Astérisque

DANIEL BERTRAND

Travaux de J.-P. Ramis sur les équations différentielles linéaires

Astérisque, tome 296 (2004), p. 11-20

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2004__296__11_0>

Astérisque
296, 2004, p. 11–20

TRAVAUX DE J.-P. RAMIS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

par

Daniel Bertrand

Résumé. — L'article donne un survol des travaux de J-P. Ramis sur les singularités irrégulières : théorèmes d'indice Gevrey, dévissage du groupe de Galois analytique, problème inverse.

***Abstract* (On the work of J-P. Ramis on linear differential equations).** — We survey the work of J-P. Ramis on irregular singularities, with special emphasis on his Gevrey theorems, his extension of Schlesinger's density theorem, and the analogies his theory provides between analytic differential Galois groups and fundamental groups in positive characteritic.

Plutôt qu'une description linéaire des travaux en question, j'ai choisi ici de dégager trois moments marquants dans les recherches de J-P. Ramis sur les singularités irrégulières dans le champ complexe : les premiers pas, essentiellement formels, du « dévissage Gevrey » ; l'approche progressive du théorème de densité, menant à la construction du π_1 sauvage ; enfin, la solution de l'analogue différentiel de la conjecture d'Abhyankar. Comme on le verra, cette progression n'est pas le fait du hasard, chaque étape portant en germe les fondements de la suivante.

Je renvoie à l'exposé de J. Sauloy [**Sa**] au colloque pour les travaux plus récents de Ramis sur les problèmes (tout aussi linéaires) d'équations aux q-différences.

Acte I.
Filtrations Gevrey
Dijon, 1976 ([**R1**])

Rappelons tout d'abord le théorème d'indice de Malgrange. Soient $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{z\}$ l'anneau des germes de fonctions holomophes en 0 et $\widehat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[z]]$ son complété formel pour la valuation z-adique v. Soit, par ailleurs, $L = \sum_{i=0,\dots,n} b_i(d/dz)^i$ un opérateur

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primary 34A30, Secondary 12H05.
Mots clefs. — Équations différentielles linéaires, singularités irrégulières, théorie de Galois différentielle, groupe fondamental.

différentiel à coefficients dans $\mathcal{O}$. On attache à L son polygone de Newton $\mathcal{N}(L)$ (en 0), enveloppe convexe supérieure des droites d'appui de pentes $\geqslant 0$ des points du plan de coordonnées $(i, v(b_i) - i)$, $i = 0, \dots, n$.

On vérifie facilement que L, vu comme un endomorphisme de $\widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$, est surjectif. D'après le théorème de Malgrange, L est de Fredholm, et son indice $\chi(L, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O})$, qui coïncide donc avec la dimension de son noyau, est égal à la hauteur $(v(b_n) - n) - \inf_{i=0,\dots,n}(v(b_i) - i)$ dont s'élève le polygone de Newton entre les points d'abscisse $i = 0$ et $i = n$. En particulier, $L \in \mathcal{D} = \mathcal{O}[1/z][d/dz]$ vérifie la condition de Fuchs (c'est-à-dire $\mathcal{N}(L)$ est plat) si et seulement si toute extension de $\mathcal{D}/\mathcal{D}L$ par l'objet trivial $\mathcal{D}/\mathcal{D}d/dz$ qui se trivialise après extension des scalaires à $\widehat{\mathcal{O}}[1/z]$ se trivialise déjà dans $\mathcal{D}$.

Comme l'a montré Deligne, l'irrégularité de Malgrange fournit un analogue différentiel du conducteur de Swan. Il est donc naturel de tenter de l'exprimer au moyen d'une filtration. Celle que propose Ramis dans [**R1, R3**], consiste à dévisser $\widehat{\mathcal{O}}$ au moyen des espaces de séries Gevrey définis, pour tout nombre réel s, par

$$\widehat{\mathcal{O}}_s = \big\{ \textstyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}},\ \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{(n!)^s} z^n \in \mathcal{O} \big\}$$

$$\widehat{\mathcal{O}}_{(s)} = \big\{ \textstyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}},\ \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{a_n}{(n!)^s} z^n \text{ converge sur } \mathbf{C} \big\}.$$

Que des conditions Gevrey gouvernent les solutions de L en une singularité irrégulière n'est bien entendu pas une idée nouvelle : il y a tout juste un siècle, Maillet avait remarqué que toute solution formelle d'une équation différentielle algébrique est une série Gevrey, et Perron avait considérablement précisé ce résultat dans le cas linéaire. Ramis montre que les endomorphismes que L induit sur $\widehat{\mathcal{O}}_s$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{(s)}$, $s \geqslant 0$, sont de Fredholm, et il relie leurs indices aux invariants suivants, récemment introduits dans la théorie par Gérard et Levelt.

