

Astérisque

JUAN RIVERA-LETELIER

Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux

Astérisque, tome 287 (2003), p. 147-230

http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__287__147_0

© Société mathématique de France, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DYNAMIQUE DES FONCTIONS RATIONNELLES SUR DES CORPS LOCAUX

par

Juan Rivera-Letelier

Em homenagem a Jacob, na ocasião de seu sexagésimo aniversário.

Résumé. — Soit $p > 1$ un nombre premier, \mathbb{Q}_p le corps des nombres p -adiques et soit \mathbb{C}_p la plus petite extension complète et algébriquement close de \mathbb{Q}_p . Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des fonctions rationnelles sur la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

À chaque fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ on associe son *domaine de quasi-périodicité*, qui est égal à l'intérieur de l'ensemble des points dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont récurrents par R . On donne plusieurs caractérisations du domaine de quasi-périodicité et on décrit sa dynamique locale et globale.

On montre que les composantes du domaine de quasi-périodicité (qui sont les analogues p -adiques des disques des Siegel et des anneaux de Herman) sont des affinoïdes ouverts (c'est-à-dire que leur géométrie est simple) et on décrit la dynamique sur une composante donnée.

Comme dans le cas complexe on a une partition de la droite $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ en l'ensemble de Fatou et l'ensemble de Julia. Par analogie au cas complexe on fait la conjecture de non-errance suivante : tout disque errant est attiré par un cycle attractif. On montre que ceci a lieu si et seulement si tout point dans l'ensemble de Fatou est soit attiré par un cycle attractif, soit rencontre le domaine de quasi-périodicité par itération positive.

Introduction

Ce travail est essentiellement ma thèse de doctorat, laquelle a été soutenue à Orsay pendant l'année 2000.

Soit p un nombre premier et \mathbb{Q}_p le corps des nombres p -adiques. Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique des fonctions rationnelles à coefficients dans des extensions de \mathbb{Q}_p .

Classification mathématique par sujets (2000). — 32H50, 37F10, 14G20, 39B12.

Mots clefs. — Systèmes dynamiques, théorie itérative, corps locaux, quasi-périodique.

Je remercie la Fundación Andes, Beca Presidente de la Republica de Chile et la Fundación Rivera Letelier pour son soutien financier.

Il y a des questions en théorie des nombres qui sont reliées aux systèmes dynamiques et les gens ont étudié, plus ou moins implicitement, des systèmes dynamiques depuis longtemps. Par exemple, la définition de la fraction continue d'un nombre réel est reliée à l'itération de l'application de Gauss $x \rightarrow 1/x - [1/x]$. Notamment on a la relation suivante entre la théorie des courbes elliptiques et l'itération des fonctions rationnelles. On considère une courbe elliptique

$$E : y^2 = x^3 + ax + b.$$

où a et b appartiennent à un corps de nombres K (extension finie des rationnels). Pour toute extension L de K l'ensemble $E(L)$ de points dans E à coordonnées dans L a une structure de groupe abélien, avec $\mathcal{O} = (\infty, \infty)$ comme élément neutre. Cette structure est définie par.

$$(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (\lambda^2 - x_0 - x_1, \lambda(\lambda^2 - x_0 - x_1) + \nu)$$

où $\lambda = (y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ si $x_1 \neq x_0$ et $\lambda = (3x_0^2 + a)/2y_0$ si $x_1 = x_0$ et $\nu = y_0 - \lambda x_0 = y_1 - \lambda x_1$. Géométriquement la somme de trois points est égal à \mathcal{O} si et seulement si les trois points sont colinéaires. On dit qu'un point de E est de *torsion* s'il existe $n \geq 1$ tel que

$$[n]P = \underbrace{P + \dots + P}_n = \mathcal{O}.$$

Ceci a lieu si et seulement si P est pré-périodique pour l'application de doublement $P \rightarrow [2]P$, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 0$ et $l \geq 1$ tels que $[2^k]P = [2^{k+l}]P$. La première coordonnée de l'application de doublement est donnée par

$$x([2](x_0, y_0)) = \frac{x_0^4 - 2ax_0^2 - 8bx_0 + a^2}{4x_0^3 + 4ax_0 + 4b},$$

qui ne dépend que de x_0 . On voit alors qu'un point (x, y) de E est un point de torsion si et seulement si x est pré-périodique pour cette fonction rationnelle de degré 4. Ainsi l'étude des points de torsion K -rationnels d'une courbe elliptique est étroitement reliée à l'étude des points pré-périodiques sur K d'une fonction rationnelle.

Il y a beaucoup de résultats dans ce dernier contexte; on renvoie le lecteur aux références de [MS2] et [Be]. Northcott a montré une propriété fondamentale :

Théorème (Northcott [No]). — *Soit K un corps de nombres. Alors toute fonction rationnelle à coefficients dans K , de degré au moins deux, a un nombre fini de points pré-périodiques sur la droite projective $\mathbb{P}(K)$.*

Ce théorème vaut en dimension quelconque; voir aussi Lewis [Le]. On donne une nouvelle démonstration de ce théorème (en dimension 1) dans un cadre légèrement plus général (Section 4.5).

Morton et Silverman ont conjecturé qu'il existe une borne pour le nombre de points pré-périodiques qui ne dépend que du degré de $[K : \mathbb{Q}]$ de K et du degré de la fonction rationnelle; voir [MS1].

Principe de Hasse. — Dans ce genre de problème il y a un principe appelé *principe de Hasse*. Hasse a montré le théorème suivant ; voir e.g. [Ca].

Théorème (Hasse). — *La forme quadratique,*

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2, \quad \text{où } a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q},$$

a un zéro non-trivial sur \mathbb{Q}^n si et seulement si il en a sur $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}^n$ pour toute valeur absolue \mathcal{P} , où $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ dénote la complétion de \mathbb{Q} par \mathcal{P} .

Rappelons que une valeur absolue \mathcal{P} sur un corps K est une fonction $\mathcal{P} : K \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\mathcal{P}(x) \geq 0$, $\mathcal{P}(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, $\mathcal{P}(xy) = \mathcal{P}(x)\mathcal{P}(y)$ et $\mathcal{P}(x + y) \leq \mathcal{P}(x) + \mathcal{P}(y)$, pour tout $x, y \in K$.

L'importance de ce théorème est que souvent il est plus facile de déterminer si une forme quadratique a des zéros non-triviaux sur $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}^n$ que sur \mathbb{Q}^n , car $\mathbb{Q}_{\mathcal{P}}$ est complet.

Le principe de Hasse consiste à : d'abord, traiter le problème sur les différentes complétions du corps de base et après, essayer de recoller l'information. Mais on n'a pas toujours une équivalence comme dans le théorème de Hasse. Par exemple l'équation $(x^2 - 2)(x^2 - 17)(x^2 - 34) = 0$ a une solution sur toute complétion de \mathbb{Q} , mais n'a pas des solutions sur \mathbb{Q} . Il en est de même pour la courbe elliptique $2y^2 = x^4 - 17$; voir [Ca].

Dynamique des fonctions rationnelles. — Si l'on veut appliquer le principe de Hasse pour étudier la dynamique d'une fonction rationnelle à coefficients dans un corps de nombres, on doit étudier d'abord la dynamique des fonctions rationnelles sur les différentes complétions du corps de base.

Il y a deux types de valeurs absolues : les *non-archimédiennes* qui satisfont l'inégalité triangulaire forte : $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$, et les *archimédiennes* qui ne la satisfont pas. D'après un théorème de Orstrowski la complétion d'un corps de nombres par rapport à une valeur absolue archimédienne est isomorphe à \mathbb{C} ou à \mathbb{R} ; voir par exemple [Ca].

Parfois il est plus facile d'étudier la dynamique d'une fonction rationnelle sur \mathbb{C} que sur \mathbb{R} car on profite du fait que \mathbb{C} est algébriquement clos. L'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle complexe est classique et elle a été initiée par Fatou et Julia dans les années 1910. Depuis ces premiers travaux, et notamment dans les vingt dernières années, la dynamique des fonctions rationnelles complexes a connu un grand développement, même si des questions fondamentales comme la densité de l'hyperbolicité sont encore ouvertes.

L'étude de la dynamique des fonctions rationnelles sur des corps non-archimédiens est plus récente; voir [MS1], [Hs] et [Be]. Ce travail est consacré à l'étude de la dynamique d'une fonction rationnelle dont les coefficients appartiennent à \mathbb{C}_p , qui est la plus petite extension complète et algébriquement close de \mathbb{Q}_p .

Généralités sur le corps \mathbb{C}_p . — La *norme p -adique* sur \mathbb{Q} , notée $|\cdot|_p$, est définie par $|p^\nu r/s|_p = p^{-\nu}$, pour $\nu \in \mathbb{Z}$ et pour tous les entiers r et s qui ne sont pas divisibles par p . On note \mathbb{Q}_p la complétion de \mathbb{Q} par la norme p -adique et on l'appelle le *corps des nombres p -adiques*. On peut étendre $|\cdot|_p$ à la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} . La complétion de $\overline{\mathbb{Q}}$ est le corps \mathbb{C}_p , qui est aussi algébriquement clos.

Comme p est fixe, on note $|\cdot|_p$ simplement par $|\cdot|$. Une *boule fermée* (resp. *ouverte*) de \mathbb{C}_p est un ensemble de la forme $B_r(a)^+ = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| \leq r\}$ (resp. $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - a| < r\}$) où $r \in |\mathbb{C}_p| = \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p - \{0\}\}$. Notons que tout élément $w \in B_r^+(a)$ (resp. $w \in B_r(a)$) est un centre; $B_r^+(w) = B_r^+(a)$ (resp. $B_r(w) = B_r(a)$) et si deux boules fermées (resp. ouvertes) s'intersectent, alors l'une est contenue dans l'autre. Dans la droite projective on appelle boule fermée (resp. ouverte) le complémentaire d'une boule ouverte (resp. fermée) de \mathbb{C}_p . La notion de boule de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est alors invariante par automorphismes projectifs.

Une propriété des fonctions rationnelles à coefficients dans \mathbb{C}_p qui simplifiera la géométrie est que les fonctions rationnelles préservent les affinoïdes. Un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) *connexe* est une intersection finie non-vide de boules fermées (resp. ouvertes) de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) est une union finie d'affinoïdes fermés (resp. ouverts) connexes. Alors l'image et la préimage d'un affinoïde fermé (resp. ouvert) par une fonction rationnelle est aussi un affinoïde fermé (resp. ouvert) (Proposition 2.6). Une union d'affinoïdes connexes fermés qui contient un point donné est appelé un *espace analytique connexe*. Alors la classe des espaces analytiques, qui sont les unions finies de espaces analytiques connexes, est aussi invariante par les fonctions rationnelles.

On prendra cette notion pour définir une notion de composante connexe : la *composante analytique* d'une partie ouverte X de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui contient $z_0 \in X$ est l'union de tous les espaces analytiques connexes qui contiennent z_0 et qui sont contenus dans X ; voir [Be]. Notons qu'une composante analytique est un espace analytique connexe non-vide.

Les *fonctions holomorphes* définies sur les affinoïdes fermés connexes sont les limites uniformes de fonctions rationnelles sans pôles sur l'affinoïde. Une telle fonction est constante ou a un nombre fini de zéros. Alors une fonction définie sur un espace analytique est *holomorphe* si sa restriction à tout affinoïde fermé connexe est holomorphe; voir [FvP] et Sections 1.2 et 1.3.3.

Points périodiques. — Rappelons que si z_0 est un point périodique de R de période minimale k alors $\{z_0, R(z_0), \dots, R^{k-1}(z_0)\}$ est le *cycle* de z_0 ; $\lambda = (R^k)'(z_0)$ ne dépend que du cycle et est appelé le *multiplicateur* du cycle. On considère la classification suivante des points périodiques, en analogie avec le cas complexe.

- Si $|\lambda| < 1$ on dit que z_0 est *attractif*. Si de plus $\lambda = 0$, alors on dit que z_0 est *super-attractif*.

- Si $|\lambda| = 1$ on dit que z_0 est *indifférent*. Si λ est une racine de l'unité on dit que z_0 est *parabolique* ou *indifférent rationnel*. Sinon on dit que z_0 est *indifférent irrationnel*.
- Si $|\lambda| > 1$ on dit que z_0 est *répulsif*.

Un théorème de Fatou dit qu'une fonction rationnelle à coefficients complexes, de degré au moins deux, est telle que tout cycle attractif ou parabolique attire au moins un point critique ; voir [Fa]. Comme une fonction rationnelle R a au plus $2 \deg(R) - 2$ points critiques on a la propriété suivante.

Théorème (Fatou [Fa]). — *Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors le nombre de cycles attractifs ou paraboliques de R est au plus $2 \deg(R) - 2$.*

Cette propriété est loin d'être vraie dans le cas p -adique. Par exemple tous les points périodiques du polynôme $z^p \in \mathbb{C}_p[z]$ sont attractifs. Mais on montre que *si une fonction rationnelle à coefficients dans \mathbb{C}_p et degré $d > 1$, a plus de $3d - 3$ cycles attractifs, alors elle en a une infinité* (Corollaire 4.9). On conjecture que pour une telle fonction rationnelle, soit tout cycle attractif attire un point critique (et alors il y a au plus $2d - 2$ cycles attractifs), soit il y a une infinité de cycles attractifs, voir Section 4.1.1.

D'autre part, notons que la notion de cycle super-attractif et cycle parabolique ne dépend pas d'une valuation. On obtient alors le théorème suivant par le principe de Lefschetz.

Théorème 1. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors le nombre de cycles super-attractifs et paraboliques est au plus $2d - 2$.*

Dynamique au voisinage des points fixes (Sections 3.1 et 3.3). — Comme dans le cas complexe on peut décrire, dans la plupart des cas, la dynamique au voisinage d'un point fixe à partir de son multiplicateur. Une des différences avec le cas complexe est que, comme $\{|\lambda| = 1\} \subset \mathbb{C}_p$ est un ensemble ouvert, la condition d'avoir un point fixe indifférent est ouverte. Par conséquent il n'y a pas d'analogie non-archimédienne aux très riches phénomènes liés à la bifurcation d'un point fixe indifférent, comme par exemple l'implosion parabolique ; voir [La].

En général la dynamique locale des points fixes est assez simple et en particulier la dynamique au voisinage d'un point fixe qui n'est ni parabolique ni super-attractif est localement linéarisable. Il y a aussi des formes locales canoniques pour les points fixes paraboliques et super-attractifs. De plus, deux germes sont conjugués si et seulement s'ils le sont formellement ; voir [HY], [Lu1], [TVW], [AV] et Sections 3.1 et 3.3.1. Les mêmes assertions dans le cas complexe ne sont pas toujours vraies et sont reliées à des problèmes de petits diviseurs assez subtils ; voir [Y], [Ec1] et [Vo].

Ensembles de Fatou et de Julia (Section 4.3). — On peut définir les ensembles de Fatou et de Julia comme dans le cas complexe, mais on remplace la normalité du complexe par l'*uniformité lipschitzienne*.

L'ensemble de Fatou d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$, noté $F(R)$, est l'ensemble de tous les points $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels qu'il existe un voisinage U de z_0 tel que la famille $\{R^n|_U\}_{n \geq 0}$ est uniformément lipschitzienne ; voir [Hs].

On a les propriétés usuelles : $F(R)$ est ouvert, $R^{-1}(F(R)) = F(R)$ et $F(R^n) = F(R)$, pour $n \geq 1$. Mais l'ensemble de Julia $J(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - F(R)$ n'est pas nécessairement compact (rappelons que \mathbb{C}_p n'est pas localement compact). De plus l'ensemble de Julia peut être vide (par exemple il n'est pas difficile de voir que $J(z^p) = \emptyset$). On a aussi propriété suivante.

Théorème (Benedetto [Be]). — *L'ensemble de Fatou d'une fonction rationnelle est non-vide.*

Dans le cas complexe on a au contraire : l'ensemble de Julia est non-vide et peut être égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Comme conséquence de ce théorème (et d'un théorème de Hsia), on obtient que l'ensemble de Julia est toujours d'intérieur vide.

Cas complexe. — Dans le cas complexe l'étude de la dynamique de l'ensemble de Fatou, est faite en étudiant les composantes connexes, car il n'est pas difficile de voir que la fonction rationnelle envoie une composante connexe sur une composante connexe. Fatou et Julia ont classifié les composantes connexes en trois types (voir par exemple [CG]) :

- *Composantes attractives.* Ce sont les composantes connexes qui sont attirées par un cycle, qui peut être attractif ou parabolique.

- *Préimages des composantes de quasi-périodicité.* C'est-à-dire qu'il existe $k \geq 0$ et une suite $n_j \rightarrow \infty$ telle que R^{n_j+k} converge uniformément vers R^k sur les parties compactes de la composante en question. Dans ce cas, un itéré de la composante est périodique pour R et peut être, soit un disque appelé *disque de Siegel*, soit un anneau appelé *anneau de Herman*.

- *Composantes errantes.* Ce sont les composantes qui ne sont pas pré-périodiques pour la fonction rationnelle.

En 1985 Sullivan a montré que toutes les composantes connexes de l'ensemble de Fatou sont pré-périodiques et par conséquent, il ne peut y avoir que des composantes attractives ou des préimages des composantes de quasi-périodicité ; voir [Sul].

Sur la structure de l'ensemble de Fatou (Section 4.4). — Dans le cas p -adique à chaque fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ on associe son *domaine de quasi-périodicité*, que l'on note $\mathcal{E}(R)$, qui est égal à l'intérieur de l'ensemble de points de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont récurrents par R . On montre le théorème suivant.

Théorème de Classification. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors l'ensemble de Fatou de R se décompose dans les ensembles disjoints suivants.*

- (1) *Bassins d'attraction.* (L'ensemble de points de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont attirés par un cycle attractif.)

- (2) $\mathcal{E}'(R) = \cup_{n \geq 0} R^{-n}(\mathcal{E}(R))$.
- (3) L'union des disques errants qui ne sont pas attirés par un cycle attractif.

On dit qu'un disque $D \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est *errant* si pour tous $k > l \geq 0$ on a $R^k(D) \cap R^l(D) = \emptyset$. Par analogie au cas complexe on fait la conjecture suivante.

Conjecture de Non-Errance. — *Tout disque errant est attiré par un cycle attractif.*

D'après le Théorème de Classification la Conjecture de Non-Errance est équivalente à la conjecture suivante.

Structure Conjecturale de l'Ensemble de Fatou. — *Tout point de l'ensemble de Fatou appartient à $\mathcal{E}'(R)$ ou est attiré par un cycle attractif.*

Benedetto a étudié les composantes analytiques de l'ensemble de Fatou et il a fait une conjecture de non-errance dans ce contexte; voir [Be]. Cependant il arrive que l'ensemble de Fatou soit égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, même s'il y a plusieurs comportements attractifs et quasi-périodiques: voir exemples 6.6 et 6.3.

Dynamique attractive (Section 4.1). — L'étude des bassins d'attraction des cycles attractifs peut être faite comme dans le cas complexe et ne présente pas de surprises. Une fonction rationnelle envoie une composante analytique d'un bassin d'attraction sur une composante analytique. De plus un *bassin d'attraction immédiat* (c'est-à-dire une composante analytique du bassin qui contient un point du cycle) est soit un disque rationnel ouvert: soit un ensemble qui ressemble au complémentaire d'un ensemble de Cantor dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ (Théorème 2).

Dynamique quasi-périodique (Section 4.2). — Par analogie au cas complexe on définit le *domaine de quasi-périodicité* d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ comme

$$\mathcal{E}(R) = \{z_0 \in U \mid \text{il existe } n_j \rightarrow \infty \text{ tel que } R^{n_j} \rightarrow \text{id. sur un voisinage de } z_0\}.$$

En particulier $\mathcal{E}(R)$ est ouvert et tout point dans $\mathcal{E}(R)$ est récurrent par R . On montre que $\mathcal{E}(R)$ est égal à l'intérieur de l'ensemble de points récurrents par R (Corollaire 4.27). Une définition équivalente (Proposition 3.14) est :

$$\mathcal{E}(R) = \{z_0 \in X \mid \text{il existe } k = k(z_0) \geq 1 \text{ tel que } \left\{ \frac{R^{nk} - \text{id}}{nk} \right\}_{n \geq 0}$$

est uniformément convergent sur un voisinage de z_0 , quand $|n|_p \rightarrow 0\}$.

Il n'est pas difficile de voir que R est injective sur $\mathcal{E}(R)$, $R(\mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(R)$ et $\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R)$, pour $n \geq 1$ (Proposition 3.9). En général $\mathcal{E}(R)$ n'est pas fermé: voir exemple dans [R-L].

On peut décrire la dynamique locale sur le domaine de quasi-périodicité comme suit: soit $z_0 \in \mathcal{E}(R)$ n'est pas périodique et alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que R^k est localement conjugué à la translation $z \mapsto z + k$ (Proposition 3.16); soit $z_0 \in \mathcal{E}(R)$ est périodique et par conséquent R est localement linéarisable si z_0 n'est pas parabolique:

sinon R est localement de la forme $\lambda z(1 + z^n + az^{2n})$, où λ est une racine de l'unité, $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{C}_p$; (Section 3.3.1).

Logarithme itératif (Section 3.2). — Pour montrer ces propriétés on considère la fonction R_* définie au voisinage d'un point $z_0 \in \mathcal{E}(R)$ par,

$$R_* = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{R^{nk} - \text{id}}{nk}, \quad \text{où } k = k(z_0),$$

qui est appelé le *logarithme itératif* de R . Cette fonction a aussi été considérée par Lubin dans [Lu1] au voisinage des points fixes. Par définition R_* est localement holomorphe et on montre que $R_*(z_0) = 0$ si et seulement si $z_0 \in \mathcal{E}(R)$ est périodique par R ; voir aussi [Lu1].

Ceci nous donne deux corollaires intéressants. Le premier est que les points périodiques indifférents sont isolés, ce qui n'était pas tellement clair; voir [Hs] et [Be]. L'autre corollaire est une nouvelle démonstration du théorème de Northcott unidimensionnel (Section 4). On peut aussi utiliser le logarithme itératif pour expliciter les conjugaisons locales décrites dans la Section 3.3.1.

Composantes du domaine de quasi-périodicité (Section 5). — On montre qu'une fonction rationnelle permute les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité et on montre la propriété fondamentale suivante.

Théorème 3. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Alors C est un affinoïde ouvert, c'est-à-dire :

$$C = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_0 \cup \dots \cup B_n,$$

où $n \geq 0$ et B_0, \dots, B_n sont des boules fermées.

Par analogie avec le cas complexe on dit que C est un *disque de Siegel* si $n = 0$ et on dit que C est un *n -anneau de Herman* si $n > 0$ (on suppose que les boules B_0, \dots, B_n sont disjointes).

On montre que pour tout affinoïde ouvert il existe une fonction rationnelle telle que chaque composante connexe de l'affinoïde est une composante analytique de son domaine de quasi-périodicité.

De plus on montre que pour tout $n \geq 1$ il existe une fonction rationnelle de degré 2 ayant un n -anneau de Herman. En revanche une fonction rationnelle complexe de degré deux ne peut pas avoir un anneau de Herman; voir [Sh].

Itérés fractionnaires (Section 4.2). — Étant donnée une composante analytique C de $\mathcal{E}(R)$, et quitte à remplacer R par un itéré, on a une action $(w, z) \mapsto R^{ow}(z)$ de $\mathbb{Z}_p = \{w \in \mathbb{Q}_p \mid |z|_p \leq 1\}$ sur C telle que $R^{o1} = R$ et telle que pour chaque $w \in \mathbb{Z}_p$ l'application $R^{ow} : C \rightarrow C$ est un automorphisme holomorphe de C (Proposition 5.6).

En effet pour chaque affinoïde fermé contenu dans C on a que pour chaque $w \in \mathbb{C}_p$ de norme assez petite la série

$$R^{\circ w} = T_0 + wT_1 + \frac{w(w-1)}{2}T_2 + \dots,$$

converge uniformément sur l'affinoïde et on a $R^{\circ n} = R^n$, pour chaque entier $n \geq 1$, et on a

$$R^{\circ(w_1+w_2)} = R^{\circ w_1} \circ R^{\circ w_2},$$

quand $R^{\circ(w_1+w_2)}$, $R^{\circ w_1}$ et $R^{\circ w_2}$ sont définis. Par conséquent $R_* = \lim_{w \rightarrow 0} (R^{\circ w} - \text{id})/w$ et alors on peut considérer le logarithme itératif R_* comme un champ de vecteurs tel que le temps w du flot engendré par R_* est $R^{\circ w}$.

Composantes et points périodiques (Section 5.2). — On obtient que chaque composante analytique du domaine de quasi-périodicité contient une infinité de points périodiques, mais chaque affinoïde fermé contenu dans la composante rencontre au plus un nombre fini d'eux. De plus, quitte à prendre un itéré, les périodes de ces points périodiques sont de la forme p^n , pour $n \geq 0$.

On montre ensuite qu'à chaque bout d'une composante analytique du domaine de quasi-périodicité sont attachés une infinité de disques de Siegel (Section 5.3). Par conséquent si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle de degré au moins deux, alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

- R a un point périodique indifférent.
- R a une infinité de points périodiques indifférents.
- $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$.
- Il y a une infinité de disques de Siegel.

Un exemple. — Un exemple intéressant est la fonction rationnelle

$$R(z) = \lambda z^2 \frac{1 - bz}{z - a},$$

où $|\lambda| = 1$ et $|a| = |b| < 1$ (exemple 5.15). La couronne

$$C = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |a| < |z| < |b|^{-1}\}$$

est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ et si $|\lambda-1| < 1$ alors tous les points périodiques de R sur C sont de période de la forme p^n . De plus pour $p > 2$ on montre (à l'aide d'un théorème de Keating) que si R n'a pas de cycles paraboliques, alors pour tout $n \geq 0$, la fonction rationnelle R a exactement 2 cycles de période primitive p^n dans C .

Sur la rectification des applications à allure polynomiale. — On finit avec une remarque. Dans le complexe la théorie des applications quasi-conformes est un outil très utile. Notamment, la preuve du théorème de non-errance de Sullivan dépend de façon essentielle de cette théorie; voir [Sul]. Une autre application est le *théorème de rectification* de Douady et Hubbard qui dit que toute application à allure polynomiale est quasi-conformément conjuguée à un polynôme; voir [DH].

Il semble difficile qu'on puisse avoir un analogue du théorème de rectification de Douady et Hubbard. Par exemple soit $i \in \mathbb{C}_5$ la racine de $z^2 = -1$ telle que $|i - 2| < 1$, et considérons le polynôme

$$P(z) = -z + (5 + i)z^2 - (i + 3)z^3 \in \mathbb{C}_5[z].$$

Alors $(P, \{|z| < 5\})$ est une application à allure polynomiale de degré 2 qui a 0 et 1 comme points fixes paraboliques, car $P'(0) = -1$ et $P'(1) = -i$. Mais par le Théorème 1, un polynôme de degré 2 a au plus un cycle parabolique.

Organisation et remarques. — Ce travail est divisé en 6 sections. Souvent la démonstration la plus longue d'une (sous)section est à la fin de la section. Maintenant on décrit brièvement le contenu de chaque section.

La *Section 1* contient les préliminaires. On considère d'abord les objets géométriques avec leurs propriétés basiques (*Section 1.2*). À part ceux mentionnés dans cette introduction on définit les *bouts*, les *systèmes projectifs* et l'arbre associé à un espace analytique complexe. La *Section 1.3* contient des outils d'analyse.

Dans la *Section 2* on considère l'action d'une fonction rationnelle sur les différents objets géométriques. On définit aussi la notion de *composante d'injectivité* et on montre que une composante d'injectivité est un affinoïde ouvert (Proposition 2.9). Ceci est le premier pas dans la démonstration du Théorème 3.

La *Section 3* est consacrée à la dynamique locale. Cette section ne dépend pas de la Section 2. Dans les *Sections 3.1* et *3.3* on décrit la dynamique au voisinage des points fixes et dans la *Section 3.2* on introduit le *domaine de quasi-périodicité* et on décrit ses propriétés locales.

La *Section 4* est consacrée à la dynamique des fonctions rationnelles. On commence par le Théorème 1 sur la borne du nombre de cycles super-attractifs et paraboliques. Dans la *Sections 4.1* on étudie les bassins d'attraction et dans la *Section 4.2* on considère des propriétés globales du domaine de quasi-périodicité. Dans la *Section 4.3* on considère les ensembles de Fatou et de Julia avec leurs propriétés basiques. Dans la *Section 4.4* on montre le Théorème de Classification et on énonce les conjectures décrites dans cette introduction. Dans la *Section 4.5* on considère la dynamique de fonctions rationnelles dites *simples*, qui ont été introduites par Morton et Silverman dans [MS2].

Dans la *Section 5* on étudie les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité. On montre le Théorème 3 sur la géométrie des composantes analytiques et dans la *Section 5.1* on considère la dynamique sur une composante analytique donnée. Dans la *Section 5.2* on étudie les points périodiques dans une composante donnée et dans la *Section 5.3* on étudie la dynamique aux bouts des composantes analytiques.

Dans la *Section 6* on considère des exemples.

Remerciements. — Je remercie J.-C. Yoccoz pour les nombreuses discussions et pour l'éclaircissement de plusieurs idées, ainsi que pour la patience avec laquelle il a lu les différentes versions préliminaires de ce travail et pour les nombreuses corrections et améliorations qu'il a apportées. Je remercie aussi S. Crovisier, S. Senti et I. de la Cruz qui ont fait des nombreux corrections d'orthographe pour ce travail.

1. Préliminaires

1.1. Généralités. — On note \mathbb{Z} l'anneau des nombres entiers, \mathbb{Q} le corps des nombres rationnels, \mathbb{R} le corps des nombres réels, \mathbb{C} le corps des nombres complexes et, si $q \geq 1$ est une puissance d'un nombre premier, on note \mathbb{F}_q l'unique corps avec q éléments. On appelle *corps de nombres* une extension finie de \mathbb{Q} . Étant donné un corps K on note \bar{K} la clôture algébrique de K .

Un *corps valué* $(K, |\cdot|)$ est un corps K muni d'une fonction $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- (i) $|x| \geq 0$, pour tout $x \in K$.
- (ii) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- (iii) $|xy| = |x| \cdot |y|$, pour tous $x, y \in K$.
- (iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$, pour tous $x, y \in K$.

On dit que $(K, |\cdot|)$ est *ultramétrique*, ou *non-archimédien*, si de plus on a

- (iv) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$, pour tous $x, y \in K$.

Si K est complet pour la distance induite par la valeur absolue $|\cdot|$, on dit que $(K, |\cdot|)$ est *complet*. Le groupe $|K| = \{|x| \mid x \in K - \{0\}\}$ s'appelle le *groupe de valuation* de K . Si K est algébriquement clos, alors $|K|$ est dense dans \mathbb{R} .

Lorsque K est non-archimédien, l'ensemble $\mathcal{O}_K = \{x \in K \mid |x| \leq 1\}$ est un anneau appelé *l'anneau de valuation* de K et l'idéal $\mathcal{P}_K = \{x \in K \mid |x| < 1\}$ est appelé *l'idéal de valuation* de K ; c'est un idéal maximal de \mathcal{O}_K . Alors $\bar{K} = \mathcal{O}_K / \mathcal{P}_K$ est un corps, qui est appelé le *corps résiduel* de K ; pour $x \in \mathcal{O}_K$, on note $\tilde{x} \in \bar{K}$ l'image de x dans \bar{K} .

Étant donné un nombre premier $p > 1$ on considère la norme *p-adique* $|\cdot|_p$ sur \mathbb{Q} définie par $|p^\nu r/s|_p = p^{-\nu}$, pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$ et tous les entiers r et s qui ne sont pas divisibles par p . On note \mathbb{Q}_p la complétion de \mathbb{Q} par $|\cdot|_p$, qu'on appelle le *corps de nombres p-adiques*. Alors $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ n'est pas complet, on note \mathbb{C}_p sa complétion, qui est algébriquement close. On note $\mathbb{D}_p = \mathcal{P}_{\mathbb{C}_p} = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| < 1\}$.

Notons que \mathbb{F}_p est le corps résiduel de \mathbb{Q}_p et que $\bar{\mathbb{F}}_p$ est celui de $\bar{\mathbb{Q}}_p$ et \mathbb{C}_p . De plus $\log_p |\mathbb{C}_p| = \mathbb{Q}$.

1.1.1. La droite projective et la métrique chordale. — Étant donné un corps K on considère la *droite projective* de K notée $\mathbb{P}(K)$, qui est l'ensemble des droites dans $K^2 = K \times K$ passant par $(0, 0)$. On notera $[x, y] \in \mathbb{P}(K)$, pour $(x, y) \in K^2 - \{0, 0\}$, le point correspondant à la droite $\{(\lambda x, \lambda y) \mid \lambda \in K\}$. Le groupe d'automorphismes

de $\mathbb{P}(K)$ est isomorphe à $GL(2, K)/K^*$, où $K^* = K - \{0\}$. En effet, à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, K)/K^*$ on associe l'automorphisme

$$\varphi([x, y]) = [ax + by, cx + dy].$$

On identifie $\mathbb{P}(K) - [1, 0]$ avec K par l'application $[\lambda, 1] \mapsto \lambda$ et on note ∞ le point $[1, 0]$. Alors on a une identification naturelle $\mathbb{P}(K) = K \cup \{\infty\}$. On étend l'application $x \in \mathcal{O}_K \mapsto \tilde{x} \in \tilde{K}$ à $\mathbb{P}(K)$, par $\tilde{x} = \infty \in \mathbb{P}(\tilde{K})$ pour tout $x \in \mathbb{P}(K) - \mathcal{O}_K$.

Une *coordonnée*, ou plus précisément, une *coordonnée globale* w de $\mathbb{P}(K)$ est $w \in GL(2, K)/K^*$ et l'identification de $\mathbb{P}(K) - \{w^{-1}([1, 0])\}$ à K donnée par $[x, y] \mapsto x_1/y_1$ où $[x_1, y_1] = w([x, y])$. On dit qu'une coordonnée w est *affine* si w est représentée par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, K)$.

Si K est un corps valué ultramétrique, alors on considère, comme dans [Ru1], la *distance chordale* d sur $\mathbb{P}(K)$ donnée par

$$d([x_0, y_0], [x_1, y_1]) = \frac{|x_0 y_1 - x_1 y_0|}{\max\{|x_0|, |y_0|\} \cdot \max\{|x_1|, |y_1|\}},$$

ou en coordonnées

$$d(z_0, z_1) = \frac{|z_0 - z_1|}{\max\{|z_0|, 1\} \cdot \max\{|z_1|, 1\}},$$

où $|\cdot|$ désigne la norme ultramétrique sur K correspondante; voir aussi [Ru2] et [MS2]. Notons que la distance chordale coïncide avec la distance induite par $|\cdot|$ sur $\{|z| \leq 1\}$. De plus il est facile de voir que la distance chordale est invariante par les automorphismes représentés par les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathcal{O}_K)$ telles que $|ad - bc| = 1$.

On peut considérer la distance chordale comme l'analogie de la distance sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que l'on obtient quand on identifie $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ à $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ par la projection stéréographique et en considérant la distance sur $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ induite par celle de \mathbb{R}^3 .

1.1.2. Corps ultramétriques localement compacts. — On considère un corps valué $(K, |\cdot|)$ ultramétrique et complet.

Proposition. — *Le corps K est localement compact si et seulement si le groupe des valuations est discret et le corps résiduel est fini.*

Dans ce cas il existe $\pi \in \mathcal{P}_K$ tel que pour tout système de représentants A de \tilde{K} et tout $x \in K - \{0\}$, il existe $N \in \mathbb{Z}$ et $\{a_n\}_{n \geq N} \subset A$ tels que,

$$x = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \pi^n \text{ avec } a_N \neq 0.$$

On appelle π une *uniformisante* de $(K, |\cdot|)$.

Par exemple \mathbb{Q}_p est localement compact et on peut prendre $\pi = p$ comme uniformisante et $A = \{0, 1, \dots, p-1\}$ comme système des représentants de $\tilde{\mathbb{Q}}_p = \mathbb{F}_p$.

Il est facile de voir que toute extension finie de \mathbb{Q}_p est complète et localement compacte. D'autre part \mathbb{C}_p n'est pas localement compact, car son corps résiduel est infini (et son groupe des valuations n'est pas discret).

1.2. Objets géométriques. — Dans cette section on introduit différents objets géométriques et on montre les propriétés qui nous seront utiles dans la suite.

1.2.1. Boules, affinoïdes et espaces analytiques. — Étant donné $x \in \mathbb{C}_p$ et $r > 0$ on pose

$$B_r(x) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - x| < r\} \quad \text{et} \quad B_r^+(x) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z - x| \leq r\}.$$

Si $r \in |\mathbb{C}_p|$ on appelle $B_r^+(x)$ (resp. $B_r(x)$) *boule fermée* (resp. *ouverte*) de \mathbb{C}_p . Si $r \notin |\mathbb{C}_p|$ alors $B_r(x) = B_r^+(x)$ et on l'appelle *boule irrationnelle* de \mathbb{C}_p .

Une boule fermée (resp. ouverte, irrationnelle) de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est soit une boule fermée (resp. ouverte, irrationnelle) de \mathbb{C}_p , soit le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) de \mathbb{C}_p . La classe des boules fermées (resp. ouvertes, irrationnelles) de \mathbb{C}_p (resp. $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$) est invariante par changement de coordonnée affine (resp. projectif).

Si B_0, B_1 sont des boules fermées, ouvertes ou irrationnelles de \mathbb{C}_p , alors $B_0 \cap B_1 = \emptyset, B_0 \subset B_1$ ou $B_1 \subset B_0$. Une boule fermée (ouverte, irrationnelle) est topologiquement ouverte et fermée, donc la notion de boule ouverte et fermée n'est pas topologique. On appelle une boule fermée (resp. ouverte) simplement *boule* (resp. *disque*).

