# Autour de l'analyse microlocale - Volume en l'honneur de Jean-Michel Bony - Pages préliminaires

*Astérisque*, tome 284 (2003), p. I-XIV
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2003__284__R1_0>

ASTÉRISQUE 284

# AUTOUR DE L'ANALYSE MICROLOCALE

## VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

édité par

Gilles Lebeau

Société Mathématique de France 2003
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

*G. Lebeau*
UMR 6621 du CNRS, Laboratoire J.A. Dieudonné, Université de Nice,
Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France.
*E-mail :* `Gilles.Lebeau@math.unice.fr`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 17B15, 30C35, 30D05, 31C10, 35A, 35A07, 35A27, 32C38, 35D10, 35H, 35L25, 35L40, 35L55, 35L70, 35N, 35P05, 37F99, 37J40, 37K05, 47J20, 58J52.

***Mots clefs.*** — Équation d'ondes quasi-linéaire, inégalité d'énergie, décroissance, explosion, optique géométrique, inégalité de Poincaré, calcul paradifférentiel, norme à poids, estimation bilinéaire, analyse microlocale, calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander, faisceaux, micro-support, $\mathcal{D}$-modules, ind-objets, groupe de Lie, paire symétrique, régularité, Bohr, Sommerfeld, valeur propre, tore, équation de Cauchy-Riemann, inégalité de Sobolev logarithmique, opérateurs de Hörmander, hypoellipticité, vitesse de groupe, polynôme hyperbolique, opérateur hyperbolique, variété caractéristique, réflexion de Schwarz, transformations conformes, paires d'arcs analytiques.

# AUTOUR DE L'ANALYSE MICROLOCALE

## VOLUME EN L'HONNEUR DE JEAN-MICHEL BONY

**édité par Gilles Lebeau**

***Résumé.*** — À l'occasion du soixantième anniversaire de Jean-Michel Bony, ses élèves, collaborateurs et amis ont tenu à lui dédier ce volume de la collection *Astérisque*. Il contient des articles de recherche en Analyse Microlocale linéaire, non-linéaire, algébrique..., illustrant la vivacité de ce domaine des mathématiques auquel J.-M. Bony a tant contribué.

***Abstract* (Around microlocal analysis. Volume in honor of Jean-Michel Bony)**

On the occasion of the sixtieth birthday of Jean-Michel Bony, his former students, collaborators and friends dedicate to him this *Astérisque* volume. It contains research articles on the linear, non-linear and algebraic microlocal analysis..., illustrating the vividness of this field of mathematics to which J.-M. Bony contributed so much.

# TABLE DES MATIÈRES

# RÉSUMÉS DES ARTICLES



Nous considérons un exemple d'équation d'ondes quasi-linéaire qui se situe entre les exemples vraiment non-linéaires (pour lesquels l'explosion en temps fini est connue) et les exemples vérifiant la condition nulle (pour lesquels la solution existe globalement et est asymptotiquement libre). Nous montrons l'existence globale, bien que des arguments d'optique géométrique non-linéaire indiquent un comportement non libre de la solution à l'infini. La méthode de la preuve fait intervenir la commutation avec des champs dépendant de $u$, et utilise des idées proches de celles du calcul paradifférentiel.



Dans cet article, nous étudions l'existence et l'unicité locale de solutions pour une équation d'onde quasilinéaire cubique. Les classiques estimations de Strichartz ne sont pas adaptées dans ce cas. Nous démontrons des estimations bilinéaires pour des solutions d'équations d'ondes à coefficients variables. Les deux outils principaux sont le calcul paradifférentiel de Bony et la microlocalisation au sens du calcul pseudodifférentiel de Weyl-Hörmander.



Nous introduisons les notions de micro-support et régularité pour les ind-faisceaux et prouvons leur invariance par transformations de contact quantifiées. Nous appliquons ces résultats aux ind-faisceaux des solutions holomorphes tempérées des $\mathcal{D}$-modules. Nous prouvons que le micro-support d'un tel ind-faisceau est la variété caractéristique du $\mathcal{D}$-module correspondant et que le ind-faisceau est régulier si le $\mathcal{D}$-module est holonome régulier. Nous calculons enfin un exemple du ind-faisceau des solutions tempérées d'un $\mathcal{D}$-module irrégulier en dimension un.

Sur une algèbre de Lie réductive, les distributions invariantes qui sont vecteurs propres des opérateurs différentiels bi-invariants sont les solutions d'un système holonome. Il a été démontré par Kashiwara-Hotta que ce module est régulier. Nous résolvons ici une conjecture de Sekiguchi en montrant que ce résultat est encore vrai dans le cas plus général des paires symétriques.



