ne l'était pas encore. Pour finir, notons que cette méthode permet de montrer des résultats semblables pour les formes cuspidales pour certains groupes unitaires de petit rang $\leqslant 4$.

Je remercie M. Harris de m'avoir signalé une erreur dans une version antérieure de cette note. Je remercie également le rapporteur pour sa lecture attentive du manuscrit.

1. Systèmes compatibles de représentations galoisiennes

1.1. Systèmes. — Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques définitions classiques et introduisons certaines catégories qu'il sera commode d'utiliser tout au long du texte.

Pour tout corps k, on fixe k^{ac} un clôture séparable de k et on pose $G_k = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ac}}/k)$. Pour tout nombre premier p, on fixe un plongement de $\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}$ dans $\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ac}}$ ce qui permet d'identifier $G_{\mathbb{Q}_p}$ comme un sous-groupe de décomposition en p de $G_{\mathbb{Q}}$ et on note $\mathrm{Frob}_p \in G_{\mathbb{Q}_p}$ un élément induisant le Frobenius géométrique sur $\mathbb{F}_p^{\mathrm{ac}}$.

Un système de représentations ℓ-adiques de $G_{\mathbb{Q}}$ à coefficients dans un corps E est la donnée d'un E-espace vectoriel $\mathbf{M}$ tel que pour tout nombre premier ℓ, $\mathbf{M}_\ell = \mathbf{M} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ est muni d'une action de $G_{\mathbb{Q}}$. Un morphisme f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{M}$, est la donnée d'un morphisme de E-espace vectoriel de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{M}$ tel que pour tout ℓ, $f_\ell = f \otimes 1_{\mathbb{Q}_\ell} : \mathbf{N}_\ell \to \mathbf{M}_\ell$ soit $G_{\mathbb{Q}}$-équivariant. Les systèmes de représentations ℓ-adiques à coefficients dans $E \subset \overline{\mathbb{Q}}$ forment ainsi une catégorie que l'on note $\mathcal{C}_E$.

On définit de manière évidente la somme, le produit tensoriel et le Hom interne dans la catégorie $\mathcal{C}_E$, de même qu'on vérifie trivialement qu'elle est abélienne. On appelle rang et on note $\mathrm{rg}\,\mathbf{M}$ la dimension du E-vectoriel sous-jacent. Pour toute extension E'/E, on a un foncteur d'extension des scalaires évident $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M} \otimes E'$ de $\mathcal{C}_E$ dans $\mathcal{C}_{E'}$.

Définition 1. — Soit $\mathbf{M}$ un objet de $\mathcal{C}_E$ et p un nombre premier, on dit que p est un premier de bonne réduction si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\ell \neq p$, la représentation de $G_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbf{M}_\ell$ est non ramifiée en p.
(ii) La représentation $\mathbf{M}_p$ (restreinte à $G_{\mathbb{Q}_p}$) est cristalline au sens de Fontaine.

Pour tout nombre premier p, soit B_{cris} l'anneau de Fontaine sur $\mathbb{Q}_p$. Rappelons qu'il est muni d'une filtration, d'une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ et d'une action du Frobenius absolu Φ_p qui commute à cette dernière. En particulier ce dernier opère sur

$$D_{\mathrm{cris},p}(\mathbf{M}) = H^0(G_{\mathbb{Q}_p}, B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbf{M}_p)$$

qui est libre de rang $\mathrm{rg}\,\mathbf{M}$ sur $\mathbb{Q}_p \otimes E$ lorsque $\mathbf{M}$ à bonne réduction en p.

Définition 2. — Soit $\mathbf{M}$ un objet de $\mathcal{C}_E$ et p un premier de bonne réduction pour $\mathbf{M}$. On dit que $\mathbf{M}$ est compatible en p s'il vérifie les conditions suivantes :

– Pour tout $\ell \neq p$, le polynôme caractéristique de Frob_p agissant sur $\mathbf{M}_\ell$ a ses coefficients dans E et est indépendant de ℓ. On le note $Q_{\text{ét},p}(\mathbf{M})$

– Soit $Q_{\text{cris},p}(\mathbf{M}) \in \mathbb{Q}_p \otimes E[X]$ le polynôme caractéristique de Φ_p opérant sur $D_{\text{cris},p}(\mathbf{M})$, alors on a : $Q_{\text{cris},p}(\mathbf{M}) = Q_{\text{ét},p}(\mathbf{M})$.

Soit S un ensemble fini de nombres premiers. La catégorie $\mathcal{C}_E^S$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_E$ constituée des objets M ayant bonne réduction en tout nombre premier hors de S. La catégorie $\mathcal{C}_E^{S,c}$ des systèmes S-compatibles ayant bonne réduction hors de S est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_E^S$ des systèmes compatibles en tout $p \notin S$. Ces catégories sont évidemment stables par somme, produit tensoriel et Hom interne. $\mathcal{C}_E^S$ est stable par sous-objet et quotient. Par cela nous entendons : Soit $M \in \mathcal{C}_E^S$ et $N \in \mathcal{C}_E$ tel qu'il existe un monomorphisme de N dans M, alors $N \in \mathcal{C}_E^S$.

Soit $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_E$ constitué des objets $\mathbf{M}$ tels que pour toute extension E'/E, $\mathbf{M} \otimes E'$ a une suite de Jordan-Hölder dont les quotients irréductibles sont dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{c}}$. Insistons sur le fait qu'un élément de cette catégorie n'a pas nécessairement bonne réduction hors de S (une extension de représentations non ramifiée en p n'est pas non ramifiée en général).

Lemme 1

(i) *Soit* $0 \to \mathbf{N} \to \mathbf{M} \to \mathbf{P} \to 0$ *une suite exacte d'objets de* $\mathcal{C}_E^S$. *Si parmi* $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{P}$, *deux d'entre eux sont dans* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{c}}$ *(resp.* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$*), il en est de même du troisième.*

(ii) *Soit* $\mathbf{M}$ *un objet de* $\mathcal{C}_E$. *Si* $\mathbf{M}$ *est dans* $\mathcal{C}_E^S$ *et* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$, *il est aussi dans* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{c}}$.

(iii) *Soit* $\mathbf{N} \to \mathbf{M} \to \mathbf{P}$ *une suite exacte d'objets de* $\mathcal{C}_E$. *Si* $\mathbf{N}$ *et* $\mathbf{P}$ *sont dans* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$, *alors il en est de même de* $\mathbf{M}$. *En particulier,* $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ *est stable par sous-objet et est une catégorie abélienne.*

Démonstration. — La partie (i) est triviale. (ii) découle de (i) par dévissage. Pour la partie (iii), on se ramène facilement à montrer que $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ est stable par sous-objets : Soit $\mathbf{M}$ un objet de $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ et soit $f : \mathbf{N} \hookrightarrow \mathbf{M}$ un morphisme injectif dans la catégorie $\mathcal{C}_E$. Il s'agit de montrer que $\mathbf{N}$ appartient à $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. Nous le montrons par récurrence sur la dimension de $\mathbf{N}$. On peut supposer que E est assez gros pour que tous les quotients dans la suite de Jordan-Hölder de $\mathbf{M}$ soient absolument irréductibles. Soit $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ un sous-objet irréductible de $\mathbf{N}$. Son image $f(\mathbf{N}')$ dans $\mathbf{M}$ est un sous-objet irréductible de $\mathbf{M}$ et en considérant la trace de $f(\mathbf{N}')$ sur une filtration de $\mathbf{M}$ ayant des quotients irréductibles dans $\mathcal{C}_E^{S,c}$, on voit facilement que $f(\mathbf{N}')$ est dans $\mathcal{C}_E^{S,c}$. En prenant le quotient de part et d'autre on voit que $\mathbf{N}/\mathbf{N}'$ est un sous-objet de $\mathbf{M}/f(\mathbf{N}')$ et que ce dernier est dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ par (i). Par récurrence on en déduit que $\mathbf{N}/\mathbf{N}'$ est dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. A nouveau par (i), on en déduit que $\mathbf{N}$ est dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. □

1.2. Cohomologie. — Il est commode de définir une cohomologie dans $\mathcal{C}_E$ de la manière suivante. Soit X une variété sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un schéma réduit et de type fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau constructible sur $X(\mathbb{C})$ constitué de E-vectoriels. On dit que $\mathcal{F}$ est admissible s'il existe un faisceau constructible $\mathcal{F}_\mathbb{Z}$ de groupes abéliens de type fini sur le site analytique $X_{/\mathbb{C}}$ tel que $\mathcal{F}$ est obtenu à partir de $\mathcal{F}_\mathbb{Z}$ après extension des scalaires à $\mathbb{Q}$ et tel que $\mathcal{F}_\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se prolonge en un faisceau constructible sur le site étale de $X_{/\mathbb{Q}}$. On note alors $\mathcal{F}_\ell$ le faisceau ℓ-adique sur le site étale de $X_{/\mathbb{Q}}$ correspondant (*i.e.* $\mathcal{F}_\ell = \varprojlim_n (\mathcal{F}\otimes\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}))_{\text{ét}}\otimes\mathbb{Q}_\ell)$. Soit $H^r(X(\mathbb{C}),\mathcal{F})$ la cohomologie du faisceau $\mathcal{F}$ sur $X(\mathbb{C})$. Il est bien connu qu'on a les isomorphismes (*cf.* SGA 4 Exp. XI) de comparaison $H^r_{\text{ét}}(X_{/\mathbb{Q}^{\text{ac}}},\mathcal{F}_\ell) = H^*(X(\mathbb{C}),\mathcal{F})\otimes\mathbb{Q}_\ell$. On peut donc voir $H^*(X(\mathbb{C}),\mathcal{F})$ comme un objet de $\mathcal{C}_E$ que l'on notera $\mathbf{H}^*(X,\mathcal{F})$. Lorsque $\mathcal{F}$ est le faisceau constant de fibres E, on note $\mathbf{H}^*(X,E)$ ou $\mathbf{H}^*(X)$ si aucune confusion n'est possible. On définit similairement la cohomologie à support compact $\mathbf{H}^*_c(X,\mathcal{F})$. On vérifie aisément les points suivants.

Soit $Y\subset X$ une sous-variété de X, c'est-à-dire un sous-schéma fermé et réduit de X. On a la suite longue de cohomologie :

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{q-1}} \mathbf{H}^q_c(X-Y) \longrightarrow \mathbf{H}^q_c(X) \longrightarrow \mathbf{H}^q_c(Y) \longrightarrow \cdots \tag{1}$$

Soit $Y\to X$ un morphisme entre schéma lisse et de type fini sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible admissible de E-vectoriels sur Y. Les faisceaux images directes supérieures à support compact $R^q f_!\mathcal{F}$ sont admissibles et on a la suite spectrale de Leray dans la catégorie $\mathcal{C}_E$:

$$\mathbf{H}^p_c(X,R^q f_!\mathcal{F}) \Longrightarrow \mathbf{H}^{p+q}_c(Y,\mathcal{F}) \tag{2}$$

Pour faciliter les références ultérieures, on énonce le lemme suivant qui est une conséquence facile du lemme 1 et de (1) et (2).

Lemme 2

(i) *Soit $X = X_0\supset X_1\supset\cdots\supset X_n\supset X_{n+1}=\varnothing$ une stratification par des sous-schémas fermés de X. On suppose que pour tout r, $\mathbf{H}^\bullet_c(X_r - X_{r+1})$ est un objet de $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$, $\mathbf{H}^\bullet_c(X)$ est un objet de $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$.*

(ii) *Soient $Y\to X$ un morphisme entre schéma lisses de type fini sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{F}$ un faisceau constructible admissible de E-vectoriels sur Y. On suppose que $\mathbf{H}^p_c(X,R^q f_!\mathcal{F})$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ pour tout p,q tels que $p+q=n$, alors $\mathbf{H}^n_c(Y,\mathcal{F})$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$.*

1.3. Motifs. — On commence par fixer des notations et rappeler certains faits sur les diverses théories cohomologiques et les isomorphismes de comparaisons. Pour toute variété Y lisse sur un corps k supposé parfait s'il est de caractéristique positive, notons Z^*Y (resp. A^*Y) le groupe des cycles sur Y (resp. l'anneau des cycles sur Y modulo l'équivalence rationnelle). Supposons Y propre. On utilise les notations suivantes :

– Lorsque $\mathrm{car}(k) \neq \ell$, $H^q_{\text{ét},\ell}(Y)$ désigne la cohomologie étale ℓ-adique de $Y_{/k^{\mathrm{ac}}}$.