Pour tout nombre réel $k \geqslant 0$, soient $i_k(L)$ et $I_k(L)$ la plus petite et la plus grande des abscisses des points de contacts avec $\mathcal{N}(L)$ de la droite d'appui de pente k. Par exemple, $i_0(L) = 0$, et $I_0(L)$ est le degré du polynôme indiciel de L. Les opposées des ordonnées de ces points de contact fournissent, pour $s = 1/k$, les indices recherchés. On en déduit que $\chi(L, \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathcal{O}}_s) = \dim\ker(L, \widehat{\mathcal{O}}/\widehat{\mathcal{O}}_s)$ est la hauteur dont s'élève le polygone de Newton entre les points d'abscisse $i = 0$ et $i = i_k(L)$. Idem, avec $i = I_k(L)$, pour $\widehat{\mathcal{O}}_{(s)}$.

Je ne déclinerai pas les nombreux corollaires de ce résultat, et renvoie à [**LR-P**] pour une preuve faisceautique inspirée de Deligne et Malgrange, incluant un raffinement à double précision de la filtration Gevrey, qu'on trouve aussi en théorie des équations aux différences [**Du**]. Mais revenons à [**R1**], et à ses dernières pages.

Ramis y remarque qu'en échelonnant suivant l'indice k la transformation de Laplace inverse formelle, la méthode de Borel permet, sous une hypothèse de croissance exponentielle de la transformée le long d'une direction, de sommer les solutions Gevrey de L en de vraies solutions, avec « une assertion d'unicité dans un certain secteur ».

C'est sa première rencontre avec la notion de k-sommabilité, promise, comme on le sait, à un brillant avenir (*cf.* § 2). Comme me l'apprend Malgrange, la sommabilité de Borel ($k = 1$) était réapparue, peu auparavant, dans les travaux de physiciens comme J-J. Loeffel et A. Sokal. Nul doute que les rencontres de la RCP Maths-Physique de Strasbourg, qu'a lontemps organisées Ramis, ont ici joué un rôle.

Quant au dernier paragraphe de [**R1**], il résout la moitié d'un problème classique de la théorie des E-fonctions de Siegel. Une E-fonction est une série formelle holonome $f = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ à coefficients dans un corps de nombres F, dont les images par tout plongement complexe de F appartiennent à $\cap_{\varepsilon>0}\widehat{\mathcal{O}}_{-1+\varepsilon}$, et telles que les dénominateurs des a_n vérifient une condition du même type. Si $L \in \mathbf{C}(z)[d/dz]$, les résultats de Ramis valent aussi pour les ordres $s < 0$, pour peu qu'on complète le polygone de Newton par la contribution du point ∞. Ramis en déduit que les images en question appartiennent alors à $\widehat{\mathcal{O}}_{-1}$, et ne sont dans $\widehat{\mathcal{O}}_{(-1)}$ que si f est un polynôme. L'analogue de ce résultat pour les dénominateurs des a_n reste ouvert, mais la notion de « série Gevrey de type arithmétique » à laquelle les travaux de Ramis ont conduit Y. André est devenue centrale en théorie des E-fonctions (voir [**A1**]).

Pour clore ce chapitre sur le même registre[(1)], je mentionnerai le dévissage sous-jacent aux théorèmes de Bézivin et Robba [**B-R**] sur les opérateurs de Polya : on filtre cette fois l'anneau des séries formelles $F[[z]]$ par son sous-espace des fonctions globalement bornées, et par le localisé de $F[z]$ en 0.

Acte II.
(Re)sommation et groupes de Galois différentiels
Les Houches (1979) ([R2]), *Rio (1985)* ([R4]), *Strasbourg (1991)* ([Mr-R6])

Comme on l'a vu, on décèle la présence d'une singularité irrégulière par un défaut de convergence. La théorie de Galois différentielle exhibe une autre anomalie : contrairement au cas régulier (théorème de densité de Schlesinger), le groupe de Galois différentiel d'une équation irrégulière n'est en général pas engendré par sa monodromie. Les travaux de Ramis des années 80 conduisent à une magnifique jonction de ces deux thèmes.

