OLIVIER BIQUARD

Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques

Astérisque, tome 265 (2000)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__265__1_0>

ASTÉRISQUE 265

MÉTRIQUES D'EINSTEIN ASYMPTOTIQUEMENT SYMÉTRIQUES

Olivier Biquard

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

O. Biquard
CMAT, UMR 7640 du CNRS, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex.
E-mail : `Olivier.Biquard@math.polytechnique.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991). —** 53C25, 58G30, 53C15, 32L25.

***Mots clefs*. —** Métrique d'Einstein, espace symétrique de rang un, espace de Hölder à poids, structure de contact, métrique quaternion-kählérienne, espace de twisteurs.

MÉTRIQUES D'EINSTEIN ASYMPTOTIQUEMENT SYMÉTRIQUES

Olivier Biquard

Résumé. — Cet article étudie les métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques, ce qui signifie que leur courbure à l'infini est asymptotique à la courbure d'un espace symétrique de rang 1 de type non compact (c'est-à-dire d'un espace hyperbolique). Deux constructions de telles métriques d'Einstein sont réalisées. La première passe par l'analyse et met en correspondance les déformations d'Einstein des espaces hyperboliques complexe, quaternionien et octonionien, avec certaines métriques de Carnot-Carathéodory sur le bord à l'infini. Dans les cas quaternionien et octonionien, on obtient à l'infini des objets que j'appelle des structures de contact quaternioniennes (ou octonioniennes). La seconde construction est au contraire twistorielle : partant d'une structure de contact quaternionienne, analytique réelle, on montre qu'elle est le bord à l'infini d'une unique métrique quaternion-kählérienne (qui est en particulier d'Einstein), définie dans un voisinage de l'infini. La géométrie des structures de contact quaternioniennes est ainsi assez bien comprise, alors que les structures de contact octonioniennes restent un objet très mystérieux.

***Résumé* (Asymptotically symmetric Einstein metrics).** — In this article, I study asymptotically symmetric Einstein metrics : asymptotically symmetric means that the curvature at infinity is asymptotic to the curvature of a rank one symmetric space of noncompact type (that is, a hyperbolic space). Two constructions of such metrics are given. The first one relies on analysis to prove that the Einstein deformations of complex, quaternionic or octonionic symmetric spaces are in 1-1 correspondance with some Carnot-Carathéodory metrics on the boundary at infinity. In the quaternionic or octonionic cases, I get new objects at infinity which I call quaternionic (or octonionic) contact structures. The second construction is twistorial: given a real analytic quaternionic contact structure, I prove that it is the boundary at infinity of a unique quaternionic-Kähler (and therefore Einstein), asymptotically symmetric metric, defined in a neighborhood of infinity. The geometry of quaternionic contact structures is studied, while octonionic contact structures remain very mysterious objects.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1
Infini conforme des espaces hyperboliques 1
Bref historique 3
Description des résultats 5

I. Déformations d'Einstein des métriques hyperboliques 11
I.1. Métriques asymptotiquement symétriques 12
I.2. Analyse sur les espaces symétriques de rang 1 19
I.3. Analyse pour les métriques asymptotiquement symétriques 28
I.4. Construction des métriques d'Einstein 38

II. Structures de contact quaternioniennes 49
II.1. Connexion partielle quaternionienne 50
II.2. Prolongement de la connexion partielle adaptée 58
II.3. Structure du tenseur de courbure 65
II.4. Changement conforme 71
II.5. Twisteurs CR 75
II.6. Métrique de Fefferman 80
II.7. Le cas de la dimension 7 82
II.8. Structures de contact octonioniennes 83

III. Métriques quaternion-kählériennes 87
III.1. Construction de l'espace des twisteurs 88
III.2. Construction twistorielle inverse 99
III.3. Métriques quaternion-kählériennes asymptotiquement symétriques 105

Bibliographie 107

INTRODUCTION

Infini conforme des espaces hyperboliques

Les exemples les plus évidents de métrique d'Einstein sont les espaces symétriques, et les plus simples sont les espaces symétriques de rang un. Dans cet article, nous nous intéresserons à ceux de courbure négative, donc de type non compact : il s'agit des espaces hyperboliques $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$ ($m \geqslant 2$), où $\mathbb{K}$ est le corps des réels ($\mathbb{R}$), des complexes ($\mathbb{C}$), des quaternions ($\mathbb{H}$), ou l'algèbre des octonions ($\mathbb{O}$) ; dans ce dernier cas, seul le plan hyperbolique de Cayley $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$ existe. On notera d la dimension réelle de $\mathbb{K}$ (donc $d = 1, 2, 4$ ou 8) et $n = md$ celle de $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$.

La sphère à l'infini $\mathbb{S}^{n-1}$ d'un espace hyperbolique est naturellement munie d'une structure géométrique intéressante, à savoir une métrique de Carnot-Carathéodory conforme. Explicitons cela dans les cas les plus simples.

Espace hyperbolique réel. — L'espace hyperbolique réel peut être réalisé comme la boule unité $\mathbb{B}^n$ de $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique (normalisée de sorte que la courbure sectionnelle soit -1)

$$g = 4\frac{\mathrm{euc}}{(1-\rho^2)^2},$$

où euc est la métrique plate de $\mathbb{R}^n$ et ρ le rayon. Cette métrique induit sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ la métrique

$$\gamma = \lim_{\rho\to 1}(1-\rho^2)^2 g_{\mathbb{S}_\rho}. \tag{0.1}$$

La fonction $t = (1-\rho^2)$ est une fonction qui s'annule exactement à l'ordre un sur le bord (on dira que t définit le bord), et la métrique γ ne dépend du choix d'une telle fonction qu'à un facteur conforme près, si bien que la classe conforme $[\gamma]$ est intrinsèquement définie. On appellera cette classe conforme l'infini conforme de g, expression que je reprends à Le Brun.

Espace hyperbolique complexe. — L'espace hyperbolique complexe peut, quant à lui, être représenté comme la boule unité de $\mathbb{C}^m$, munie de la métrique de Bergmann

$$g = \frac{\mathrm{euc}}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2(d\rho^2 + (Id\rho)^2)}{(1-\rho^2)^2}.$$

À la place de l'équation (0.1), qui conduirait à un tenseur très dégénéré sur le bord, on pose

$$\gamma = \lim_{\rho \to 1} (1-\rho^2) g_{\mathbb{S}_\rho}. \tag{0.2}$$

Cette métrique est maintenant infinie, sauf sur la distribution

$$V = \ker \eta \subset T\mathbb{S},$$

où $\eta = I d\rho$ est une 1-forme de connexion sur le $\mathbb{S}^1$-fibré $\mathbb{S}^{2m-1} \to \mathbb{C}\mathbf{P}^{m-1}$. Une telle métrique, définie sur une distribution de contact, est appelée une métrique de Carnot-Carathéodory. Comme dans le cas réel, seule la classe conforme $[\gamma]$ est intrinsèquement définie, et nous l'appellerons à nouveau l'infini conforme de g.

Espace hyperbolique général. — Passons maintenant à une description plus générale, valable pour tous les espaces hyperboliques. Un point de base étant fixé, on appelle r la distance à ce point et $\mathbb{S}_r$ la sphère de rayon r. La métrique γ sur la sphère à l'infini $\mathbb{S}^{n-1}$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$ est donnée par la formule

$$\gamma = \lim_{r \to \infty} e^{-2r} g_{\mathbb{S}_r}. \tag{0.3}$$

Cette métrique prend des valeurs infinies, sauf sur une distribution $V \subset T\mathbb{S}$, de codimension 1 dans le cas complexe, 3 dans le cas quaternionien, et 7 dans le cas octonionien ; dans le cas réel, γ est une vraie métrique et $V = T\mathbb{S}$. Comme les crochets d'éléments de V engendrent tous les champs de vecteurs de $\mathbb{S}$, la métrique γ est encore une *métrique de Carnot-Carathéodory* ; la définition (0.3) ne dépend du choix du point de base que par un facteur conforme, donc on appelle encore cette métrique l'*infini conforme de g* (voir la définition plus précise B). On peut décrire la métrique hyperbolique en fonction de données sur le bord : il y a une forme de contact η, à valeurs dans $\mathrm{Im}(\mathbb{K}) = \mathbb{R}, \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^7$, de noyau V, telle que la métrique s'écrive (la courbure sectionnelle étant normalisée entre -4 et -1)

$$g = dr^2 + \mathrm{sh}^2(2r)\eta^2 + \mathrm{sh}^2(r)\gamma. \tag{0.4}$$

Dans le cas réel, il n'y a pas de terme en η^2 ; dans les autres cas, la formule suppose le choix d'un supplémentaire de V dans $T\mathbb{S}$ pour prolonger la métrique γ sur V en une forme quadratique sur $T\mathbb{S}$. Ce supplémentaire est fourni par les fibres de la fibration

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{d-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}^{n-1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{K}\mathbf{P}^{m-1} \end{array}$$

Problème de Dirichlet. — Ces métriques symétriques sont bien entendu des métriques d'Einstein, donc

$$\mathrm{Ric}^g = -\lambda g, \quad \lambda = n-1, n+2, n+8, 36$$

dans les cas réel, complexe, quaternionien, octonionien. Le but de cet article est d'étudier le problème suivant : étant donnée sur le bord une métrique conforme de Carnot-Carathéodory, $[\gamma]$, étudier le problème de Dirichlet non linéaire

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \mathrm{Ric}^g = -\lambda g;\\ &\text{(ii)} \quad \text{l'infini conforme de } g \text{ est } [\gamma]. \end{aligned}$$

Le fait qu'on puisse, comme on le verra, déformer les métriques d'Einstein hyperboliques en résolvant ce problème tranche avec la rigidité qui frappe leurs quotients compacts : Koiso **[Koi78]** a montré que les métriques d'Einstein des quotients compacts des espaces hyperboliques ne peuvent pas être déformées ; dans quelques cas, en dimension 4, on connaît même un résultat de rigidité globale, à savoir que les métriques hyperboliques sur les quotients y sont les seules métriques d'Einstein, à l'action près des difféomorphismes : cela a été montré par Besson, Courtois et Gallot **[BCG95]** dans le cas réel, par Le Brun **[LeB95]** dans le cas complexe. Les quotients de volume fini semblent se comporter de manière similaire **[Biq97]**.

On peut distinguer deux types d'approche au problème (i)-(ii) :

(1) résolution globale de l'équation (i) avec condition à l'infini (ii) : cette approche se fait grâce à des techniques d'analyse globale ;
(2) résolution locale près de l'infini : cette approche, plus algébrique, suppose de renforcer les équations, car le problème (i)-(ii) est un problème de Cauchy sous-déterminé à l'infini.

Dans cet article, on présente deux situations, utilisant les deux types d'approche décrites plus haut, où la résolution du problème permet la construction de nouvelles métriques d'Einstein : la première situation, utilisant des techniques d'analyse, fait l'objet du chapitre I (voir section ci-dessous) ; la seconde situation, utilisant des techniques twistorielles, fait l'objet des chapitres II et III (voir section ci-dessous).

Bref historique

L'idée de poser le problème (i)-(ii) pour comprendre les métriques d'Einstein en termes de métriques de Carnot-Carathéodory sur le bord a ses racines dans des travaux antérieurs, d'une part en géométrie réelle — où l'infini conforme est alors une vraie métrique conforme —, d'autre part en géométrie complexe — pour les métriques de Kähler-Einstein. Développons un peu cet historique.

Géométrie complexe. — Les résultats connus les plus complets concernent la géométrie complexe. Sur une variété complexe, on peut remplacer la condition (i) par la condition plus forte de trouver une métrique Kähler-Einstein ; l'équation ne porte pas sur le tenseur g, mais plutôt sur une fonction qui doit satisfaire une équation de Monge-Ampère complexe, non linéaire. Le problème est complètement résolu par le théorème de Cheng et Yau **[CY80]**, qui dit en particulier que tout domaine strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^m$ admet une unique métrique de Kähler-Einstein, complète, asymptotique à la structure CR du bord de la même manière que dans l'équation (0.2). Fefferman **[Fef76]** avait auparavant construit des solutions formelles, approchées à un degré élevé, de l'équation de Monge-Ampère. Lee et Melrose ont étudié la régularité de la solution près du bord **[LM82]**.

Géométrie réelle. — Dans le cas réel, la métrique de Carnot-Carathéodory se réduisant alors à une vraie métrique conforme sur le bord, les premières approches ont utilisé d'abord la seconde méthode décrite plus haut, à savoir réaliser des constructions locales près du bord. En dimension 4, Le Brun **[LeB82]** a résolu un problème local près d'un bord analytique réel S quelconque ; la condition supplémentaire, nécessaire pour que le problème soit bien posé, est

$$\text{(iii)} \quad g \text{ est autoduale,}$$

c'est-à-dire que le tenseur de Weyl soit une 2-forme autoduale. Il montre que toute métrique γ sur S, analytique réelle, est l'infini conforme d'une unique solution g des équations (i), (ii) et (iii) ; si t est une fonction qui définit le bord S, alors $t^2 g$ est analytique jusqu'au bord — il y a donc une régularité très forte à l'infini, qui n'est pas partagée, par exemple, par les métriques de Cheng-Yau, dont les développements à l'infini comportent des termes logarithmiques.

En dimension supérieure, la condition (iii) n'a plus de sens. Fefferman et Graham **[FG85]** l'ont remplacée par une condition moins géométrique : si t définit le bord S^{n-1}, dans un système de coordonnées dans lequel

$$g = t^{-2}\Big(dt^2 + \sum_1^{n-1} g_{ij}(x,t)dx^i dx^j\Big),$$

on demande la condition, indépendante du système de coordonnées,

$$\text{(iv)} \quad g_{ij}(x,t) \text{ est une fonction paire de } t.$$

Fefferman et Graham montrent que, si n est pair, pour toute métrique γ sur la variété S^{n-1}, les équations (i), (ii) et (iv) ont une solution formelle unique, convergente dans un voisinage de S si γ est analytique ; en revanche, si n est impair, il y a des métriques γ pour lesquelles n'existe pas de solution formelle. Ce résultat, montré dans le but de construire des invariants conformes de γ à partir d'invariants riemanniens de g, semble être une redécouverte d'un théorème dû à Schouten et Haantjes **[SH36a, SH36b]**.

Plus récemment, Graham et Lee **[GL91]** ont attaqué le problème (i)-(ii) par l'analyse, produisant ainsi des métriques d'Einstein globales : ils ont montré que si γ est proche de la métrique ronde standard sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, alors le problème (i)-(ii) admet une solution globale, proche de la métrique hyperbolique.

Géométrie quaternionienne. — Dans le cas quaternionien, Le Brun **[LeB91]** a construit, par une méthode twistorielle, une famille de dimension infinie de déformations quaternion-kählériennes (globales) de la métrique hyperbolique quaternionienne. Il n'a pas étudié le comportement à l'infini de ses métriques en termes du problème (i)-(ii), mais on verra qu'elles fournissent des exemples très intéressants de solutions.

Exemples explicites. — Très peu de ces métriques sont connues explicitement. Le seul cas est celui des solutions SU_2-invariantes dans la boule $\mathbb{B}^4$ du système (i), (ii) et (iii), quand γ est une métrique ou une métrique de Carnot-Carathéodory invariante. Hitchin **[Hit95]** a trouvé des formules donnant les solutions en termes de fonctions elliptiques, en utilisant la construction twistorielle. Pedersen **[Ped86]** avait auparavant traité le cas où γ est la métrique d'une sphère de Berger.

Description des résultats

Nous passons à présent à la description des résultats démontrés dans cet article. Pour avoir une idée des techniques utilisées, le lecteur est renvoyé aux introductions des chapitres I, II et III.

Métriques de Carnot-Carathéodory compatibles à une structure de contact. — Sur le bord $\mathbb{S}^{n-1}$ de l'espace hyperbolique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$, la métrique de Carnot-Carathéodory γ, infini conforme défini sur une distribution $V = \ker \eta$, admet une U_{m-1}, $Sp_{m-1}Sp_1$ ou $Spin_7$-structure, compatible à la différentielle $d\eta$, où η est la 1-forme de contact à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^7$. Cela se voit dans la description de ces bords comme les espaces homogènes U_m/U_{m-1}, $Sp_mSp_1/Sp_{m-1}Sp_1$ et $Spin_9/Spin_7$. Dans le cas complexe, cela signifie que γ est obtenue à partir de la forme symplectique $d\eta|_V$ par une structure presque complexe ; dans les cas quaternionien et octonionien, la 4-forme fondamentale $\sum_i d\eta_i^2|_V$ définit une $Sp_{m-1}Sp_1$ ou $Spin_7$-structure qui détermine γ. C'est ce type de compatibilité qui nous sera nécessaire.

Définition A. — Soit $H = U_{m-1}$, $Sp_{m-1}Sp_1$ ou $Spin_7$ suivant qu'on est dans le cas complexe, quaternionien ou octonionien. Soit S^{n-1} une variété munie d'une 1-forme de contact η à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^7$, et soit $V = \ker \eta$. Une *H-métrique de Carnot-Carathéodory, compatible à $d\eta$*, est la donnée d'une métrique γ sur V, telle que :

- dans le cas complexe, la restriction à V de $d\eta$ est une forme symplectique compatible à g (c'est-à-dire $d\eta(\cdot,\cdot) = \gamma(I\cdot,\cdot)$ avec I une structure presque complexe sur V) ;
- dans le cas quaternionien, les trois 2-formes $(d\eta_1, d\eta_2, d\eta_3)$ sur V fournissent une structure quaternionienne compatible à γ (c'est-à-dire $d\eta_i(\cdot,\cdot) = \gamma(I_i\cdot,\cdot)$ pour des structures presque complexes I_i satisfaisant les relations de commutation des quaternions) ;

– dans le cas octonionien, les sept 2-formes $(d\eta_1, \ldots, d\eta_7)$ sur V fournissent une $Spin_7$-structure compatible à γ (c'est-à-dire $d\eta_i(\cdot,\cdot) = \gamma(I_i\cdot,\cdot)$ pour des structures presque complexes I_i satisfaisant les relations de commutation des octonions).

Dans les cas quaternionien et octonionien, une distribution V de codimension 3 ou 7 pour laquelle existe une telle métrique sera appelée une *structure de contact quaternionienne* ou une *structure de contact octonionienne.*

Pour une discussion plus précise de l'algèbre liée aux octonions, voir la section II.8.

Les cas complexe d'une part, quaternionien et octonionien d'autre part, sont différents : dans le cas complexe, étant donnée une 1-forme de contact, il y a beaucoup de métriques compatibles ; dans les cas quaternionien et octonionien, la 1-forme de contact détermine complètement la métrique, dont l'existence devient une condition forte sur la structure de contact. Remarquons d'autre part que la métrique étant donnée, la forme de contact à valeurs dans $\mathbb{R}^{d-1}$ est complètement déterminée dans le cas complexe, déterminée à l'action près du groupe SO_3 dans le cas quaternionien, du groupe SO_7 dans le cas octonionien.

Un mot sur la terminologie : l'expression «structure de contact» désigne bien la seule distribution ; dans les cas quaternionien et octonionien, elle détermine donc la métrique de Carnot-Carathéodory à un facteur conforme près.

L'équation (0.4) motive la définition suivante.

Définition B. — Une métrique complète g sur une variété M de bord S est *asymptotiquement symétrique* si S est munie d'une H-métrique de Carnot-Carathéodory g_V, compatible à une forme de contact η, telle que le comportement à l'infini de g soit donnée par

$$g \sim dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}g_V,$$

où r est la distance à un point fixé. La métrique conforme $[g_V]$ est appelée l'*infini conforme* de g.

Dans le cas réel, il n'y a plus de structure de contact et g_V est une vraie métrique sur S.

Pour donner un sens à cette définition, il faut prolonger par 0 la métrique g_V, en choisissant un supplémentaire de V dans TS ; le comportement asymptotique ne dépend pas du choix.

La définition définitive (définition I.3.1), indique les dérivées nécessaires. Le terme asymptotiquement symétrique est justifié par le fait que de telles métriques ont un tenseur de courbure qui, près de l'infini, est asymptotique au tenseur de courbure de l'espace symétrique correspondant (proposition I.1.3).

Construction globale de métriques d'Einstein. — On a vu que les métriques Kähler-Einstein de Cheng et Yau **[CY80]**, ou encore les métriques quaternion-kählériennes de Le Brun **[LeB91]**, fournissent des déformations des espaces hyperboliques $\mathbb{C}\mathbf{H}^m$ et $\mathbb{H}\mathbf{H}^m$; ces déformations préservent les holonomies de ces espaces, à savoir U_m et $Sp_m Sp_1$; dans le cas octonionien, il n'y a pas de déformation préservant l'holonomie $Spin_9$ de $\mathbb{O}\mathbf{H}^2$, puisque toute métrique à holonomie $Spin_9$ est localement symétrique. En revanche, le théorème suivant construit, en un certain sens, les déformations les plus générales.

Théorème A. — *Soit $(M, g_0) = \mathbb{K}\mathbf{H}^m$ l'espace hyperbolique complexe, quaternionien ou octonionien et $\mathbb{S}$ sa sphère à l'infini. Soit $V \subset T\mathbb{S}$ une distribution de codimension $\ell = 1$, 3 ou 7 respectivement. Soit η une 1-forme à valeurs dans $\mathbb{R}^\ell$, de noyau V, et γ une métrique de Carnot-Carathéodory sur la distribution V, compatible (définition A) à $d\eta$. Si γ est assez proche (en norme de Hölder $C^{2,\alpha}$) de la métrique de Carnot-Carathéodory standard sur le bord de $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$, alors il existe sur M une métrique d'Einstein g, asymptotiquement symétrique, d'infini conforme $[\gamma]$ (définition B). La métrique g est localement unique modulo l'action des difféomorphismes induisant l'identité sur $\mathbb{S}$.*

Ce théorème sera montré dans le chapitre I (théorèmes I.4.8 et I.4.14), où sera précisé, en particulier, le comportement à l'infini de la métrique g. Ces théorèmes indiquent aussi sous quelle condition on peut trouver, de manière similaire, des déformations d'Einstein à partir d'une métrique d'Einstein g_0, asymptotiquement symétrique, plus générale que la métrique hyperbolique, et éventuellement définie sur une variété M différente de l'espace hyperbolique ; en particulier, le théorème reste valable autour d'une métrique asymptotiquement symétrique g_0 sur une variété M si g_0 est à courbure sectionnelle négative.

Bien entendu, le théorème est vrai pour l'espace hyperbolique réel : les structures de contact disparaissent et on retrouve l'énoncé de Graham et Lee **[GL91]**, qui trouve ainsi son extension naturelle aux autres espaces hyperboliques(1).

Dans le cas complexe, en dimension $2m - 1 \geqslant 5$, l'intégrabilité de la structure CR (suffisamment proche de la structure CR standard) est équivalente au fait que la solution g produite par le théorème A soit Kähler-Einstein. En effet, une déformation intégrable de la structure CR de $\mathbb{S}^{2m-1}$ peut être réalisée comme une hypersurface strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^m$ (voir [**Tan75**, théorème 9.4]), et le théorème de Cheng et Yau fournit alors une solution Kähler-Einstein au problème. Ainsi, si la structure CR est intégrable, le théorème A est une conséquence du théorème de Cheng et Yau, tandis que dans le cas où la structure CR n'est pas intégrable, les métriques d'Einstein construites sont nouvelles.

Une ligne de partage apparaît, comme souvent, entre les cas réel et complexe d'une part, quaternionien et octonionien d'autre part : dans le premier cas, une structure

(1)en dimension 4, il y a une légère différence technique entre mon énoncé et celui de Graham et Lee, car ceux-ci devaient supposer la métrique γ de régularité $C^{3,\alpha}$ au lieu de $C^{2,\alpha}$; ma démonstration n'a plus besoin de cette hypothèse.

de contact proche de la structure standard lui est difféomorphe, et les différentes métriques γ sont obtenues en variant la structure presque complexe compatible à la forme symplectique, si bien que toutes les métriques obtenues g sont mutuellement bornées — d'ailleurs, à la question près de la régularité sur le bord à l'infini, *elles épuisent toutes les déformations d'Einstein bornées de la métrique hyperbolique complexe* ; dans le second cas au contraire, il y a au plus une métrique γ compatible à la structure de contact, et les métriques obtenues g ne sont pas quasi-isométriques — on montrera qu'*il n'y a aucune déformation d'Einstein, bornée, de la métrique hyperbolique quaternionienne ou octonionienne.*

Dans des cas particuliers, des résultats globaux d'unicité sont connus. Il s'agit de résultats de rigidité portant sur la courbure scalaire plutôt que sur le tenseur de Ricci, modelés sur la démonstration spinorielle par Witten de la conjecture de la masse positive [**Wit81**]. Ainsi, Min-Oo [**MO89**] a démontré qu'une métrique h, fortement asymptotique à la métrique hyperbolique réelle g, avec courbure scalaire $s^h \geqslant s^g$, doit être égale à g ; dans ce résultat, fortement asymptotique signifie que $h - g$ et une dérivée sont à décroissance $O(e^{-(n+\varepsilon)r})$; d'autres résultats de rigidité basés sur le théorème de Min-Oo sont donnés dans [**Leu93**]. Un énoncé similaire de rigidité pour une métrique kählérienne h asymptotique à la métrique hyperbolique complexe a été démontré par Herzlich [**Her98**].

Parmi les questions ouvertes soulevées par ce théorème (on pourra consulter aussi le survey [**Biq98**]), une des plus difficile est évidemment d'aller au-delà d'un voisinage de la métrique hyperbolique, donc de déterminer pour quels infinis conformes le problème d'Einstein peut être résolu.

Pour avoir une idée de la démonstration du théorème, le lecteur peut se reporter, comme il a été dit, à l'introduction du chapitre I, ou, pour plus de détails, mais sans technique ! au survey [**Biq98**].

Construction locale de métriques quaternion-kählériennes. — Les structures de contact quaternionienne et octonionienne que j'ai introduites sont des objets nouveaux, que je crois intéressants à étudier. Cette étude est menée dans le chapitre II.

En géométrie sous-riemannienne (voir par exemple [**FGR97**]), on ne dispose pas en général de connexion canonique sur la variété, similaire à la connexion de Levi-Civita en géométrie riemannienne. Cependant, en géométrie CR, une fois une forme de contact choisie — ou, ce qui revient au même, un représentant de la classe conforme de métriques —, on dispose de la connexion de Tanaka-Webster [**Web79**]. De manière assez remarquable, le même phénomène se produit pour les structures de contact quaternionienne et octonionienne, pour lesquelles on peut définir, après le choix d'un facteur conforme, une connexion adaptée canonique (voir le théorème II.1.3 et la définition II.2.8 dans le cas quaternionien, II.8.1 et II.8.3 dans le cas octonionien).

Théorème B. — *Soit V une structure de contact quaternionienne (resp. octonionienne) sur une variété S de dimension $4m+3$ avec $m \geqslant 2$ (resp. de dimension 15),* *et g_V une métrique de Carnot-Carathéodory compatible. Alors il existe un supplémentaire W de V, et une* connexion adaptée ∇ *sur S, caractérisés par les propriétés*

(1) *∇ préserve V, et, restreinte à V, préserve sa Sp_mSp_1-structure (resp. sa $Spin_7$-structure) ;*
(2) *pour $X, Y \in V$, la torsion satisfait $T_{X,Y} = -[X,Y]_W$;*
(3) *pour $R \in W$, l'endomorphisme de V défini par $X \mapsto (T_{R,X})_V$ est dans le sous-espace $(\mathfrak{sp}_m \oplus \mathfrak{sp}_1)^\perp \subset \mathrm{End}(V)$ (resp. $\mathfrak{so}_7^\perp$) ;*
(4) *∇ préserve W, et $\nabla|_W$ coïncide avec la connexion induite sur le sous-fibré $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^7$) de $\mathrm{End}(V)$ fourni par les structures presque complexes.*

Les deux premières conditions déterminent de manière unique W.

Mon étude des structures de contact octonioniennes s'arrête malheureusement là. Il y a beaucoup à comprendre dans ce domaine, puisque je ne sais pas si de telles structures existent, en dehors de l'exemple fourni par le bord de $\mathbb{O}\mathbf{P}^2$. Cette question est évidemment importante pour saisir le champ d'application du théorème A dans le cas octonionien.

En revanche, on peut aller beaucoup plus loin dans le cas quaternionien. Notons d'abord que le cas $m = 1$ est exclu du théorème ci-dessus, comme il le sera plus loin : de même que la dimension 4 est spéciale en géométrie quaternion-kählérienne, la dimension 7 est spéciale pour les structures de contact quaternioniennes, et je n'ai pas traité ce cas (voir la section II.7).

La suite du chapitre II est consacrée à développer les propriétés de la torsion et de la courbure de la connexion adaptée, ce qui aboutit à la construction d'un espace de twisteurs qui dépend de la structure de contact quaternionienne, et non d'un choix de facteur conforme (voir le théorème II.5.1 pour plus de détails).

Théorème C. — *Une structure de contact quaternionienne sur une variété S de dimension $4m+3$, avec $m \geqslant 2$, admet un espace de twisteurs*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

qui est une variété CR intégrable.

D'une certaine manière, l'étude des structures de contact quaternioniennes se ramène à l'étude d'une classe particulière de variétés CR intégrables (qui ne sont jamais pseudo-convexes). Cette construction rappelle évidemment la construction de l'espace des twisteurs d'une variété quaternion-kählérienne **[Sal82]**.

Cette étude culmine dans le chapitre III, avec la construction locale de métriques d'Einstein solutions du problème (i)-(ii) avec comme infini conforme une structure de contact quaternionienne. Comme on l'a vu, il faut, dans une telle construction, pour assurer un problème de Cauchy bien déterminé, une condition supplémentaire, qui dans notre cas est la généralisation directe de la condition (iii) de Le Brun, puisqu'en dimension 4, la condition «autodual Einstein» est la condition que l'on substitue à «quaternion-kählérien» en dimension supérieure.

***Théorème D* (théorème III.3.1).** — *Soit S une variété de dimension $4m+3$ ($m \geqslant 2$) munie d'une structure de contact quaternionienne, analytique réelle ; alors S est l'infini conforme d'une unique métrique quaternion-kählérienne, asymptotiquement symétrique, analytique réelle jusqu'au bord (avec un pôle d'ordre 2), définie dans un voisinage de S.*

Dans le cas de la dimension 3 ($m = 0$), il n'y a plus de structure de contact et la donnée est simplement une métrique conforme et une orientation sur S, et on retombe sur l'énoncé du théorème de Le Brun **[LeB82]**. Dans le cas de la dimension 7, on peut dire essentiellement que le théorème s'étend aux structures de contact quaternioniennes pour lesquelles un espace de twisteurs, du type construit par le théorème C, existe, mais cette condition reste à étudier.