– Si k est de caractéristique 0, $H^q_{\mathrm{dR}}(Y)$ est la cohomologie de de Rham de Y.

– Lorsque $k \subset \mathbb{C}$, $H^q_B(Y)$ est la cohomologie de Betti de Y.

– Lorsque k est fini, $H^q_{\mathrm{cris}}(Y) = \varprojlim_n H^q_{\mathrm{cris}}(Y_{/W_n(k)}) \otimes \mathbb{Q}$ avec $W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n et $H^q_{\mathrm{cris}}(Y_{/W_n(k)})$ la cohomologie cristalline de Y sur $W_n(k)$.

Pour ? = « ét, ℓ », « B », « dR, « cris », soit $c^Y_?$ l' homomorphisme « classe de cycles » de A^*Y dans $H^*_?(Y)$ (*cf.* SGA $4\frac{1}{2}$, [**BO**], [**GM**] pour les définitions et propriétés de ces homomorphismes). Ces cohomologies sont des cohomologies de Weil au sens de [**K**].

Un cycle $h \in A^r(Y \times Y)$ opère sur la cohomologie $H^q_?$ via la classe $c^{Y\times Y}_?(h)$ du cycle h dans la cohomologie $H^{2r}_?(Y \times Y, E)$ via l'identification :

$$H^{2r}_?(Y \times Y) = \bigoplus_{q=0}^{2r} H^q_?(Y) \otimes H^{2r-q}_?(Y) = \bigoplus_{q=0}^{2\dim Y} \mathrm{Hom}(H^q_?(Y), H^{q+2(d-r)}_?(Y))$$

obtenue par la formule de Künneth et la dualité de Poincaré. Comme Y est lisse sur k, l'action des correspondances sur la cohomologie définit un homomorphisme d'algèbre

$$A^*(Y \times Y) \longrightarrow \mathrm{End}_E(H^*_?(Y))$$

la structure d'algèbre sur $A^*(Y \times Y)$ étant donnée par la composition des correspondances (*cf.* [**Fu2**]). On note $\theta^Y_?$ cet homomorphisme.

On rappelle que l'on a les homomorphismes de comparaison suivant :

– Betti-Étale. (SGA 4 Exp. XI) On suppose $k \subset \mathbb{C}$. On a :

$$\alpha_{BE}: \; H^*_B(Y) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^*_{\text{ét},\ell}(Y)$$

– Étale-de Rham. ([**F**]) On suppose que k est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

$$\alpha_{E\mathrm{dR}}: \; H^*_{\text{ét},p}(Y) \otimes B_{\mathrm{dR}} \cong H^*_{\mathrm{dR}}(Y) \otimes B_{\mathrm{dR}}$$

– Étale-Cristallin (*cf.* [**F**]) Soit $\mathcal{Y}$ un schéma propre et lisse sur O une extension finie de $\mathbb{Z}_p$ de corps résiduel k. Soit Y_0 (resp. Y) la fibre spéciale (resp. générique) de $\mathcal{Y}$.

$$\alpha_{EC}: \; H^*_{\text{ét},p}(Y) \otimes B_{\mathrm{cris}} \cong H^*_{\mathrm{cris}}(Y_0) \otimes B_{\mathrm{cris}}$$

– de Rham-Cristallin. (*cf.* [**BO**]) Soient $K = Frac(O)$ et $K_0 = Frac(W(k))$ avec les même notations

$$\alpha_{\mathrm{dR}C}: \; H^*_{\mathrm{dR}}(Y) \cong H^*_{\mathrm{cris}}(Y_0) \otimes_{K_0} K$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec l'isomorphisme de Kunneth, le *pull-back*, la dualité de Poincaré et la formation des classes de cycles (*cf. loc. cit.* dans chaque cas). Par conséquent on a aussi compatibilité des homomorphismes d'anneaux $\theta^Z_?$ pour $? = B, \text{ét}, \mathrm{dR}, \mathrm{cris}$ avec les isomorphismes de comparaisons ci-dessus.

Pour tout schéma $X_{/\mathbb{Q}}$ projectif de dimension d sur $\mathbb{Q}$, on note $\mathrm{Corr}_E(X)$, l'algèbre sur E engendrée par les correspondances sur X modulo l'équivalence homologique ;

c'est-à-dire $\mathrm{Corr}_E(X) = (A^d(X \times X)/\operatorname{Ker}(c_B^{X\times X}) \cap A^d(X \times X)) \otimes E$. La classe d'un élément $h \in A^d(X \times X) \otimes E$ dans $\mathrm{Corr}_E(X)$ sera notée $[h]$.

On considère la catégorie $\mathcal{M}ot_E$ des motifs (de Grothendieck) sur $\mathbb{Q}$ à coefficients dans E. Les objets sont des couples $(X, [h])$ où X est une variété projective lisse sur $\mathbb{Q}$ et $[h]$ un idempotent de $\mathrm{Corr}_E(X)$ (*i.e.* $[h]^2 = [h]$) . Un morphisme de $(X, [h])$ dans $(Y, [g])$ est la donnée d'un cycle C de $X \times Y$ de dimension $\dim X$ modulo l'équivalence homologique tels que $[g \circ C] = [C \circ h]$. On dira qu'un motif $\mathcal{M} = (X, [h])$ a bonne réduction en p s'il en est de même de la variété X. Rappelons comment on définit les diverses réalisations de $\mathcal{M}$ par les diverses théories cohomologiques. Lorsque $? =$ « B », « dR », « ét ℓ », on pose $H^i_?(\mathcal{M}) = \theta^X_?(h)(H^i_?(X) \otimes E)$. Il est à noter que $\theta^X_?(h)$ ne dépend que de la classe $[h]$ modulo l'équivalence homologique car pour tout cycle $z \in A^*(X \times X)$, homologiquement équivalent à zéro, on a $c_?^{X\times X}(z) = 0$ quelque soit $? = B, \mathrm{dR}, \text{ét}\,\ell$. Cela résulte de la compatibilité des isomorphismes de comparaison avec les applications classes de cycles. Soit p un nombre premier de bonne réduction et soit $\mathcal{X}$ un modèle lisse sur $/\mathbb{Z}_p$ de $X_{/\mathbb{Q}_p}$. On note X_0 la fibre spéciale de $\mathcal{X}$. On sait qu'on a un homomorphisme d'anneaux dit de spécialisation [**Fu2**, Section 20.3] :

$$\mathrm{sp} : A^*((X \times X)_{/\mathbb{Q}_p}) \longrightarrow A^*(X_0 \times X_0).$$

Alors, $\theta^{X_0}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{sp}(h))$ est bien définie et on pose $H^i_{\mathrm{cris},p}(\mathcal{M}) = \theta^{X_0}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{sp}(h))(H^i_{\mathrm{cris}}(X_0) \otimes E)$. Le fait que $\theta^{X_0}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{sp}(h))$ ne dépende que de la classe $[h]$ vient du fait suivant : Si $z \in A^*(X \times X)$ est homologiquement équivalent à zéro, comme on l'a remarqué précédemment on a $c_{\mathrm{dR}}^{(X\times X)_{/\mathbb{Q}_p}}(z) = 0$. D'après [**GM**, Thm B.3.1], on en déduit que $c_{\mathrm{cris}}^{X_0\times X_0}(\mathrm{sp}(z)) = 0$ et donc $\theta^{X_0}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{sp}(z)) = 0$. De la compatibilité des isomorphismes de comparaison avec l'isomorphisme de Künneth, la dualité de Poincaré et classes de cycle, on déduit des isomorphismes :

$$H^*_B(\mathcal{M}) \otimes \mathbb{Q}_\ell \cong H^*_{\text{ét},\ell}(\mathcal{M}) \tag{3}$$

$$H^*_{\text{ét},p}(\mathcal{M}) \otimes B_{\mathrm{cris}} \cong H^*_{\mathrm{cris}}(\mathcal{M}) \otimes B_{\mathrm{cris}} \tag{4}$$

Pour tout motif $\mathcal{M} = (X, h)$, on pose $\mathbf{H}^q(\mathcal{M}) = \theta^X_B(h)\mathbf{H}^q(X, E)$.

***Théorème 2* (Katz-Messing+Faltings).** — *Soit S l'ensemble des premiers de mauvaises réductions pour $\mathcal{M}$ (i.e. pour X). Alors pour tout q, le foncteur $\mathcal{M} \mapsto \mathbf{H}^q(\mathcal{M})$ prends ses valeurs dans $\mathcal{C}_E^{S,c}$.*

Démonstration. — C'est un fait bien connu et il résulte principalement du théorème de Katz-Messing (*cf.* [**KM**]) et du théorème de comparaison entre cohomologie étale p-adique et cohomologie cristalline de Faltings (*cf.* [**F**]). Expliquons toutefois comment on passe des hypothèses en caractéristique zéro à celles en caractéristique p du théorème de Katz-Messing dans sa forme originale. On reprend les notations précédentes. Par les théorèmes de changement de bases propre et lisse ℓ-adiques et la compatibilité des morphismes de spécialisations et de classes de cycle sp, $c_{\text{ét},\ell}^{X_0\times X_0}$ et $c_{\text{ét},\ell}^{X\times X}$

(*cf.* SGA 6 Exp. 10 Appendice), on a un isomorphisme de $\mathbb{Q}_\ell$-vectoriel

$$H^q_{\text{ét},\ell}(\mathcal{M}) = \theta^X_{\text{ét},\ell}(h)(H^q_{\text{ét},\ell}(X)\otimes E) \cong \theta^{X_0}_{\text{ét},\ell}(\mathrm{sp}(h))(H^i_{\text{ét},\ell}(X_0)\otimes E). \tag{5}$$

De plus l'action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ est non ramifiée sur le membre de gauche et l'action de Frob_p sur ce dernier est compatible avec celle du Frobenius absolu Φ sur celui de droite. Soit maintenant Φ^* le graphe du Frobenius absolu dans $X_0 \times X_0$. D'après le théorème de Katz-Messing [**KM**, thm 2] appliqué au cycle $\Phi^* \circ \mathrm{sp}(h) = \mathrm{sp}(h) \circ \Phi^*$, on a :

$$\det(T\cdot \mathrm{id} - \Phi; \theta^{X_0}_{\text{cris}}(h)\cdot(H^q_{\text{cris}}(X_0)\otimes E)) = \det(T\cdot\mathrm{id} - \Phi; \theta^{X_0}_{\text{ét},\ell}(h)\cdot(H^q_\ell(X_0)\otimes E)) \tag{6}$$

En conjuguant (5), (6), (3) et (4), on obtient $Q_{\text{ét},p}(H^q_B(\mathcal{M})) = Q_{\text{cris},p}(H^q_B(\mathcal{M}))$ pour tout nombre premier p de bonne réduction. □

1.4. Pseudo-motifs. — Dans le paragraphe précédent, on a défini une algèbre de correspondance pour une variété propre et lisse X opérant sur la cohomologie de X. Lorsque X n'est plus propre, il faut faire une hypothèse de propreté sur les correspondances.

Soient X_1 et X_2 des variétés connexes de dimension d définies sur K un corps algébriquement clos et munies de compactifications lisses $X_1 \overset{j^1}{\hookrightarrow} \overline{X}_1$ et $X_2 \overset{j^2}{\hookrightarrow} \overline{X}_2$. Soit ℓ un nombre premier différent de la caractéristique de K.