Soient K le corps des fractions de $\mathcal{O}$, et $\widehat{K}$ son complété formel. Il sera ici plus commode d'exprimer les résultats en termes d'un système différentiel

$$DY := \frac{d}{dz}Y - BY = 0, \quad B \in gl_n(K)$$

(1) Au lecteur qui trouverait ces digressions arithmétiques oiseuses, je dirai qu'elles apparaissent en filigrane dans de nombreux travaux de Ramis. Souvenirs d'un amour de jeunesse ? (Voir [**Se**], bas de la page 5.)

équivalent sur K à l'équation $Ly = 0$. D'après le théorème de Thomae-Fabry-Poincaré-Hukuhara-Turrittin-Levelt, il existe, après passage à une extension finie de $\widehat{K}$ (que nous supposerons triviale dans ce qui suit), une matrice diagonale $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$ formée de polynômes en $\frac{1}{z}$ sans termes constants, une matrice constante Λ commutant à Q, et un élément $\widehat{P}$ de $GL_n(\widehat{K})$ tels que $\widehat{P}e^Q z^\Lambda$ soit une matrice fondamentale de solutions « formelles » de D. Les degrés des q_i non nuls sont les pentes $k_r > \cdots > k_1 > 0$ du polygone de Newton de L, et le nombre de q_i de degré k vaut $I_k(L) - i_k(L)$. Appliquant les résultats du § 1 au système différentiel $\mathrm{Hom}(D, D_0)$, où $D_0 = \frac{d}{dz} - Q' - \frac{1}{z}\Lambda$, on voit que $\widehat{P}$ est constitué de séries Gevrey d'indice $\leqslant 1/\kappa_1$, où κ_1 est le plus petit des degrés des polynômes $q_i - q_j$ non nuls. L'« extraordinaire » [**D1**] théorème des développements asymptotiques énonce que, pour tout élément θ du cercle S^1 des directions autour de 0, il existe un germe de secteur U de bissectrice θ, et une matrice P_U holomorphe sur U, y admettant un développement asymptotique égal à $\widehat{P}$, tels que $\mathcal{Y}_U = P_U e^Q z^\Lambda$ soit une matrice fondamentale de solutions de D holomorphes sur U. Voir [**R5-S**] pour une extension de ce théorème au cas non linéaire, et avec des conditions Gevrey.

Notons respectivement $\Sigma(D_0)$ et $\widetilde{\Sigma}(D_0)$ l'ensemble des lignes de Stokes et des directions singulières de $\mathrm{Hom}(D, D_0)$ (ou de $\mathrm{End}(D_0)$, cela revient au même) : ce sont les θ le long desquels, au voisinage de 0, l'un au moins des $e^{q_i - q_j}$ change de comportement asymptotique, ou au contraire admet une décroissance maximale. La formule précédente montre que pour tout secteur ouvert U' tel que $U' - U$ ne rencontre pas $\Sigma(D_0)$, le prolongement analytique à U' de P_U reste asymptotique à $\widehat{P}$. D'où, un recouvrement de S^1 par des ouverts d'angles π/κ_s, $\kappa_s = \max \deg(q_i - q_j)$, sur lesquels D admet des solutions fondamentales du type précédent. Mais cette collection n'est justifiable d'aucune « assertion d'unicité » : de ce fait, les matrices de connexion $C_{i,j} = \mathcal{Y}_{U_j}^{-1}\mathcal{Y}_{U_i} \in GL_n(\mathbf{C})$ qui relient ces solutions à la traversée d'une ligne de Stokes n'ont pas d'interprétation canonique.

C'est la vérification de conditions Gevrey sur les *restes* des développements asymptotiques qui permet à Ramis d'y accéder. Pour tout secteur U, soit $\mathcal{A}_s(U)$ l'anneau des fonctions f holomorphes sur U, y admettant un développement asymptotique dont le n-ième reste est majoré sur U par $r_n|z|^n$, avec $\sum_{n\geqslant 0} r_n z^n \in \widehat{\mathcal{O}}_s$. Une série formelle $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{O}}_{1/k}$ est dite k-sommable dans la direction θ si elle est développement asymptotique, sur un ouvert U_θ contenant l'arc $[\theta - \frac{\pi}{2k}, \theta + \frac{\pi}{2k}]$, d'une fonction $f \in \mathcal{A}_{1/k}(U_\theta)$, alors unique, qu'on appelle la k-somme canonique $\sigma_\theta(\widehat{f})$ de $\widehat{f}$ le long de θ, et qui se calcule au moyen du procédé de Borel. Ramis introduit dans [**R2**] le sous-anneau $\mathcal{O}_{1/k} \subset \widehat{\mathcal{O}}_{1/k}$ des *séries k-sommables*, c'est-à -dire, k-sommables dans toute direction sauf un nombre fini, et montre que lorsque $End(D_0)$ ne présente qu'une pente $\kappa_1 = \kappa_s = k > 0$, les coefficients de la matrice $\widehat{P}$ supra sont k-sommables, d'ensemble de directions exceptionnelles $\widetilde{\Sigma}(D_0)$. D'où, pour toute direction singulière d, deux resommations canoniques $\sigma_{d_\pm}(\widehat{P})$ de $\widehat{P}$ le long de directions séparées par d, et une matrice de connexion *naturelle* C_d reliant les solutions $\mathcal{Y}_{d_\pm}$ correspondantes.