Une variété 3-sasakienne (voir le survey **[BG98]**) induit manifestement une structure de contact quaternionienne ; la métrique construite par le théorème D dans ce cas est explicite, fournie par la formule qui donne l'espace hyperbolique quaternionien. Les structures 3-sasakiennes sont infinitésimalement rigides, donc forment un espace de modules discret — elles sont donc des points très spéciaux de l'espace des modules des structures de contact quaternioniennes, qui doit être de dimension infinie.

En effet, contrairement au cas octonionien, je sais que les structures de contact quaternioniennes existent en quantité, grâce à Le Brun **[LeB91]** ; un sous-produit de la démonstration du théorème D indique en effet que les métriques de la famille (de dimension infinie) de déformations de la métrique hyperbolique quaternionienne, construite par Le Brun, sont induites par des structures de contact quaternioniennes sur le bord. On voit donc là un cas intéressant où le prolongement quaternion-kählérien à l'intérieur est global.

Cette propriété n'a cependant aucune chance d'être vraie pour toutes les structures de contact quaternioniennes : les métriques d'Einstein produites par le théorème A ne sont en général pas quaternion-kählériennes. On peut faire l'analogie avec le problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques sur le disque : seules sont holomorphes celles dont la valeur au bord habite dans les fonctions à «fréquences positives». Un problème intéressant, dans notre situation, consisterait à comprendre quelles sont les structures de contact quaternioniennes à «fréquence positive», c'est-à-dire telles que la métrique quaternion-kählérienne construite par le théorème D s'étende à l'intérieur. Cette question rejoint la «conjecture de fréquence positive» énoncée en dimension 4 par Le Brun à la fin de **[LeB91]**.

Remarque sur les notations. — Tout au long de l'article, la notation S^n indique une variété (quelconque) de dimension n, alors que les sphères sont notées $\mathbb{S}^n$.

CHAPITRE I

DÉFORMATIONS D'EINSTEIN DES MÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

Le but de ce chapitre est la démonstration du théorème A, qui construit des métriques d'Einstein proches du modèle symétrique, avec infini conforme une métrique de Carnot-Carathéodory adaptée à une structure de contact.

L'idée de base consiste, comme dans le résultat de Graham et Lee dans le cas hyperbolique réel, à réduire la question à un problème infinitésimal, un laplacien, entre des espaces de Hölder à poids adéquats. L'analyse de cet opérateur pose des problèmes délicats ; je ne fais pas appel à la difficile théorie des «edge operators», développée par Mazzeo et Melrose (voir **[Maz91]**, **[EMM91]**, **[Mel92]**), mais je développe une approche qui a le mérite d'être à la fois élémentaire et rapide, en utilisant l'analyse harmonique sur les sphères homogènes $\mathbb{S}$, bords des espaces symétriques de rang 1. J'obtiens ainsi le comportement de ces laplaciens sur l'espace hyperbolique. Puis, dans le cas hyperbolique complexe, cette analyse est greffée sur toute variété munie d'une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe, et on établit entre quels espaces à poids les laplaciens sont Fredholm. Ce transport du modèle sur une variété générale est rendu possible par la propriété fondamentale suivante : deux structures de contact sont toujours localement difféomorphes. Cette propriété n'est plus vraie dans les cas quaternionien et octonionien, si bien que les résultats que j'obtiens dans ces deux cas ne sont pas aussi puissants que ceux espérés à partir du traitement du modèle symétrique ; ils sont néanmoins suffisants pour les applications dont j'ai besoin.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première section, on introduit les métriques asymptotiquement symétriques et on donne le schéma de la démonstration du théorème, en explicitant notamment des solutions approchées du problème et en déterminant l'obstruction à déformer une métrique d'Einstein asymptotiquement symétrique, distincte du modèle symétrique. Dans la seconde section, on développe l'analyse nécessaire sur les espaces hyperboliques en faisant appel à de la théorie des représentations. Dans la troisième section, on transporte cette analyse à une variété munie d'une métrique asymptotiquement symétrique quelconque, et on discute les problèmes de régularité à l'infini. Enfin, dans la quatrième section, on démontre le théorème A en traitant d'abord le cas hyperbolique complexe, essentiellement par application d'un théorème de fonctions implicites ; puis les cas quaternionien et octonionien de manière légèrement différente, plus constructive, la méthode du cas complexe devenant inapplicable car les métriques à construire ne sont plus mutuellement bornées avec la métrique initiale.

I.1. Métriques asymptotiquement symétriques

I.1.A. Espaces symétriques de rang 1. — Nous considérons les espaces symétriques $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\mathbf{H}^m &= SU_{1,m}/U_m,\\ \mathbb{H}\mathbf{H}^m &= Sp_{1,m}/Sp_1Sp_m,\\ \mathbb{O}\mathbf{H}^2 &= F_4^{-20}/Spin_9.\end{aligned}$$

Notons n la dimension réelle, donc $n = 2m$, $4m$ ou 16 suivant les cas. Ce sont des espaces homogènes G_0/G, où G est le stabilisateur d'un point particulier $*$. Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie, alors $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}_0$, et la symétrie se traduit par $[\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0] \subset \mathfrak{g}$.

Sphères et fibrations. — Ces espaces étant de rang 1, le groupe G agit transitivement sur les sphères autour du point $*$: notons $\mathbb{S}_r$ la sphère de rayon r autour de $*$. Fixons un rayon particulier $\exp(rX_0)$, où $X_0 \in \mathfrak{m}_0$, issu de $*$, et notons $H \subset G$ le stabilisateur de ce rayon (donc son algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ est le centralisateur de X_0 dans $\mathfrak{g}$), alors

$$\mathbb{S} = G/H$$

avec, dans nos trois situations, $H = U_{m-1}$, Sp_1Sp_{m-1} ou $Spin_7$. Notons $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$; dans les trois cas que nous considérons, il y a une décomposition de $\mathfrak{m}$ sous l'action de H,

$$\mathfrak{m} = V \oplus W,$$

où $V = \mathbb{K}^{m-1}$ et $W = \mathrm{Im}(\mathbb{K})$. En fait, la distribution W est intégrable et tangente à une fibration de $\mathbb{S}$ en sphères $\mathbb{S}^{\dim \mathbb{K}-1} = \mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ ou $\mathbb{S}^7$, suivant le cas :

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{S}^{\dim \mathbb{K}-1} & \longrightarrow & \mathbb{S}\\ & & \big\downarrow\\ & & \mathbb{K}\mathbf{P}^{m-1}\end{array}$$

où, par définition, on a $\mathbb{O}\mathbf{P}^1 = \mathbb{S}^8$.

On peut définir une 1-forme η sur $\mathbb{S}$, à valeurs dans $\mathrm{Im}\,\mathbb{K}$, de noyau V, telle que

$$\eta : W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\,\mathbb{K}$$

Cette identification est choisie de sorte que si on a une $\mathbb{K}$-base (e_i) de V, et si $X = \sum_1^{m-1} x_i e_i$ et $Y = \sum_1^{m-1} y_i e_i$ sont deux champs de vecteurs tangents à V, alors

$$-[X,Y]_W = d\eta(X,Y) = \operatorname{Im} \sum_{i=1}^{m-1} x_i \bar{y}_i. \tag{1.1}$$

Métrique symétrique. — L'espace tangent à $\mathbb{K}\mathbf{H}^m = G_0/G$ est $G_0 \times_G \mathfrak{m}_0$, tandis que l'espace tangent à la sphère $\mathbb{S}_r = G/H$ est $G \times_H \mathfrak{m}$. Le lien entre les deux descriptions est donné par la flèche

$$\dot{g} \in \mathfrak{m} \longrightarrow (\operatorname{Ad}(e^{-rX_0})\dot{g})_{\mathfrak{m}_0} = \operatorname{sh}(-\operatorname{ad} rX_0)\dot{g} \in \mathfrak{m}_0, \tag{1.2}$$

qui identifie $\mathfrak{m}$ et l'orthogonal de X_0 dans $\mathfrak{m}_0$. Plus précisément, l'opérateur $\operatorname{ad} X_0$ est un isomorphisme,

$$\operatorname{ad} X_0 : \mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} X_0^{\perp} \subset \mathfrak{m}_0,$$

et son carré $(\operatorname{ad} X_0)^2$ a des valeurs propres λ_i^2, où $\lambda_i > 0$, dans $\mathfrak{m}$; si on a une $\mathbb{R}$-base correspondante de vecteurs propres (Y_i) dans $\mathfrak{m}$, alors X_0 et les $X_i = \lambda_i^{-1}[X_0, Y_i]$ forment une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{m}_0$. L'identification (1.2) devient

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i Y_i \to \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sh}(-r\lambda_i) x_i X_i,$$

d'où on obtient la métrique,

$$g_0 = dr^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{sh}^2(r\lambda_i) dx_i^2.$$

En réalité, les λ_i ne peuvent prendre que deux valeurs, comme le montre le lemme suivant.

Lemme I.1.1. — *Les λ_i sont égales à λ sur V et 2λ sur W, où $\lambda > 0$.*

Démonstration. — Comme H stabilise X_0 et agit irréductiblement sur V, l'opérateur $(\operatorname{ad} X_0)^2$ est un scalaire λ^2 sur V.

Les valeurs propres de $\operatorname{ad} X_0$ sont 0 (noyau $\mathfrak{h}$ et X_0) et les $\pm\lambda_i$ (vecteurs propres $X_i \pm Y_i$). Maintenant, si $Y_i, Y_j \in V$, alors $[X_i + Y_i, X_j + Y_j]$ est un vecteur propre de $\operatorname{ad} X_0$ pour la valeur propre 2λ, si bien que la composante dans $\mathfrak{g}$, à savoir $[X_i, X_j] + [Y_i, Y_j]$, doit être dans W ; d'un autre côté, on a immédiatement

$$[X_0, [X_i, X_j] - [Y_i, Y_j]] = 0,$$

donc $[X_i, X_j] - [Y_i, Y_j] \in \mathfrak{h}$; finalement nous déduisons que $[Y_i, Y_j]_{\mathfrak{m}} \in W$, et est vecteur propre de $(\operatorname{ad} X_0)^2$ pour la valeur propre $4\lambda^2$; compte tenu de la structure de crochet (1.1), c'est l'unique valeur propre possible sur W. □

Remarque I.1.2. — Le lecteur aura reconnu dans la somme des sous-espaces propres de $\operatorname{ad} X_0$ pour les valeurs propres $-\lambda$ et -2λ l'algèbre de Lie nilpotente du groupe de Lie nilpotent qui agit simplement transitivement sur la sphère à l'infini $\mathbb{S}_\infty$ privée d'un point.

Nous normalisons X_0 de sorte que dans le lemme I.1.1, on ait $\lambda = 1$, c'est-à-dire que les valeurs propres de $\operatorname{ad} X_0$ soient 0, ± 1 et ± 2. Nous normalisons la métrique invariante sur $\mathfrak{g}_0$ de sorte que $|X_0| = 1$. Alors la métrique symétrique s'écrit finalement

$$g_0 = dr^2 + \operatorname{sh}^2(2r)\eta^2 + \operatorname{sh}^2(r) g_{\mathbb{K}\mathbf{P}^{m-1}}. \tag{1.3}$$

Elle est à courbure sectionnelle comprise entre -4 et -1.

I.1.B. Métriques asymptotiquement symétriques. — À présent, nous introduisons une classe de métriques asymptotiquement symétriques, au sens où leur tenseur de courbure, à l'infini, est asymptotique au tenseur de courbure du modèle symétrique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$. Ces métriques seront une première approximation pour les métriques d'Einstein que construit le théorème A.

H-métriques de Carnot-Carathéodory. — Rappelons qu'une H-structure sur un espace vectoriel V est une réduction à H des repères de V. Ainsi, dans les notations précédentes, le champ de plans V sur $\mathbb{S}$ a une H-structure : dans le cas $H = U_{m-1}$, elle est caractérisée par la forme symplectique $d\eta$ et une structure presque complexe compatible J ; dans les cas $H = Sp_{m-1}Sp_1$ et $Spin_7$, elle est caractérisée par les trois ou sept 2-formes $d\eta_i$, données à l'action près de $SO(3)$ ou $SO(7)$. Dans tous les cas, nous dirons que la H-structure est *compatible* à $d\eta|_V$, suivant ainsi la définition A donnée dans l'introduction.

Construction de métriques asymptotiquement symétriques. — Soit une H-métrique de Carnot-Carathéodory g_V sur $\mathbb{S}$, compatible à une 1-forme de contact η à valeurs dans $\operatorname{Im}(\mathbb{K})$; nous choisissons un supplémentaire W de $V = \ker \eta$ dans $T\mathbb{S}$, de sorte que via η, on ait $W = \operatorname{Im}\mathbb{K}$. Notons $\overline{g_V}$ la forme quadratique sur $T\mathbb{S}$ qui coïncide avec g_V sur V et a pour noyau W. Définissons sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$ la métrique

$$g = dr^2 + \operatorname{sh}^2(r)\overline{g_V} + \operatorname{sh}^2(2r)\eta^2; \tag{1.4}$$

cette métrique ne s'étend pas en $r = 0$ en une métrique lisse, si bien que nous devons la régulariser un peu autour de $r = 0$.

Notons que le choix de supplémentaire W n'a pas d'importance géométrique, car modifier le choix de W ne change la métrique g que par des termes qui sont en $O(e^{-r})$. La seule donnée est donc bien celle du champ V et de la métrique de Carnot-Carathéodory g_V. On récupère la classe conforme de g_V à partir de g en prenant la limite des $e^{-2r} g|_{\{r\}\times\mathbb{S}}$ quand r tend vers l'infini.

Pour étudier cette métrique, choisissons une base locale de champs de vecteurs sur $\mathbb{S}$: prenons $X_0 = \partial_r$, puis $X_1, \dots, X_{\dim\mathbb{K}-1}$ dans W tels que $(\eta(X_i))$ forment une base standard de $\operatorname{Im}(\mathbb{K})$, et enfin $X_{\dim\mathbb{K}}, \dots$ une base orthonormale de V, compatible à la

H-structure. Les vecteurs $\xi_0 = \partial_r$, $(\xi_i = X_i/\operatorname{sh} 2r)_{1\leqslant i<\dim \mathbb{K}}$ et $(\xi_i = X_i/\operatorname{sh} r)_{i\geqslant \dim\mathbb{K}}$ forment une base orthonormale pour g.

Soient X_i et X_j avec $i,j \geqslant \dim\mathbb{K}$: on a, quand r tend vers l'infini,

$$\begin{aligned}\left[\frac{X_i}{\operatorname{sh} r}, \frac{X_j}{\operatorname{sh} r}\right] &= \frac{[X_i,X_j]_W}{\operatorname{sh}^2 r} + \frac{[X_i,X_j]_V}{\operatorname{sh}^2 r}\\ &= \frac{[X_i,X_j]_W}{\operatorname{sh}^2 r} + O(e^{-r})\end{aligned}$$

car d'après la forme de la métrique, $|[X_i,X_j]_V|$ croît en e^r. On notera que les $O(e^{-r})$ portent aussi sur les dérivées. En notant

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{\dim\mathbb{K}-1}),$$

réécrivons cette estimation

$$[\xi_i,\xi_j] = -\sum_{k=1}^{\dim\mathbb{K}-1} d\eta_k(X_i,X_j)\xi_k + O(e^{-r}), \qquad i,j\geqslant \dim\mathbb{K}.$$

Ainsi dans ce crochet ne subsiste à l'infini que le terme $[X_i,X_j]_W$, qu'on peut encore écrire dans $\operatorname{Im}(\mathbb{K})$ comme $-d\eta(X_i,X_j)$. De la même manière,

$$\begin{aligned}
&[\xi_0,\xi_i] = -2\xi_i + O(e^{-r}), && 1\leqslant i<\dim\mathbb{K},\\
&[\xi_0,\xi_i] = -\xi_i + O(e^{-r}), && i\geqslant \dim\mathbb{K},\\
&[\xi_i,\xi_j] = O(e^{-r}), && i\geqslant 1,\ 1\leqslant j<\dim\mathbb{K}.
\end{aligned}$$

Écrivons $[\xi_i,\xi_j] = \gamma_{ij}^k\xi_k$; plus précisément, nous voyons qu'à l'infini, les coefficients γ_{ij}^k ont un développement

(1.5) $$\gamma_{ij}^k = \gamma_{ij}^k(0) + e^{-r}\gamma_{ij}^k(1) + \cdots,$$

avec les $\gamma_{ij}^k(l)$ des fonctions sur $\mathbb{S}$, de classe $C^{k-1,\alpha}$ si g_V est de classe $C^{k,\alpha}$, et les $\gamma_{ij}^k(0)$ sont des constantes, identiques à celles du modèle symétrique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$ correspondant, puisque les $d\eta_k(X_i,X_j)$ ne dépendent que de la structure de crochet $V\otimes V\to W$, fournie par la formule (1.1). On en déduit immédiatement que la connexion de Levi-Civita s'écrit, dans cette trivialisation du fibré tangent, $D^g = d + a$, avec

$$a_{ij}^k = \frac{1}{2}(\gamma_{ij}^k - \gamma_{jk}^i - \gamma_{ki}^j);$$

on a donc de nouveau pour la 1-forme a un développement

(1.6) $$a = a(0) + e^{-r}a(1) + \cdots,$$

avec les $a(l)$ de classe $C^{k-1,\alpha}$ sur $\mathbb{S}$ et $a(0)$ à coefficients constants, égaux à ceux de $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$. Pour la courbure $R^g = da + \frac{1}{2}[a,a]$, on obtient

(1.7) $$R^g = R^g(0) + e^{-r}R^g(1) + \cdots,$$

avec $R^g(l)$ défini sur $\mathbb{S}$; comme les vecteurs de dérivation suivant $\mathbb{S}$ sont toujours accompagnés d'un facteur e^{-r}, on voit que $R^g(1)$ est de classe $C^{k-1,\alpha}$ et les autres

$R^g(l)$ de classe $C^{k-2,\alpha}$; enfin $R^g(0)$ est à coefficients constants, identiques à ceux de $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$.

Nous avons en particulier montré que la métrique g mérite le qualificatif d'asymptotiquement symétrique de la définition B, au sens suivant.

Proposition I.1.3. — *Pour la métrique asymptotiquement symétrique g sur M définie par* (1.4), *il existe une G-structure (non intégrable) sur le bout de M, telle que*

$$|R^g - R(\mathbb{K}\mathbf{H}^m)| = O(e^{-r}),$$

où $R(\mathbb{K}\mathbf{H}^m)$ est la courbure de l'espace symétrique $\mathbb{K}\mathbf{H}^m = G_0/G$, transportée sur M grâce à la G-structure, et r est la distance à un point.

Dans l'exemple que nous avons construit, la G-structure est claire dans les cas $G = U_m$ et $Sp_m Sp_1$; le cas $G = Spin_9$ est moins habituel mais pas plus délicat — on peut par exemple définir la $Spin_9$-structure par une 8-forme particulière.

En réalité, la proposition est valable avec plus de dérivées, voir la formule (1.7).

I.1.C. Déformation de métriques d'Einstein et obstruction. — Les métriques asymptotiquement symétriques sont, en particulier, asymptotiquement d'Einstein. Le but de ce chapitre est de montrer que si une métrique asymptotiquement symétrique, g, construite précédemment, est assez proche de la métrique symétrique standard g_0, alors g peut être perturbée en une métrique d'Einstein (qui reste asymptotiquement symétrique). Le résultat restera valable si g_0 est une métrique d'Einstein satisfaisant certaines conditions que nous allons examiner.

Résumons à présent la suite de cet article. Nous partons d'une métrique d'Einstein g_0, asymptotiquement symétrique :

$$\operatorname{Ric}^{g_0} = -\lambda g_0,$$

et d'une métrique g, asymptotiquement symétrique, proche de g_0.

Équations. — Rappelons la différentielle du tenseur de Ricci par rapport à la métrique :

$$d_g \operatorname{Ric} \dot{g} = \frac{1}{2}\Delta_L^g \dot{g} - (\delta^g)^* \delta^g \dot{g} - \frac{1}{2} D^g d \operatorname{tr}^g \dot{g},$$

où le laplacien de Lichnerowicz Δ_L^g est défini par

$$\Delta_L^g \dot{g} = (D^g)^* D^g \dot{g} + \operatorname{Ric}^g \circ \dot{g} + \dot{g} \circ \operatorname{Ric}^g - 2\overset{\circ}{R}{}^g \dot{g},$$

avec

$$(\overset{\circ}{R}{}^g \dot{g})(X,Y) = \sum \dot{g}(R^g_{X,e_i} Y, e_i).$$

Cette différentielle n'est pas un opérateur elliptique, à cause de l'action bien connue des difféomorphismes sur les métriques. Nous allons contourner ce problème d'une manière classique, en rajoutant une «condition de jauge» : nous cherchons une métrique

h proche de g telle que

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ric}^h + \lambda h = 0, \\ (1.8) \qquad &\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h = 0. \end{aligned}$$

La seconde condition est une condition qui fixe une tranche en g à l'action des difféomorphismes, comme il sera montré plus loin dans la proposition I.4.6 : cela signifie que, pour une métrique h proche de g, on peut toujours faire agir un difféomorphisme de sorte que cette condition soit satisfaite. Ainsi, le problème de trouver une métrique d'Einstein h proche de g est-il réduit au système (1.8). Ce système, quant à lui, est en général équivalent à résoudre l'équation $\Phi^g(h) = 0$, où

$$\Phi^g(h) = \operatorname{Ric}^h + \lambda h + (\delta^h)^* (\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h).$$

En effet, le système (1.8) implique évidemment $\Phi^g(h) = 0$; la réciproque est fournie par le lemme suivant.

Lemme I.1.4. — *Si* $\Phi^g(h) = 0$ *et* $\operatorname{Ric}^h < 0$, *et si* $|\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h|$ *tend vers* 0, *alors* h *satisfait le système* (1.8).

Démonstration. — Comme $\delta^h \operatorname{Ric}^h + \frac{1}{2} d s^h = 0$, on déduit de l'équation $\Phi^g(h) = 0$ l'égalité

$$(\delta^h (\delta^h)^* - \frac{1}{2} d \delta^h)(\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h) = 0.$$

Posant $\gamma = \delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h$, cela se réécrit aussi

$$((D^h)^* D^h - \operatorname{Ric}^h)\gamma = 0,$$

d'où on déduit

$$\Delta^h |\gamma|^2 - 2 \langle \operatorname{Ric}^h \gamma, \gamma \rangle \leqslant 0.$$

Puisque $|\gamma|$ tend vers 0 à l'infini, le principe du maximum implique immédiatement le résultat. □

Calculons à présent la différentielle de l'opérateur Φ. On obtient

$$\begin{aligned} d_g \Phi^g \dot h &= \Delta_L^g \dot h + \lambda \dot h \\ (1.9) \qquad &= \frac{1}{2} (D^g)^* D^g \dot h - \mathring{R}^g \dot h + \frac{1}{2} (\operatorname{Ric}^g \circ \dot h + \dot h \circ \operatorname{Ric}^g + 2 \lambda \dot h); \end{aligned}$$

pour la métrique d'Einstein g_0, cela se réduit à

$$d_{g_0} \Phi^{g_0} \dot h = \frac{1}{2} (D^{g_0})^* D^{g_0} \dot h - \mathring{R}^{g_0} \dot h.$$

Cas symétrique. — Si on note d^g la différentielle extérieure induite par la connexion de Levi-Civita sur les formes à valeurs dans le fibré cotangent, alors, par une formule de Weitzenböck [**Bes87**, 12.69], on a

$$2d_{g_0}\Phi^{g_0}\dot{h} = \Delta^{d^{g_0}}\dot{h} - \overset{\circ}{R}{}^{g_0}\dot{h} + \lambda\dot{h}; \tag{1.10}$$

cependant, on a l'inégalité [**Bes87**, lemme 12.71]

$$\frac{\langle \overset{\circ}{R}{}^{g}\dot{h}, \dot{h}\rangle}{|\dot{h}|^2} + \frac{s^g}{n} \leqslant (n-2)K^g_{\max}; \tag{1.11}$$

si g_0 est la métrique symétrique, donc à courbure comprise entre -4 et -1, alors

$$\langle -\overset{\circ}{R}{}^{g_0}\dot{h} + \lambda\dot{h}, \dot{h}\rangle \geqslant (n-2)|\dot{h}|^2.$$

De cette inégalité, on déduit immédiatement le lemme suivant.

Lemme I.1.5. — *Pour la métrique symétrique g_0, l'opérateur $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ est un isomorphisme $L^{2,2} \to L^2$, où $L^{2,2}$ est l'espace de Sobolev à deux dérivées dans L^2.*

Démonstration. — Grâce à l'estimation

$$(d_{g_0}\Phi^{g_0}u, u) = \frac{1}{2}\|D^{g_0}u\|^2 - (\overset{\circ}{R}{}^{g_0}u, u) \geqslant \frac{1}{2}(n-2)\|u\|^2,$$

on voit que l'on peut obtenir la solution de $d_{g_0}\Phi^{g_0}u = v$ par minimisation dans $L^{1,2}$ de la fonctionnelle

$$u \longrightarrow \frac{1}{4}\|D^{g_0}u\|^2 - (\overset{\circ}{R}{}^{g_0}u, v).$$

Comme $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ est un opérateur elliptique homogène, on a des estimations elliptiques locales, avec constantes uniformes, sur les boules de rayon 1, donc u est en fait dans $L^{2,2}$. □

Il est intéressant de noter que ce lemme, première étape à la construction de nos métriques d'Einstein, est démontré grâce à la même estimation qui mène à la rigidité des métriques d'Einstein à courbure sectionnelle strictement négative sur une variété compacte [**Koi78**] (voir aussi [**Bes87**, corollaire 12.73]).

Obstruction. — Si g_0 n'est pas la métrique symétrique (elle peut être une métrique d'Einstein asymptotiquement symétrique sur une variété M de bord S), l'opérateur $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ pourrait avoir un noyau dans L^2. Ce noyau est, comme on le verra, l'obstruction principale à résoudre l'équation $\Phi^g(h) = 0$ pour une métrique g proche de g_0. Ce noyau L^2 apparaît comme un espace $\mathbf{H}^1$ du complexe

$$0 \longrightarrow \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Sym}^2 \xrightarrow{d_g \mathrm{Ric} + \lambda} \mathrm{Sym}^2,$$

où $\mathcal{V}$ est l'espace des champs de vecteurs, et la flèche $\mathcal{V} \to \mathrm{Sym}^2$ est l'action infinitésimale d'un champ de vecteur $X \mapsto \mathcal{L}_X g$. Cela justifie la définition suivante.

Définition I.1.6. — L'espace d'obstruction $L^2\mathbf{H}^1(g)$ est défini comme le noyau L^2 de l'opérateur $d_g\Phi^g = \frac{1}{2}(D^g)^*D^g - \overset{\circ}{R}{}^g$.

En particulier, d'après la formule de Weitzenböck (1.10) et l'inégalité (1.11), si g est à courbure sectionnelle $K^g < 0$, alors $L^2\mathbf{H}^1(g) = 0$.

Dans la construction précédente, si on part d'une métrique g_0 avec $L^2\mathbf{H}^1(g_0) = 0$, alors le lemme I.1.5 sera encore valable, comme on le verra plus loin.

Suite du chapitre. — Le fait que, dans le lemme I.1.5, la différentielle de Φ^{g_0} en g_0 soit un isomorphisme dans L^2 est à peu près ce qu'il faut pour appliquer le théorème des fonctions implicites à l'équation $\Phi^g(h) = 0$. Cependant, les espaces L^2 ne conviennent pas pour résoudre ce problème d'analyse non linéaire : l'utilisation d'espaces de Hölder s'impose dans cette situation ; de plus, la condition L^2 implique une décroissance forte à l'infini, alors que nous voudrions étudier des déformations bornées de g_0, ce qui va nous conduire à introduire des espaces à poids.

Aussi, dans la deuxième section, on va développer l'analyse d'un opérateur tel que $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ sur les espaces symétriques de rang 1 et de type non compact. Cette analyse est d'ailleurs valable plus généralement pour tous opérateurs elliptiques homogènes sur ces espaces. On l'étend dans la troisième section aux espaces seulement asymptotiquement symétriques, ce qui permettra en particulier de travailler avec des métriques g_0 plus générales.

Dans la quatrième section du chapitre, on appliquera cette théorie à l'opérateur $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ pour montrer qu'il fournit un isomorphisme, non seulement entre certains espaces L^2, mais aussi entre espaces de Hölder à poids. Quelques variations autour du théorème des fonctions implicites permettront alors de démontrer le théorème énoncé dans l'introduction.

I.2. Analyse sur les espaces symétriques de rang 1

Dans cette section, nous développons l'analyse des opérateurs sur $\mathbb{K}\mathbf{H}^m$, elliptiques, homogènes, dont nous avons besoin.

Nous utilisons une méthode élémentaire, qui s'appuie essentiellement sur la théorie des représentations, pour obtenir l'estimation des fonctions de Green des opérateurs concernés. Ces fonctions de Green sont alors comparées à celles d'opérateurs scalaires, ce qui permet d'obtenir le comportement des opérateurs dans des espaces de Hölder à poids.

I.2.A. Diagonalisation de l'opérateur. — Nous commençons par diagonaliser nos opérateurs en faisant un analogue de la transformée de Fourier sur nos sphères homogènes (voir par exemple le livre [**Wal73**]).