Soit $Z \subset X_1 \times X_2$ une correspondance irréductible (*i.e.* une sous-variété fermée irréductible de $X_1 \times X_2$). Pour $i = 1, 2$, soit pr_i la projection de $X_1 \times X_2$ sur le i-ème facteur X_i. On dit que la correspondance irréductible Z est propre si et seulement si les projections $\mathrm{pr}_1|_Z$ et $\mathrm{pr}_2|_Z$ sont propres. Plus généralement on dira qu'une correspondance (*i.e.* $\in Z^*X_1 \times X_2$) est propre si chacun de ses constituants l'est.

Soit $Z \subset X_1 \times X_2$ une correspondance irréductible propre. Comme la composée $Z \hookrightarrow X_1 \times \overline{X}_2 \to X_1$ est propre par hypothèse, l'immersion $Z \hookrightarrow X_1 \times \overline{X}_2$ est propre et donc fermée. Cette procédure fait de toute correspondance propre de $X_1 \times X_2$ une correspondance de $X_1 \times \overline{X}_2$. De même, en utilisant la propreté de la seconde projection, une correspondance propre de $X_1 \times X_2$ peut se voir comme une correspondance de $\overline{X}_1 \times X_2$.

Pour toute correspondance propre $Z = \sum_i a_i Z_i$, posons $|Z| = \bigcup_i Z_i$. Si Z est pur de codimension r, d'après ce qui vient d'être dit, on peut lui associer une classe de cohomologie ℓ-adique (*cf.* SGA $4\frac{1}{2}$) $c_\ell(Z) = c_\ell^{X_1\times\overline{X}_2}(Z) \in H^{2r}_{|Z|}(X_1 \times \overline{X}_2, \mathbb{Q}_\ell(r))$. Par ailleurs, pour un tel Z on a

$$H^{2r}_{|Z|}(X_1 \times \overline{X}_2, \mathbb{Q}_\ell(r)) = H^{2r}_{|Z|}(X_1 \times \overline{X}_2, \mathrm{pr}_2^* j^2_! \mathbb{Q}_\ell(r))$$

car $|Z| \subset X_1 \times X_2$.

Définition 3. — Pour toute correspondance propre Z de $X_1 \times X_2$, on définit la classe de cohomologique ℓ-adique $\theta_\ell(Z)$ de Z comme l'image de $c_\ell(Z)$ dans $H^\bullet(X_1 \times \overline{X}_2, \mathrm{pr}_2^* j^2_! \mathbb{Q}_\ell)$.

On dira que deux correspondances propres Z et Z' sont homologiquement équivalente si elles induisent la même classe. Étant donné les isomorphismes de comparaison entre cohomologie étale et de Betti, cette notion d'équivalence homologique est indépendante de ℓ. On note $\mathrm{Corr}^c_E(X_1 \times X_2)$ l'espace vectoriel sur E des correspondances propres modulo l'équivalence homologique. On a donc

$$\theta_\ell : \mathrm{Corr}^c_E(X_1 \times X_2) \hookrightarrow H^\bullet(X_1 \times \overline{X}_2, \mathrm{pr}_2^* j_!^2 \mathbb{Q}_\ell)$$

Par dualité de Poincaré et isomorphismes de Künneth, on a aussi :

$$H^\bullet(X_1 \times \overline{X}_2, \mathrm{pr}_2^* j_!^2 \mathbb{Q}_\ell) = H^\bullet(X_1, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^\bullet_c(X_2, \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(H^\bullet_c(X_1, \mathbb{Q}_\ell), H^\bullet_c(X_2, \mathbb{Q}_\ell))$$

Si X_1 et X_2 sont des variétés définies sur $\mathbb{Q}$, on a donc un morphisme E-linéaire :

$$\theta : \mathrm{Corr}^c_E(X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{H}^\bullet_c(X_1, E), \mathbf{H}^\bullet_c(X_2, E))$$

On vérifie facilement qu'une correspondance de codimension r induit un homomorphisme de degré $2(r-d)$ sur la cohomologie à support propre.

Variante. — On peut voir plus concrètement l'action des correspondances propres sur la cohomologie de la façon suivante :

Par propreté de $\mathrm{pr}_1|_Z$, on peut définir $\mathrm{pr}_1^* : H^q_c(X_1, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q_c(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ Par ailleurs, $\mathrm{pr}_2^* : H^q(X_2, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ est toujours bien défini. Soit $\alpha \in H^q_c(X_1, \mathbb{Q}_\ell)$, $\theta(Z)\cdot\alpha \in H^q_c(X_2, \mathbb{Q}_\ell)$ est défini par :

$$\mathrm{Tr}_{X_2}(\theta(Z) \cdot \alpha \cup \beta) = \mathrm{Tr}_Z(\mathrm{pr}_1^* \alpha \cup \mathrm{pr}_2^* \beta)$$

pour tout $\beta \in H^{2d-q}(X_2, \mathbb{Q}_\ell(d))$ où on a noté par $\mathrm{Tr}_W : H^{2d}_c(W, \mathbb{Q}_\ell(d)) \to \mathbb{Q}_\ell$, le morphisme trace pour W sur K purement de dimension d (*cf.* SGA 4 Exp. XVIII). En notant pr_{2*} l'homomorphisme de $H^\bullet_c(X_1 \times \overline{X_2}, \mathrm{pr}_2^* j_!^2 \mathbb{Q}_\ell)$ dans $H^\bullet(\overline{X_2}, j_!^2 \mathbb{Q}_\ell)$ dual de pr_2^* (*i.e.* tel que $\mathrm{Tr}_{X_2}(\mathrm{pr}_{2*}(\alpha) \cup \beta) = \mathrm{Tr}_{X_1 \times \overline{X_2}}(\alpha \cup \mathrm{pr}_2^*(\beta))$ pour tout $\beta \in H^\bullet(X_2, \mathbb{Q}_\ell)$), la description précédente peut encore se récrire :

$$\theta(Z) \cdot \alpha = \mathrm{pr}_{2*}(\theta_\ell(Z) \cup \mathrm{pr}_1^*(\alpha))$$

en voyant $\mathrm{pr}_1^*(\alpha)$ cette fois comme l'image de α par $\mathrm{pr}_1^* : H^q_c(X_1, \mathbb{Q}_\ell) \to H^q_c(X_1 \times \overline{X_2}, \mathbb{Q}_\ell)$.

Soient X_1, X_2, X_3 des variétés lisses sur $\mathbb{Q}$ munies de compactifications lisses $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$. On peut définir la composition de correspondances propres en utilisant la théorie de l'intersection. Soient $Z \subset X_1 \times X_2$ et $W \subset X_2 \times X_3$ des correspondances irréductibles propres et soit Δ la diagonale de $X_2 \times X_2$. Soit $U = Z \times W \cap X_1 \times \Delta \times X_3$. On peut définir le produit d'intersection (*cf.* [**Fu2**, Chap. 6])

$$(Z \times W) \cdot (X_1 \times \Delta \times X_3) \in A^*(U)$$

Comme $Z \hookrightarrow X_1 \times \overline{X}_2$ et $W \hookrightarrow \overline{X}_2 \times X_3$ sont des immersions fermées, il en est de même de $U \hookrightarrow Z \times W \hookrightarrow X_1 \times \overline{X}_2 \times \overline{X}_2 \times X_3$. Donc la projection sur les première et dernière composantes $\mathrm{pr}_{14} : U \to X_1 \times X_3$ est propre et on pose

$$Z \circ W = \mathrm{pr}_{14*}((Z \times W) \cdot (X_1 \times \Delta \times X_3)) \in A^*(\mathrm{pr}_{14}(U))$$

Cette correspondance n'est définie que modulo l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{pr}_{14}(U)$ mais n'importe quel cycle dans cette classe d'équivalence rationnelle définit une correspondance propre. Ceci résulte du :

Lemme 3. — *Les projections* $\mathrm{pr}_1 : U \to X_1$ *et* $\mathrm{pr}_4 : U \to X_3$ *sont propres.*

Démonstration. — En effet, considérons le diagramme ci-dessous dans lequel toutes les immersions sont fermées.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] & Z \times X_2 \times \overline{X}_3 \cap X_1 \times \Delta \times \overline{X}_3 \arrow[d, "(1)"] & & \\
& Z \times X_2 \cap X_1 \times \Delta \arrow[r, hook] \arrow[d, "(2)"] & X_1 \times \Delta \arrow[r, hook] & X_1 \times X_2 \times \overline{X}_2 \arrow[d, "(3)"] \\
& Z \arrow[rr, hook] & & X_1 \times X_2
\end{tikzcd}$$

La projection (3) est trivialement propre, il en est donc de même de (2). (1) étant propre, par composition avec $Z \to X_1$, on en déduit que $\mathrm{pr}_1 : U \to X_1$ est propre. Avec un argument semblable, on montre aussi que $\mathrm{pr}_4 : U \to X_3$ est propre. □

Ceci entraîne que $Z \circ W$ est une correspondance propre dont la classe dans $H^\bullet_{\mathrm{pr}_{14*}(U)}(X_1 \times \overline{X_3}, \mathbb{Q}_\ell)$ et donc dans $H^\bullet(X_1 \times \overline{X_3}, \mathrm{pr}_2^* j_!^3 \mathbb{Q}_\ell)$ est bien définie. Cette construction définit un produit de composition

$$\mathrm{Corr}^c_E(X_1 \times X_2) \times \mathrm{Corr}^c_E(X_2 \times X_3) \longrightarrow \mathrm{Corr}^c_E(X_1 \times X_3)$$

Pour que ce produit soit bien défini, il faut en fait vérifier qu'il ne dépend que de la classe de relation homologique des correspondances. Pour cela il suffit de voir que l'homomorphisme induit par la classe de $Z \circ W$ vaut $\theta(Z) \circ \theta(W)$. Cela revient après un calcul classique à vérifier que :

$$c_\ell((Z \times W) \cdot (X_1 \times \Delta \times \overline{X}_3)) = c_\ell(Z) \otimes c_\ell(W) \cup c_\ell(X_1 \times \Delta \times \overline{X}_3)$$

dans $H^\bullet_U(X_1 \times \overline{X}_2 \times X_2 \times \overline{X}_3, \mathbb{Q}_\ell)$. Cela résulte du lemme suivant car $X_1 \times \Delta \times \overline{X}_3$ est lisse.

Lemme 4. — *Soient S et T deux sous-variétés irréductibles d'une variété X sur K. Supposons S et X lisses. Alors*

$$c_\ell(S \cdot T) = c_\ell(S) \cup c_\ell(T) \in H^\bullet_{S \cap T}(X, \mathbb{Q}_\ell)$$

via le morphisme $\cup : H^\bullet_S(X, \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^\bullet_T(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^\bullet_{S\cap T}(X, \mathbb{Q}_\ell)$

Démonstration. — Voir la discussion p. 248-249 de [**FC**]. □

On fixe maintenant X une variété algébrique lisse sur $\mathbb{Q}$ pure de dimension d muni d'une compactification projective lisse $X \hookrightarrow \overline{X}$ de complémentaire un diviseur à croisements normaux. On pose $\mathrm{Corr}_E^c(X) = \mathrm{Corr}_E^c(X \times X)$. D'après la discussion précédente appliquée à $X = X_1 = X_2 = X_3$, on voit que $\mathrm{Corr}_E^c(X)$ est munie d'une structure d'algèbre pour la composition des correspondances et que le morphisme E-linéaire

$$\theta^X : \mathrm{Corr}_E^c(X) \longrightarrow \mathrm{End}_E(\mathbf{H}_c^\bullet(X,E))$$

est un homomorphisme d'algèbres.