En reflet de ce qu'« *en géométrie algébrique, un point est beaucoup plus petit qu'en géométrie analytique* » [**D2**], la k-sommabilité n'est pas une notion purement locale, et l'extension de ces résultats au cas de plusieurs pentes est délicate. Ramis l'aborde au moyen de son théorème taubérien [**R4**] : pour $k_2 > k_1$, on a bien sûr $\widehat{\mathcal{O}}_{1/k_2} \subset \widehat{\mathcal{O}}_{1/k_1}$, mais $\widehat{\mathcal{O}}_{1/k_2} \cap \mathcal{O}_{1/k_1}$ est réduit à $\mathcal{O}$. La forme définitive de la théorie fait appel à la notion de multisommabilité d'Écalle [**Ec**], dont on trouvera dans [**Ml-R7**] une présentation particulièrement agréable, ne nécessitant pas de référence aux faisceaux $\mathcal{A}_s$; voir aussi [**LR**], [**LR-P**] pour une traduction imagée de cette notion en termes des gros points de la géométrie analytique de Deligne. La conclusion est que les dernières lignes de l'alinéa précédent restent valables dans le cas général.

Quel est l'enjeu d'un tel travail ? Outre le renouveau d'intérêt qu'il a suscité pour les séries divergentes et auquel le joli opuscule [**R8**] n'a pas peu contribué, c'est en théorie de Galois différentielle que Ramis en tire la conséquence la plus frappante. Soit $G_{D,f} = \mathrm{Gal}_\partial(\widehat{K}(e^Q z^\Lambda)/\widehat{K})$ le groupe de Galois différentiel formel de D : il s'identifie à conjugaison près, à un sous-groupe fermé du groupe de Galois différentiel G_D de D sur K. Par ailleurs, pour tout $\theta \notin \widetilde{\Sigma}(D_0)$, les procédés de resommation $\sigma_\theta : \mathcal{O}_{1/k} \to \mathcal{A}_{1/k}(U_\theta)$ et leurs extensions au cas multisommable sont des morphismes d'algèbres différentielles. Les matrices C_d représentent donc des éléments St_d de G_D, d'ailleurs unipotents. La normalité des extensions de Picard-Vessiot entraîne alors la généralisation suivante du *théorème de densité* (voir [**R4**], [**Mr-R6**], et pour une approche tannakienne, [**LR**]) : le groupe de Galois G_D est engendré topologiquement par $G_{D,f}$ et par la collection des automorphismes de Stokes St_d, $d \in \widetilde{\Sigma}(D_0)$. L'anomalie signalée plus haut a ainsi disparu : la taille des points analytiques permet de voir ces derniers comme de nouveaux automorphismes de monodromie.

Parmi les nombreuses applications de ce théorème, je citerai le calcul du groupe de Galois différentiel des équations de Hamburger (voir [**Du-Mi**], [**Mi**], pour le cas hypergéométrique), et la vérification, à partir du théorème de Morales-Ramis, de la non intégrabilité de certains systèmes de Hénon-Heiles (voir [**Mo-R11**] et l'exposé de D. Cerveau au colloque). Dans chaque cas, on joue sur deux tableaux : le groupe de Stokes est suffisamment local pour permettre les calculs, mais l'est sufisamment peu pour contrôler des propriétés globales. Le théorème d'isomorphisme de Birkhoff-Sibuya-Malgrange ([**Ml**], [**BV**]) fournit d'ailleurs une approche des St_d, et leur calcul, sans recours à la multisommabilité : voir [**Ju**], [**Ba**], [**LR**].