Pour une classe d'opérateurs $h$-pseudodifférentiels non-autoadjoints, nous déterminons toutes les valeurs propres dans un domaine complexe indépendant de $h$ et nous montrons que ces valeurs propres sont données par une condition de quantification de Bohr-Sommerfeld. Aucune condition d'integrabilité complète est supposée, et une étape géométrique de la démonstration est donnée par un théoreme du type KAM dans le complexe (sans petits dénominateurs).



Soit $X = (X_1, \ldots, X_m)$ un système de champs de vecteurs infiniment dégénérés. On montre d'abord l'inégalité de Sobolev logarithmique pour ce système de champs de vecteurs sur les espaces de fonctions associés, puis on étudie le problème de Dirichlet semi-linéaire pour des opérateurs somme de carrés de champs de vecteurs $X$.



En un point lisse d'une variété caractéristique définie par un polynôme homogène hyperbolique, le plan tangent détermine la vitesse de groupe. Dans cet article, on en déduit un algorithme algébrique de calcul de ce plan tangent en un point donné. Il n'est intéressant que là où la différentielle du polynôme s'annule.



Nous montrons que des arguments géométriques très simples, basés sur la réflexion de Schwarz, permettent souvent de décider si deux paires d'arcs analytiques tangents en $0 \in \mathbb{C}$ sont analytiquement équivalentes au voisinage de 0. Nous en déduisons la construction de familles nombreuses de germes, formellement mais non analytiquement conjugués, de difféomorphismes analytiques résonnants de $(\mathbb{C}, 0)$.

# ABSTRACTS



We consider an example of a Quasilinear Wave Equation which lies between the genuinely nonlinear examples (for which finite time blowup is known) and the null condition examples (for which global existence and free asymptotic behavior is known). We show global existence, though geometrical optics techniques show that the solution does not behave like a free solution at infinity. The method of proof involves commuting with fields depending on $u$, and uses ideas close to that of the paradifferential calculus.



In this paper, we study the local wellposedness of a cubic quasilinear wave equation. The Strichartz estimate used for the solutions of linear variable coefficients wave equations are not relevant here. We prove bilinear estimates for solutions of linear wave equations with variable coefficients. The main tools are Bony's paradifferential calculus and the microlocalization in the sense of Weyl-Hörmander calculus.



We introduce the notions of micro-support and regularity for ind-sheaves, and prove their invariance by quantized contact transformations. We apply these results to the ind-sheaves of temperate holomorphic solutions of $\mathcal{D}$-modules. We prove that the micro-support of such an ind-sheaf is the characteristic variety of the corresponding $\mathcal{D}$-module and that the ind-sheaf is regular if the $\mathcal{D}$-module is regular holonomic. We finally calculate an example of the ind-sheaf of temperate solutions of an irregular $\mathcal{D}$-module in dimension one.

The invariant eigendistributions on a reductive Lie algebra are solutions of a holonomic $\mathcal{D}$-module which has been proved to be regular by Kashiwara-Hotta. We solve here a conjecture of Sekiguchi saying that in the more general case of symmetric pairs, the corresponding module is still regular.



For a class of non-selfadjoint $h$-pseudodifferential operators in dimension 2, we determine all eigenvalues in an $h$-independent domain in the complex plane and show that they are given by a Bohr–Sommerfeld quantization condition. No complete integrability is assumed, and as a geometrical step in our proof, we get a KAM–type theorem (without small divisors) in the complex domain.