Proposition 1. — *Soit S l'ensemble des premiers de mauvaise réduction pour $\overline{X}$. Soit h un projecteur de $\mathrm{Corr}_E^c(X)$. On suppose que pour $i \in \{q-1, q\}$, $\mathbf{H}^i(\partial X)$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ alors $\theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E)$ est dans la catégorie $\mathcal{C}^{S-c}$.*

Démonstration. — Écrivons h sous la forme

$$(*) \qquad h = \sum_i a_i[V_i]$$

où pour chaque i, V_i désigne une correspondance propre irréductible et soit $h' \in \mathrm{Corr}(\overline{X})$ définie par $h' = \sum_i a_i[\overline{V_i}]$, $\overline{V_i}$ désignant l'adhérence de V_i dans $\overline{X} \times \overline{X}$ (bien entendu, la définition de h' dépend de la représentation $(*)$ de h). Comme $\mathrm{Corr}_E(\overline{X})$ est de dimension finie, il existe un polynôme P à coefficients dans E tel que $\overline{h} = P(h')$ est un idempotent dont l' action sur la cohomologie de $\overline{X}$ induit une décomposition :

$$\mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E) = \theta^{\overline{X}}(\overline{h})\mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E) \oplus (\mathrm{id} - \theta^{\overline{X}}(\overline{h}))\mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E)$$

pour laquelle le premier facteur (resp. le second) est le sous-espace de $\mathbf{H}^\bullet(\overline{X})$ sur lequel h' opère de façon inversible (resp. de façon nilpotente).
Considérons maintenant le morphisme canonique $j_! : \mathbf{H}_c^\bullet(X,E) \to \mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E)$. Par le lemme 5 ci-dessous, le diagramme suivant est commutatif :

$$(7) \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{H}_c^\bullet(X,E) & \longrightarrow & \mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E) \\ {\scriptstyle \theta^X(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{\overline{X}}(h')} \\ \mathbf{H}_c^\bullet(X,E) & \longrightarrow & \mathbf{H}^\bullet(\overline{X},E) \end{array}$$

Par conséquent, l'image de $\theta^X(h)\cdot\mathbf{H}_c^*(X,E)$ par $j_!$ est contenue dans $\theta^{\overline{X}}(\overline{h})\cdot\mathbf{H}^*(\overline{X},E)$. De même l'image de $(\mathrm{id} - \theta^X(h)) \cdot \mathbf{H}_c^*(X,E)$ par $j_!$ est contenue dans $(\mathrm{id} - \theta^{\overline{X}}(\overline{h})) \cdot \mathbf{H}^*(\overline{X},E)$. La suite exacte longue de restriction au bord

$$0 \longrightarrow \mathbf{H}_c^{q-1}(\partial X,E) \xrightarrow{\delta_{q-1}} \mathbf{H}_c^q(X,E) \longrightarrow \mathbf{H}^q(\overline{X},E) \xrightarrow{r_q} \mathbf{H}^q(\partial X,E)$$

induit donc la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\delta^{q-1}) \cap \theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E) \longrightarrow \theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E) \longrightarrow \theta^{\overline{X}}(\overline{h}) \cdot \mathbf{H}^q(\overline{X},E)$$
$$\longrightarrow \mathbf{H}^q(\partial X,E) \cap \mathrm{Im}(r_q) \longrightarrow 0$$

Par le théorème 2, le troisième terme de cette suite exacte est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,c}$.

$\mathrm{Im}(\delta^{q-1}) \cap \theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E)$ et $\mathbf{H}^q(\partial X, E) \cap \mathrm{Im}(r_q)$ sont respectivement quotient de $\mathbf{H}_c^{q-1}(\partial X, E)$ et sous-objet de $\mathbf{H}_c^q(\partial X, E)$. Il sont donc dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. Mais ils sont aussi respectivement sous-objet de $\mathbf{H}_c^q(X,E)$ et quotient de $\mathbf{H}_c^q(\overline{X},E)$. Ils sont donc dans $\mathcal{C}_E^S$. Par le lemme 1(ii), ils sont donc dans $\mathcal{C}_E^{S,c}$.

Par ailleurs, comme ∂X est un diviseur à croisement normaux dans $\overline{X}$ ayant bonne réduction hors de S, on sait par un théorème de Deligne (SGA 7 Exp. XIV lemme 2.11) que $H_c^q(X_{\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_\ell)$ est non ramifiée hors de $S \cup \{\ell\}$. Par le théorème de comparaison de Faltings, on sait également que $H_c^q(X_{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_p)$ est une représentation cristalline de $G_{\mathbb{Q}_p}$ pour $p \notin S$. Donc $\mathbf{H}_c^q(X,E)$ et a fortiori $\theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E)$ sont dans $\mathcal{C}_E^S$. En appliquant plusieurs fois, le lemme 1, on déduit aisément que $\theta^X(h)\cdot\mathbf{H}_c^*(X)$ appartient à la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,c}$. En effet, par ce que l'on vient de dire, le noyau de la dernière flèche (qui est le conoyau de la première) est donc dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,c}$. Puis que le conoyau de la première flèche et $\mathrm{Im}(\delta^{q-1}) \cap \theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E)$ sont dans $C_E^{S,c}$, il en est de même pour $\theta^X(h) \cdot \mathbf{H}_c^q(X,E)$. □

Lemme 5. — *Soit Z irréductible et soit $\overline{Z} \subset \overline{X}_1 \times \overline{X}_2$ l'adhérence de Zariski de Z dans $\overline{X}_1 \times \overline{X}_2$. On note $j^Z : Z \hookrightarrow \overline{Z}$. Soit $H_c^q(X_i, \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{j_!^i} H^q(\overline{X}_i, \mathbb{Q}_\ell)$ le morphisme canonique induit par le morphisme de faisceau sur $\overline{X}_i : j_!^i\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{Q}_\ell$. Alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_c^\bullet(X_1,\mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{j_!^1} & H^\bullet(\overline{X}_1,\mathbb{Q}_\ell) \\ {\scriptstyle\theta(Z)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\theta(\overline{Z})} \\ H_c^\bullet(X_2,\mathbb{Q}_\ell) & \xrightarrow{j_!^2} & H^\bullet(\overline{X}_2,\mathbb{Q}_\ell) \end{array}$$

Démonstration. — Pour tout $W \xhookrightarrow{j_!^W} \overline{W}$ purs de dimension d, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^q(\overline{W},\mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2d-q}(\overline{W},\mathbb{Q}_\ell(d)) & \longrightarrow & H^{2d}(\overline{W},\mathbb{Q}_\ell(d) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_{\overline{W}}} & \mathbb{Q}_\ell \\ {\scriptstyle j_!^W}\big\uparrow \quad\quad \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{res}_W} & & {\scriptstyle j_!^W}\big\uparrow & & \big\| \\ H_c^q(W,\mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2d-q}(W,\mathbb{Q}_\ell(d))) & \longrightarrow & H_c^{2d}(W,\mathbb{Q}_\ell(d)) & \xrightarrow{\mathrm{Tr}_W} & \mathbb{Q}_\ell \end{array}$$

Soit $\alpha \in H_c^q(X_1,\mathbb{Q}_\ell)$, alors pour tout $\beta \in H^{2d-q}(\overline{X}_2,\mathbb{Q}_\ell(d))$, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{\overline{X}_2}(\theta(\overline{Z}) \cdot j_!^1\alpha \cup \beta) &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Tr}_{\overline{Z}}(\mathrm{pr}_1^* j_!^1\alpha \cup \mathrm{pr}_2^*\beta) = \mathrm{Tr}_{\overline{Z}}(j_!^Z \mathrm{pr}_1^*\alpha \cup \mathrm{pr}_2^*\beta) \\ &= \mathrm{Tr}_Z(\mathrm{pr}_1^*\alpha \cup \mathrm{res}_Z \mathrm{pr}_2^*\beta) = \mathrm{Tr}_Z(\mathrm{pr}_1^*\alpha \cup \mathrm{pr}_2^* \mathrm{res}_{X_2}\beta) \\ &\overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Tr}_{X_2}(\theta(Z) \cdot \alpha \cup \mathrm{res}_{X_2}\beta) = \mathrm{Tr}_{\overline{X}_2}(j_!^2\theta(Z) \cdot \alpha \cup \beta). \end{aligned}$$

D'où $j_!^2 \circ \theta(Z) = \theta(\overline{Z}) \circ j_!^1$ et le diagramme du lemme 5 est commutatif. □

2. Cohomologie des variétés de Siegel et de leur compactifications

2.1. Rappels et préliminaires. — Soient $G = \mathrm{GSp}_{2g\,/\mathbb{Z}}$ et $G' = \mathrm{Sp}_{2g\,/\mathbb{Z}}$ son groupe dérivé ; on note ν le morphisme canonique de G dans $\mathbb{G}_m$ dont G' est le noyau. Soient $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles sur $\mathbb{Q}$ dont on fixe une décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}_f$. Soit K_∞ le stabilisateur du morphisme de groupe défini sur $\mathbb{R}$ $h : \mathbf{C}^\times \to G(\mathbb{R})$

$$h(x+iy) = \begin{pmatrix} x1_g & y1_g \\ -y1_g & x1_g \end{pmatrix}.$$

Pour tout sous-groupe net ouvert compact $U \subset G(\mathbb{A}_f)$, on considère le modèle canonique $M_{g,U\,/\mathbb{Q}}$ défini sur $\mathbb{Q}$ de la variété de Shimura dont les points complexes sont donnés par

$$M_{g,U}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/U.K_\infty$$

Soit $A_{g,U} \to M_{g,U}$ la variété abélienne universelle de dimension relative g et soit $A^s_{g,U}$ le produit fibré s-ième de $A_{g,U}$ avec elle-même au dessus de $M_{g,U}$. Pour tout n un entier naturel, soit $U(n)$ le sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$ constitué des éléments entiers congrus à 1_{2g} modulo n. On note $M_{g,n\,/\mathbb{Q}} = M_{g,U(n)\,/\mathbb{Q}}$.

Par les travaux de Ash, Mumford, Rapoport et Tai(*cf.* [**AMRT**]) et Pink [**P**], il existe des compactifications toroïdales projectives lisses $\overline{M}_{g,n\,/\mathbb{Q}}$ et $\overline{A^s}_{g,n\,/\mathbb{Q}}$ respectivement de $M_{g,n}$ et $A^s_{g,n}$. Au début des années 90, Faltings et Chai en ont construit des modèles lisses définis sur $\mathbb{Z}[1/n]$ et de complémentaire un diviseur à croisements normaux relatif. De plus, ils montrent qu'il existe un schéma semi-abélien $\mathcal{G}_{g,n}$ défini sur $M_{g,n}$ prolongeant le schéma abélien universel $A_{g,n}$.

Soit S_n l'ensemble des nombres premiers divisant n. Le but de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 3. — *Soient s, g et n comme ci-dessus. On suppose que pour tout entier $r < g$, $\mathbf{H}^*(A^{s+r}_{r,n}, E)$ est un objet de $\mathcal{C}_E^{S_n,\mathrm{gr}}$, alors il en est de même de $\mathbf{H}^*(\partial \overline{A}^s_{g,n})$*

Le corollaire ci-dessous donne le critère permettant d'appliquer la proposition 1 pour démontrer le Théorème principal de cet article.