Un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) *connexe* est une intersection finie non-vide de boules fermées (resp. ouvertes). Un *affinoïde fermé* (resp. *ouvert*) est une union finie d'affinoïdes connexes fermés (resp. ouverts). Alors $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un affinoïde fermé (resp. ouvert) connexe, car c'est l'intersection vide de boules fermées (resp. ouvertes).

Une intersection ou une union finie d'affinoïdes fermés (resp. ouverts) est un affinoïde fermé (resp. ouvert). Une intersection finie non-vide d'affinoïdes fermés (resp. ouverts) connexes est un affinoïde fermé (resp. ouvert) connexe. L'union de deux affinoïdes fermés (resp. ouverts) connexe dont l'intersection est non-vide est un affinoïde fermé (resp. ouvert) connexe. Le complémentaire d'un affinoïde fermé (resp. ouvert) est un affinoïde ouvert (resp. fermé).

Proposition 1.1. — *Soit $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ où les X_i sont des affinoïdes connexes. et soit $x \in X$. L'union des affinoïdes connexes contenant x et contenus dans X est un affinoïde connexe qui contient les X_i qu'il rencontre. On l'appelle la composante connexe de x dans X . X est l'union disjointe des ses composantes connexes.*

Démonstration. — Soit $J \subset \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des j tels qu'il existe un affinoïde connexe contenu dans X , contenant x et rencontrant X_j . Posons $Y = \cup_J X_j$. Soit Z un affinoïde connexe contenant x et contenu dans X ; si Z rencontre un X_k , on a $k \in J$: on conclut que $Z \subset Y$.

Inversement, soit $j \in J$; notons Y_j un affinoïde connexe contenu dans X contenant x , et rencontrant X_j , et posons $Z_j = Y_j \cup X_j$: c'est à nouveau un affinoïde connexe contenant x et contenu dans X , et c'est aussi le cas pour $Z := \cup_j Z_j$. On a donc $Y = \cup_j X_j \subset \cup_j Z_j \subset Z$ mais aussi $Z \subset Y$ d'après ci-dessus, donc Z est le plus grand affinoïde connexe contenant x et contenu dans X . \square

Un *espace analytique connexe* est une union croissante d'affinoïdes connexes. Les unions (finies ou infinies) d'affinoïdes connexes contenant un même point sont des espaces analytiques connexes. Un *espace analytique* est une union finie d'espaces analytiques connexes. Les affinoïdes fermés et ouverts sont des espaces analytiques; c'est aussi le cas du complémentaire d'un ensemble compact dans un espace analytique. Les espaces analytiques sont les domaines des fonctions holomorphes; voir Section 1.3 et [FvP].

Suivant Benedetto on appelle *composante analytique* d'une partie ouverte X de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui contient $x \in X$, l'union de tous les espaces analytiques connexes contenus dans X et contenant x ; voir [Be]. Une composante analytique est alors un espace analytique connexe non-vide.

Une *couronne* $C \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un ensemble qui après changement de coordonnée approprié, est de la forme

$$C(I) = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \in I\},$$

où $I \subset (0, +\infty)$ est un intervalle non-vide. Si l'intervalle I est ouvert, alors on dit que C est une *couronne ouverte* ou simplement *couronne* quand il est clair qu'il s'agit d'une couronne ouverte.

De façon équivalente une couronne ouverte est un ensemble de la forme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_0 \sqcup B_1$, où B_0 et B_1 sont des ensembles disjoints qui sont des points, des boules fermées ou des boules irrationnelles, qu'on appelle *composantes* de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - C$. On appelle

$$\text{mod}(C) = \text{mod}(C(I)) = \log_p |I| \in (0, \infty]$$

la *module* de C . Les couronnes sont des espaces analytiques connexes.

1.2.2. Bouts et systèmes projectifs

Définition 1.2. — Soit B une boule fermée de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Une *chaîne évanescence* associée à B est une suite décroissante $\{A_i\}_{i \geq 1}$ de couronnes ouvertes de la forme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B \sqcup B_i$, vérifiant $\cap A_i = \emptyset$.

On considère la relation d'équivalence \sim entre chaînes évanescences définie par : $\{A_i\}_{i \geq 1} \sim \{\tilde{A}_i\}_{i \geq 1}$ si et seulement si, pour tout $n \geq 1$ il existe m tel que $A_m \subset \tilde{A}_n$ et $\tilde{A}_m \subset A_n$. Notons que deux chaînes évanescences sont équivalentes si et seulement s'ils ont la même boule associée.

Un *bout* est une classe d'équivalence de chaînes évanescences par la relation d'équivalence \sim . Notons que l'on a des bijections naturelles entre les bouts, les boules fermées

et les boules ouvertes. Étant donné un bout \mathcal{P} , on note $B_{\mathcal{P}}$ (resp. $D_{\mathcal{P}}$) la boule (resp. le disque) associée à \mathcal{P} .

On dit qu'un bout \mathcal{P} est *inclus* dans un ensemble X et on note $\mathcal{P} \prec X$, si pour toute chaîne évanescence $\{A_i\}_{i \geq 1}$ qui représente \mathcal{P} il existe $n \geq 1$ tel que $A_n \subset X$. Un *bout d'un espace analytique* X est un bout $\mathcal{P} \prec X$ tel que $\mathcal{P} \not\prec Y$ pour tout affinoïde fermé $Y \subset X$. L'ensemble \mathcal{T} des bouts d'un affinoïde ouvert connexe X est fini, les boules $B_{\mathcal{P}}$, pour $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$, sont disjointes et on a $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \cup_{\mathcal{T}} B_{\mathcal{P}}$.

Étant donné un bout \mathcal{P} considérons une coordonnée w telle que $D_{\mathcal{P}} = \{|w| < 1\}$. Pour $\xi \in \mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$ soit $\mathcal{P}(\xi)$ le bout tel que $D_{\mathcal{P}(\xi)} = \{w \mid \tilde{w} = \xi\}$. On appelle $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\xi \in \tilde{\mathbb{C}}_p}$ le *système projectif de bouts* associé à \mathcal{P} ou simplement un *système projectif*. On dit que la coordonnée w est *compatible* avec \mathcal{P} ou \mathcal{S} . Chaque boule ou disque est associé alors à un unique système projectif. Notons que le paramétrage $\mathcal{P}(\xi)$ dépend aussi de la coordonnée w . A chaque coordonnée w correspond un unique *système projectif canonique* : celui associé à $\{|w| < 1\}$.

Étant donné un espace analytique connexe X on dit que \mathcal{S} est *inclus* dans X , et on note $\mathcal{S} \prec X$, si X n'est pas contenu dans un disque associé à \mathcal{S} . De façon équivalente $\mathcal{S} \prec X$ si et seulement s'il existe $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ distincts, tels que $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \prec X$. Dans ce cas l'ensemble des bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tels que $D_{\mathcal{P}} \not\subset X$ est fini.

L'ensemble de tous les systèmes projectifs de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est appelé *l'espace hyperbolique p-adique*, que l'on note \mathbb{H}_p ; voir remarque ci-dessous. Étant donnés \mathcal{S}_0 et $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ distincts il existe un unique $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}_i$ tel que $\mathcal{S}_{1-i} \prec D_{\mathcal{P}_i}$, pour $i = 0, 1$: on pose $C(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = D_{\mathcal{P}_0} \cap D_{\mathcal{P}_1}$. Si $z_0, z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont distincts on définit les couronnes $C(z_0, z_1) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \{z_0, z_1\}$ et $C(\mathcal{S}_0, z_1) = D_{\mathcal{P}} - \{z_1\}$, où $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0$ est le bout tel que $z_1 \in D_{\mathcal{P}}$. Pour $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on pose,

$$(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1\} \mid C(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap C(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = \emptyset\},$$

$[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] = \{\mathcal{S}_0\} \cup (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ et $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] = [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] \cup \{\mathcal{S}_1\}$. Chaque triplet $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ détermine $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] \cap [\mathcal{S}_j, \mathcal{S}_k] = [\mathcal{S}_j, \mathcal{S}]$, où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Si $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1$ et \mathcal{S}_2 sont distincts, alors $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$.

On dit qu'un système projectif \mathcal{S} est *entre* \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 si $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. De plus on dit que qu'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est *convexe* si pour tous $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathcal{A}$ distincts on a $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \subset \mathcal{A}$. Pour $\mathcal{T} \subset \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble $[\mathcal{T}] = \cup_{\mathcal{T}} [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1]$ est la *clôture convexe* de \mathcal{T} . On pose $(\mathcal{T}) = \cup_{\mathcal{T}} (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ qui est aussi un ensemble convexe.

Pour $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ différents, la formule

$$d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = \text{mod}(C(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)) \in \log_p |\mathbb{C}_p| = \mathbb{Q},$$

définit une distance sur \mathbb{H}_p . Alors $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \subset \mathbb{H}_p$ est isométrique à l'intervalle $(0, d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ si \mathcal{S}_0 ou \mathcal{S}_1 n'appartient pas à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et est isométrique à $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ sinon.

Remarque. — La complétion $\overline{\mathbb{H}}_p$ de (\mathbb{H}_p, d) est un espace métrique géodésique au sens que pour tous $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \overline{\mathbb{H}}_p$ il existe un sous-ensemble $[\overline{\mathcal{S}}_0, \overline{\mathcal{S}}_1]$ de $\overline{\mathbb{H}}_p$ isométrique à

l'intervalle $[0, d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)] \subset \mathbb{R}$, ayant \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 comme extrémités; voir [GH] p. 16. Si $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ alors $[\overline{\mathcal{S}_0}, \overline{\mathcal{S}_1}]$ est la complétion de $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] \subset \mathbb{H}_p$.

Le segment géodésique $[\overline{\mathcal{S}_0}, \overline{\mathcal{S}_1}]$ est uniquement déterminé par \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 . On a aussi que $\overline{\mathbb{H}}_p$ est un arbre réel au sens que si deux segments géodésiques ont exactement une extrémité en commun, leur réunion est un segment géodésique; voir [GH] p. 31. Par conséquent $\overline{\mathbb{H}}_p$ est 0-hyperbolique au sens de Gromov. Le bord à l'infini $\partial_\infty \overline{\mathbb{H}}_p$ (défini comme dans [GH]) est égal au bord à l'infini de \mathbb{H}_p et est canoniquement identifié à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

La distance sur $\partial_\infty \mathbb{H}_p = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ relative à $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$, induite par la distance d est définie par

$$d_{\mathcal{S}}(z_0, z_1) = p^{-d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')} \text{, pour } z_0, z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \text{ avec } z_0 \neq z_1 \text{,}$$

où $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ est déterminé par $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] = [\mathcal{S}, z_0] \cap [\mathcal{S}, z_1]$; voir [GH]. Il est facile de voir que la distance $d_{\mathcal{S}}$ coïncide avec la distance chordale, dans une coordonnée compatible avec \mathcal{S} .

1.2.3. Arbres affines. — Fixons un espace analytique connexe $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On va associer à X un arbre \mathcal{A}_X et une partition canonique de X . Cet arbre est une adaptation de l'arbre défini par Motzkin en [Mo] pour les quasiconnexes; voir aussi [GvP].

Étant donné un système projectif $\mathcal{S} \prec X$ on pose

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{S}} &= \#\{\mathcal{P} \in \mathcal{S} \mid D_{\mathcal{P}} \cap X = \emptyset\} \text{ et} \\ m_{\mathcal{S}} &= \#\{\mathcal{P} \in \mathcal{S} \mid D_{\mathcal{P}} \cap X \neq \emptyset \text{ et } D_{\mathcal{P}} \not\subset X\} \end{aligned}$$

qui sont finis. Alors \mathcal{S} est un *point* (resp. *sommet*) de \mathcal{A}_X si et seulement si $m_{\mathcal{S}} \geq 2$ ou $n_{\mathcal{S}} > 0$ (resp. $m_{\mathcal{S}} \geq 3$ ou $n_{\mathcal{S}} > 0$). Dans ce cas on associe à \mathcal{S} l'affinoïde fermé connexe,

$$X_{\mathcal{S}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \cup_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}, D_{\mathcal{P}} \not\subset X} D_{\mathcal{P}} \subset X.$$

La *projection* $\pi_X : X \rightarrow \mathcal{A}_X$ est définie par $\pi_X^{-1}(\mathcal{S}) = X_{\mathcal{S}}$.

Les arêtes de $\mathcal{A}_X \subset \mathbb{H}_p$ sont les sous-ensembles convexes de \mathcal{A}_X qui ne contiennent pas de sommet, maximaux pour ces propriétés. Si I est une arête de \mathcal{A}_X alors,

$$X_I = \cup_{\mathcal{S} \in I} X_{\mathcal{S}} \subset X,$$

est une couronne ouverte. Les deux composantes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X_I$ rencontrent $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X$ et la couronne X_I est maximale pour ces propriétés. Un sommet \mathcal{S} de \mathcal{A}_X est une *extrémité* de I si l'une des composantes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X_I$ est une boule fermée ayant \mathcal{S} comme système projectif associé.

On a la partition canonique,

$$X = \left(\sqcup_{\mathcal{S} \text{ sommet de } \mathcal{A}_X} X_{\mathcal{S}} \right) \sqcup \left(\sqcup_I \text{ arête de } \mathcal{A}_X X_I \right).$$

Si \mathcal{S} est un sommet de \mathcal{A}_X , alors tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $D_{\mathcal{P}} \cap X \neq \emptyset$ et $D_{\mathcal{P}} \not\subset X$ est un bout d'une couronne associée à une arête de \mathcal{A}_X dont \mathcal{S} est une extrémité (il

y a donc m_S arêtes dont S est extrémité). Il peut y avoir des sommets S de \mathcal{A}_X qui ne sont pas des points de ramification, dans ce cas $n_S > 0$.

Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_X$ est convexe, alors $Y = \pi_X^{-1}(\mathcal{B})$ est un espace analytique connexe et on a $\mathcal{A}_Y = \mathcal{B}$ et $Y_S = X_S$ pour tout point S de \mathcal{A}_Y .

La complétion $\overline{\mathcal{A}}_X$ de (\mathcal{A}_X, d) est un arbre; on note $\mathcal{A}_X^{\mathbb{R}}$ le plus petit connexe dans $\overline{\mathcal{A}}_X$ contenant \mathcal{A}_X qui est aussi égal à la clôture convexe de \mathcal{A}_X dans $\overline{\mathcal{A}}_X \subset \overline{\mathbb{H}}_p$.

Exemple 1.3

(i) $\mathcal{A}_X = \emptyset$ si et seulement si X est une boule ouverte ou une boule irrationnelle ou le complémentaire d'un point ou $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

(ii) X est une couronne ouverte si et seulement si \mathcal{A}_X n'a pas de sommets et a une seule arête; \mathcal{A}_X (resp. $\mathcal{A}_X^{\mathbb{R}}$) est alors isométrique à un segment de \mathbb{Q} (resp. \mathbb{R}) de longueur mod(X).

(iii) \mathcal{A}_X est réduit à un sommet S si et seulement si $X = X_S = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \cup_{\mathcal{T}} D_{\mathcal{T}}$ où \mathcal{T} est un partie finie non-vide de \mathcal{S} (on a $\#\mathcal{T} = n_S$). Par exemple $n_S = 1$ si et seulement si X est une boule fermée et $n_S = 2$ si et seulement si X est une sphère; c'est-à-dire $X = \{z \mid |z| = 1\}$ pour un certain choix de coordonnée.

(iv) Pour tout ensemble fini $\mathcal{T} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on a $\mathcal{A}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{T}} = (\mathcal{T}) \subset \mathbb{H}_p$; voir Section 1.2.2.

(v) \mathcal{A}_X est un *arbre fini*, c'est-à-dire \mathcal{A}_X a un nombre fini de sommets (et donc un nombre fini d'arêtes) si et seulement si $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X = \cup_{i=0}^n B_i$, où les B_i sont disjoints et chaque B_i est soit un point, soit une boule, ouverte, fermée ou irrationnelle.

Dans ce cas il existe une immersion très élégante de \mathcal{A}_X dans $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ due à Yoccoz : on suppose que $\infty \in B_0$ et pour chaque B_i on choisit $z_i \in B_i$. Alors $i : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathbb{Q}^n$ est déterminée par,

$$i \circ \pi_X : X \longrightarrow (\log_p |z - z_1|, \dots, \log_p |z - z_n|) \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n.$$

La restriction de i à chaque arête est une isométrie sur son image, où l'on considère \mathbb{R}^n avec la norme du maximum.

(vi) $X \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un affinoïde fermé si et seulement si \mathcal{A}_X est fini et $\mathcal{A}_X^{\mathbb{R}}$ est compact; ceci est équivalente à que \mathcal{A}_X soit la clôture convexe dans \mathbb{H}_p d'un ensemble fini. X est un affinoïde ouvert si et seulement s'il existe un ensemble fini $\mathcal{T} \subset \mathbb{H}_p$ tel que $\mathcal{A}_X = (\mathcal{T}) \subset \mathbb{H}_p$; voir Section 1.2.2.

(vii) L'arbre de $X_p = \mathbb{C}_p - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$. Le système projectif canonique \mathcal{S} est un sommet de \mathcal{A}_{X_p} , sauf si $p = 2$. A cause de cela on considère d'abord le cas $p > 2$; voir figure 1.

Les sommets de \mathcal{A}_{X_p} , différents de \mathcal{S} , sont les systèmes projectifs $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_n}$, où $a_i \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, associés aux boules

$$B_{a_0 \dots a_n} = \{|z - (a_0 + \dots + a_n p^n)| \leq p^{-(n+1)}\}$$

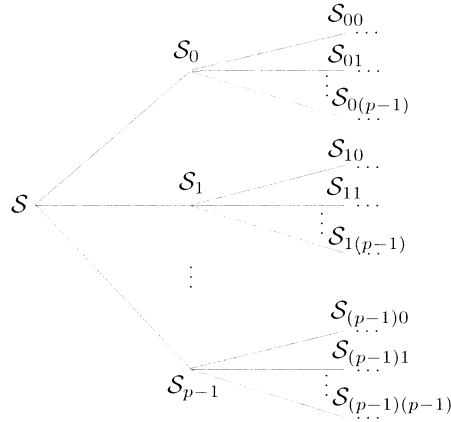


FIGURE 1. Arbre de $\mathbb{C}_p - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$, pour $p > 2$.

de telle sorte que $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_{n-1}}$ est lié à $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_{n-1} a_n}$ par l'arête associée à

$$\{p^{-(n+1)} < |p - (a_0 + \dots + a_n p^n)| < p^{-n}\}.$$

De plus \mathcal{S} est lié à \mathcal{S}_{a_0} , pour $a_0 \in \{0, \dots, p-1\}$. Notons que toutes les arêtes de \mathcal{A}_{X_p} sont de longueur 1.

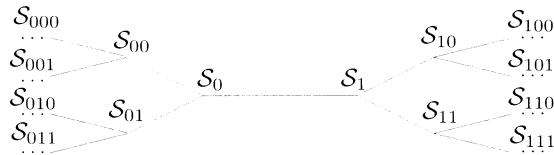


FIGURE 2. Arbre de $\mathbb{C}_2 - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_2}$.

Supposons $p = 2$. Considérons le système projectif \mathcal{S}_i associé à la boule $B_i = \{|z - i| < \frac{1}{2}\}$, pour $i = 0, 1$. Alors \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 sont des sommets de \mathcal{A}_{X_2} et la couronne $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_0 \sqcup B_1$ est associée à une arête de longueur 2 qui joint \mathcal{S}_0 à \mathcal{S}_1 . Les autres arêtes sont de longueur 1. En général les sommets de \mathcal{A}_{X_2} sont les systèmes projectifs $\mathcal{S}_{a_0 a_1 \dots a_n}$, où $a_i \in \{0, 1\}$, associés aux boules

$$B_{a_0 a_1 \dots a_n} = \{|z - (a_0 + a_1 2^1 + \dots + a_n 2^n)| \leq 2^{-(n+1)}\},$$

de telle façon que $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_{n-1}}$ est lié à $\mathcal{S}_{a_0 \dots a_{n-1} a_n}$ par l'arête associée à

$$\{2^{-(n+1)} < |z - (a_0 + \dots + a_n 2^n)| < 2^{-n}\}.$$

1.3. Analyse ultramétrique. — Dans cette section on considère les outils d'analyse qu'on va utiliser dans ce travail. Pour des références on renvoie le lecteur à [Ca], [Ro] et [FvP].

1.3.1. *Séries convergentes.* — Une série

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots \in \mathbb{C}_p((z)),$$

est convergente sur $\{|z| < r\}$ si et seulement si $\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} r \leq 1$. Si $r \in |\mathbb{C}_p|$ alors f est convergente sur $\{|z| \leq r\}$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| r^k = 0$.

Une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ admet un développement en série en chaque point z_0 , qui n'est pas un pôle. Le rayon de convergence est égal à la plus petite distance entre z_0 et un pôle.

On note $\mathcal{H}(B)$ l'anneau des séries convergentes sur $B = \{|z| \leq r \text{ ou } \{|z| < r\}$. On munit $\mathcal{H}(B)$ de la norme uniforme $\|\cdot\|_B$. Si $B = \{|z| \leq r\}$ alors

$$\|f\|_B = \sup_{i \geq 0} |a_i| r^i,$$

et on a $\|fg\|_B = \|f\|_B \|g\|_B$ et $\|f+g\|_B \leq \max\{\|f\|_B, \|g\|_B\}$, pour tous $f, g \in \mathcal{H}(B)$. Donc $(\mathcal{H}(B), \|\cdot\|_B)$ est un anneau valué, ultramétrique et complet.

Principe du Maximum. — Soit $B = \{|z - a| \leq r\}$ avec $r \in |\mathbb{C}_p|$. Alors pour tout $f \in \mathcal{H}(B)$ on a

$$\sup_B |f(z)| = \|f\|_B = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Lemme de Hensel. — Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[z]]$ une série convergente sur $\{|z| < 1\}$ à coefficients entiers. S'il existe z_0 tel que $|f(z_0)| < |f'(z_0)|^2$ alors il existe un unique zéro w de f tel que $|w - z_0| \leq |f(z_0)|/|f'(z_0)|$.

Pour $w \in \mathbb{C}_p$ considère la translation $T_w(z) = z - w$. Notons que T_w préserve la distance sur \mathbb{C}_p induite par la norme $|\cdot|$ et $T'_w \equiv 1$. De plus $T_w(B_r(0)) = B_r(0)$ pour chaque $r > |w|$.

Lemme de Schwarz. — Considérons une série $f \in \mathcal{H}(B_r(0))$ de la forme $f(z) = z(a_0 + a_1z + \dots)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in B_r(0)$. En particulier $|f'(0)| \leq 1$.
- (ii) $|a_i| \leq r^{-i}$, pour $i \geq 0$.
- (iii) $f(B_r(0)) \subset B_r(0)$.

Considérons maintenant une série $f \in \mathcal{H}(B_r(0))$ telle que $f(B_r(0)) \subset B_r(0)$. Alors $|f(z_0) - f(z_1)| \leq |z_0 - z_1|$ et $|f'(z)| \leq 1$ pour tous z_0, z_1 et $z \in B_r(0)$. De plus les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (iv) $f : B_r(0) \rightarrow B_r(0)$ est un automorphisme.
- (v) Il existe $z \in B_r(0)$ tel que $|f'(z)| = 1$.
- (v)' $|f'(z)| = 1$ pour tout $z \in B_r(0)$.
- (vi) Il existe $z_0, z_1 \in B_r(0)$ différents tels que $|f(z_0) - f(z_1)| = |z_0 - z_1|$.

(vi)' Pour tous $z_0, z_1 \in B_r(0)$ on a $|f(z_0) - f(z_1)| = |z_0 - z_1|$.

Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 1.4. — Si $f \in \mathcal{H}(B_r(0))$ alors pour tous $x, y \in B_r(0)$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{r} \|f\|_{B_r(0)}.$$

En particulier notons que si $\|f\|_{B_r(0)} < r$, alors $B_r(0)$ contient un unique point fixe de f .

Démonstration du Lemme de Schwarz. — Clairement (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iii). Supposons (iii). Par le Principe du Maximum pour tout $r_0 \in |\mathbb{C}_p| \cap (0, r)$ on a

$$|a_i| r^i \leq \sup_{|z|=r_0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{r}{r_0}, \text{ pour } i \geq 1.$$

Donc $|a_i| \leq r^{-i}$, pour $i \geq 1$, et (iii) \Rightarrow (ii).

Soit $f \in \mathcal{H}(B_r(0))$ une série telle que $f(B_r(0)) \subset B_r(0)$. Notons que pour chaque $w \in B_r(0)$ on a $T_{f(w)} \circ f \circ T_{-w}(0) = 0$. Donc par (i) on a $|f(z_0) - f(z_1)| \leq |z_0 - z_1|$ et $|f'(z)| \leq 1$ pour tous z_0, z_1 et $z \in B_r(0)$.

Évidemment (vi)' \Rightarrow (vi)' et (vi)' \Rightarrow (v)' \Rightarrow (v). Supposons $f(0) = 0$. Alors par (ii) on a $|f(z) - f'(0)z| < |z|$ et $|f'(z) - f'(0)| < 1$ pour tout $z \in B_r(0) - \{0\}$. Donc (vi) \Rightarrow (v) \Rightarrow (v)'.

Supposons (iv). Fixons $w \in B_r(0)$ et soit $g = T_{f(w)} \circ f \circ T_{-w}$, de telle façon que $g(0) = 0$. Donc par (i) appliqué à g et à g^{-1} on a $|g'(0)| = 1$ et $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in B_r(0)$. Donc (iv) \Rightarrow (v)' et (iv) \Rightarrow (vi)'.

Il suffit de montrer (v) \Rightarrow (iv). Supposons alors (v) et on peut supposer de plus $f(0) = 0$. Alors $f(z) = z(a_0 + a_1z + \dots)$ où $|a_0| = 1$ et on a $|a_i| \leq r^{-i}$, pour $i \geq 0$, par (ii).

On définit par induction $b_i \in \mathbb{C}_p$, pour $i \geq 0$, tel que $|b_i| \leq r^{-i}$ et tel que

$$\sum_{0 \leq j \leq i} b_j (f(z))^j = z(1 + \dots + c_{i+1} z^{i+1} + \dots).$$

On pose $b_1 = a_1^{-1}$ et supposons b_i déjà définie. Alors notons que c_{i+1} comme plus haut satisfait $|c_{i+1}| \leq r^{-(i+1)}$. Donc $b_{i+1} = c_{i+1} a_1^{-(i+1)}$ satisfait les hypothèses d'induction. Par conséquent la série $z(b_0 + b_1z + \dots) \in \mathcal{H}(B_r(0))$ est l'inverse de f et donc f est un automorphisme de $B_r(0)$. \square

1.3.2. Degré de Weierstrass, polygone de Newton et fonction de valuation. — On considère $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[z]]$, l'anneau des séries à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$. Pour une telle série $f(z) = a_0 + a_1z + \dots \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[z]]$, le plus petit entier $d \geq 0$ tel que $|a_d| = 1$ est appelé le *degré de Weierstrass* de f que l'on note $\text{wideg}(f)$. Si $\text{wideg}(f)$ est fini alors il est égal au nombre de zéros de f dans $\{|z| < 1\}$, comptés avec multiplicité.

Plus généralement considérons

$$f(z) = a_0 + a_1z + \dots \in \mathbb{C}_p((z)), \text{ avec } a_0 \neq 0.$$

Le *polygone de Newton* de f , que l'on note $P(f)$, est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 des points $(j, \log_p |a_j|)$, pour $a_j \neq 0$, et de $\{(0, t) \mid t \leq \log_p |a_0|\}$. Soient $(i_j, \log_p |a_{i_j}|)$, pour $j \geq 0$, les sommets de $P(f)$ (on peut avoir un nombre fini ou infini des sommets). Comme $a_0 \neq 0$ on a $i_0 = 0$.

Proposition. — Soit $m \geq 1$ tel que $i_0 < i_1 < \dots < i_m$ sont définis. Pour $1 \leq k \leq m$ on pose

$$r_k = \left(\frac{|a_{i_{k-1}}|}{|a_{i_k}|} \right)^{1/(i_k - i_{k-1})} \in |\mathbb{C}_p|.$$

Alors $r_1 < \dots < r_m$, f est convergente sur $\{|z| \leq r_m\}$ et f a $i_k - i_{k-1}$ zéros de norme r_k , comptés avec multiplicité, et ces zéros sont tous les zéros de f dans $\{r_{k-1} < |z| \leq r_k\}$.

En particulier notons que si f est une série convergente dans $B_r(0)$, alors $f(B_r(0))$ est de la forme $B_s(f(0))$ et il existe $d \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ tel que pour tout $w \in f(B_r(0))$, la série $f - w$ a d zéros de f dans $B_r(0)$, comptés avec multiplicité. On dit alors que $f : B_r(0) \rightarrow f(B_r(0))$ est de degré d .

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}_p[z]$, $y \in \mathbb{C}_p$ et $r \in |\mathbb{C}_p|$ on définit

$$|P|_y(r) = \sup_{|x-y|=r} |P(x)|.$$

Soit $R = P/Q \in \mathbb{C}_p(z)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}_p[z]$. On définit,

$$|R|_y = \frac{|P|_y}{|Q|_y},$$

qui s'étend en une fonction continue définie sur $[0, \infty)$, monomiale par morceaux. On appelle $|R|_y$ la *fonction de valuation* de R en y . Notons que si $y, z \in \mathbb{C}_p$ et $r \geq |y - z|$ alors $|R|_y(r) = |R|_z(r)$. Si R n'a pas ni zéros ni pôles dans $\{x \mid |x - y| = r\}$ alors $|R|_y(r) = |R(x)|$ pour tout x tel que $|x - y| = r$.

Le graphe de l'application $\log_p r \mapsto \log_p (|R|_y(r))$ est appelé le *polygone de valuation* de R en y . La pente du polygone à gauche (resp. à droite) du point d'abscisse $\log_p r$ représente la différence entre le nombre de zéros et de pôles de R dans $B_r(y)$ (resp. $B_r^+(y)$). Donc le changement de pente au point d'abscisse $\log_p r$ représente la différence entre le nombre de zéros et les pôles situées sur $B_r^+(y) - B_r(y)$. En particulier le polygone de valuation d'un polynôme est convexe.

1.3.3. Fonctions holomorphes. — Comme dans le cas complexe on dit qu'une fonction est *analytique* si elle a un développement en série en chaque point. Cette notion est trop général : la fonction qui vaut 1 sur $\{|z| \leq 1\}$ et 0 dans le complémentaire est analytique dans ce sens. C'est pour cette raison que l'on considère la notion plus restreinte de *fonction holomorphe* définie sur un espace analytique.

Une fonction *holomorphe* définie sur un affinoïde fermé X est la limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles dans X . Les fonctions holomorphes définies sur un espace analytique $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont les fonctions dont la restriction à tout affinoïde fermé contenu dans X est holomorphe.

On note $\mathcal{H}(X)$ l'anneau des fonctions holomorphes définies sur X . Si X est une boule fermée alors $\mathcal{H}(X)$ coïncide avec la définition de la Section 1.3.1. On munit $\mathcal{H}(X)$ de la norme ultramétrique

$$\|f\|_X = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Si X est un espace analytique connexe différent de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, alors on dit qu'une fonction définie sur X est *méromorphe* si elle est de la forme $[f, g]$ où $f, g \in \mathcal{H}(X)$ n'ont pas de zéros en commun. Un affinoïde fermé $Y \subset X$ rencontre au plus un nombre fini de zéros et de pôles d'une fonction méromorphe non identiquement nulle.

Soit $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un espace analytique connexe et $z_0 \in X$. Étant donnée $f \in \mathcal{M}(X)$ considérons une coordonnée telle que $z_0 = 0$. Alors f est de la forme

$$f(z) = a_d z^d + a_{d+1} z^{d+1} + \dots, \text{ avec } d \in \mathbb{Z} \text{ et } a_d \neq 0.$$

L'entier d ne dépend pas du choix de la coordonnée. On l'appelle l'*ordre* de f en z_0 et on note $\text{ord}_f(z_0)$.

2. Propriétés des fonctions rationnelles

Dans cette section on étudie l'action des fonctions rationnelles sur des objets géométriques. On fixe pour toute cette section une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ non-constante.

On commence par les propriétés élémentaires des fonctions rationnelles. Étant donné un point $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ le *degré local* de R en w , que l'on note $\text{deg}_R(w)$, est défini comme suit. On considère des coordonnées telles que $w = 0$ et $R(0) = 0$. Alors R est localement de la forme $a_d z^d + \dots$ où $d \geq 1$ et $a_d \neq 0$; on définit $\text{deg}_R(w) = d$. Il n'est pas difficile de voir que $\text{deg}_R(w)$ ne dépend pas du choix des coordonnées.

Pour tout $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on a

$$\sum_{R(z)=w} \text{deg}_R(z) = \text{deg}(R)$$

et pour tout $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ on a $\text{deg}_{Q \circ R}(w) = \text{deg}_Q(R(w)) \cdot \text{deg}_R(w)$.

Les points *critiques* de $R \in \mathbb{C}_p(z)$ sont les points $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels que $\text{deg}_R(w) > 1$. Alors la *multiplicité* de w comme point critique de R est $\text{deg}_R(w) - 1$. Une fonction rationnelle R a $2 \text{deg}(R) - 2$ points critiques comptés avec multiplicité. C'est-à-dire

$$\sum_{w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)} (\text{deg}_R(w) - 1) = 2 \text{deg}(R) - 2.$$

Étant donnés $X, Y \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels que $R(X) \subset Y$, on dit que $R : X \rightarrow Y$ est de degré $d \geq 1$ si tout point dans Y a exactement d préimages dans X , comptées avec multiplicité; de façon équivalente, pour tout $y \in Y$ on a

$$\sum_{x \in X, R(x)=y} \deg_R(y) = d.$$

2.1. Fonctions rationnelles et bouts. — Dans cette section on décrit l'action d'une fonction rationnelle sur les bouts.

Lemme 2.1. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors on a les propriétés suivantes.*

(i) *Si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ est une chaîne évanescence alors $\{R(A_i)\}_{i \geq n}$ est une chaîne évanescence, pour n assez grand.*

(ii) *Si $\{A_i\}_{i \geq 1}$ et $\{\tilde{A}_i\}_{i \geq 1}$ sont deux chaînes évanescences équivalentes alors $\{R(A_i)\}_{i \geq n}$ et $\{R(\tilde{A}_i)\}_{i \geq n}$ sont équivalentes, pour n assez grand. On définit ainsi l'image $R(\mathcal{P})$ d'un bout \mathcal{P} par R .*

(iii) *Soit \mathcal{P} un bout. Alors il existe $d \geq 1$ tel que pour tout représentant $\{A_i\}_{i \geq 1}$ de \mathcal{P} et pour tout i assez grand $R : A_i \rightarrow R(A_i)$ est de degré d . On note $d = \deg_R(\mathcal{P})$ et on l'appelle degré local de R en \mathcal{P} .*

(iv) *Soit \mathcal{P} un bout. Alors il existe $N \geq 0$ tel que chaque point $y \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ à N préimages de R dans $D_{\mathcal{P}}$ si $y \notin D_{R(\mathcal{P})}$, et $N + \deg_R(\mathcal{P})$ si $y \in D_{R(\mathcal{P})}$.*

La démonstration de ce lemme est à la fin de cette section. Notons que pour $R, Q \in \mathbb{C}_p(z)$ on a $\deg_{R \circ Q}(\mathcal{P}) = \deg_R(Q(\mathcal{P})) \cdot \deg_Q(\mathcal{P})$.

Corollaire 2.2. — *Soit \mathcal{P} un bout et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$.*

Démonstration. — Soit $N \geq 0$ comme en (iv) du lemme. Si $\deg_R(\mathcal{P}) + N < \deg(R)$ alors $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Mais si $\deg_R(\mathcal{P}) + N = \deg(R)$ alors $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$. □

Lemme 2.3. — *Considérons des fonctions rationnelles $R, Q \in \mathbb{C}_p(z)$ et un bout \mathcal{P} tel que la boule fermée $B_{R(\mathcal{P})}$ soit de la forme $\{|z - z_0| \leq r\}$. Soit $\{A_n\}_{n \geq 1}$ une chaîne évanescence définissant \mathcal{P} . Supposons qu'il existe n_0 tel que $|Q(z) - R(z)| \leq r$ pour $z \in A_{n_0}$. Alors $Q(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$ et $\deg_Q(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$.*

Démonstration. — Par un changement de coordonnées projectif au départ et affine à l'arrivée, on se ramène à $B_{\mathcal{P}} = B_{R(\mathcal{P})} = \{|z| < 1\}$ et $r = 1$. Soit $d = \deg(\mathcal{P})$. Par le lemme précédent on peut supposer que

$$R : A_{n_0} = \{1 < |z| < r_0\} \longrightarrow \{1 < |z| < r_0^d\}$$

est de degré d . Alors pour tout $z_1 \in A_{n_0}$ on a $|R(z_1)| = |z_1|^d$ et l'image du disque $D_{z_1} = \{|z - z_1| < |z_1|\}$ par R est le disque $\{|z - R(z_1)| < |R(z_1)|\}$. Donc on a

$Q(D_{z_1}) = R(D_{z_1})$; on conclut que $Q : A_n \rightarrow R(A_n)$ est de degré d pour n assez grand. Par conséquent $Q(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$ et $\deg_Q(\mathcal{P}) = d = \deg_R(\mathcal{P})$. \square

Démonstration du Lemme 2.1

(i) Il est facile de voir que cette propriété est vraie pour les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, donc on peut faire des changements de coordonnée. Après changement de coordonnée on peut supposer que le disque associé à $\{A_i\}_{i \geq 1}$ est $\{|z| < 1\}$. Alors pour i assez grand $A_i = \{r_i < |z| < 1\}$, où $r_i \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow \infty$.