Analyse harmonique sur G/H. — La propriété de base des espaces symétriques G_0/G de rang 1 est que le groupe compact G agit transitivement sur les sphères concentriques $\mathbb{S}_r = G/H$. Un fibré homogène sur $\mathbb{S}$ est donné par

$$E = G \times_{\rho_0} V_0,$$

où ρ_0 est une représentation de H dans l'espace vectoriel V_0. Si ρ est une représentation de G dans V_ρ, on peut associer à un élément

$$v \otimes w \in V_\rho \otimes \mathrm{Hom}^H(V_\rho, V_0),$$

où Hom^H désigne les morphismes invariants sous H, une section de E,

$$\sigma_{v\otimes w}(g) = w(\rho(g^{-1})v) = \langle w, \rho(g^{-1})v\rangle;$$

nous préférerons la seconde notation qui voit w comme un élément de $(V_\rho^* \otimes V_0)^H$; notons $\Gamma_\rho E$ le sous-espace de sections de E ainsi engendré ; si on prend toutes les représentations irréductibles de dimension finie ρ de G, on engendre ainsi toutes les sections de E :

$$L^2(E) = \oplus_{\rho \text{ irréductible}} \Gamma_\rho E.$$

Connexion homogène. — Nous reprenons les notations de la section I.1.A. Nous nous plaçons à présent sur tout l'espace symétrique G_0/G et nous considérons un fibré homogène $E = G_0 \times_G V_0$, donné par une représentation ρ_0 de G dans V_0. Un tel fibré est naturellement pourvu d'une connexion D, provenant de la connexion standard du G-fibré principal $\pi : G_0 \to G_0/G$. Dans le cas où le fibré E est obtenu par une opération tensorielle, ou autre, à partir du fibré tangent, cette connexion coïncide avec la connexion de Levi-Civita. Un tel fibré devient trivial quand on le tire en arrière sur G_0, et sa connexion devient

$$\pi^* D = d + (\rho_0)_*((g_0^{-1}\dot g_0)_{\mathfrak{g}}), \tag{2.1}$$

où l'indice $\mathfrak{g}$ désigne la projection dans la décomposition $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}_0$.

Nous voulons exprimer cette connexion plutôt en termes de vecteurs tangents $X \in \mathfrak{m}_0$, c'est-à-dire comme $d + a$, où a est une 1-forme sur $\mathfrak{m}_0$, à valeurs dans les endomorphismes de E. Rappelons que nous avons fixé un rayon $\exp(rX_0)$ dans G_0/G : l'identification entre G_0/G et $\mathbb{R}_+ \times G/H$ se fait par $g_0 = g\exp(rX_0)$. Nous déduisons de (2.1) que la trivialisation sur G_0 est ∂_r-parallèle, donc

$$a_{X_0} = 0. \tag{2.2}$$

En revanche, pour un vecteur tangent $\dot g$ à G/H en $g\exp(rX_0)$, on a

$$\begin{aligned}(g_0^{-1}\dot g_0)_{\mathfrak{g}} &= (e^{-rX_0} g^{-1}\dot g)_{\mathfrak{g}} \\ &= \mathrm{ch}(-\operatorname{ad} rX_0) g^{-1}\dot g;\end{aligned}$$

d'après (1.2), l'élément de $\mathfrak{m}_0$, orthogonal à X_0, correspondant à $g^{-1}\dot g \in \mathfrak{m}$, est

$$X = \mathrm{sh}(-\operatorname{ad} rX_0) g^{-1}\dot g \in \mathfrak{m},$$

d'où nous déduisons

$$a_X = (\rho_0)_*(\coth(-\operatorname{ad} rX_0)X), \quad X \in X_0^\perp \subset \mathfrak{m}_0. \tag{2.3}$$

Cas du fibré tangent. — Complétons X_0 en une base $(X_i)_{0\leqslant i<n}$, orthonormale, de $\mathfrak{m}_0$, et notons $\lambda_i^2 = 1$ ou 4 les valeurs propres correspondantes de $(\operatorname{ad} X_0)^2$; en appliquant les formules précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
\delta\partial_r &= -\sum_{i>0}\langle D_{X_i}\partial_r, X_i\rangle \\
&= -\sum_{i>0}\langle[\coth(-\operatorname{ad} rX_0)X_i, X_0], X_i\rangle \\
&= -\sum_{i>0}\lambda_i \coth(r\lambda_i) \\
&= -(2(\dim\mathbb{K}-1)\coth(2r) + (n-\dim\mathbb{K})\coth(r)).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Cette fonction est, à une constante près, la courbure moyenne des sphères concentriques $\mathbb{S}_r$, et nous noterons

$$\mathcal{H}(r) = -\frac{1}{2}\delta dr = \frac{\partial_r \operatorname{vol}_{\mathbb{S}_r}}{2\operatorname{vol}_{\mathbb{S}_r}};$$

la deuxième égalité donnait une autre manière de calculer $\mathcal{H}(r)$, puisque

$$\operatorname{vol}_{\mathbb{S}_r} = (\operatorname{sh} r)^{n-\dim\mathbb{K}}(\operatorname{sh} 2r)^{\dim\mathbb{K}-1}.$$

Quand r tend vers l'infini, on a

$$\mathcal{H}(r) \sim \mathcal{H} = \frac{1}{2}(n-\dim\mathbb{K}) + (\dim\mathbb{K}-1), \tag{2.5}$$

et le volume devient

$$\operatorname{vol}_{\mathbb{S}_r} \sim e^{2\mathcal{H}r}. \tag{2.6}$$

Enfin, de manière similaire, on vérifie

$$\delta X_i = 0, \quad i > 0. \tag{2.7}$$

Calcul du laplacien. — Le fibré homogène E sur G_0/G reste homogène sur les sphères G/H, et nous pouvons donc décomposer toute section σ de E sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{S}$ en

$$\sigma = \sum_\rho \sigma_\rho(r),$$

où $\sigma_\rho(r)$ est une section de E sur G/H qui vit dans $\Gamma_\rho E$. Nous pouvons décomposer $\sigma_\rho(r)$ en

$$\sigma_\rho(r)(g) = \sum_{w\otimes v} f_{w\otimes v}(r)\langle w, \rho(g^{-1})v\rangle,$$

où la somme court sur une base de $V_\rho \otimes (V_\rho^* \otimes V_0)^H$. Nous allons donc calculer le laplacien sur une section du type

$$\sigma = f(r)\langle w, \rho(g^{-1})v\rangle.$$

Nous avons

$$D_{X_0}\sigma = \partial_r \sigma = \partial_r f\langle w, \rho(g^{-1})v\rangle; \tag{2.8}$$

d'autre part, la différentielle suivant G est

$$d\sigma(\dot g) = -f\langle w, \rho_*(g^{-1}\dot g)\rho(g^{-1})v\rangle;$$

compte tenu de la formule de passage (1.2) et de la forme de connexion (2.3), on déduit la formule, pour $X \in \mathfrak{m}_0$ orthogonal à X_0,

$$D_X\sigma = \langle\{(\rho_0)_*(\coth(-r\operatorname{ad}X_0)X) - \rho_*(\operatorname{sh}^{-1}(-r\operatorname{ad}X_0)X)^t\}w, \rho(g^{-1})v\rangle. \tag{2.9}$$

Le fibré tangent $T(G_0/G)$ est associé à la représentation Ad sur $\mathfrak{m}_0$; donc la dérivée covariante $D\sigma$ est élément du fibré homogène $\Omega^1 \otimes E$ associé à la représentation $\mathfrak{m}_0^* \otimes V_0$ de G. Les formules (2.8) et (2.9) nous montrent que

$$\sigma \in \Gamma_\rho E \quad \Longrightarrow \quad D\sigma \in \Gamma_\rho(\Omega^1 \otimes E).$$

À présent, nous passons au laplacien

$$D^*D\sigma = -\operatorname{tr} DD\sigma.$$

Compte tenu du calcul des divergences (2.4) et (2.7), on obtient

$$\begin{aligned} D^*D\sigma &= -\partial_r^2\sigma - 2\mathcal{H}(r)\partial_r\sigma \\ &\quad - \sum_{i>0}\langle\{(\rho_0)_*(\coth(-r\operatorname{ad}X_0)X_i) - \rho_*(\operatorname{sh}^{-1}(-r\operatorname{ad}X_0)X_i)^t\}^2 w, \rho(g^{-1})v\rangle. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Quand r tend vers l'infini, les termes en $\operatorname{sh}^{-1}(r\operatorname{ad}X_0)$ tendent vers 0, et l'opérateur devient

$$D^*D\sigma = -\partial_r^2\sigma - 2\mathcal{H}(r)\partial_r\sigma - \sum_{i>0}\langle(\rho_0)_*(Y_i)^2 w, \rho(g^{-1})v\rangle + O(e^{-r})\sigma.$$

Remarquons que, bien entendu, le terme $O(e^{-r})$ dépend de la représentation ρ.

I.2.B. Fonction de Green. — Nous voulons à présent étudier, sur un fibré homogène E, un opérateur du type

$$P = D^*D + \mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ est un terme homogène, autoadjoint, d'ordre 0 ; un tel terme préserve bien les facteurs $\Gamma_\rho E$. Nous supposons une propriété de coercivité de l'opérateur,

$$(Pu, u) \geqslant c\|u\|^2,$$

pour une fonction u dans L^2. Cela implique, comme dans le lemme I.1.5, que l'équation $P\sigma = \zeta$ a une unique solution dans L^2 dès que ζ est dans L^2. En conséquence, il existe une fonction de Green, $G(x, y)$, telle que $G(x, y) \in \operatorname{Hom}(E_y, E_x)$, et

$$\sigma(x) = \int G(x, y)\zeta(y)dy.$$

Cette fonction de Green est caractérisée par l'équation

$$P_x G = \delta_x(y),$$

et par sa croissance L^2 par rapport à x à l'infini. Si P est homogène, alors G est homogène par rapport à y, donc on peut se contenter de calculer

$$G(x) = G(x, *).$$

Cette fonction $G(x)$ est à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E_*, E)$, et pour $\xi \in E_*$, nous noterons $G_\xi(x)$ la section de E correspondante, vérifiant donc l'équation

$$PG_\xi(x) = \delta_*(x)\xi. \tag{2.11}$$

Nous pouvons décomposer G_ξ suivant les $\Gamma_\rho E$.

Lemme I.2.1. — *La fonction de Green G_ξ se décompose sur un nombre fini de $\Gamma_\rho E$.*

Démonstration. — Rappelons que G_ξ est caractérisée par l'équation (2.11) et par sa croissance L^2 à l'infini. Pour obtenir le lemme, il suffit de montrer que l'on peut écrire tout $\xi \in E_*$ comme valeur à l'origine d'une section continue σ, se décomposant sur un nombre fini de $\Gamma_\rho E$ pour $r > 0$. La solution du problème est simple : considérons $\rho = \rho_0$ (qu'il faut éventuellement décomposer en composantes irréductibles sous H) ; les sections de $\Gamma_{\rho_0} E$ sont les $\langle w, \rho_0(g^{-1})v\rangle$, pour $w \in \mathrm{Hom}^H(V_0, V_0)$ et $v \in V_0$. Considérons les sections σ avec $w = 1$, définies par

$$\sigma_v(r) = \rho_0(g^{-1})v.$$

D'après (2.8), nous avons $D_{\partial_r}\sigma_v = 0$, et d'après (2.9), pour $X \in \mathfrak{m}_0$, orthogonal à X_0,

$$D_X\sigma_v = (\rho_0)_*\left(\frac{\mathrm{ch} - 1}{\mathrm{sh}}(-r \,\mathrm{ad}\, X_0)X\right)\rho_0(g^{-1})v,$$

donc $D_X\sigma_v = O(r)$; à partir de là, il est clair que les σ_v s'étendent à l'origine et fournissent une base de E_* quand v parcourt une base de V_0. En fait, si on identifie E_* et V, l'opération $v \to \sigma_v$ est simplement l'opération d'extension radiale de v. $\square$

Nous pouvons à présent obtenir le comportement de G_ξ. Si ρ est une représentation de G dans V et $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, nous définissons un opérateur de Casimir de ρ relativement à $\mathfrak{m}$ par

$$\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho) = -\sum_i \rho_*(Y_i)^2, \tag{2.12}$$

où (Y_i) est une base orthonormée de $\mathfrak{m}$.

Proposition I.2.2. — *Soit E un fibré homogène associé à la représentation ρ_0, et $P = D^*D + \mathcal{R}$ un opérateur coercif. Si μ est la plus petite valeur propre de $\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) + \mathcal{R}$, alors, quand r tend vers l'infini, on a*

$$|G_\xi| = O\left(e^{-(\mathcal{H}+\sqrt{\mathcal{H}^2+\mu})r}\right).$$

Démonstration. — Compte tenu du lemme I.2.1, on est ramené à montrer l'estimation souhaitée pour chaque composante individuelle σ_ρ de G_ξ dans $\Gamma_\rho E$. La section σ_ρ satisfait, pour $r > 0$,

$$D^* D\sigma_\rho + \mathcal{R}\sigma_\rho = 0,$$

qui est une équation différentielle ordinaire ; σ_ρ est dans L^2, disons pour $r \geqslant 1$; par régularité elliptique, il en est de même pour $\partial_r \sigma_\rho$ et $\partial_r^2 \sigma_\rho$; compte tenu du comportement du volume à l'infini donné par (2.6), nous pouvons écrire

$$\sigma_\rho(r) = -\int_r^\infty e^{-2\mathcal{H}r}(\partial_r \sigma_\rho) e^{2\mathcal{H}r} dr,$$

et par conséquent, pour $r \geqslant 1$,

$$|\sigma_\rho(r)|^2 \leqslant \frac{e^{-2\mathcal{H}r}}{2\mathcal{H}} \int_r^\infty |\partial_r \sigma_\rho|^2 e^{2\mathcal{H}r} dr \leqslant c e^{-2\mathcal{H}r} \|\partial_r \sigma_\rho\|_{L^2}^2 ;$$

la même chose est valable pour $\partial_r \sigma_\rho$, donc

$$|\sigma_\rho|, |\partial_r \sigma_\rho| = O(e^{-\mathcal{H}r}). \tag{2.13}$$

D'après la formule (2.10) pour le laplacien, nous avons l'équation

$$-\partial_r^2 \sigma_\rho - 2\mathcal{H}\partial_r \sigma_\rho + (\mathcal{C}(\rho_0, \mathfrak{m}) + \mathcal{R})\sigma_\rho = O(e^{-r})\sigma_\rho + O(e^{-r})\partial_r \sigma_\rho ; \tag{2.14}$$

la plus petite valeur propre de $\mathcal{C}(\rho_0, \mathfrak{m}) + \mathcal{R}$ est μ, et pour l'espace propre correspondant, l'opérateur

$$-\partial_r^2 - 2\mathcal{H}\partial_r + \mu$$

a pour noyau $e^{(-\mathcal{H} \pm \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu})r}$; compte tenu de (2.13), c'est un exercice facile de déduire de l'équation (2.14) le résultat de la proposition. □

I.2.C. Comportement dans les espaces de Hölder à poids. — Nous définissons un espace de Hölder à poids $C_\delta^{k,\alpha}$ pour les sections σ d'un fibré homogène en demandant que

$$(\operatorname{ch} r)^\delta \sigma \in C^{k,\alpha}.$$

Ce sont donc des sections de régularité locale $C^{k,\alpha}$, qui décroissent à l'infini en $e^{-\delta r}$; dans la définition, le terme $\operatorname{ch} r$ remplace e^r de sorte d'éviter tout problème de régularité en $r = 0$.

Nous aurons besoin aussi des analogues L^2 : on définit l'espace

$$L_\delta^2 = e^{(\mathcal{H} - \delta)r} L^2,$$

puis les espaces $L_\delta^{2,k}$ avec k dérivées dans L_δ^2.

Estimation elliptique locale. — Il est clair qu'un opérateur différentiel homogène $P = D^*D + \mathcal{R}$ envoie continûment $C_\delta^{k+2,\alpha}$ dans $C_\delta^{k,\alpha}$. Compte tenu de l'homogénéité, on a l'estimation elliptique locale, sur toute boule B_1 de rayon 1 de $\mathbb{KH}^m$, pour une constante indépendante du centre de la boule,

$$\|u|_{B_{1/2}}\|_{C_\delta^{k+2,\alpha}} \leqslant c(\|u|_{B_1}\|_{L_\delta^2} + \|Pu|_{B_1}\|_{C_\delta^{k,\alpha}}). \tag{2.15}$$

On a la même chose dans les espaces L^2.

Estimation L^2 pour le laplacien scalaire. — Considérons à présent l'opérateur

$$P = d^*d + \mu$$

sur les scalaires, où μ est une constante fixée.

Si $f(r)$ est une fonction telle que $f(R) = 0$, alors, par intégration par parties,

$$\int_0^R -f\partial_r f e^{-2\gamma r} \operatorname{vol}_r dr \geqslant \int_0^R (\mathcal{H}(r) - \gamma) f^2 e^{-2\gamma r} \operatorname{vol}_r dr; \tag{2.16}$$

d'un autre côté, pour tout nombre $a > 0$, on a

$$-f\partial_r f \leqslant \frac{1}{2}\left(a^{-1}(\partial_r f)^2 + af^2\right). \tag{2.17}$$

Prenons à présent une fonction f définie sur la boule B_R dans $\mathbb{KH}^m$ et nulle sur $r = R$; en appliquant les deux inégalités précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} \langle d^*df, f\rangle e^{-2\gamma r} &= \int_{B_R} |df|^2 e^{-2\gamma r} - 2\gamma f \partial_r f e^{-2\gamma r} \\
&\geqslant \int_{B_R} (-2(a+\gamma) f\partial_r f - a^2 f^2) e^{-2\gamma r} \\
&\geqslant \int_{B_R} (2(a+\gamma)(\mathcal{H}(r) - \gamma) - a^2) f^2 e^{-2\gamma r}
\end{aligned}$$

et en prenant $a = \mathcal{H} - \gamma$, compte tenu de $\mathcal{H}(r) \geqslant \mathcal{H}$,

$$\geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2) \int_{B_R} f^2 e^{-2\gamma r}$$

puis, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour f à support compact,

$$\|e^{-\gamma r} P f\|_{L^2(\mathbb{KH}^m)} \geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \mu)\|e^{-\gamma r} f\|_{L^2(\mathbb{KH}^m)}. \tag{2.18}$$

L'opérateur P est donc coercif, pourvu que $\mathcal{H}^2 + \mu > 0$. D'autre part, rappelons que la norme $\|e^{-\gamma r} f\|_{L^2}$ correspond à des fonctions à décroissance en $e^{-(\mathcal{H}-\gamma)r}$, donc à l'espace à poids $\delta = \mathcal{H} - \gamma$. L'estimation (2.18) mène alors immédiatement au lemme suivant.

Lemme I.2.3. — *L'opérateur scalaire $P : L_\delta^{2,k+2} \to L_\delta^{2,k}$ est un isomorphisme, pourvu que*

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}.$$

Démonstration. — Nous avons un isomorphisme dans L^2, qu'il s'agit d'étendre dans L^2_δ. La condition sur δ dans l'énoncé du lemme dit exactement $\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \mu > 0$, donc l'estimation (2.18) montre que le noyau dans L^2_δ est nul et l'image est fermée ; le conoyau s'identifie alors au noyau dans $L^2_{2\mathcal{H}-\delta}$, qui est également nul. □

Analyse du laplacien scalaire. — Nous appliquons la résolution L^2 à la résolution dans les espaces de Hölder.

Lemme I.2.4. — *Si $\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}$, alors l'opérateur P sur les scalaires est un isomorphisme $C^{k+2,\alpha}_\delta \to C^{k,\alpha}_\delta$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que, comme application des estimations L^2, sous l'hypothèse $\mu > -\mathcal{H}^2$, le problème de Dirichlet sur B_r

$$Pf = g, \quad f|_{\partial B_r} = 0,$$

a une unique solution f sur B_r. Notons f_i la suite des solutions sur les boules B_i. L'estimation (2.18) reste valable pour les f_i, et nous donne

$$\|g\|_{L^2_{\delta'}} \geqslant (-(\delta')^2 + 2\delta'\mathcal{H} + \mu)\|f_i\|_{L^2_{\delta'}(B_i)}; \tag{2.19}$$

les hypothèses du lemme sont $-\delta^2 + 2\delta\mathcal{H} + \mu > 0$, donc on peut choisir δ' tel que

(1) $\delta' < \delta$, si bien que $C^0_\delta \subset L^2_{\delta'}$;
(2) $-(\delta')^2 + 2\delta'\mathcal{H} + \mu > 0$;

comme corollaire des estimations elliptiques sur la boule B_1 et de l'estimation (2.19), on obtient

$$\begin{aligned}\sup_{B_1}|f_i| &\leqslant c_1(\|f_i\|_{L^2(B_1)} + \sup_{B_2}|g|)\\ &\leqslant c_2\|g\|_{C^0_\delta}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Posons $\phi = e^{\delta r} f_i$. On calcule

$$e^{\delta r}Pf_i = d^*d\phi + 2\delta\partial_r\phi + (\mu + 2\delta\mathcal{H}(r) - \delta^2)\phi.$$

Appliquons le principe de maximum à ϕ sur l'anneau $1 \leqslant r \leqslant i$: comme $\mathcal{H}(r) > \mathcal{H}$, nous obtenons

$$\sup_{1\leqslant r\leqslant i} \phi \leqslant \sup\left(\sup_{r=1}\phi, (-\delta^2 + 2\delta\mathcal{H} + \mu)^{-1} \sup_{1\leqslant r\leqslant i} e^{\delta r}Pf_i\right);$$

compte tenu de (2.20), nous déduisons

$$|f_i| \leqslant c_3 e^{-\delta r}\|g\|_{C^0_\delta}.$$

En passant à la limite, nous voyons que f_i converge vers une limite $f \in C^0_\delta$, solution de $Pf = g$, avec

$$\|f\|_{C^0_\delta} \leqslant c_3 e^{-\delta r}\|g\|_{C^0_\delta}.$$

Les estimations elliptiques locales (2.15) donnent alors le lemme. □

On remarquera que, dans la démonstration, la résolution L^2 donne, via la régularité elliptique, une première estimation C^0 sur un compact ; près de l'infini, il suffit alors de comparer, grâce au principe de maximum, la solution à des fonctions aussi simples que $e^{-\delta r}$.

D'autre part, nous avons une fonction de Green G qui ne dépend, dans le cas scalaire, que du rayon r ; elle satisfait l'équation

$$-\partial_r^2 G - 2\mathcal{H}(r)\partial_r G + \mu G = 0.$$

Dans le cas $\mu = 0$, on a la formule

$$G(r) = \int_r^\infty \frac{du}{(\operatorname{sh} u)^{n-\dim \mathbb{K}}(\operatorname{sh} 2u)^{\dim \mathbb{K}-1}};$$

en général, on a, pour une constante ω_n ne dépendant que de n,

$$\begin{aligned} & G(r) \sim \text{cst.} \cdot e^{-(\mathcal{H}+\sqrt{\mathcal{H}^2+\mu})r}, && r \to \infty, \\ (2.21) \qquad & G(r) \sim \frac{\omega_n}{r^{n-2}}, && r \to 0, \\ & G(r) > 0. \end{aligned}$$

Pour montrer la troisième assertion, appliquons à nouveau notre principe de maximum à la fonction $\phi = e^{\delta r} G$, donc

$$d^* d\phi + 2\delta\partial_r \phi + (\mu + 2\delta\mathcal{H}(r) - \delta^2)\phi = 0;$$

choisissons δ satisfaisant l'inégalité du lemme I.2.4, donc $\mu + 2\delta\mathcal{H}(r) - \delta^2 > 0$ et ϕ tend vers 0 à l'infini ; si ϕ prend des valeurs négatives, compte tenu du comportement asymptotique, il doit avoir un minimum négatif, ce qui est contredit par le principe de maximum ; d'où le résultat.

Nous appliquerons cette remarque pour contrôler toutes les fonctions de Green des opérateurs par celles d'opérateurs scalaires.

Cas général. — Le calcul de la fonction de Green dans la proposition I.2.2 a pour conséquence le résultat suivant.

Proposition I.2.5. — *Soit E un fibré homogène associé à la représentation ρ_0, et $P = D^*D + \mathcal{R}$ un opérateur coercif. Si μ est la plus petite valeur propre de $\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) + \mathcal{R}$, alors*

$$P : C_\delta^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_\delta^{k,\alpha}$$

est un isomorphisme, pourvu que

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}.$$

Démonstration. — Regardons l'équation $Pf = g$, donc

$$f(x) = \int G(x,y) g(y) dy;$$

compte tenu de la proposition I.2.2 et des propriétés (2.21), il existe une constante c telle que $|G(x,y)| \leqslant cG_0(x,y)$, où G_0 est la fonction de Green de l'opérateur scalaire $P_0 = d^*d + \mu$. Soit f_0 telle que $P_0 f_0 = |g|$, alors

$$|f(x)| \leqslant c \int G_0(x,y)|g(y)|dy = cf_0(x),$$

d'où on déduit, grâce au lemme I.2.4, que $f \in C^0_\delta$; à partir de cela, les estimations elliptiques locales (2.15) fournissent $f \in C^{k+2,\alpha}_\delta$. □

I.3. Analyse pour les métriques asymptotiquement symétriques

Dans cette section, nous donnons quelques outils pour appliquer l'analyse sur les espaces symétriques de rang 1 aux variétés asymptotiques à ces modèles, c'est-à-dire munies de métriques asymptotiquement symétriques. Cela est nécessaire, notamment pour étudier les perturbations d'une métrique d'Einstein différente de la métrique symétrique.

Nous commençons par quelques outils de régularité locale à l'infini, qui s'appuient sur le fait que la géométrie est uniforme à l'infini ; puis nous étudions les opérateurs elliptiques envisagés dans la section précédente.

I.3.A. Régularité locale à l'infini. — Soit M une variété, à bord S muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory g_V sur le noyau d'une forme de contact η, et g une métrique asymptotiquement symétrique, à l'infini de la forme

$$g = dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}\overline{g_V}. \tag{3.1}$$

Nous commençons par donner la version technique définitive de la définition B.

Définition I.3.1. — Une métrique *asymptotiquement symétrique* est une métrique qui près de l'infini s'écrit $g + h$, où g est définie par (3.1), avec g_V de régularité locale $C^{2,\alpha}$, et $h \in C^{2,\alpha}_1$.

La courbure d'une telle métrique satisfait encore la proposition I.1.3. Nous voulons expliquer le traitement des problèmes de régularité locale pour une telle métrique.

Normes de Hölder. — Pour une métrique comme g, la géométrie est uniforme à l'infini, ce qui se traduit en particulier par le fait que la courbure sectionnelle est majorée et le rayon d'injectivité r_{inj} borné inférieurement. Par conséquent, d'après [**BK81**, proposition 6.4.6], il existe un rayon r_{conv}, tel que dans une boule de rayon r_{conv}, deux points x et y soient reliés par une unique géodésique minimisante.

Vérifions que la norme C^α des tenseurs, déjà utilisée précédemment, est naturellement définie. Fixons un paramètre $\rho < r_{\mathrm{conv}}$, et pour x, y tels que $d(x,y) < \rho$, notons

$p_{x\to y}$ le transport parallèle le long de la géodésique minimisante joignant x à y. La norme de Hölder est définie par

$$\|u\|_{C^\alpha} = \sup|u| + \sup_{d(x,y)<\rho} \frac{|p_{x\to y}(u(x)) - u(y)|}{d(x,y)^\alpha}. \tag{3.2}$$

La norme $C^{k,\alpha}$ est alors naturellement définie par

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(g)} = \sum_0^{k-1} \sup|\nabla^i u| + \|\nabla^k u\|_{C^\alpha},$$

et la norme de Hölder à poids par

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}_\delta(g)} = \|\operatorname{ch}(r)^\delta u\|_{C^{k,\alpha}(g)}.$$

Coordonnées harmoniques. — Pour traiter les problèmes de régularité elliptique locale, nous avons besoin sur nos boules de coordonnées où la métrique est contrôlée. En principe, cela ne pose pas de problème en raison de la géométrie uniforme à l'infini, mais il y a quelques subtilités liées à l'emploi de métriques de régularité $C^{2,\alpha}$.

Si la métrique g_V sur S est lisse, alors la courbure de g est complètement contrôlée par le calcul (1.7) et, dans des coordonnées géodésiques, la métrique g sera uniformément proche de la métrique plate, par exemple dans $C^{2,\alpha}$. Rajouter une perturbation tendant vers 0 à l'infini, $h \in C^{2,\alpha}_\delta$, ne change rien. Dans cette situation, la proposition I.3.2 ci-dessous est inutile.

En revanche, si la métrique g_V est seulement de régularité $C^{2,\alpha}$, le raisonnement précédent ne fonctionne plus, puisque les coordonnées géodésiques font perdre de la régularité. Pour remédier à ce problème, nous utiliserons à la place l'existence de coordonnées harmoniques, qui sont de régularité maximale. La proposition suivante nous suffira.

Proposition I.3.2. — *Soit $Q > 1$, si $\|\operatorname{Ric}^g\|_{C^{k-2,\alpha}} \leqslant C$ et $r_{\mathrm{inj}} \geqslant i$, alors il existe r_{harm}, dépendant seulement de Q, C, i et $k+\alpha$, tel que toute boule $B_{r_{\mathrm{harm}}}(x)$ admette des coordonnées harmoniques dans lesquelles les coefficients g_{ij} de la métrique satisfont*

$$Q^{-1}(\delta_{ij}) \leqslant (g_{ij}) \leqslant Q(\delta_{ij}),$$

$$\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant k} r_{\mathrm{harm}}^{|\beta|} \sup|\partial_\beta g_{ij}| + \sum_{|\beta|=k} r_{\mathrm{harm}}^{k+\alpha} \sup \frac{|\partial_\beta g_{ij}(y) - \partial_\beta g_{ij}(x)|}{|x-y|^\alpha} \leqslant Q.$$

La théorie est due à Anderson et Cheeger **[AC92, And90]**, qui obtiennent les coordonnées harmoniques sous une hypothèse C^0 sur Ricci et en déduisent une régularité $C^{1,\alpha}$ pour la métrique. Mais dans des coordonnées harmoniques, Ricci devient essentiellement elliptique et l'on peut obtenir une régularité $C^{2,\alpha}$ sur g à partir d'une régularité C^α sur Ric. La version que nous avons donnée est une conséquence facile des techniques exposées dans le survey **[HH97]** (je remercie Marc Herzlich pour son aide sur ce point).

Quitte à diminuer r_{harm}, on peut supposer qu'il est plus petit que le rayon r_{conv} défini plus haut ; nous utiliserons $\rho = r_{\mathrm{harm}}$ dans la définition (3.2) des normes de Hölder, de sorte que sur une boule $B_{r_{\mathrm{harm}}}$, on dispose de coordonnées où les normes de Hölder par rapport à la métrique g et à la métrique euclidienne sont uniformément bornées.