Corollaire 3. — *Pour tout entier s, $\mathbf{H}^*(\partial \overline{A}^s_{2,n})$ est dans $\mathcal{C}_E^{S_n,\mathrm{gr}}$.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier les hypothèses du théorème dans le cas $g = 2$. Soit $A_{1,n} \xrightarrow{f} M_{1,n}$ la courbe elliptique universelle au dessus de la courbe modulaire ouverte avec structure de niveau n. On a la suite spectrale de Leray $\mathbf{H}^i(M_{1,n}, R^j f_*\mathbb{Q}) \Rightarrow \mathbf{H}^{i+j}(A^s_{1,n}, \mathbb{Q})$ qui dégénère en E_2, de sorte que l'on a un filtration sur $\mathbf{H}^p(A^s_{1,n})$ avec des quotients de la forme à $\mathbf{H}^i(M_{1,n}, \mathrm{Sym}^q(R^1 f_*\mathbb{Q})(i+q-p))$. Chacun de ces espaces a un gradué qui est une somme directe de réalisation de motif de Scholl (*cf.* [**Sc**]) (associé à des formes modulaires cuspidales donc de rang 2 et irréductibles) et de motifs de rang 1 définis sur $\mathbb{Q}$, d'où le résultat. $\square$

2.2. $\mathbb{G}_m^r$-torseurs et plongements toriques. — On commence par le lemme élémentaire suivant :

Lemme 6. — *Soit Y une variété sur $\mathbb{Q}$ et soit G un $\mathbb{G}_m^r$-torseur sur Y pour la topologie étale. Supposons que $\mathbf{H}_c^*(Y)$ est dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$, alors il en est de même de $\mathbf{H}_c^*(G)$.*

Démonstration. — On montre ce résultat par récurrence sur r. On fait agir de façon évidente $\mathbb{G}_m^r$ sur $\mathbb{G}_m^{r-1}\times\{0\}$, et on définit le produit contracté $G' = (\mathbb{G}_m^{r-1}\times\{0\})\times^{\mathbb{G}_m^r} G$. Alors G est un $\mathbb{G}_m$ torseur sur G' dont on note f le morphisme structural.

Sous-lemme. — *$R^q f_! \mathbb{Q}_\ell = 0$ pour $q \neq 1, 2$, $R^1 f_! \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ et $R^2 f_! \mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell(-1)$.*

Démonstration du sous-lemme. — Posons $\overline{G} = \mathbb{A}^1 \times^{\mathbb{G}_m} G$ en considérant G comme un $\mathbb{G}_m$-torseur sur G' ; $\overline{G}$ est un fibré en droites sur G' et le complémentaire de G dans $\overline{G}$ est donné par la section zéro de G' dans $\overline{G}$. En d'autre terme on a le diagramme :

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, equal, "\pi\circ i"'] & \overline{G} \arrow[d, "\pi"] & G \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "\pi\circ j"] \\ & G' & \end{tikzcd}$$

On a la suite exacte longue correspondante de cohomologie étale ℓ-adique :

$$(8) \qquad \cdots \longrightarrow R^{q-1}(\pi\circ i)_!\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^q(\pi\circ j)_!\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^q\pi_!\mathbb{Q}_\ell \longrightarrow R^q(\pi\circ i)_!\mathbb{Q}_\ell$$

Comme un $\mathbb{G}_m$-torseur est localement trivial pour la topologie étale, $\overline{G}$ est localement isomorphe à $\mathbb{A}^1$ au dessus de G'. Comme $\mathbb{A}^1$ est acyclique, nous en déduisons que $R^q\pi_!\mathbb{Q}_\ell = 0$ pour $q \neq 2$. Par ailleurs, pour des raisons de dimension les foncteurs images directes supérieures R^q dans la suite exacte (8) sont nuls pour $q > 2$ et sont isomorphes au faisceau $\mathbb{Q}_\ell(-1)$ pour $q = 2$ par dualité de Poincaré. On obtient donc que $R^q(\pi\circ j)_!\mathbb{Q}_\ell$ est trivial pour $q \neq 1,2$ et on a $R^1(\pi\circ j)_!\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell$ et $R^2(\pi\circ j)_!\mathbb{Q}_\ell = \mathbb{Q}_\ell(-1)$. □

Pour terminer la preuve du lemme, notons que G' est un $\mathbb{G}_m^{r-1}$-torseur sur X. On en déduit donc par l'hypothèse de récurrence que $\mathbf{H}_c^p(G', R^q f_!\mathbb{Q})$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. On conclut en appliquant le lemme 2 (ii). □

On déduit de ce lemme un corollaire sur les plongements toriques. Soient $T = \mathbb{G}_m^r$, $M = X^*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{gp-al}}(T, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}^r$ et $N = X_*(T) = \mathrm{Hom}_{\text{gp-al}}(\mathbb{G}_m, T)$ (le $\mathbb{Z}$-dual de M). Soit Σ une décomposition en cônes rationnels polyédraux (*cf.* [**Fu1**] pour la définition précise) d'un cône fermé convexe C de $N_\mathbb{R} = N\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{R}$. On note $\tau \prec \sigma$ pour dire que τ est une face de σ (*i.e.* $\tau\subset\overline{\sigma}$). Pour chaque σ, on a un plongement torique affine :

$$T = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[N]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[N\cap\sigma^\vee]) = T_\sigma$$

avec $\sigma^\vee = \{n\in N_\mathbb{R} \mid n^*(n) \geqslant 0\ \forall n^*\in\sigma\}$. Ces derniers se recollent en un plongement $T \hookrightarrow T_\Sigma$ avec une action de T sur T_Σ prolongeant celle sur T. De plus, on a une stratification naturelle. Elle est donnée par la décomposition en T-orbites qui est indexée sur les cônes de la décomposition :

$$T_\Sigma = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} Z_\sigma$$

où pour chaque σ, Z_σ est localement fermée et $Z_\sigma \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[N \cap \sigma^\perp])$ est un tore isomorphe à $\mathbb{G}_m^{r-\dim(\sigma)}$.

Soit H un groupe opérant linéairement sur N. Cette action se transporte en une action sur Σ et on suppose la condition d'admissibilité :

(F) $\quad$ *Σ admet un nombre fini d'orbites sous H.*

Pour Δ un sous-ensemble de Σ stable pour l'action de H, posons $W_\Delta = \bigsqcup_{\sigma\in\Delta} Z_\sigma \subset T_\Sigma$. Le corollaire s'énonce :

Corollaire 4. — *On conserve les hypothèses et notations du lemme précédent. On suppose que $\mathbf{H}^\bullet(Y,E)$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$, alors il en est de même pour $\mathbf{H}_c^*(G \times^T (W_\Delta/H))$.*

Démonstration. — Soit $\Delta_m \subset \Delta$ le sous-ensemble des cônes de dimension supérieure ou égale à m contenus dans Δ. Rappelons d'abord (*cf.* [**Fu1**]) que pour $\sigma \in \Sigma$ l'adhérence de Z_σ est donnée par $\overline{Z}_\sigma = \bigcup_{\tau\succ\sigma} Z_\tau$. Par conséquent $X_m = G \times^T (W_{\Delta_m}/H)$ est un sous-schémas fermé de $X_0 = G \times^T (W_\Delta/H)$ et lorsque m varie, on a une filtration décroissante $X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_{r+1} = \varnothing$. De plus, pour tout m,

$$X_m - X_{m+1} = \bigsqcup_{\tau \in (\Delta_m - \Delta_{m+1})/H} G \times^T Z_\tau$$

est une réunion finie disjointe topologique de $\mathbb{G}_m^{r-m}$-torseurs sur S. Par le lemme précédent, $\mathbf{H}_c^*(X_m - X_{m+1})$ est donc dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$ pour tout m. Par le lemme 2.(i) on conclut que $\mathbf{H}_c^*(X_0) = \mathbf{H}_c^*(G \times^T (W_\Delta/H))$ est aussi dans $\mathcal{C}_E^{S,\mathrm{gr}}$. $\square$

2.3. Compactifications toroïdales. — Dans ce paragraphe, nous isolons les résultats de [**FC**] qui nous seront utiles. Afin de faciliter les références, on reprend les notations et terminologies des chapitres IV et VI de *loc. cit.* à l'exception près que nous notons $M_{g,n}$ le schéma de module des variétés abéliennes de dimension g muni d'une structure principale de niveau n au lieu de $\mathcal{A}_{g,n}$ comme dans *loc. cit.*

Afin d'utiliser les résultats du paragraphe précédents, nous allons dégager une stratification du bord de $\overline{A}_{g,n}^s$ par des $\mathbb{G}_m^t$-torseurs. Soit D_r le lieu des points de $\overline{M}_{g,n}$ au dessus desquels la variété semi-abélienne universelle $\mathcal{G}_{g,n}$ est de rang torique r. On pose

$$\overline{D}_r = \bigcup_{g\geqslant i\geqslant r} D_i$$

Par la semi-continuité supérieure du rang torique, on voit que $\overline{D}_r$ est un sous-schéma fermé de $\overline{M}_g(n)$ (en fait, c'est l'adhérence de Zariski de D_r mais on n'utilisera pas ce point). On a $\partial\overline{M}_g(n) = \overline{D}_1$ et $D_0 = M_g(n)$.

Pour tout $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini Y, on note $Y^* = \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{Z})$, $Y_{\mathbb{R}} = Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $B(Y)$ le réseau des formes bilinéaires symétriques entières définies sur Y et $S^2(Y)$ le carré symétrique de Y (isomorphe au $\mathbb{Z}$-dual de $B(Y)$). Soit $C(Y)$ (resp. $C(Y)^\circ$) le cône de $B(Y)_{\mathbb{R}}$ des formes positives (resp. définies positives) dont le radical est défini sur $\mathbb{Q}$.

On pose $X = \mathbb{Z}^g$ et on munit $X \oplus X^*$ de l'accouplement symplectique $\langle x+x', y+y'\rangle = y'(x) - x'(y)$. On fixe $\Sigma = \Sigma(X)$ une décomposition $\mathrm{GL}(X)$-admissible lisse de $C(X)$ en cônes rationnels polyédraux (un éventail $\mathrm{GL}(X)$-admissible) à laquelle est associée la compactification toroïdale $M_{g,n}$. Soient X_ξ un facteur direct totalement isotrope de rang r de $X \oplus X$ et $E_\xi = B(X_\xi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m/\mathbb{Z}}$. L'éventail Σ induit un éventail Σ_ξ de $C(X_\xi) \subset B(X_\xi)_{\mathbb{R}} = X_*(E_\xi)_{\mathbb{R}}$ auquel on associe un plongement torique $E_\xi \hookrightarrow \overline{E_\xi}$. Soit W_ξ la réunion des E_ξ-orbites correspondant aux cônes contenus dans $C(X_\xi)^\circ$ (*i.e.* $W_\xi = \bigsqcup_{\sigma \in C(X_\xi)^\circ} Z_\sigma$ *cf.* notations du paragraphe 2.2).

Proposition 2. — *D_r est une réunion disjointe topologique de sous-variétés (non canoniquement) isomorphes à*

$$\Xi_\xi \times^{E_\xi} W_\xi / \mathrm{GL}(X_\xi)(n) \tag{9}$$

où Ξ_ξ est un E_ξ-torseur sur $S_\xi = \mathrm{Hom}(X_\xi, A_{g-r,n}) \cong A^r_{g-r,n}$ où $A_{g-r,n}$ désigne la variété abélienne universelle de dimension relative $g-r$ sur $M_{g-r,n}$ et $\mathrm{GL}(X_\xi)(n) = \mathrm{Ker}(\mathrm{GL}(X_\xi) \to \mathrm{GL}(X_\xi/nX_\xi))$.