Terminons par une conséquence plus théorique, qui va jouer un rôle crucial au § 3. La catégorie des systèmes différentiels sur K est tannakienne, et donc équivalente à celle des représentations de dimension finie d'un groupe pro-algébrique $\pi_{1,s}$, que la théorie de la ramification suggère d'appeler le π_1 sauvage. C'est une description explicite de ce groupe (autrement dit, une correspondance de Riemann-Hilbert pour toutes les équations différentielles sur K) qu'en collaboration avec Martinet, Ramis déduit dans [**Mr-R6**] de son théorème de densité.

Tout d'abord, $\pi_{1,s}$ admet comme quotient le groupe modéré $\pi_{1,m}$ attaché à la sous-catégorie pleine des systèmes différentiels réguliers ; d'après Schlesinger, ce dernier est isomorphe à l'enveloppe algébrique $\mathbf{Z}^{env}$ de $\mathbf{Z}$, produit du groupe additif $\mathbf{G}_a$ (action sur $\mathrm{Log}(z)$) par un groupe de type multiplicatif, de groupe de caractères $\mathbf{C}^*$ (action sur les z^λ). Le groupe $\pi_{1,sf}$ attaché de même aux systèmes différentiels sur $\widehat{K}$ est le produit semi-direct de $\pi_{1,m}$ par un pro-tore « exponentiel » $\mathcal{T}$ (action sur les e^q), de groupe des caractères isomorphe au $\mathbf{Z}$-module $\mathcal{E}$ des polynômes de Puiseux en $1/z$ sans termes constants, sur lesquels le générateur canonique γ de $\pi_{1,m}$ agit naturellement. En décomposant l'action adjointe de $\mathcal{T}$ sur les logarithmes des automorphismes de Stokes, Ramis construit alors un « groupe de résurgence » $\mathcal{R}$, d'algèbre de Lie engendrée librement par des symboles $\Delta_{d,q}$, où d parcourt le revêtement universel de S^1, et $q \in \mathcal{E}$ admet le long de d une décroissance maximale à l'approche de 0 ; ces symboles correspondent aux dérivations étrangères d'Écalle. Les relations $\mathrm{Ad}(\tau)(\Delta_{d,q}) = \chi_q(\tau)\Delta_{d,q}, \mathrm{Ad}(\gamma)\Delta_{d,q} = \Delta_{d-2\pi,q}$ munissent $\mathcal{R}$ d'une action de $\pi_{1,sf}$, et $\pi_{1,s}$ *est le produit semi-direct de* $\pi_{1,sf}$ *par* $\mathcal{R}$ *relativement à cette action.* Enfin, la sous-catégorie pleine des systèmes différentiels de pentes $\leqslant k$ fournit une filtration de $\mathcal{R}$ et de $\mathcal{T}$ par des sous-groupes $\mathcal{R}^{>k}$ (*cf.* [**R4**]), $\mathcal{T}^{>k}$ (*cf.* [**Ka**]), et ces filtrations sont compatibles à l'action de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{R}$.

La dernière colonne de la figure 1 ci-contre résume cette description de $\pi_{1,s}$, la troisième, celle de $\pi_{1,sf}$. Le groupe de Galois absolu de $\widehat{K}$ que décrit la seconde (théorème de Puiseux) s'identifie au groupe des composantes connexes de $\pi_{1,sf}$, donc aussi de $\pi_{1,s}$, en vertu d'un lemme de Gabber que la connexité de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ redonne directement (voir [**Mr-R6**], p. 397). Enfin, la première colonne est reprise de Katz [**Ka**], à l'addition près de l'extension abélienne intermédiaire, que m'a suggérée P. Colmez.

L'analogie entre ces colonnes est indéniable, mais doit être maniée avec précaution. Par exemple, comme tout pro-p-groupe, $D\mathcal{P}$ est nilpotent, alors que $\mathcal{R}$ n'est pas unipotent (même si ses générateurs canoniques se trouvent l'être). Pour une critique plus élaborée, voir [**A3**].

Acte III.
La conjecture d'Abhyankar différentielle
Toulouse (Nuit de la musique, 1993) ([**R10**])

Soient $\mathcal{K}$ un corps différentiel, disons pour simplifier de corps de constantes $\mathbf{C}$, et G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbf{C}$. Le problème inverse de la théorie de Galois différentielle consiste à rechercher un système différentiel $D = \dfrac{d}{dz} - B$, $B \in gl_n(\mathcal{K})$, de groupe de Galois différentiel isomorphe à G, à en donner un critère d'existence en termes de la structure de G, et quand ce dernier est rempli, à minimiser le type des singularités des systèmes réalisant G.