Étant donné $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_kz^k \in \mathbb{C}_p[z]$, soit $n(P)$ le plus petit entier qui maximise $|a_n|$ et on pose $T_P(z) = P(z) - a_nz^n$. Après changement de coordonnée à l'arrivée on suppose que $R = P/Q$ avec $P(z) = z^{n(P)} + T_P(z) \in \mathbb{C}_p[z]$ et $Q(z) = z^{n(Q)} + T_Q(z) \in \mathbb{C}_p[z]$. Quitte à changer R par $R-1$ on peut supposer que $n(P) \neq n(Q)$ et quitte à changer R par $1/R$ on peut supposer que $n(P) > n(Q)$.

Alors pour $w \in B_1(0)$ le polynôme

$$P_w(z) = P(z) - wQ(z) = c_0 + c_1z + \dots + c_nz^n,$$

est à coefficients entiers et $|c_{n(P)}| = 1$.

On choisit $r \in (0, 1)$ tel que si $r < |w| < 1$ alors $|c_{n(Q)}| = |w|$, $|c_i| \leq |w|$ pour $n(Q) < i < n(P)$ et $|c_j|r_w^j < |c_{n(Q)}|r_w^{n(Q)}$ pour $0 \leq j < n(Q)$, où $r_w = |w|^{1/(n(P)-n(Q))}$. Par conséquent $(n(Q), \log_p |w|)$ et $(n(P), 0)$ sont des sommets consécutifs du polygone de Newton de P_w . Par la proposition de la Section 1.3.2 P_w à $n(P) - n(Q)$ zéros dans $\{|z| = r_w\}$, comptés avec multiplicité. C'est-à-dire que R a $n(P) - n(Q)$ préimages de w dans $\{|z| = r_w\}$, comptées avec multiplicité. Donc,

$$R : \{r^{1/(n(P)-n(Q))} < |z| < 1\} \longrightarrow \{r < |z| < 1\},$$

est de degré $d = n(P) - n(Q)$.

(ii) Ceci résulte immédiatement de la définition de chaîne évanescence.

(iii) Ceci a été montré dans (i).

(iv) Posons $d = \deg_R(\mathcal{P})$. Après changements de coordonnée on peut supposer que $D_{\mathcal{P}} = D_{R(\mathcal{P})} = \{|z| < 1\}$. Par (i) il existe $r_0 \in (0, 1)$ tel que $R : \{r_0 < |z| < 1\} \rightarrow \{r_0^d < |z| < 1\}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$. En particulier $|R(z)| = |z|^d$ pour $r_0 < |z| < 1$. Soit N le nombre de pôles de R dans $\{|z| < 1\}$. Alors R a $N + d$ zéros dans $\{|z| < 1\}$; voir polygone de valuation dans la Section 1.3.2.

Considérons $y \in \{|z| < 1\}$. Alors $|R(z) - y| = |z|^d$ pour $\max\{r_0, |y|\} < |z| < 1$. Donc $R - y$ a $N + d$ zéros dans $\{|z| < 1\}$.

Considérons maintenant $y \notin \{|z| > 1\}$. Alors $|yR(z)/(R(z) - y)| = |R(z)|$ pour $r_0 < |z| \leq 1$. Comme la fonction rationnelle $yR/(R - y)$ a les mêmes zéros que R sur $\{|z| < 1\}$, on conclut que $yR/(R - y)$ a N pôles dans $\{|z| < 1\}$. \square

2.1.1. Théorème des résidus pour les fonctions rationnelles. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Étant donné un bout \mathcal{P} soit $\text{ord}_R(\mathcal{P})$ défini comme suit.

- $\text{ord}_R(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$ si $D_{R(\mathcal{P})}$ est de la forme $\{|z| < r\}$.

- $\text{ord}_R(\mathcal{P}) = -\text{deg}_R(\mathcal{P})$ si $D_{R(\mathcal{P})}$ est de la forme $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$.
- $\text{ord}_R(\mathcal{P}) = 0$ si $D_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$ ou $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$.

Par (iv) du Lemme 2.1 on a que $\text{ord}_R(\mathcal{P})$ est égal à la différence entre les zéros et les pôles de R sur $D_{\mathcal{P}}$. On considère une version du Théorème des Résidus pour les fonctions rationnelles; voir [FvP].

Théorème des Résidus. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Soit X un affinoïde ouvert connexe avec bouts $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$. Alors

$$\sum_X \text{ord}_R(z) = \sum_{1 \leq i \leq k} \text{ord}_R(\mathcal{P}_i).$$

Démonstration. — Soient Z et P le nombre de zéros et de pôles de R sur X respectivement (comptés avec multiplicité). Alors $\sum_X \text{ord}_R(z) = Z - P$.

Soient Z_i et P_i les nombres de zéros et de pôles de R sur $B_{\mathcal{P}_i} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - D_{\mathcal{P}_i}$, respectivement. Par la remarque plus haut on a $\text{ord}_R(\mathcal{P}_i) = P_i - Z_i$.

Notons que $\text{deg}(R) = Z + Z_1 + \dots + Z_k = P + P_1 + \dots + P_k$. Par conséquent on a

$$0 = Z + Z_1 + \dots + Z_k - (P + P_1 + \dots + P_k) = \sum_X \text{ord}_R(z) - \sum_{1 \leq i \leq k} \text{ord}_R(\mathcal{P}_i). \quad \square$$

2.2. Fonctions rationnelles et systèmes projectifs

Proposition 2.4. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et \mathcal{S}_0 un système projectif. Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Il existe un système projectif \mathcal{S}_1 tel que si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0$ alors $R(\mathcal{P}) \in \mathcal{S}_1$.
- (ii) Considérons des paramétrages $\mathcal{S}_i = \{\mathcal{P}_i(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)}$, pour $i = 0, 1$. Alors il existe une fonction rationnelle $\tilde{R} \in \tilde{\mathbb{C}}_p(z)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)$ on a

$$R(\mathcal{P}_0(\xi)) = \mathcal{P}_1(\tilde{R}(\xi)) \text{ et } \text{deg}_R(\mathcal{P}(\xi)) = \text{deg}_{\tilde{R}}(\xi).$$

Donc pour tout $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}_1$ on a

$$\sum_{\mathcal{P}_0 \in \mathcal{S}_0, R(\mathcal{P}_0) = \mathcal{P}_1} \text{deg}_R(\mathcal{P}_0) = \text{deg}(\tilde{R}).$$

- (iii) Il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_0$ tel que $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ et tel que $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\text{deg}_R(\mathcal{P})$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0 - \mathcal{T}$; dans ce dernier cas $R(D_{\mathcal{P}}) = D_{R(\mathcal{P})}$.

La démonstration de cette proposition est à la fin de cette section.

On note $\text{deg}_R(\mathcal{S}_0)$ le degré de \tilde{R} , qui ne dépend pas du choix des coordonnées. Par (iii) du Lemme 2.1 et par (iii) de la Proposition 2.4, l'application $\text{deg}_R : \mathbb{H}_p \rightarrow \{1, 2, \dots\}$ est semi-continue supérieurement et en particulier la condition $\text{deg}_R(\mathcal{S}) = 1$ est ouverte; donc si $\text{deg}_R(\mathcal{S}) = 1$ alors $R : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{H}_p$ est une isométrie au voisinage de \mathcal{S} .

On pose $R^{-1}(0) \cup R^{-1}(\infty) = \{a_0, \dots, a_n\}$ et après changement de coordonnée on suppose que $a_0 = \infty$. On considère l'application,

$$I : X = \mathbb{C}_p - \{a_1, \dots, a_n\} \longrightarrow (\log_p |z - a_1|, \dots, \log_p |z - a_n|) \in \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n.$$

Alors $\log_p |R| : X \rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ se factorise comme $\log_p |R| = L \circ I$ où $L : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ est un fonctionnelle linéaire à coefficients entiers. De plus I se factorise comme $I = i \circ \pi_X$ où $i : \mathcal{A}_X \rightarrow \mathbb{Q}^n$ est une immersion de telle façon que $X_{\mathcal{S}} = \{z \mid I(z) = i(\mathcal{S})\}$ pour chaque point $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$; voir Section 1.2.3. La restriction de i à chaque arête est une isométrie avec son image et i s'étend à une immersion propre $i^{\mathbb{R}} : \mathcal{A}_X^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^n$. L'application $L \circ i^{\mathbb{R}} : \mathcal{A}_X^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi propre.

Lemme 2.5. — Soit \mathcal{S}^0 (resp. \mathcal{P}^0) un système projectif (resp. bout). L'ensemble $R^{-1}(\mathcal{S}^0)$ (resp. $R^{-1}(\mathcal{P}^0)$) des systèmes projectifs \mathcal{S} (resp. bouts \mathcal{P}) tels que $R(\mathcal{S}) = \mathcal{S}^0$ (resp. $R(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0$) est fini et on a

$$\sum_{R(\mathcal{S})=\mathcal{S}^0} \deg_R(\mathcal{S}) \left(\text{resp.} \sum_{R(\mathcal{P})=\mathcal{P}^0} \deg_R(\mathcal{P}) \right) = \deg(R).$$

Démonstration. — Après changement de coordonnée à l'arrivée on peut supposer que \mathcal{P}^0 est le bout associé à $\{|z| < 1\}$. Soient $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, X , I , i , ... comme plus haut.

Considérons une suite $\{w_n\}_{n \geq 0} \subset B_1(0)$ telle que $|w_n| \rightarrow 1$ et soit z_n tel que $R(z_n) = w_n$. Comme $L \circ i^{\mathbb{R}}$ est propre, quitte à prendre une sous-suite on peut supposer que $\pi_X(z_n) \in \mathcal{A}_X$ converge vers $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X^{\mathbb{R}}$.

On montre d'abord que $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$. Si \mathcal{S} n'est pas un sommet de \mathcal{A}_X , alors \mathcal{S} est contenu dans une arête $I^{\mathbb{R}}$ de $\mathcal{A}_X^{\mathbb{R}}$. Comme $i^{\mathbb{R}}(I^{\mathbb{R}})$ est un segment dans \mathbb{R}^n avec extrémités dans \mathbb{Q}^n et $L \circ i^{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) = 1$, on a $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$.

Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\pi_X(z_n) \in (\pi_X(z_0), \mathcal{S})$, pour $n > 0$. Par conséquent le bout \mathcal{P} ayant $\{C(\pi_X(z_n), \mathcal{S})\}_{n \geq 0}$ comme représentant est tel que $R(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^0$. De plus, pour tout n assez grand $\deg_R(\mathcal{P})$ est égal au nombre de préimages de w_n dans $C(\pi_X(z_0), \mathcal{S})$, comptées avec multiplicité.

Si l'on considère tous les bouts $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ obtenus de cette manière on a pour n assez grand,

$$\sum \deg_R(\mathcal{P}_i) = \# \text{ préimages de } w_n = \deg(R).$$

En particulier $R^{-1}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m\}$. Alors les affirmations sur les systèmes projectifs suivent de la Proposition 2.4. □

Démonstration de la Proposition 2.4

(i) et (ii). Il est facile de vérifier ces propriétés pour les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Donc on peut faire des changement de coordonnée.

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}_p[z]$ et $n \geq 0$ on note $a_n(P)$ le coefficient de z^n . De plus on note $n(P) \geq 0$ (resp. $m(P) \geq 0$) le plus petit (resp. le plus grand) entier qui maximise $|a_i(P)|$, pour $0 \leq i \leq \deg(P)$ (voir démonstration de (i) du Lemme 2.1).

Après changement des coordonnées on suppose que \mathcal{S}_0 est le système projectif canonique. Considérons le paramétrage $\{\mathcal{P}(\xi)\}_{\mathbb{P}(\tilde{\mathbb{C}}_p)}$ de \mathcal{S}_0 .

On pose $R = P/Q$ où $P, Q \in \mathbb{C}_p[z]$. Comme dans la démonstration de (i) du Lemme 2.1 on peut supposer $m(P) > m(Q)$ et de plus $|a_{m(P)}(P)| = |a_{m(Q)}(Q)| = 1$. Alors $R(\mathcal{P}(\infty)) = \mathcal{P}(\infty) = \mathcal{P}(\tilde{R}(\infty))$ et $\deg_R(\mathcal{P}(\infty)) = m(P) - m(Q) = \deg_{\tilde{R}}(\infty)$, où \tilde{R} est la réduction de R .

On montrera $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0$. Soit $\xi \in \tilde{\mathbb{C}}_p$ et soit $\zeta \in \{|z| \leq 1\}$ tel que $\tilde{\zeta} = \xi$. Posons $T_\zeta(z) = z - \zeta$ et notons que $T_\zeta(\mathcal{P}(\xi)) = \mathcal{P}(0)$. De plus $m(P \circ T_\zeta) = m(P)$ et $m(Q \circ T_\zeta) = m(Q)$.

Si $n(P \circ T_\zeta) > n(Q \circ T_\zeta)$ alors

$$R(\mathcal{P}(\zeta)) = R \circ T_\zeta(\mathcal{P}(0)) = \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(\tilde{R}(\zeta))$$

et $\deg_R(\mathcal{P}(\xi)) = n(P \circ T_\zeta) - n(Q \circ T_\zeta) = \deg_{\tilde{R}}(\xi)$. Donc (i) et (ii) sont vérifiés dans ce cas. Le cas $n(P \circ T_\zeta) < n(Q \circ T_\zeta)$ est similaire.

Supposons $n = n(P \circ T_\zeta) = n(Q \circ T_\zeta)$ et posons $b = a_n(P \circ T_\zeta)$ et $c = a_n(Q \circ T_\zeta)$. Alors

$$\tilde{R}(\xi) = \frac{\tilde{b}}{\tilde{c}}, \quad n(P \circ T_\zeta - \frac{b}{c}Q \circ T_\zeta) > n(Q \circ T_\zeta) \quad \text{et} \quad |a_n(P \circ T_\zeta - \frac{b}{c}Q \circ T_\zeta)| = 1$$

car $m(Q \circ T_\zeta) > m(Q \circ T_\zeta)$ et $|a_m(Q \circ T_\zeta)| = |a_m(P \circ T_\zeta)| = 1$. Par conséquent

$$\left(R \circ T_\zeta - \frac{b}{c}\right)(\mathcal{P}(0)) = \mathcal{P}(0) \text{ et}$$

$$\deg_{R \circ T_\zeta - b/c}(\mathcal{P}(0)) = n\left(P \circ T_\zeta - \frac{b}{c}Q \circ T_\zeta\right) - n(Q \circ T_\zeta) = \deg_{\tilde{R}}(\xi).$$

Donc $R(\mathcal{P}(\xi)) = \mathcal{P}(\tilde{b}/\tilde{c}) = \mathcal{P}(\tilde{R}(\xi))$.

(iii) Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0$. Par le Corollaire 2.2 on a $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$. Comme les ensembles $D_{\mathcal{P}}$, pour $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0$, sont disjoints deux à deux l'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_0$ des bouts tels que $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est fini. □

2.3. Fonctions rationnelles et espaces analytiques. — La propriété suivante des fonctions rationnelles simplifiera l'étude de la dynamique ; voir aussi [Be].

Proposition 2.6. — *Soit \mathcal{C} la classe des affinoïdes fermés connexes, des affinoïdes ouverts connexes ou des espaces analytiques connexes. Si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle de degré au moins deux, alors $R(X) \in \mathcal{C}$ pour tout $X \in \mathcal{C}$ et il existe $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}$ disjoints deux à deux tels que*

$$R^{-1}(X) = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n.$$

De plus $R : X_i \rightarrow X$ est de degré d_i , où les d_i sont entiers positifs et vérifient $d_1 + \dots + d_n = \deg(R)$.

En particulier pour $r \in |\mathbb{C}_p|$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |R(z)| \leq r\}$ (resp. $\{z \in \mathbb{C}_p \mid |R(z)| < r\}$) est un affinoïde fermé (resp. ouvert).

La démonstration de cette proposition dépend du lemme suivant.

Lemme 2.7. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Considérons $r_0, r_1 \in |\mathbb{C}_p|$ avec $r_1 \geq r_0$, tels que $|R|_0 \equiv 1$ sur $[r_0, r_1]$ et $|R|_0 \equiv a_i t^{d_i}$ sur $(r_0 - \varepsilon, r_0]$ et $[r_1, r_1 + \varepsilon)$ pour $i = 0, 1$ respectivement, avec d_0 et $d_1 \neq 0$. Alors

$$R(\{r_0 \leq |z| \leq r_1\}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p), \{|z| = 1\}, \{|z| \leq 1\} \text{ ou } \{|z| \geq 1\} \cup \{\infty\}.$$

Démonstration. — On suppose d'abord que $r_0 = r_1 = r$. Après changement de coordonnée on suppose $r = 1$. Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\xi \in \tilde{\mathbb{C}}_p}$ le système projectif canonique. Par hypothèse $R(\mathcal{P}(0)), R(\mathcal{P}(\infty)) \in \{\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(\infty)\}$. Donc pour tout $\xi \in \tilde{\mathbb{C}}_p - \{0\}$ il existe $\zeta \in \tilde{\mathbb{C}}_p - \{0\}$ tel que $R(\mathcal{P}(\zeta)) = \mathcal{P}(\xi)$. Alors le lemme suit du Corollaire 2.2 dans ce cas.

Supposons maintenant $r_1 > r_0$. On pose $R = P/Q$ avec $P(z) = a_0 + \dots + a_k z^k \in \mathbb{C}_p[z]$ et $Q(z) = b_0 + \dots + b_l z^l \in \mathbb{C}_p[z]$.

Comme $d_0 \neq 0$ (resp. $d_1 \neq 0$) P ou Q a un zéro dans $\{|z| = r_0\}$ (resp. $\{|z| = r_1\}$); voir polygône de valuation dans la Section 1.3.2.

Par la proposition dans la Section 1.3.2, si P a un zéro dans $\{|z| = r_0\}$ (resp. $\{|z| = r_1\}$) alors il existe $i_0 < i_1$ (resp. $i_m < i_{m+1}$) tels que

$$(i_0, \log_p |a_{i_0}|) \text{ et } (i_1, \log_p |a_{i_1}|)$$

$$(\text{resp. } (i_m, \log_p |a_{i_m}|) \text{ et } (i_{m+1}, \log_p |a_{i_{m+1}}|))$$

sont des sommets consecutifs du polygône de Newton $P(P)$ de P tels que $r_0^{i_0} |a_{i_0}| = r_0^{i_1} |a_{i_1}|$ (resp. $r_1^{i_m} |a_{i_m}| = r_1^{i_{m+1}} |a_{i_{m+1}}|$).

Comme $|R|_0 \equiv 1$ sur $[r_0, r_1]$ le point $p_1 = (j_1, \log_p |b_{j_1}|)$ (resp. $p_m = (j_m, \log_p |b_{j_m}|)$) est aussi un sommet de $P(Q)$ et on définit $j_0 = j_1 = i_1$ (resp. $j_{m+1} = j_m = i_m$).

Si P n'a pas de zéros dans $\{|z| = r_0\}$ (resp. $\{|z| = r_1\}$) alors Q en a un et on définit $j_0 < j_1$ (resp. $j_m < j_{m+1}$) de façon analogue et on pose $i_0 = i_1 = j_1$ et $i_{m+1} = i_m = j_m$.

Donc $i_1 = j_1, i_m = j_m, i_0 \neq j_0$ et $i_{m+1} \neq j_{m+1}$. Soit p_0 (resp. p_{m+1}) égal à $(i_0, \log_p |a_{i_0}|)$ (resp. $(i_{m+1}, \log_p |a_{i_{m+1}}|)$) si $i_0 < j_0$ (resp. $i_m > j_{m+1}$) ou $(j_0, \log_p |b_{j_0}|)$ (resp. $(j_{m+1}, \log_p |b_{j_{m+1}}|)$) sinon.

Alors $P(P) \cup P(Q)$ est au dessous des droites qui passent par p_0 et p_1 et par p_m et p_{m+1} . On choisit l'indice $m \geq 0$ de telle façon que $p_n = (i_n, \log_p |a_{i_n}|)$, pour $1 \leq n \leq m$, soient tous les sommets de $P(P)$ avec $i_0 < i_1 < \dots < i_m$. Comme $|R|_0 \equiv 1$ sur $[r_0, r_1]$ les points p_0, \dots, p_m sont tous les sommets de $P(Q)$ avec abscisse entre $j_1 = i_1$ et $j_m = i_m$.

Considérons $w \in \mathbb{C}_p$ et soit $P_w = P - wQ$. Si $|w| = 1$ alors p_0 et p_{m+1} sont des sommets de $P(P_w)$ et $P(P_w)$ est au dessous des droites qui passent par p_0 et p_1 et par p_m et p_{m+1} . Par la proposition de la Section 1.3.2 P_w a un zéro dans $\{r_0 \leq |z| \leq r_1\}$. Par conséquent $\{|z| = 1\} \subset R(\{r_0 \leq |z| \leq r_1\})$.

Supposons $|w| < 1$, le cas $w \in \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ étant analogue. Les points p_1, \dots, p_m sont tous les sommets de $P(P_w)$ avec abscisse en $[i_0, i_m]$. De plus $P(P_w)$ est au dessous des droites qui passent par p_0 et p_1 et par p_m et p_{m+1} . Par la proposition de la Section 1.3.2 le polynôme P_w a un zéro dans $\{r_0 \leq |z| \leq r_1\}$ si et seulement si $i_0 < i_{m+1}$. Donc,

$$\text{soit } \{|z| < 1\} \subset R(\{s_0 \leq |z| \leq s_1\}), \text{ soit } \{|z| < 1\} \cap R(\{s_0 \leq |z| \leq s_1\}) = \emptyset. \quad \square$$

Corollaire 2.8. — Soient $r_0, r_1 \in |\mathbb{C}_p|$ avec $r_0 < r_1$ (resp. $r_0 \leq r_1$) et on pose $C = \{r_0 < |z| < r_1\}$ (resp. $\{r_0 \leq |z| \leq r_1\}$). Alors $R(C)$ est égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, une boule ouverte (resp. fermée) ou après changement de coordonnée $\{s_0 < |z| < s_1\}$ (resp. $\{s_0 \leq |z| \leq s_1\}$).

Démonstration. — Après changement de coordonnée on peut supposer que R est tel que $|R|_0(t) = a_0 t^{d_0}$ sur $[r_0, r_0 + \varepsilon)$ (resp. sur $(r_0 - \varepsilon, r_0]$) et tel que $|R|_0(t) = a_1 t^{d_1}$ sur $(r_1 - \varepsilon, r_1]$ (resp. sur $[r_1, r_1 + \varepsilon)$, pour $i = 0, 1$ respectivement, avec d_0 et $d_1 \neq 0$.

Par le lemme précédent

$$\begin{aligned} & \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \in |R|_0((r_0, r_1))\} \subset R(C) \\ & \text{(resp. } \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \in |R|_0([r_0, r_1])\} \subset R(C)). \end{aligned}$$

De plus si R a un zéro et un pôle dans C alors $R(C) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Si R n'a pas de pôles, alors $|R|_0$ est convexe sur (r_0, r_1) et

$$\begin{aligned} & R(C) \subset \{|z| < \max\{|R|_0(r_0), |R|_0(r_1)\}\} \\ & \text{(resp. } \subset \{|z| \leq \max\{|R|_0(r_0), |R|_0(r_1)\}\}) \end{aligned}$$

avec égalité si R a un zéro dans C . Si de plus R n'a pas de zéros dans C

$$\begin{aligned} & R(C) = \{\min\{|R|_0(r_0), |R|_0(r_1)\} < |z| < \max\{|R|_0(r_0), |R|_0(r_1)\}\} \\ & \text{(resp. } \{\min\{|R|_0(s_0), |R|_0(s_1)\} \leq |z| \leq \max\{|R|_0(s_0), |R|_0(s_1)\}\}). \end{aligned}$$

Le cas où R n'a pas des zéros dans C est similaire. □

Démonstration de la Proposition 2.6. — On va montrer d'abord que les classes en considération sont invariantes. Soit X un affinoïde fermé connexe. Si $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on a $R(X) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, donc on suppose $X \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Par conséquent $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$ et X a une décomposition canonique,

$$X = \left(\bigsqcup_S \text{sommet de } \mathcal{A}_X X_S \right) \sqcup \left(\bigsqcup_I \text{arête de } \mathcal{A}_X X_I \right),$$

donnée dans la Section 1.2.3.

Etant donnée une arête I de \mathcal{A}_X avec extrémités \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 , considérons l'affinoïde fermé connexe $\widehat{X}_I = X_{\mathcal{S}_0} \cup X_I \cup X_{\mathcal{S}_1}$. Notons que si I_0 et I_1 ont une extrémité commune alors $X_{I_0} \cap X_{I_1} \neq \emptyset$.

Par la Proposition 2.4 on peut montrer (comme dans le corollaire du Lemme 2.7) que si I est une arête de \mathcal{A}_X avec extrémités \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 alors $R(\widehat{X}_I)$ est un affinoïde fermé connexe. Donc $R(X) = \cup \widehat{X}_I$ est un affinoïde fermé connexe.

Ceci montre aussi que si X est un espace analytique connexe, alors $R(X)$ est aussi un espace analytique connexe. Pour le cas d'affinoïdes ouverts connexes, pour chaque sommet \mathcal{S} de \mathcal{A}_X on considère l'affinoïde ouvert connexe $\widehat{X}_{\mathcal{S}} = X_{\mathcal{S}} \cup (\cup X_I)$, où l'union porte sur toutes les arêtes I de \mathcal{A}_X ayant \mathcal{S} comme extrémité. Alors on procède comme dans le cas des affinoïdes fermés connexes.

(1) Considérons un affinoïde fermé connexe, le cas des affinoïdes ouverts connexes étant similaire. Soit P l'ensemble fini des bouts \mathcal{P} tels que $R(\mathcal{P})$ est un bout de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X$ et pour $y \in R^{-1}(X)$ soit Y_y l'affinoïde fermé connexe

$$Y_y = \cap_{\mathcal{P} \in P, y \in B_{\mathcal{P}}} B_{\mathcal{P}}.$$

Par (iv) du Lemme 2.1 pour chaque $\mathcal{P} \in P$ il existe $d_{\mathcal{P}} \geq 0$ tel que tout $x \in B_{R(\mathcal{P})}$ a $d_{\mathcal{P}}$ préimages dans $D_{\mathcal{P}}$.

Donc pour tout $y \in R^{-1}(X)$ un point $x \in X = \cap_{\mathcal{P} \in P} B_{R(\mathcal{P})}$ a

$$d_y = \text{deg}(R) - \sum_{\mathcal{P} \in P, y \in B_{\mathcal{P}}} d_{\mathcal{P}}$$

préimages par R dans Y_y et par conséquent $R : Y_y \rightarrow X$ est de degré d_y .

Soit $x \in X$ et soient $y, z \in R^{-1}(x)$ tels que $Y_y \cap Y_z \neq \emptyset$. Alors $Y_y = Y_z$, car sinon il existe un bout \mathcal{P} de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - Y_y$ tel que $\mathcal{P} \prec Y_z$ ou vice-versa. Mais dans ce cas $R(\mathcal{P}) \prec X$, ce qui n'est pas possible car par définition $R(\mathcal{P})$ est un bout de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X$.

Par conséquent si l'on considère la décomposition $Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$ de $Y = \cup_{y \in R^{-1}(x)} Y_y$ en affinoïdes fermés connexes disjoints deux à deux (donnée par la Proposition 1.1) il existe des entiers $d_i \geq 1$, tels que $R : Y_i \rightarrow X$ est de degré d_i , pour $1 \leq i \leq n$. Donc $d_1 + \dots + d_n = \text{deg}(R)$ car $R^{-1}(x) \subset Y = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$, et par conséquent $R^{-1}(X) = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$.

(2) Soit $X = \cup_{i \geq 1} X_i \in \mathcal{C}$ un espace analytique connexe où $\{X_i\}_{i \geq 1}$ est une suite croissante d'affinoïdes fermés connexes. On a montré que $R^{-1}(X_i)$ est un affinoïde fermé. Soit $n_i \geq 1$ le nombre de composantes connexes de X_i . Alors notons que $n_{i+1} \leq n_i$, pour $i \geq 1$. En effet si

$$R^{-1}(X_i) = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_{n_i} \text{ et } R^{-1}(X_{i+1}) = Z_1 \sqcup \dots \sqcup Z_{n_{i+1}},$$

sont les décompositions en composantes connexes alors

$$Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_{n_i} = R^{-1}(X_i) \subset R^{-1}(X_{i+1}) = Z_1 \sqcup \dots \sqcup Z_{n_{i+1}},$$

et $Z_j \cap R^{-1}(X) \neq \emptyset$ pour tout $1 \leq j \leq n_{i+1}$. Donc $n_{i+1} \leq n_i$. Par conséquent pour i assez grand $n_i = n$ ne dépend pas de i . Alors on peut supposer que $Y_k^i \subset Y_k^{i+1}$, pour $1 \leq k \leq n$. De plus il existe $d_1, \dots, d_n \geq 1$ tels que $d_1 + \dots + d_n = \text{deg}(R)$ et $R : Y_k^i \rightarrow X_i$ est de degré d_k , pour $1 \leq k \leq n$.

Donc $Y_k = \cup_{i \gg 1} Y_k^i$ est un espace analytique connexe, $R : Y_k \rightarrow Y$ est de degré d_k et $R^{-1}(Y) = Y_1 \sqcup \dots \sqcup Y_n$. □

2.4. Composante d’injectivité. — Le but de cette section est de montrer le résultat suivant, qui est le premier pas dans la démonstration du Théorème 3; voir Section 5.

Proposition 2.9. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $x \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ non-critique. Alors il existe un affinoïde ouvert $I(x)$ qui contient x , tel que R est injective sur $I(x)$ et tel que, pour tout espace analytique connexe X qui contient x sur lequel R est injective, on a $X \subset I(x)$.*

Définition 2.10. — Soient R et x comme dans la proposition. Alors on appelle $I(x)$ la composante d’injectivité de x pour R .

La démonstration de la Proposition 2.9 dépend de quelques lemmes.

Lemme 2.11. — *Supposons que la fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est injective sur l’espace analytique connexe X . Alors pour tout système projectif $\mathcal{S} \prec X$ on a $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$.*

Démonstration. — Si $\deg_R(\mathcal{S}) > 1$ alors il y a deux cas.

Soit $\deg_R(\mathcal{P}) > 1$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$: alors, si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ est tel que $D_{\mathcal{P}} \subset X_{\mathcal{S}}$, R n’est pas injective sur $D_{\mathcal{P}}$.

Soit on peut trouver $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ distincts tels que $D_{\mathcal{P}_0}, D_{\mathcal{P}_1} \subset X_{\mathcal{S}}$ et $R(\mathcal{P}_0) = R(\mathcal{P}_1)$; on peut alors choisir $x_0 \in D_{\mathcal{P}_0}$ et $x_1 \in D_{\mathcal{P}_1}$ tels que $R(x_0) = R(x_1)$. □

Lemme 2.12. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Pour $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$ soit $C(r_0, r_1) = \{r_0 < |z| < r_1\}$ et pour $r \in |\mathbb{C}_p|$ soit \mathcal{S}_r le système projectif associé à $\{|z| < r\}$.*

(i) *Pour chaque $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ il existe $d \geq 1$ et $r_0, r_1 > 0$ avec $r \in (r_0, r_1)$, tels que $C = R(C(r_0, r_1))$ est une couronne et $R : C(r_0, r_1) \rightarrow C$ est de degré d . On a alors $\text{mod}(C) = d \cdot \text{mod}(C(r_0, r_1))$.*

(ii) *Supposons que $\deg_R(\mathcal{S}_r) = d \geq 1$ pour tout $r \in |\mathbb{C}_p|$ dans l’intervalle (r_0, r_1) . Alors il existe une coordonnée à l’arrivée tel que $|R|_0(t) = t^d$ sur $[r_0, r_1]$. Si R est injective sur $C(r_0, r_1)$ alors $|R(z)| = |z|$ pour $r_0 < |z| < r_1$ et en particulier $R(C(r_0, r_1)) = C(r_0, r_1)$.*

Corollaire 2.13. — *Si C est une couronne ouverte et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est injective sur C , alors $R(C)$ est aussi une couronne, $\text{mod}(R(C)) = \text{mod}(C)$ et R induit une isométrie entre \mathcal{A}_C et $\mathcal{A}_{R(C)}$.*

Démonstration. — On suppose $C = C(r_0, r_1)$. Par le Lemme 2.11 on a $\deg_R(\mathcal{S}_r) = 1$ pour tout $r \in (r_0, r_1)$ et par (ii) du lemme on peut supposer que $|R(z)| = |z|$ pour $r_0 < |z| < r_1$. Donc $R(C) = C$ et $R(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_r$ pour tout $r \in (r_0, r_1)$. □

Démonstration du Lemme 2.12

(i) Etant donné $P(z) = a_0 + \dots + a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z]$ soit $n(P)$ le plus petit entier qui maximise $r^{1-i}|a_i|$. Alors on procède comme dans la démonstration de (i) du Lemme 2.1.

(ii) Par (iii) du Lemme 2.1 et par (i), pour tout $r \in (r_0, r_1)$ il existe un voisinage $U_r = (s_r, t_r)$ où R est telle que

$$d(R(\mathcal{S}_u), R(\mathcal{S}_v)) = d \cdot d(\mathcal{S}_u, \mathcal{S}_v) = d|u - v|,$$

pour tout $u, v \in U_r$. On peut aussi choisir U_{r_0} (resp. U_{r_1}) de la forme $(r_0, r_0 + \varepsilon)$ (resp. $(r_1 - \varepsilon, r_1)$). Donc on peut trouver un nombre fini de U_r qui recouvrent (s, t) .

Soient $u < v < w$ tels que $u \in U_{s_0}$, $v \in U_{s_0} \cap U_{s_1}$ et $w \in U_{s_1}$. Soit \mathcal{S} le système projectif tel que

$$[R(\mathcal{S}_u), R(\mathcal{S}_v)] \cap [R(\mathcal{S}_v), R(\mathcal{S}_w)] = [R(\mathcal{S}_v), \mathcal{S}];$$

voir Section 1.2.2. Comme $v \in U_{s_0} \cap U_{s_1}$ on a $\mathcal{S} = R(\mathcal{S}_v)$, c'est-à-dire $R(\mathcal{S}_v) \in (R(\mathcal{S}_u), R(\mathcal{S}_w))$. Donc pour tous $u < v$ dans (r_0, r_1) on a $d(R(\mathcal{S}_u), R(\mathcal{S}_v)) = d \cdot |u - v|$. Alors après changement de coordonnée à l'arrivée on a $|R|_0(r) = r^d$ sur $[r_0, r_1]$.

Si R est injective sur $C(r_0, r_1)$ soit $r \in (r_0, r_1)$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_r$ tel que $D_{\mathcal{P}} \subset \{|z| = r\}$. Par (iv) du Lemme 2.1 on a $R(D_{\mathcal{P}}) = D_{R(\mathcal{P})}$. Comme R fixe les bouts associés à $\{|z| < r\}$ et $\{|z| \leq r\}$ on a $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = r\}$. \square

Lemme 2.14. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit X un espace analytique connexe tel que $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$. Alors R est injective sur X si et seulement si R est injective sur chaque $X_{\mathcal{S}}$, pour $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$.

Démonstration. — Supposons que R est injective sur chaque $X_{\mathcal{S}}$, pour $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$. Si X est une couronne ouverte alors, par (ii) du Lemme 2.12, on peut supposer que $X = \{s < |z| < t\}$ et $|R|_0 \equiv \text{id}$ sur $[s, t]$. Par hypothèse R est injective sur chaque $\{|z| = r\}$, pour $r \in (s, t)$. Donc $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = r\}$ et par conséquent R est injective sur X .

Dans le cas général soient $\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1 \in \mathcal{A}_X$. Alors il suffit de montrer que $R(X_{\mathcal{S}^0}) \cap R(X_{\mathcal{S}^1}) = \emptyset$. Quitte à remplacer X par $\cup_{\mathcal{S} \in [\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1]} X_{\mathcal{S}}$ on peut supposer que \mathcal{S}^0 et \mathcal{S}^1 sont des sommets de \mathcal{A}_X . Soient $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}^0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_k = \mathcal{S}^1$ tous les sommets de \mathcal{A}_X contenus dans $[\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1]$.

On va trouver inductivement des coordonnées w_i à l'arrivée, telles que R est l'identité sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_i]$, pour $0 \leq i \leq k$. On peut choisir w_0 sans problème. Supposons que w_i est déjà définie. Comme on a vérifié le lemme pour les couronnes on a $R(C(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1})) = C(R(\mathcal{S}_i), R(\mathcal{S}_{i+1}))$. Comme $\deg_R(\mathcal{S}_i) = 1$ on a $C(R(\mathcal{S}_{i-1}), R(\mathcal{S}_i)) \cap C(R(\mathcal{S}_i), R(\mathcal{S}_{i+1})) = \emptyset$, donc on peut trouver une coordonnée w_{i+1} qui coïncides avec w_i sur $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_i)$ et telle que $(R(\mathcal{S}_i), R(\mathcal{S}_{i+1}))$ soit égal à $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1})$ dans cette coordonnée.

On fixe la coordonnée w_k à l'arrivée. Alors $R(X_{S_0})$ et $R(X_{S_k})$ sont contenus dans de composantes différentes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - C(S_0, S_k)$. Par conséquent $R(X_{S_0}) \cap R(X_{S_1}) = \emptyset$. □

Démonstration de la Proposition 2.9. — Fixons une coordonnée telle que $R(x) = 0$ et soit $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - R^{-1}(0) \cup R^{-1}(\infty)$. Comme x n'est pas un point critique R est injective sur un disque D_x contenant x et tel que $D_x \cap (R^{-1}(0) \cup R^{-1}(\infty)) = \{x\}$. Alors le système projectif \mathcal{S}_x associé à D_x est un point de \mathcal{A}_X et $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ pour tout $\mathcal{S} \in (x, \mathcal{S}_x] \subset \mathcal{A}_X$.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_X$ le plus grand convexe qui contient \mathcal{S}_x et tel que $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ pour tout $\mathcal{S} \in \mathcal{B}$. Comme la condition $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ est ouverte \mathcal{B} est ouverte. Par (i) du Lemme 2.12 on peut écrire $\pi_X^{-1}(\mathcal{B}) = I(x) \cap X$, où $I(x)$ est un affinoïde ouvert connexe.