Démonstration. — C'est une conséquence de la construction de [**FC**]. Voir la discussion précédant le Théorème IV.6.7 et le Corollaire IV.6.10. □

Maintenant on décrit la stratification du bord de $\partial\overline{A}^s_{g,n}$. Soient Σ_s un éventail $\mathrm{GL}(X) \times (X^*)^s$-admissible lisse de

$$C_s(X) = \{(b; l_1, \dots, l_s) \in C(X) \times (X^*_{\mathbb{R}})^s \quad \mathrm{Ker}(l_i) \supset rad(b)\}$$

adaptée à Σ (*cf.* [**FC**] p. 96 et p.195-96) et auquel est associé la compactification toroïdale $\overline{A}^s_{g,n}$. Pour tout X_ξ comme dans (9), on note $\Sigma_s(X_\xi)$ la décomposition induite par Σ_s sur $C_s(X_\xi)$. Soient $F_\xi = (S^2(X_\xi) \times X^s_\xi) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_m$ et $F_\xi \hookrightarrow \overline{F_\xi}$ le plongement torique correspondant à $\Sigma_s(X_\xi)$. Soit μ la projection canonique de $B(X)_{\mathbb{R}} \times (X^*_{\mathbb{R}})^s$ sur $B(X)_{\mathbb{R}}$. Cette dernière induit un morphisme μ_ξ de $B(X_\xi)_{\mathbb{R}} \times (X^*_\xi \otimes \mathbb{R})^s$ sur $B(X_\xi)_{\mathbb{R}}$ et le morphisme canonique de F_ξ dans E_ξ se prolonge en un morphisme de plongements toriques tel que le carré suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} F_\xi \arrow[r] \arrow[d] & E_\xi \arrow[d] \\ \overline{F_\xi} \arrow[r] & \overline{E_\xi} \end{tikzcd}$$

Soit Δ_ξ l'ensemble des cônes τ de $\Sigma_s(X_\xi)$ tels qu'il existe $\sigma \in \Sigma(X_\xi)$ tel que $\mu_\xi^t(\sigma^\perp) \subset \tau^\perp$. Alors on a :

(10) $$W_\xi \times_{\overline{E}_\xi} \overline{F}_\xi = \bigcup_{\tau \in \Delta_\xi} Z_\tau$$

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 7. — *Soit ϕ un morphisme entre tores déployés $T_1 \to T_2$. Soient pour $i = 1,2$ $X_i = \mathrm{Hom}_{\text{gp-al}}(\mathbb{G}_m, T_i)$, Σ_i un éventail de $X_i \otimes \mathbb{R}$ et $T_i \hookrightarrow \overline{T}_i$ le plongement torique correspondant. Soit $\phi^t : X_1 \to X_2$ le morphisme induit par ϕ, on suppose que pour tout cône $\sigma \in \Sigma_1$, $\phi^t(\sigma)$ est contenu dans un cône de Σ_2. Alors ϕ induit un carré commutatif*

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r] \arrow[d] & \overline{T}_1 \arrow[d] \\ T_2 \arrow[r] & \overline{T}_2 \end{tikzcd}$$

de plus pour tout cône $\sigma \in \Sigma_2$, on a

$$\overline{T_1} \times_{\overline{T}_2} Z_\sigma = \bigcup_{\phi^*(\sigma^\perp) \subset \tau^\perp} Z_\tau$$

Démonstration. — La première partie du lemme est triviale. Pour la seconde, on remarque que l'action de T_1 sur $\overline{T}_1$ laisse stable $\overline{T_1} \times_{\overline{T}_2} Z_\sigma$ et on observe la décomposition de $\overline{T_1} \times_{\overline{T}_2} Z_\sigma$ en orbites sous l'action de T_1. Si Z_τ est l'une d'elles, ϕ induit un morphisme :

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Y_i \cap \tau^\perp]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[Y_i \cap \sigma^\perp])$$

avec $Y_i = \mathrm{Hom}_{\text{gp-al}}(T_i, \mathbb{G}_m) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_i, \mathbb{Z})$. On a donc $\phi^t(\sigma^\perp) \subset \tau^\perp$. □

Soit $T_\xi = X_\xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_m$. Il y a une variété semi-abélienne G_ξ sur S_ξ de partie abélienne $A_{g-r,n/S_\xi}$ et de partie torique isomorphe à T_{ξ/S_ξ} *i.e.* telle qu'on ait la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_\xi \longrightarrow G_\xi \longrightarrow A_{g-r,n/S_\xi} \longrightarrow 0$$

G_ξ est universelle au sens que toute variété semi-abélienne de rang torique r est un *pull-back* de G_ξ. On considère alors $\Xi_\xi^s = G_\xi^s \times_{/S_\xi} \Xi_\xi$. C'est un F_ξ-torseur sur $A^s_{g-r,n/S_\xi} (\cong A^{s+r}_{g-r,n/\mathbb{Q}(\zeta_n)})$.

Proposition 3. — *$\overline{A}^s_{g,n} \times_{\overline{M}_{g,n}} D_r$ est une réunion disjointe topologique de sous-variétés (non canoniquement) isomorphes à*

$$\Xi^s_\xi \times^{F_\xi} \Big(\coprod_{\tau \in \Delta_\xi} Z_\tau \Big) / \, \mathrm{GL}(X_\xi)(n) \times n \cdot X^s_\xi \tag{11}$$

Démonstration. — Cela résulte de la construction de $\overline{A^s_{g,n}}$ [**FC**, Ch VI] et de la décomposition (10). □

Corollaire 5. — *Soit $r \geqslant 1$. Supposons que $\mathbf{H}^\bullet(A^{s+r}_{g-r,n})$ est un objet de $\mathcal{C}_E^{S_n\text{-gr}}$. Alors $\mathbf{H}^*_c(\overline{A}^s_{g,n} \times_{\overline{M}_{g,n}} D_r)$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S_n\text{-gr}}$.*

Démonstration. — Cela résulte de la Proposition précédente. Il suffit d'appliquer le corollaire 4 avec $W_\Delta = W_{\Delta_\xi} = \bigcup_{\tau \in \Delta_\xi} Z_\tau$, $Y = A^{s+r}_{g-r,n}/_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$, $T = F_\xi \cong \mathbb{G}_m^{rs+r(r+1)/2}$, $H = \mathrm{GL}(X_\xi)(n) \times n \cdot X^s_\xi$. □

La preuve du Théorème 3 s'obtient en appliquant le lemme 2 à la stratification $\overline{A}^s_{g,n} \times_{\overline{M}_g(n)} \overline{D}_1 \supset \overline{A}^s_{g,n} \times_{\overline{M}_g(n)} \overline{D}_2 \cdots \supset \overline{A}^s_{g,n} \times_{\overline{M}_g(n)} \overline{D}_g$. □

3. Représentations cuspidales pour $\mathrm{GSp}_{2g\,/\mathbb{Q}}$

3.1. Rappels sur les correspondances de Hecke. — Soit $\gamma \in M_{2g\times 2g}(\widehat{\mathbb{Z}}) \cap \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$. Soit $\mathrm{Isog}_{g,n,\gamma\,/\mathbb{Q}} \hookrightarrow M_{g,n} \times M_{g,n/\mathbb{Q}}$ la correspondance de Hecke classifiant les isogénies $\phi : A \to A'$ entre variétés abéliennes (de caractéristique zéro) principalement polarisées de dimension g telles que pour tout ℓ, le morphisme entre les modules de Tate $\phi_\ell : T_\ell(A) \to T_\ell(A')$ soit équivalent à γ (*i.e.* dont la matrice dans des bases symplectiques appartient à la classe double $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_l)\gamma\,\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Z}_\ell)$ en prenant sur les modules de Tate l'accouplement symplectique induit par l'accouplement de Weil et la polarisation principale). La correspondance $\mathrm{Isog}_{g,n,\gamma}$ peut se décrit aussi de la façon suivante. Soit $U = U(n)$. La multiplication à droite par γ, induit un morphisme $\gamma^\natural : M_{g,\gamma U\gamma^{-1}}(\mathbb{C}) \to M_{g,U}(\mathbb{C})$ qui est en fait défini sur $\mathbb{Q}$. $\mathrm{Isog}_{g,n,\gamma}$ est l'image dans $M_{g,U} \times M_{g,U\,/\mathbb{Q}}$ de $M_{g,U\cap\gamma U\gamma^{-1}/\mathbb{Q}}$ par $\mathrm{id} \times \gamma^\natural$.

On définit également une correspondance $\mathcal{R}^s_{g,n,\gamma/\mathbb{Q}}$ sur $A^s_{g,n/\mathbb{Q}}$. L'homomorphisme $\gamma^\natural$ définit un morphisme qu'on note de la même façon entre les produits fibrés des variétés abéliennes universelles.

$$\gamma^\natural A^s_{g,U\,/\mathbb{Q}} \longrightarrow A^s_{g,\gamma^{-1}U\gamma/\mathbb{Q}}$$

Alors $\mathcal{R}^s_{g,n,\gamma/\mathbb{Q}}$ est défini comme l'image canonique de $(1 \times \gamma^\natural)_* A^s_{g,U\cap\gamma U\gamma^{-1}/\mathbb{Q}}$ dans $A^s_{g,n} \times A^s_{g,n}$. Les correspondances que nous venons de définir sont propres au sens du paragraphe 1. Soit $\mathcal{H}_g(n)$ l'algèbre de Hecke abstraite engendrée sur $\mathbb{Q}$ par les classes doubles $U(n)\gamma U(n)$ avec $\gamma \in G(\mathbb{A}_f)$. Il est facile de voir que $U(n)\gamma U(n) \mapsto \mathrm{Isog}_{g,n,\gamma}$ (resp. $U(n)\gamma U(n) \mapsto \mathcal{R}^s_{g,n,\gamma}$) définit des homomorphismes d'algèbre de $\mathcal{H}_g(n)$ dans $\mathrm{Corr}_\mathbb{Q}(M_{g,n/\mathbb{Q}})$ (resp. de $\mathrm{Corr}_\mathbb{Q}(A^s_{g,n/\mathbb{Q}})$).

Soit f^s la projection canonique de $A^s_{g,n/M_{g,n}}$ sur $M_{g,n}$. On a la suite spectrale de Leray :

$$E_2^{p,q} = H_c^p(M_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, R^q f^s_* \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{p+q}(A^s_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Il est facile de vérifier que l'action de $\mathrm{Isog}_{g,n,\gamma}$ sur les termes $E_2^{p,q}$ de la suite spectrale induit une action sur son aboutissement qui coïncide avec l'action de $\mathcal{R}^s_{g,n,\gamma}$ sur $H_c^{p+q}(A^s_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_\ell)$.

3.2. Découpage du poids. — Nous commençons par des préliminaires sur les correspondances relatives. Soit T une variété définie sur $\mathbb{Q}$ et Y un T-schéma lisse de type fini de dimension d tel que le morphisme structural $Y \xrightarrow{f} T$ soit propre et plat. Soit $Z \hookrightarrow Y$ une immersion fermée tel que $Z_{/T}$ soit plat de codimension r. On sait qu'on peut définir la classe $c_\ell^Y(Z) \in H_Z^{2r}(Y, \mathbb{Q}_\ell(r))$. Par ailleurs, comme $R^{2r} f_* \mathbb{Q}_\ell(r))$ est le faisceau associé au préfaisceau $V \mapsto H^{2r}(f^{-1}(V), \mathbb{Q}(r))$, on a un morphisme canonique de $H^{2r}(Y, \mathbb{Q}_\ell(r)$ dans $H^0(T, R^{2r} f_* \mathbb{Q}_\ell(r))$. On pose la définition suivante :

Définition 4. — La classe relative (à T) de Z dans Y, notée $c_\ell^{Y/T}(Z)$ est l'image de $c_\ell(Z)$ par le morphisme canonique $H^{2r}(Y, \mathbb{Q}_\ell(r)) \to H^0(T, R^{2r} f_* \mathbb{Q}_\ell(r))$.

Cette définition se justifie de la façon suivante. Soit t un point géométrique de T. On note Y_t et Z_t respectivement les fibres de Y et de Z au dessus de t. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} H^{2r}(Y, \mathbb{Q}_\ell(r)) & \xrightarrow{\varphi_t} & H^{2r}(Y_t, \mathbb{Q}_\ell(r)) \\ \downarrow & & \| \\ H^0(T, R^{2r} f_* \mathbb{Q}_\ell(r)) & \xrightarrow{\psi_t} & R^{2r} f_* \mathbb{Q}_\ell(r))_t \end{array}$$

et on a

$$\varphi_t(c_\ell(Z) = \psi_t(c_\ell^{Y/T}(Z)) = c_\ell^{Y_t}(Z_t)$$

Une correspondance relative irréductible sur $Y_{/T}$ est un sous-schéma fermé irréductible $Z_{/T}$ plat sur T de $Y \times_T Y$ de codimension r. Comme Y est propre sur T, $Y \times_T Y \hookrightarrow Y \times Y$ est une immersion fermée. Ainsi Z est aussi un sous-schéma fermé de $Y \times Y$ dont il n'est pas difficile de voir que c'est une correspondance propre au sens du paragraphe 1.4. De plus via sa classe relative $c_\ell^{Y \times_T Y/T}(Z)$ et l'isomorphisme

$$H^0(T, R^{2r}(f \times f)_* \mathbb{Q}_\ell) = \mathrm{Hom}(R^\bullet f_*, R^{\bullet + 2(r-d)} f_*)$$

la correspondance relative $Y_{/T}$ définit un homomorphisme $R^\bullet f_* \to R^{\bullet+2(r-d)} f_*$. Par ailleurs, comme Z est une correspondance propre de $Y \times Y$ (au sens du paragraphe 1.4), Z définit un morphisme $\theta_\ell(Z) : H^\bullet(Y, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{\bullet+2(r-d)}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le lemme suivant.