$$
\begin{tikzcd}
k^{\mathrm{sep}} & & & K^{\mathrm{diff}} \\
(k^{\mathrm{mod}})^{\mathrm{ab}} \arrow[u, "D\mathcal{P}"] & & \widehat{K}^{\mathrm{diff}} = \widehat{K}^{\mathrm{reg}}(e^q) & (K^{\mathrm{reg}})^{\mathrm{ab}} = K^{\mathrm{reg}}(e^q) \arrow[u, "\mathcal{R}"'] \\
k^{\mathrm{mod}} = \overline{\mathbf{F}_p}\big(\big(z^{1/p'}\big)\big) \arrow[u, "\mathcal{P}^{\mathrm{ab}}", "= \mathrm{Hom}(\mathcal{E}', \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)"'] & \widehat{K}^{\mathrm{sep}} = \mathbf{C}\big(\big(z^{1/N}\big)\big) & \widehat{K}^{\mathrm{reg}} = \widehat{K}(z^{\lambda}, \mathrm{Log}\, z) \arrow[u, "\mathcal{T}", "= \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathbf{G}_m)"'] & K^{\mathrm{reg}} = K(z^{\lambda}, \mathrm{Log}\, z) \arrow[u, "\mathcal{T}"'] \\
k = \overline{\mathbf{F}_p}((z)) \arrow[u, "\widehat{\mathbf{Z}}/\mathbf{Z}_p"'] & \widehat{K} = \mathbf{C}((z)) \arrow[u, "\widehat{\mathbf{Z}}"'] & \widehat{K} = \mathbf{C}((z)) \arrow[u, "\mathbf{Z}^{\mathrm{env.}}"'] & K = \mathbf{C}(\{z\}) \arrow[u, "\mathbf{Z}^{\mathrm{env.}}"']
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 1. i) dans la colonne de droite, $\mathcal{R}$ est le groupe dérivé de $\mathrm{Gal}_\partial(K^{\mathrm{diff}}/K^{\mathrm{reg}})$ et $(K^{\mathrm{reg}})^{\mathrm{ab}}$ désigne le compositum des extensions de Picard-Vessiot de K^{reg} qui sont abéliennes *et* contenues dans la clôture de Picard-Vessiot K^{diff} de K. Rappelons qu'une extension de Picard-Vessiot de K^{reg} n'admet en général pas de plongement dans K^{diff}.
ii) dans la colonne de gauche, $D\mathcal{P}$ est le groupe dérivé du groupe d'inertie sauvage $\mathcal{P} := \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k^{\mathrm{mod}})$. La description du quotient $\mathcal{P}^{\mathrm{ab}}$ est fournie par la théorie d'Artin-Schreier : considérer les équations $\wp(X) = q$, où $\wp(X) = \mathrm{Frob}_p(X) - X$, et q est un vecteur de Witt de k^{mod}. On a posé $\mathcal{E}' = W(k^{\mathrm{mod}})/\wp W(k^{\mathrm{mod}}) \otimes \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$ (voir [**Bo**], p. 49, ex. 21).

La réponse dépend bien entendu de $\mathcal{K}$. Par exemple, elle est toujours positive si $\mathcal{K} = \mathbf{C}(z)$, et je renvoie à [**Si**] pour un historique du sujet. En revanche, hormis un travail de Kovacic pour les groupes résolubles, rien n'était connu dans le cas local $\mathcal{K} = K$, où le problème revient à décrire tous les groupes algébriques quotients de $\pi_{1,s}$. C'est bien ce point de vue qui permet à Ramis de le résoudre, dans [**R9**] pour les groupes semi-simples, puis en toute généralité. Mais la formulation définitive a nécessité plusieurs étapes. Pour utiliser une métaphore du rugby [(2)],

(i) le premier essai de Ramis lui est quasiment dicté par sa description du $\pi_{1,s}$: G est groupe de Galois différentiel sur K si et seulement s'il existe un tore $T \subset G$, un élément $a \in N_G(T)$ engendrant G modulo sa composante neutre G^0, et une algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(N) \subset \mathrm{Lie}(G)$ de dimension $\leqslant 1$ commutant à T et a, tels que $\mathrm{Lie}(G)$ soit

(2) Nous sommes maintenant à Toulouse.

engendrée par $\mathrm{Lie}(T), \mathrm{Lie}(N)$ et les espaces de poids non nuls pour l'action de $\mathrm{Lie}(T)$ sur $\mathrm{Lie}(G)$;