Si \mathcal{S} est un point de \mathcal{A}_X et $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ est tel que $D_{\mathcal{P}} \subset X_{\mathcal{S}} \subset X$ alors $R(D_{\mathcal{P}}) \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$. Par (iv) du Lemme 2.1 $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$. Comme $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$, R est injective sur $X_{\mathcal{S}}$. Par le Lemme 2.14 R est injective sur $\pi_X^{-1}(\mathcal{B}) = I(x) \cap X$ et par conséquent R est injective sur $I(x)$.

Si Y est un espace analytique connexe alors $\pi_X(Y \cap X)$ est convexe. Donc si Y contient x et n'est pas contenu dans $I(x)$, alors $\pi_X(Y \cap X) \not\subset \mathcal{B}$. Par maximalité de \mathcal{B} il existe $\mathcal{S} \in \pi_X(Y \cap X)$ tel que $\deg_R(\mathcal{S}) > 1$. Comme $x \in Y$ et Y rencontre $X_{\mathcal{S}}$ on a $\mathcal{S} \prec Y$. Par le Lemme 2.11 R n'est pas injective sur Y . □

2.5. Invariance des arbres. — Le but de cette section est de montrer la proposition suivante qu'est un cas particulier d'un théorème de Motzkin ; voir [Mo].

Proposition 2.15. — *Soit X un espace analytique connexe et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle injective sur X .*

- (i) *Si $\mathcal{S} \prec X$ est un système projectif, alors $R(\mathcal{S}) \prec Y = R(X)$.*
- (ii) *Soit $\mathcal{P} \prec X$ un bout. Alors $R : D_{\mathcal{P}} \cap X \rightarrow D_{R(\mathcal{P})} \cap Y$ est de degré 1. En particulier, si $D_{\mathcal{P}} \subset X$ alors $R(D_{\mathcal{P}}) = D_{R(\mathcal{P})}$.*
- (iii) *Le système projectif $\mathcal{S} \prec X$ est un point (resp. sommet) de \mathcal{A}_X si et seulement si $R(\mathcal{S})$ est un point (resp. sommet) de \mathcal{A}_Y .*
- (iv) *R induit une isométrie de \mathcal{A}_X sur \mathcal{A}_Y .*

Corollaire 2.16. — *Soit X un affinoïde ouvert connexe et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R : X \rightarrow X$ est de degré 1. Alors il existe n tel que R^n induit l'identité sur \mathcal{A}_X .*

Démonstration. — Soit n tel que les bouts de X soient fixes par R . Si $\mathcal{A}_X = \emptyset$ alors il n'y a rien à montrer ; donc on suppose que $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$ et par conséquent X a au moins deux bouts. Donc pour tout point \mathcal{S} de \mathcal{A}_X il existe des systèmes projectifs \mathcal{S}_0 et \mathcal{S}_1 associés à des bouts de X tels que $\mathcal{S} \prec (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. Notons que $R^n(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_i$, pour $i = 0, 1$. Comme R induit une isométrie sur \mathcal{A}_X on a

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i) = d(R^n(\mathcal{S}), R^n(\mathcal{S}_i)) = d(R^n(\mathcal{S}), R(\mathcal{S}_i)),$$

pour $i = 0, 1$. Donc $R(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. □

Démonstration de la Proposition 2.15

(i) D'après (iii) de la Proposition 2.4, sauf pour un nombre fini de bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on a $R(D_{\mathcal{P}}) = D_{R(\mathcal{P})}$. Donc $\mathcal{S} \prec X$ implique $R(\mathcal{S}) \prec Y$.

(ii) Comme R est injective sur X il existe une composante d'injectivité I de R qui contient X . Rappelons que I est un affinoïde ouvert connexe. Soit Z la composante connexe de $R^{-1}(D_{R(\mathcal{P})})$ ayant \mathcal{P} comme bout. Si $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}$ est un bout de Z alors $\mathcal{Q} \not\prec I$ et comme I est un affinoïde ouvert connexe, $B_{\mathcal{Q}} \cap I = \emptyset$. Par conséquent $D_{\mathcal{P}} \cap X \subset D_{\mathcal{P}} \cap I \subset Z$ et $R(D_{\mathcal{P}} \cap X) \subset R(Z) = D_{R(\mathcal{P})}$. Si $X \subset D_{\mathcal{P}}$ le résultat est clair, donc on suppose que $X \not\subset D_{\mathcal{P}}$. Par conséquent, si \mathcal{S} est le système projectif associé à \mathcal{P} , alors $\mathcal{S} \prec X$ et par le Lemme 2.11 on a $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$. Donc,

$$R(X - D_{\mathcal{P}}) \subset \cup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{S} - \{\mathcal{P}\}} R(X \cap D_{\mathcal{Q}}) \subset \cup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{S} - \{\mathcal{P}\}} D_{R(\mathcal{Q})} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - D_{R(\mathcal{P})},$$

et par conséquent $R : X \cap D_{\mathcal{P}} \rightarrow Y \cap D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré 1.

(iii) D'après (i) $\mathcal{S} \prec X$ implique $R(\mathcal{S}) \prec Y$. Dans ce cas on a d'après (ii)

$$\#\{\mathcal{P} \in \mathcal{S} | D_{\mathcal{P}} \cap X = \emptyset\} = \#\{Q \in R(\mathcal{S}) | D_{\mathcal{Q}} \cap Y = \emptyset\} \text{ et}$$

$$\#\{\mathcal{P} \in \mathcal{S} | D_{\mathcal{P}} \cap X \neq \emptyset, D_{\mathcal{P}} \not\subset X\} = \#\{Q \in R(\mathcal{S}) | D_{\mathcal{Q}} \neq \emptyset, D_{\mathcal{Q}} \not\subset X\}.$$

Donc \mathcal{S} est un point (resp. sommet) de \mathcal{A}_X si et seulement si $R(\mathcal{S})$ est un point (resp. sommet) de \mathcal{A}_Y . Par (ii) pour tout bout $\mathcal{P} \prec X$ on a $D_{\mathcal{P}} \subset X$ si et seulement si $D_{R(\mathcal{P})} \subset Y$. Comme $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ on a $R(X_{\mathcal{S}}) = Y_{R(\mathcal{S})}$.

(iv) Soient $\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1 \in \mathcal{A}_X$ et soient $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_k$ les sommets de \mathcal{A}_X dans $(\mathcal{S}^0, \mathcal{S}^1)$ tels que les $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1})$ sont disjoints, pour $0 \leq i \leq k$, où $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}^0$ et $\mathcal{S}_{k+1} = \mathcal{S}^1$. On va montrer par induction dans i que $d(R(\mathcal{S}_0), R(\mathcal{S}_i)) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_i)$. Par (iii) et par le Lemme 2.11, R induit une isométrie entre $I_i = (\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1})$ et $R(I_i) = (R(\mathcal{S}_i), R(\mathcal{S}_{i+1}))$.

Comme R est injective sur X , R est injective sur \mathcal{A}_X et par conséquent les $R(I_i)$ sont disjoints. Comme $d(R(\mathcal{S}_i), R(\mathcal{S}_{i+1})) = d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_{i+1})$ on a $d(R(\mathcal{S}_0), R(\mathcal{S}_k)) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_k)$. □

3. Dynamique locale

Soit U un ouvert de \mathbb{C}_p et $f : U \rightarrow \mathbb{C}_p$ une application. Un point $z_0 \in U$ est *périodique* s'il existe $k \geq 1$ tel que $z_0, \dots, f^{k-1}(z_0) \in U$ et $f^k(z_0) = z_0$. On appelle k *période* de x ; si k est le plus petit entier avec cette propriété, alors k est appelé la *période primitive* de z_0 et on dit que $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{k-1}(z_0)\}$ est le *cycle* de z_0 . Quand f est analytique au voisinage du cycle de z_0 , la dérivée $(f^k)'(z_0) = (f^k)'(f^j(z_0))$ est appelé le *multiplicateur* du cycle correspondant.

Le multiplicateur est invariant par conjugaison analytique et sa nature donne une certaine information sur la dynamique de f au voisinage du cycle. On considère la classification suivante des points périodiques, en analogie avec le cas complexe.

Définition 3.1. — Soit z_0 un point périodique et λ son multiplicateur.

- Si $|\lambda| < 1$ on dit que z_0 est *attractif*. Si de plus $\lambda = 0$, alors on dit que z_0 est *super-attractif*.
- Si $|\lambda| = 1$ on dit que z_0 est *indifférent*. Si λ est une racine de l'unité on dit que z_0 est *parabolique* ou *indifférent rationnel*. Sinon on dit que z_0 est *indifférent irrationnel*.
- Si $|\lambda| > 1$ on dit que z_0 est *répulsif*.

Dans les Sections 3.1 et 3.3 on considère la dynamique locale des points périodiques, selon la classification précédente. Dans la Section 3.2 on considère la dynamique ‘quasi-périodique’.

3.1. Points périodiques attractifs. — Dans cette section on considère la dynamique au voisinage des points périodiques attractifs. On peut étendre la plupart des propriétés aux points périodiques répulsifs en considérant que, si z_0 est un point périodique répulsif pour f , alors z_0 est un point périodique attractif pour f^{-1} .

Si $z_0 \in U$ un point périodique attractif de f . Alors on dit que

$$\mathcal{W}_f^s(z_0) = \{z \in U \mid d(f^n(z), f^n(z_0)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$$

est le *bassin d'attraction* de z_0 et que $\cup_{n \geq 1} \mathcal{W}_f^s(f^n(z_0))$ est le *bassin d'attraction du cycle* de z_0 . Notons que $\mathcal{W}_f^s(z_0)$ est ouvert et invariant par f^k , où k est la période de z_0 .

On considère l'ensemble $A(\mathbb{C}_p)$ des séries à coefficients sur \mathbb{C}_p convergentes au voisinage de 0 qui sont de la forme

$$f(z) = \lambda z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots,$$

avec $|\lambda| < 1$. Pour une telle série, différente de λz , on définit

$$r(f) = \left(\sup_{k \geq 1} |a_k|^{1/k} \right)^{-1}.$$

Il n'est pas difficile de voir que f est convergente sur $B_{r(f)}(0)$ et que $r(f) < \infty$.

Proposition 3.2. — Soit $f \in A(\mathbb{C}_p)$ une série différentielle de λz . Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) Pour $|z| < r(f)$ on a $|f(z)| \leq |z| \max\{|\lambda|, |z|/r(f)\}$. Donc $B_{r(f)}(0) \subset \mathcal{W}_f^s(0)$.
- (ii) $r(f) = \sup\{r > 0 \mid f \text{ est convergente sur } B_r(0) \text{ et } f(B_r(0)) \subset B_r(0)\}$.

Démonstration

- (i) On pose $f(z) = \lambda z + a_1 z^2 + \dots$. Pour $|z| < r(f)$ on a

$$|f(z)| = |z| \cdot |\lambda + a_1 z + a_2 z^2 + \dots| \leq \max\{|\lambda|, |z|/r(f)\} |z|,$$

car $|a_k|^k r(f) \leq 1$.

- (ii) Si f est convergente sur $B_r(0)$ avec $r > r(f)$, alors

$$\limsup_{k \geq 1} |a_k|^{1/k} \leq r^{-1} < r(f)^{-1} = \sup_{k \geq 1} |a_k|^{1/k},$$

donc il existe k tel que $r(f) = |a_k|^{1/k}$. Si $s \in |\mathbb{C}_p| \cap (r(f), r)$ on a

$$\|f\|_{B_s^+(0)} = s \cdot \max \left\{ |\lambda|, |a_l|(r(f))^l \left(\frac{s}{r(f)} \right)^l \right\} \geq |s| \left(\frac{s}{r(f)} \right)^k > s. \quad \square$$

Notons que par (ii) on a $f(B_{r(f)}(0)) \subset B_{r(f)}(0)$ et $r(f^n) \geq r(f)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Proposition 3.3. — *Considérons une série $f \in A(\mathbb{C}_p)$.*

(i) *Si $\lambda = f'(0) \neq 0$ alors $\{\lambda^{-n} f^n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément vers une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(B_{r(f)}(0))$ sur $B_r^+(0)$, pour tout $r < r(f)$. Donc $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. De plus, si $f(B_{r(f)}(0)) = B_{r(f)}(0)$, alors $\varphi : B_{r(f)}(0) \rightarrow \mathbb{C}_p$ est surjective.*

(ii) *Si $f'(0) = 0$ alors il existe une série φ convergente au voisinage de 0, telle que $\varphi \circ f = \varphi^d$, où $d = \deg_f(0)$.*

La démonstration de cette proposition est à la fin de cette section. Le résultat sur la linéarisation est un cas particulier d'un théorème en [HY] et est aussi montré dans [Lu1]. En considérant (i) de la proposition précédente on fait la définition suivante.

Définition 3.4. — *Soit $f \in A(\mathbb{C}_p)$. Si $f(B_{r(f)}(0)) = B_{r(f)}(0)$ alors on dit que $B_{r(f)}(0)$ est le bassin d'attraction immédiat de 0 pour f .*

En général f peut être injective sur $B_{r(f)}(0)$, par exemple $f(z) = pz/(1-z)$. D'autre part on a les propriétés suivantes.

Proposition 3.5. — *Soit $f \in A(\mathbb{C}_p)$ une série différente de λz .*

(1) *Si $r(f) \notin |\mathbb{C}_p|$ alors $r(f)$ est le rayon de convergence de f et $f : B_{r(f)}(0) \rightarrow B_{r(f)}(0)$ est de degré infini.*

(2) *Si $r(f)$ est strictement inférieur au rayon de convergence de f , on a $r(f) \in |\mathbb{C}_p|$ et $B_{r(f)}(0)$ est le bassin d'attraction immédiat de 0.*

(3) *Si $r(f) = 1$ et $B_1(0)$ est le bassin d'attraction immédiat de 0, alors $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ est de degré d , où $d = \text{wideg}(f) \in \{2, 3, \dots\} \cup \{\infty\}$. Si de plus le rayon de convergence de f est plus grand que 1, on a $d < \infty$.*

Démonstration

(1) Si $r(f) \notin |\mathbb{C}_p|$ alors il existe $k_i \rightarrow \infty$ tel que $|a_{k_i}|^{1/k_i} \rightarrow r(f)$, par conséquent $r(f)$ est le rayon de convergence de f et $f : B_{r(f)}(0) \rightarrow B_{r(f)}(0)$ est de degré infini.

(2) Si le rayon de convergence est strictement plus grand que $r(f)$ alors il existe k tel que $r(f) = |a_k|^{1/k} \in |\mathbb{C}_p|$. Donc

$$\|f\|_{B_{r(f)}(0)} = r(f) \max\{|\lambda|, |a_k|(r(f))^k\} = r(f) \text{ et } f(B_{r(f)}(0)) = B_{r(f)}(0).$$

(3) Dans ce cas pour tout $z_0 \in B_1(0)$ on a $d = \text{wideg}(f - z_0) = \text{wideg}(f)$, donc $f : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ est de degré d . Si le rayon de convergence est plus grand que 1 on a $|a_k| < 1$ pour tout k grand, donc $d = \text{wideg}(f) < \infty$. □

Si $B_{r(f)}(0)$ est le bassin d'attraction immédiat de f on a par la proposition précédente $d > 1$. En général d peut être infini, mais si par exemple f est à coefficients sur un corps à valuation discrète, alors $d < \infty$.

Exemple 3.6. — On considère la fonction rationnelle $f \in \mathbb{C}_p(z)$ définie par $f(z) = \lambda z^2/(z + 1)$, avec $|\lambda| \in (0, 1)$, qui est conjugué au polynôme $\lambda^{-1}(z^2 + z)$. On a $r(f) = 1$, mais $f(B_1(0)) \neq B_1(0)$. De plus il n'est pas difficile de voir que pour tout disque $D \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui contient 0 on a $f(D) \neq D$.

Démonstration de la Proposition 3.3

(i) Soit $r > 0$ tel que $|f(z)| = |\lambda z|$ pour $|z| < r$; on pose $f(z) = \lambda z(1 + g(z))$ avec $g(0) = 0$. Soit $C > 0$ tel que $|g(z)| < C|z|$, pour $|z| < r$. Donc $\|g \circ f^n\|_{B_r^+(0)} < C|\lambda|^n r$ et

$$\varphi_n(z) = \lambda^{-n} f^n(z) = z(1 + g(z))(1 + g \circ f(z)) \cdots (1 + g \circ f^{n-1}(z)),$$

converge uniformément sur $B_r^+(0)$ vers une fonction $\varphi \in \mathcal{H}(B_r^+(0))$. Comme pour tout $n \geq 0$ on a $\lambda \varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$, on conclut que $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

Montrons que $\varphi \in \mathcal{H}(B_{r(f)}(0))$. En effet soit $s < r(f)$. Il existe $n \geq 1$ tel que $f^n(B_s^+(0)) \subset B_r(0)$, d'après (i) de la Proposition 3.2. La fonction $\lambda^n \varphi = \varphi \circ f^n$ appartient donc à $\mathcal{H}(B_s^+(0))$ et coïncide avec φ dans $\mathcal{H}(B_r^+(0))$. On obtient ainsi que $\varphi \in \mathcal{H}(B_{r(f)}(0))$.

L'image de φ contient une boule $B_t(0)$. L'équation fonctionnelle montre alors, si $f(B_{r(f)}(0)) = B_{r(f)}(0)$, que cette image contient la boule $B_{|\lambda|^{-n}t}(0)$ pour tout $n \geq 0$.

(ii) Après conjugaison par λz on peut supposer que $f(z) = z^d + \dots$, où $d = \deg_f(0) > 1$. On pose $f(z) = z^d(1 + g(z))$ avec $g(0) = 0$. On considère $r > 0$ et $C > 0$ tels que $\|g\|_{B_r^+(0)} < Ct < 1$, pour $t \in (0, r)$. En particulier on a $|f(z)| = |z|^d$ pour $0 < |z| < r$. Notons que si $t < p^{-1/(p-1)}$ alors $|\ln(1 + z)| = |z|$. On suppose que $Cd^{n+1}r^{d^n} < p^{-1/(p-1)}$ pour tout $n \geq 1$. Donc si $t \in (0, r)$ et $n \geq 0$ on a

$$\left\| \frac{1}{d^{n+1}} \ln(1 + g \circ f^n) \right\|_{B_t^+(0)} \leq d^{n+1} |g \circ f^n|_0(t) \leq d^{n+1} C t^{d^n} < C d^{n+1} r^{d^n} < p^{-1/(p-1)},$$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{d^{n+1}} \ln(1 + g \circ f^n) \right\|_{B_t^+(0)} = 0$ pour $t \in (0, r)$ fixé. Par conséquent

$$h = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{d^{n+1}} \ln(1 + g \circ f^n) \in \mathcal{H}(B_r(0)),$$

satisfait $d \cdot h = \ln(1 + g) + h \circ f$. Comme $\|h\|_{B_r(0)} < p^{-1/(p-1)}$ on a $\varphi(z) = z \exp(h(z)) \in \mathcal{H}(B_r(0))$ et

$$\varphi^d(z) = (z \exp(h_{n+1}(z)))^d = f(z) \exp(h_n \circ f(z)) = \varphi \circ f(z). \quad \square$$

3.2. Dynamique quasi-périodique et logarithme itératif. — Dans cette section on considère les aspects locaux de la dynamique quasi-périodique d'un système dynamique donné.

A chaque système dynamique (f, U) on associe son *domaine de quasi-périodicité*, que l'on note $\mathcal{E}(f)$. Dans cette section on s'intéresse aux aspects locaux de la dynamique de f sur $\mathcal{E}(f)$. Par conséquent on n'utilise que des propriétés élémentaires d'analyse et plus concrètement les outils de la Section 1.3.1. Des aspects globaux de la dynamique sur le domaine de quasi-périodicité sont étudiés dans les Sections 4.2 et 5.

Un des modèles de la dynamique quasi-périodique est la translation $z \mapsto z + 1$. Supposons donc que f est localement conjugué à $z \mapsto z + 1$; c'est-à-dire qu'il existe une fonction analytique h au voisinage d'un point z_0 telle que $h'(z_0) \neq 0$ et $h \circ f(z) = h(z) + 1$. Alors notons que

$$\lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{f^n(z) - z}{n} = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{h^{-1}(h(z) + n) - h^{-1}(h(z))}{n} = \frac{1}{h'(z)}.$$

Ceci explique la définition suivante.

Définition 3.7. — On appelle

$$\mathcal{E}(f) = \left\{ z_0 \in U \mid \text{il existe } k = k(z_0) \geq 1, \text{ tel que } \left\{ \frac{f^{nk} - \text{id}}{nk} \right\}_{n \geq 0} \right.$$

est uniformément convergente sur un voisinage de z_0 , quand $|n|_p \rightarrow 0$ }

la *domaine de quasi-périodicité* de f . De plus la fonction $f_* : \mathcal{E}(f) \rightarrow \mathbb{C}_p$, définie par

$$f_*(z_0) = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{f^{nk}(z_0) - z_0}{nk},$$

pour $z_0 \in \mathcal{E}(f)$, est appelé le *logarithme itératif* de f .

Ainsi définie f_* est une fonction analytique; voir aussi Corollaire 4.17. Notons que la définition de f_* ressemble à la définition du nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle. Dans ce dernier cas il faut considérer le relèvement sur \mathbb{R} et $n \rightarrow \infty$ au lieu de $|n|_p \rightarrow 0$. Donc on peut dire que pour $z_0 \in \mathcal{E}(f)$, $f_*(z_0)$ est le 'nombre de rotation infinitésimal de f en z_0 '.

Remarque 3.8. — La notion de logarithme itératif formel est connue dans la littérature sous divers autres noms; voir les références en [Ec1] et aussi la très complète référence de [Ku] pour ce sujet et autres. Ici on considère l'approche d'Ecale; voir [Ec1]. Il a considéré le logarithme itératif pour les séries formelles sur \mathbb{C} tangentes à l'identité et il a étudié des problèmes de convergence. Lubin a considéré le logarithme itératif défini sur les anneaux à valuation discrète au voisinage des points fixes paraboliques et il a montré 1 et 2 de la Proposition 3.16 (ci-dessous), dans ce contexte par une méthode différente; voir [Lu1].

Proposition 3.9. — On a les propriétés suivantes du domaine de quasi-périodicité.

- (i) $\mathcal{E}(f)$ est ouvert.
- (ii) f est injective sur $\mathcal{E}(f)$.

- (iii) $\mathcal{E}(f)$ est invariant par f .
- (iv) $\mathcal{E}(f^n) = \mathcal{E}(f)$ et $(f^n)_* = n f_*$, pour tout $n \geq 1$.
- (v) Si $g = h \circ f \circ h^{-1}$ alors $\mathcal{E}(g) = h(\mathcal{E}(f))$ et $g_* \circ h = h' f_*$. En particulier pour tout entier $m \geq 1$ on a $f_* \circ f^m \equiv f_*(f^m)'$.

Démonstration

- (i) Suit directement de la définition.
- (ii) Soient z_0 et $z_1 \in \mathcal{E}(f)$ différents. Alors il existe $r > 0$ et $k \geq 1$ tels que la suite $\{\frac{f^{nk} - \text{id}}{nk}\}_{n \geq 0}$ est uniformément convergente sur $B_r(z_0)$ et $B_r(z_1)$. De plus on peut supposer que $B_r(z_0) \cap B_r(z_1) = \emptyset$. Donc pour n de norme p -adique assez petit on a $f^{nk}(z_0) \in B_r(z_0)$ et $f^{nk}(z_1) \in B_r(z_1)$. Par conséquent $f^{nk}(z_0) \neq f^{nk}(z_1)$ et $f(z_0) \neq f(z_1)$.

(iii) Il suffit de montrer que, si $\{\frac{f^{nk} - \text{id}}{nk}\}_{n > 0}$ est uniformément convergente sur un voisinage de 0, alors $\{\frac{f^{kn} - \text{id}}{kn} \circ f\}_{n > 0}$ aussi. Notons que pour $n \geq 0$ on a

$$\frac{f^{kn} \circ f - f}{kn} = \frac{f \circ f^{kn} - f}{kn} = \frac{f(\text{id} + (f^{kn} - \text{id})) - f}{kn}.$$

Donc $\{\frac{f^{kn} - \text{id}}{kn} \circ f\}_{n \geq 0}$ converge uniformément vers $f' \circ f_*$ sur un voisinage de z_0 .

(iv) Immédiat.

(v) On observe simplement que

$$g_* = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{g^{kn} \circ h - h}{kn} = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{h \circ f^{kn} - h}{f^{kn} - \text{id}} \frac{f^{kn} - \text{id}}{kn} = h' f_*. \quad \square$$

Exemple 3.10. — Soit $f(z) = \frac{z}{1 - az}$. Alors

$$\frac{f^n(z) - z}{n} = \frac{az^2}{1 - naz}.$$

Donc $f_*(z) = az^2$ et $\mathcal{E}(f) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Soit $f(z) = \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$; on a

$$\frac{f^n(z) - n}{n} = \frac{\lambda^n - 1}{n} z.$$

Donc $f_* \equiv (\ln \lambda)z$ et $\mathcal{E}(f) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Il n'est pas difficile de voir que, si R est une fonction rationnelle de degré un telle que $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$, alors R est conjuguée à une de ces fonctions.

3.2.1. Automorphismes d'un disque et logarithme itératif. — Pour $w \in \mathbb{C}_p$ et $k \geq 0$ soit

$$\binom{w}{k} = \frac{w(w-1) \cdots (w-(k-1))}{1 \cdots k}$$

et considérons la fonction continue $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ définie par $\rho(s) = sp^{1/(p-1)}$, pour $s \geq 1$, $\rho(p^{-n}) = p^{1/p^n(p-1)}$, pour $n \geq 0$ et de la forme $a_n s^{b_n}$ si $p^{-(n+1)} \leq s \leq p^{-n}$. Notons que $\rho(s) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$.

Lemme 3.11. — Soit $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(B_R(0))$ un automorphisme de $B_R(0)$ tel que $\|f - \text{id}\|_{B_R(0)} < \gamma R$, où $\gamma \in (0, 1)$. Alors on a les propriétés suivantes.

(i) $\mathcal{E}(f) = B_R(0)$.

(ii) Posons $T_0 = \text{id}$ et pour $n \geq 0$ posons $T_{n+1} = T_n \circ f - T_n$; donc $T_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} f^{n-i}$. Pour $w \in \mathbb{C}_p$ tel que $\rho(|w|) < \gamma^{-1}$ on a $\|T_n\|_{B_R(0)} \leq R\gamma^n$. De plus la série

$$f^{\circ w} = \sum_{i=0}^m \binom{w}{i} T_i,$$

converge uniformément dans $B_R(0)$ vers un automorphisme de $B_R(0)$. De plus si $\rho(|w_i|) < \gamma^{-1}$, pour $i = 1, 2$, alors $f^{\circ w_1} \circ f^{\circ w_2} = f^{\circ(w_1+w_2)}$.

(iii) Pour tout $w \in \mathbb{C}_p$ avec $\rho(|w|) < \gamma^{-1}$ on a

$$\left\| f_* - \frac{f^{\circ w} - \text{id}}{w} \right\|_{B_R(0)} \leq CR|w| \quad \text{et} \quad \left\| f_* - \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i-1} \frac{T_i}{i} \right\|_{B_R(0)} \leq k\gamma^k R,$$

où la constante C ne dépend que de $\gamma\rho(|w|)$. En particulier

$$(f^n - \text{id})/n \quad \text{et} \quad \sum_{i>0} (-1)^{i-1} \frac{T_i}{i}$$

convergent uniformément vers f_* sur $B_R(0)$ quand $|n|_p \rightarrow 0$.

La démonstration du Lemme 3.11 est à la fin de cette section.

Corollaire 3.12. — Si $f : B_R(0) \rightarrow B_R(0)$ est un automorphisme, alors $\mathcal{E}(f) = B_R(0)$. Si de plus f est tangent à l'identité en 0, alors pour tout $w \in \mathbb{C}_p$ la série $f^{\circ w}$ est convergente au voisinage de 0.

Démonstration. — Comme f est un automorphisme de $B_R(0)$ il existe $|\lambda| = 1$ tel que $|f'(z) - \lambda| < 1$ pour tout $z \in B_R(0)$. Par conséquent, quitte à remplacer f par un itéré, on peut supposer $|f'(0) - 1| < 1$. Alors pour tout $r \in (|f(0)|, R)$ il existe $\gamma = \gamma(r) \in (0, 1)$ tel que $\|f - \text{id}\|_{B_r(0)} < \gamma r$. Donc par (i) du lemme on a $B_r(0) \subset \mathcal{E}(f)$.

Si f est tangent à l'identité, pour tout $w \in \mathbb{C}_p$ on peut trouver $R > 0$ petit tel que $\|f - \text{id}\|_{B_R(0)} < \gamma R$ avec $\gamma < \rho(|w|)^{-1}$. Alors on peut appliquer le lemme. \square

Notons que la formule du logarithme itératif en (iv) du lemme ressemble celle du logarithme usuel

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \dots$$

Notons aussi l'analogie entre la définition de f_* et l'identité suivante du logarithme p -adique

$$\ln(\lambda) = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{\lambda^n - 1}{n}.$$

Les séries dans (ii) sont les *itérés fractionnaires* de f ; voir par exemple [E $\mathbf{c}1$]. De la formule

$$f_* = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f^{\circ w} - \text{id}}{w}$$

on peut penser à f_* comme un champ de vecteurs et $f^{\circ w}$ comme le temps w du flot engendré par f_* . Ceci est justifié aussi par la formule de transformation (v) de la Proposition 3.9.

La démonstration du Lemme 3.11 dépend du lemme suivant.

Lemme 3.13. — *Pour tout $w \in \mathbb{C}_p$ et $k \geq 1$ on a*

$$\left| \binom{w}{k} \right| \leq k|w|\rho(|w|)^k \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{w} \binom{w}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq k^2|w|\rho(|w|)^k.$$

Démonstration. — Si $|w| \geq 1$ alors il est facile de voir que

$$\left| \binom{w}{k} \right| \leq \frac{|w|^k}{|k!|} \leq |w|^k (p^{1/(p-1)})^k.$$

Donc on obtient les deux inégalités dans ce cas. Si $p^{-(n+1)} \leq |w| \leq p^{-n}$ alors notons que $|1 - w/i| \leq 1$ si $|i| \geq p^{-n}$ et $|1 - w/i| \leq |w| \cdot |i|^{-1}$ sinon. Donc on a

$$\begin{aligned} \left| (1-w) \cdots \left(1 - \frac{w}{k-1}\right) \right| &\leq \left| \frac{w}{p^{n+1}} \right|^{k/p^{n+1}} \left| \frac{1}{p} \right|^{k/p^{n+2} + k/p^{n+3} + \dots} \\ &= (|w|p^{n+1})^{k/p^{n+1}} p^{k/p^{n+1}(p-1)} = \rho(|w|)^k, \end{aligned}$$

car il y a au plus k/p^m entiers dans $\{1, \dots, k\}$ que sont divisibles par p^m . Par conséquent

$$\left| \binom{w}{k} \right| = \left| \frac{w}{k} (1-w) \cdots \left(1 - \frac{w}{k-1}\right) \right| \leq k|w|\rho(|w|)^k.$$

D'autre part

$$\frac{1}{w} \binom{w}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{1 \leq i \leq k-1} \frac{w}{i} \prod_{1 \leq i \leq k-1, j \neq i} \left(1 - \frac{w}{j}\right).$$

Par le raisonnement précédent on a $\left| \prod_{1 \leq i \leq k-1, j \neq i} (1 - w/j) \right| \leq \rho(|w|)^k$. Donc

$$\left| \frac{1}{w} \binom{w}{k} - \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq k^2|w|\rho(|w|)^k. \quad \square$$

Démonstration du Lemme 3.11. — On note $\|\cdot\|_R$ au lieu de $\|\cdot\|_{B_R(0)}$.

(ii) Par le Corollaire 1.4 du Lemme de Schwarz, pour tout $n \geq 1$ on a

$$\|T_{n+1}\|_R = \|T_n \circ f - T_n\|_R \leq \frac{1}{R} \|f - \text{id}\|_R \|T_n\|_R \leq \gamma \|T_n\|_R.$$

Donc par induction on a $\|T_n\|_R \leq R\gamma^n$. Par le Lemme 3.13 $\left|\binom{w}{n}\right| \leq n|w|\rho(|w|)^n$, par conséquent $\left\|\binom{w}{n}T_n\right\|_R \leq n|w|(\gamma\rho(|w|))^n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$. Donc $f^{\circ w}$ est un automorphisme de $B_R(0)$.

On a l'identité $f^{\circ w_1} \circ f^{\circ w_2} = f^{\circ(w_1+w_2)}$ au sens formel: voir [E \mathbf{c} 1]. Donc si les séries sont convergentes on a aussi cette identité au sens analytique.

(iii) Par (ii) la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} T_k/k$ est convergente. Soit $n \geq 0$ tel que $p^{-(n+1)} < |w| \leq p^{-n}$. Par le lemme précédent on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f^w - \text{id}}{w} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{T_k}{k} \right\|_R &= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{w} \binom{w}{k} - \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right) T_k \right\|_R \\ &\leq \left(\max_{k \geq 1} k(\gamma \rho(|w|))^k \right) R|w| \leq CR|w|, \end{aligned}$$

où C ne dépend que en $\gamma \rho(|w|)$. Par conséquent $(f^{\circ w} - \text{id})/w$ converge uniformément sur $B_R(0)$, mais par définition

$$f_* = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{f^n - \text{id}}{n} = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{f^{\circ n} - \text{id}}{n} = \sum_{k \geq 1} (-1)^n \frac{T_k}{k}.$$

Donc on obtient la première inégalité du lemme; la deuxième suit de (ii).

(i) Suit de (iii). □

3.2.2. Propriétés du domaine de quasi-périodicité

Proposition 3.14. — *On a les caractérisations suivantes du domaine de quasi-périodicité.*

- (1) $\mathcal{E}(f) = \{z_0 \in U \mid \text{il existe } n_j \rightarrow \infty \text{ tel que } f^{n_j} \rightarrow \text{id} \text{ sur un voisinage de } z_0\}$.
- (2) $\mathcal{E}(f) = \{z_0 \in U \mid \left\{ \frac{f^{n_k} - \text{id}}{n_k} \right\}_{n \geq 0} \text{ est localement uniformément bornée}\}$.

Démonstration

(1) Si $z_0 \in \mathcal{E}(f)$, alors il existe $k \geq 1, r > 0$ et $C > 0$ tels que $|f^{kp^n}(z) - z| < C1/p^n$, pour $z \in B_r(z_0)$. Alors la suite $\{f^{kp^n}\}_{n > 0}$ converge uniformément vers l'identité sur $B_r(z_0)$. Supposons que f^{n_j} converge uniformément vers l'identité sur $B_r(z_0)$. Alors, pour j assez grand on a $f^{n_j}(B_r(z_0)) \subset B_r(z_0)$ et $|(f^{n_j})'(z_0)| = 1$. Donc par le Corollaire 3.12 on a $z_0 \in B_r(z_0) \subset \mathcal{E}(f)$.

(2) Si $z_0 \in \mathcal{E}(f)$, alors la suite $\left\{ \frac{f^{n_k} - \text{id}}{n_k} \right\}_{n > 0}$ est uniformément bornée sur un voisinage de z_0 . Supposons que $\left\{ \frac{f^{n_k} - \text{id}}{n_k} \right\}_{n > 0}$ est uniformément bornée sur un voisinage de z_0 . Alors $\{f^{kp^n}\}_{n > 0}$ converge uniformément vers l'identité sur un voisinage de z_0 , et par 1 on a $z_0 \in \mathcal{E}(f)$. □

Corollaire 3.15. — *Tout $z \in \mathcal{E}(f)$ est récurrent par f .*

Démonstration. — Par la caractérisation 1. □

Proposition 3.16. — *On a les propriétés suivantes du logarithme itératif.*

- (1) *Soit $z_0 \in \mathcal{E}(f)$. On a $f_*(z_0) = 0$ si et seulement si z_0 est un point périodique indifférent de f . Si k est une période de z_0 , alors $f'_*(z_0) = \frac{1}{k} \ln(f^k)'(z_0)$. En particulier z_0 est parabolique si et seulement si $f'_*(z_0) = 0$.*

(2) Pour tout $z_0 \in \mathcal{E}(f)$ tel que $f_*(z_0) \neq 0$ il existe $k \geq 1$ tel que f^k est conjugué analytiquement à la translation $z \mapsto z + k$ sur un voisinage de z_0 . Plus précisément pour tout z sur un voisinage U_{z_0} de z_0 on a

$$f^*(f^k(z)) = f^*(z) + k,$$

où $f^* : U_{z_0} \rightarrow B_{|k|}^+(0)$ est une primitive formelle injective de $1/f_*$.

Corollaire 3.17. — Les points périodiques indifférents sont isolés.

Démonstration. — Par 1 les points périodiques indifférents sont les zéros de la fonction analytique f_* , donc sont isolés. □

Démonstration de la Proposition 3.16

(1) Si z_0 est périodique on a $f_*(z_0) = 0$. Supposons que $f_*(z_0) = 0$. On peut supposer de plus $k(z_0) = 1$, $U_{z_0} = B_r^+(z_0)$, avec $r \in |\mathbb{C}_p|$, et $f(B_r^+(z_0)) \subset B_r^+(z_0)$.

On considère la norme uniforme $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{B_r^+(z_0)}$ sur $\mathcal{H}(B_r^+(z_0))$; voir Section 1.3.1. On pose $f^{p^n} = \text{id} + g_n$, où $\|g_n\|_r < Cp^{-n}$. Donc

$$f^{kp^n}(z) = z + g_n(f^{p^n}(z)) + \dots + g_n(f^{(k-1)p^n}(z)) = z + kg_n(z) + r_n(z),$$

où $\|r_n\|_r \leq \frac{1}{r}\|g_n\|_r^2$, par le corollaire du lemme de Schwarz. Par conséquent, si n est assez grand on a $\|g_{n+1}\|_r = \frac{1}{p}\|g_n\|_r$.