Lemme 8. — *Avec les notations précédentes, les morphismes définis ci-dessus induisent un morphisme sur les suites spectrales de Leray :*

$$H^p(T, R^q f_* \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^p(T, R^{q+2(r-d)} f_* \mathbb{Q}_\ell)$$

qui induit le morphisme $\theta_\ell(Z) : H^{p+q}(Y, \mathbb{Q}_\ell) \to H^{p+q+2(r-d)}(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ *sur leur aboutissements.*

Nous sommes maintenant prêt pour définir une correspondance relative dans le produit fibré de la variété abélienne universelle permettant d'isoler les faisceaux (irréductibles) localement constants de la variété de Siegel. On fixe $\lambda = (a_1, \dots, a_g; c)$ avec $a_i, c \in \mathbb{Z}$. λ détermine un poids dominant de $G = \mathrm{GSp}_{2g}$ si $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_g \geqslant 0$ et $a_1 + \cdots + a_g \cong c$ modulo 2 de la façon suivante. Soit $T \subset G$ le tore diagonal. On pose

$$\lambda(\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_g, zx_1^{-1}, \dots, zx_g^{-1})) = x_1^{a_1} \cdots x_g^{a_g} z^{(c - \sum_i a_i)/2}$$

Soit L_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ. L_λ définit un système local admissible $\underline{L}_\lambda$ (au sens du paragraphe 1) sur $M_{g,U}$.

Dans la suite, on suppose que $c = a_1 + \cdots + a_g$, ce qui n'est pas restrictif quant au résultat final (il suffira de faire une torsion à la Tate). Le but de cette section est de démontrer la proposition suivante.

Proposition 4. — *Pour tout* $U \subset G(\mathbb{A}_f)$ *ouvert compact, il existe une correspondance propre* $e_\lambda \in \mathrm{Corr}_{\mathbb{Q}}({}_UA_g^s)$ *tel que* $e_\lambda \cdot R^\bullet f^s{}_* \mathbb{Q}_\ell = \underline{L}_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$. *i.e.* $e_\lambda R^i f^s_* \mathbb{Q}_\ell = \underline{L}_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ *lorsque* $i = s$ *et* 0 *sinon.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{St} = L_{(1,0,\dots,0;1)}(\mathbb{Q})$ la représentation standard de rang $2g$ de GSp_{2g}. On note $\langle , \rangle : \mathrm{St} \otimes \mathrm{St} \to \mathbb{Q}$ l'accouplement symplectique symplectique sur St.

Choisissons $s = s_\lambda = \sum_i a_i$. Alors L_λ est un facteur directe de $\otimes^s \mathrm{St}$ en tant que représentation algébrique de G. On va voir qu'il existe un idempotent $E_\lambda \in \mathrm{End}(\Lambda^*(\mathrm{St}^s))$ dont l'image est exactement L_λ. Il est construit à partir des éléments des types suivants :

(i) (Multiplications) Pour une famille de nombre entiers non nuls $\underline{n} = (n_1, \dots, n_s)$, soit $[\underline{n}] = [n_1] \otimes \cdots \otimes [n_s] \in \mathrm{End}(\otimes^s \mathrm{St})$ où $[n_i]$ désigne la multiplication par n_i sur la i-ème composante de $\otimes^s \mathrm{St}$.

(ii) (Permutations) Pour toute permutation σ des entiers $\{1, \dots, g\}$, soit ϕ_σ l'endomorphisme de $\mathrm{St}^{\otimes^s}$ obtenu par permutation des composantes selon σ.

(iii) (Contractions) La construction suivante est due à H. Weyl. Pour chaque paire (p, q) d'entiers tels que $p < q$, on considère l'homomorphisme $\psi_{p,q} : \otimes^s \mathrm{St} \to \otimes^{s-2} \mathrm{St}$ défini par

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \longmapsto \langle v_p, v_q \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \widehat{v_p} \otimes \cdots \otimes \widehat{v_q} \otimes \cdots \otimes v_s$$

et soit $\phi_{p,q}$ la flèche duale $\otimes^{s-2} \mathrm{St} \to \otimes^s \mathrm{St}$ après avoir identifié V et son dual via $\langle , \rangle$. Soit $\Psi = \sum_{p<q} \psi_{p,q}$ et $\Phi = \sum_{p<q} \phi_{p,q}$. On a $\Psi \circ \Phi = g \cdot \mathrm{id}$. Donc $e_s = \mathrm{id} - 1/g \cdot \Phi \circ \Psi$

est un idempotent de $\mathrm{End}(\otimes^s \mathrm{St})$ et

$$e_{\langle s\rangle} \cdot \otimes^s \mathrm{St} = \mathrm{St}^{\langle s\rangle} = \bigcap_{p<q} \mathrm{Ker}(\psi_{p,q})$$

On traite d'abord le cas λ non trivial (*i.e.* $\lambda \neq (0,\ldots,0;0)$).

Choisissons $\underline{n}$ tel que les n_i soient premiers entre eux deux à deux et posons $s_{\underline{n}} = \frac{1}{g!}\sum_\sigma [\underline{n}^\sigma]$. le sous-espace propre (généralisé) de $\Lambda^* \mathrm{St}^s$ de $s_{\underline{n}}$ pour la valeur propre $\Pi_i n_i$ est $\otimes^s \mathrm{St}$. Il existe un polynôme P à coefficients rationnels tel que si $e_{\underline{n}} = P(s_{\underline{n}})$ alors $e_{\underline{n}} \cdot \Lambda^*(\mathrm{St}^s) = \otimes^s \mathrm{St}$.

Puisque les permutation du (ii) commutent avec les contractions $\psi_{p,q}$ et $\phi_{p,q}$, elles commutent avec $e_{\langle s\rangle}$. D'après Young, il existe un idempotent d_λ dans l'algèbre du groupe sur $\mathbb{Q}$ des endomorphismes de permutations $(\varphi_\sigma)_{\sigma\in S_g}$ tel que $L_\lambda = d_\lambda \mathrm{St}^{\langle s\rangle}$ (*cf.* [**FH**, Th 17.11]). Soit $E_\lambda = d_\lambda \circ e_{\langle s\rangle} \circ e_{[\underline{n}]}$, c'est trivialement un idempotent de $\mathrm{End}(\Lambda^* \mathrm{St}^s)$ ayant pour image L_λ.

Lorsque λ est trivial, on prend $s = 1$ et on prend $E_0 = (2 - [2])/2$. On vérifie immédiatement que $E_0 \cdot \Lambda^i \mathrm{St} = \mathbb{Q} = L_0$ si $i = 0$ et 0 si $i = 1$.

Passons maintenant à la construction de e_λ. On s'inspire de [**FC**, p.235]. On a $R^\bullet f_{s*}\mathbb{Q}_\ell = \Lambda^\bullet R^1(f_*\mathbb{Q}_\ell)^s$ et la fibre de $R^1(f_*\mathbb{Q}_\ell)^s$ en un point géométrique x est canoniquement isomorphe au module de Tate $V_\ell(A_x) = T_\ell(A_x)\otimes\mathbb{Q}_\ell \cong \mathrm{St}(\mathbb{Q}_\ell)$ de la variété abélienne classifiée par x. Plus précisément, on a même $R^1(f_*\mathbb{Q}_\ell) = \underline{\mathrm{St}}(\mathbb{Q}_\ell)$. D'après la discussion précédente, il suffit donc de construire des correspondances relatives de $A^s_{g,U/M_{g,n}}$ qui induisent les homomorphismes du type (i), (ii) et (iii) ci-dessus sur la fibre $\Lambda^\bullet V_\ell(A_x)^s$. On prend les correspondances suivantes :

(i)' Soit $Z_{\underline{n}}$ le graphe de l'isogénie de $A^s_{g,U}$ définie par la multiplication par n_i sur le i-ème facteur.

(ii)' Soit Z_σ le graphe de l'automorphisme de $A^s_{g,U}$ défini par permutation des facteurs de $A^s_{g,U}$ suivant σ.

(iii)' Soit $\mathcal{P}$ le fibré de Poincaré sur $A^2_{g,U}$ et soit $c_1(\mathcal{P})$ sa classe de Chern dans $A^1(A^2_{g,U})$. Soit $\mathrm{pr}_{p,q} : A^s_{g,U} \to A^2_{g,U}$ la projection sur les composantes p et q. Soit $\delta : A^s_{g,U} \hookrightarrow A^s_{g,U} \times_{M_{g,U}} A^s_{g,U}$ le plongement diagonal. Comme δ est propre et $\mathrm{pr}_{p,q}$ est plat, on peut poser

$$A_{p,q} = \delta_*\,(\mathrm{pr}^*_{p,q}\, c_1(\mathcal{P}))$$

C'est une correspondance de codimension $\dim(A^s_{g,U}) + 1$; elle induit donc une action de degré 2 sur la cohomologie. Par la formule de projection, on vérifie facilement que l'action de $A_{p,q}$ sur la fibre de $\Lambda^* V_\ell(A_x)^s$ revient à prendre le cup-produit (dans les facteurs p et q) avec la classe de Chern dans $H^2(A_x \times A_x, \mathbb{Q}_\ell)$ du fibré de Poincaré sur $A_x \times A_x$. Comme cette classe correspond à la forme $\langle\,,\rangle : V_\ell(A_x) \otimes V_\ell(A_x) \to \mathbb{Q}_\ell$ induit par l'accouplement de Weil sur $V_\ell(A_x \times A_x)$ (*cf.* par exemple [**M**, lemma 16.7]), la restriction à $\otimes^s V_\ell(A_x)$ de cette action correspond donc à l'homomorphisme $\phi_{p,q}$.

Soit $\Delta^{p,q}_{s-2} \subset A^s_{g,U} \times_{M_{g,U}} A^s_{g,U}$ le plongement diagonal de $A^{s-2}_{g,U}$ sur les $s-2$ composantes hors de p et q et soir Pr_1 la projection de $A^s_{g,U} \times_{M_{g,U}} A^s_{g,U}$ sur le premier facteur. On pose :

$$B_{p,q} = \Delta^{p,q}_{s-2} \cdot (Pr_1^* \ (\mathrm{pr}_{p,q*} \ c_1(\mathcal{P})^{2g-1}))$$

Cette correspondance est de codimension $\dim(A^s_{g,U}) - 1$ et elle induit donc une action de degré -2 sur la cohomologie. Comme $c_1(\mathcal{P})^{2g-1}$ est dual de $c_1(\mathcal{P})$, on voit facilement que l'action de $B_{p,q}$ sur $\otimes^s V_\ell(A_x)$ correspond à l'homomorphisme $\psi_{p,q}$.

On peut maintenant composer ces correspondances et définir un idempotent e_λ grâce à la discussion précédente. C'est une correspondance relative dans $A^s_{g,U} \times_{M_{g,U}} A^s_{g,U}/M_{g,U}$. □

Remarque. — Voir l'appendice 2 de [**MT**] pour une construction sur $\mathbb{Z}_p$ de cette correspondance.