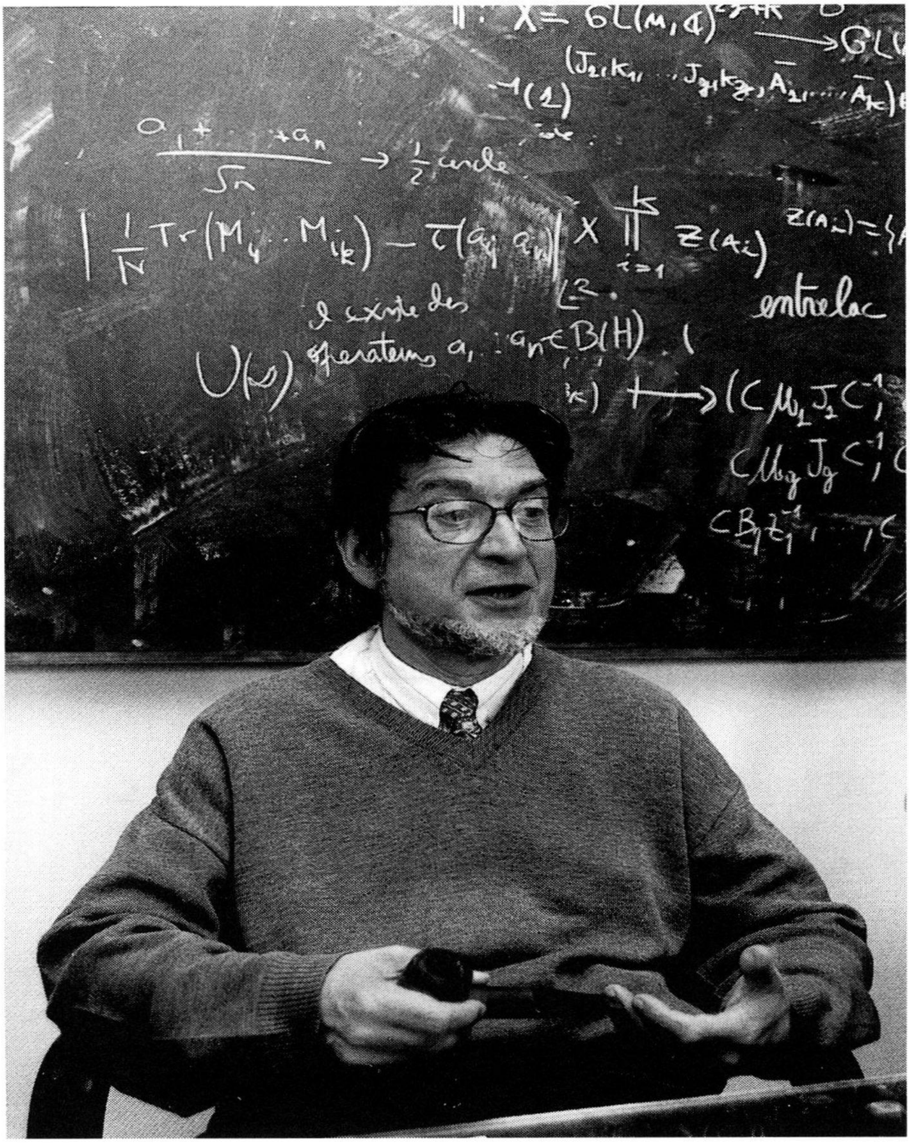
Let $X = (X_1, \dots, X_m)$ be an infinitely degenerate system of vector fields, we prove firstly the logarithmic Sobolev inequality for this system on the associated Sobolev function spaces. Then we study the Dirichlet problem for the semilinear problem of the sum of square of vector fields $X$.



At a smooth point of the characteristic variety defined by a homogeneous hyperbolic polynomial, the tangent plane determines the group velocity. In this note an algebraic algorithm is derived for computing this tangent plane at a given point. This is interesting only where the differential of the polynomial vanishes.



We show that simple geometric arguments, based on the Schwarz reflection, allow in many cases to decide whether two pairs of tangent analytic arcs at $0 \in \mathbb{C}$ are conformally equivalent in a small neighborhood of 0. As an application, we exhibit big families of germs of analytic resonant diffeomorphisms of $(\mathbb{C}, 0)$, which are formally, but not analytically conjugate.




Jean-Michel Bony (mai 2002)

# PRÉFACE

L'Analyse Microlocale s'est développée dans le dernier tiers du vingtième siècle à la suite des travaux fondateurs de M. Sato et de son école en Analyse Algébrique. Jean-Michel Bony est un des principaux artisans de l'extraordinaire fécondité de cette « analyse dans l'espace de phase », dont les concepts et méthodes vont tant faire progresser notre compréhension des équations aux dérivées partielles.

À l'occasion de son soixantième anniversaire, ses élèves, collaborateurs et amis ont donc souhaité offrir à Jean-Michel Bony ce recueil d'articles de recherche.

On y trouvera deux articles en Analyse Algébrique, un d'Analyse Complexe, trois en Analyse Microlocale linéaire et deux en Analyse Microlocale non-linéaire. M. Kashiwara et P. Schapira introduisent et développent leur théorie du micro-support des Ind-faisceaux. Y. Laurent prouve une conjecture de Sekiguchi sur la régularité des $\mathcal{D}$-modules associés à une paire symétrique. J.-M. Trépreau expose une approche géométrique de la classification holomorphe des paires d'arcs tangents. A. Melin et J. Sjöstrand élucident la théorie spectrale des opérateurs non autoadjoints en dimension 2. Y. Morimoto et C.-J. Xu étudient les sommes de carrés de champs de vecteurs inifiniment dégénérés. J. Rauch introduit un algorithme de calcul de la vitesse de groupe d'une équation hyperbolique. Enfin, l'article de S. Alinhac sur le comportement asymptotique des équations d'ondes non-linéaires et celui de H. Bahouri et J.-Y. Chemin sur le problème de Cauchy local pour les équations d'ondes quasi-linéaires illustrent l'efficacité des techniques d'analyse microlocale non-linéaire, dont Jean-Michel Bony, en inventant le paraproduit, fut le pionnier.

Gilles Lebeau