(ii) la transformation est effectuée par C. Mitschi et M. Singer [**Mi-Si**] , qui réécrivent ce critère dans le style de Kovacic, en termes du radical unipotent R_u de G : le groupe G/G^0 doit être cyclique, et agir trivialement sur le groupe $R_u/[R_u, G^0]$, dont la dimension doit être $\leqslant 1$;

(iii) la partie est enfin gagnée dans [**R10**] avec la traduction finale suivante, inspirée de la conjecture d'Abhyankar sur le problème inverse de la théorie de Galois classique pour les corps *globaux* de caractéristique p. Rappelons tout d'abord que ce problème ne pose aucune difficulté pour les corps locaux comme $k = \overline{\mathbf{F}}_p((z))$: un groupe fini G est groupe de Galois sur k si et seulement s'il admet un p-Sylow *unique*, donc normal, à quotient *cyclique*. Pour tout groupe fini G, soit alors $p(G)$ le sous-groupe engendré par tous les p-Sylows de G. Le critère proposé par Abhyankar, et établi peu auparavant par Raynaud, pour que G soit groupe de Galois d'une extension galoisienne du corps $\overline{\mathbf{F}}_p(z)$ non ramifiée hors de ∞, est que $p(G) = G$. Partant maintenant d'un groupe algébrique G, Ramis introduit le sous-groupe $L(G)$ de G engendré par ses tores maximaux, et déduit de (i) et (ii) que *G est groupe de Galois différentiel sur le corps K si et seulement si $G/L(G)$ est topologiquement cyclique.*

L'analogie se resserre lorsqu'en caractéristique nulle aussi, on passe aux corps globaux. Soient $\mathcal{K}_p$ (resp. $\mathcal{K}$) un corps de fonctions d'une variable sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ (resp. $\mathbf{C}$), de genre g, S un ensemble fini de places de $\mathcal{K}_{(p)}$, de cardinal $s \geqslant 1$, et σ un point de S. D'après Harbater, un groupe fini G est groupe de Galois d'une extension galoisienne de $\mathcal{K}_p$, non ramifiée hors de S, et sans ramification sauvage hors de σ, si et seulement si $G/p(G)$ admet $2g + s - 1$ générateurs. Par recollement, Ramis déduit de (iii) qu'un groupe algébrique G est groupe de Galois d'un module différentiel sur $\mathcal{K}$, sans singularités hors de S, et sans singularité irrégulière hors de σ, si et seulement si $G/L(G)$ admet $2g + s - 1$ générateurs topologiques.

C'est donc bien le caractère semi-local du groupe de résurgence qui limite les comparaisons inspirées par notre tableau du § 2. Il y manque d'ailleurs une cinquième colonne : celle des équations différentielles p-adiques, pour laquelle je renvoie à l'exposé d'Y. André au colloque [**A3**], et à [**A2**].

Il est devenu banal de ne plus distinguer l'arithmétique de la géométrie. Le voyage auquel nous a convié Jean-Pierre Ramis, depuis ses théorèmes d'indice formels jusqu'à cette solution du problème inverse, offre un bel éclairage sur les liens plus mystérieux que tissent ces disciplines avec l'analyse.

Remerciements. — Je remercie vivement B. Malgrange, M. Loday-Richaud, C. Mitschi et M. Matignon pour leurs commentaires sur une version préliminaire de ce texte, et avec quelque retard, mais tout aussi vivement, B. Teissier pour m'avoir jadis assigné la lecture de [**R1**] comme sujet de « 2[e] thèse ».

Références

Travaux de J-P. Ramis cités dans le texte

[R1] J.-P. RAMIS – « Dévissage Gevrey », in *Journées Singulières de Dijon*, Astérisque, vol. 59-60, Société Mathématique de France, 1978, p. 173–204.

[R2] ______, « Les séries k-sommables et leurs applications », in *Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory*, Lecture Notes in Phys., vol. 126, Springer, Berlin-New York, 1980, p. 178–199.

[R3] ______, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, vol. 48, Mem. Amer. Math. Soc., no. 296, American Mathematical Society, 1984.

[R4] ______, « Filtrations Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une ED irrégulière », Prép. IMPA, 45, 1985, p. 1–38.

[R5-S] J.-P. RAMIS & Y. SIBUYA – « Hukuhara's domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type », *Asymptot. Anal.* **2** (1989), p. 39–94.

[Mr-R6] J. MARTINET & J.-P. RAMIS – « Elementary acceleration and multisummability », *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.* **54** (1991), p. 331–401.

[Ml-R7] B. MALGRANGE & J.-P. RAMIS – « Fonctions multisommables », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 353–368.