Régularité, difféomorphismes. — Nous avons maintenant les outils adéquats pour traiter les problèmes de régularité que nous rencontrerons plus loin. Par exemple, on obtient le lemme suivant.

Lemme I.3.3. — *Soit g fixée comme en* (3.1). *Alors l'application $\gamma \to \mathrm{Ric}^{g+\gamma}$ est lisse $C^{2,\alpha}_\delta(g) \to C^\alpha_\delta(g)$.*

Démonstration. — Comme les normes de Hölder sont définies de manière locale, la question est purement locale. On est donc ramené à vérifier l'assertion dans une boule $B_{r_{\mathrm{harm}}}$ munie de coordonnées harmoniques fournies par la proposition I.3.2. Dans cette boule, la métrique g et la métrique euclidienne se comparent uniformément, donc les normes de Hölder se comparent uniformément aussi, et on est ramené à regarder la question par rapport à la métrique euclidienne. Maintenant, $\mathrm{Ric}^{g+\gamma}$ est un opérateur non linéaire du second ordre en γ, donné par des expressions explicites en fonction des dérivées de γ : il est évidemment lisse. □

Nous considérerons aussi un groupe de difféomorphismes de (M, g) laissant le bord S fixe. Nous voudrions définir un groupe $\mathfrak{Diff}^{k,\alpha}_\delta(g)$, des difféomorphismes de régularité locale $C^{k,\alpha}$, valant l'identité sur le bord à l'infini, et induits près de l'infini par un champ de vecteurs de régularité $C^{k,\alpha}_\delta(g)$. En réalité, il s'agira d'un abus de notation, car nous nous contenterons de paramétrer un voisinage de l'identité par

$$X \in C^{k,\alpha}_\delta \longmapsto \varphi^X,$$

où φ^X est le difféomorphisme induit par le flot du champ de vecteurs X (suffisamment proche de 0). Cela est suffisant pour nos applications car nous ne regarderons que des difféomorphismes proches de l'identité. L'action de ce groupe des difféomorphismes sur les métriques est lisse, comme le montre le lemme suivant. Notons $\mathfrak{Met}^{k,\alpha}_\delta(g)$ l'espace des métriques $h = g + \gamma$ avec $\gamma \in C^{k,\alpha}_\delta$.

Lemme I.3.4. — *Soit g asymptotiquement symétrique et $\mathfrak{Diff}^{k+1,\alpha}_\delta(g)$ le groupe des difféomorphismes induit. Alors la flèche naturelle*

$$\mathfrak{Diff}^{k+1,\alpha}_\delta(g) \times \mathfrak{Met}^{k,\alpha}_\delta(g) \longrightarrow \mathfrak{Met}^{k,\alpha}_\delta(g)$$

est lisse.

Démonstration. — La démonstration est similaire à celle du lemme précédent. Le recouvrement par des boules où existent des coordonnées harmoniques permet de ramener le lemme à une question purement locale, pour la métrique euclidienne dans une boule. Le résultat devient évident. □

I.3.B. Analyse pour les métriques asymptotiquement hyperboliques complexes. — Montrons comment l'analyse faite sur les espaces symétriques de rang 1 se généralise dans le cadre asymptotiquement symétrique. Soit M une variété de dimension $n = 2m$, à bord S muni d'une forme de contact η, dont le noyau V est muni d'une métrique g_V. Soit g une métrique sur M, asymptotiquement symétrique, plus précisément dans ce cas asymptotiquement hyperbolique complexe ; près du bord S, on peut donc écrire

$$g = dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}\overline{g_V} + O(e^{-r});$$

on demande à la perturbation $O(e^{-r})$ d'être un élément de $C_1^{2,\alpha}$; d'ailleurs, une décroissance plus faible en $O(e^{-\delta r})$ dans un espace $C_\delta^{2,\alpha}$ pour $\delta > 0$ suffirait.

Soit E un fibré tensoriel, muni de la connexion de Levi-Civita D. Nous pouvons définir à nouveau des espaces de sections de E de régularité höldérienne $C_\delta^{k,\alpha}$. Soit $\mathcal{R}$ un opérateur d'ordre 0, tendant à l'infini vers un opérateur $\mathcal{R}_\infty$ provenant de la U_m-structure à l'infini (par exemple l'opérateur $\overset{\circ}{R}{}^g$ sur les 2-tenseurs). La proposition I.2.5 se généralise de la façon suivante pour l'opérateur $P = D^*D + \mathcal{R}$ sur M.

Proposition I.3.5. — *Si l'opérateur $P_0 = D^*D + \mathcal{R}_\infty$ sur $\mathbb{C}\mathbf{H}^m$, obtenu comme limite à l'infini de P, a μ pour plus petite valeur propre des termes d'ordre zéro (définie dans la proposition I.2.5), alors*

$$P : C_\delta^{k+2,\alpha} \longrightarrow C_\delta^{k,\alpha}$$

est Fredholm, pourvu que

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}. \tag{3.3}$$

Le noyau et le conoyau ne dépendent pas de δ dans cet intervalle, et sont égaux aux noyau et conoyau L^2.

Remarque I.3.6. — La proposition est bien sûr encore valable si l'on remplace les espaces de Hölder par des espaces de Sobolev à poids $L_\delta^{k,2}$.

Remarque I.3.7. — La démonstration ci-dessous reste valable dans le cas bien connu des métriques asymptotiquement hyperboliques réelles.

Démonstration que P est Fredholm. — L'ingrédient essentiel est que la structure de contact sur $S = \partial M$ est localement difféomorphe à la structure standard sur $\mathbb{S}$; localement, on peut donc envoyer le champ d'hyperplans de S sur celui de $\mathbb{S}$ par un difféomorphisme

$$\varphi : S \to \mathbb{S}.$$

Soit η la 1-forme de contact de S et η_0 celle de $\mathbb{S}$, on a donc
$$\varphi_*\eta = f^2\eta_0$$
pour un certain facteur conforme f. Considérons
$$\psi(r,x) = (\rho = r + \ln f, \varphi(x)),$$
alors on calcule
$$\begin{aligned}\psi_*(dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}\gamma^2) &= \varphi_*(d(\rho - \ln f)^2 + e^{4\rho}f^{-4}\eta^2 + e^{2\rho}f^{-2}\gamma^2)\\ &= d\rho^2 + e^{4\rho}\eta_0^2 + e^{2\rho}f^{-2}\varphi_*\gamma + O(e^{-\rho})\end{aligned}$$
Quitte à modifier φ en un point donné p, on peut toujours supposer que
$$f^{-2}\varphi_*\gamma(p) = \gamma_0(\varphi(p))$$
ce qui implique que sur une boule de rayon assez petit $B_\varsigma(p)$ on ait
$$|f^{-2}\varphi_*\gamma - \gamma_0| < \varepsilon.$$
En revanche, contrairement à ce qui passe en géométrie riemannienne, nous ne pouvons pas, en modifiant le difféomorphisme, faire coïncider les dérivées premières de $f^{-2}\varphi_*\gamma$ et γ_0 au point p (en effet, la structure de contact étant fixée, le tenseur de Nijenhuis de γ est un invariant métrique du premier ordre). Cependant, les dérivées sur $\mathbb{S}$ sont au moins bornées,
$$|\nabla^i(f^{-2}\varphi_*\gamma - \gamma_0)| < C.$$
Compte tenu de la forme de la métrique g_0, les dérivées suivant les directions de $\mathbb{S}$ sont toujours accompagnées d'un facteur $e^{-\rho}$ ou $e^{-2\rho}$; c'est suffisant pour déduire, sur $(R,+\infty)\times B_\varsigma(p)$, l'estimation pour R assez grand et ς assez petit,
$$\|\psi_*(dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}\gamma^2) - g_0\|_{C^{2,\alpha}} < \varepsilon. \tag{3.4}$$
Remarquons qu'en conséquence, la norme de Hölder par rapport à g_0 (et ramenée sur M par ψ) se compare uniformément à la norme de Hölder par rapport à g.

On voit donc que l'on peut recouvrir S par des boules $B_\varsigma(p_i)$, de sorte que pour chaque i, on ait comme ci-dessus une application
$$\psi_i : (R,+\infty)\times B_\varsigma(p_i) \longrightarrow \mathbb{C}\mathbf{H}^m \tag{3.5}$$
vérifiant l'estimation (3.4).

Soit χ_i des fonctions sur S telles que (χ_i^2) soit une partition de l'unité subordonnée aux $(B_\varsigma(p_i))$. Soit $(\chi_{\text{int}}^2, \chi_{\text{ext}}^2)$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de M par
$$M_{\text{int}} = \{r < R+1\} \quad \text{et} \quad M_{\text{ext}} = \{r > R-1\}.$$
Soit Q_{int} un parametrix pour l'opérateur elliptique P sur M_{int}. On définit l'opérateur Q suivant, candidat à être un parametrix sur M tout entier, par
$$Qu = \chi_{\text{ext}}\sum_i \chi_i(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*)\chi_i\chi_{\text{ext}}u + \chi_{\text{int}}Q_{\text{int}}\chi_{\text{int}}u.$$

Dans le calcul de PQu qui suit, on notera $\otimes$ diverses opérations bilinéaires, que l'on n'a pas besoin d'écrire précisément ; pour $u \in C^\alpha_\delta$, on a

$$
\begin{aligned}
PQu = &\chi_{\mathrm{ext}} \sum_i \chi_i P(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*)\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u + \chi_{\mathrm{int}} PQ_{\mathrm{int}}\chi_{\mathrm{int}}u \\
&+ \nabla^2(\chi_{\mathrm{ext}}\chi_i) \otimes \psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u + \nabla^2\chi_{\mathrm{int}} \otimes Q_{\mathrm{int}}\chi_{\mathrm{int}}u \\
&+ \nabla(\chi_{\mathrm{ext}}\chi_i) \otimes \nabla(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u) + \nabla\chi_{\mathrm{int}} \otimes \nabla(Q_{\mathrm{int}}\chi_{\mathrm{int}}u).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Posons, pour v à support dans $B_\varsigma(p_i)$,

$$U_i(v) = Pv - \psi_i^* P_0(\psi_i)_* v;$$

compte tenu de l'estimation (3.4), et comme $\mathcal{R}$ tend vers $\mathcal{R}_\infty$, on a

$$\|U_i(v)\|_{C^\alpha_\delta} \leqslant c\varepsilon \|v\|_{C^{2,\alpha}_\delta}; \tag{3.7}$$

on déduit le contrôle sur le premier terme de (3.6),

$$\chi_{\mathrm{ext}} \sum_i \chi_i P(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*)\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u = \chi^2_{\mathrm{ext}}v + \sum_i U_i(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_* v). \tag{3.8}$$

Pour le second terme, nous avons par définition

$$PQ_{\mathrm{int}} = 1 + K_{\mathrm{int}}$$

d'où nous déduisons immédiatement

$$\chi_{\mathrm{int}} PQ_{\mathrm{int}}\chi_{\mathrm{int}}u = \chi^2_{\mathrm{int}}u + \chi_{\mathrm{int}}K_{\mathrm{int}}(\chi_{\mathrm{int}}u). \tag{3.9}$$

Pour les termes suivants, observons que χ_i étant définie sur S, on a automatiquement sur M le contrôle

$$|\nabla\chi_i| + |\nabla^2\chi_i| = O(e^{-r}); \tag{3.10}$$

cela implique des estimations du type

$$\|\nabla\chi_i \otimes v\|_{C^{k,\alpha}_\delta} \leqslant \varepsilon\|v\|_{C^{k,\alpha}_\delta}$$

si R a été choisi assez grand ; nous déduisons que dans la formule (3.6), les termes ne faisant pas intervenir de dérivées de χ_{ext}, à savoir

$$V(u) = \sum_i \chi_{\mathrm{ext}}\nabla^2\chi_i \otimes \psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u + \chi_{\mathrm{ext}}\nabla\chi_i \otimes \nabla(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u)$$

vérifient l'estimation

$$\|V(u)\|_{C^\alpha_\delta} \leqslant \varepsilon\|u\|_{C^\alpha_\delta}. \tag{3.11}$$

Tous les termes restants dans (3.6) ont des dérivées de χ_{int} ou χ_{ext} en facteur, donc ils sont de la forme $\varrho Q_1 u$, où d'une part $Q_1 : C^\alpha_\delta \to C^{1,\alpha}_\delta$ avec $Q_1(u)$ à support dans M_{int}, et d'autre part $\varrho : C^{1,\alpha}_\delta \to C^\alpha_\delta$ est l'inclusion ; mais ϱ restreinte à des tenseurs à support dans M_{int} est compacte, donc ϱQ_1 l'est aussi.

En rassemblant cette observation avec (3.8), (3.9) et (3.11), on déduit finalement

$$PQu = u + U(u) + V(u) + \chi_{\mathrm{int}}K_{\mathrm{int}}(\chi_{\mathrm{int}}u) + \varrho Q_1(u),$$

avec

$$U(u) = \chi_{\mathrm{ext}} \sum_i \chi_i U_i(\psi_i^* P_0^{-1}(\psi_i)_* \chi_i \chi_{\mathrm{ext}} u)$$

et par conséquent, d'après (3.7),

$$\|U(u)\|_{C^\alpha_\delta} \leqslant C\varepsilon \|u\|_{C^\alpha_\delta};$$

en choisissant le recouvrement par les boules $B_\varsigma(p_i)$ assez fin, de sorte que ε soit assez petit, on obtient

$$PQ = 1 + U + V + K, \quad \|U+V\| < 1, \quad K \text{ compact.}$$

Comme un résultat similaire peut être établi pour QP, on déduit que P est Fredholm. □

Démonstration que les noyau et conoyau ne dépendent pas de δ. — On montre cet énoncé de régularité en utilisant l'inversibilité de l'opérateur modèle P_0. Supposons $Pu = 0$, fixons une boule $B_\varsigma(p_i)$, alors

$$\begin{aligned} P_0(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u &= (P_0 - (\psi_i)_*P)(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u + (\psi_i)_*P\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u \\ &= -(\psi_i)_*\left\{U_i(\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u) + \nabla(\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}) \otimes \nabla u + \nabla^2(\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}) \otimes u\right\}. \end{aligned}$$

Prolongeons l'opérateur $(\psi_i)_*U_i$, a priori défini seulement sur les tenseurs à support dans $\psi(B_\varsigma(p_i))$, en un opérateur global $\overline{U_i}$ sur $\mathbb{C}\mathbf{H}^m$: par exemple, on peut (quitte à diminuer ς) supposer $(\psi_i)_*U_i$ défini sur la boule $B_{2\varsigma}(p_i)$; il suffit alors de poser $\overline{U_i} = (\psi_i)_*U_i \circ \zeta_i$, où ζ_i est une fonction à support dans $B_{2\varsigma}(p_i)$, égale à 1 sur $B_\varsigma(p_i)$; compte tenu du contrôle (3.7) sur U_i, on peut rendre $\overline{U_i}$ aussi petit que l'on veut, et donc $P_0 + \overline{U_i}$ inversible.

On peut réécrire l'égalité précédente comme

$$(3.12) \qquad (P_0 + \overline{U_i})(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u = (\psi_i)_*(\nabla(\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}) \otimes \nabla u + \nabla^2(\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}) \otimes u).$$

Partons de $u \in C^{k+2,\alpha}_\delta$, alors, par (3.10), le membre de droite de (3.12) est dans $C^{k+1,\alpha}_{\delta+1}$; si $\delta + 1$ satisfait encore la condition (3.3), alors, puisque $P_0 + U$ est un isomorphisme, $(\psi_i)_*\chi_i\chi_{\mathrm{ext}}u$ est en réalité dans $C^{k+2,\alpha}_{\delta+1}$, et donc finalement u lui-même aussi. De proche en proche, on montre ainsi que u est dans $C^{k+2,\alpha}_\delta$ pour tout poids δ vérifiant

$$\delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}.$$ □

Démonstration qu'ils sont égaux aux noyau et conoyau L^2. — Le principe est le même que précédemment, mais demande plus de formalisme car la condition L^2 est a priori plus faible qu'une condition C^0 à l'infini. Pour chaque boule $B_\varsigma(p_i)$, considérons une copie $\mathbb{C}\mathbf{H}^m_i$ de l'espace hyperbolique complexe, et définissons l'application

$$\begin{array}{rccc} \iota : & C^{2,\alpha}_\delta(M) & \longrightarrow & \oplus_i C^{2,\alpha}_\delta(\mathbb{C}\mathbf{H}^m_i) \\ & u & \longmapsto & \oplus_i(\psi_i)_*(\chi_{\mathrm{ext}}\chi_i u) \end{array}$$

ainsi qu'un inverse à gauche partiel

$$\begin{array}{rccc} \kappa : & \oplus_i C^{2,\alpha}_\delta(\mathbb{C}\mathbf{H}^m_i) & \longrightarrow & C^{2,\alpha}_\delta(M) \\ & v = \oplus_i v_i & \longmapsto & \sum_i \chi_{\mathrm{ext}}\chi_i\psi_i^* v_i \end{array}$$

vérifiant

$$\kappa\iota(u) = u \quad \text{si } u \text{ est à support dans } M_{\mathrm{ext}}.$$

Nous disposons sur $\oplus_i C^{2,\alpha}_\delta(\mathbb{C}\mathbf{H}^m_i)$ d'un opérateur $\overline{U} = \oplus_i \overline{U_i}$; dans (3.12), retenons les termes où χ_{ext} n'est pas différenciée pour définir $\overline{V}$ par la formule

$$\overline{V}(v) = -\oplus_i (\psi_i)_* \left(\chi_{\mathrm{ext}}\nabla\chi_i \otimes \nabla\kappa(v) + \chi_{\mathrm{ext}}\nabla^2\chi_i \otimes \kappa(v)\right),$$

de sorte que, par (3.10), le recouvrement étant fixé, $\overline{V}$ peut être rendu aussi petit que l'on veut en prenant R assez grand. Si l'on dispose d'une solution L^2 de $Pu = 0$, alors (3.12) nous conduit à l'égalité

$$(P_0 + \overline{U} + \overline{V})\iota(u) = \text{termes concentrés sur } M_{\mathrm{int}}\,;$$

comme P_0 est inversible et que, par un choix de R assez grand, $\overline{U}$ et $\overline{V}$ sont aussi petits que l'on veut, on peut supposer que $P_0 + \overline{U} + \overline{V}$ est inversible aussi ; par régularité elliptique à l'intérieur, le terme de droite est dans C^α, donc $\iota(u)$ (et par conséquent u) sont dans $C^{2,\alpha}_\delta$ pour tous les δ satisfaisant (3.3). Bien entendu, par régularité elliptique locale, une régularité supplémentaire de l'opérateur P impliquera une régularité supplémentaire de u. □

I.3.C. Analyse dans les cas quaternionien et octonionien. — L'ingrédient majeur permettant de transférer le modèle hyperbolique complexe aux variétés asymptotiquement hyperboliques complexes était l'équivalence locale des structures de contact. Dans les cas quaternionien et octonionien, cette équivalence n'est plus vraie et j'obtiens des résultats plus faibles, vraisemblablement non optimaux. Ces résultats reposent sur l'inégalité de Kato

$$|Du| \geqslant |d|u|| \tag{3.13}$$

qui permet de comparer directement l'opérateur D^*D au laplacien scalaire d^*d, mais en néglige les termes d'ordre 0.

Soient donc comme précédemment une métrique asymptotiquement symétrique,

$$g = dr^2 + e^{4r}\eta^2 + e^{2r}\overline{g_V} + O(e^{-r}), \tag{3.14}$$

sur une variété M de bord S, et un opérateur $P = D^*D + \mathcal{R}$ avec $\mathcal{R}$ tendant à l'infini vers un opérateur $\mathcal{R}_\infty$.

Problème de Dirichlet près de S. — Nous commençons par résoudre le problème de Dirichlet sur $r \geqslant R$,

$$\begin{cases} Pf &= g, \\ f|_{r=R} &= 0. \end{cases}$$

Commençons par supposer que le terme $O(e^{-r})$ dans la métrique soit absent. Nous supposons aussi, quitte à ajouter un terme $O(e^{-r})$, que la plus petite valeur propre de $\mathcal{R}$ sur $r \geqslant R$ est égale à la plus petite valeur propre ν de $\mathcal{R}_\infty$, c'est-à-dire

$$\langle \mathcal{R}u, u\rangle \geqslant \nu |u|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Kato (3.13), l'estimation (2.18) obtenue par intégration par parties reste valable et nous donne, si $f(r = R) = 0$,

$$\|e^{-\gamma r} Pf\|_{L^2} \geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \nu)\|e^{-\gamma r} f\|_{L^2}.$$

Si g et $\mathcal{R}$ sont à présent quelconques, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$, quitte à choisir R grand pour que la perturbation soit petite,

$$\|e^{-\gamma r} Pf\|_{L^2} \geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \nu - \varepsilon)\|e^{-\gamma r} f\|_{L^2}.$$

Cela démontre la partie L^2 du lemme suivant.

Lemme I.3.8. — *Sur $r \geqslant R$, avec R assez grand, l'opérateur P avec condition de Dirichlet est un isomorphisme $L^{2,k+2}_\delta \to L^{2,k}_\delta$ et $C^{k+2,\alpha}_\delta \to C^{k,\alpha}_\delta$ pourvu que*

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \nu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \nu}.$$

Bien entendu, les valeurs que peut prendre k dans ce lemme dépendent de la régularité de l'opérateur P.

Démonstration. — Nous avons déjà vu l'énoncé L^2. On en déduit l'énoncé dans les espaces de Hölder comme dans la démonstration du lemme I.2.4, toujours en utilisant l'inégalité de Kato pour se ramener au cas scalaire. Pour les estimations elliptiques locales, il faut se placer à chaque fois dans les boules fournies par la proposition I.3.2. □

Problèmes Fredholm. — Nous pouvons à présent déduire un analogue faible, et beaucoup plus facile à obtenir, de la proposition I.3.5.

Proposition I.3.9. — *Si la limite $\mathcal{R}_\infty$ de $\mathcal{R}$ a ν pour plus petite valeur propre, alors*

$$P : C^{k+2,\alpha}_\delta \longrightarrow C^{k,\alpha}_\delta$$

est Fredholm, pourvu que

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \nu} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \nu}. \tag{3.15}$$

Le noyau et le conoyau ne dépendent pas de δ dans cet intervalle, et sont égaux aux noyau et conoyau L^2.

Démonstration. — La démonstration est évidente : on obtient un parametrix pour P en combinant un parametrix à l'intérieur avec l'isomorphisme du lemme I.3.8. La régularité des noyau et conoyau s'obtient aussi en se ramenant à cet isomorphisme. □

Continuité par rapport à g_V. — Si la donnée au bord g_V varie, les diverses métriques g ne se comparent pas, ce qui rend plus délicat a priori la comparaison des opérateurs $P = D^*D + \mathcal{R}$ pour une famille de métriques. Les deux lemmes suivants traitent ce problème.

Lemme I.3.10. — *Supposons qu'on ait une famille de métriques asymptotiquement symétriques, la métrique de Carnot-Carathéodory à l'infini pouvant varier, et une famille d'opérateurs associés $P = D^*D + \mathcal{R}$. Alors l'indice fourni par la proposition I.3.9 est localement constant.*

Démonstration. — Par le principe d'excision, la différence d'indice ne peut provenir que d'une contribution à l'infini ; cette contribution peut être calculée sur le modèle du problème de Dirichlet traité par le lemme I.3.8 ; mais comme l'opérateur du problème de Dirichlet est toujours un isomorphisme, on déduit que l'indice ne peut pas varier. □

Il sera également utile de savoir qu'une perturbation d'un isomorphisme reste inversible.

Lemme I.3.11. — *Supposons qu'on ait une famille de métriques asymptotiquement symétriques, avec la métrique de Carnot-Carathéodory à l'infini pouvant varier. Si, pour une métrique g, l'opérateur $P = D^*D+\mathcal{R}$ est un isomorphisme $C^{2,\alpha}_\delta \to C^\alpha_\delta$, alors il en est de même pour toutes les métriques proches, et on peut contrôler uniformément la norme des inverses.*

Démonstration. — De même que précédemment, quitte à rajouter des termes très petits, on peut se ramener au cas où, près de l'infini, la métrique n'a pas de terme $O(e^{-r})$ dans son écriture (3.14) et $\mathcal{R}$ a pour plus petite valeur propre ν.

Commençons par une estimation L^2. L'intégration par parties (2.16) avec (2.17) donne, sans condition au bord sur f,

$$\int_{r\geqslant R} \big(|D_{\partial_r} f|^2 - 2\gamma\langle f, D_{\partial_r} f\rangle\big)e^{-2\gamma r} \geqslant (\mathcal{H}^2-\gamma^2)\int_{r\geqslant R} |f|^2 e^{-2\gamma r};$$

soit ρ la fonction définie par

$$\rho = \begin{cases} r & \text{sur } r\geqslant R,\\ R & \text{sur } r\leqslant R,\end{cases}$$

alors, en appliquant l'estimation précédente,

$$\begin{aligned}\int_M \langle D^*Df, f\rangle e^{-2\gamma\rho} &= \int_M |Df|^2 e^{-2\gamma\rho} - 2\gamma \int_{r\geqslant R} \langle f, D_{\partial_r} f\rangle e^{-2\gamma r} \\ &\geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2) \int_{r\geqslant R} |f|^2 e^{-2\gamma r}\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\int_M \langle Pf, f\rangle e^{-2\gamma\rho} - \int_{r\leqslant R} \langle \mathcal{R}f, f\rangle e^{-2\gamma\rho} \geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \nu) \int_{r\geqslant R} |f|^2 e^{-2\gamma r},$$

ce qui donne l'analogue suivant à l'infini de (2.18) :

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \nu)^{-1} \int_M |Pf|^2 e^{-2\gamma\rho} - 2 \int_{r\leqslant R} \langle \mathcal{R}f, f\rangle e^{-2\gamma R}& \\ \geqslant (\mathcal{H}^2 - \gamma^2 + \nu) \int_{r\geqslant R} |f|^2 e^{-2\gamma r};&\end{aligned}$$

l'inégalité précédente se réécrit ($\gamma = \mathcal{H} - \delta$)

$$\|f\|_{L^2_\delta(\{r\geqslant R\})} \leqslant c_1 \left(\|Pf\|_{L^2_\delta} + \|f\|_{L^2_\delta(\{r\leqslant R\})} \right). \tag{3.16}$$

Montrons à présent l'énoncé du lemme pour les espaces L^2_δ. Raisonnons par l'absurde : si les opérateurs proches n'étaient pas inversibles, avec la norme de l'inverse contrôlée, alors il existerait une suite de métriques g_i tendant vers g, et une suite f_i telle que

$$\|f_i\|_{L^2_\delta(g_i)} = 1, \tag{3.17}$$

$$\|P^{g_i} f_i\|_{L^2_\delta(g_i)} \to 0. \tag{3.18}$$

On peut supposer que les f_i convergent, sur tout compact, fortement dans L^2, vers une solution $f \in L^2_\delta$ de $Pf = 0$ pour la métrique g. L'inégalité (3.16) avec (3.18) montre que si $\|f_i\|_{L^2_\delta(\{r\leqslant R\})}$ tend vers 0, alors $\|f_i\|_{L^2_\delta(\{r\geqslant R\})}$ aussi, ce qui contredirait (3.17) ; donc $\|f_i\|_{L^2_\delta(\{r\leqslant R\})}$ ne tend pas vers 0, donc f est non nul, ce qui contredit l'inversibilité de l'opérateur P pour la métrique g.

Nous avons donc montré que l'opérateur P est un isomorphisme entre les espaces L^2_δ pour les métriques proches de g, avec contrôle de la norme de l'inverse. On en déduit le même énoncé dans les espaces de Hölder en suivant la démarche du lemme I.2.4. □

I.4. Construction des métriques d'Einstein

Dans cette section, nous finissons nos constructions en appliquant le schéma de démonstration expliqué à la fin de la première section.

I.4.A. Calcul du terme de courbure. — Dans cette section, nous calculons, pour tous les espaces symétriques, la courbure $\overset{\circ}{R}{}^g$ agissant sur les 2-tenseurs symétriques. Il est facile de voir que $\overset{\circ}{R}{}^g$ est induit par l'opérateur sur $\mathfrak{m}_0^{\otimes 2}$,

$$\overset{\circ}{R}{}^g(u \otimes v) = - \sum_{(e_i) \text{ base de } \mathfrak{g}} [e_i, u] \otimes [e_i, v]. \tag{4.1}$$

En terme d'opérateurs de Casimir (2.12), nous avons donc

$$\overset{\circ}{R}{}^g = \frac{1}{2}\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \operatorname{Sym}^2 \mathfrak{m}_0) - \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}_0). \tag{4.2}$$

En particulier, l'opérateur $\overset{\circ}{R}{}^g$ doit être une constante sur chaque composante irréductible de la décomposition de $\operatorname{Sym}^2 \mathfrak{m}_0$ sous G.

Cas complexe et quaternionien. — Nous pouvons faire un calcul explicite pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, en calculant la plus grande valeur propre de $\overset{\circ}{R}{}^g$ et l'espace propre correspondant. Pour rendre les deux calculs identiques, nous décrirons ici $\mathbb{C}\mathbf{H}^m$ comme $U_{1,m}/U_1U_m$ au lieu de $SU_{1,m}/U_m$. On peut donc représenter $G_0 = U_{1,m}$ (resp. $Sp_{1,m}$) sous la forme de matrices $(m+1) \times (m+1)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$; le groupe $G = U_1U_m$ (resp. Sp_1Sp_m) est le sous-groupe de G_0 donné par les matrices unitaires

$$\begin{pmatrix} z & \\ & u \end{pmatrix}, \quad z \in U_1 \text{ (resp. } Sp_1), \ u \in U_m \text{ (resp. } Sp_m),$$

et $\mathfrak{m}_0$ est formé des matrices hermitiennes

$$\begin{pmatrix} & X^* \\ X & \end{pmatrix};$$

on peut choisir un élément privilégié de $\mathfrak{m}_0$,

$$X_0 = \begin{pmatrix} & 1 & \cdots \\ 1 & & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Il est important de noter que la forme quadratique invariante sur $\mathfrak{g}$ est déterminée en demandant que $|X_0| = 1$. Le groupe U_m (resp. Sp_m) agit de manière standard sur $\mathfrak{m}_0 = \mathbb{K}^m$, tandis que le groupe multiplicatif unitaire U_1 (resp. Sp_1) de $\mathbb{K}$ agit simplement par multiplication.