Alors, soit $g_n \equiv 0$ et tout point de $B_r(z_0)$ est fixé par f^n , soit $f_* \neq 0$ sur $B_r^+(z_0)$ et alors f_* a un nombre fini de zéros sur $B_r^+(0)$. Par (v) de la Proposition 3.9 on a $f_*(f^n(z_0)) = (f^n)'(z_0)f_*(z_0) = 0$ et par conséquent z_0 est prépériodique par f . Comme f est injective sur $B_r(z_0) \subset \mathcal{E}(f)$ on a que z_0 est périodique par f .

(2) Soit $z_0 \in \mathcal{E}(f)$ tel que $f_*(z_0) \neq 0$ et soit f^* une primitive formelle de $1/f_*$ définie sur un voisinage de z_0 et telle que $f^*(z_0) = 0$. Comme $(f^*)'(z_0) = 1/f_*(z_0) \neq 0$, il existe $n > 0$ et une boule U_{z_0} que contient z_0 tel que $f^* : U_{z_0} \rightarrow B_{p^{-n}}(0)$ est une bijection.

Soit m tel que $f^m(z_0) \in U_{z_0}$. Par (v) de la Proposition 3.9 on a $f_* \circ f^m \equiv f_*(f^m)'$. Par conséquent $(f^* \circ f^m)' \equiv (f^*)'$ sur U_{z_0} . Donc il existe $w \in B_{p^{-n}}(0)$ tel que $f^* \circ f^m \equiv f^* + w$. Alors

$$f_*(z_0) = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{f^{mn}(z_0) - z_0}{mn} = \lim_{|n|_p \rightarrow 0} \frac{(f^*)^{-1}(nw) - (f^*)^{-1}(0)}{mn} = \frac{w}{m} f_*(z_0).$$

Comme $f_*(z_0) \neq 0$ on a $w = m$. Par conséquent $f^* \circ f^m \equiv f^* + m$ sur U_{z_0} . □

3.3. Points périodiques indifférents. — Dans cette section on considère la dynamique au voisinage des points périodiques indifférents. Il suffit bien sûr de considérer le cas des points fixes. On considère le groupe (pour la composition) $I(\mathbb{C}_p)$ des séries f à coefficients dans \mathbb{C}_p de la forme

$$f(z) = \lambda z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots, \quad \text{où } |\lambda| = 1$$

qui convergent au voisinage de 0. Comme dans la Section 3.1 on définit, pour $f(z) \neq \lambda z$,

$$r(f) = \left(\sup_{k \geq 1} |a_k|^{1/k} \right)^{-1} < \infty.$$

Proposition 3.18. — Soit $f \in I(\mathbb{C}_p)$ une série différentielle de λz . Alors f est convergente sur $B_{r(f)}(0)$ et on a les propriétés suivantes.

- (i) $B_{r(f)}(0) \subset \mathcal{E}(f)$.
- (ii) $r(f) = \sup\{r \mid f \text{ est convergente sur } B_r(0) \text{ et } f(B_r(0)) \subset B_r(0)\}$.

Démonstration. — La preuve de (ii) est similaire à celle de la Proposition 3.2 de la Section 3.1. L'assertion (i) résulte du corollaire du Lemme 3.11 de la section précédente. \square

On s'intéresse d'abord aux points périodiques de f dans $B_{r(f)}(0)$. Dans la Section 3.3.1 on considère la structure du groupe $I(\mathbb{C}_p)$. On verra que si $R \in I(\mathbb{C}_p)$ est une fonction rationnelle, alors on a $r(R) \in |\mathbb{C}_p|$; voir Lemme 4.11 dans la Section 4.1.

Considérons dans la suite une série $f \in I(\mathbb{C}_p)$ telle que $r(f) \in |\mathbb{C}_p|$. Après changement de coordonnée on peut supposer que $r(f) = 1$. Alors $f \in \mathcal{O}_K[[z]]$, c'est-à-dire f est à coefficients entiers. Quitte à changer f par un itéré on peut supposer en plus que $|f'(0) - 1| < 1$. On verra que dans ce cas tous les points périodiques de f dans $B_{r(f)}(0)$ ont une période primitive de la forme p^n , où $n \geq 0$; voir [Li1].

Rappelons que le degré de Weierstrass d'une série $g(z) = a_0 + a_1 z + \dots \in \mathcal{O}_K[[z]]$, noté $\text{wideg}(g)$, est le plus petit entier $d \geq 0$ tel que $|a_d| = 1$. Si d est fini alors d est égal au nombre des zéros de g dans $\{|z| < 1\}$, comptés avec multiplicité. De façon équivalente $\text{wideg}(g)$ est égal à $\text{ord}_{\tilde{g}}(0)$ où \tilde{g} dénote la réduction de g . Par conséquent pour $n \geq 1$ le nombre

$$\text{wideg}(f^n - \text{id}) = \text{ord}_{\tilde{f}^n - \text{id}}(0) \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$$

est égal au nombre de points fixes de f dans $\{|z| < 1\}$. Donc pour connaître le nombre des points périodiques de f dans $\{|z| < 1\}$ d'une période primitive donnée, il suffit d'étudier la suite $\{\text{wideg}(f^n - \text{id})\}_{n \geq 1}$.

La condition $|f'(0) - 1| < 1$ est équivalente à ce que \tilde{f} soit tangente à l'identité en zéro. De plus notons que si $\tilde{f}(z) = z + a_m z^{m+1} + \dots$, alors $\text{wideg}(\tilde{f} - \text{id}) = m + 1$ et pour tout entier k ,

$$\tilde{f}^k(z) = z + \tilde{k} a_m z^{m+1} + \dots$$

Par conséquent $\text{wideg}(\tilde{f}^k - \text{id}) = \text{wideg}(\tilde{f} - \text{id})$, pour tout entier k qui n'est pas divisible par p . Donc tous les points périodiques de f dans $\{|z| < 1\}$ de période k sont des points fixes. Plus généralement tous les points périodiques de f dans $\{|z| < 1\}$ de période $k p^n$, avec $n \geq 0$ et k qui n'est pas divisible par p , sont aussi de points périodiques de période p^n .

Par conséquent tous les points périodiques de f dans $\{|z| < 1\}$ ont une période primitive de la forme p^n , avec $n \geq 0$. Donc il suffit d'étudier la suite

$$i_m = \text{widedeg}(f^{p^m} - \text{id}), \text{ pour } m \geq 0.$$

Théorème (Sen [Se]). — Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[x]]$ une série telle que $|f'(0) - 1| < 1$. Si $n > 0$ est tel que $i_n < \infty$, alors $i_n \equiv i_{n-1} \pmod{p^n}$.

Voir aussi [Lu2] et [Li1]. Le théorème suivant de Keating [Ke] décrit des cas où l'on peut connaître explicitement la suite i_m . On utilise ce théorème dans l'exemple 5.15 de la Section 5.2.

Théorème (Keating [Ke]). — Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[x]]$ une série telle que $i_0 = 2$ et $i_1 = 2 + bp$ avec $0 < b < p - 1$. Alors

$$i_m = 2 + bp + bp^2 + \dots + bp^m,$$

pour tout $m \geq 1$.

Exemple 3.19. — Considérons la série $g(z) = z + z^2 + az^3 + \dots \in \mathbb{F}_p[[z]]$. On va montrer que si $p > 2$ alors $g^p(z) = z - (a - 1)z^{p+2} + \dots$. Par conséquent si une série $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[z]]$ a g comme réduction et $a \neq 1$, alors f vérifie les hypothèses du Théorème de Keating avec $b = 1$. Donc $i_m = 1 + (1 + p + \dots + p^m)$ dans ce cas.

On suppose alors que $p > 2$ et on pose $T(\varphi) = \varphi \circ f - \varphi$, qui est linéaire en φ . Soit $\varphi_0(z) = z$ et $\varphi_{k+1} = T^k(\varphi_0)$ de telle façon que $\varphi_1(z) = z^2$ et $g^p(z) = z + \varphi_p(z)$. Pour $l \geq 1$ on a,

$$T(z^l) = (z(1 + z + az^2 + \dots))^l - z^l = lz^{l+1} + \left(\frac{l(l-1)}{2} + la\right)z^{l+2},$$

et en particulier $T(z^p) = z^{2p} + \dots$. Donc $\varphi_k(z) = k!z^{k+1} + \dots$, pour $0 \leq k < p$, et si on pose $\varphi_{p-2}(z) = (p-2)!z^{p-1}z^{p-1} + \alpha z^p + \dots$ on a,

$$\begin{aligned} \varphi_{p-1}(z) &= T(\varphi_{p-2}(z)) = (p-2)!T(z^{p-1}) + \alpha T(z^p) + \dots \\ &= (p-1)!z^p + (p-1)! \left(\frac{p-2}{2} + a\right)z^{p+1} + \dots \end{aligned}$$

Comme $p > 2$ on a $(p-2)/2 = -1$, $2p > p+2$ et $(p-1)! = 1$. Donc

$$\varphi_p(z) = T(\varphi_{p-1}(z)) = -(a-1)z^{p+2} + \dots$$

Exemple 3.20. — Considérons le polynôme $P(z) = z + z^p \in \mathbb{F}_p[z]$. On peut montrer par induction

$$P^n(z) = z + \binom{n}{1}z^p + \dots + \binom{n}{n}z^{p^n}.$$

Par conséquent $\text{ord}(P^n(z) - z)$ est égal à p^k , la plus grande puissance de p qui divise n . En particulier $\text{ord}(P^{p^m} - z) = p^{p^m}$.

Donc une série $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[x]]$ telle que $\tilde{f} = P$ vérifie $i_n = \text{wideg}(f^{p^n} - \text{id}) = p^{p^n}$. Si $p = 2$ on a $i_0 = 2$, $i_1 = 4 = 2 + 2b$ avec $b = 1$ et

$$i_m = 2^{2^m} \gg 2^{m+1} = 2 + b(2 + 2^2 + \cdots + 2^m).$$

Si f est à coefficients dans un corps algébrique K et $f(z) \neq \lambda z$ alors f a un nombre fini de points périodiques dans $\{z \in K \mid |z| < 1\}$. En effet, dans ce cas la complétion \widehat{K} de K par $|\cdot|$ est localement compacte, donc $\{z \in \widehat{K} \mid |z| < 1\} \subset \mathcal{E}(f)$ est compact et comme les points périodiques de f dans $\mathcal{E}(f)$ coïncident avec les zéros de $f_* \in \mathcal{H}(\mathbb{D}_p)$ il ne peut avoir qu'un nombre fini de points périodiques de f dans $\{z \in K \mid |z| < 1\}$.

De plus on a les résultats suivants de Lubin ([**Lu1**], Corollaire 4.3.1) et Li ([**Li1**], Théorème 4.3).

Théorème (Lubin [Lu1**]).** — Soient $K \subset \mathbb{C}_p$ est un corps à valuation discrète et $f \in \mathcal{O}_K[[x]]$ est une série telle qu'il existe $n > 0$ avec $\text{wideg}(f^n - \text{id}) = \infty$ et $f^n \neq \text{id}$. Alors f a un nombre fini de points périodiques dans $\{z \in K \mid |z| \leq 1\}$.

Théorème (Li [Li1**]).** — Soient $K \subset \mathbb{C}_p$ un corps à valuation discrète et $f \in \mathcal{O}_K[[x]]$ une série telle que $|f'(0) - 1| < 1$. Si f a un point périodique de période primitive p^m alors $p^m - p^{m-1} \leq e$, où e est le degré de ramification de K sur \mathbb{Q}_p .

Remarque 3.21

(1) En général, si $f \in I(\mathbb{C}_p)$ on peut avoir $r(f^n) > r(f)$. Par exemple la série $f(z) = -z(1 + 2z + 4z^2 + \cdots) = z/(2z - 1)$ est telle que $f^2 = \text{id}$ donc, $r(f^2) = \infty > |1/2|_p = r(f)$.

(2) Comme le montre $f(z) = z + z^2 + z^3 + \cdots = z/(1 - z)$, en général $B_{r(f)}(0)$ ne peut contenir que 0 comme point périodique de f .

3.3.1. Conjugaison locale des points périodiques indifférents. — La classe de conjugaison et les centralisateurs du groupe $I(\mathbb{C}_p)$ ont une structure très simple et bien connue; voir [**Lu1**]. C'est la même structure que pour le groupe formel correspondant : pour tous f et $g \in I(\mathbb{C}_p)$, f est localement conjugué à g si et seulement si f est formellement conjugué à g . Dans cette section on rappelle brièvement les principaux résultats.

L'étude des classes de conjugaison du groupe $I(\mathbb{C})$ est beaucoup plus subtile; voir [**Ec1**], [**Vo**] et [**Y**]. Par exemple toute série $f \in I(\mathbb{C}_p)$ telle que $f'(0)$ n'est pas une racine de l'unité est localement linéarisable; voir par exemple [**HY**] et [**Lu1**], [**TVW**], [**AV**]. Dans le cas complexe ce n'est pas toujours le cas et il y a des problèmes de petit diviseurs assez délicats; voir [**Y**].

Pour $\lambda \in \mathbb{C}_p$ avec $|\lambda| = 1$ on définit $\text{ord}(\lambda)$ comme le plus petit entier positif tel que $\lambda^n = 1$, si λ est une racine de l'unité et $\text{ord}(\lambda) = \infty$ sinon. Soit $f \in I(\mathbb{C}_p)$ et on pose $\lambda = f'(0)$. Si $\text{ord}(\lambda) = q < \infty$ on définit $\text{valit}(f) = \infty$ si $f^q \equiv \text{id}$ et $\text{valit}(f) = n \geq 1$

sinon, où n est l'entier tel que

$$f^q(z) = z + az^{n+1} + \dots, \text{ avec } a \neq 0.$$

L'entier n est alors un multiple de q . Dans ce dernier cas on a $f_*(z) = (a/q)z^{n+1} + \dots$ et on note $\text{resit}(f)$ le résidu de $1/f_*$ en 0. Soient f et $g \in I(\mathbb{C}_p)$ avec $\lambda = f'(0)$.

- Si $\text{ord}(\lambda) = \infty$ alors f et g sont conjugués si et seulement si $g'(0) = \lambda$.
- Si $\text{ord}(\lambda) = q < \infty$ et $f^q \equiv \text{id}$, alors f et g sont conjugués si et seulement si $g'(0) = \lambda$.
- Si $\text{ord}(\lambda) = q < \infty$ et $\text{valit}(f) < \infty$ alors f et g sont conjugués si et seulement si $g'(0) = \lambda$, $\text{valit}(f) = \text{valit}(g)$ et $\text{resit}(f) = \text{resit}(g)$.

Dans ce dernier cas f est conjugué à un unique polynôme de la forme $\lambda z(1+z^n+az^{2n})$, avec $a \in \mathbb{C}_p$. Soient $f \in I(\mathbb{C}_p)$, $m \geq 1$ et $\zeta \in \mathbb{C}_p$ tels que $\zeta^m = f'(0)$.

- Si $\text{ord}(\zeta) = \infty$ il existe un unique $g \in I(\mathbb{C}_p)$ tel que $g'(0) = \zeta$ et $g^m = f$.
- Si $\text{ord}(\zeta) = q < \infty$ et $f^q \equiv \text{id}$ il existe $g \in I(\mathbb{C}_p)$ tel que $g'(0) = \zeta$ et $g^m = f$.
- Si $\text{ord}(\zeta) = q < \infty$ et $\text{valit}(f) < \infty$ alors il existe $g \in I(\mathbb{C}_p)$ tel que $g'(0) = \zeta$ et $g^m = f$ si et seulement si $q|\text{valit}(f)$. La série g est alors unique.

Soient $f, g \in I(\mathbb{C}_p)$.

- Si $f_*, g_* \neq 0$ alors f et g commutent si et seulement s'il existe $w \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ tel que $f_* = wg_*$.
- Si f est linéarisable, son centralisateur se déduit par conjugaison de celui de sa partie linéaire.
- Si $\text{ord}(f'(0)) = q < \infty$ et $\text{valit}(f) = \infty$ posons $\bar{f} = f^q$ et définissons pour $\text{ord}(\zeta)|\text{valit}(f)$ la série $f_\zeta \in I(\mathbb{C}_p)$ par $f'_\zeta(0) = \zeta$ et $f_\zeta^{\text{ord}(\zeta)} = \bar{f}$. Alors $g \in I(\mathbb{C}_p)$ commute avec f si et seulement s'il existe ζ (avec $\text{ord}(\zeta)|\text{valit}(f)$) et $w \in \mathbb{C}_p$ tels que

$$g = f_\zeta \circ \bar{f}^{\circ w} = \bar{f}^{\circ w} \circ f_\zeta.$$

4. Dynamique des fonctions rationnelles

Cette partie est dédiée à l'étude de la dynamique globale d'une fonction rationnelle.

Dans la Section 4.1 on étudie les bassins d'attraction et dans la Section 4.2 on étudie les propriétés globales du domaine de quasi-périodicité d'une fonction rationnelle.

On a la partition usuelle en ensembles de Fatou et de Julia comme dans le cas complexe ; voir Section 4.3. Dans la Section 4.4 on montre le Théorème de Classification caractérisant la dynamique de l'ensemble de Fatou. De plus on fait une conjecture de non-errance et une conjecture sur la structure de l'ensemble de Fatou. Dans la Section 4.5 on considère une classe de fonctions rationnelles dites *simples*, qui ont une dynamique particulièrement élémentaire.

On considère d'abord les propriétés de la dynamique d'une fonction rationnelle à coefficients algébriques qui ne dépendent pas d'une valuation donnée. Plus concrètement on s'intéresse aux points périodiques. Il y a une grande littérature à ce sujet et on renvoie le lecteur aux bibliographies de [MS2] et [Be]. On a la propriété suivante.

Théorème (Northcott [No]). — *Une fonction rationnelle à coefficients sur un corps algébrique a un nombre fini de points prépériodiques.*

Ce théorème vaut en dimension quelconque ; voir aussi Lewis [Le]. On donne une nouvelle démonstration de ce théorème (en dimension 1) à l'aide du logarithme itératif ; voir remarque dans la Section 4.5.

Il y a deux types de cycles dont la nature ne dépend pas de d'une valuation : les cycles *super-attractifs* qui sont ceux pour lesquels le multiplicateur est égal à zéro et les cycles *paraboliques*, qui sont ceux pour lesquels le multiplicateur est une racine de l'unité ; voir Section 3.

D'après un théorème de Fatou tout cycle attractif ou parabolique, d'une fonction rationnelle complexe de degré au moins deux, attire au moins un point critique par itération ; voir [Fa]. Comme une fonction rationnelle de degré $d > 1$ a au plus $2d - 2$ points critiques on obtient :

Théorème (Fatou [Fa]). — *Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors le nombre de cycles attractifs ou paraboliques est majoré par $2 \deg(R) - 2$.*

Il y a une amélioration de ce théorème par Shishikura qui dit que le nombre de cycles non-répulsifs d'une fonction rationnelle complexe de degré $d \geq 2$ est majoré par $2d - 2$; voir [Sh] et une nouvelle démonstration de A. Epstein [Ep].

Cette propriété est loin d'être vraie dans le cas p -adique. Par exemple le polynôme $z^p \in \mathbb{C}_p[z]$ a une infinité de cycles attractifs ; voir Section 4.1.1. D'autre part, une fonction rationnelle à coefficients sur \mathbb{C}_p a un cycle indifférent, alors elle en a une infinité ; voir Corollaire 5.17.

Par le principe de Lefschetz on la une propriété analogue au Théorème de Fatou pour les fonctions rationnelles à coefficients dans \mathbb{C}_p .

Théorème 1. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors le nombre de cycles super-attractifs et paraboliques de R est au plus $2d - 2$.*

Démonstration. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré $d \geq 2$ et considérons $k \geq 0$ cycles super-attractifs ou paraboliques. Considérons l'ensemble T des coefficients de R et des points périodiques super-attractifs et paraboliques en question. Comme T est un ensemble fini le corps $\mathbb{Q}(T)$ a un degré de transcendance fini sur \mathbb{Q} et par conséquent il existe une immersion $i : \mathbb{Q}(T)(z) \rightarrow \mathbb{C}(z)$. Alors la fonction rationnelle image $i(R) \in \mathbb{C}(z)$ a au moins k cycles super-attractifs ou paraboliques et donc, par le théorème de Fatou on a $k \leq 2d - 2$. \square

Si l'on considère seulement des cycles super-attractifs et paraboliques, alors l'énoncé du théorème de Fatou est purement algébrique. Cependant la démonstration de Fatou, ainsi que celle de A. Epstein, utilise des méthodes complexes. Il serait souhaitable d'avoir une démonstration de ce théorème (disons pour les fonctions rationnelles à coefficients algébriques) qui soit purement algébrique.

Remarque 4.1. — Dans le théorème de Fatou ci-dessus (et donc dans le Théorème 1), on peut compter les cycles super-attractifs et paraboliques avec multiplicité comme suit. Si z_0 est un point périodique super-attractif de période primitive n , alors la multiplicité du cycle correspondant est $\deg_{R^n}(z_0) - 1$. Si z_0 est un point périodique parabolique de période primitive n , alors la multiplicité de son cycle est $\text{valit}(R^n, z_0)/\text{ord}(R^n, z_0)$ dans la notation de la Section 3.3.1. C'est-à-dire, si l'on considère une coordonnée telle que $z_0 = 0$ et si $(R^n)'(0)$ est une racine primitive $q^{\text{ième}}$ de l'unité; alors la multiplicité est égal à l'entier N/q , où N est déterminé par $(R^{nq})(z) = z(1 + az^N + \dots)$, avec $a \neq 0$.

4.1. Domaines d'attraction. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un point fixe attractif de R . Rappelons que

$$\mathcal{W}_R^s(z_0) = \{z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \mid d(R^n(z), R^n(z_0)) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty\}$$

est le bassin d'attraction de z_0 pour R ; voir Section 3.1. Notons que

$$R^{-1}(\mathcal{W}_R^s(z_0)) = \mathcal{W}_R^s(z_0).$$

Par conséquent R envoie une composante analytique de $\mathcal{W}_R^s(z_0)$ sur une composante analytique de $\mathcal{W}_R^s(z_0)$; voir Proposition 2.6.

Définition 4.2. — Soient $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et z_0 un point périodique attractif de R . Alors la composante analytique de $\mathcal{W}_R^s(z_0)$ qui contient z_0 est appelée le bassin d'attraction immédiat de z_0 et composante attractive de R .

Définition 4.3. — On dit qu'un espace analytique connexe X est de type Cantor si l'arbre \mathcal{A}_X de X est non-vide et si \mathcal{A}_X satisfait les propriétés suivantes

- (1) Toute arête de \mathcal{A}_X a deux extrémités dans \mathcal{A}_X .
- (2) Pour tout point \mathcal{S} de \mathcal{A}_X et $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on a $D_{\mathcal{P}} \cap X \neq \emptyset$.

La condition 2 implique que pour tout sommet \mathcal{S} de \mathcal{A}_X il existe au moins trois arêtes ayant \mathcal{S} comme extrémité; en particulier \mathcal{A}_X a une infinité de sommets. Dans la notation de la Section 1.2.3, la condition 2 de la définition se traduit par $n_{\mathcal{S}} = 0$ pour tout point \mathcal{S} de \mathcal{A}_X .

Par exemple le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'un ensemble de Cantor est un espace analytique connexe de type Cantor; voir l'exemple 1.3 (vii) où l'on considère l'arbre de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ et voir l'exemple 6.1 où on considère un polynôme ayant $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ comme bassin d'attraction immédiat de l'infini.

On fixe pour le reste de cette section une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins deux et un point fixe attractif z_0 de R .

Théorème 2. — Notons C le bassin d'attraction immédiat de z_0 et $D \subset \mathcal{W}_R^s(z_0)$ un disque tel que $z_0 \in R(D) \subset D$. Pour $n \geq 0$ notons X_n la composante connexe de l'affinoïde ouvert $R^{-n}(D)$ qui contient z_0 . On a alors $C = \cup_{n \geq 0} X_n$. De plus il y a deux cas :

- (1) C est un disque rationnel ouvert.
- (2) C est un espace analytique de type Cantor.

La démonstration de ce théorème est à la fin de cette section. Supposons que le point fixe attractif z_0 ait un bassin d'attraction immédiat \tilde{D} au sens de la Section 3.1. Alors \tilde{D} est une boule ouverte (Lemme 4.11 ci-dessous). Notons X la composante de $R^{-1}(\tilde{D})$ qui contient \tilde{D} . On a $X = \tilde{D}$ sinon il existe $r > r(R)$ tel que le disque ouvert D_1 de centre z_0 et rayon r soit contenu strictement dans X ; alors $R(D_1)$ est contenu strictement dans $R(X) = \tilde{D} \subset D_1$. Par conséquent \tilde{D} est la composante analytique de $\mathcal{W}_R^s(z_0)$ qui contient z_0 .

Corollaire 4.4. — Il existe $d > 1$ tel que $R : C \rightarrow C$ est de degré d . En particulier $R(C) = C$.

Démonstration. — Par la Proposition 2.6 il existe $d_n \geq 1$ tel que $R : X_n \rightarrow X_{n-1}$ est de degré d_n . Il est facile de voir que $d_{n+1} \geq d_n$ et par conséquent $d_n = d \geq 1$ pour n assez grand. Alors $R : C \rightarrow C$ est de degré d .

Si C est un disque alors $d > 1$, car sinon z_0 est indifférent. Si C n'est pas un disque alors il existe n tel que X_n est un disque et X_{n+1} ne l'est pas. Par conséquent $d \geq d_n > 1$. □

Corollaire 4.5. — Si $\lambda = R'(z_0) \neq 0$ il existe $\varphi \in \mathcal{H}(C)$ tel que $\varphi \circ R = \lambda\varphi$ et $\varphi(C) = \mathbb{C}_p$.

Démonstration. — Par (i) de la Proposition 3.3 il existe $\varphi \in \mathcal{H}(D)$ tel que $\varphi \circ R = \lambda\varphi$ sur D . Comme pour tout $n \geq 0$ on $R^n(X_n) = X_0 = D$ on obtient que $\varphi = \lambda^{-n}\varphi \circ R^n \in \mathcal{H}(X_n)$. Comme $C = \cup_{n \geq 0} X_n$ et $X_n \subset X_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$ on a $\varphi \in \mathcal{H}(C)$ et $\varphi \circ R = \lambda\varphi$. De plus notons que $\varphi(X_n) = \lambda^{-n}\varphi(X_0)$ donc $\varphi(C) = \varphi(\cup_{n \geq 0} X_n) = \mathbb{C}_p$. □

Corollaire 4.6. — Si $X \subset \mathcal{W}_R^s(z_0)$ est un affinoïde fermé, alors $\{R^n\}_{n \geq 1}$ converge vers z_0 uniformément sur X .

Démonstration. — Si le disque $D \subset C$ contenant z_0 est suffisamment petit, l'assertion est vraie ; par conséquent il suffit de montrer qu'il existe n tel que $R^n(X) \subset D$. On peut supposer que l'affinoïde X est connexe et, quitte à remplacer R par un itéré on peut supposer $X \cap D \neq \emptyset$, et par conséquent $X \subset C = \cup_{n \geq 0} X_n$. Par conséquent il existe n tel que $X \subset X_n$ et $R^n(X) \subset D$. □

4.1.1. *Bassins et points critiques.* — Dans le cas complexe il y a un théorème du à Fatou qui dit que tout bassin d'attraction immédiat d'un cycle attractif contient un point critique. Ceci n'est pas vrai dans le cadre présent, par exemple tous les cycles de $z^p \in \mathbb{C}_p(z)$ sont attractifs et par conséquent il y a des cycles qui n'attirent aucun point critique; voir aussi exemple 6.2. Mais on a le corollaire suivant du Théorème 2.

Corollaire 4.7. — *Si le bassin d'attraction immédiat C est un disque et ne contient pas de points critiques, alors R a une infinité de points périodiques attractifs et le degré de $R : C \rightarrow C$ est divisible par p .*

Démonstration. — On suppose que $C = \{|z| < 1\}$ et on note \tilde{R} la réduction de R . Alors $\text{wideg}(R') = \infty$, donc $\tilde{R}' \equiv 0$ et par conséquent le degré de $R : C \rightarrow C$ est divisible par p . Par le Corollaire 4.4 on a $\text{deg}(\tilde{R}) > 1$ et par (iii) de la Proposition 2.4 il existe une infinité de $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ périodiques par \tilde{R} tels que $R^n(D_\alpha) = D_{\tilde{R}^n(\alpha)}$ où $n = n(\alpha)$ est la période de α et D_α dénote $\{z \mid \tilde{z} = \alpha\}$. Par le lemme de Hensel, chacun de ces D_α contient un point périodique attractif de R et par conséquent il y en a une infinité. Voir aussi la démonstration de (ii) de la Proposition 4.32. \square

On conjecture que cette propriété est aussi vraie dans le cas où C est de type Cantor. Ceci impliquerait que le nombre de cycles attractifs est, soit infini, soit majoré par le nombre de points critiques (et donc au plus $2 \text{deg}(R) - 2$), voir Corollaire 4.9 ci-dessous. On remarque qu'il y a des fonctions rationnelles ayant un bassin d'attraction immédiat de type Cantor (d'un point fixe) qui ne contient pas des points critiques; voir exemple 6.2.

Proposition 4.8. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors R a au plus $\text{deg}(R) - 1$ cycles de bassins d'attraction immédiat de type Cantor.*

Corollaire 4.9. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Si R a plus de $3 \text{deg}(R) - 3$ cycles attractifs, alors R en a une infinité.*

Démonstration. — Supposons que R a un nombre fini de cycles attractifs. Par le Corollaire 4.7 chaque cycle ayant un disque comme bassin d'attraction immédiat attire au moins un point critique de R , et par conséquent il y a au plus $2 \text{deg}(R) - 2$ tels cycles. Par la proposition il y a au plus $\text{deg}(R) - 1$ cycles attractifs avec bassin d'attraction immédiat qui n'est pas un disque. \square

La démonstration de la Proposition 4.8 se base sur le lemme suivant; voir [Be].

Lemme 4.10

(1) *Soient X un affinoïde fermé connexe non-vide et $V \subset X$ un affinoïde ouvert. Alors le nombre de composantes connexes de l'affinoïde fermé $X - V$ est égal au nombre de bouts de V .*

(2) Soient V_1, \dots, V_n des affinoïdes ouverts disjoints ayant chacun au moins deux bouts. Alors l'affinoïde fermé $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - V_1 \cup \dots \cup V_n$ a au moins $n + 1$ composantes connexes.

(3) Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ une fonction rationnelle de degré $d \geq 1$ et D_1, \dots, D_n disques disjoints deux à deux tels que $R^{-1}(D_i)$ n'est pas une union de disques, pour $1 \leq i \leq n$. Alors $n \leq d - 1$.

Démonstration

(1) Pour chaque bout \mathcal{P} de V l'ensemble $B_{\mathcal{P}} \cap X$ est un affinoïde fermé connexe non-vide. Par conséquent le nombre de composantes connexes de

$$X - V = \sqcup_{\mathcal{P}} \text{bout de } V B_{\mathcal{P}} \cap X$$

est égal au nombre de bouts de V .

(2) Par la partie 1 et par induction en n .

(3) On pose $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - (D_1 \sqcup \dots \sqcup D_n)$. Par hypothèse, pour chaque $1 \leq i \leq n$ il existe une composante connexe V_i de $R^{-1}(D_i)$ qui n'est pas un disque. Par la partie 2, $R^{-1}(X)$ a au moins $n + 1$ composantes connexes. Par conséquent $n + 1 \leq \deg(R) = d$, d'où $n \leq d - 1$. \square

Démonstration de la Proposition 4.8. — Soit z_0 un point périodique de R de période primitive k , soit D un disque qui contient z_0 et contenu dans le bassin d'attraction immédiat de z_0 . De plus soit X_l la composante connexe de $R^{-l}(D)$ qui intersecte le cycle de z_0 . Alors les bassins d'attraction immédiats des points du cycle de z_0 sont de type Cantor si et seulement si il existe l tel que X_l est un disque et X_{l+1} ne l'est pas. Donc si l'y a n cycles attractifs avec bassin d'attraction immédiat de type Cantor, on peut trouver des disques D_1, \dots, D_n deux à deux disjoints tels que $R(D_i)^{-1}$ n'est pas une union de disques. Donc par le point 3 du lemme précédent on a $n \leq d - 1$. \square

4.1.2. *Preuve du Théorème 2.* — La preuve du Théorème 2 dépend des lemmes suivants.

Lemme 4.11. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R(0) = 0$ et $|R'(0)| \leq 1$ et soit $r(R)$ comme dans la Section 3.1. Alors $r(R) \in |\mathbb{C}_p|$.

Démonstration. — On pose $R(z) = a_0 + a_1z + \dots$. Soit il existe i tel que $|a_i|(r(R))^i = 1$ et le résultat est clair; soit $r(R)$ est le rayon de convergence de la série $a_0 + a_1z + \dots$ qui est donc égal à la plus petite norme d'un pôle et par conséquent $r(R) \in |\mathbb{C}_p|$. \square

Lemme 4.12. — Soit $\{X_n\}_{n \geq 0}$ une suite croissante d'affinoïdes ouverts connexes et soit $C = \cup_{n \geq 0} X_n$, qui est un espace analytique connexe. Supposons que pour tout bout \mathcal{P} de X_n on a $B_{\mathcal{P}} \not\subset C$ et il existe de bouts \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 de X_{n+1} tels que $B_{\mathcal{P}_0} \subset B_{\mathcal{P}}$ et $B_{\mathcal{P}_1} \subset B_{\mathcal{P}}$. Alors C est de type Cantor.

Démonstration. — Si \mathcal{S} est un système projectif tel que $\mathcal{S} \prec C$ alors il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{S} \prec X_n$. De plus si $\mathcal{S} \prec X_n$ n'est pas un point de \mathcal{A}_{X_n} , alors \mathcal{S} n'est pas un point de \mathcal{A}_C , donc $\mathcal{A}_C \subset \cup_{n \geq 0} \mathcal{A}_{X_n}$. Par définition pour tout point (resp. sommet) \mathcal{S} de \mathcal{A}_{X_n} , il existe des bouts $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}$ distincts, tels que $D_{\mathcal{P}_i} \not\subset X_n$, $i = 0, 1$ (resp. $i = 0, 1, 2$); donc pour chaque \mathcal{P}_i il existe un bout \mathcal{Q}_i de X_n tel que $B_{\mathcal{Q}_i} \subset D_{\mathcal{P}_i}$. Par hypothèse $B_{\mathcal{Q}_i} \not\subset C$, donc \mathcal{S} est un point (resp. sommet) de \mathcal{A}_C et par conséquent $\mathcal{A}_C = \cup_{n \geq 0} \mathcal{A}_{X_n}$. Alors notons que C satisfait la propriété 2 car chaque X_n , étant un affinoïde ouvert connexe, la satisfait.

Pour montrer la propriété 1 il suffit de montrer que pour toute arête I de \mathcal{A}_C , chaque composante B de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - C_I$ intersecte C . Soit $\mathcal{S} \in I$ et n tel que $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_{X_n}$. Si $B \cap X_n = \emptyset$ alors il existe un bout \mathcal{P} de X_n tel que $B \subset B_{\mathcal{P}}$. Par hypothèse le nombre de bouts \mathcal{Q} de X_{n+1} tels que $B_{\mathcal{Q}} \subset B_{\mathcal{P}}$ est au moins deux, donc $B_{\mathcal{Q}} \subset B$ et $B \cap X_{n+1} \neq \emptyset$. □

Lemme 4.13. — Soit $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et \mathcal{P} un bout tel que $B_{\mathcal{P}} \subset B_{Q(\mathcal{P})}$ et $\mathcal{P} \neq Q(\mathcal{P})$. Alors $B_{\mathcal{P}}$ contient un point fixe de Q .

Démonstration. — Après changement de coordonnée on suppose que $B_{\mathcal{P}} = \{|z| \leq 1\}$ et $B_{Q(\mathcal{P})} = \{|z| \leq r\}$ où $r \in |\mathbb{C}_p|$ est tel que $r > 1$. Par le Lemme 2.3, $(Q - \text{id})(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et par le Corollaire 2.2 on a $\{|z| \leq r\} \subset (Q - \text{id})(B_{\mathcal{P}})$. Par conséquent il existe $z_0 \in B_{\mathcal{P}}$ tel que $Q(z_0) - z_0 = 0$. □

Démonstration du Théorème 2. — Soit \tilde{C} le bassin d'attraction immédiat de z_0 ; on a donc $C \subset \tilde{C}$. Il y a deux cas.

Cas 1. — X_n est un disque pour tout $n \geq 0$. Alors $C = \cup_{n \geq 0} X_n$ est un disque. Considérons $r > 0$ et une coordonnée telle que $z_0 = 0$ et $C = \{|z| < r\}$. Comme $R(C) = C$ le développement en série de R est convergent dans C . Considérons $r(R) > 0$ comme dans la Section 3.1; on a $r \leq r(R)$ par la Proposition 3.2. D'autre part pour tout $s < r(R)$ il existe n tel que $R^n(B_s(0)) \subset X_0$ et donc $B_s(0) \subset X_n \subset B_{r(R)}(0)$; on conclut que $r = r(R)$. Par le Lemme 4.11 on a $r(R) \in |\mathbb{C}_p|$, donc après changement de coordonnée on peut supposer $C = \{|z| < 1\}$.

Considérons la réduction \tilde{R} de R et $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$ le système projectif canonique. On va montrer que $\tilde{C} = \{|z| < 1\}$. Il suffit de montrer qu'il existe une infinité de $\xi \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tels que $D_{\mathcal{P}(\xi)} \cap \mathcal{W}_R^s(0) = \emptyset$. Par (iii) de la Proposition 2.4 il suffit de montrer il existe une infinité de points périodiques de \tilde{R} dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Ceci est immédiat car $\text{deg}(\tilde{R}) > 1$.