3.3. Démonstration du théorème 1. — Soit π une représentation cuspidale de $\mathrm{GSp}_{2g\,/\mathbb{Q}}$ de poids cohomologique λ. Soient S_π l'ensemble des places de ramification de π et E_π le corps engendré par les valeurs propres des opérateurs de Hecke aux places $v \notin S_\pi$ agissant sur π^U pour U minimal tel que $\pi^U \neq 0$. Soit

$$\mathbf{H}^*_c(M_g, L_\lambda) = \varinjlim \mathbf{H}^*_c(M_{g,U}, L_\lambda)$$

et soit

$$\mathbf{V}_\pi = \mathrm{Hom}_{G(\mathbb{A}_f)}(\pi_f, \mathbf{H}^*_c(M_g, L_\lambda(E_\pi)))$$

C'est un éléments de $\mathcal{C}_{E_\pi}$ de dimension $m(\pi_f)$ la multiplicité de π_f. Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 4. — *Soit π comme ci-dessus. Supposons que les hypothèses du théorème 3 sont satisfaites pour g et pour tout n tel que $\pi^{U(n)} \neq 0$. Alors $\mathbf{V}_\pi$ est un objet de $\mathcal{C}^{S_\pi - c}_{E_\pi}$ ayant bonne réduction aux places de non ramification de π.*

Démonstration. — Pour tout entier n soit S_n l'ensemble des premiers divisant n. Nous montrons que $\mathbf{V}_\pi \otimes_{E_\pi} E$ est un objet de $\mathcal{C}^{S_n - c}_E$ pour tout $n > 3$ tel que π soit de niveau n (*i.e.* tel que $\pi^{U(n)} \neq 0$) et E un corps de nombres assez gros contenant π et dépendant de n.

Fixons un entier n tel que π soit de niveau n. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentation automorphes cohomologique π' de niveau n et de poids λ' intervenant dans $\Lambda^* \mathrm{St}^s$ avec $s = s_\lambda$ si $\lambda \neq 0$ et $s = 1$ si $\lambda = 0$. Cet ensemble est fini ; il existe donc un corps de nombres E contenant E_π et tel que $\pi'^{U(n)}$ ait une structure E-rationnelle quelque soit $\pi' \in \mathcal{R}$. De plus il existe $h_{\pi_f} \in \mathcal{H}_g(n) \otimes_\mathbb{Q} E$ tel que pour toute représentation $\pi' \in \mathcal{R}$, h_π agisse par l'identité (resp. par zéro) sur $\pi'^{U(n)}$ si et seulement si $\pi'^{U(n)} \cong \pi^{U(n)}$ (resp. $\pi'^{U(n)} \not\cong \pi^{U(n)}$). Soit e_{π_f} l'image de h_{π_f} dans $\mathrm{Corr}_E(A^s_{g,n})$. On pose $e_\pi = e_\lambda \cdot e_{\pi_f} \in \mathrm{Corr}_E(A^s_{g,n})$; c'est un idempotent. En effet, e_{π_f} commute avec e_λ

puisque l'action de e_λ vaut l'identité ou 0 sur les sous-espaces stables par e_{π_f}. Par la suite spectral de Leray, on a donc :

$$E_2^{p,q} = e_\pi . H_c^p(M_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, R^q f_*^s \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow e_\pi . H_c^{p+q}(A^s_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

Par ailleurs, par la propriété vérifiée par e_λ, on a $E_2^{p,q} = 0$ sauf si $q = s$. Donc la suite spectrale dégénère en E_2 et on a :

$$\begin{aligned} e_\pi \cdot (H_c^{p+s}(A^s_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes E) &= e_\pi \cdot (H_c^p(M_{g,n/\mathbb{Q}^{\mathrm{ac}}}, R^s f_*^s \mathbb{Q}_\ell) \otimes E) \\ &= m(\pi_f^{U(n)}) \cdot (\pi_f^{U(n)}) \otimes \mathbf{V}_\pi \otimes E \otimes \mathbb{Q}_\ell \end{aligned} \tag{12}$$

avec $m(\pi_f^{U(n)})$ la multiplicité de $\pi_f^{U(n)}$ dans $H_c^p(M_{g,n}, L_\lambda(\mathbb{C}))$. Comme $A^s_{g,n}$ admet une compactification projective lisse et ayant bonne réduction en dehors des premiers divisant n et dont la cohomologie du bord appartient à la catégorie $\mathcal{C}_E^{S_n\text{-gr}}$ d'après nos hypothèses et le théorème 3, on peut appliquer la Proposition 1 pour déduire que $e_\pi \cdot \mathbf{H}_c^{p+s}(A^s_{g,n}, E)$ est dans la catégorie $\mathcal{C}_E^{S,c}$. Le théorème résulte donc de (12). □

Corollaire 6. — *Soit π une représentation cuspidale cohomologique irréductible de* $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{A})$. *Alors V_π est dans la catégorie $\mathcal{C}_{E_\pi}^{S_\pi - c}$.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème précédent et du corollaire 3. □

Remarque. — On n'utilise pas ici l'existence de ρ_π. Dans [**U2**], on utilise ce résultat, pour construire $\rho_{\pi,p}$ lorsque π est ordinaire en p grâce aux résultats de Laumon [**L96, L05**] et Taylor [**Ta93**].

Soit maintenant $\rho_\pi = \{\rho_{\pi,\ell}\}_\ell$ le système de représentations ℓ-adiques construit par Weissauer. Par la construction de Weissauer (*cf.* [**W1, W2, W3**]), si π n'est ni CAP ni endoscopique, on a pour tout ℓ.

$$((\mathbf{V}_\pi \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{ss})^2 = m \cdot \rho_{\pi,\ell} \tag{13}$$

Le Théorème 1 de l 'introduction est donc prouvé. Les cas CAP et endoscopiques se déduisent du résultat pour GL(2) connu par Scholl.

3.4. Démonstration des Corollaires. — Dans ce paragraphe, on admet que la représentation galoisienne $\rho_{\pi,p}$ existe. On conserve les notations de la section précédente. On note π_f et π_∞ respectivement les parties finie et archimédienne de π. On suppose que π est de poids cohomologique $(a, b; -a-b)$. Les poids de Hodge-Tate de la restriction de $\rho_{\pi,p}$ à $G_{\mathbb{Q}_p}$ sont contenus dans $\{0, b+1, a+2, a+b+3\}$; Soit π^H (resp. π^W) la représentation holomorphe (resp. générique) dans le même paquet local que π_∞. Alors $\pi_f \otimes \pi^H$ (resp. $\pi_f \otimes \pi^W$) est automorphe si et seulement si $0, a+b+3$ (resp. $b+1, a+2$) sont des poids de Hodge-Tate pour $\rho_{\pi,p}$ (*cf.* [**Ta93**]).

Démonstration du corollaire 1. — On suppose que π est stable à l'infini, donc tous les poids de Hodge-Tate possibles apparaissent. On considère d'abord le cas où π est ordinaire en p pour le parabolique de Siegel. Par définition, les pentes du polygones de Newton de $Q_{\pi,p}(X)$ sont $0, t, a+b+3-t, a+b+3$ (*cf.* [**TU**]). Par le théorème 1, c'est aussi le polygone de Newton du polynôme caractéristique du Frobenius cristallin agissant sur $D_{\mathrm{cris}}(\rho_{\pi,p})$. On voit que pour que le polygone de Hodge soit en dessous du polygone de Newton, il est nécessaire que $0, a+b+3$ soient des poids de Hodge-Tate de $\rho_{\pi,p}$. Dans ce cas, les polygones de Hodge et Newton ont les sommets $(1,0)$ et $(3, a+b+3)$ en commun. D'où la première partie du corollaire 1. La seconde partie se démontre comme dans [**TU**] Prop. 7.1. □

Pour démontrer le corollaire 2, il suffit d'adapter la preuve du Théorème 3.4.3 et du corollaire 3.4.5 de [**U1**] dans lesquels on avait utilisé l'ordinarité du « Theta lift » de σ à GSp_4 pour le Borel. En fait, l'ordinarité pour le parabolique de Siegel suffit ; elle entraîne par la première partie du corollaire 1, l'existence d'une droite stable dans $\mathrm{Ind}_{G_K}^{G_{\mathbb{Q}}} \rho_\sigma \otimes \eta$; ici η est un caractère quadratique associé au « Theta lift » (*cf. loc. cit.*) construit dans [**HST**]. On en déduit facilement l'ordinarité de ρ_σ. □

Références

[AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport & Y.S. Tai – *Smooth Compactifications of locally symmetric varieties*, Math. Sci. Press, Brookline, 1975.

[BO] P. Berthelot & A. Ogus – *Notes on crystalline cohomology*, Math. Notes, vol. 21, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, 1978.

[F] G. Faltings – « Crystalline cohomology and Galois representations », in *Algebraic Analysis, Geometry and number theory, Proceedings of JAMI Inaugural Conference*, John Hopkins Univ. Press, 1989.

[FC] G. Faltings & C.-L. Chai – *Degeneration of abelian varieties*, Erg. Math., Springer-Verlag, 1992.

[Fu1] W. Fulton – *Introduction to toroidal embeddings*, Princeton Univ. Press, 1993.

[Fu2] ———, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[FH] W. Fulton & J. Harris – *Introduction to Representation theory*, Springer-Verlag, 1994.

[GM] H. Gillet & W. Messing – « Cycle classes and Riemann-Roch for crystalline cohomology », *Duke Math. J.* **55** (1987), p. 501–538.

[H] G. Harder – « Five Notes on the Topologicla Trace Formula and its Application », preprint.

[HST] M. Harris, D. Soudry & R. Taylor – « ℓ-adic representations associated to modular forms over an imaginary quadratic fields I : Lifting to $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$ », *Invent. Math.* **112** (1993).

[KM] N. Katz & W. Messing – « Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields », *Invent. Math.* **23** (1974), p. 73–77.

[K] S.L. Kleiman – « Algebraic cycles and the Weil conjectures », in *Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas*, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 359–386.

[L96] G. Laumon – « Sur la cohomologie à supports compacts des variétés de Shimura pour $\mathrm{GSp}(4)_{\mathbb{Q}}$ », *Compositio Math.* **105** (1996), p. 267–359.

[L05] ———, « Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois », these proceedings.

[M] J.S. MILNE – « Abelian Varieties », in *Arithmetic Geometry* (G. Cornel & J.H. Silverman, éds.), Springer-Verlag, 1986, chapter V.

[MT] A. MOKRANE & J. TILOUINE – « Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications », in *Cohomology of Siegel varieties*, Astérisque, vol. 280, Société Mathématique de France, Paris, 2002, p. 1–95.

[P] R. PINK – *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties*, Bonner Mathematische Schriften, vol. 209, 1989.

[Sc] A.J. SCHOLL – « Motives for modular forms », *Invent. Math.* **100** (1990), p. 419–430.

[Ta91] R. TAYLOR – « Galois representations Associated to Siegel Modular Forms of Low Weight », *Duke Math. J.* **63** (1991).

[Ta93] ______, « On the ℓ-adic Cohomology of Siegel Threefold », *Invent. Math.* **114** (1993), p. 281–332.

[Ta94] ______, « ℓ-adic representations associated to modular forms over an imaginary quadratic fields II », *Invent. Math.* **116** (1994).

[TU] J. TILOUINE & E. URBAN – « Several variables p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **32** (1999), p. 499–574.

[U1] E. URBAN – « Module de congruences pour GL_2 d'un corps quadratique imaginaire et théorie d'Iwasawa d'un corps *CM* biquadratique », *Duke Math. J.* **92** (1998), p. 179–220.

[U2] ______, « Selmer groups and the Eisenstein-Klingen Ideal », *Duke Math. J.* **106** (2001), no. 3, p. 485–525.

[W1] R. WEISSAUER – « An application of the Hard Lefschetz Theorem », preprint, 1993.

[W2] ______, « Character identities and Galois representations related to the group GSp_4 », preprint, 1993.

[W3] ______, « Four dimensional Galois representations », these proceedings.

E. URBAN, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, U.S.A.
E-mail : urban@math.columbia.edu