Dans le cas complexe, la structure complexe I commute à l'action de G et induit un endomorphisme $\varphi = I \otimes I$ sur $\operatorname{Sym}^2_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^m$, avec $\varphi^2 = 1$; nous avons donc deux espaces propres $E_{\pm 1}$ pour les valeurs propres ± 1, et la trace $\operatorname{tr}^g : E_1 \to \mathbb{R}$ donne une décomposition supplémentaire $E_1 = \mathbb{R}g \oplus E_1^0$. On peut donc décomposer (sous U_1U_m)

$$\operatorname{Sym}^2_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^m = E_{-1} \oplus E_1^0 \oplus \mathbb{R}g.$$

Dans le cas quaternionien, nous avons encore un G-endomorphisme

$$\varphi = I \otimes I + J \otimes J + K \otimes K,$$

qui satisfait $\varphi^2 = 2\varphi + 3$, donc ses valeurs propres sont -1 et 3, et on décompose (sous $Sp_1 Sp_m$)

$$\mathrm{Sym}^2_{\mathbb{R}} \mathbb{H}^m = E_{-1} \oplus E_3^0 \oplus \mathbb{R}g.$$

Les deux décompositions sont irréductibles sous G. Un calcul facile utilisant la formule (4.1) donne le résultat suivant.

Lemme I.4.1. — *Dans les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, l'opérateur $\overset{\circ}{R}{}^g$ a une valeur propre 4 sur E_{-1}, et les autres valeurs propres sont strictement négatives.* □

Cas octonionien. — Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{O}$, une description aussi simple est moins facile à obtenir. Nous utilisons une autre approche, plus générale, qui s'appuie sur la théorie des représentations. Tous les faits qui suivent peuvent être trouvés, par exemple, dans le livre [**FH91**].

La représentation de $Spin_9$ dans $\mathfrak{m}_0 = \mathbb{R}^{16}$ est la représentation spinorielle Γ. Notons $W = \mathbb{R}^9$ la représentation standard de $Spin_9$. Le produit symétrique se décompose en composantes irréductibles sous $Spin_9$:

$$\mathrm{Sym}^2 \Gamma = \mathbb{R} \oplus W \oplus \Lambda^4 W. \tag{4.3}$$

Pour une représentation irréductible, associée au plus haut poids ϖ, on sait que l'opérateur de Casimir associé agit par le scalaire

$$|\varrho + \varpi|^2 - |\varrho|^2,$$

où ϱ est la demi-somme des racines positives. En appliquant cette formule à $Spin_9$, nous trouvons

$$\mathcal{C}(\mathfrak{spin}_9, W) = \frac{4}{7}, \quad \mathcal{C}(\mathfrak{spin}_9, \Gamma) = \frac{9}{14}, \quad \mathcal{C}(\mathfrak{spin}_9, \Lambda^4 W) = \frac{10}{7};$$

de la formule (4.2), nous déduisons les valeurs propres de $\overset{\circ}{R}{}^g$ sur la décomposition $\mathbb{R} \oplus W \oplus \Lambda^4 W$, à savoir $-9/14$, $-5/14$ et $1/14$. Cependant, la normalisation n'est pas correcte, car le calcul a été fait avec la métrique de Killing sur $\mathfrak{spin}_9$, mais nous pouvons corriger, puisque nous savons que

$$\overset{\circ}{R}{}^g g = \mathrm{Ric}^g = -36g;$$

en corrigeant donc par le facteur $36 \cdot 14/9$, nous trouvons finalement les valeurs propres de $\overset{\circ}{R}{}^g$ sur $\mathrm{Sym}^2 \Gamma$ dans la décomposition (4.3) :

$$-36, \quad -20, \quad 4.$$

On a donc le résultat suivant, analogue aux cas complexe et quaternionien.

Lemme I.4.2. — *Dans le cas octonionien, la plus grande valeur propre de $\overset{\circ}{R}{}^g$ est 4, et les autres valeurs propres sont strictement négatives.* □

I.4.B. Métriques d'Einstein dans le cas complexe. — Nous finissons à présent la construction de nos métriques d'Einstein dans le cas complexe.

Calcul de μ. — Soit ρ_0 la représentation de $G = U_1 U_m$ sur $E = \mathrm{Sym}^2 \mathfrak{m}_0$, où $\mathfrak{m}_0 = \mathbb{C}^{2m}$. Nous voulons calculer la plus petite valeur propre de l'opérateur

$$\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) - 2\mathring{R}^g,$$

qui représente les termes d'ordre 0 à l'infini de l'opérateur

$$P = (D^g)^* D^g - 2\mathring{R}^g.$$

Compte tenu de la formule (4.2), il s'agit de calculer

$$\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) - 2\mathring{R}^g = 2\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{m}_0) - \mathcal{C}(\mathfrak{h}, \mathrm{Sym}^2 \mathfrak{m}_0). \tag{4.4}$$

La représentation de G sur $\mathfrak{m}_0$ est irréductible, donc l'opérateur de Casimir correspondant est un scalaire ; en revanche, il faut décomposer $\mathrm{Sym}^2 \mathfrak{m}_0$ sous H. Dans le cas complexe, le sous-groupe $H = U_1 U_{m-1}$ est le stabilisateur de X_0, donc

$$H = \begin{pmatrix} z & & \\ & z & \\ & & u \end{pmatrix}, \quad z \in U_1,\ u \in U_{m-1}.$$

L'espace $\mathfrak{m}_0$ se décompose sous $H = U_1 U_{m-1}$ comme

$$\mathfrak{m}_0 = \mathbb{C}X_0 \oplus \mathbb{C}^{m-1};$$

le sous-groupe $U_1 \subset H$ agit sur $\mathbb{C}X_0$ avec poids 0 et sur $\mathbb{C}^{m-1}$ avec poids 1, mais la norme du générateur de $\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{h}$ est 1 tandis que celle du $\mathfrak{u}_1 \subset \mathfrak{g}$ est $\sqrt{2}$. Cela a pour conséquence, par exemple, que $\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}^m) = 2m + 2$ mais $\mathcal{C}(\mathfrak{h}, \mathbb{C}^{m-1}) = 2m - 1$.

Lemme I.4.3. — *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la plus petite valeur propre de $\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) - 2\mathring{R}^g$ est $\mu = 0$, avec espace propre l'espace propre pour la valeur propre -1 de $I \otimes I$ agissant sur* $\mathrm{Sym}^2_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{m-1}$.

Démonstration. — Nous nous contentons de regarder l'opérateur sur le sous-espace $\mathrm{Sym}^2_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{m-1}$, en laissant les autres calculs au lecteur. Compte tenu de (4.4), on a sur ce sous-espace

$$\frac{1}{2}(\mathcal{C}(\mathfrak{m}, \rho_0) - \mathring{R}^g)(u \otimes v) =$$
$$(\mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}^m) - \mathcal{C}(\mathfrak{h}, \mathbb{C}^{m-1}))(u \otimes v) + \sum_{(e_i) \text{ base de } \mathfrak{h}} [\dot{e}_i, u] \otimes [e_i, v].$$

Nous avons déjà calculé le dernier terme avec $\mathfrak{h}$ remplacé par $\mathfrak{g}$ dans le lemme I.4.1 ; il y a ici un petit changement, dû à la norme du facteur $\mathfrak{u}_1$ dans $\mathfrak{h}$ par rapport au facteur $\mathfrak{u}_1$ dans $\mathfrak{g}$, de sorte qu'il faut ajouter 1 aux valeurs propres obtenues au lemme I.4.1. Nous trouvons donc

$$2\mu = (2m+2) - (2m-1) - 3 = 0,$$

avec l'espace propre annoncé. □

Remarque I.4.4. — Le sous-espace propre trouvé correspond exactement aux déformations de la métrique de Carnot-Carathéodory qui restent compatibles à la structure symplectique dans l'espace horizontal $V = \mathbb{C}^{m-1}$. Il s'agit là de toutes les déformations infinitésimales d'Einstein.

Remarque I.4.5. — Pour le cas quaternionien, le calcul similaire mène à $\mu > 0$; dans le cas octonionien, on peut obtenir le même résultat.

Tranche aux difféomorphismes. — Reprenons les notations de la section I.1.C. Nous avons fixé sur $\mathbb{S}^{2m-1}$ une forme de contact η, une métrique de Carnot-Carathéodory compatible g_V, et construit une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe,

$$g = dr^2 + \operatorname{sh}^2(r)\overline{g_V} + \operatorname{sh}^2(2r)\eta^2. \tag{4.5}$$

Cette métrique doit être légèrement modifiée près de $r = 0$ de sorte de s'étendre à l'origine. Cette modification peut se faire de manière continue par rapport aux données. En particulier, on a à l'infini

$$\operatorname{Ric}^g = -\lambda g + O(e^{-r}),$$

avec ici $\lambda = n + 3$.

Plus généralement, on souhaite se placer dans le cadre suivant : g_0 est une métrique d'Einstein asymptotiquement symétrique sur une variété M^{2m} de bord S^{2m-1}, et on fixe sur S une forme de contact η et une métrique de Carnot-Carathéodory compatible g_V ; on définit alors par (4.5) une métrique asymptotiquement symétrique près de S, que l'on prolonge sur tout M de sorte que l'application $g_V \to g$ soit bien continue.

On a dit dans la section I.1.C que la seconde condition dans (1.8), à savoir

$$\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h = 0, \tag{4.6}$$

est une condition de tranche à l'action des difféomorphismes induisant l'identité sur le bord à l'infini. Nous allons justifier cette assertion. Rappelons que, pour un poids $\delta > 0$, nous avons défini avant le lemme I.3.4 un groupe $\mathfrak{Diff}_\delta^{k,\alpha}$ de difféomorphismes de régularité locale $C^{k,\alpha}$, valant l'identité sur le bord à l'infini et induits près de l'infini par un champ de vecteurs de régularité $C_\delta^{k,\alpha}$ (ou plus exactement nous avons défini un voisinage de l'identité dans ce groupe) ; ce groupe agit sur l'espace de métriques $\mathfrak{Met}_\delta^{k,\alpha}(g)$.

Proposition I.4.6. — *Si* $\operatorname{Ric}^g < 0$, *et* $0 < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \lambda}$, *l'application*

$$(\varphi, h) \longmapsto \varphi_* h$$

induit un difféomorphisme local

$$\mathfrak{Diff}_\delta^{k+1,\alpha} \times \{h \in \mathfrak{Met}_\delta^{k,\alpha}(g),\ \textit{satisfaisant}\ (4.6)\ \} \longrightarrow \mathfrak{Met}_\delta^{k,\alpha}(g)$$

au point $(1,g)$.

Démonstration. — La différentielle au point $(1,g)$ n'est autre que

$$(X,h) \longrightarrow (\delta^g)^*X + h.$$

Pour montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, il suffit de voir qu'étant donné $\dot g \in C_\delta^{k,\alpha}$, il existe un unique champ de vecteurs $X \in C_\delta^{k+1,\alpha}$, nous ramenant (infinitésimalement) sur la condition de jauge (4.6), c'est-à-dire satisfaisant

$$(\delta^g + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g)(\dot g - (\delta^g)^*X) = 0.$$

Réécrivons cette équation

$$(\delta^g(\delta^g)^* - \frac{1}{2} d\delta^g)X = (\delta^g + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g)\dot g,$$

et utilisons la formule de Weitzenböck

$$2\delta^g(\delta^g)^* - d\delta^g = (D^g)^*D^g - \operatorname{Ric}^g.$$

Compte tenu du signe de Ric^g, cet opérateur est un isomorphisme $L^{2,2} \to L^2$. À l'infini, on a $\operatorname{Ric}^g = -\lambda g + O(e^{-r})$; d'autre part, les termes d'ordre 0 au bord de $(D^g)^*D^g$ sont positifs ou nuls, donc la plus petite valeur propre des termes d'ordre 0 à l'infini de $(D^g)^*D^g - \operatorname{Ric}^g$ est certainement plus grande que λ. En appliquant la proposition I.3.5, on déduit que l'opérateur $(D^g)^*D^g - \operatorname{Ric}^g$ est un isomorphisme $C_\delta^{k+1,\alpha} \to C_\delta^{k-1,\alpha}$, dès que

$$\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 + \lambda} < \delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \lambda}.$$

On en déduit la proposition. □

Remarque I.4.7. — Dans cette démonstration, si $M = \mathbb{C}\mathbf{H}^m$ et g est proche de la métrique symétrique g_0, l'inversibilité de l'opérateur $(D^g)^*D^g - \operatorname{Ric}^g$ découle du même énoncé pour g_0, qui est fourni par la proposition I.2.5. Dans le cas où on se limite à déformer la métrique symétrique, on n'a donc pas véritablement besoin de la proposition I.3.5 ici.

Métriques d'Einstein. — Nous avons donc une métrique d'Einstein g_0 sur M, asymptotiquement symétrique, et nous cherchons des métriques d'Einstein avec des données au bord proches ; nous partons d'une solution approchée g donnée par (4.5). Comme il a été vu dans le lemme I.1.4, résoudre l'équation $\operatorname{Ric}^h + \lambda h = 0$, avec la condition de jauge (4.6) est équivalent à satisfaire

$$\Phi^g(h) = \operatorname{Ric}^h + \lambda h + (\delta^h)^*(\delta^g h + \frac{1}{2} d \operatorname{tr}^g h) = 0.$$

Comme toute structure de contact proche d'une structure de contact donnée lui est difféomorphe, nous pouvons nous contenter de regarder des métriques de Carnot-Carathéodory g_V ayant les mêmes espaces horizontaux que g_0 : elles sont donc obtenues en faisant varier la structure presque complexe dans les hyperplans de contact. Dans ces conditions, les diverses métriques g ainsi construites sont mutuellement bornées, et les espaces $C_\delta^{k,\alpha}$ pour les différentes métriques g sont équivalents.

À partir d'une métrique de Carnot-Carathéodory g_V, le prolongement g donné par la formule (4.5) peut être défini de sorte que $g_V \to g$ soit lisse comme application $C^{2,\alpha}(\mathrm{Sym}^2 V) \to \mathfrak{Met}_\delta^{2,\alpha}(g_0)$ (cette application est bien définie puisque nous nous limitons à des métriques g_V définies sur une distribution fixe V). Cela nous permet d'appliquer simplement le théorème des fonctions implicites à l'opérateur

$$(g_V, \gamma) \longmapsto \Phi^g(g+\gamma),$$

entre les espaces

$$C^{2,\alpha}(\mathrm{Sym}^2 V) \times C_\delta^{2,\alpha}(\mathrm{Sym}^2) \longrightarrow C_\delta^{\alpha}(\mathrm{Sym}^2).$$

Nous pouvons choisir le poids $\delta = 1$. La différentielle par rapport à γ en $(g_0, 0)$ est $(D^{g_0})^* D^{g_0} - 2\overset{\circ}{R}{}^{g_0}$. Dans le cas où g_0 est la métrique symétrique, c'est un isomorphisme par la proposition I.2.5 et le lemme I.4.3. Dans le cas général, par la proposition I.3.5, c'est un opérateur d'indice nul, dont le noyau et le conoyau sont égaux à $L^2\mathbf{H}^1(g_0)$; si ce groupe d'obstruction s'annule, alors la différentielle est un isomorphisme, et, par le théorème des fonctions implicites, si g_V est proche de la structure standard, l'équation $\Phi^g(g+\gamma) = 0$ a une unique solution avec γ petit. On déduit le théorème suivant.

Théorème I.4.8. — *Soit g_0 une métrique d'Einstein asymptotiquement hyperbolique complexe sur une variété M^{2m}, de bord S, telle que $L^2\mathbf{H}^1(g_0) = 0$ (voir définition I.1.6) ; si une U_{m-1}-métrique de Carnot-Carathéodory g_V sur S, compatible à la structure de contact η, de régularité $C^{2,\alpha}$, est assez proche de l'infini conforme de g_0, et g est une métrique asymptotiquement hyperbolique complexe associée par* (4.5), *alors il existe une métrique h telle que :*

$$\mathrm{Ric}^h = -\lambda h;$$
$$h - g \in C_1^{2,\alpha}.$$

Localement, la métrique h est unique modulo l'action des difféomorphismes induisant l'identité au bord. □

Remarque I.4.9. — On a vu en réalité (voir la remarque I.4.4) que ces métriques d'Einstein épuisent essentiellement toutes les déformations d'Einstein de g_0 qui sont mutuellement bornées avec g_0. Cet énoncé n'est pas complètement rigoureux à cause de problèmes de régularité : on peut imaginer en effet des déformations du même type, mais avec infini conforme de régularité moins grande.

Remarque I.4.10. — On peut ajouter à la métrique initiale g un terme $C_1^{2,\alpha}$ de sorte que g devienne C^∞. La solution h que l'on obtient alors est C^∞ à l'intérieur.

Remarque I.4.11. — On peut sans doute donner plus de précision sur le comportement asymptotique de la solution $h = g + \gamma$. Dans le cas hyperbolique réel, Graham et Lee **[GL91]** montrent qu'il existe un développement de la solution en les puissances de e^{-r}, jusqu'à l'exposant critique $\delta = \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \mu}$. Il est probable qu'un développement de ce type existe ici aussi ; l'analyse que nous développée nous permet de résoudre le problème d'existence sans avoir d'abord recours à la construction d'une solution approchée à un ordre élevé.

Remarque I.4.12. — Dans le cas où $M = \mathbb{C}\mathbf{H}^m$ et g_0 est la métrique hyperbolique complexe, le théorème des fonctions implicites utilise uniquement l'inversibilité de l'opérateur $(D^{g_0})^* D^{g_0} - 2\overset{\circ}{R}{}^{g_0}$, fourni par la proposition I.2.5 ; l'analyse développée dans la section I.3.B n'est donc pas utilisée dans ce cas.

I.4.C. Les cas quaternionien et octonionien. — Nous appliquons le même schéma de démonstration, en soulignant surtout les différences par rapport au cas complexe. Partant sur le bord S de la variété M d'une métrique de Carnot-Carathéodory g_V, donnée par une 1-forme de contact η, nous construisons une métrique asymptotiquement symétrique, qui près de l'infini s'écrit

$$g = dr^2 + \operatorname{sh}^2(r)\overline{g_V} + \operatorname{sh}^2(2r)\eta^2, \tag{4.7}$$

et est modifiée à l'intérieur pour être recollée à g_0 ; tout cela peut être fait de manière que l'application $g_V \to g$ soit continue. Nous cherchons à résoudre l'équation

$$\Phi^g(g+\gamma) = 0$$

avec γ dans l'espace à poids $C_1^{2,\alpha}(g)$ (donc ne modifiant pas la donnée à l'infini), sachant que pour la métrique d'Einstein initiale g_0, on a $\Phi^{g_0}(g_0) = 0$.

Mais, dans les cas quaternionien et octonionien, les espaces $C_\delta^{k,\alpha}(g)$ dépendent de la métrique g, a priori sans moyen simple de les identifier car, même localement, les structures de contact n'ont pas de raison d'être difféomorphes. Nous ne sommes donc plus dans le cadre d'application du théorème des fonctions implicites. Nous le remplaçons par le théorème d'inversion locale «effectif» suivant.

Lemme I.4.13. — *Soit $\Phi : E \to F$ une application C^2 entre espaces de Banach, telle que $\Phi(0) = 0$ et $d_0\Phi$ soit inversible. Si ς et ε sont choisis de sorte que*

$$\varsigma \|(d_0\Phi)^{-1}\| \sup_{B_\varsigma} \|d^2\Phi\| < \frac{1}{2}, \tag{4.8}$$

$$\varepsilon \|(d_0\Phi)^{-1}\| < \frac{\varsigma}{2}, \tag{4.9}$$

alors pour $y \in F$ vérifiant $\|y\| < \varepsilon$, l'équation $\Phi(x) = y$ a une solution unique avec $\|x\| < \varsigma$.

Démonstration. — Prenons $x \in B_\varsigma$. Notons $Q(x) = \Phi(x) - d_0\Phi(x)$, alors $d_xQ = d_x\Phi - d_0\Phi$ implique $|d_xQ| \leqslant \varsigma \sup \|d^2\Phi\|$ et par conséquent

$$\|Q(x) - Q(x')\| \leqslant \varsigma \sup |d^2\Phi| \|x - x'\|. \tag{4.10}$$

À présent, résoudre $\Phi(x) = y$ est équivalent à résoudre le problème de point fixe

$$x = (d_0\Phi)^{-1}(y - Q(x));$$

grâce à (4.10), l'hypothèse (4.8) assure que l'opérateur $(d_0\Phi)^{-1}(y - Q(\cdot))$ est contractant, tandis que (4.9) assure, si $y \in B_\varepsilon$, qu'il envoie bien B_ς sur B_ς. Par le théorème du point fixe, l'équation $\Phi(x) = y$ a donc une unique solution dans B_ς si $y \in B_\varepsilon$. $\square$

Pour utiliser ce lemme, nous avons besoin de contrôler $d_g\Phi^g$ pour g proche de g_0. Rappelons que, par (1.9),

$$d_g\Phi^g \dot{h} = \frac{1}{2}((D^g)^* D^g - 2\overset{\circ}{R}{}^g)\dot{h} + \frac{1}{2}(\mathrm{Ric}^g \circ \dot{h} + \dot{h} \circ \mathrm{Ric}^g + 2\lambda \dot{h}).$$

D'après les lemmes I.4.1 et I.4.2, la plus petite valeur propre à l'infini de $-2\overset{\circ}{R}{}^g$ est $\nu = -8$; le poids $\delta = 1$ est donc dans l'intervalle prescrit par le lemme I.3.11 si $\mathcal{H} - \sqrt{\mathcal{H}^2 - 8} < 1$, soit $\mathcal{H} > 9/2$; d'un autre côté, par (2.5), on a $\mathcal{H} = n/2 + 1$ avec $n \geqslant 8$ dans le cas quaternionien et $\mathcal{H} = 11$ dans le cas octonionien, donc la condition sur $\mathcal{H}$ est satisfaite. Nous en déduisons deux conséquences : d'une part, par la proposition I.3.9, si l'espace d'obstruction $L^2\mathbf{H}^1(g_0)$ s'annule, alors $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ est inversible pour le poids $\delta = 1$; d'autre part, par le lemme I.3.11, l'opérateur $d_g\Phi^g$ est un isomorphisme pour le poids $\delta = 1$, pour g proche de g_0, avec norme de l'inverse contrôlée.

De plus, $\sup_{h \in B_\varsigma} \|d^2_{g+\gamma}\Phi^g\|$ reste aussi contrôlé si ς est assez petit (c'est un énoncé purement local facile à vérifier dans les boules $B_{r_{\mathrm{harm}}}$ munies de coordonnées harmoniques construites par la proposition I.3.2, où g reste bornée par rapport à la métrique euclidienne) ; nous déduisons que si g est assez proche de g_0 et ς assez petit, alors

$$\|(d_g\Phi^g)^{-1}\| + \sup_{B_\varsigma(g)} \|d^2_{g+\gamma}\Phi^g\| \leqslant C.$$

Quitte à diminuer ς, l'hypothèse (4.8) sera donc vérifiée pour g assez proche de g_0 ; fixons alors ε de sorte que l'hypothèse (4.9) soit aussi vérifiée ; par notre calcul initial (1.7), si g est assez proche de g_0,

$$\|\Phi^g(g)\|_{C^\alpha_1(g)} \leqslant \varepsilon.$$

Toutes les hypothèses d'application du lemme effectif d'inversion locale I.4.13 sont ainsi remplies : on déduit que l'équation $\Phi^g(g + \gamma) = 0$ a une unique solution $\gamma \in B_\varsigma \subset C^{2,\alpha}_1(g)$ si g est assez proche de g_0, ce qui achève la démonstration du théorème suivant.

Théorème I.4.14. — *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ ou $\mathbb{O}$ et $H = Sp_{m-1}Sp_1$ ou $Spin_7$; soit sur la variété M, de dimension $4m$ ou 16, de bord S, une métrique d'Einstein, asymptotiquement* *symétrique,* g_0*, telle que* $L^2\mathbf{H}^1(g_0) = 0$ *; soit une* H*-métrique de Carnot-Carathéodory* g_V *sur* S*, de régularité* $C^{2,\alpha}$*, proche de l'infini conforme de* g_0*, et soit* g *une métrique asymptotiquement symétrique associée par* (4.7)*, alors il existe une métrique* h *telle que*

$$\mathrm{Ric}^h = -\lambda h;$$
$$h - g \in C_1^{2,\alpha}.$$

Localement, la métrique h *est unique modulo l'action des difféomorphismes induisant l'identité au bord.* □

Remarque I.4.15. — Si g_0 est la métrique symétrique, d'après la remarque I.4.5 et la proposition I.2.5, l'opérateur $d_{g_0}\Phi^{g_0}$ est un isomorphisme non seulement pour le poids $\delta = 1$, mais aussi pour le poids $\delta = 0$, ce qui signifie, via le théorème d'inversion locale, que la métrique g_0 n'admet pas de déformation d'Einstein mutuellement bornée avec g_0. Pour une métrique plus générale g_0 satisfaisant les hypothèses du théorème, le même énoncé est vraisemblable, mais l'analyse développée dans la section I.3 pour les cas quaternionien et octonionien ne permet pas de le montrer.

Remarque I.4.16. — Comme dans le cas complexe, on peut rendre h régulière à l'intérieur. Il existe aussi probablement un développement asymptotique en les puissances de e^{-r} ; pour le cas quaternionien, voir aussi la proposition III.3.4.

CHAPITRE II

STRUCTURES DE CONTACT QUATERNIONIENNES

Dans ce chapitre est menée l'étude géométrique des structures de contact quaternioniennes ; cette étude permet, au chapitre III, la construction de métriques quaternion-kählériennes d'infini conforme une structure de contact quaternionienne.

L'outil de base est la construction d'une connexion adaptée canonique. Cette connexion est construite en deux temps. Tout d'abord, dans la première section, on construit une connexion partielle, dérivant uniquement dans les directions de la distribution de contact V ; étant donnée une métrique sur V, à un supplémentaire de V est toujours associée une connexion partielle, métrique, sur V (lemme II.1.1), et la démonstration du théorème II.1.3 consiste à montrer que, pour une $Sp_m Sp_1$-métrique compatible à une structure de contact, il existe un unique supplémentaire conduisant à une $Sp_m Sp_1$-connexion — cela est réalisé grâce à l'interaction des identités naissant de la compatibilité avec la structure de contact, avec la décomposition des espaces de tenseurs en composantes irréductibles sous $Sp_m Sp_1$. Ces techniques ne permettent cependant pas de traiter le cas de la dimension 7, puisque, pour $m = 1$, une $Sp_1 Sp_1$-structure n'est qu'une métrique.

Dans un second temps, dans la deuxième section, le prolongement de la connexion partielle en une vraie connexion est défini facilement (définition II.2.8), et étudié pour obtenir diverses identités sur la torsion (propositions II.2.3 et II.2.6), qui sont la base du traitement ultérieur.

En effet, la connexion adaptée, comme toute connexion, satisfait l'identité de Bianchi

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = (d^\nabla T)_{X,Y,Z}.$$

En géométrie riemannienne, la torsion est nulle et cette identité mène à de fortes contraintes sur le tenseur de courbure ; la situation d'une structure de contact quaternionienne est étudiée dans la troisième section (puis en II.5.C), ce qui mène à des propriétés de la courbure de la connexion adaptée, plus faibles que pour une métrique quaternion-kählérienne, mais cependant suffisantes pour nos applications, en particulier la construction dans la cinquième section d'un espace des twisteurs, qui est une variété CR intégrable de dimension $4m + 5$ (théorème C/II.5.1).

Entre-temps, dans la quatrième section, on calcule l'influence d'un changement conforme sur ces objets, ce qui permet de montrer que l'espace des twisteurs ne dépend que de la géométrie conforme de la métrique de Carnot-Carathéodory, c'est-à-dire finalement de la distribution de contact V.

Ce calcul d'invariance conforme est également utilisé dans la sixième section, qui est une parenthèse sur le chemin de la démonstration du théorème D. À une variété CR intégrable est associée, sur l'espace total d'un fibré en cercles, une vraie métrique (de Fefferman) ; dans notre situation, la métrique de Fefferman associée à l'espace des twisteurs CR est une métrique de signature $(4m + 3, 3)$ sur un fibré en sphères $\mathbb{S}^3$ sur la variété. Au lieu de passer par l'intermédiaire de l'espace des twisteurs, il est plus simple de donner une formulation directe pour cette métrique (théorème II.6.1), assez proche de celle de Lee **[Lee86]** pour le cas CR. Ainsi, en principe, la «géométrie de contact quaternionienne» est-elle ramenée à la géométrie conforme de certaines métriques de signature $(4m + 3, 3)$.

Enfin, la septième section donne quelques éléments sur la dimension 7, tandis que la huitième reprend l'analogue des deux premières dans le cas octonionien, ce qui fournit, avec le cas quaternionien, le théorème B.

II.1. Connexion partielle quaternionienne

II.1.A. Connexion métrique associée à un supplémentaire. — Soient S une variété et $V \subset TS$ une distribution sur S. Si f est une fonction sur S, sa différentielle suivant V, notée $d_V f$, est la restriction à V de sa différentielle ; plus généralement, si E est un fibré sur S, on appellera *connexion partielle suivant* V (ou *connexion* V*-partielle*) sur E une dérivée covariante $\nabla_v s$ définie pour une section s de E mais seulement pour des vecteurs $v \in V$: plus précisément, il s'agit d'un opérateur

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^1 V \otimes E)$$

qui satisfait l'identité de Leibniz $\nabla(fs) = f\nabla s + d_V f \otimes s$. De telles connexions dans un cadre sous-riemannien ont déjà été envisagées, voir par exemple **[FGR97]**.

On suppose V équipée d'une métrique g_V. En géométrie riemannienne, la connexion de Levi-Civita fournit une connexion canonique adaptée à une métrique ; dans notre cadre sous-riemannien, une connexion canonique n'existe pas. Cependant, un choix de supplémentaire de V amène au lemme suivant.