Cas 2. — Il existe n_0 tel que X_{n_0} n'est pas un disque. On suppose sans perte de généralité que $n_0 = 1$, de telle façon que X_0 est un disque. Soit \mathcal{P}_0 le bout de X_0 ; notons que X_1 a au moins deux bouts. De plus pour chaque bout \mathcal{Q} de X_1 on a $B_{\mathcal{Q}} \subset B_{\mathcal{P}_0}$ et $\mathcal{Q} \neq \mathcal{P}_0$.

Comme pour tout bout \mathcal{P} de X_n on a $R^n(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$, il existe au moins deux bouts \mathcal{Q}_0 et \mathcal{Q}_1 de X_{n+1} tels que $B_{\mathcal{Q}_i} \subset B_{\mathcal{P}}$, pour $i = 0, 1$. De plus $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_0$ et $R^n(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0$ donc $B_{\mathcal{P}} \subset B_{R^n(\mathcal{P})}$ et par le Lemme 4.13 la fonction rationnelle R^n a un point fixe dans $B_{\mathcal{P}}$. Par conséquent $B_{\mathcal{P}} \not\subset \mathcal{W}_R^s(z_0)$ et en particulier $B_{\mathcal{P}} \not\subset \tilde{C}$ et $B_{\mathcal{P}} \not\subset C$. Donc C satisfait les hypothèses du Lemme 4.12 et par conséquent C est un espace analytique de type Cantor.

Il reste à montrer que $C = \tilde{C}$. Soit X un affinoïde fermé connexe qui intersecte $X_0 \subset C$ et $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - C$. Soit \mathcal{P}_n un bout de X_n défini par induction (\mathcal{P}_0 est le bout de X_0) tel que $B_{\mathcal{P}_{n+1}} \subset B_{\mathcal{P}_n}$ et tel que $B_{\mathcal{P}_n} \cap X \neq \emptyset$. Par le raisonnement précédent on a $B_{\mathcal{P}_n} \not\subset X$.

Soit D_0 une composante connexe de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X$. Alors, soit $D_0 \cap (B_{\mathcal{P}_n} - B_{\mathcal{P}_{n+1}}) = \emptyset$, soit $D_0 \subset B_{\mathcal{P}_n} - B_{\mathcal{P}_{n+1}}$. Comme le nombre de composantes connexes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - X$ est fini il existe n tel que $B_{\mathcal{P}_n} - B_{\mathcal{P}_{n+1}} \subset X$. Par le raisonnement précédent il existe un bout \mathcal{Q} de X_{n+1} tel que $B_{\mathcal{Q}} \subset B_{\mathcal{P}_n} - B_{\mathcal{P}_{n+1}} \subset X$. Mais on a montré que $B_{\mathcal{Q}} \not\subset \mathcal{W}_R^s(z_0)$. Donc $X \not\subset \mathcal{W}_R^s(z_0)$. Par conséquent $C = \tilde{C}$. \square

4.2. Domaine de quasi-périodicité. — Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. On note par $\mathcal{E}(R)$ l'ensemble de points $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels qu'il existe une suite $n_j \rightarrow \infty$, quand $j \rightarrow \infty$, telle que R^{n_j} converge uniformément vers l'identité pour la distance chordale, sur un voisinage de z_0 . On appelle $\mathcal{E}(R)$ *domaine de quasi-périodicité de R* .

Par définition $\mathcal{E}(R)$ est ouvert, $R(\mathcal{E}(R)) = \mathcal{E}(R)$, R est injective sur $\mathcal{E}(R)$ et tout point de $\mathcal{E}(R)$ est récurrent par R . Dans la Section 4.4 on verra que $\mathcal{E}(R)$ est égal à l'intérieur de l'ensemble des points récurrents par R (Corollaire 4.27).

Notons que la définition de $\mathcal{E}(R)$ coïncide localement avec la définition donnée dans la Section 3.2. En effet pour chaque $z_0 \in \mathcal{E}(R)$ il existe un disque $D \subset \mathcal{E}(R)$ contenant z_0 et $n \geq 1$ tel que $R^n(D) = D$ et par conséquent $R^n : D \rightarrow D$ est de degré 1. Par le Corollaire 3.12, D est contenue dans le domaine de quasipériodicité de R , au sens de la Section 3.2. En particulier $\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R)$ pour $n \geq 1$.

On voudrait avoir un analogue du Lemme 3.11 pour les affinoïdes fermés contenues dans $\mathcal{E}(R)$. Dans \mathbb{C}_p la convergence locale n'implique pas la convergence globale, comme dans le cas complexe. Donc on ne peut pas appliquer le Lemme 3.11 directement. A cause de cela on considère la Proposition 4.14, ci-dessous.

Étant donné un affinoïde fermé connexe $X \subset \mathbb{C}_p$ et $x \in X$ on dénote par $D_x \subset X$ le plus grand disque contenu dans X qui contient x . Alors $\pi_X(x) \in \mathcal{A}_X$ est le système projectif associé à D_x ; voir Section 1.2.3.

Proposition 4.14. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $X \subset \mathcal{E}(R)$ un affinoïde fermé connexe tel que $X \subset \mathbb{C}_p$. Alors il existe un entier $n \geq 1$ tel que $R^n : X \rightarrow X$ est de degré 1 et tel que R^n induit l'identité sur \mathcal{A}_X et sur chaque système projectif $S \in \mathcal{A}_X$. (En particulier pour chaque $x \in X$ on a $R^n(D_x) = D_x$.) De plus, il existe*

$\gamma \in (0, 1)$ tel que pour tout $x \in X$ on a

$$\|R^n - \text{id}\|_{D_x} \leq \gamma \cdot \text{diam}(D_x).$$

Corollaire 4.15. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors R permute les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité et chaque composante est périodique.

Démonstration. — Soit C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Alors il est clair que $R(C)$ est contenu dans une composante analytique C' de $\mathcal{E}(R)$. Soit $x \in C$ et soit $Y \subset C'$ un affinoïde fermé connexe tel que $R(x) \in Y$. Par la Proposition 4.14 il existe $n \geq 1$ tel que $R^n(Y) = Y$. Alors $X = R^{n-1}(Y)$ est un affinoïde fermé connexe qui contient x car $R(X) = R^n(Y) = Y$ et R est injective sur $\mathcal{E}(R)$. Donc $X \subset C$ et par conséquent $Y \subset R(C)$. Alors $C' \subset R(C)$ et $R^n(C) = C$. □

D'après la Proposition 4.14 on peut appliquer le Lemme 3.11 à chaque disque D_x , pour $x \in X$, avec une constante $\gamma \in (0, 1)$ uniforme. Donc le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 4.16. — Soient $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $X \subset \mathcal{E}(R) \cap \mathbb{C}_p$ un affinoïde fermé connexe. Supposons R vérifie avec $n = 1$, les propriétés de la Proposition 4.14. Considérons la fonction $\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ définie dans la Section 3.2. Alors on a les propriétés suivantes.

(1) Soit $T_0 = \text{id}$ et pour $n \geq 0$ posons $T_{n+1} = T_n \circ R - T_n$. Pour $w \in \mathbb{C}_p$ tel que $\rho(|w|) < \gamma^{-1}$ on a $\|T_n\|_X \leq R\gamma^n$. De plus, la série

$$R^{\circ w} = \sum_{i=0}^m \binom{w}{i} T_i,$$

converge uniformément dans X vers un automorphisme de X . De plus si $\rho(|w_i|) < \gamma^{-1}$, pour $i = 1, 2$, alors $R^{\circ w_1} \circ R^{\circ w_2} = R^{\circ(w_1+w_2)}$.

(2) Pour tout $w \in \mathbb{C}_p$ avec $\rho(|w|) < \gamma^{-1}$ on a

$$\left\| R_* - \frac{R^{\circ w} - \text{id}}{w} \right\|_X \leq C \text{diam}(X) |w| \quad \text{et} \quad \left\| R_* - \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i-1} \frac{T_i}{i} \right\|_X \leq k\gamma^k \text{diam}(X),$$

où la constante C ne dépend que de $\gamma\rho(|w|)$. En particulier $(R^n - \text{id})/n$ et $\sum_{i>0} (-1)^{i-1} T_i/i$ convergent uniformément vers R_* sur X quand $|n|_p \rightarrow 0$.

Corollaire 4.17. — Soit $C \subset \mathbb{C}_p$ une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Alors $R_* \in \mathcal{H}(C)$.

Démonstration. — Par 2 du corollaire précédent on a $R_* \in \mathcal{H}(X)$ pour tout affinoïde fermé $X \subset C$. Donc on a $R_* \in \mathcal{H}(C)$ par définition de $\mathcal{H}(C)$. □

Corollaire 4.18. — Un affinoïde fermé $X \subset \mathcal{E}(R)$ contient au plus un nombre fini de points périodiques de R .

Démonstration. — Après changement de coordonnée on suppose $X \subset \mathbb{C}_p$. Par 1 de la Proposition 3.16 les points périodiques dans $\mathcal{E}(R)$ coïncident avec les zéros de R_* . Donc la condition $R_* \equiv 0$ implique qu'il existe $n \geq 1$ tel que $R^n = \text{id}$ sur un ouvert, mais ceci n'est pas possible car $\deg(R) > 1$. Par conséquent $R_* \neq 0$. Par le corollaire précédent $R_* \in \mathcal{H}(X)$ et donc R_* a un nombre fini de zéros dans X . \square

Corollaire 4.19. — *Pour tout affinoïde fermé $X \subset \mathcal{E}(R)$ tel que $X \subset \mathbb{C}_p$, il existe une suite d'entiers $n_j \rightarrow \infty$ telle que R^{n_j} converge uniformément vers l'identité sur X .*

Démonstration. — Par le point 2 du Corollaire 3.11; voir aussi démonstration de (i) de la Proposition 3.14. \square

Corollaire 4.20. — *Soit $X \subset \mathcal{E}(R)$ un affinoïde fermé. Alors tout bout $\mathcal{P} \prec X$ (resp. système projectif $\mathcal{S} \prec X$) est périodique par R .*

Démonstration. — Comme $\mathcal{S} \prec X$ implique $\mathcal{P} \prec X$ pour une infinité de bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$, il suffit de montrer l'affirmation sur les bouts.

Considérons une coordonnée telle que $X \subset \mathbb{C}_p$. Alors il suffit de noter que par le corollaire précédent il existe un entier n tel que

$$\|R^n - \text{id}\|_X < \min\{\text{diam}(B_{\mathcal{P}}), \text{diam}(D_{\mathcal{P}})\}.$$

Donc on a $R^n(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ par le Lemme 2.3. \square

4.2.1. Preuve de la Proposition 4.14. — La démonstration de la Proposition 4.14 est divisée en plusieurs lemmes. Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins deux et un affinoïde fermé $X \subset \mathcal{E}(R)$ tel que $X \subset \mathbb{C}_p$.

Lemme 4.21. — *Soit \mathcal{P} un bout tel que $D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$. Alors $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré 1 et il existe un entier $n \geq 1$ tel que $R^n(D_{\mathcal{P}}) = D_{\mathcal{P}}$.*

Démonstration. — Par (ii) de la Proposition 3.9 R est injective sur $D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$ et donc $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$. Donc par (iv) du Lemme 2.1 $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré 1.

Comme tout point de $\mathcal{E}(R)$ est récurrent par R (Corollaire 3.15) il existe un entier $n \geq 1$ tel que $R^n(D_{\mathcal{P}}) \cap D_{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. Notons que $D_{\mathcal{P}} \cup D_{R^n(\mathcal{P})} \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, sinon $\mathcal{E}(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et alors R est injective; ceci n'est pas possible car $\deg(R) > 1$. Donc $D_{R^n(\mathcal{P})} \subset D_{\mathcal{P}}$ ou $D_{\mathcal{P}} \subset D_{R^n(\mathcal{P})}$. Si on a pas l'égalité alors $D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$ contient un point périodique attractif ou répulsif, mais ceci n'est pas possible. Donc $R^n(D_{\mathcal{P}}) = D_{\mathcal{P}}$. \square

Comme par hypothèse l'affinoïde fermé X est contenu dans \mathbb{C}_p , l'arbre \mathcal{A}_X de X est non-vide et on a la partition canonique

$$X = \left(\bigsqcup_{\mathcal{S}} \text{sommet de } \mathcal{A}_X X_{\mathcal{S}} \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{\mathcal{I}} \text{arête de } \mathcal{A}_X X_{\mathcal{I}} \right).$$

La Proposition 4.14 est une conséquence immédiate des Lemmes 4.22 et 4.23 ci-dessous.

Lemme 4.22. — *Il existe $n \geq 1$ tel que pour tout sommet \mathcal{S} de \mathcal{A}_X on a $R^n(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et R^n induit l'identité sur le système projectif \mathcal{S} . Dans ce cas il existe $\gamma_{\mathcal{S}} \in (0, 1)$ tel que pour tout $x \in X_{\mathcal{S}}$ on a*

$$\|R^n - \text{id}\|_{D_x} \leq \gamma_{\mathcal{S}} \cdot \text{diam}(D_x).$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$. Alors par le lemme précédent il existe k tel que $R^k(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Comme R est injective sur $\mathcal{E}(R)$ on a $\text{deg}_{R^k}(\mathcal{S}) = 1$ (Lemme 2.11). Comme tout automorphisme de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est d'ordre fini, il existe m tel que R^{km} induit l'identité sur \mathcal{S} . Comme \mathcal{A}_X n'a que un nombre fini de sommets, l'assertion du lemme en résulte.

Notons que pour tout $x \in X_{\mathcal{S}}$ on a $\text{diam}(D_x) = \text{diam}(X_{\mathcal{S}})$. De plus $R^n(x) \in D_x$, donc on a $|R^n(x) - x| < \text{diam}(X_{\mathcal{S}})$. Comme $X_{\mathcal{S}}$ est un affinoïde fermé son image par $R^n - \text{id}$ est aussi un affinoïde fermé (Proposition 2.6) et par conséquent il existe $\gamma_{\mathcal{S}} \in (0, 1)$ tel que $\|R^n - \text{id}\|_{X_{\mathcal{S}}} \leq \gamma_{\mathcal{S}} \cdot \text{diam}(X_{\mathcal{S}})$. □

Lemme 4.23. — *Soit I une arête de \mathcal{A}_X et supposons que R induit l'identité sur les extrémités de I . Alors il existe $\gamma_I \in (0, 1)$ tel que pour tout $x \in X_I$ on ait*

$$\|R - \text{id}\|_{D_x} \leq \gamma_I \cdot \text{diam}(D_x).$$

En particulier $R(D_x) = D_x$ et donc R induit l'identité sur chaque point dans I .

Démonstration. — Après changement de coordonnée on suppose $X_I = \{r < |z| < 1\}$, avec $r \in (0, 1)$. Alors pour $x \in X_I$ on a $D_x = \{|z - x| < |x|\}$ et en particulier $\text{diam}(D_x) = |x|$.

Notons que $|R(z)| = |z|$ pour $r < |z| < 1$. Comme R est l'identité sur les systèmes projectifs associés aux bouts de X_I , la fonction $|R|_0$ coïncide avec l'identité sur un voisinage (r_0, r_1) de $[r, 1]$. On choisit r_0 et r_1 tels que tous les zéros et pôles de R dans $\{r_0 < |z| < r_1\}$ sont de norme égale à r ou 1. Comme R induit l'identité sur les systèmes projectifs associés aux bouts de X_I , à tout zéro a de R sur $\{|z| = 1\}$ correspond un pôle $b(a)$ tel que $|a - b(a)| < 1$. Comme R fixe le bout associé à $\{|z| < r\}$, R a au moins un zéro dans $\{|z| \leq r_0\}$.

De la même façon, à tout zéro a de R sur $\{|z| = r\}$ correspond un pôle $b(a)$ tel que $|a - b(a)| < r$. Par conséquent R est de la forme

$$R(z) = (\lambda z - \mu) \cdot \prod_{a \text{ zéro sur } \{|z|=1, |z|=r\}} \left(\frac{z - a}{z - b(a)} \right) \cdot \frac{\prod_{a \text{ zéro sur } \{|z|>r_1\}} (1 - a^{-1}z)}{\prod_{b \text{ pôle sur } \{|z|>r_1\}} (1 - b^{-1}z)} \cdot \frac{\prod_{a \text{ zéro sur } \{|z|<r_0\}} (1 - az^{-1})}{\prod_{b \text{ pôle sur } \{|z|<r_0\}} (1 - bz^{-1})}$$

où $|\lambda - 1| < 1$ et $|\mu| \leq r_0$. Notons que pour $z \in X_I$ on a

$$\frac{z - a}{z - b(a)} = 1 + \frac{a - b(a)}{z - b(a)} \quad \text{et} \quad \left| \frac{a - b(a)}{z - b(a)} \right| \leq \left| \frac{a - b(a)}{b(a)} \right| < 1.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} |R(z) - z| &\leq \max\{|R(z) - (\lambda z - \mu)|, |(\lambda - 1)z + \mu|\} \\ &\leq |z| \max\{|\lambda - 1|, |\mu/z|, |(a - b(a))/b(a)|, r_1^{-1}, r_0/r\}. \end{aligned}$$

Donc $\gamma_f = \max\{|\lambda - 1|, |(a - b(a))/b(a)|, r_1^{-1}, r_0/r\} < 1$ satisfait l'assertion du lemme. \square

4.3. Ensembles de Fatou et de Julia. — Dans cette section on considère la décomposition en ensembles de Fatou et de Julia, comme dans le cas complexe. On considère d'abord le théorème suivant de Hsia qui est l'analogie p -adique du Théorème de Montel; voir [Hs] et voir [CG] pour le Théorème de Montel.

Théorème (Hsia [Hs]). — Soit $r > 0$ et considérons une famille $F \subset \mathcal{H}(B_r(0))$. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}_p$ tel que $f(z) \neq z_0$ pour tout $f \in F$ et tout $z \in B_r(0)$ alors F est uniformément lipschitzienne pour la distance chordale.

La démonstration de ce théorème est simple : il suffit de noter que l'image d'un disque par une série f convergente sur $B_r(0)$ est aussi un disque. Par conséquent, si les éléments d'une famille $F \subset \mathcal{H}(B_r(0))$ ne prennent pas la valeur z_0 (que on suppose de norme égale à 1), les images de $B_r(0)$ par les $f \in F$ ont un diamètre chordal plus petit que 1 ; alors le théorème suit du Corollaire 2.2 du Lemme de Schwarz (Section 1.3.1).

Définition 4.24. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. L'ensemble de Fatou de R , noté $F(R)$, est l'ensemble de tous les points $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tels qu'il existe un voisinage U de z_0 où la famille $\{R^n|_U\}_{n \geq 1}$ est uniformément lipschitzienne pour la distance chordale. De plus $J(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - F(R)$ est appelé l'ensemble de Julia de R .

Il est facile de voir que l'on a les propriétés usuelles; $R^{-1}(F(R)) = F(R)$, $R^{-1}(J(R)) = J(R)$ et pour tout $n \geq 1$, $F(R^n) = F(R)$ et $J(R^n) = J(R)$. De plus, si w est un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ alors $F(w \circ R \circ w^{-1}) = w(F(R))$ et $J(w \circ R \circ w^{-1}) = w(J(R))$.

Par définition $F(R)$ est ouvert et par conséquent $J(R)$ est fermé, mais en général $J(R)$ n'est pas compact. De plus $J(R)$ n'a pas des points isolés; voir [Hs].

Proposition 4.25. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors $\mathcal{E}(R) \subset F(R)$ et $F(R)$ contient tous les bassins d'attraction.

Démonstration. — Par le Lemme 4.21 pour tout disque $D \subset \mathcal{E}(R)$ il existe $n \geq 1$ tel que $R^n(D) = D$. Donc $\mathcal{E}(R) \subset F(R)$. Le cas des bassins d'attraction est clair. \square

En particulier $F(R)$ contient tous les points périodiques non-répulsifs de R et il n'est pas difficile de voir que tous les points périodiques répulsifs de R appartiennent à $J(R)$. De plus on a le théorème suivant de Benedetto.

Théorème (Benedetto [Be]). — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors R a un point fixe non-répulsif, en particulier $F(R) \neq \emptyset$.

Voici une différence avec le cas complexe. Dans le cas complexe l'ensemble de Julia d'une fonction rationnelle est non-vide et l'ensemble de Fatou peut être vide, mais dans le cas p -adique c'est le contraire. Par le théorème précédent, l'ensemble de Fatou est non-vide et l'ensemble de Julia peut être vide. Par exemple il n'est pas difficile de voir que $J(z^p) = \emptyset$. Plus généralement $J(R) = \emptyset$ pour toutes les fonctions rationnelles simples ; voir Section 4.5.

Corollaire 4.26. — L'ensemble de Julia est d'intérieur vide.

Démonstration. — Si l'ensemble de Julia d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est d'intérieur non-vide, alors par le Théorème de Hsia $\cup_{n \geq 0} R^n(J(R)) \subset J(R)$ est égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ moins un point. Comme $J(R)$ est fermé on obtient $J(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, ce qui n'est pas possible par le théorème de Benedetto. □

4.4. Structure de l'ensemble de Fatou et disques errants. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. On dit qu'un disque $D \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est *errant* si pour tous $k > l \geq 0$ on a $R^k(D) \cap R^l(D) = \emptyset$.

Théorème de Classification. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors l'ensemble de Fatou de R se décompose dans les ensembles disjoints suivants.

- (1) Bassins d'attraction.
- (2) $\mathcal{E}'(R) = \cup_{n \geq 0} R^{-n}(\mathcal{E}(R))$.
- (3) L'union des disques errants qui ne sont pas attirés par un cycle attractif.

Corollaire 4.27. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors $\mathcal{E}(R)$ est égal à l'intérieur de l'ensemble des points récurrents par R .

Démonstration. — Par définition $\mathcal{E}(R)$ est ouvert et tous les points de $\mathcal{E}(R)$ sont récurrents par R ; voir Section 4.2. D'autre part considérons un point $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ récurrent par R .

Par [Hs] on peut trouver un point périodique $w_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que tout point de $J(R)$ soit accumulé par des préimages de w_0 , par des itérés de R . Donc z_0 appartient à l'ensemble de Fatou de R . Clairement z_0 n'appartient pas à un disque errant et n'est pas attiré par un cycle attractif. Donc le théorème implique que $z_0 \in \mathcal{E}(R)$. □

Dans [Hs] Hsia a montré que l'ensemble de Julia est contenu dans l'ensemble de points de accumulation des points périodiques. Mais en effet on à l'égalité.

Corollaire 4.28. — L'ensemble de Julia est égal à l'ensemble des points d'accumulation des points périodiques.

Démonstration. — Par [Hs] il suffit de montrer que si $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est accumulé par points périodiques, alors $w \in J(R)$. Clairement w n'appartient pas à un bassin d'attraction et n'est pas contenue dans un disque errant. De plus $w \notin \mathcal{E}'(R)$ car les points périodiques indifférents sont isolés (Corollaire 3.17). Donc par le théorème on a $w \in J(R)$. \square

Il n'est pas clair si $J(R)$ est égal à la fermeture de points périodiques répulsifs; voir aussi [Hs]. Par analogie au cas complexe on fait la conjecture suivante.

Conjecture de Non-Errance. — *Tout disque errant est attiré par un cycle attractif.*

On peut comparer à Sullivan [Sul] et Guckenheimer [Gu]. Benedetto a fait une conjecture de non-errance qui n'est pas tout à fait équivalente à celle-ci. Par exemple la conjecture de Benedetto ne dit rien dans le cas où l'ensemble de Fatou est $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tout entier. Néanmoins on peut avoir une dynamique non-triviale dans ce cas; voir exemples 6.3 et 6.6.

D'après le théorème précédent la Conjecture de Non-Errance est équivalente à la conjecture suivante.

Structure Conjecturale de l'Ensemble de Fatou. — *Tout point de l'ensemble de Fatou appartient à $\mathcal{E}'(R)$ ou est attiré par un cycle attractif.*

La démonstration du Théorème de Classification dépend du lemme suivant.

Lemme 4.29. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et supposons que D est un disque errant. Alors les affirmations suivantes sont vraies.*

- (1) $D \subset F(R)$.
- (2) $D \cap \mathcal{E}'(R) = \emptyset$.
- (3) Pour tout $n \geq 1$, $R^n(D)$ est un disque.
- (4) Si diam dénote le diamètre chordal, on a

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(R^j(D)) = 0.$$

- (5) Si D intersecte un bassin d'attraction, alors D est attiré par le cycle correspondant.

Démonstration

(1) Comme $R^n(D) \cap D = \emptyset$, pour $n \geq 1$ la famille $\{R^n|_D\}_{n \geq 1}$ est uniformément lipschitzienne (Théorème de Hsia, Section 4.3). Donc $D \subset F(R)$.

(2) Par le Corollaire 3.15 tout point de $\mathcal{E}(R)$ est récurrent par R . Donc l'orbite de D est disjointe de $\mathcal{E}(R)$; c'est-à-dire $D \cap \mathcal{E}'(R) = \emptyset$.

(3) Par le Corollaire 2.2 on a que $R^n(D)$ est un disque ou $R^n(D) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Mais comme D est un disque errant on a $R^n(D) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - D$ et par conséquent $R^n(D)$ est un disque.

(4) Supposons $\liminf_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(R^j(D)) > 0$. Par le Lemme 2.3 on a que si D_0 et $R(D_0)$ sont des disques et Q est une fonction rationnelle telle que $d(R(z), Q(z)) < \text{diam}(R(D_0)) < 1$, alors $Q(D_0) = R(D_0)$. Donc quitte à faire une petite perturbation dans les coefficients de R , on peut supposer qu'il existe une extension finie K de \mathbb{Q}_p , tel que $R \in K(z)$ et tel que $D \cap \mathbb{P}(K) \neq \emptyset$.

Alors $\mathbb{P}(K)$ est invariant par R et comme $\mathbb{P}(K)$ est compact, pour tout $w \in D$ on peut trouver des entiers $m > n$ tels que $|R^n(w) - R^m(w)| < \liminf_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(R^j(D))$. Mais ceci implique $R^n(D) \cap R^m(D) \neq \emptyset$. On obtient une contradiction.

(5) Supposons qu'un point $z_0 \in D$ est attiré par un cycle attractif. Par la partie 3 on a $\liminf_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(R^j(D)) = 0$. Donc il existe n tel que $R^n(z_0)$ soit suffisamment proche d'un point périodique attractif w_0 et tel que le diamètre de $R^n(D)$ soit suffisamment petit, de telle façon que $R^n(D)$ soit contenu dans le bassin d'attraction de w_0 . Alors D est attiré par le cycle (attractif) de w_0 . □

Démonstration du Théorème de Classification. — Soit $z_0 \in F(R)$. Par définition de $F(R)$ il existe un disque ouvert D qui contient z_0 et tel que $\text{diam}(R^n(D)) < 1 = \text{diam}(\mathbb{P}(\mathbb{C}_p))$ pour tout $n \geq 1$. D'après le Corollaire 2.2 $R^n(D)$ est un disque pour $n \geq 1$.

Si D est un disque errant alors $D \cap \mathcal{E}'(R) = \emptyset$ par le lemme précédent. De plus soit D est disjoint des bassins d'attraction, soit D est attiré par un cycle attractif. Donc le théorème est vérifié dans ce cas.

Supposons que D n'est pas errant. Soient n et $k \geq 1$ tels que $R^n(D) \cap R^{n+k}(D) \neq \emptyset$. Si $R^{n+k}(D)$ est strictement contenu dans $R^n(D)$ alors D contient un point périodique attractif et D est attiré par le cycle correspondant ; cf. Corollaire 1.4. Sinon $R^n(D) \subset R^{n+k}(D)$ et on considère le disque $D_0 = \cup_{i \geq 0} R^{n+ik}(D)$. On a $R^k(D_0) = D_0$. Si $R^k : D_0 \rightarrow D_0$ est de degré 1 alors $D_0 \subset \mathcal{E}(R)$ par le Corollaire 3.11. Sinon D_0 est contenu dans le bassin d'attraction d'un point fixe de R^k ; voir Proposition 3.2. □

4.5. Bonne réduction et fonctions rationnelles simples. — En coordonnées homogènes, une fonction rationnelle R est de la forme

$$R([x, y]) = [P_1(x, y), P_2(x, y)],$$

où $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_p[x, y]$ sont des polynômes homogènes de degré $\text{deg}(R)$. Comme pour $\lambda \in \mathbb{C}_p - \{0\}$, $[\lambda P_1, \lambda P_2]$ représente la même fonction rationnelle, on peut supposer P_1 et P_2 à coefficients entiers et qu'au moins un des coefficients de P_1 ou de P_2 est de norme égale à 1. On considère la définition suivante, due à Morton et Silverman [MS2].

Définition 4.30. — On dit que $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une *bonne réduction* si \tilde{P}_1 et \tilde{P}_2 n'ont pas de racine commune sur $\overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p$, autre que $(0, 0)$.

Donc R a une bonne réduction si et seulement si $|\text{disc}(P_1, P_2)| = 1$. Autrement dit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une bonne réduction si et seulement si le système projectif canonique \mathcal{S} est invariant par R et la réduction \tilde{R} de R a un degré maximal, $\deg(\tilde{R}) = \deg(R)$.

La notion de bonne réduction dépend du choix de la coordonnée. Par exemple le polynôme pz^2 n'a pas une bonne réduction sur \mathbb{C}_p , mais il est conjugué à z^2 qui en a une. Pour $n > 1$ la fonction rationnelle R^n a une bonne réduction si et seulement si R a une bonne réduction ; voir [Be].

Notons que, si $R \in \mathbb{Q}(z)$, alors R a une bonne réduction sur \mathbb{C}_p pour presque tout nombre premier p .

Théorème (Morton, Silverman [MS2]). — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une bonne réduction. Alors R n'augmente pas la distance chordale et en particulier $J(R) = \emptyset$.

Définition 4.31. — On dit qu'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est *simple* s'il existe un choix de coordonnée pour laquelle R a une bonne réduction.

La dynamique des fonctions rationnelles ayant une bonne réduction, ou plus généralement la dynamique des fonctions rationnelles simples, est intéressante car on peut comprendre une grande partie de la dynamique si l'on comprend la dynamique de la réduction ; voir la proposition suivante.

Proposition 4.32. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle, ayant une bonne réduction \tilde{R} . Pour $\alpha \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ on pose $D_\alpha = \{\tilde{z} = \alpha\}$. Alors on a les propriétés suivantes.

- (i) $R : D_\alpha \rightarrow D_{\tilde{R}(\alpha)}$ est de degré $\deg_{\tilde{R}}(\alpha)$. En particulier $R(D_\alpha) = D_{\tilde{R}(\alpha)}$.
- (ii) D_α contient un point périodique attractif si et seulement si α est périodique par \tilde{R} et $(\tilde{R}^k)'(\alpha) = 0$, où k est la période de α . Dans ce cas D_α contient un unique point périodique et D_α est son bassin d'attraction immédiat.
- (iii) $D_\alpha \cap \mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ si et seulement si α est périodique par \tilde{R} et $(\tilde{R}^k)'(\alpha) \neq 0$, où k est la période de α . Dans ce cas $D_\alpha \subset \mathcal{E}(R)$. De plus, si $\deg(R) > 1$ alors D_α est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ qui contient un point périodique de R de même période que α .
- (iv) Soit $\tilde{R}' \equiv 0$ et dans ce cas $p \mid \deg(R)$ et tout point périodique de R est attractif ; soit $\tilde{R}' \not\equiv 0$ et alors tout cycle attractif de R attire un point critique (et donc le nombre de cycles attractifs est majoré par $2 \deg(R) - 2$) et $\mathcal{E}(R)$ est non-vide.

Voir aussi Proposition 2.4 dans la Section 2. La démonstration de cette proposition est à la fin de cette section.

Corollaire 4.33. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une bonne réduction. Alors tout point de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ appartient à $\mathcal{E}'(R) = \cup_{n \geq 0} R^{-n}(\mathcal{E}(R))$ ou à un bassin d'attraction.

Démonstration. — Par la proposition précédente et en considérant que tout élément de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est prépériodique pour une fonction rationnelle quelconque. □

Corollaire 4.34. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux ayant une bonne réduction et telle que $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{E}(R)$ est de la forme $\cup_A D_\alpha$ où $A \subset \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est tel que $\#A$ et $\#(\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) - A)$ sont infini.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ la réduction \tilde{R} a un point périodique avec multiplicateur différent de zéro. Par conséquent \tilde{R} en a une infinité. Comme le degré de R est au moins deux il y a une infinité de $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}_p$ strictement prépériodiques. Alors le corollaire suit de la proposition. □

Proposition 4.35. — *Soit L une extension finie de \mathbb{Q}_p et $R \in L(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux, avec une bonne réduction. Alors R a un nombre fini des points prépériodiques dans $\mathbb{P}(L)$.*

Démonstration. — Comme $\mathbb{P}(\tilde{L}) \subset \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est fini il suffit de montrer que pour chaque $\alpha \in \mathbb{P}(\tilde{L})$ périodique par \tilde{R} , le disque $\{\tilde{z} = \alpha\}$ rencontre au plus un nombre fini de points prépériodiques par R . On se ramène au cas où $\alpha = 0$ et le disque $\{|z| < 1\}$ est fixé par R .

Supposons d'abord que R est injective sur $\{|z| < 1\}$. Dans ce cas, $\{|z| < 1\} \subset \mathcal{E}(R)$ et les points prépériodiques dans ce disque sont périodiques. La fonction R_* est holomorphe dans $\{|z| < 1\}$ et comme R est de degré au moins deux on a $R_* \neq 0$. Comme les points périodiques indifférents sont les zéros de R_* et $\mathbb{P}(L)$ est compact, $\{|z| < 1\}$ rencontre au plus un nombre fini de points périodiques.

Supposons maintenant que R n'est pas injective sur $\{|z| < 1\}$. Alors $\{|z| < 1\}$ est une composante attractive de R . De plus R n'a qu'un seul point périodique dans $\{|z| < 1\}$, qui est alors fixe et qu'on peut supposer égal à 0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que R n'a pas de préimage de 0 sur $\{|z| < \varepsilon\}$ différente de 0. Comme $|L|$ est discret il existe $n \geq 1$ tel que $|R^n(z)| < \varepsilon$ pour tout $z \in L$ tel que $|z| < 1$. Donc tout point prépériodique contenu dans $\{z \in L \mid |z| < 1\}$ appartient à l'ensemble fini $R^{-n}(0)$. □

Voici une démonstration du théorème de Northcott unidimensionnelle. Si K est un corps de nombres, alors une fonction rationnelle $R \in K(z)$ a une bonne réduction pour toute valeur absolue non-archimédienne, sauf pour un nombre fini. Si l'on considère la complétion L de K pour une telle valeur absolue la proposition précédente dit que R a un nombre fini de points prépériodiques dans L et par conséquent dans $\mathbb{P}(K)$.

Les exemples canoniques de fonctions rationnelles ayant une bonne réduction, sont les polynômes moniques entiers.

Exemple 4.36. — *Considérons les fonctions rationnelles bicritiques, qui sont les fonctions rationnelles, de degré au moins deux qui ont seulement deux points critiques, le minimum possible; voir [Mi]. Notons que cette classe comprend les fonctions rationnelles de degré deux. Si l'on choisit une coordonnée telle que les points critiques soient*

0 et ∞ , alors les fonctions rationnelles bicritiques sont de la forme $(az^n + b)/(cz^n + d)$, avec $ad - bc = 1$.

Il n'est pas difficile de voir que, si a, b, c et d sont entiers, alors la fonction rationnelle correspondante est simple. De plus si $p \nmid n$ cette condition est aussi nécessaire. Si $p|n$ alors cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple le polynôme $z^2 + \frac{1}{4}$ est simple sur \mathbb{C}_2 , car il est conjugué à $z + z^2$.

Remarque 4.37

(1) Le théorème de Morton et Silverman suit du (i) de la Proposition 4.32 et du Lemme de Schwarz.

(2) Si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une bonne réduction et $D_\alpha \subset \mathcal{E}(R)$, alors D_α contient une infinité de point périodiques, tous indifférents ; voir Corollaire 5.13.

Démonstration de la Proposition 4.32. — Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$ le système projectif canonique, de telle façon que $D_{\mathcal{P}(\alpha)} = D_\alpha$.

(i) Par la partie (iv) du Lemme 2.1 un point $x \in D_\beta$, où $\beta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, a au moins $\deg_R(\mathcal{P}(\xi))$ préimages dans D_ξ , pour chaque $\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ tel que $\tilde{R}(\xi) = \beta$.

Comme R a bonne réduction $\deg(\tilde{R}) = \deg(R)$ et par conséquent

$$\sum_{\tilde{R}(\xi)=\beta} \deg_R(\mathcal{P}(\xi)) = \sum_{\tilde{R}(\xi)=\beta} \deg_{\tilde{R}}(\xi) = \deg(\tilde{R}) = \deg(R).$$

Donc $R : D_\xi \rightarrow D_\beta$ est de degré $\deg_{\tilde{R}}(\xi)$.

(ii) Clairement $\tilde{R}^k(\alpha) = \alpha$ et $(\tilde{R}^k)'(\alpha) = 0$ est équivalent à ce que $R^k : D_\alpha \rightarrow D_\alpha$ soit de degré plus grand que 1. Par le Lemme de Schwarz ceci est équivalent à ce que R^k ait un point fixe attractif sur D_α .

Supposons que $R : D_0 \rightarrow D_0$ est de degré plus grand que 1. Alors

$$\tilde{R}(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots, \text{ avec } |a_0| < 1, |a_1| < 1 \text{ et } \max |a_i| = 1.$$

Donc $r(R) = 1$, où r est comme dans la Section 3.1. Par conséquent D_0 est un bassin d'attraction immédiat ; voir Section 3.1.