[R8] J.-P. RAMIS – *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et Synthèses, Société Mathématique de France, 1994, (Journées X-UPS, 1991).

[R9] ______, « About the solution of some inverse problems in differential Galois theory by Hamburger equations », in *Differential equations, dynamical systems, and control science*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 152, Dekker, New York, 1994, p. 277–299.

[R10] ______, « About the inverse problem in differential Galois theory : the differential Abhyankar conjecture », in *The Stokes phenomenon and Hilbert's 16th problem (Groningen, 1995)* (Braaksma et al., éds.), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996, p. 261–278.

[Mo-R11] J. MORALES RUIZ & J.-P. RAMIS – « Galoisian obstructions to integrability of Hamiltonian systems I, II », *Methods Appl. Anal.* **8** (2001), p. 33–95 & 97–111.

Autres références

[A1] Y. ANDRÉ – « Séries Gevrey de type arithmétique. I, II », *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 705–740 et 741–756.

[A2] ______, « Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 258–317.

[A3] ______, « Galois representations, differential equations, and q-difference equations : sketch of a p-adic unification », ce volume, p. 43–53.

[BV] D. BABBITT & V. VARADARAJAN – *Local moduli for meromorphic differential equations*, Astérisque, vol. 169-170, Société Mathématique de France, 1989.

[Ba] W. BALSER – « Zur Einzigkeitssatz in der Invariantentheorie meromorpher Differentialgleichungen », *J. reine angew. Math.* **318** (1979), p. 53–82.

[B-R] J.-P. BÉZIVIN & P. ROBBA – « Rational solutions of linear differential equations », *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **46** (1989), p. 184–196.

[Bo] N. BOURBAKI – *Algèbre commutative*, Masson, Paris, 1983, Chap. IX.

[D1] P. DELIGNE – Lettre à B. Malgrange, Août 1977.

[D2] ———, Lettre à J.-P. Ramis, Janvier 1986[(3)]

[Du] A. DUVAL – « Opérateurs aux différences », Thèse, Univ. Strasbourg, 1984, voir aussi *Ann. Inst. Fourier* **37** (1987), p. 45–80.

[Du-Mi] A. DUVAL & C. MITSCHI – « Matrices de Stokes et groupes de Galois des équations hypergéométriques confluentes généralisées », *Pacific J. Math.* **138** (1989), p. 25–56.

[Ec] J. ÉCALLE – *Les fonctions résurgentes*, Publ. Math., Univ. Orsay, 1985.

[Ju] W. JURKAT – *Meromorphe Differentialgleichungen*, Lect. Notes in Math., vol. 637, Springer, 1978.

[Ka] N. KATZ – « On the calculation of some differential groups », *Invent. Math.* **87** (1987), p. 13–61.

[LR] M. LODAY-RICHAUD – « Classification méromorphe locale des systèmes différentiels linéaires méromorphes : phénomène de Stokes et applications », Thèse, Univ. Orsay, 1991, voir aussi *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), p. 849–906.

[LR-P] M. LODAY-RICHAUD & G. POURCIN – « On index theorems for linear ordinary differential operators », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **47** (1997), p. 1379–1424.

[Ml] B. MALGRANGE – *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., Birkhäuser, 1991.

[Mi] C. MITSCHI – « Groupes de Galois différentiels et G-fonctions », Thèse, Univ. Strasbourg, 1989, voir aussi *Pac. J. Math* **176** (1996), p. 365–405.

[Mi-Si] C. MITSCHI & M. SINGER – « On Ramis's solution of the local inverse problem of differential Galois theory », *J. Pure Appl. Algebra* **110** (1996), p. 185–194.

[Sa] J. SAULOY – « Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations », ce volume, p. 227–251.

[Se] J.-P. SERRE – *Cours d'arithmétique*, Coll. Sup., PUF, 1970.

[Si] M. SINGER – « Direct and inverse problems in differential Galois theory », in *Selected Works of E. Kolchin*, American Mathematical Society, 1999, p. 527–554.

D. BERTRAND, Université de Paris 6, Institut de Mathématiques, Case 247, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 • *E-mail :* bertrand@math.jussieu.fr

[(3)] Les lettres entre Deligne, Malgrange et Ramis sur le sujet contiennent un fourmillement d'idées, qui n'ont pas toutes été reprises dans les articles ultérieurs. Avec la permission de leurs auteurs, elles mériteraient d'être rassemblées, par exemple, en un volume de documents mathématiques.