Lemme II.1.1. — *Pour tout supplémentaire W de V dans TS, il existe une unique connexion V-partielle sur V, telle que*

(1) *la connexion préserve la métrique g_V ;*

(2) *sa torsion* $T_{X,Y} = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ *satisfait*

$$(T_{X,Y})_V = 0, \quad X, Y \in V,$$

où l'indice V *désigne la projection sur* V *; cette condition est équivalente à*

$$T_{X,Y} = -[X,Y]_W, \quad X, Y \in V. \tag{1.1}$$

Démonstration. — Pour toute connexion partielle ∇, suivant V sur V, on a bien entendu $(T_{X,Y})_W = -[X,Y]_W$, donc les deux conditions sur la torsion sont bien équivalentes. On part d'une connexion ∇, partielle suivant V et métrique ; les connexions respectant la première condition sont les $\nabla + a$, où a est une 1-forme sur V à valeurs dans $\mathfrak{so}(V)$. La torsion de $\nabla + a$ s'écrit

$$T^{\nabla+a}_{X,Y} = T^{\nabla}_{X,Y} + a_X Y - a_Y X.$$

Mais l'application

$$\begin{aligned} \Lambda^1 V \otimes \mathfrak{so}(V) &\longrightarrow \Lambda^2 V \otimes V \\ a &\longmapsto \big\{(X,Y) \mapsto b_{X,Y} = a_X Y - a_Y X\big\} \end{aligned}$$

est un isomorphisme, d'inverse donné par la formule

$$\langle a_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle b_{X,Y}, Z\rangle - \langle b_{Y,Z}, X\rangle - \langle b_{Z,X}, Y\rangle\big). \tag{1.2}$$

On déduit qu'il existe une unique 1-forme a à valeurs dans $\mathfrak{so}(V)$ vérifiant

$$a_X Y - a_Y X = -(T^{\nabla}_{X,Y})_V ;$$

la connexion $\nabla + a$ est la connexion partielle demandée. □

Remarque II.1.2. — Une manière simple de construire la connexion du lemme est de prolonger g_V en une métrique g sur S de sorte que g rende V et$W$ orthogonaux ; alors, la connexion demandée est la projection sur V de la connexion de Levi-Civita.

Connexion partielle adaptée à une structure de contact quaternionienne. — Nous pouvons à présent énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème II.1.3. — *Soit* g_V *une* $Sp_m Sp_1$*-métrique de Carnot-Carathéodory sur une variété* S^{4m+3}*, avec* $m \geqslant 2$*. Alors il existe un unique supplémentaire* W *de* V *dans* TS*, tel que la connexion sur* V*, partielle suivant* V *et associée à* W *(lemme II.1.1) préserve la* $Sp_m Sp_1$*-structure.*

Dans le cas $m = 1$, donc V est de dimension 4, toute connexion métrique préserve le fibré $\Lambda^2_+ V$ des structures presque complexes compatibles, donc on ne peut pas choisir un supplémentaire W de cette manière.

Avant de démontrer le théorème en II.1.D, nous avons besoin de développer quelques outils. Nous envisagerons ensuite les conséquences en II.1.E.

II.1.B. Algèbre quaternionienne. — La manière de décomposer les représentations de $Sp_m Sp_1$ est bien connue ; nous suivons la présentation donnée dans le livre de Salamon **[Sal89]**, laquelle s'appuie sur des travaux de Bonan **[Bon82]** et Swann **[Swa89a, Swa89b]**. Nous regardons l'espace vectoriel $V = \mathbb{H}^m$ comme une représentation de $Sp_m Sp_1$; il s'écrit comme produit tensoriel

$$V = [\lambda^1 \otimes \sigma],$$

où $\sigma = \mathbb{C}^2$ est la représentation standard de Sp_1 et $\lambda^1 = \mathbb{H}^m = \mathbb{C}^{2m}$ celle de Sp_m ; le produit tensoriel est un produit tensoriel d'espaces vectoriels complexes et le crochet $[\cdot]$ désigne la partie réelle.

Plus généralement, une puissance extérieure E de V se décomposera en

$$E = \oplus_k [E_k \otimes \sigma^k],$$

où $\sigma^k = \operatorname{Sym}^k \sigma$ et E_k est une représentation de Sp_m ; on a une décomposition supplémentaire de E_k en somme de facteurs irréductibles sous Sp_m ; ces facteurs sont les représentations (voir **[Sal89**, chapitre 9**]**)

$$\lambda_s^r = (2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1, 0, \ldots),$$

où il y a s chiffres 2, $r - 2s$ chiffres 1, et la représentation est définie comme nulle si $r - 2s > m$.

Avec ces conventions, on a les décompositions des puissances extérieures

$$\begin{aligned}
&\Lambda^1 V = [\lambda^1 \sigma^1],\\
&\Lambda^2 V = \mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m \oplus [\lambda_0^2 \sigma^2], \quad \mathfrak{sp}_1 = [\sigma^2], \quad \mathfrak{sp}_m = [\lambda_1^2],\\
&\Lambda^3 V = [\lambda_0^3 \sigma^3] \oplus [\lambda_0^1 \sigma^3] \oplus [\lambda_1^3 \sigma^1] \oplus [\lambda_0^1 \sigma^1].
\end{aligned}$$

Le facteur $[\lambda_0^3 \sigma^3]$ dans $\Lambda^3 V$ s'annule si $m = 2$.

II.1.C. Triplets quaternioniens. — Considérons $V = \mathbb{R}^{4m}$. Nous voulons regarder l'espace $\mathcal{Q}_0$ de toutes les structures quaternioniennes sur V, compatibles à la métrique. La donnée d'un point de $\mathcal{Q}_0$ est équivalente à la donnée de la 4-forme fondamentale $\Omega = \sum_i \omega_i^2$, où les ω_i sont les trois 2-formes de la structure quaternionienne. L'espace $\mathcal{Q}_0$ est homogène sous $SO(V)$ et s'identifie à $SO(V)/Sp_m Sp_1$.

Cependant, pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, il sera plus commode de regarder l'espace $\mathcal{Q}$ des triplets de 2-formes $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ induisant une $Sp_m Sp_1$ structure compatible à la métrique. Cet espace est moins naturel à considérer que l'espace $\mathcal{Q}_0$, puisque le groupe Sp_1 agit en conservant la $Sp_m Sp_1$ structure mais pas le triplet ω lui-même. L'espace $\mathcal{Q}$ est à nouveau homogène sous $SO(V)$, et s'identifie à $SO(V)/Sp_m$; l'espace tangent en ω à $\mathcal{Q}$ s'identifie donc comme

$$T_\omega \mathcal{Q} = \mathfrak{sp}_1 \oplus [\lambda_0^2 \sigma^2] \subset \Lambda^2 V.$$

Un élément de cet espace tangent s'identifie naturellement à un triplet de 2-formes, donc on a une inclusion

$$T_\omega \Omega \subset [\sigma^2] \otimes \Lambda^2 V.$$

Dérivation d'un triplet. — Nous serons amené, dans la démonstration du théorème II.1.3, à considérer la dérivée covariante d'un triplet ω, qui sera naturellement un objet

$$\nabla\omega \in \Lambda^1 V \otimes T_\omega \Omega \subset \Lambda^1 V \otimes [\sigma^2] \otimes \Lambda^2 V. \tag{1.3}$$

Étudions la structure algébrique de cet objet : les deux morceaux $[\lambda^1\sigma^1] \otimes [\lambda_0^2\sigma^2]$ et $[\lambda^1\sigma] \otimes [\sigma^2]$ de l'espace $\Lambda^1 V \otimes T_\omega \Omega$ se décomposent sous l'action de $Sp_m Sp_1$ en (voir à nouveau **[Sal89**, chapitre 9**]**)

$$\begin{aligned} [\lambda^1\sigma^1] \otimes [\lambda_0^2\sigma^2] &= [\lambda_1^3\sigma^3] \oplus [\lambda_0^1\sigma^3] \oplus [\lambda_0^3\sigma^3] \oplus [\lambda_1^3\sigma^1] \oplus [\lambda_0^1\sigma^1] \oplus [\lambda_0^3\sigma^1], \\ [\lambda^1\sigma^1] \otimes [\sigma^2] &= [\lambda_0^1\sigma^3] \oplus [\lambda_0^1\sigma^1]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

En particulier, nous avons dans $\Lambda^1 V \otimes T_\omega \Omega$ deux facteurs $[\lambda_0^1\sigma^3] \oplus [\lambda_0^1\sigma^1]$, dont il est utile d'avoir une description plus précise :

- le facteur dans $\Lambda^1 V \otimes [\sigma^2]$ est facile à comprendre — il s'agit des déformations provenant de l'action infinitésimale de $\mathfrak{sp}_1$, on peut donc le décrire comme l'espace des

$$(\alpha_3 \otimes \omega_2 - \alpha_2 \otimes \omega_3, -\alpha_3 \otimes \omega_1 + \alpha_1 \otimes \omega_3, \alpha_2 \otimes \omega_1 - \alpha_1 \otimes \omega_2) \tag{1.5}$$

  avec $\alpha_i \in \Lambda^1 V$;
- le facteur dans $\Lambda^1 V \otimes [\lambda_0^2\sigma^2]$ est plus délicat — on peut le paramétrer par un triplet (r_1, r_2, r_3) d'éléments de V, via l'application $Sp_m Sp_1$-équivariante

$$(r_i) \longrightarrow \{X \to (r_i \wedge I_i X)_{[\lambda_0^2\sigma^2]}\}, \tag{1.6}$$

  où l'indice $[\lambda_0^2\sigma^2]$ indique la projection sur le facteur de $[\lambda_0^2\sigma^2] \subset \Lambda^2 V = \mathfrak{so}(V)$; pour le démontrer, il suffit, d'après le lemme de Schur, de vérifier que (1.6) n'est pas identiquement nul sur chacun des deux facteurs $[\lambda_0^1\sigma^3]$ et $[\lambda_0^1\sigma^1]$; le premier facteur est constitué des triplets (r_i) tels que $\sum_1^3 I_i r_i = 0$, et le second des triplets $(r_i = I_i r)$, pour un $r \in V$; un calcul facile permet alors de vérifier l'assertion.

Antisymétrisation de la dérivée. — En géométrie quaternionien-kählérienne, Swann a montré **[Swa89a, Swa89b]** que l'antisymétrisation

$$\Lambda^1 V \otimes T_\Omega \Omega_0 \longrightarrow \Lambda^5 V \tag{1.7}$$

est injective, pourvu que $m \geqslant 3$; cela indique que, sous cette condition sur la dimension, l'hypothèse $d\Omega = 0$ implique $\nabla\Omega = 0$. Le manque d'injectivité de (1.7) en dimension 8 provient de l'absence du facteur $[\lambda_1^3\sigma^3]$ de (1.4) dans la décomposition de $\Lambda^5 V = \Lambda^3 V$; en revanche ce facteur est présent dans $[\sigma^2] \otimes \Lambda^3$, où va résider l'antisymétrisation de $\nabla\omega$. C'est pourquoi on a ici préféré utiliser l'espace $\mathcal{Q}$ plutôt que l'espace $\mathcal{Q}_0$ — cela permet de traiter aussi le cas $m = 2$.

Plus précisément, l'antisymétrisation $\Lambda^1 V \otimes \Lambda^2 V \to \Lambda^3 V$ nous fournit une application

$$\boldsymbol{a} : \Lambda^1 V \otimes T_\omega \mathcal{Q} \longrightarrow [\sigma^2] \otimes \Lambda^3 V. \tag{1.8}$$

Lemme II.1.4. — *L'antisymétrisation* (1.8) *est injective* ($m \geqslant 2$).

Remarque II.1.5. — La contrepartie du lemme en géométrie quaternion-kählérienne, en dimension 8, dirait que si les trois 2-formes (ω_i) de la structure quaternionienne satisfont

$$d\omega_i = \sum_j \alpha_i^j \wedge \omega_j, \qquad \alpha_i^j = -\alpha_j^i,$$

alors $\nabla\Omega = 0$, c'est-à-dire la métrique est quaternion-kählérienne.

Démonstration. — Remarquons que tous les facteurs (1.4) se retrouvent dans $[\sigma^2] \otimes \Lambda^3 V$, les facteurs $[\lambda_0^1\sigma^3]$ et $[\lambda_0^1\sigma^1]$ avec multiplicité 2. Pour les facteurs de multiplicité 1, il suffit de vérifier que l'application $\boldsymbol{a}$ est non nulle sur chaque facteur — c'est un calcul similaire à celui qui montre que l'application (1.7) est injective pour $m \geqslant 3$, et nous omettrons la démonstration. En revanche, il faut examiner plus précisément les facteurs de multiplicité 2.

Pour cela, nous remarquons que les facteurs impliquant λ_0^1 dans $[\sigma^2] \otimes \Lambda^3 V$ sont exactement

$$[\lambda_0^1\sigma^5] \oplus 2[\lambda_0^1\sigma^3] \oplus 2[\lambda_0^1\sigma^1] = [\sigma^2] \otimes [\sigma^2] \otimes \Lambda^1 V$$

et sont explicités comme l'espace des triplets de 3-formes

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j \wedge \omega_j \right)_{i=1,2,3} ;$$

les deux premières composantes $[\lambda_0^1\sigma^3]$ et $[\lambda_0^1\sigma^1]$ décrites dans (1.5) sont envoyées par antisymétrisation sur les triplets satisfaisant la condition $\alpha_i^j = -\alpha_j^i$; d'autre part, un calcul sans difficulté montre que les deux autres composantes $[\lambda_0^1\sigma^3]$ et $[\lambda_0^1\sigma^1]$ décrites par (1.6) ont par antisymétrisation une image transverse à celle des premières. □

II.1.D. Démonstration du théorème II.1.3. — Fixons un choix de forme de contact $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ de sorte que

$$d\eta_i(\cdot, \cdot) = g_V(I_i \cdot, \cdot)$$

pour des structures complexes I_i sur V vérifiant les relations de commutation des quaternions. Fixons un choix de supplémentaire W de V dans TS et considérons la connexion ∇ associée à g_V par le lemme II.1.1. Enfin, fixons $R_i \in W$ une base duale des (η_i).

Dérivée covariante de $d\eta$. — Pour toute 2-forme φ sur une variété munie d'une connexion ∇, on peut définir l'antisymétrisé de $\nabla\varphi$ par

$$\boldsymbol{a}(\nabla\varphi)_{X,Y,Z} = (\nabla\varphi)_{X,Y,Z} + (\nabla\varphi)_{Y,Z,X} + (\nabla\varphi)_{Z,X,Y}$$

et on a l'identité classique

$$d\varphi_{X,Y,Z} = \boldsymbol{a}(\nabla\varphi)_{X,Y,Z} + \varphi_{T^{\nabla}_{X,Y},Z} + \varphi_{T^{\nabla}_{Y,Z},X} + \varphi_{T^{\nabla}_{Z,X},Y}. \tag{1.9}$$

Notons

$$\omega_i = d\eta_i|_V.$$

En appliquant la formule précédente à la forme fermée $d\eta_1$, compte tenu de la torsion de ∇ donnée par le lemme II.1.1,

$$T^{\nabla}_{X,Y} = -[X,Y]_W = \sum_1^3 d\eta_i(X,Y)R_i,$$

on obtient

$$\boldsymbol{a}(\nabla\omega_1)_{X,Y,Z} = -\sum_{(XYZ)}\sum_1^3 d\eta_i(X,Y)d\eta_1(R_i,Z),$$

où (XYZ) sous le signe $\sum$ signifie qu'il faut sommer sur les permutations circulaires de X,Y,Z. De manière plus compacte, on peut écrire

$$\boldsymbol{a}(\nabla\omega_1) = -\sum_1^3 (i_{R_i}d\eta_1)|_V \wedge d\eta_i, \tag{1.10}$$

et on a bien entendu les équations similaires pour ω_2 et ω_3.

L'équation (1.10) montre que $\boldsymbol{a}(\nabla\omega)$ appartient à l'image dans $[\sigma^2]\otimes\Lambda^3$ d'un facteur

$$[\sigma^2]\otimes[\sigma^2]\otimes\Lambda^1 V = [\lambda^1\sigma^5]\oplus 2[\lambda^1\sigma^3]\oplus 2[\lambda^1\sigma^1]. \tag{1.11}$$

Or la connexion ∇, qui est métrique, préserve le fibré Ω des triplets $\omega=(\omega_i)$ induisant une structure quaternionienne compatible à la métrique. Par conséquent, $\nabla\omega$ est élément de l'espace $\Lambda^1 V\otimes T_\omega\Omega$ considéré en (1.3), et l'antisymétrisation $\boldsymbol{a}$, à valeurs dans $[\sigma^2]\otimes\Lambda^3 V$, est injective par le lemme II.1.4. De (1.11) nous déduisons alors que $\nabla\omega$ est élément du facteur

$$2[\lambda^1\sigma^3]\oplus 2[\lambda^1\sigma^1]\subset\Lambda^1 V\otimes T_\omega\Omega; \tag{1.12}$$

le facteur $[\lambda^1\sigma^5]$ dans (1.11) disparaît puisqu'il est absent de la décomposition (1.4) de $\Lambda^1 V\otimes T_\omega\Omega$. Finalement, on déduit le

Lemme II.1.6. — *La connexion ∇ préserve la $Sp_m Sp_1$-structure si et seulement si la projection de $\nabla\omega$ sur le facteur $[\lambda^1\sigma^3]\oplus[\lambda^1\sigma^1]\subset\Lambda^1 V\otimes[\lambda^2_0\sigma^2]$ est nulle.*

Démonstration. — La Sp_mSp_1-structure est préservée si et seulement si la projection de $\nabla\omega$ sur $\Lambda^1 V \otimes \lambda_0^2\sigma^2$ est nulle (puisque l'autre morceau $\Lambda^1 V \otimes [\sigma^2]$ correspond à l'action infinitésimale de Sp_1) ; d'après l'équation (1.12), les composantes de la dérivée $\nabla\omega$ dans la décomposition (1.4) de $\Lambda^1 V \otimes \lambda_0^2\sigma^2$ sont déjà nulles, à l'exception de celles indiquées dans l'énoncé du lemme. □

Modification du supplémentaire. — Voyons à présent l'effet d'une modification du supplémentaire W. Un supplémentaire W' est obtenu à partir de W comme le graphe d'une application linéaire $u : W \to V$; les champs de vecteurs R_i deviennent $R_i + r_i$, où $r_i = u(R_i)$. La connexion V-partielle ∇' provenant du choix de W' s'écrit

$$\nabla' = \nabla + a,$$

où a est déterminée par la condition

$$\begin{aligned} a_X Y - a_Y X &= T^{\nabla'}_{X,Y} - T^{\nabla}_{X,Y} \\ &= \sum_1^3 d\eta_i(X,Y) r_i. \end{aligned}$$

La formule (1.2) fournit la solution

$$\begin{aligned} 2\langle a_X Y, Z\rangle &= \sum_1^3 \big(d\eta_i(X,Y)\langle r_i, Z\rangle - d\eta_i(Y,Z)\langle r_i, X\rangle - d\eta_i(Z,X)\langle r_i, Y\rangle\big) \\ &= \sum_1^3 \big\langle d\eta_i(X,Y) r_i - \langle r_i, X\rangle I_i Y - \langle r_i, Y\rangle I_i X, Z\big\rangle; \end{aligned}$$

on peut réécrire la 1-forme a à valeurs dans $\mathfrak{so}(V)$ comme

$$a_X = \frac{1}{2}\sum_1^3 \big(I_i X \wedge r_i - \langle r_i, X\rangle I_i\big). \tag{1.13}$$

Le second morceau est dans $\mathfrak{sp}_1$, tandis que la projection du premier sur le facteur

$$[\lambda_0^1\sigma^3] \oplus [\lambda_0^1\sigma^1] \subset \Lambda^1 V \otimes [\lambda_0^2\sigma^2]$$

est un isomorphisme d'après (1.6) ; il y a donc un unique choix des (r_i) qui tue la composante de $\nabla(d\eta)$ sur ce facteur ; comme, d'après le lemme II.1.6, c'est la seule obstruction à ce que ∇ préserve la Sp_mSp_1-structure, le théorème est démontré. □

II.1.E. Conséquences. — Nous pouvons tirer de la démonstration du théorème II.1.3 des renseignements plus précis sur la dérivée covariante des 2-formes $\omega_i = d\eta_i|_V$.

Proposition II.1.7. — *Si W est le supplémentaire privilégié construit par le théorème II.1.3, et ∇ la connexion partielle associée, et $R_i \in W$ défini par $\eta_i(R_j) = \delta_{ij}$, alors*

$$\nabla\omega_i = -\sum_{j=1}^3 (i_{R_j} d\eta_i)|_V \otimes \omega_j;$$

en particulier, $(i_{R_j}d\eta_i)|_V = -(i_{R_i}d\eta_j)|_V$ *et* $i_{R_i}d\eta_i|_V = 0$.

Remarque II.1.8. — Le supplémentaire W est entièrement déterminé par les conditions d'antisymétrie sur les restrictions à V des $i_{R_i}d\eta_j$. En effet, par exemple, le champ R_1 est manifestement caractérisé par les conditions :

- R_1 est dans le noyau de η_2 et η_3 ;
- $\eta_1(R_1) = 1$ et $(i_{R_1}d\eta_1)|_V = 0$.

On voit là une analogie claire avec le champ de Reeb défini en géométrie de contact. Nous appellerons donc dorénavant les R_i les *champs de Reeb de la structure quaternionienne de contact.*

Démonstration. — L'égalité (1.10) donne l'antisymétrisation de la dérivée covariante des ω_i, à savoir

$$\boldsymbol{a}(\nabla\omega_i) = -\sum_{j=1}^{3}(i_{R_j}d\eta_i)|_V \wedge \omega_j;$$

comme cette antisymétrisation est injective par le lemme II.1.4, on déduit immédiatement la formule indiquée dans la proposition. Puisque la connexion ∇ sur le sous-espace $\mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2 + \mathbb{R}\omega_3$ est une SO_3-connexion, on en déduit la propriété d'antisymétrie sur les $(i_{R_j}d\eta_i)|_V$. □

Prolongement de la connexion partielle à W. — On peut utiliser la proposition précédente pour étendre naturellement ∇ en une connexion V-partielle sur W aussi, de la manière suivante.

Proposition II.1.9. — *Sous les hypothèses de la proposition II.1.7, la V-connexion partielle sur W définie par*

$$\nabla_X R = [X, R]_W, \quad X \in V, R \in W,$$

est une connexion métrique (pour la métrique $\sum \eta_i^2$), qui s'identifie à la connexion ∇ sur $\mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2 + \mathbb{R}\omega_3$, via l'identification $R_i \to \omega_i$.

Démonstration. — La définition de la connexion se traduit par

$$\nabla_X R_i = -\sum_{j=1}^{3} d\eta_j(X, R_i)R_j;$$

compte tenu de la propriété d'antisymétrie des $i_{R_i}d\eta_j|_V$, on voit que la matrice de connexion est bien dans $\mathfrak{so}_3$; de plus, les coefficients sont les mêmes que ceux fournis pour $\nabla\omega_i$ par la proposition II.1.7. □

Finalement, nous pouvons conclure cette section par la définition suivante.

Définition II.1.10. — Pour $m \geqslant 2$, soit une variété S^{4m+3} munie d'une structure de contact quaternionienne V ; la *connexion V-partielle adaptée* à cette structure est la connexion sur le fibré $TS = V \oplus W$ définie sur V par le théorème II.1.3 et sur W par la proposition II.1.9.

II.2. Prolongement de la connexion partielle adaptée

Dans cette section, partant d'une structure de contact quaternionienne sur S, nous montrons comment étendre la connexion partielle adaptée construite dans le théorème II.1.3 à une vraie connexion sur le fibré V.

II.2.A. Théorie générale. — Commençons par un cadre abstrait. On suppose qu'on a simplement une distribution $V \subset TS$ de dimension n dans une variété S, munie d'une H-structure pour un groupe $H \subset GL_n\mathbb{R}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$.

Lemme II.2.1. — *Étant donné un supplémentaire W de V, il existe une unique connexion partielle suivant W sur V, dont la torsion*

$$T_{R,X} = \nabla_R X - [R,X]_V, \quad R \in W, X \in V,$$

vérifie

$$T_{R,\cdot} \in \mathfrak{h}^{\perp}, \quad R \in W.$$

Démonstration. — Partant d'une H-connexion ∇ sur V, partielle suivant W, on voit que

$$T^{\nabla+a}_{R,X} = T^{\nabla}_{R,X} + a_R X;$$

la 1-forme a est à valeurs dans $\mathfrak{h}$, donc on peut tuer la composante de la torsion sur $\mathfrak{h}$ d'une manière unique. □

Il y a un exemple central : si S est une variété CR intégrable, et R le champ de Reeb associé à une forme de contact η, alors la partie de la connexion de Tanaka-Webster **[Web79]** dérivant suivant R est obtenue par application du lemme précédent au groupe $H = O_n$; la dérivation covariante ∇_R préserve en réalité aussi la structure complexe, donc on aurait obtenu le même résultat avec le groupe $H = U_{n/2}$.

Dans notre situation, on a une structure de contact quaternionienne sur S, avec la connexion partielle adaptée ∇ ; on considérera deux prolongements suivant W construits grâce au lemme II.2.1, à savoir :

- le *prolongement métrique* ∇^o, construit en prenant le groupe $H = O_{4m}$;
- le *prolongement quaternionien* ∇^q, construit en prenant le groupe $H = Sp_m Sp_1$; c'est le prolongement qui nous intéressera, et après sa construction ici, nous le noterons simplement $\nabla = \nabla^q$.

II.2.B. Analyse du prolongement métrique. — Nous étudions d'abord le prolongement métrique ∇^o pour la $Sp_m Sp_1$-métrique de Carnot-Carathéodory g_V sur S ; pour $X \in V$ et $R \in W$, nous noterons la torsion $T^o_{X,R}$; en revanche, pour deux vecteurs $X, Y \in V$, nous noterons seulement $T_{X,Y}$ puisqu'il n'y a pas de confusion possible.

Appliquons la formule (1.9) pour obtenir, si $X, Y \in V$ et $R \in W$,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\nabla^o d\eta_1)_{X,Y,R} &= -d\eta_1(T^o_{R,X}, Y) - d\eta_1(T_{X,Y}, R) - d\eta_1(T^o_{Y,R}, X)\\ &= -\langle I_1 T^o_{R,X}, Y\rangle - \langle T^o_{R,Y}, I_1 X\rangle - d\eta_1(T_{X,Y}, R),\end{aligned}$$

mais $T^o_{R,\cdot}$ est antisymétrique, donc

$$\boldsymbol{a}(\nabla^o d\eta_1)_{X,Y,R} = \langle -I_1 T^o_{R,X} - T^o_{R,I_1 X}, Y\rangle - d\eta_1(T_{X,Y}, R). \tag{2.1}$$

Spécialisons cette formule à $R = R_1$: plaçons-nous en un point p et choisissons les R_i, X et Y de sorte qu'ils soient tous parallèles au point p ; alors, *au point* p, on a

$$\boldsymbol{a}(\nabla^o d\eta_1)_{X,Y,R} = X \cdot d\eta_1(Y, R) + Y \cdot d\eta_1(R, X) + (\nabla^o_R d\eta_1)(X, Y) \tag{2.2}$$

et par conséquent, compte tenu de $i_{R_1} d\eta_1|_V = 0$ (proposition II.1.7),

$$\boldsymbol{a}(\nabla^o d\eta_1)_{X,Y,R_1} = (\nabla^o_{R_1} d\eta_1)(X, Y).$$

Nous déduisons donc de (2.1) l'égalité

$$\langle(\nabla^o_{R_1} I_1)X, Y\rangle = -\langle T^o_{R,I_1 X} + I_1 T^o_{R_1,X}, Y\rangle - \sum_1^3 \langle I_i X, Y\rangle d\eta_1(R_i, R_1);$$

comme $\nabla^o_{R_1} I_1$ doit anticommuter à I_1, on obtient, en projetant cette égalité sur les endomorphismes commutant ou anticommutant à I_1,

$$\nabla^o_{R_1} I_1 = d\eta_1(R_1, R_2) I_2 + d\eta_1(R_1, R_3) I_3, \tag{2.3}$$

$$T^o_{R_1, I_1 X} + I_1 T^o_{R_1,X} = 0. \tag{2.4}$$

La seconde égalité nous indique que $T^o_{R_1,}$ est anti-I_1-linéaire.

Remarque II.2.2. — Dans le cas d'une variété CR, c'est le même raisonnement qui montre que le prolongement métrique (donnant la connexion de Tanaka-Webster) préserve la structure complexe, et que sa torsion est anti-I_1-linéaire.

Appliquons à présent notre identité (2.1) à $R = R_2$. Il faut faire attention que, dans (2.2), nous avons à présent les termes non nuls (toujours au point p)

$$X \cdot d\eta_1(Y, R_2) - Y \cdot d\eta_1(X, R_2) = -d(i_{R_2} d\eta_1)_{X,Y} - d\eta_1(R_2, [X, Y]);$$

compte tenu qu'au point p on a $[X, Y] = -T_{X,Y}$, on déduit

$$\nabla^o_{R_2} d\eta_1(X, Y) = d(i_{R_2} d\eta_1)_{X,Y} - \langle T^o_{R_2, I_1 X} + I_1 T^o_{R_2,X}, Y\rangle$$

et, en décomposant à nouveau en parties commutant ou anticommutant à I_1, on déduit les égalités

$$\nabla^o_{R_2} d\eta_1(X,Y) = \frac{1}{2}\big(d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} - d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y}\big), \tag{2.5}$$

$$\langle T^o_{R_2,I_1X} + I_1T^o_{R_2,X}, Y\rangle = \frac{1}{2}\big(d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y}\big). \tag{2.6}$$

À présent, utilisons (2.3) sous la forme

$$\nabla^o_{R_2} I_2 = d\eta_2(R_2,R_1)I_1 + d\eta_2(R_2,R_3)I_3;$$

de $I_1I_2 + I_2I_1 = 0$ on déduit par conséquent

$$(\nabla^o_{R_2}I_1)I_2 + I_2(\nabla^o_{R_2}I_1) = 2d\eta_2(R_2,R_1).$$

En séparant de plus (2.5) en parties commutant et anticommutant à I_2, nous obtenons les égalités

(2.7)
$$\begin{aligned}\nabla^o_{R_2} d\eta_1(X,Y) &\\ = \frac{1}{4}\big(d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} &- d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y} - d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_2X,I_2Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_3X,I_3Y}\big)\\ &+ d\eta_2(R_1,R_2)d\eta_2(X,Y),\end{aligned}$$

(2.8)
$$\begin{aligned}d\eta_2(R_1,R_2)&d\eta_2(X,Y)\\ = \frac{1}{4}\big(d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} &- d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_2X,I_2Y} - d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_3X,I_3Y}\big);\end{aligned}$$

d'autre part, par (2.4), la torsion $T^o_{R_2,\cdot}$ est anti-I_2-linéaire, donc il en est de même pour sa partie I_1-linéaire donnée par (2.6), d'où on déduit

(2.9)
$$\begin{aligned}\langle T^o_{R_2,I_1X} &+ I_1T^o_{R_2,X}, Y\rangle\\ = \frac{1}{4}\big(d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} &+ d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_2X,I_2Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_3X,I_3Y}\big),\end{aligned}$$

(2.10)
$$0 = d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_1X,I_1Y} - d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_2X,I_2Y} - d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_3X,I_3Y}.$$

On en déduit finalement l'énoncé suivant, pour lequel nous avons besoin de la notation suivante : un endomorphisme u de V se décompose en

$$u = u^{+++} + u^{+--} + u^{-+-} + u^{--+}, \tag{2.11}$$

où u^{+++} est sa partie I_1, I_2 et I_3-linéaire, u^{+--} sa partie I_2 et I_3-antilinéaire (donc I_1-linéaire), etc.