(iii) Supposons $D_\alpha \cap \mathcal{E}(R) \neq \emptyset$. Comme tout point de $\mathcal{E}(R)$ est récurrent par R , α est périodique par \tilde{R} ; voir Corollaire 3.15. Par conséquent $R^k(D_\alpha) = D_\alpha$, où $k \geq 1$ est la période de α . De plus $(\tilde{R}^k)'(\alpha) \neq 0$, car sinon on a par (ii) que D_α est contenu dans le bassin d'attraction d'un cycle attractif.

D'autre part supposons que $\alpha \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est périodique par \tilde{R} , de période k , et $(\tilde{R}^k)'(\alpha) \neq 0$. Alors par (i), $R^k : D_\alpha \rightarrow D_\alpha$ est de degré 1. Donc $D_\alpha \subset \mathcal{E}(R)$ par le Corollaire 3.12 de la Section 3.2.

Notons que l'on a montré que si $D_\alpha \cap \mathcal{E}(R) \neq \emptyset$, alors $D_\alpha \subset \mathcal{E}(R)$. Pour montrer que D_α est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ il suffit de montrer qu'il existe une infinité de $\beta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ tels que $D_\beta \cap \mathcal{E}(R) = \emptyset$.

Si $\deg(R) > 1$ alors il existe $\beta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $\tilde{R}(\beta) = \alpha$ et tel que β n'appartient pas au cycle de α . Ceci implique que β a une infinité de préimages distinctes, donc il

suffit de montrer que $D_\beta \cap \mathcal{E}(R) = \emptyset$. Comme $R(D_\beta) = D_\alpha \subset \mathcal{E}(R)$ et β n'appartient pas au cycle de α on a $D_\beta \cap \mathcal{E}(R) = \emptyset$, car R est injective sur $\mathcal{E}(R)$; voir le (ii) de la Proposition 3.9.

Il reste à montrer que, si α est de période k , alors D_α contient un point périodique de R de période k . Après changement de coordonnée on peut supposer $D_\alpha = \{|z| < 1\}$. Donc on a

$$R^k(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots, |a_0| < 1.$$

Comme $\deg(\tilde{R}) > 1$ et $\max_{i \geq 2} |a_i| = 1$ on a $\text{widedeg}(R^k - \text{id}) > 1$. Par conséquent il existe $x \in D_\alpha = \{|z| < 1\}$ tel que $R^k(x) = x$.

(iv) Si $\tilde{R}' \equiv 0$, alors \tilde{R} est de la forme $\tilde{Q}(z^p)$ et donc $p \mid \deg(\tilde{R}) = \deg(R)$. De plus par la partie (i) tout point périodique de R est attractif.

Supposons que $\tilde{R}' \not\equiv 0$ et soit x un point périodique attractif de R de période k . Après un changement de coordonnée on suppose $x = 0$. Alors

$$R^k(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots, \text{ avec } |a_1| < 1, |a_i| \leq 1$$

et il existe un entier $i \geq 1$ tel que $|ia_i| = 1$ (car $\tilde{R}' \not\equiv 0$). Donc $0 < \text{widedeg}((R^k)') < \infty$ et par conséquent il existe une solution de l'équation $(R^k)'(z) = 0$ dans $\{|z| < 1\}$. Donc le bassin d'attraction immédiat du cycle de 0 contient un point critique de R .

En particulier le nombre de cycles attractifs est au plus $2 \deg(R) - 2$ et donc R a une infinité des points périodiques indifférents. Par conséquent $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$. □

5. Composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité

Rappelons que la composante analytique d'un ensemble $U \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui contient un point $x \in U$ est l'union de tous les affinoïdes fermés connexes contenus dans U qui contiennent x .

Théorème 3. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Alors C est un affinoïde ouvert connexe, c'est-à-dire ;*

$$C = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_0 \cup \dots \cup B_n,$$

où $n \geq 0$ et B_0, \dots, B_n sont des boules fermées. De plus, chaque bout de C (dont la boule fermée associée est l'un des B_i) est périodique et le degré de l'action induite par l'itéré correspondant sur le système projectif associé est plus grand que 1.

On peut voir les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité comme l'analogie p-adique des disques de Siegel et des anneaux de Herman en dynamique complexe. Mais il y a des différences : sur \mathbb{C}_p on peut avoir des composantes avec un nombre fini arbitraire de bouts ; voir les exemples dans la Section 6. Par analogie avec le cas complexe on considère la définition suivante.

Définition 5.1. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux, C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ et $n + 1$ le nombre de bouts de C . Alors on dit que C est un n -anneau de Herman si $n > 0$ et on dit que C est un disque de Siegel si $n = 0$.

La proposition suivante ne dépend pas du théorème.

Proposition 5.2. — Soit X un affinoïde ouvert connexe et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins 2 telle que $R : X \rightarrow X$ est de degré 1. Alors $X \subset \mathcal{E}(R)$. Si de plus pour tout système projectif \mathcal{S} il existe $i \geq 1$ tel que $\deg_{R^i}(\mathcal{S}) > 1$, alors X est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$.

Démonstration. — On montre d'abord que $X \subset \mathcal{E}(R)$. Si X est un disque ceci est une conséquence du Corollaire 3.12. Comme $\deg(R) > 1$ on a $X \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, donc si X n'est pas un disque on a $\mathcal{A}_X \neq \emptyset$.

D'après le Corollaire 2.16 il existe n tel que R^n induit l'identité sur \mathcal{A}_X . Si $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_X$ alors $\mathcal{S} \prec X$, donc on a $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ par le Lemme 2.11. Par conséquent il existe m tel que R^{nm} induit l'identité sur \mathcal{S} . Donc si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ est tel que $D_{\mathcal{P}} \subset X$ alors $R^{nm} : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{\mathcal{P}}$ est de degré 1. Par le Corollaire 3.12 on a $D_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$. Par conséquent $X_{\mathcal{S}} \subset \mathcal{E}(R)$ et donc $X \subset \mathcal{E}(R)$.

Soit C la composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ qui contient X . Si \mathcal{S} est un système projectif associé à un bout \mathcal{P} de X tel que $\deg_{R^i}(\mathcal{S}) > 1$, alors on a $\mathcal{S} \not\prec C$ par le Lemme 2.11, car R est injective sur $C \subset \mathcal{E}(R)$. C'est-à-dire $C \subset D_{\mathcal{P}}$. Par conséquent on a

$$X \subset C \subset \bigcap_{\text{bout de } C} D_{\mathcal{P}} = X. \quad \square$$

On a le corollaire suivant du Théorème 3.

Corollaire 5.3. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$. Alors tout bout $\mathcal{P} \prec \mathcal{E}(R)$ est périodique par R .

Démonstration. — Si \mathcal{P} est un bout d'une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ alors il est périodique par le théorème précédent. Sinon il existe un affinoïde fermé $X \prec \mathcal{E}(R)$ tel que $\mathcal{P} \prec X$ et par conséquent \mathcal{P} est périodique par le Corollaire 4.20. \square

La démonstration du Théorème 3 occupe le reste de cette section.

Lemme d'Approximation. — Soit R une fonction rationnelle, fixant le bout \mathcal{P}_0 associé à $\mathbb{D}_p = \{|z| < 1\}$ et injective dans la couronne $\{r < |z| < 1\}$.

(1) Pour tout bout \mathcal{P} tel que la boule fermée associée $B_{\mathcal{P}}$ vérifie $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{D}_p$ et $\text{diam}(B_{\mathcal{P}}) \geq r$, l'image $R(\mathcal{P})$ vérifie $B_{R(\mathcal{P})} \subset \mathbb{D}_p$ et $\text{diam}(B_{R(\mathcal{P})}) = \text{diam}(B_{\mathcal{P}})$.

(2) Il existe un fonction rationnelle R_0 injective dans \mathbb{D}_p , fixant \mathcal{P}_0 , telle que pour tout bout \mathcal{P} vérifiant les hypothèses précédentes on ait $R_0(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$.

Démonstration. — Soit h un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ préservant \mathbb{D}_p tel que $h \circ R(\{r < |z| < 1\}) = \{r < |z| < 1\}$. Si \widehat{R}_0 vérifie les conclusions du lemme par rapport à $h \circ R$, alors $R_0 = h^{-1} \circ \widehat{R}_0$ les vérifiera par rapport à R . On peut donc se ramener à $h = \text{id}$; par conséquent, pour tout $r < |z| < 1$ on a $|R(z)| = |z|$.

Comme $\text{deg}_R(\mathcal{P}_0) = 1$ et par (iv) du Lemme 2.1, si n est le nombre des pôles de R sur \mathbb{D}_p , alors R a $n + 1$ zéros sur \mathbb{D}_p . Soient a_1, \dots, a_{n+1} et b_1, \dots, b_n les zéros et les pôles de R sur \mathbb{D}_p respectivement. On pose

$$Q(z) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z - b_i}{z - a_i} \right) = \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_i - b_i}{z - a_i} \right).$$

Donc $R_0 = R \cdot Q : \mathbb{D}_p \rightarrow \mathbb{D}_p$ est de degré 1 et par conséquent, si le bout \mathcal{P} vérifie les conditions dans 1 on a $\text{diam}(B_{R_0(\mathcal{P})}) = \text{diam}(B_{\mathcal{P}}) \geq r$. D'autre part on a

$$\left| \frac{a_i - b_i}{z - a_i} \right| \leq r|z|^{-1} \quad \text{et} \quad |R(z)| = |z|$$

pour tout $z \in \{r < |z| < 1\}$. Donc

$$|R_0(z) - R(z)| = |R(z)| \left| \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{a_i - b_i}{z - a_i} \right) - 1 \right| \leq r.$$

On a alors $R_0(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$ par le Lemme 2.3. Donc $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{D}_p$ et $\text{diam}(B_{R(\mathcal{P})}) = \text{diam}(B_{R_0(\mathcal{P})}) = \text{diam}(B_{\mathcal{P}})$. □

Corollaire 5.4. — Soient $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $D_i = \{|z - z_i| < r_i\}$ des disques, pour $0 \leq i \leq k$, avec $D_0 = D_k$. On suppose que pour $0 \leq i < k$ l'image par R du bout associé à D_i est le bout associé à D_{i+1} et que R est injective sur $\{rr_i < |z - z_i| < r_i\}$. Alors tout bout \mathcal{P} dont la boule fermée associée $B_{\mathcal{P}}$ vérifie $B_{\mathcal{P}} \subset D_0$ et $\text{diam}(B_{\mathcal{P}}) \geq rr_0$ est périodique sous l'action de R .

Démonstration. — Par le lemme il existe des fonctions rationnelles R_i , pour $0 \leq i < k$ telles que $R : D_i \rightarrow D_{i+1}$ est de degré 1 et tel que pour tout bout \mathcal{Q} qui vérifie $B_{\mathcal{Q}} \subset D_0$ et $\text{diam}(B_{\mathcal{Q}}) \geq rr_0$ le bout $R^k(\mathcal{P}) = R_{k-1} \circ \dots \circ R_0(\mathcal{P})$, vérifie les mêmes propriétés. Donc il suffit de vérifier que \mathcal{P} est périodique par $Q = R_{k-1} \circ \dots \circ R_0$. Comme $Q : D_0 \rightarrow D_0$ est de degré 1, on a par le Corollaire 3.12 que $D_0 \subset \mathcal{E}(Q)$. Par le Corollaire 4.20 de la Section 4.2, \mathcal{P} est périodique par Q . □

Lemme 5.5. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Pour tout $x \notin C$ il existe un bout $\mathcal{P}_x \prec C$ périodique par R tel que $x \in B_{\mathcal{P}_x}$ et $B_{\mathcal{P}_x} \cap C = \emptyset$. De plus si \mathcal{S}_x est le système projectif associé à \mathcal{P}_x et n_x est la période de \mathcal{P}_x , alors $\text{deg}_{R^{n_x}}(\mathcal{S}_x) > 1$.

Démonstration. — On suppose que C est fixe par R . Soit \mathcal{P}_0 un bout tel qu'il existe un affinoïde fermé $X \subset C$ tel que $D_{\mathcal{P}_0} \subset X$. Par le Lemme 4.21 il existe $n \geq 1$ tel que $R^n : D_{\mathcal{P}_0} \rightarrow D_{\mathcal{P}_0}$ est de degré 1. Donc quitte à remplacer R par un itéré on peut

supposer que $R : D_{\mathcal{P}_0} \rightarrow D_{\mathcal{P}_0}$ est de degré 1. Après changement de coordonnée on peut supposer que $D_{\mathcal{P}_0} = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

Soit I la composante d'injectivité de R qui contient C . Rappelons que I est un affinoïde ouvert connexe; voir Proposition 2.9 . Notons qu'on a $D_{\mathcal{P}_0} \subset I$.

(1) Supposons que \mathcal{P} est un bout qui satisfait les propriétés suivantes.

(i) $x \in B_{\mathcal{P}}$.

(ii) \mathcal{P} est périodique par R de période N et $R^i(\mathcal{P}) \prec C$ pour tout $0 \leq i < N$.

(iii) $B_{R^i(\mathcal{P})} \subset \{|z| \leq 1\}$ et il existe $r \in |\mathbb{C}_p|$ tel que $\text{diam}(B_{R^i(\mathcal{P})}) = r$, pour $0 \leq i < N$.

Notons que \mathcal{P}_0 satisfait ces propriétés avec $r = 1$.

Soit \mathcal{S} le système projectif associé à \mathcal{P} ; on suppose que $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{S}) = 1$. Alors on va trouver un bout \mathcal{P}' qui satisfait aussi (i)-(iii) ci-dessus, avec $r' < r$ appartenant à un ensemble fini.

Donc on conclut qu'il existe un bout \mathcal{P} qui satisfait (i)-(iii) et que de plus $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{S}) > 1$; alors on continue en 3.

(2) Quitte à remplacer N par un multiple, on peut supposer que R^N induit l'identité sur \mathcal{S} . Par (iii) de la Proposition 2.4, sauf pour un nombre fini de $\mathcal{Q} \in \mathcal{S}$, $R : D_{\mathcal{Q}} \rightarrow D_{\mathcal{Q}}$ est de degré 1 et par le Corollaire 3.12 on a $D_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{E}(R)$. Par conséquent $\mathcal{S} \prec C$ et $R^i(\mathcal{S}) \prec C$, pour $0 \leq i < N$. En particulier $B_{R^i(\mathcal{P})} \cap I \neq \emptyset$.

D'autre part, $\cup B_{R^i(\mathcal{P})} \not\subset I$, sinon $R^N : B_{\mathcal{P}} \rightarrow B_{\mathcal{P}}$ est de degré 1 et par conséquent $B_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$ ce qui implique $x \in B_{\mathcal{P}} \subset C$, mais $x \notin C$ par hypothèse. Par conséquent on a

$$0 < r' = \max_{0 \leq i < N} \text{diam}(B_{R^i(\mathcal{P})} - I) < r.$$

(2.1) Soit \mathcal{P}' le bout associé à $\{|z - x| \leq r'\} \subset \{|z| \leq 1\}$, donc \mathcal{P}' satisfait la propriété (i) par définition. Soit $\mathcal{Q}' \in \mathcal{S}$ le bout tel que $x \in D_{\mathcal{Q}'}$. Notons que $R^N(\mathcal{Q}') = \mathcal{Q}'$ et $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{Q}') = 1$ car R^N induit l'identité sur \mathcal{S} . Donc il existe une couronne ouverte A ayant \mathcal{Q}' comme bout telle que $R : A \rightarrow A$ est de degré 1. Par la Proposition 5.2 on a $A \subset \mathcal{E}(R)$ et comme $\mathcal{S} \prec C$ on a $\mathcal{Q}' \prec C$.

Par définition de r' on a $D_{\mathcal{Q}'} - B_{\mathcal{P}'} \subset I$, donc R est injective sur la couronne $D_{\mathcal{Q}'} - B_{\mathcal{P}'}$. Donc

$$B_{R(\mathcal{P}')} \subset D_{R(\mathcal{Q}')} \subset B_{\mathcal{P}} \subset \{|z| \leq 1\},$$

et par le Lemme d'Approximation on a $\text{diam}(R(\mathcal{P}')) = \text{diam}(B_{\mathcal{P}'}) = r'$. Alors par définition de r' on a $D_{R(\mathcal{Q}')} - B_{R(\mathcal{P}')} \subset I$.

Alors on peut montrer par induction (en utilisant le Lemme d'Approximation) que pour tout $i \geq 0$ on a $B_{R^i(\mathcal{P}')} \subset \{|z| \leq 1\}$ et $\text{diam}(B_{R^i(\mathcal{P}')}) = r'$; c'est-à-dire (iii) du 1. On applique le Corollaire 5.4 à les disques $D_{R^i(\mathcal{Q}')}$ et $r = r'$ et on obtient que \mathcal{P}' est périodique par R .

(2.2) Il reste à montrer que $\mathcal{P}' \prec C$. Comme dans 2.1 on peut montrer que tout bout $\widehat{\mathcal{P}}$ tel que $B_{\widehat{\mathcal{P}}} \subset B_{\mathcal{P}}$ et $\text{diam}(B_{\widehat{\mathcal{P}}}) = r'$ est périodique par R ; soit $n(\widehat{\mathcal{P}})$ la période

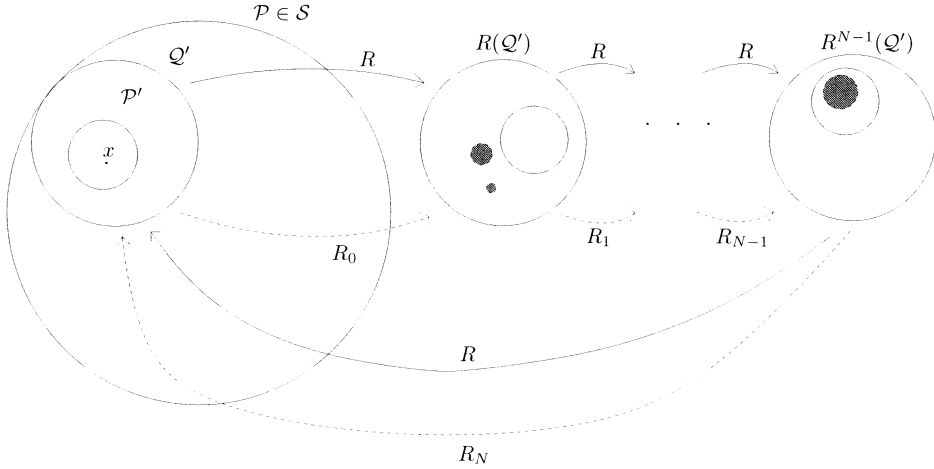


FIGURE 3. La partie grise représente le complémentaire de I .

de $\widehat{\mathcal{P}}$. Si de plus

$$\cup B_{R^i(\widehat{\mathcal{P}})} \subset I, \text{ pour } 0 \leq i < n(\widehat{\mathcal{P}}),$$

on a que $R^{n(\widehat{\mathcal{P}})} : B_{\widehat{\mathcal{P}}} \rightarrow B_{\widehat{\mathcal{P}}}$ est de degré 1 et on a $B_{\widehat{\mathcal{P}}} \subset \mathcal{E}(R)$ par le Corollaire 3.12.

Notons que l'ensemble \mathcal{T} des bouts $\widehat{\mathcal{P}}$ tels que $B_{\widehat{\mathcal{P}}} \subset B_{\mathcal{P}}$, $\text{diam}(B_{\widehat{\mathcal{P}}}) = r'$ et

$$\cup B_{R^i(\widehat{\mathcal{P}})} \not\subset I, \text{ pour } 0 \leq i < n(\widehat{\mathcal{P}}),$$

est fini. Par conséquent l'ensemble $D_{\mathcal{Q}'} - \cup_{\mathcal{T}} B_{\widehat{\mathcal{P}}} \subset \mathcal{E}(R)$ est un affinoïde ouvert connexe. Comme $\mathcal{Q}' \prec C$ cet affinoïde ouvert est contenu dans C . Donc $\mathcal{P}' \prec C$.

(3) Le bout \mathcal{P}_0 satisfait (i)-(iii) du 1. Dans 2 on a montré que si \mathcal{P} est un bout qui satisfait ces propriétés et $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{S}) = 1$ (où \mathcal{S} est le système projectif associé à \mathcal{P}) alors il existe un bout \mathcal{P}' dont $r' < r$ appartient à l'ensemble fini,

$$\{\text{diam}(B - I) \mid B \subset \mathbb{C}_p \text{ boule fermée telle que } B \cap I \neq \emptyset\}.$$

Par conséquent il existe un bout \mathcal{P} qui satisfait les propriétés (i)-(iii) du 1 et de plus $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{S}) > 1$.

(3.1) On va montrer qu'un tel bout $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}$ satisfait les assertions du lemme. Comme \mathcal{P}_x satisfait (i)-(iii) il reste à montrer que $B_{\mathcal{P}_x} \cap C = \emptyset$. Si $B_{\mathcal{P}_x} \cap C \neq \emptyset$ alors $\mathcal{S} \prec C$ car $\mathcal{P}_x \prec C$. Par conséquent $R^i(\mathcal{S}) \prec C$ et $\text{deg}_R(R^i(\mathcal{S})) = 1$, pour $0 \leq i < N$, par le Lemme 2.11. Mais ceci contredit $\text{deg}_{R^N}(\mathcal{S}) > 1$. Donc $B_{\mathcal{P}_x} \cap C = \emptyset$. \square

Démonstration du Théorème 3. — Sans perte de généralité on suppose que C est fixé par R . Par le lemme précédent, pour chaque $x \notin \mathcal{E}(R)$ il existe un bout $\mathcal{P}_x \prec C$ périodique par R de période n_x tel que $x \in B_{\mathcal{P}_x}$, $B_{\mathcal{P}_x} \cap C = \emptyset$ et tel que si \mathcal{S}_x est le système projectif associé à \mathcal{P}_x alors $\text{deg}_{R^{n_x}}(\mathcal{S}_x) > 1$.

Notons que $R^i(\mathcal{P}_x) \prec C$ et $B_{R^i(\mathcal{P}_x)} \cap C = \emptyset$, donc $A_x = \cup_{i \geq 0} B_{R^i(\mathcal{P}_x)}$ est disjoint de C . De plus, si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ alors $A_x = A_y$. Comme $\deg_{R^{n_x}}(S_x) > 1$, on a $R^{n_x}(B_{\mathcal{P}_x}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, sinon $R^{n_x} : B_{\mathcal{P}_x} \rightarrow B_{\mathcal{P}_x}$ est de degré 1 par le Corollaire 2.2 et par conséquent $x \in B_{\mathcal{P}_x} \subset C$ par le Corollaire 3.12. Donc on a $R(A_x) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ par le Corollaire 2.2.

Fixons $z \in C$. Alors C et chaque A_x contient un point de $R^{-1}(z)$, donc il y a au plus $\deg(R) - 1$ ensembles A_x disjoints deux à deux. Par conséquent $C = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \cup_{x \notin C} A_x$ est un affinoïde ouvert et les \mathcal{P}_x sont ses bouts. La dernière assertion du théorème suit du fait que $\deg_{R^{n_x}}(S_x) > 1$. \square

5.1. Dynamique sur une composante analytique. — Considérons une fonction rationnelle complexe $R \in \mathbb{C}(z)$ ayant un disque de Siegel ou un anneau de Herman C fixé par R . Alors R est conjuguée sur C à une rotation irrationnelle par une application holomorphe; voir [CG].

Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ le nombre de rotation correspondant. Alors pour tout $w \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on peut définir un automorphisme (holomorphe) $R^{\circ w}$ de C de nombre de rotation w . Donc on a une action de \mathbb{T} sur C définie par $(w, z) \rightarrow R^{\circ w}(z)$. De plus pour toute suite $\{n_j\}_{j \geq 1}$ d'entiers positifs telle que $n_j \alpha \rightarrow w$ dans \mathbb{T} , on a que R^{n_j} converge uniformément à $R^{\circ w}$ sur chaque partie compacte de C .

Dans cette section on montre des propriétés analogues sur \mathbb{C}_p , avec l'anneau $\mathbb{Z}_p = \{w \in \mathbb{Q}_p \mid |w| \leq 1\}$ au lieu de \mathbb{T} . L'anneau \mathbb{Z}_p est compact et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_p$ est dense sur \mathbb{Z}_p .

Une différence avec le cas complexe est qu'il ne suffit pas que la composante soit fixée. Il faut que les bouts de la composante soient fixés et que la fonction rationnelle soit tangente à l'identité en chaque bout de C . On dit qu'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est *tangente à l'identité en un bout* \mathcal{P} si R fixe \mathcal{P} et si la multiplicité de \mathcal{P} comme point fixe de l'action de R dans le système projectif associé à \mathcal{P} est strictement plus grande que 1.

Proposition 5.6. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et soit C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ de telle façon que R fixe C et les bouts de C . De plus supposons que R est tangente à l'identité en chaque bout de C . Alors on les propriétés suivantes.*

(1) *Pour chaque $w \in \mathbb{Z}_p$ il existe un automorphisme $R^{\circ w}$ de C tel que pour toute suite $\{n_j\}_{j \geq 1}$ d'entiers positifs telle que $n_j \rightarrow w$ au sens p -adique, R^{n_j} converge uniformément (pour la métrique chordale) à $R^{\circ w}$ sur chaque affinoïde fermé contenu dans C .*

(2) *L'application qui à $(w, z) \in \mathbb{Z}_p \times C$ associe $R^{\circ w}(z) \in C$ définit une action. En particulier $R^{\circ 0}$ est l'identité et on a $R^{\circ(w_1+w_2)} = R^{\circ w_1} \circ R^{\circ w_2}$ pour tous $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_p$.*

Comme \mathbb{Z}_p est compact le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 5.7. — *La suite $\{R^n\}_{n \geq 1}$ est normale sur chaque composante analytique C de $\mathcal{E}(R)$; c'est-à-dire que pour toute suite d'entiers positifs il existe une sous-suite $\{m_j\}_{j \geq 1}$ telle que R^{m_j} est uniformément convergent sur chaque affinoïde fermé contenu dans C .*

La démonstration de la proposition dépend de deux lemmes.

Lemme 5.8. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle qui soit tangente à l'identité au bout associé à $\{|z| < 1\}$. Alors il existe $r_0 \in (0, 1)$ tel que R induit l'identité sur le système projectif associé à $\{|z| < r\}$, pour chaque $r \in (r_0, 1)$.*

Démonstration. — Comme R est tangente à l'identité au bout associé à $\{|z| < 1\}$ on a $R(z) = z + z^2P(z)/Q(z)$ où $P, Q \in \mathbb{C}_p[z]$ sont des polynômes à coefficients entiers tels que $\tilde{Q}(0) \neq 0$. Par conséquent il existe $r_0 \in (0, 1)$ tel que pour chaque λ qui satisfait $r_0 < |\lambda| < 1$ on a $|P(\lambda)| \leq 1$ et $|Q(\lambda)| = 1$; voir Lemme 2.1. Donc la réduction de

$$\lambda^{-1}R(\lambda z) = z + \lambda z^2 \frac{P(\lambda z)}{Q(\lambda z)}$$

est l'identité. □

Lemme 5.9. — *Soit C un affinoïde ouvert et $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R : C \rightarrow C$ est de degré 1 et tel que R fixe les bouts de C . De plus supposons que R est tangente à l'identité en chaque bout de C . Alors R induit l'identité sur \mathcal{A}_C et sur chaque système projectif $\mathcal{S} \in \mathcal{A}_C$.*

Démonstration. — Comme $R : C \rightarrow C$ est de degré 1, R induit une isométrie sur \mathcal{A}_C ; voir Section 2.5. Comme R fixe les bouts de C , R induit l'identité sur \mathcal{A}_C .

Comme C est un affinoïde ouvert, chaque sommet \mathcal{S} de \mathcal{A}_C est l'extrémité d'au moins trois arêtes de \mathcal{A}_C . Par conséquent R fixe au moins trois éléments d'un sommet. Donc R induit l'identité sur chaque sommet de \mathcal{A}_C .

Donc pour toute arête $I = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \subset \mathbb{H}_p$ de \mathcal{A}_C , R est tangente à l'identité en chaque bout de C_I . Par le lemme précédent pour chaque $i \in \{0, 1\}$ il existe un système projectif \mathcal{S}'_i proche de \mathcal{S}_i tel que R induit l'identité sur chaque système projectif dans $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}'_i]$. En particulier R induit l'identité sur \mathcal{S}'_0 et \mathcal{S}'_1 . Alors R induit l'identité sur chaque système projectif dans $[\mathcal{S}'_0, \mathcal{S}'_1]$, par le Lemme 4.23. □

Démonstration de la Proposition 5.6. — Comme le degré de R est au moins deux $C \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et on peut supposer que $C \subset \mathbb{C}_p$.

Considérons une suite croissante d'affinoïdes fermés $X_i \subset C$ de telle façon que $\cup X_i = C$. Dans le cas où C n'est pas un disque R satisfait (avec $n = 1$) les propriétés de la Proposition 4.14 pour X_i , par le lemme précédent. On notera $\gamma_i \in (0, 1)$ une constante telle que $\|R - \text{id}\|_{X_i} \leq \gamma_i \cdot \text{diam}(D_x)$ pour $x \in X_i$.

Si C est un disque, on peut supposer que $C = \{|z| < 1\}$ et $X_i = \{|z| \leq r_i\}$, avec $r_i \in |\mathbb{C}_p| \cap (0, 1)$ tel que $r_i \rightarrow 1$. Alors par le Lemme 5.8 on peut supposer que R

induit l'identité sur le système projectif \mathcal{S}_i associé à X_i , pour chaque i . Comme dans ce cas $\mathcal{A}_{X_i} = \{\mathcal{S}_i\}$, R satisfait les propriétés de la Proposition 4.14 et alors on peut continuer comme dans le cas où C n'est pas un disque.

Étant donné $w \in \mathbb{Z}_p$ considérons une suite croissante $\{m_i\}_{i \geq 1}$ d'entiers positifs de façon que $\rho(|w - m_i|_p) < \gamma_j^{-1}$, pour tout $j \geq i$. Alors on a $R^{\circ(w-m_i)} \in \mathcal{H}(X_i)$ d'après le Corollaire 4.16. Notons que $R^{\circ(w-m_{i+1})}$ définie sur X_i coïncide avec la restriction de la même application définie sur X_{i+1} .

De plus on a $\rho(|m_{i+1} - m_i|_p) \leq \gamma_i^{-1}$, donc $R^{\circ(m_{i+1}-m_i)}$ est définie sur X_i et coïncide avec $R^{m_{i+1}-m_i}$. Par conséquent $R^{\circ(w-m_{i+1})}$ définie sur X_{i+1} et $R^{\circ(w-m_i)}$ définie sur X_i , satisfont l'identité suivante sur X_i ,

$$R^{m_{i+1}} \circ R^{\circ(w-m_{i+1})} = R^{m_i} \circ R^{\circ(m_{i+1}-m_i)} \circ R^{\circ(w-m_{i+1})} = R^{m_i} \circ R^{\circ(w-m_i)}.$$

Donc la fonction $R^{\circ w}$ définie par $R^{m_i} \circ R^{\circ(w-m_i)}$ sur X_i appartient à $\mathcal{H}(C)$. Notons qu'on a $R^{\circ 0} = \text{id}$; voir Corollaire 4.16.

Soit $\{n_j\}_{j \geq 1}$ une suite d'entiers positifs tels que $n_j \rightarrow w$ au sens p -adique et fixons $i \geq 0$. Alors il existe $J \geq 0$ tel que $\rho(|n_j - m_i|_p) < \gamma_i^{-1}$ pour tout $j \geq J$. Donc $R^{n_j - m_i} = R^{\circ(n_j - m_i)}$ sur X_i et par conséquent $R^{n_j} = R^{m_i} \circ R^{\circ(n_j - m_i)}$ converge uniformément à $R^{\circ w} = R^{m_i} \circ R^{\circ(w - m_i)}$ sur X_i ; voir Corollaire 4.16.

Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{Z}_p$; considérons des suites $\{n_j\}_{j \geq 1}$ et $\{k_j\}_{j \geq 1}$ d'entiers positifs tels que $n_j \rightarrow w_1$ et $k_j \rightarrow w_2$ au sens p -adique. Comme R^{n_j} et R^{m_j} convergent uniformément à $R^{\circ w_1}$ et $R^{\circ w_2}$ sur chaque X_i on a que $R^{n_j + k_j}$ converge uniformément à $R^{\circ(w_1 + w_2)}$ sur chaque X_i . Par conséquent $R^{\circ w_1} \circ R^{\circ w_2} = R^{\circ(w_1 + w_2)}$.

Comme pour chaque $w \in \mathbb{Z}_p$ on a $R^{\circ w} \circ R^{\circ(-w)} = R^{\circ 0} = \text{id}$, on a que $R^{\circ(-w)} \in \mathcal{H}(C)$ est l'inverse de $R^{\circ w}$ et par conséquent $R^{\circ w}$ est un automorphisme de C . \square

5.2. Composantes analytiques et points périodiques. — Dans cette section on s'intéresse aux points périodiques contenus dans une composante analytique donnée du domaine de quasi-périodicité.

Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et soit C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par R . Les bouts de C sont permutés par R . Notons $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_n$, les bouts *fixés* par R . Pour chaque $0 \leq i \leq n$, R induit une action projective (de degré au moins 2 par le Théorème 3) sur le système projectif \mathcal{S}_i associé à \mathcal{P}_i ; on note $n_R(\mathcal{P}_i)$ la multiplicité du point fixe \mathcal{P}_i pour cette action. Rappelons que quand $n_R(\mathcal{P}_i) > 1$ on dit que R est tangent à l'identité en \mathcal{P}_i .

Proposition 5.10. — *Le nombre de points fixes de R dans C comptés avec multiplicité est égal à*

$$2 + \sum_{0 \leq i \leq n} (n_R(\mathcal{P}_i) - 2).$$

La démonstration de cette proposition est à la fin de cette section. On considère d'abord des corollaires et un exemple.

Corollaire 5.11. — *Si C est un disque de Siegel fixe, alors C contient au moins un point fixe.*

Corollaire 5.12. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins deux et C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par R . Si aucun des bouts de C n'est fixé par R , alors C contient exactement deux points fixes de R , comptés avec multiplicités.*

Corollaire 5.13. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors chaque composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ contient une infinité de points périodiques de R .*

Démonstration. — Quitte à remplacer R par un itéré on suppose que tous les bouts $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ de C sont fixes et que R est tangente à l'identité en \mathcal{P}_i , pour $1 \leq i \leq n$. Notons que pour $k \geq 1$ on a $n_{R^{pk}}(\mathcal{P}_i) > n_{R^k}(\mathcal{P}_i)$. Par conséquent le nombre de points fixes de R^{pm} dans C (qui est égal à $2 + \sum (n_{R^{pm}}(\mathcal{P}_i) - 2)$ par la proposition) tend vers l'infini quand $m \rightarrow \infty$. Chaque point fixe de R^k a une multiplicité comme point fixe de R^{lk} qui est bornée indépendamment de l . Donc R a une infinité de points périodiques dans C ; voir Section 3.3. □

Corollaire 5.14. — *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par R . Supposons que R fixe les bouts de C et que R est tangente à l'identité en chaque bout de C . Alors tous les points périodiques de R dans C ont une période primitive de la forme p^m , $m \geq 0$.*

Démonstration. — Simplement note que pour tout $m \geq 0$ et tout $k \geq 1$ qui n'est pas divisible par p on a $n_{R^{kp^m}}(\mathcal{P}) = n_{R^{p^m}}(\mathcal{P})$ pour tout bout \mathcal{P} de C ; voir Section 3.3. □

Voici d'autres différences entre le cas complexe et le cas p -adique. Dans le cas complexe les disques de Siegel et les anneaux de Herman, coïncident avec le domaine de linéarisation, mais sur \mathbb{C}_p tous les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité contiennent une infinité de points périodiques et par conséquent les domaines de linéarisation sont strictement plus petits que les composantes analytiques correspondantes.

Une autre différence est que dans le cas complexe les disques de Siegel et les anneaux de Herman sont instables (voir [Ma]); c'est-à-dire que pour chaque fonction rationnelle à coefficients complexes on peut trouver des fonctions rationnelles arbitrairement proches qui n'ont pas de disque de Siegel ni de anneaux d'Herman. Dans le cas p -adique, si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle ayant l'affinoïde ouvert connexe C comme composante analytique de $\mathcal{E}(R)$, alors pour toute fonction rationnelle $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ proche de R , C est une composante analytique de $\mathcal{E}(Q)$.

Exemple 5.15. — Étant donnés $a, b, \lambda \in \mathbb{C}_p$ tels que $|a| = |b| < 1$ et $|\lambda| = 1$ considérons la fonction rationnelle

$$R(z) = \lambda z^2 \frac{1 - bz}{z - a}$$

et la couronne $C = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |a| < |z| < |b|^{-1}\}$. Notons qu'on a

$$\frac{1}{R(1/z)} = \lambda^{-1} z^2 \frac{1 - az}{z - b}.$$

(1) On va montrer que C est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. Notons que $R : C \rightarrow C$ est de degré 1 et R fixe les bouts de C . Soit \mathcal{P}_a le bout associé à $\{|z| > |a|\} \cup \{\infty\}$ et \mathcal{P}_b le bout associé à $\{|z| < |b|^{-1}\}$; ce sont les bouts de C . La coordonnée $w_a = -a/z$ (resp. $w_b = bz$) est telle que $w_a(\mathcal{P}_a)$ (resp. $w_b(\mathcal{P}_b)$) est le bout associé à $\{|z| < 1\}$. De plus

$$R_a(z) = w_a \circ R \circ w_a^{-1}(z) = \lambda^{-1} z^2 \frac{z+1}{z+ab} \quad \text{et} \quad R_b(z) = w_b \circ R \circ w_b^{-1}(z) = \lambda z^2 \frac{1-z}{z+ab}.$$

Donc $\tilde{R}_a(z) = \lambda^{-1}(z+z^2)$ et $\tilde{R}_b(z) = \lambda(z-z^2)$ sont de degré 2. Par la Proposition 5.2, C est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$.