Proposition II.2.3. — *Pour le prolongement unitaire ∇^o, la torsion T^o satisfait*

– *$T^o_{R_i,\cdot}$ est I_i-antilinéaire ;*

– $I_2(T^o_{R_2,\cdot})^{+--} = I_1(T^o_{R_1,\cdot})^{-+-}$ *(et les deux autres identités obtenues par permutation circulaire).*

Démonstration. — On a déjà montré le premier point, reste le second. Rappelons que, par la proposition II.1.7, on a $i_{R_1}d\eta_2|_V = -i_{R_2}d\eta_1|_V$, d'où l'on déduit immédiatement l'identité

(2.12)

$$\begin{aligned} d(i_{R_1}d\eta_2)_{X,Y} + d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} &= -(i_{R_1}d\eta_2 + i_{R_2}d\eta_1)_{[X,Y]_W} \\ &= d\eta_1(R_2,R_1)d\eta_1(X,Y) + d\eta_2(R_1,R_2)d\eta_2(X,Y) \\ &\quad + (d\eta_1(R_2,R_3) + d\eta_2(R_1,R_3))d\eta_3(X,Y) \end{aligned}$$

qui implique

$$d(i_{R_2}d\eta_1)_{X,Y} + \sum_1^3 d(i_{R_2}d\eta_1)_{I_iX,I_iY} = -d(i_{R_1}d\eta_2)_{X,Y} - \sum_1^3 d(i_{R_1}d\eta_2)_{I_iX,I_iY}$$

et donc, d'après (2.9), on a

$$T^o_{R_2,I_1X} + I_1T^o_{R_2,X} = -(T^o_{R_1,I_2X} + I_2T^o_{R_1,X})$$

qui est exactement le résultat souhaité. □

II.2.C. Analyse du prolongement quaternionien. — À partir du prolongement métrique que l'on vient d'étudier, il est facile de déduire le prolongement quaternionien : la Sp_mSp_1-connexion $\nabla = \nabla^q$ sera obtenu à partir de ∇^o en lui ajoutant une 1-forme sur W à valeurs dans $(\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m)^\perp$; la torsion $T^q_{R,\cdot}$ de ∇^q sera obtenue à partir de T^o en ajoutant la même 1-forme.

Plus précisément, de $I_3 = I_1I_2$ et de (2.3) nous déduisons

$$\begin{aligned} \nabla_{R_1}I_3 &= (\nabla_{R_1}I_1)I_2 + I_1(\nabla_{R_1}I_2) \\ &= d\eta_1(R_2,R_1) + d\eta_1(R_3,R_1)I_1 + I_1\nabla_{R_1}I_2 \end{aligned}$$

que nous réécrivons

$$I_3\big(\nabla_{R_1}I_3 - d\eta_1(R_3,R_1)I_1\big) = I_2\big(\nabla_{R_1}I_2 - d\eta_1(R_2,R_1)I_1\big).$$

Notons t_1I_1 la projection de cet endomorphisme sur I_1 (donc $t_1 \in \mathbb{R}$), on peut alors définir

$$\begin{aligned} u_1 &= I_2\big(\nabla_{R_1}I_2 - d\eta_1(R_2,R_1)I_1\big) - t_1I_1 \\ &= I_3\big(\nabla_{R_1}I_3 - d\eta_1(R_3,R_1)I_1\big) - t_1I_1; \end{aligned} \tag{2.13}$$

Lemme II.2.4. — *L'endomorphisme u_1 a les propriétés suivantes :*

(1) $u_1 \in \mathfrak{so}(V)$ *;*

(2) *la projection de u_1 sur I_1 est nulle ;*

(3) *u_1 anticommute à I_2 et I_3 (donc commute à I_1) ;*

en particulier, on a $u_1 \perp (\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m)$.

Démonstration. — Comme $\nabla_{R_1} I_2$ est dans $\mathfrak{so}(V)$ et anticommute à I_2, la première assertion est évidente. La seconde assertion résulte de la définition de u_1. D'après (2.7), appliquée en échangeant le rôle de I_1 et I_2, l'endomorphisme

$$\nabla_{R_1} I_2 - d\eta_1(R_2, R_1) I_1$$

anticommute à I_1 et I_2, d'où résulte la troisième assertion. □

De ce lemme, on va pouvoir déduire la connexion ∇^q.

Proposition II.2.5. — *La dérivation $\nabla^q_{R_1}$ est donnée par la formule*

$$\nabla^q_{R_1} = \nabla^o_{R_1} - \frac{1}{2} u_1.$$

Démonstration. — En effet, on obtient

$$T^q_{R_1,\cdot} = T^o_{R_1,\cdot} - \frac{1}{2} u_1$$

qui est bien élément de $(\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m)^\perp$ d'après le lemme ; de plus,

$$\nabla^q_{R_1} I_1 = d\eta_1(R_1, R_2) I_2 + d\eta_1(R_1, R_3) I_3 \tag{2.14}$$

puisque u_1 commute à I_1,

$$\nabla^q_{R_1} I_2 = -d\eta_1(R_1, R_2) I_1 + t_1 I_3 \tag{2.15}$$

d'après (2.13), puisque $[u_1, I_2] = -2I_2 u_1$; pour la même raison :

$$\nabla^q_{R_1} I_3 = -d\eta_1(R_1, R_3) I_1 - t_1 I_2. \tag{2.16}$$

Ainsi $\nabla^q_{R_1}$ préserve bien la $Sp_m Sp_1$-structure, ce qui montre notre assertion. □

Comparaison des divers t_i et u_i. — Bien entendu, la proposition précédente s'applique aussi aux autres R_i. Nous allons comparer les corrections pour les différents i. Rappelons que d'après (2.7) et la définition de u_1 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}&\langle -I_2 u_1 X, Y\rangle + t_1 \langle I_3 X, Y\rangle = \\ &\quad \frac{1}{4}\big(d(i_{R_1} d\eta_2)_{X,Y} - d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_1X, I_1Y} - d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_2X, I_2Y} + d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_3X, I_3Y}\big),\end{aligned}$$

où $t_1 I_3$ est justement la projection sur I_3 du membre de droite. De l'égalité (2.12), on déduit

$$\begin{aligned}&d(i_{R_1} d\eta_2)_{X,Y} - d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_1X, I_1Y} - d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_2X, I_2Y} + d(i_{R_1} d\eta_2)_{I_3X, I_3Y} \\ &\quad = -\big(d(i_{R_2} d\eta_1)_{X,Y} - d(i_{R_2} d\eta_1)_{I_1X, I_1Y} - d(i_{R_2} d\eta_1)_{I_2X, I_2Y} + d(i_{R_2} d\eta_1)_{I_3X, I_3Y}\big) \\ &\qquad + 4\big(d\eta_2(R_1, R_3) + d\eta_1(R_2, R_3)\big) d\eta_3(X, Y);\end{aligned}$$

en prenant la trace sur I_3 de cette égalité, puis la partie sans trace, on déduit

$$t_2 - t_1 = d\eta_2(R_1, R_3) + d\eta_1(R_2, R_3), \tag{2.17}$$

$$I_2 u_1 = -I_1 u_2. \tag{2.18}$$

Cela nous permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition II.2.6. — *Le prolongement quaternionien de la connexion partielle ∇ est donné par $\nabla^q_{R_i} = \nabla^o_{R_i} + a_{R_i}$, de sorte que :*

(1) *il existe un endomorphisme u autoadjoint, commutant à I_1, I_2 et I_3, tel que*

$$a_{R_i} = I_i \circ u;$$

en particulier, la torsion T^q vérifie encore les propriétés de T^o énoncées dans la proposition II.2.3 ;

(2) *il existe une fonction λ sur S telle que, si ∇^o désigne aussi la W-connexion partielle sur W donnée par le lemme II.1.1, et si on identifie le fibré W avec $\oplus \mathbb{R} I_i$, alors*

$$\nabla^q_{R_i} I_j = \nabla^o_{R_i} R_j + \lambda[I_i, I_j].$$

Remarque II.2.7. — Nous utiliserons la propriété

$$I_2(T_{R_2,\cdot})^{--+} = I_3(T_{R_3,\cdot})^{-+-}$$

de la proposition II.2.3 sous la forme plus explicite suivante : puisque $T_{R_2,\cdot}$ est anti-I_2-linéaire, $(T_{R_2,\cdot})^{--+}$ en est simplement la partie anti-I_1-linéaire ; par conséquent, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$I_3(T_{R_3,X} + I_1 T_{R_3,I_1X}) = I_2(T_{R_2,X} + I_1 T_{R_2,I_1X}),$$

ou encore

$$T_{R_2,X} + I_1 T_{R_2,I_1X} + I_1 T_{R_3,X} - T_{R_3,I_1X} = 0. \tag{2.19}$$

Cette identité sera très utile lors de la construction twistorielle.

Démonstration. — On pose $u = \frac{1}{2} I_1 u_1 = \frac{1}{2} I_2 u_2$ d'après l'égalité (2.18) ; comme $T^q_{R_i,\cdot} = T^o_{R_i,\cdot} + a_{R_i}$, la première assertion en résulte. Pour la seconde, observons que, d'après la remarque II.1.2, on a la formule

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla^o_{R_i} R_j, R_k\rangle &= \langle [R_i, R_j], R_k\rangle - \langle [R_j, R_k], R_i\rangle + \langle [R_k, R_i], R_j\rangle \\ &= -d\eta_k(R_i, R_j) + d\eta_i(R_j, R_k) - d\eta_j(R_k, R_i); \end{aligned}$$

si on compare cette identité avec les formules (2.14) à (2.16), on voit que la formule proposée dans la proposition est valable en posant

$$2\lambda = t_1 + \frac{1}{2}\big(d\eta_1(R_2, R_3) - d\eta_2(R_3, R_1) - d\eta_3(R_1, R_2)\big);$$

si on fait une permutation circulaire sur (123), λ reste inchangé d'après (2.17). $\square$

Nous donnons à présent la définition finale de la connexion adaptée.

Définition II.2.8. — Soient $m \geqslant 2$ et S^{4m+3} une variété munie d'une $Sp_m Sp_1$-métrique de Carnot-Carathéodory g_V. La *connexion adaptée à* g_V est :

- suivant V, la connexion partielle adaptée (définition II.1.10) ;
- suivant le supplémentaire privilégié W, le prolongement quaternionien sur V, et son extension sur W obtenue en identifiant R_i et I_i.

On remarquera qu'il y a un choix un peu arbitraire dans cette définition, à savoir le choix de la connexion sur W suivant W. J'ai privilégié sur W la connexion induite par l'identification au fibré des structures complexes, plutôt que la connexion ∇^o induite simplement par la métrique et la décomposition $V \oplus W$ (voir le deuxième point de la proposition II.2.6). Le prix à payer pour cette simplification est un peu plus de torsion : alors que, pour $R, R' \in W$, on a

$$T^{\nabla^o}_{R,R'} \in V,$$

on obtient, par exemple pour $R = R_1$, $R' = R_2$,

$$T^{\nabla}_{R_1,R_2} = T^{\nabla^o}_{R_1,R_2} + 4\lambda R_3. \tag{2.20}$$

L'avantage, qui permettra de simplifier les notations dans certains raisonnements, est que les champs R_i et les structures I_i sont parallèles en même temps.

II.2.D. Structures 3-sasakiennes. — Il y a un cas particulier où ces constructions deviennent triviales : c'est le cas des structures 3-sasakiennes (pour toutes les affirmations qui suivent, voir le survey **[BG98]**, où j'ai changé quelques signes pour mieux coller à mes conventions). Une telle structure sur une variété S^{4m+3} est une métrique riemannienne g telle que la métrique $dr^2 + r^2 g$ sur $\mathbb{R}^+ \times S$ soit hyperkählérienne. Une structure 3-sasakienne induit une structure de contact quaternionienne : l'espace W est l'image de $\partial/\partial r$ par les structures complexes, et il est engendré par une base g-orthonormale (ξ_1, ξ_2, ξ_3), telle que $[\xi_i, \xi_j] = -2\epsilon^{ijk}\xi_k$ (donc la distribution W est intégrable) ; l'espace V est l'orthogonal de W, et les trois 1-formes $\eta_i(X) = \frac{1}{2} g(\xi_i, X)$, satisfont

$$d\eta_i(X, Y) = g(I_i X, Y), \quad X, Y \in TS,$$

où $I_i(\xi_i) = 0$ et $I_i|_{\ker \eta_i}$ est une structure presque complexe, avec $I_i \xi_j = \epsilon^{ijk}\xi_k$; les endomorphismes I_i satisfont de plus

$$I_i \circ I_j = \epsilon^{ijk} I_k + 2\xi_i \otimes \eta_j - \delta_{ij}.$$

En particulier, on obtient bien une structure de contact quaternionienne.

La connexion adaptée est particulièrement simple. En effet, la connexion de Levi-Civita satisfait

$$\nabla^g \xi_i = I_i, \quad \nabla^g_X I_i = \xi_i \wedge X;$$

compte tenu que les champs de Reeb s'écrivent $R_i = \frac{1}{2}\xi_i$, la connexion adaptée ∇ est donc obtenue en posant :

– suivant V : la connexion ∇ est la projection de ∇^g sur la décomposition $V \oplus W$; elle vérifie $\nabla_X I_i = 0$ si $X \in V$;
– suivant W : on a $\nabla_{R_i} = \pi_V \nabla^g_{R_i} - \frac{1}{2} I_i$ sur V ; en particulier $\nabla_{R_i} I_j = -\epsilon^{ijk} I_k$.

Ce calcul montre immédiatement la propriété suivante, qui est analogue au fait qu'une structure de Sasaki induit une variété CR, pseudo-hermitienne, dont la torsion de Webster s'annule.

Lemme II.2.9. — *Une structure 3-sasakienne sur une variété S induit une structure de contact quaternionienne dont la torsion vérifie*

$$T_{R,X} = 0, \quad R \in W, X \in V.$$

Ce fait rend les constructions qui vont suivre sans intérêt pour les structures 3-sasakiennes, qui sont très rares parmi les structures de contact quaternioniennes, puisqu'infinitésimalement rigides.

II.3. Structure du tenseur de courbure

Étant donnée une structure de contact quaternionienne $V \subset TS$, nous allons étudier la courbure R de sa connexion adaptée sur V ; on peut en particulier définir :

(1) un *tenseur de Ricci* par la formule, pour $X, Y \in V$,

$$\mathrm{Ric}_{X,Y} = \sum \langle R_{e_i,X} Y, e_i \rangle,$$

où la somme court sur une base orthonormale de V ;

(2) une *courbure scalaire* par $s = \mathrm{tr}^V \mathrm{Ric}$.

Il sera utile aussi de définir de manière similaire le tenseur de Ricci Ric^o et la courbure scalaire s^o du prolongement métrique ∇^o considéré dans la section II.2.

En géométrie riemannienne, le tenseur de courbure, qui est une 2-forme à valeurs dans les endomorphismes du fibré tangent, est fortement contraint par l'identité algébrique de Bianchi

$$R_{X,Y} Z + R_{Y,Z} X + R_{Z,X} Y = 0.$$

Cette identité, valable seulement pour les connexions à torsion nulle, implique en particulier que la courbure définit un endomorphisme symétrique de $\Lambda^2 S$; si la métrique a une holonomie particulière, on obtient des renseignements plus précis encore (voir le livre de Salamon [**Sal89**]). Dans le cas d'une structure quaternionienne de contact, la torsion de la connexion sur V est non nulle, ce qui détruit tous ces résultats. Cependant, le tenseur de Ricci reste symétrique (voir la proposition II.3.2). Le but de cette section est de voir jusqu'où on peut pousser l'analogie entre la courbure de nos connexions adaptées et la courbure quaternion-kählérienne.

Deux approches sont possibles : l'approche la plus systématique consiste à étudier l'application

$$\begin{array}{ccc}\Lambda^2 V \otimes (\mathfrak{sp}_m \oplus \mathfrak{sp}_1) & \longrightarrow & \Lambda^3 V \otimes V \\ R & \longmapsto & \boldsymbol{a}(R_{\cdot,\cdot}\cdot)\end{array}$$

dont le noyau n'est autre que l'espace des tenseurs algébriques de courbure pour l'holonomie $Sp_m Sp_1$ (voir [**Sal89**, proposition 9.3]) ; en principe, la description de l'image de la courbure R apporte donc une description complète de R modulo ces tenseurs algébriques de courbure. Cependant, cette approche risque d'être assez technique, et nécessite en particulier une analyse fine des représentations de $Sp_m Sp_1$ en jeu ; j'ai donc préféré une méthode — moins complète, mais probablement plus rapide —, qui montre directement les propriétés nécessaires de la courbure à partir de celles de la torsion.

Nous commençons par illustrer les constructions par un exemple explicite.

II.3.A. La sphère homogène. — Développons un peu l'exemple d'une sphère homogène,

$$\mathbb{S} = Sp_{m+1}Sp_1/Sp_m Sp_1;$$

écrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{m+1} \oplus \mathfrak{sp}_1$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_m \oplus \mathfrak{sp}_1$, et décomposons $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, avec

$$\mathfrak{m} = V \oplus W = \mathbb{H}^m \oplus \mathbb{R}^3;$$

on sait que la torsion de la connexion homogène ∇^{hom} (qui provient de la connexion naturelle fournie par l'orthogonal $\mathfrak{m}$ sur le fibré principal $G \to G/H$) est fournie par

$$T^{\mathrm{hom}}_{X,Y} = -[X,Y]_{\mathfrak{m}};$$

restreinte à $V = \mathbb{H}^m$, la V-connexion partielle ∇^{hom} a donc bien la torsion qui en fait la connexion partielle adaptée ; en revanche,

$$T^{\mathrm{hom}}_{R_i,X} = I_i X,$$

ce qui nous montre que ∇^{hom} n'est pas la connexion adaptée ; celle-ci est donnée par

$$\nabla_{R_i} = \nabla^{\mathrm{hom}}_{R_i} - I_i,$$

et a une torsion

$$T_{R_i,X} = 0, \quad X \in V.$$

La courbure est donnée par

$$R^{\mathrm{hom}}_{X,Y} = -\operatorname{ad}([X,Y]_{\mathfrak{h}});$$

on peut calculer que cette dernière égalité s'écrit plus précisément, pour $X, Y \in \mathbb{H}^m$,

$$R^{\mathrm{hom}}_{X,Y} = -\frac{2m}{m-1}(X \wedge Y)_{\mathfrak{sp}_m \oplus \mathfrak{sp}_1}.$$

Si on veut calculer la courbure de la connexion adaptée ∇, il faut prendre en compte la modification de ∇ par rapport à ∇^{hom} sur W, ce qui conduit à

$$R_{X,Y} = R^{\mathrm{hom}}_{X,Y} - \langle I_i X, Y\rangle I_i, \quad X, Y \in V.$$

Il est facile de constater, par exemple, que l'endomorphisme induit par la courbure sur $\Lambda^2 V$ n'est pas symétrique.

En revanche, si on se limite à $\mathfrak{sp}_1 \subset \Lambda^2 V$, un phénomène intéressant apparaît : en effet, si $|X| = 1$,

$$R^{\mathrm{hom}}_{X,I_1X} = -\frac{2m}{m-1}\left(\frac{1}{2m}I_1 + \frac{1}{2}(X \wedge I_1X - I_2X \wedge I_3X)\right)$$

d'où on déduit la formule

$$R_{X,I_1X} = -\frac{m}{m-1}(I_1 + (X \wedge I_1X - I_2X \wedge I_3X));$$

on déduit immédiatement de cette égalité

$$R_{I_1} = -\frac{2m^2}{m-1}I_1.$$

De la même manière, on calcule facilement les égalités

$$\mathrm{Ric} = \frac{2m(m+2)}{m-1} \quad \text{et} \quad s = \frac{8m^2(m+2)}{m-1}.$$

Nous déduisons en particulier que, restreint à $\mathfrak{sp}_1 \subset \Lambda^2 V$, l'opérateur de courbure s'écrit

$$R|_{\mathfrak{sp}_1} = -\frac{s}{4(m+2)}.$$

Nous allons voir que cette dernière égalité, qui est vraie en général sur une variété quaternion-kählérienne, subsiste pour une structure de contact quaternionienne.

II.3.B. Identité de Bianchi. — De manière générale, pour toute connexion, on a

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= (d^\nabla T)_{X,Y,Z} \\ &= \nabla_X T_{Y,Z} + \nabla_Y T_{X,Y} + \nabla_Y T_{Z,X} \\ &\quad - T_{[X,Y],Z} - T_{[Y,Z],X} - T_{[Z,X],Y}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si S est munie d'une structure de contact quaternionienne, nous utilisons la connexion adaptée ∇ et regardons l'égalité précédente appliquée à trois vecteurs $X, Y, Z \in V$. Nous pouvons calculer en un point p auquel les vecteurs X, Y et Z sont parallèles, ainsi que les I_i (et donc les R_i). Alors, puisque $T_{Y,Z} = \sum \langle I_iY, Z\rangle R_i$, nous voyons que

$$\nabla_X T_{Y,Z}(p) = 0$$

et par conséquent, l'identité de Bianchi se réduit à

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= T_{T_{X,Y},Z} + T_{T_{Y,Z},X} + T_{T_{Z,X},Y} \\ &= \sum_1^3 (d\eta_i \wedge T_{R_i,\cdot})_{X,Y,Z}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il est donc important d'étudier plus précisément les $T_{R_i,\cdot}$.

Lemme II.3.1. — *La torsion de la connexion adaptée satisfait, sur V,*

$$\mathrm{tr}^V T_{R_i,\cdot} = 0, \quad \mathrm{tr}^{I_j} T_{R_i,\cdot} = 0.$$

Démonstration. — Comme $T_{R_i,\cdot}$ est anti-I_i-linéaire par la proposition II.2.6, sa trace est nulle ; comme, par définition, $T_{R_i,\cdot}$ est orthogonal à $\mathfrak{sp}_1$, les traces contre les trois structures complexes sont nulles aussi. □

II.3.C. Le tenseur de Ricci. — Étudions à présent la symétrie du tenseur de Ricci. Par l'identité de Bianchi,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_{X,Y} - \mathrm{Ric}_{Y,X} &= \sum \langle R_{e_i,X}Y - R_{e_i,Y}X, e_i\rangle \\ &= \sum \langle T_{T_{X,Y},e_i} + T_{T_{e_i,X},Y} - T_{T_{e_i,Y},X}, e_i\rangle;\end{aligned}$$

dans cette somme de trois termes, le premier est nul par le lemme II.3.1, tandis que les deux autres se réécrivent, compte tenu de la torsion $T_{X,Y} = \sum d\eta_i(X,Y)R_i$,

$$\mathrm{Ric}_{X,Y} - \mathrm{Ric}_{Y,X} = \sum_1^3 -\langle T_{R_i,Y}, I_iX\rangle + \langle T_{R_i,X}, I_iY\rangle$$

puisque $T_{R_i,\cdot}$ est anti-I_i-linéaire,

$$= \sum_1^3 -\langle T_{R_i,I_iY}, X\rangle + \langle T_{R_i,X}, I_iY\rangle;$$

on remarquera que, jusqu'ici, ce calcul est valable à la fois pour la connexion adaptée ∇ et pour le prolongement métrique ∇^o ; mais comme pour ce dernier, $T^o_{R_i,\cdot}$ est symétrique, on déduit $\mathrm{Ric}^o_{X,Y} = \mathrm{Ric}^o_{Y,X}$. Cela nous fournit la première partie de la proposition suivante.

Proposition II.3.2. — *Reprenons les notations de la proposition II.2.6, alors :*

- *le tenseur de Ricci* Ric^o *du prolongement métrique* ∇^o *est symétrique ;*
- *le tenseur de Ricci* Ric *de la connexion adaptée vérifie*

$$\mathrm{Ric}_{X,Y} = \mathrm{Ric}^o(X,Y) - 3\langle u(X), Y\rangle$$

et il est symétrique ;
- *les courbures scalaires s et s^o sont égales.*

Remarque II.3.3. — En particulier, on voit qu'il y a a priori deux choix pour le problème, analogue à celui traité par Lee dans le cas CR [**Lee88**], et consistant à trouver un représentant conforme «pseudo-Einstein» de la métrique ; le «problème de Yamabe» est, quant à lui, parfaitement défini dans ce contexte (voir la section II.4.C pour plus de précisions).

Démonstration. — Comme les connexions $\nabla = \nabla^q$ et ∇^o sont égales suivant V, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}_{X,Y} - \mathrm{Ric}^o_{X,Y} &= \sum \langle (R_{X,e_j} - R^o_{X,e_j})e_j, Y\rangle \\ &= \sum \langle (\nabla - \nabla^o)_{T_{X,e_j}} e_j, Y\rangle \\ &= \sum \langle a_{R_i} I_i X, Y\rangle\end{aligned}$$

et comme u commute aux I_k :

$$= -3\langle u(X), Y\rangle;$$

comme u est symétrique, le tenseur Ric l'est aussi ; comme u est à trace nulle par le lemme II.3.1, on déduit l'égalité des courbures scalaires. □

II.3.D. Courbure induite sur $\mathfrak{sp}_1$. — Nous passons maintenant à notre premier intérêt ici, à savoir la courbure induite sur le fibré $\mathfrak{sp}_1$ engendré par les structures complexes de V. Considérons tout d'abord l'endomorphisme $\mathcal{S}$ de $\mathfrak{sp}_1$ induit par la courbure.

Lemme II.3.4. — *L'opérateur $\mathcal{S}$ est symétrique.*

Démonstration. — Notons

$$\begin{aligned}a_{X,Y,Z} &= R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y, \\ b_{X,Y,Z} &= T_{T_{X,Y},Z} + T_{T_{Y,Z},X} + T_{T_{Z,X},Y};\end{aligned} \tag{3.3}$$

l'identité de Bianchi (3.2) s'écrit donc $a_{X,Y,Z} = b_{X,Y,Z}$. On vérifie facilement l'identité (qui montre, en géométrie riemannienne, la symétrie du tenseur de courbure)

$$\begin{aligned}&2\big(\langle R_{X,Y}Z, T\rangle - \langle R_{Z,T}X, Y\rangle\big) \\ &\qquad = \langle a_{X,Y,Z}, T\rangle + \langle a_{Y,Z,T}, X\rangle - \langle a_{Z,T,X}, Y\rangle - \langle a_{T,X,Y}, Z\rangle;\end{aligned}$$

on en déduit par exemple l'égalité (à une constante multiplicative près)

$$\begin{aligned}&\langle \mathcal{S}(I_1), I_2\rangle - \langle \mathcal{S}(I_2), I_1\rangle = \\ &\qquad \sum \langle b_{e_i,I_1e_i,e_j}, I_2e_j\rangle + \langle b_{I_1e_i,e_j,I_2e_j}, e_i\rangle - \langle b_{e_j,I_2e_j,e_i}, I_1e_i\rangle - \langle b_{I_2e_j,e_i,I_1e_i}, e_j\rangle;\end{aligned}$$

je dis que chacun des quatre termes est nul : par exemple, pour le premier,

$$b_{e_i,I_1e_i,e_j} = \begin{cases} T_{R_1,e_j} & \text{si } e_j \notin \mathbb{H}e_i, \\ 0 & \text{si } e_j = e_i \text{ ou } I_1e_i, \\ T_{R_1,I_2e_i} + T_{R_3,e_i} - T_{R_2,I_1e_i} & \text{si } e_j = I_2e_i, \\ T_{R_1,I_3e_i} - T_{R_2,e_i} - T_{R_3,I_1e_i} & \text{si } e_j = I_3e_i\,; \end{cases}$$

à partir de là, on voit que la sommation se ramène à une somme de traces des $T_{R_i,\cdot}$ qui sont toutes nulles par le lemme II.3.1. □

Lemme II.3.5. — *La partie sans trace de l'opérateur $\mathcal{S}$ est antisymétrique.*

Démonstration. — On pourrait faire un calcul direct, mais nous aurons besoin dans la construction twistorielle de l'identité plus forte (5.4), pour $X, Y \in V$,

$$[R_{X,Y} + IR_{IX,Y} + IR_{X,IY} - R_{IX,IY}, I] = 0.$$

En appliquant cette identité à I_1, on a

$$\sum_1^{4m} [R_{e_i,I_2e_i} + I_1 R_{e_i,I_3e_i}, I_1] = 0,$$

ce qui s'écrit encore

$$[\mathcal{S}(I_2) + I_1\mathcal{S}(I_3), I_1] = 0;$$

en particulier, la projection de $\mathcal{S}(I_2) + I_1\mathcal{S}(I_3)$ sur I_3 est nulle, ce qui donne

$$\langle \mathcal{S}(I_2), I_3\rangle + \langle \mathcal{S}(I_3), I_2\rangle = 0;$$

la partie sans trace de $\mathcal{S}$ est donc antisymétrique. □

Finalement, nous déduisons des deux lemmes le résultat suivant.