(2) Notons que $n_R(\mathcal{P}_a) = n_R(\mathcal{P}_b) = 1$ si et seulement si $|\lambda - 1| = 1$. Donc par la Proposition 5.10, R a un point fixe dans C si et seulement si $|\lambda - 1| < 1$.

(2.1) On suppose que $|\lambda - 1| < 1$ de telle façon que $\tilde{R}_a(z) = z + z^2$ et $\tilde{R}_b(z) = z - z^2 = -\tilde{R}_a(-z)$. Donc $n_{R^k}(\mathcal{P}_a) = n_{R^k}(\mathcal{P}_b)$, pour $k \geq 1$. D'après l'exemple 3.19 on a $n_{R^{p^m}}(\mathcal{P}_a) = 1 + (1 + p + \dots + p^m)$. Par la Proposition 5.10 la fonction rationnelle R^{p^m} a

$$2 + (n_{R^{p^m}}(\mathcal{P}_a) - 2) + (n_{R^{p^m}}(\mathcal{P}_b) - 2) = 2(1 + \dots + p^m)$$

points fixes dans C , comptés avec multiplicité. Par conséquent, si R n'a pas de cycles paraboliques dans C , alors R a exactement 2 cycles de période primitive p^m . Par le Corollaire 5.14 ce sont tous les cycles de R contenus dans C .

Si $p = 2$ on obtient (par l'exemple 3.20 et par un raisonnement similaire) que si R n'a pas de cycles paraboliques dans C , alors R a exactement $2^{-m}(2^{2^m} - 2^{2^{m-1}})$ cycles de période primitive 2^m . Par le Corollaire 5.14 ce sont tous les cycles de R contenus dans C .

(3) On va montrer que si $\lambda = 1$ et $a = b = p$ alors R n'a pas de cycles paraboliques. Un théorème du à Fatou dit que tout cycle parabolique attire, dans le sens complexe, au moins un point critique; voir [Fa]. Donc il suffit de vérifier que tous les points critiques de R sont attirés (dans le sens complexe) par les points fixes super-attractifs 0 et ∞ .

Les points 0 et ∞ sont des points critiques. Notons que p est un pôle de R et pour tout autre réel $x \in \mathbb{R}$, $R(x)$ est réel. De plus R est négative dans l'intervalle $(p, +\infty)$ et par conséquent R a un point critique c dans $(p, +\infty)$. Comme $R(z) = -1/R(1/z)$, $-1/c$ est aussi un point critique de R . Alors 0, ∞ , c et $-1/c$ sont tous les points critiques de R .

Donc il suffit de vérifier que $R^n(c) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Notons que -1 est un point fixe répulsif de R et pour tout $x \in (-\infty, -1)$ on a $R(x) < x$. Par conséquent $R^n(x) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ car R n'a pas d'autre point fixe dans $(-\infty, -1)$. Finalement

il n'est pas difficile de voir que pour tout $x \in (p, +\infty)$ on a $R(x) < -1$, donc $R(c) < -1$ et par conséquent $R^n(c) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

Démonstration de la Proposition 5.10. — On va appliquer le Théorème des Résidus à $R - \text{id}$ sur $X = C$; voir Section 2.1.1. Considérons une coordonnée telle que $\infty \in C$ et telle que $R(\infty) \neq \infty$. Alors $R - \text{id}$ a deux pôles simples dans C : ∞ qui est un pôle simple de id et la préimage w de ∞ par R dans C , qui est un pôle simple car R est injective sur $C \subset \mathcal{E}(R)$.

Le nombre des zéros de $R - \text{id}$ dans C est évidemment égal au nombre F de points fixes de R dans C (comptés avec multiplicité). Par conséquent,

$$\sum_C \text{ord}_{R-\text{id}}(z) = F + \text{ord}_{R-\text{id}}(\infty) + \text{ord}_{R-\text{id}}(w) = F - 2.$$

Soit \mathcal{P} un bout de C . Notons que pour toute coordonnée affine w on a $\text{ord}_{w \circ R \circ w^{-1} - \text{id}}(\mathcal{P}) = \text{ord}_{R-\text{id}}(\mathcal{P})$. Donc après changement de coordonnée affine on peut supposer $D_{\mathcal{P}} = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$.

Si \mathcal{P} n'est pas fixé par R on a par le Lemme 2.3 $\mathcal{P}' = (R - \text{id})(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$, qui est un bout de C . Par conséquent $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$. Donc $\text{ord}_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = 0$ dans ce cas.

Supposons que \mathcal{P} est fixé par R . Soit $\tilde{R} \in \tilde{\mathbb{C}}_p(z)$ la réduction de R . Par définition de $n_R(\mathcal{P}) \geq 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{\tilde{R}(1/z)} = z + az^{n_R(\mathcal{P})} \frac{P(z)}{Q(z)},$$

où $a \in \tilde{\mathbb{C}}_p - \{0\}$ et les polynômes $P, Q \in \tilde{\mathbb{C}}_p[z]$ sont tels que $P(0) \neq 0$ et $Q(0) \neq 0$. Par conséquent

$$\tilde{R}(z) - z = \frac{1}{z^{n_R(\mathcal{P})-2}} \frac{P(1/z)}{aQ(1/z) + z^{1-n_R(\mathcal{P})}P(1/z)}.$$

Supposons $n_R(\mathcal{P}) = 1$. Comme $\deg_{\tilde{R}}(\infty) = \deg_R(\mathcal{P}) = 1$ on a $1 + aP(0)/Q(0) \neq 0$. Donc $\deg_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = \deg_{\tilde{R}-\text{id}}(\infty) = 1$ et $(\tilde{R} - \text{id})(\infty) = \infty$. Par conséquent $(R - \text{id})(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et

$$\text{ord}_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = -\deg_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = -1 = n_R(\mathcal{P}) - 2.$$

Si $n_R(\mathcal{P}) = 2$ alors $\tilde{R}(\infty) \in \tilde{\mathbb{C}}_p - \{0\}$. Donc $D_{(R-\text{id})(\mathcal{P})} \subset \mathbb{C}_p - \{0\}$ et par conséquent $\text{ord}_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = 0 = n_R(\mathcal{P}) - 2$.

Si $n_R(\mathcal{P}) > 2$ alors notons que $\deg_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = \deg_{\tilde{R}-\text{id}}(\infty) = n_R(\mathcal{P}) - 2$ et $\tilde{R}(\infty) = 0$. Par conséquent $\text{ord}_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = \deg_{R-\text{id}}(\mathcal{P}) = n_R(\mathcal{P}) - 2$.

Par le Théorème des Résidus on a

$$F - 2 = \sum_{\text{bouts fixes de } C} (n_R(\mathcal{P}) - 2). \quad \square$$

5.3. Dynamique au bouts d'une composante analytique

Proposition 5.16. — Soit R une fonction rationnelle de degré au moins deux, C une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ et \mathcal{P} un bout de C . Soit \mathcal{S} le système projective associé à \mathcal{P} . Alors il existe une infinité de $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{S}$ tels que $D_{\mathcal{P}_0}$ est un disque de Siegel.

Voir figure 4.

Démonstration. — Quitté à remplacer R par un itéré on peut supposer que \mathcal{P} , et par conséquent \mathcal{S} , est fixé par R . Considérons un paramétrage $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ comme dans (iii) de la Proposition 2.4 et soit $T \subset \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ tel que $\mathcal{T} = \cup_T \mathcal{P}(\xi)$.

Comme \mathcal{P} est un bout de C on a $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et donc $\tilde{R}' \neq 0$. Par conséquent il existe une infinité des $\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ périodiques par \tilde{R} tels que $(\tilde{R}^k)'(\xi) \neq 0$, où k est la période de ξ . On peut supposer de plus que $R^j(\xi) \notin \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) - T$, pour $i \leq j \leq k$. Donc par (iii) de la Proposition 2.4 et le Corollaire 3.12 on a $D_{\mathcal{P}(\xi)} \subset \mathcal{E}(R)$. Par le Théorème 3 on a $\deg(\tilde{R}) > 1$, donc D_α est un disque de Siegel par la Proposition 5.2. □

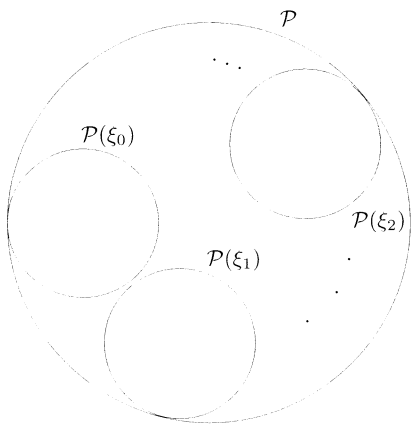


FIGURE 4. Chaque bout \mathcal{P} d'une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ a une infinité de disques de Siegel attachés.

Corollaire 5.17. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes.

- (i) R a un point périodique indifférent.
- (ii) R a une infinité de points périodiques indifférents.
- (iii) $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$.
- (iv) $\mathcal{E}(R)$ à une infinité de disques de Siegel.

Démonstration

(ii) \Rightarrow (i) est trivial; (i) \Rightarrow (iii) résulte du point 2 de la Proposition 3.16.

(iv) \Rightarrow (ii) suit du Corollaire 5.13 et (iii) \Rightarrow (iv) suit de la Proposition 5.16 et de (i) de la Proposition 5.10. □

6. Exemples

Dans cette section on considère des exemples. Dans la Section 6.1 on montre que pour tout affinoïde ouvert il existe une fonction rationnelle ayant chaque composante de l'affinoïde comme composante analytique de son domaine de quasi-périodicité (Proposition 6.4); voir aussi Proposition 6.7.

Exemple 6.1. — On va montrer que le bassin d'attraction de l'infini du polynôme $R(z) = p^{-1}(z - z^p)$ est égal à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$. Dans la Section 1.2.3 il y a une description de l'arbre de cet espace analytique.

Notons que pour $|w| > 1$ on a $|R(w)| \geq p|w|^p$, donc $\{|z| > 1\} \subset \mathcal{W}_R^s(\infty)$. De plus pour tout w tel que $|w - i| = 1$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$, on a $|w - w^p| = 1$. Donc $|R(w)| = p > 1$ et par conséquent $w \in \mathcal{W}_R^s(\infty)$.

D'autre part $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ est invariant par R donc $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p} \cap \mathcal{W}_R^s(\infty) = \emptyset$. Pour chaque $i \in \{0, \dots, p - 1\}$ l'application

$$R : D_i = \{|z - i| < 1\} \longrightarrow \{|z| < p\},$$

est de degré 1. Soit $R_i : \{|z| < p\} \rightarrow D_i$ la branche inverse correspondante. Pour tout $k \geq 0$ fixé on a

$$\mathbb{C}_p - \cup_{i_0, \dots, i_k \in \{0, \dots, p-1\}} R_{i_0} \circ \dots \circ R_{i_k}(\{|z| < p\}) \subset \mathcal{W}_R^s(\infty).$$

Alors l'égalité $\mathcal{W}_R^s(\infty) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p}$ suit du fait que

$$R_{i_0} \circ \dots \circ R_{i_k}(\{|z| < p\}) = \{z \mid |z - (i_0 + \dots + i_k p^k)| < p^{-k}\}.$$

Exemple 6.2. — Considérons la fonction rationnelle $R(z) = \lambda(\frac{z}{z-1} + z^p) \in \mathbb{C}_p(z)$, où $\lambda \in \mathbb{C}_p$ est tel que $p^{-(p-1)/(p+1)} < |\lambda| < 1$. On montrera que le bassin d'attraction du point fixe attractif 0 est de type Cantor et ne contient pas des points critiques.

Notons que pour chaque $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z| < 1$ on a $|R(z)| = |\lambda z|$. De plus $R(1) = R(\infty) = \infty$ et par conséquent $D = \{|z| < 1\}$ est le plus grand disque contenu dans le bassin d'attraction de 0. Comme $R(D) \neq D$, le bassin d'attraction immédiat de 0 est non-trivial.

D'autre part, si $z \in \mathbb{C}_p$ est tel que $|z| > 1$ alors $|R(z)| = |\lambda||z|^p$; donc, si de plus $|z| > |\lambda|^{-1/(p-1)}$, on a que $|R^n(z)| \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$. Comme $R'(z) = \lambda(-\frac{1}{(z-1)^2} + pz^{p-1})$, les points critiques finis de R sont de norme $p^{1/(p+1)}$. Donc la condition $|\lambda| > p^{-(p-1)/(p+1)}$ implique que tous les points critiques de R tend vers l'infini par itération, et par conséquent le bassin d'attraction de 0 ne contient pas des points critiques.

Exemple 6.3. — Considérons le polynôme $P(z) = \frac{1}{p}(z^p - z^{p^2})$. Notons que $0, 1 \in K(P) \subset \{|z| \leq 1\}$ et pour $|w| \leq 1$ on a,

$$P(z+w) - P(w) = \frac{1}{p}(z^p - z^{p^2}) + Q_w(z),$$

où $Q_w \in \mathbb{C}_p[z]$ est entier et $Q_w(0) = 0$. Par conséquent $|P(z+w) - P(w)| = p|z|^p$ pour tout $p^{-1/(p-1)} < |z| < 1$. En particulier pour toute boule fermée $B \subset \{|z| \leq 1\}$ de diamètre au moins $p^{-1/(p-1)}$, $P^{-1}(B)$ est une réunion de p boules B_0, \dots, B_{p-1} disjointes deux à deux avec

$$\text{diam}(B_i) = \left(\frac{1}{p} \text{diam}(B)\right)^{1/p} > p^{-1/(p-1)},$$

et $P : B_i \rightarrow B$ est de degré p . On pose $P^{-1}(\{|z| \leq 1\}) = B_0 \sqcup \dots \sqcup B_{p-1}$ où $\text{diam}(B_i) = p^{-1/p}$. En général,

$$P^{-n}(\{|z| \leq 1\}) = \sqcup_{a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}} B_{a_0 a_1 \dots a_{n-1}},$$

où les boules $B_{a_0 \dots a_{n-1}}$ sont de diamètre

$$p^{-(1/p+1/p^2+\dots+1/p^n)} = p^{-(1-p^{-n})/(p-1)} \longrightarrow p^{-1/(p-1)} \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

et les indices sont tels que $B_{a_0 \dots a_{n-1} a_n} \subset B_{a_0 \dots a_{n-1}}$ et $P(B_{a_0 a_1 \dots a_n}) = B_{a_1 \dots a_n}$. Considérons l'espace de codage Σ_p avec alphabet $\{0, \dots, p-1\}$,

$$\Sigma_p = \{.a_0 a_1 \dots \mid a_i \in \{0, \dots, p-1\}\},$$

et à chaque point $w \in K(P)$ on associe la suite $\pi(w) = .a_0 a_1 \dots$ de telle façon que $P^n(w) \in B_{a_n}$. Par conséquent l'application π respecte la dynamique de P sur $K(P)$ et la dynamique du décalage $\sigma : \Sigma_p \rightarrow \Sigma_p$ défini par $\sigma(.a_0 a_1 \dots) = .a_1 \dots$. Alors notons que $w \in \bigcap_{n \geq 0} B_{a_0 a_1 \dots a_n}$ et par conséquent w appartient à une composante errante si et seulement si $\pi(w)$ n'est pas prépériodique pour le décalage σ .

Jusqu'à maintenant on est dans une situation standard en dynamique. Mais notons que à chaque $\underline{a} = .a_0 a_1 \dots \in \Sigma_p$ on peut associer l'intersection $B_{\underline{a}} = \bigcap_{n \geq 0} B_{a_0 \dots a_n}$ et comme Σ_p n'est pas dénombrable il y a beaucoup d'*intersections vides*, car \mathbb{C}_p est séparable. (Ceci montre que \mathbb{C}_p n'est pas maximale complet, c'est-à-dire que il existe des suites emboîtées de boules B_n avec intersection vide : voir e.g. [Ro]).

Si l'intersection $B_{\underline{a}}$ est non-vide alors c'est une boule de diamètre $p^{-1/(p-1)}$. Par le Lemme 4.29 si D est un disque errant alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(P^n(D)) = 0.$$

Par conséquent tous les intersections $B_{\underline{a}}$ avec $\underline{a} \in \Sigma_p$ qui n'est pas prépériodique par σ , sont vides. De plus par le Lemme 4.13 pour toute suite périodique $\underline{a} \in \Sigma_p$ il existe un point périodique w de P , de même période, tel que $\pi(w) = \underline{a}$. Par conséquent $\pi(K(P)) \subset \Sigma_p$ est égal à l'ensemble des suites prépériodiques pour le décalage σ .

6.1. Exemples de composantes du domaine de quasi-périodicité

Proposition 6.4. — *Soit X un affinoïde ouvert. Alors il existe une fonction rationnelle R telle que chaque composante connexe de X est une composante analytique du domaine de quasi-périodicité de R .*

La démonstration de cette proposition se base sur le lemme suivant.

Lemme 6.5. — *Soit X un affinoïde ouvert et \mathcal{S} un système projectif tel que pour toute composante analytique Y de X il existe $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $Y \subset D_{\mathcal{P}}$. Alors il existe une fonction rationnelle R telle que $\deg_R(\mathcal{S}) > 1$, $R : X \rightarrow X$ est de degré 1 et telle que R fixe les bouts de X .*

Démonstration. — Après changement de coordonnée on peut supposer que \mathcal{S} est le système projectif canonique et que $X \subset \{|z| \leq 1\}$. Alors il existe un ensemble fini $A \subset \{|z| \leq 1\}$ tel que $X \subset \cup_A D_a$, ou $D_a = \{|z - a| < 1\}$. Le polynôme $Q(z) = z + \prod_A (z - a)^2$ est tel que $Q : D_a \rightarrow D_a$ est de degré 1 pour tout $a \in A$. Donc $D_a \subset \mathcal{E}(Q)$ par le Corollaire 3.12 et les bouts $\mathcal{P} \prec D_a$ de X sont périodiques par Q , par le Corollaire 4.20. Donc il existe n tel que $R = Q^n$ fixe les bouts de X . Par conséquent $R : X \rightarrow X$ est de degré 1 et $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg(R) = n \cdot \deg(Q) \geq 2$. □

Démonstration de la Proposition 6.4. — Soient $\mathcal{S}_0, \dots, \mathcal{S}_k$ les systèmes projectifs associés aux bouts de X et soit $R_{\mathcal{S}_i}$ comme dans le lemme précédent. Alors $R = R_{\mathcal{S}_0} \circ \dots \circ R_{\mathcal{S}_k} : X \rightarrow X$ est de degré 1 et $\deg_R(\mathcal{S}_i) > 1$. Par la Proposition 5.2 chaque composante connexe de X est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$. □

Exemple 6.6. — On va montrer que la fonction rationnelle,

$$R(w) = \frac{1 + w^{p+1}}{w^p(1 + (pw)^{p+1})} \in \mathbb{C}_p(w).$$

a $C = \{1 < |z| < p\}$ comme composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ et que l'ensemble de Julia de R est vide.

Notons que la coordonnée $1/pw$ est une symétrie de R , c'est-à-dire $R(w) = 1/pR(1/pw)$. Soit \mathcal{S}_0 le système projectif canonique et $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{S}_0$ le bout associé à $\{|w| \leq 1\}$, qui est un bout de C . On pose $D_0 = \{|w| < 1\}$ et $W_0 = \{|z| = 1\}$. Notons que la réduction de R est $(1 + w^{p+1})/w^p$ et pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_0 - \{\mathcal{P}_0\}$, $R : D_{\mathcal{P}} \rightarrow D_{R(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$. Par conséquent $R(W_0) = W_0 \sqcup D_0$ et R n'augmente pas la distance chordale $d_{\mathcal{S}_0}$ dans $W_0 \sqcup D_0$.

On pose $\mathcal{S}_1 = (\mathcal{S}_0)_{1/pw}$, $D_1 = (D_0)_{1/pw}, \dots$ de telle façon que $C = D_{\mathcal{P}_0} \cap D_{\mathcal{P}_1}$ et on a les propriétés analogues; en particulier R n'augmente pas la distance chordale $d_{\mathcal{S}_1}$ (correspondante à la coordonnée $1/pw$) dans $W_1 \sqcup D_1 = \{|w| \geq p\} \cup \{\infty\}$; voir figure 5. De plus la réduction de R dans la coordonnée $1/pw$ est aussi $(1 + w^{p+1})/w^p$. Il est facile de voir que $R : C \rightarrow C$ est de degré 1, et comme $\deg_R(\mathcal{S}_0) = \deg_R(\mathcal{S}_1) = p + 1 > 1$, C est une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ (Proposition 5.2).

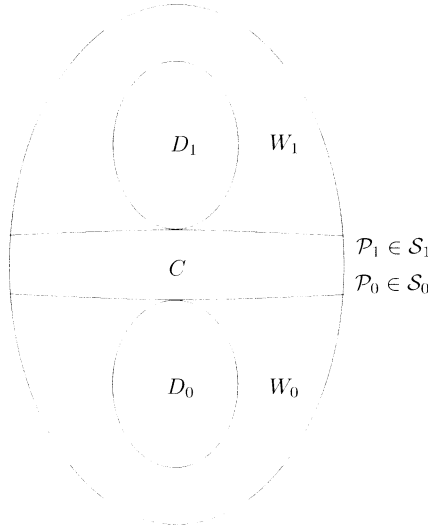


FIGURE 5. Partition de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

(1) On va montrer que, si $z, w \in D_0$ sont tels que

$$d_{S_0}(z, w) = |z - w| \leq p^{-1/(p-1)} \text{ et } R(w) \in \{|z| \geq p\} \cup \{\infty\},$$

alors $d_{S_1}(R(z), R(w)) \leq p^{-1/(p-1)}$. Ceci est équivalent à montrer que si $|1/pR(w)| \leq 1$ alors $|1/pR(z) - 1/pR(w)| \leq p^{-1/(p-1)}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{pR(z)} - \frac{1}{pR(w)} &= \frac{z^p(1 + (pz)^{p+1})}{p(1 + z^{p+1})} - \frac{w^p(1 + (pw)^{p+1})}{p(1 + w^{p+1})} \\ &= \frac{z^p - w^p - (zw)^p(z - w) + (pz)^{p+1}(1 + w^{p+1}) - (pw)^{p+1}(1 + z^{p+1})}{p(1 - z^{p+1})(1 + w^{p+1})}. \end{aligned}$$

Notons que $|1 + z^{p+1}| = |1 + w^{p+1}| = 1$ et

$$|(pz)^{p+1}(1 + w^{p+1}) - (pw)^{p+1}(1 + z^{p+1})| \leq p^{-(p+1)} < \frac{1}{p} p^{-1/(p-1)}.$$

D'autre part, si $\varepsilon = z - w$, alors,

$$|z^p - w^p| = |p\varepsilon w^{p-1} + \dots + p\varepsilon^{p-1}w + \varepsilon^p| \leq \frac{1}{p} p^{-1/(p-1)},$$

car $|\varepsilon| \leq p^{1/(p-1)}$ et $|\varepsilon^p| \leq \frac{1}{p} p^{-1/(p-1)}$. De plus, comme

$$1 \geq \left| \frac{1}{pR(w)} \right| = \left| \frac{w^p(1 + (pw)^{p+1})}{p(1 + w^{p+1})} \right| = p|w|^p,$$

on a $p|z|^p \leq 1$ et donc $|(zw)^p(z - w)| \leq \frac{1}{p^2} p^{-1/(p-1)}$. Par conséquent

$$\left| \frac{1}{pR(z)} - \frac{1}{pR(w)} \right| \leq p \left(\frac{1}{p} p^{-1/(p-1)} \right) = p^{-1/(p-1)}.$$

(2) Montrons maintenant que $F(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Notons que $C \subset \mathcal{E}(R) \subset F(R)$. Fixons $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - C$; par symétrie on peut supposer $|z_0| \leq 1$. Comme $R^{-1}(F(R)) = F(R)$, s'il existe n tel que $R^n(z_0) \in C$ alors $z_0 \in F(R)$; donc on peut supposer que $R^n(z_0) \notin C$, pour $n \geq 0$.

Par la partie 1, pour tout $w_0 \in B = \{|w - z_0| < p^{-1/(p-1)}\}$ et tout $n \geq 1$, on a $d_{S_i}(R^n(z_0), R^n(w_0)) \leq p^{-1/(p-1)}$, où $i = 0$ si $R^n(z_0) \in \{|z| \leq 1\}$ et $i = 1$ sinon. Par conséquent la famille $\{R^n\}_{n \geq 0}$ est uniformément lipschitzienne sur B , et donc $z_0 \in B \subset F(R)$.

La Proposition 6.4 ne nous donne aucune information sur le degré de la fonction rationnelle. Avec la proposition suivante, dans un cadre plus restrictif, on aura un contrôle sur le degré.

L'idée est de modifier une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ ayant une bonne réduction; voir Section 4.5. Par la Proposition 4.32, si $\deg(R) > 1$, les composantes analytiques de $\mathcal{E}(R)$ sont des disques de la forme $\{\tilde{z} = \xi\}$. Si $\deg(R) = 1$ alors $\mathcal{E}(R) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$; voir exemples dans la Section 3.2.

Proposition 6.7. — Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une bonne réduction. Soit $r \in |\mathbb{C}_p|$ tel que $r < 1$ et soient des $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ bouts tels que $B_{\mathcal{P}_i} \subset \mathcal{E}(R)$ et $\text{diam}(B_{\mathcal{P}_i}) = r$. Alors il existe une fonction rationnelle Q de degré $\deg(Q) = \deg(R) + n$ telle que pour toute composante analytique C de $\mathcal{E}(R)$, l'affinoïde ouvert connexe

$$C - \cup_{\mathcal{T}} B_{\mathcal{P}}, \text{ où } \mathcal{T} = \{R^j(\mathcal{P}_i) \mid \text{pour } 1 \leq i \leq n \text{ et } j \geq 1\},$$

est une composante analytique de $\mathcal{E}(Q)$.

Notons que par le Corollaire 5.3, l'ensemble \mathcal{T} de la proposition est fini. La démonstration de cette proposition est à la fin de cette section.

Exemple 6.8. — Considérons des bouts $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ tels que les boules $B_{\mathcal{P}_1}, \dots, B_{\mathcal{P}_n}$ sont disjointes deux à deux et de même diamètre. Alors par la proposition (en prenant $R = \text{id}$) il existe une fonction rationnelle Q de degré $n + 1$ telle que

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_1 \cup \dots \cup B_n,$$

est une composante analytique de $\mathcal{E}(Q)$.

Exemple 6.9. — Soit $n \geq 1$ et ζ racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité et soit $r \in |\mathbb{C}_p|$ tel que 1 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité dans la boule $\{|z - 1| \leq r\}$. Soit \mathcal{P} le bout associé à cette boule. Posons $R(z) = \zeta z$ et notons que $R^n(B_{\mathcal{P}}) = B_{\mathcal{P}}$ et que les boules $B_{\mathcal{P}}, \dots, R^{n-1}(B_{\mathcal{P}})$ sont disjointes deux à deux. Par la proposition il existe une fonction rationnelle Q de degré 2 telle que

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}} \cup \dots \cup R^{n-1}(B_{\mathcal{P}}),$$

est une composante analytique de $\mathcal{E}(Q)$ (un $(n - 1)$ -anneau de Herman).

Démonstration de la Proposition 6.7. — Soit \mathcal{S} le système projectif canonique et $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tels que $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$. Comme $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ l'ensemble \mathcal{I} est infini et on peut trouver $\mathcal{Q} \in \mathcal{I}$ tel que $D_{\mathcal{Q}} \cap (\cup_{\mathcal{T}} B_{\mathcal{P}}) = \emptyset$. Après changement de coordonnée on suppose que $\infty \in D_{\mathcal{Q}}$, de telle façon que $D_{\mathcal{Q}} = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Soit \mathcal{S}_i le système projectif associé à \mathcal{P}_i , pour $1 \leq i \leq n$.

1.— On va définir par induction des fonctions rationnelles $R_i \in \mathbb{C}_p(z)$ qui satisfont les propriétés suivantes.

- (1) $\deg(R_i) = \deg(R) + i$, pour $1 \leq i \leq n$.
- (2) $\deg_{R_i}(\mathcal{S}_j) > 1$, pour $1 \leq j \leq i$.
- (3) R_i est injective sur $D_{\mathcal{P}} - (B_{\mathcal{P}_1} \cup \dots \cup B_{\mathcal{P}_i})$, pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{I}$.
- (4) Pour tout bout $\mathcal{P} \notin \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_i\}$ tel que $B_{\mathcal{P}} \subset \{|z| \leq 1\}$ et $\text{diam}(B_{\mathcal{P}}) = r$ on a $R_i(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$ et $R_i : B_{\mathcal{P}} \rightarrow B_{R(\mathcal{P})}$ est de degré 1.

Notons que 4 implique 3. Posons $R_0 = R$ et supposons que R_{i-1} est déjà définie. Après changement affine de coordonnée au départ et à l'arrivée, on suppose que $0 \in B_{\mathcal{P}_i}$ et $R_{i-1}(0) = 0$ de telle façon que $R_{i-1}(B_{\mathcal{P}_i}) = \{|z| \leq r\} = B_{\mathcal{P}_i}$.

On pose

$$R_i(z) = \frac{z}{z - \mu} R_{i-1}(z) = R_{i-1}(z) + \frac{\mu}{z - \mu} R_{i-1}(z),$$

où $\mu \in \mathbb{C}_p$ est de norme égale à r . Clairement $\deg(R_i) = \deg(R_{i-1}) + 1 = \deg(R) + i$, donc R vérifie 1. De plus $\deg_{R_i}(\mathcal{S}_i) > 1$.

Comme R_{i-1} vérifie 4 on a

$$|R_{i-1}(z_0)| = |z_0| \text{ pour tout } z_0 \in \{|z| \leq 1\} - B_{\mathcal{P}_1} \cup \dots \cup B_{\mathcal{P}_{i-1}}.$$

Par conséquent, si de plus $z_0 \notin B_{\mathcal{P}_i}$, on a $|R_i(z) - R_{i-1}(z)| \leq r$. Donc si \mathcal{P} est comme dans 4 on a $R_i(\mathcal{P}) = R_{i-1}(\mathcal{P}) = R(\mathcal{P})$, $\deg_{R_i}(\mathcal{P}) = 1$ (Lemme 2.3) et $R_i : B_{\mathcal{P}} \rightarrow B_{R(\mathcal{P})}$ est de degré 1. C'est à dire R_i vérifie 4, et par conséquent 3.

Fixons $1 \leq j < i$ et considérons $\zeta_0 \in B_{\mathcal{P}_j}$ et $\zeta_1 \in B_{R(\mathcal{P}_j)}$. On a $|\zeta_0| = |\zeta_1| > r$. On pose $Q_0(z) = R_{i-1}(z + \zeta_0) - \zeta_1$ et $Q_1(z) = R_i(z + \zeta_0) - \zeta_1$. Comme R_{i-1} satisfait la propriété 4, on a $Q_0(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $\deg_{Q_0}(\mathcal{S}) > 1$, où \mathcal{P} est le bout de $\{|z| \leq r\}$ et \mathcal{S} est le système projectif contenant \mathcal{P} . Par définition de R_i et Q_1 on a

$$Q_1(z) = \frac{z + \zeta_0}{z + \zeta_0 - \mu} R_{i-1}(z + \zeta_0) - \zeta_1 = \frac{z + \zeta_0}{z + \zeta_0 - \mu} Q_0(z) + \zeta_1 \frac{\mu}{z + \zeta_0 - \mu}.$$

Comme $|\zeta_0| = |\zeta_1| > r = |\mu|$ on conclut que $Q_1(\mathcal{P}) = Q_0(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $\deg_{Q_1}(\mathcal{S}) = \deg_{Q_0}(\mathcal{S}) > 1$ (Lemme 2.3). Donc $R_i(\mathcal{P}_j) = R(\mathcal{P}_j)$ et $\deg_{R_i}(\mathcal{S}_j) > 1$.

2.— Posons $Q = R_n$ et considérons un cycle C_1, \dots, C_k de composantes analytiques de $\mathcal{E}(R)$ de telle façon que $R(C_i) = C_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq k$, où $C_{k+1} = C_0$. Par les propriétés 2 et 3, Q^k vérifie les hypothèses de la Proposition 5.2 avec $X = C_i - \cup_{\mathcal{T}} B_{\mathcal{P}}$ pour chaque $1 \leq i \leq k$. Par conséquent les affinoïdes ouverts $C_i - \cup_{\mathcal{T}} B_{\mathcal{P}}$, pour $1 \leq i \leq k$, forment un cycle de composantes analytiques de $\mathcal{E}(Q)$. □

Références

- [AV] D. Arrowsmith, F. Vivaldi. *Geometry of p -adic Siegel discs*. Phys. D **71** #1-2 (1994), 222–236.
- [Be] R. Benedetto. *Fatou components in p -adic dynamics*. Thesis, Brown University 1998.
- [CG] L. Carleson, T. Gamelin. *Complex dynamics*. Springer-Verlag 1991.
- [Ca] J.W.S. Cassels. *Local fields*. LMS student texts **3**. Cambridge Univ. Press (1986).
- [DH] A. Douady, J. Hubbard. *On the dynamics of polynomial-like mappings*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup **18** (1985), 287–343.
- [Ec1] J. Ecalte. *Théorie des invariants holomorphes*. Thèse d'état, Orsay, Mars 1974. Voir aussi *Théorie itérative : introduction à la théorie des invariants holomorphes*. J. math. pures et appl. **54** (1975), 183–258.
- [Ep] A. Epstein. *Infinitesimal Thurston rigidity and the Fatou-Shishikura inequality*. IMS preprint #1999 / 1.
- [Es] A. Escassut. *Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate*. Astérisque **10** (1973).
- [Fa] P. Fatou. *Sur les équations fonctionnelles*. Bull. Soc. Math. France **47** (1919), 161–217.
- [FvP] J. Fresnel, M. van der Put. *Géométrie Analytique rigide et applications*. PM 18, Birkhäuser 1981.
- [GvP] L. Gerritzen, M. van der Put. *Schottky groups and Mumford curves*. LMN 817, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [GH] Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Edité par E. Ghys et P. de la Harpe. Progress in Mathematics, 83. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1990.
- [Gu] J. Gukenheimer. *Sensitive dependence on initial conditions for one dimensional maps*. Comm. Math. Phys. **70** (1979), 133–160.
- [HY] M. Herman, J.-C. Yoccoz. *Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields*. Geometric Dynamics (Rio de Janeiro, 1981), LMN 1007, Springer-Verlag Berlin-New York, (1983), 408–447.
- [Hs] L.C. Hsia. *Closure of periodic points over a non-Archimedean field*. J. London Math. Soc. **62** (2000), 685–700.
- [Ke] K. Keating. *Automorphisms and extensions of $k((t))$* . J. Number Th. **41** (1992), 314–321.
- [Ku] M. Kuczma. *Functional equations in a simple variable*. Monografie Mat. **46** (1968).
- [La] P. Lavaurs. *Systèmes dynamiques holomorphes : explosion de points périodiques paraboliques*. Thèse, Université de Paris-Sud, 1989.
- [Le] J. Lewis. *Invariant sets of morphisms on projective and affine number spaces*. J. Algebra **20** (1972) 419–434.
- [Li1] H.-C. Li. *p -adic periodic points and Sen's theorem*. J. Number Th. **56** (1996), 309–318.
- [Li2] H.-C. Li. *p -adic power series which commute under composition*. Tran. of A.M.S. **349** (1997), 1437–1446.
- [Li3] H.-C. Li. *Counting periodic points of p -adic power series*. Compositio Math. **100** (1996), 351–364.
- [Lul] J. Lubin. *Nonarchimedean dynamical systems*. Compositio Math. **94** (1994), 321–346.

- [Lu2] J. Lubin. *Another proof of Sen's theorem on iteration of power series*. Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 63–66.
- [Ma] R. Mañé. *On the instability of Herman rings*. Invent. Math. **81** (1985), 459–471.
- [Mi] J. Milnor. *On bicritical rational maps*. IMS preprint #1997 / 10.
- [MS1] P. Morton, J. Silverman. *Rational periodic points of rational functions*. Inter. Math. Res. Notices. **1** (1994), 97–110.
- [MS2] P. Morton, J. Silverman. *Periodic points, multiplicities, and dynamical units*. J. Reine Agnew. Math. **461** (1995), 81–122.
- [Mo] E. Motzkin. *L'arbre d'un quasi connexe : un invariant conforme p -adique*. Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 9ème année, **3** (1981/82), 18p.
- [No] D. Northcott. *Periodic points of an algebraic variety*. Ann. Math. **51** (1950), 167–177.
- [R-L] J. Rivera-Letelier. *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux*. Thèse, Orsay 2000.
- [Ro] P. Robba. *Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets*. Astérisque **10** (1973).
- [Ru1] R. Rumely. *Capacity theory on algebraic curves and canonical heights*. Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 12ème année, **22** (1984/85), 17p.
- [Ru2] R. Rumely. *Capacity theory on algebraic curves*. LNM 1378, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.
- [Se] S. Sen. *On automorphisms of local fields*. Ann. of Math. **90** (1969), 33–46.
- [Sh] M. Shishikura. *On the Quasiconformal surgery of rational functions*. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 1–29.
- [Sul] D. Sullivan. *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I : Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains*. Ann. of Math. **122** (1985), 401–418.
- [TVW] E. Thiran, D. Verstegen, J. Weyers. *p -adic dynamics*. J. Stat. Phys. **54**#**3/4** (1989), 839–913.
- [Vo] S.M. Voronin. *Classification analytique des germes d'applications conformes $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tangents à l'identité* (en russe), Functional Analysis **15/1** (1981), 1–17.
- [Y] J.C. Yoccoz. *Petits diviseurs en dimension 1*. Astérisque **231** (1995).

J. RIVERA-LETELIER, Depto de Matemáticas, Univ. Católica del Norte, Casilla 1280, Antofagasta, Chile • E-mail : rivera-letelier@ucn.cl