Proposition II.3.6. — *L'opérateur $\mathcal{S}$, restriction de l'opérateur de courbure à $\mathfrak{sp}_1$ est donné par*

$$\mathcal{S} = -\frac{s}{4(m+2)}.$$

Démonstration. — Par les deux lemmes précédents, $\mathcal{S}$ est un scalaire, qu'il reste à déterminer. Pour cela, on applique encore l'identité de Bianchi modifiée (3.2)

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}(I_1), I_1\rangle &= \frac{1}{2}\sum \langle R_{e_i,I_1e_i} e_j, I_1 e_j\rangle \\ &= -\sum \langle R_{e_j,e_i} I_1 e_i, I_1 e_j\rangle + \text{termes de torsion},\end{aligned}$$

mais à nouveau, les termes de torsion conduisent à des traces qui s'annulent par le lemme II.3.1, donc

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}(I_1), I_1\rangle &= -s + \sum \langle [I_1, R_{e_j,e_i}] I_1 e_i, e_j\rangle \\ &= -s + \sum \langle [I_1, R_{I_2e_i,e_i}] I_1 e_i, I_2 e_i\rangle + \langle [I_1, R_{I_3e_i,e_i}] I_1 e_i, I_3 e_i\rangle \\ &= -s + \frac{1}{2m}\big(\langle [\mathcal{S}(I_2), I_1], I_3\rangle - \langle [\mathcal{S}(I_3), I_1], I_2\rangle\big) \\ &= -s - \frac{1}{m}\big(\langle \mathcal{S}(I_2), I_2\rangle + \langle \mathcal{S}(I_3), I_3\rangle\big),\end{aligned}$$

d'où résulte la formule annoncée. □

II.4. Changement conforme

La connexion adaptée à une structure de contact quaternionienne de contact $V \subset TS$ ne dépend pas du choix de SO_3-trivialisation de $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. En revanche, un changement conforme modifie cette connexion. Comme nous pensons à ces structures comme des infinis conformes de métriques d'Einstein, il est important de comprendre la modification de la connexion par changement conforme.

Nous supposons donc que nous effectuons un changement conforme

$$\eta' = f^2 \eta$$

et nous allons étudier les variations des objets construits précédemment. La métrique partielle devient bien sûr

$$g'_V = f^2 g_V.$$

II.4.A. Connexion partielle adaptée. — La connexion V-partielle ∇ adaptée à η n'est plus métrique pour g'_V, mais on peut corriger ce défaut en considérant

$$f^{-1} \circ \nabla \circ f = \nabla + \alpha, \quad \alpha = f^{-1} df.$$

Cependant, cette connexion, qui préserve la $Sp_m Sp_1$-structure, doit être corrigée pour obtenir la connexion partielle adaptée à $f^2 \eta'$. Nous noterons

$$\alpha^\flat \in V$$

le vecteur associé à la forme $\alpha|_V$ pour la métrique g_V.

Lemme II.4.1. — *Les champs de Reeb de la structure $f^2\eta'$ sont les vecteurs*

$$R'_i = f^{-2}(R_i + r_i), \quad r_i = -2 I_i \alpha^\flat \in V,$$

et la connexion partielle adaptée est

$$\nabla'_X = \nabla_X + \alpha_X + \sum_1^3 (I_i \alpha)_X I_i + \alpha^\flat \wedge X + \sum_1^3 (I_i \alpha^\flat) \wedge I_i X.$$

Remarque II.4.2. — On notera que $\nabla' - (\nabla + \alpha)$ est bien une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m$, avec le morceau à valeurs dans $\mathfrak{sp}_1$ égal à $\sum_1^3 (I_i \alpha) I_i$, et celui à valeurs dans $\mathfrak{sp}_m$ donné, pour tout vecteur $X \in V$, par

$$\alpha^\flat \wedge X + \sum_1^3 (I_i \alpha^\flat) \wedge I_i X \in \mathfrak{sp}_m.$$

En effet, un endomorphisme $u - \sum_1^3 I_i u I_i$ commute toujours à I_1, I_2 et I_3.

Démonstration. — Par la proposition II.1.7 et la remarque II.1.8, le champ de vecteurs R'_i est caractérisé par $i_{R'_i} d\eta'_i|_V = 0$ et $\eta'_j(R'_i) = \delta_{ij}$. Comme

$$d\eta' = d\eta + 2\alpha \wedge \eta,$$

on en déduit immédiatement la première assertion.

Connaissant W', il nous suffit maintenant de trouver la connexion adaptée ∇' par le lemme II.1.1 ; partant de la connexion $\nabla + \alpha$, dont la torsion est

$$T^{\nabla+\alpha}_{X,Y} = \sum_1^3 d\eta_i(X,Y)R_i + \alpha_X Y - \alpha_Y X,$$

nous devons la modifier par une 1-forme a à valeurs dans $\mathfrak{so}(V)$, de sorte que

$$\begin{aligned} a_X Y - a_Y X &= T^{\nabla'}_{X,Y} - T^{\nabla+\alpha}_{X,Y} \\ &= \left(\sum_1^3 d\eta_i(X,Y) r_i \right) - (\alpha_X Y - \alpha_Y X). \end{aligned}$$

La solution est fournie par la formule (1.2), et on vérifie facilement l'égalité

$$a_X Y = \frac{1}{2}\left(\sum_1^3 \langle I_i X, Y\rangle r_i - \langle r_i, X\rangle I_i Y - \langle r_i, Y\rangle I_i X \right) + \alpha_Y X - \langle X, Y\rangle \alpha^\flat$$

qui conduit à la formule annoncée quand on remplace r_i par sa valeur. □

II.4.B. Prolongement quaternionien. — Plus délicat est de calculer la variation du prolongement quaternionien de ∇ par modification conforme ; en géométrie de Carnot-Carathéodory, il faut en effet penser aux dérivations suivant un supplémentaire de V comme d'ordre deux, ce qui explique l'apparition, dans le lemme suivant, de termes quadratiques en α.

Lemme II.4.3. — *Le prolongement quaternionien de la connexion ∇' satisfait*

$$\begin{aligned} \nabla'_{R_i} &= \nabla_{R_i} + \alpha_{R_i} + |\alpha|^2 I_i + (a_{R_i})_{\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m}, \\ T'_{R_i + r_i, X} &= T_{R_i, X} + \alpha_{R_i} X - (a_{R_i})_{(\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m)^\perp}, \end{aligned}$$

où $(a_{R_i})_{\mathfrak{sp}_1\oplus\mathfrak{sp}_m}$ et $(a_{R_i})_{(\mathfrak{sp}_1\oplus\mathfrak{sp}_m)^\perp}$ sont les projections sur $\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m$ et $(\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m)^\perp$ de

$$a_{R_i} = 2 I_i \nabla \alpha^\flat - 4(I_i \alpha)\alpha^\flat.$$

Démonstration. — Regardons la connexion intermédiaire ∇^1 définie par

$$\nabla^1_X = \begin{cases} \nabla'_X & \text{si } X \in V, \\ \nabla_X + \alpha_X & \text{si } X \in W. \end{cases}$$

C'est une $Sp_m Sp_1$-connexion, mais ce n'est pas le prolongement quaternionien de ∇' ; en effet, sa torsion est donnée par

$$\begin{aligned} T^1_{R_i + r_i, X} &= \nabla^1_{R_i + r_i} X - [R_i + r_i, X]_{V/W'} \\ &= \nabla_{R_i} X + \alpha_{R_i} X + \nabla'_{r_i} X - [R_i, X]_{V/W'} - [r_i, X]_{V/W'} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où nous avons noté par un indice V/W' la projection sur V, de noyau W'. Or, d'une part, par définition de la torsion de ∇',

$$\nabla'_{r_i} X - [r_i, X]_{V/W'} = \nabla'_X r_i;$$

d'autre part, de la même manière,

$$\begin{aligned}\nabla_{R_i}X - [R_i, X]_{V/W'} &= T_{R_i,X} + ([R_i, X]_{V/W} - [R_i, X]_{V/W'}) \\ &= T_{R_i,X} - \sum_{j=1}^{3} d\eta_j(R_i, X)r_j;\end{aligned}$$

en injectant ces deux égalités dans (4.1), nous déduisons la formule

$$T^1_{R_i+r_i,X} = T_{R_i,X} + \alpha_{R_i}X + \nabla'_X r_i - \sum_{j=1}^{3} d\eta_j(R_i, X)r_j. \tag{4.2}$$

À présent, utilisons la valeur de r_i calculée dans le lemme II.4.1, à savoir $r_i = -2I_i\alpha^\flat$; pour simplifier le calcul, nous pouvons supposer qu'au point p où nous calculons, on a $\nabla I_i(p) = 0$, ce qui se traduit, d'après la proposition II.1.7, par l'égalité

$$d\eta_i(R_j, X) = 0, \quad X \in V; \tag{4.3}$$

toujours d'après le lemme II.4.1, on a, pour $X \in V$

$$\begin{aligned}\nabla'_X I_i &= \sum_{j=1}^{3} i_{R_i+r_i}(d\eta_j + 2\alpha \wedge \eta_j)_X \otimes I_j \\ &= \sum_{j=1}^{3} \big(d\eta_j(r_i, X) - 2\alpha_X\delta_{ij}\big) \otimes I_j \\ &= -2\sum_{j\neq i}\langle I_jI_i\alpha^\flat, X\rangle \otimes I_j;\end{aligned}$$

d'autre part, par le lemme II.4.1, on calcule

$$\nabla'_X\alpha^\flat = \nabla_X\alpha^\flat + |\alpha|^2X + 2\sum_1^3(I_j\alpha)_X I_j\alpha^\flat;$$

ces deux égalités se compensent partiellement dans $\nabla'_X(I_i\alpha^\flat)$ pour donner

$$\nabla'_X(I_i\alpha^\flat) = I_i\nabla_X\alpha^\flat + |\alpha|^2I_iX - 2(I_i\alpha)_X\alpha^\flat.$$

En utilisant cette égalité et l'annulation (4.3) au point p, on déduit maintenant de (4.2) l'égalité

$$\begin{aligned}T^1_{R_i+r_i,X} &= T_{R_i,X} + \alpha_{R_i}X - |\alpha|^2I_iX - 2I_i\nabla_X\alpha^\flat + 4(I_i\alpha)_X\alpha^\flat \\ &= T_{R_i,X} + \alpha_{R_i}X - |\alpha|^2I_iX - a_{R_i}X,\end{aligned}$$

où a_{R_i} est définie dans l'énoncé du lemme. Par conséquent, si on modifie ∇^1 sur W en posant

$$\nabla'_{R_i} = \nabla^1_{R_i} + |\alpha|^2I_i + (a_{R_i})_{\mathfrak{sp}_1\oplus\mathfrak{sp}_m},$$

on obtient une Sp_mSp_1-connexion sur V dont la torsion

$$T'_{R_i+r_i,\cdot} = T_{R_i,\cdot} + \alpha_{R_i} - (a_{R_i})_{(\mathfrak{sp}_1\oplus\mathfrak{sp}_m)^\perp}$$

est bien orthogonale à $\mathfrak{sp}_1 \oplus \mathfrak{sp}_m$: il s'agit donc du prolongement quaternionien recherché. $\square$

II.4.C. Comportement de la courbure scalaire. — Dans la suite, nous aurons besoin de connaître la modification de la courbure scalaire par un changement conforme. Le calcul suivant montre en particulier que la variation infinitésimale de la courbure scalaire est fournie par un laplacien partiel (dérivant uniquement suivant les directions de V) ; le problème de Yamabe semble ainsi se présenter très bien dans cette situation (voir aussi la remarque II.6.2).

Lemme II.4.4. — *Si on fait le changement conforme $\eta' = f^2\eta$, alors la courbure scalaire devient ($\alpha = f^{-1}df$)*

$$s' = f^{-2}\big(s - 8(m+2)\operatorname{tr}^V \nabla\alpha - 16(m+1)(m+2)|\alpha|^2\big).$$

Démonstration. — Le plus simple est de calculer la variation de l'opérateur de courbure sur $\mathfrak{sp}_1$ et d'utiliser la proposition II.3.6, donnant s par

$$R|_{\mathfrak{sp}_1} = -\frac{s}{4(m+2)}.$$

Si nous notons a la variation de la partie $\mathfrak{sp}_1$ de la connexion, alors la variation de la partie $\mathfrak{sp}_1$ de la courbure est donnée par

$$R' - R = d^\nabla a + \frac{1}{2}[a,a].$$

Par les lemmes II.4.1 et II.4.3, on sait que a est donnée par

$$a|_V = \sum_1^3 (I_i\alpha)I_i, \quad a_{R_i} = |\alpha|^2 I_i + \big(2(I_i\nabla\alpha^\flat) - 4(I_i\alpha)\alpha^\flat\big)_{\mathfrak{sp}_1}.$$

Par conséquent, en calculant à un point où les I_i sont parallèles,

$$\begin{aligned}(R'-R)_{X,Y} = \sum_i \boldsymbol{a}(I_i\nabla\alpha)_{X,Y} I_i + \sum_{i<j}(I_i\alpha\wedge I_j\alpha)_{X,Y}[I_i,I_j]\\ + \sum_1^3 2d\eta_i(X,Y)\big(|\alpha|^2 I_i + (I_i\nabla\alpha^\flat - 2(I_i\alpha)\alpha^\flat)_{\mathfrak{sp}_1}\big);\end{aligned}$$

on déduit, en faisant attention à ce que I_1, vu comme 2-forme, dépend de la métrique,

$$f^2R'_{I_1} - R_{I_1} = \sum_1^3 2(I_i\nabla\alpha)_{I_1} I_i + 2(I_2\alpha\wedge I_3\alpha)_{I_1} I_1 + 4m\big(|\alpha|^2 I_1 + (I_1\nabla\alpha^\flat - 2(I_1\alpha)\alpha^\flat)_{\mathfrak{sp}_1}\big);$$

conformément à la proposition II.3.6, on peut vérifier que les termes sur I_2 et I_3 s'annulent, et il reste

$$f^2R'_{I_1} - R_{I_1} = (2\operatorname{tr}^V(\nabla\alpha) + 4(m+1)|\alpha|^2)I_1,$$

d'où résulte le lemme. $\square$

II.5. Twisteurs CR

Supposons S munie d'une structure quaternionienne de contact $V \subset TS$, et considérons le fibré en sphères

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

constitué des structures complexes $x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3 \in \mathrm{End}(V)$, pour $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

On dispose sur $\mathcal{T}$ d'une 1-forme réelle η^r définie par

$$\eta^r = x_1 \pi^* \eta_1 + x_2 \pi^* \eta_2 + x_3 \pi^* \eta_3;$$

la forme η^r ne dépend pas du choix de SO_3-trivialisation de $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$.

Enfin, si on fixe le facteur conforme, donc la $Sp_m Sp_1$-métrique sur V, alors la connexion adaptée ∇, préservant la structure quaternionienne, fournit une connexion sur $\mathcal{T}$; grâce à cette connexion, on peut définir une structure presque complexe J sur le noyau de η^r, similaire à la structure complexe de l'espace des twisteurs d'une variété quaternion-kählérienne, de la manière suivante : en un point $I \in \mathcal{T}$ au-dessus de $s = \pi(I)$, la connexion ∇ permet de décomposer $T_I \mathcal{T}$ en sous-espaces horizontal et vertical (en notant $\mathcal{T}_s = \pi^{-1}(s)$ la fibre de $\mathcal{T}$ au-dessus de $s \in S$)

$$T_I \mathcal{T} = \mathrm{Hor}_I \mathcal{T} \oplus T_I \mathcal{T}_s, \tag{5.1}$$

où l'espace horizontal s'identifie par

$$\mathrm{Hor}_I \mathcal{T} \xrightarrow[\pi]{\sim} T_s S = V_s \oplus W_s. \tag{5.2}$$

Écrivons $I = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3$ et $R_I = x_1 R_1 + x_2 R_2 + x_3 R_3$, alors le noyau de η^r s'identifie à l'orthogonal de R_I ; comme l'orthogonal de R_I dans W_s est de dimension deux et que W_s est orienté, il a une structure complexe naturelle, donc on peut définir la structure presque complexe J sur $\mathcal{T}$, via les identifications (5.1) et (5.2), par

- $J|_{V_s} = I$,
- $J|_{R_I^\perp \subset W_S}$ et $J|_{T_I \mathcal{T}_s}$ sont les structures complexes naturelles.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cette section.

Théorème II.5.1. — *Soit une variété S de dimension $4m+3$ ($m \geqslant 2$) munie d'une structure de contact quaternionienne. La structure presque complexe J sur le noyau de la 1-forme η^r satisfait les propriétés suivantes :*

(1) *J est indépendante d'un changement conforme ;*
(2) *J est adaptée à la forme symplectique $d\eta^r$ sur* $\ker \eta^r$*, et définit une métrique de signature $(4m+2, 2)$;*
(3) *J est intégrable.*

Par conséquent, la variété $(\mathcal{T}, \eta^r, J)$ est une variété CR intégrable.

Pour le cas de la dimension 7 ($m = 1$), voir la section II.7.

II.5.A. Démonstration du point 1 du théorème II.5.1. — Montrons l'invariance conforme de la structure complexe J. Quand on fait le changement conforme

$$\eta' = f^2\eta,$$

la forme η^r est simplement multipliée par une constante ; en revanche, la connexion ∇ sur $\mathcal{T}$ est modifiée en une connexion ∇'. Posons $\alpha = f^{-1}df$.

Pour vérifier l'invariance conforme de J, il faut vérifier que, en tout point $I \in \mathcal{T}$, l'application

$$X \in \ker \eta^r \cap \mathrm{Hor}_I \longmapsto [\nabla'_X - \nabla_X, I] \in T_I\mathcal{T}_s \tag{5.3}$$

est J-linéaire.

Examinons d'abord le cas de $X \in V_s$: d'après le lemme II.4.1, on a (en ne retenant que la partie $\mathfrak{sp}_1$ de la connexion)

$$\nabla'_X - \nabla_X = \sum_1^3 (I_i\alpha)_X I_i;$$

plaçons-nous par exemple en $I = I_1$: l'application (5.3) s'écrit

$$X \longmapsto 2\big(\alpha_{I_2X}I_3 - \alpha_{I_3X}I_2\big)$$

qui est bien une application I_1-linéaire.

Examinons à présent le cas de $X \in \ker \eta^r \cap W_s$; il suffit de raisonner infinitésimalement, donc, par le lemme II.4.3, la variation de ∇_{R_i} est donnée par

$$\dot\nabla_{R_i} = 2(I_i\nabla\alpha^\flat)_{\mathfrak{sp}_1};$$

plaçons-nous à nouveau en $I = I_1$ donc $X = R_2$ ou R_3 : comme

$$I_3\nabla\alpha^\flat = I_1I_2\nabla\alpha^\flat,$$

on déduit immédiatement

$$[\dot\nabla_{R_3}, I_1] = I_1[\dot\nabla_{R_2}, I_1],$$

ce qui montre la linéarité voulue. □

II.5.B. Démonstration du point 2 du théorème II.5.1. — Montrons à présent que J est adaptée à $d\eta^r$, c'est-à-dire, pour tous X et Y dans le noyau de η^r,

$$d\eta^r(JX, JY) = d\eta^r(X, Y).$$

En fixant une trivialisation de η, on peut écrire

$$d\eta^r = \sum_1^3 dx_i \wedge \pi^*\eta_i + x_i\pi^*d\eta_i;$$

comme la question est indépendante de la trivialisation, on peut supposer qu'au point $s \in S$ où l'on calcule, $\nabla I_i(s) = 0$, si bien que, par la proposition II.1.7, on a

$$d\eta_i(V_s, W_s) = 0.$$

Calculons par exemple au point $I = I_1 \in \mathcal{T}_s$: compte tenu de la décomposition (5.1), (5.2), la forme $d\eta^r$ au point $I \in \mathcal{T}_s$ se découple en

- d'une part, la forme $d\eta_1$ sur V_s, à laquelle I_1 est manifestement adaptée ;
- d'autre part, la forme $d\eta_1 + dx_2 \wedge \eta_2 + dx_3 \wedge \eta_3$ sur $\mathbb{R}R_2 \oplus \mathbb{R}R_3 \oplus T_{I_1}\mathcal{T}_s$: les seules quantités non nulles sont
$$d\eta^r_{R_2,I_2} = d\eta^r_{R_3,I_3} = 1, \quad d\eta^r(R_2,R_3) = d\eta_1(R_2,R_3),$$
donc, là aussi, I_1 est adaptée.

Avec les mêmes conventions de calcul que précédemment, la métrique $d\eta^r(\cdot, J\cdot)$ s'écrit au point I_1 comme
$$g_V + d\eta_1(R_2,R_3)^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + \eta_3 \cdot dx_2 - \eta_2 \cdot dx_3,$$
où $\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\alpha)$ représente la symétrisation ; en particulier, cette métrique est de signature $(4m+2, 2)$. $\square$

II.5.C. Démonstration du point 3 du théorème II.5.1. — Il nous reste à démontrer que la structure J est intégrable. On suit la démonstration d'Arthur Besse dans le cas quaternion-kählérien [**Bes87**, théorème 14.68]. Il s'agit de montrer que pour des champs de vecteurs X et Y dans le noyau de η^r, le tenseur de Nijenhuis
$$N_{X,Y} = [X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY]$$
s'annule.

Choisissons tout d'abord deux vecteurs horizontaux $X, Y \in \operatorname{Hor}\mathcal{T}$. Il est bien connu que les parties verticales et horizontales de $[X,Y]$ sont données au point $I \in \mathcal{T}$ par
$$[X,Y]_{\mathrm{Ver}} = -[R_{X,Y}, I],$$
$$[X,Y]_{\mathrm{Hor}} = \pi^{-1}([X_0,Y_0]),$$
où X_0 et Y_0 sont des vecteurs sur S qui coïncident en $s = \pi(I)$ avec X et Y, et dont les dérivées premières coïncident avec les dérivées premières de X et Y dans les directions horizontales.

Commençons par examiner la partie horizontale de $N_{X,Y}$: elle s'identifie immédiatement à
$$(N_{X,Y})_{\mathrm{Hor}} = T_{X,Y} + IT_{X,IY} + IT_{IX,Y} - T_{IX,IY};$$
deux cas se produisent :

- $X, Y \in V$: alors $T_{X,Y} = \sum_1^3 d\eta_i(X,Y)R_i$ et on voit facilement que $(N_{X,Y})_{\mathrm{Hor}}$ s'annule ;
- $X \in V$ et $Y \in W$: par exemple, $I = I_1$ et $Y = R_2$, alors l'annulation est exactement la formule (2.19).

Regardons à présent la partie verticale de $N_{X,Y}$, à savoir
$$(N_{X,Y})_{\mathrm{Ver}} = -[R_{X,Y} + IR_{X,IY} + IR_{IX,Y} - R_{IX,IY}, I];$$
l'annulation voulue est la conséquence des deux lemmes II.5.2 et II.5.3 ci-dessous.

Reste finalement à examiner le cas d'un vecteur horizontal X et d'un vecteur vertical Y : mais ce cas se traite de manière exactement similaire à la démonstration dans le cas quaternion-kählérien. □

Lemme II.5.2. — *La courbure de la connexion adaptée satisfait, pour toute structure complexe I dans la famille et $X, Y \in V$,*

$$[R_{X,Y} + IR_{X,IY} + IR_{IX,Y} - R_{IX,IY}, I] = 0. \tag{5.4}$$

Démonstration. — Nous le déduisons de l'identité (modifiée) de Bianchi par le même procédé qu'Arthur Besse : posons

$$c_{X,Y,Z} = [R_{X,Y} + IR_{X,IY} + IR_{IX,Y} - R_{IX,IY}, I]Z, \tag{5.5}$$

alors on calcule facilement, en reprenant les notations (3.3) et en utilisant l'identité de Bianchi (3.2),

$$\begin{aligned} c_{X,Y,Z} + c_{Y,Z,X} + c_{Z,X,Y} = Ib_{X,Y,Z} &- b_{IX,Y,Z} - b_{X,IY,Z} - b_{X,Y,IZ} \\ &- Ib_{X,IY,IZ} - Ib_{IX,Y,IZ} - Ib_{IX,IY,Z} + b_{IX,IY,IZ}; \end{aligned} \tag{5.6}$$

si Y est orthogonal à $\mathbb{H}X$ et Z à $\mathbb{H}X \oplus \mathbb{H}Y$, alors toutes les torsions s'annulent et (5.6) est nulle ; en général, cela reste vrai, comme on le voit après un calcul fastidieux, mais facile : par exemple, posant $I = I_1$, on obtient, en utilisant l'identité (2.19) sur la torsion à la seconde ligne,

$$\begin{aligned} I_1 T_{R_1,Z} - T_{R_1,I_1 Z} - I_1 T_{R_1,Z} + T_{R_1,I_1 Z} &= 0 \quad \text{pour } Y = I_1 X \text{ et } Z \perp \mathbb{H}X, \\ 2\big(I_1 T_{R_2,Z} - T_{R_3,Z} - T_{R_2,I_1 Z} - I_1 T_{R_3,I_1 Z}\big) &= 0 \quad \text{pour } Y = I_2 X \text{ et } Z \perp \mathbb{H}X. \end{aligned}$$

Le seul cas manquant ci-dessus est celui de $Y = I_1 X$ et $Z = I_2 X$, qui s'annule aussi à cause des mêmes identités.

Nous déduisons finalement que la quantité (5.6) est identiquement nulle ; comme $c_{X,Y,Z}$ est dans l'espace engendré par $I_2 Z$ et $I_3 Z$, il faut que $c_{X,Y,Z}$ soit identiquement nulle. □

Lemme II.5.3. — *La connexion adaptée satisfait l'identité, pour $X \in V$,*

$$[R_{R_2,X} + I_1 R_{R_3,X} + I_1 R_{R_2,I_1 X} - R_{R_3,I_1 X}, I_1] = 0.$$

Démonstration. — La preuve repose sur le même principe que celle du lemme précédent, mais devient nettement plus compliquée, car on ne dispose plus de l'identité de Bianchi (3.2) quand l'un des vecteurs X, Y ou Z n'est pas dans V. Nous allons donc ici voir la différence.

L'identité (3.1) donne, pour $X, Y \in V$, si on se place en un point s où les vecteurs X, Y sont parallèles, ainsi que les I_i (et donc les R_i suivant les directions de V),

$$R_{X,Y} R_2 + R_{Y,R_2} X + R_{R_2,X} Y = \nabla_X T_{Y,R_2} + \nabla_Y T_{R_2,X} + T_{T_{X,Y},R_2} + T_{T_{R_2,X},Y} + T_{T_{Y,R_2},X},$$

et, en projetant sur V,

$$R_{Y,R_2}X + R_{R_2,X}Y = \nabla_X T_{Y,R_2} + \nabla_Y T_{R_2,X} + T_{T_{X,Y},R_2}.$$

Soit $c_{X,Y,Z}$ défini comme en (5.5), alors, d'après (5.4), la quantité c_{X,Y,R_2} a un sens (de manière générale, on peut définir I_1 sur W par $I_1R_1 = 0$ et $I_1R_2 = R_3$) ; l'analogue de l'identité (5.6) donne maintenant, si $Y \perp \mathbb{H}X$,

$$\begin{aligned}(5.7)\quad & c_{R_2,X,Y} + c_{Y,R_2,X} \\ &= I_1(\nabla_X T_{Y,R_2} - \nabla_Y T_{X,R_2}) - (\nabla_{I_1X} T_{Y,R_2} - \nabla_Y T_{I_1X,R_2}) \\ &\quad - (\nabla_X T_{I_1Y,R_2} - \nabla_{I_1Y} T_{X,R_2}) - (\nabla_X T_{Y,R_3} - \nabla_Y T_{X,R_3}) \\ &\quad - I_1(\nabla_X T_{I_1Y,R_3} - \nabla_{I_1Y} T_{X,R_3}) - I_1(\nabla_{I_1X} T_{Y,R_3} - \nabla_Y T_{I_1X,R_3}) \\ &\quad - I_1(\nabla_{I_1X} T_{I_1Y,R_2} - \nabla_{I_1Y} T_{I_1X,R_2}) + (\nabla_{I_1X} T_{I_1Y,R_3} - \nabla_{I_1Y} T_{I_1X,R_3}) \\ &\quad + I_1T_{T_{X,Y},R_2} - T_{T_{I_1X,Y},R_2} - T_{T_{X,I_1Y},R_2} - T_{T_{X,Y},R_3} \\ &\quad - I_1T_{T_{X,I_1Y},R_3} - I_1T_{T_{I_1X,Y},R_3} - I_1T_{T_{I_1X,I_1Y},R_2} + T_{T_{I_1X,I_1Y},R_3};\end{aligned}$$

si $Y \in \mathbb{H}X$, on obtient des termes supplémentaires qui sont égaux à ceux obtenus dans la démonstration du lemme II.5.2 en remplaçant Z par R_2, et s'annulent donc ; on est ainsi ramené, dans tous les cas, à étudier la formule (5.7).

Regardons d'abord les termes sans dérivation dans (5.7). On peut les réécrire

$$I_1T_{T_{X,Y}-T_{I_1X,I_1Y},R_2} - T_{T_{I_1X,Y}+T_{X,I_1Y},R_2} - T_{T_{X,Y}-T_{I_1X,I_1Y},R_3} - I_1T_{T_{I_1X,Y}+T_{X,I_1Y},R_3};$$

compte tenu de l'identité

$$T_{X,Y} - T_{I_1X,I_1Y} = 2\big(d\eta_2(X,Y)R_2 + d\eta_3(X,Y)R_3\big),$$

ce terme s'annule.

Passons aux autres termes de (5.7). Comme nous calculons à un point s auquel les I_i sont parallèles, I_1 et ∇ commutent ; en utilisant cette propriété, on peut réécrire les termes de (5.7) où intervient ∇_X comme

$$\nabla_X\big(I_1T_{Y,R_2} - T_{I_1Y,R_2} - T_{Y,R_3} - I_1T_{I_1Y,R_3}\big) = 0$$

d'après l'identité (2.19) sur la torsion ; les autres termes sont traités de la même manière.

Nous déduisons de ce qui précède que

$$c_{R_2,X,Y} + c_{Y,R_2,X} = 0, \quad X, Y \in V;$$

comme $c_{R_2,X,Y}$ est dans le sous-espace engendré par I_2Y et I_3Y, et que $c_{R_2,X,I_1X} = 0$ par un calcul direct, on déduit que $c_{R_2,X,Y}$ est identiquement nul, ce qui démontre le lemme. □

II.6. Métrique de Fefferman

Si on a une variété CR intégrable, de dimension réelle $2m+1$, avec forme de Levi non dégénérée, de signature (p,q), alors il existe sur l'espace total $\mathcal{F}$ du fibré en cercles associé au fibré canonique une métrique (de Fefferman) de signature $(p+1,q+1)$, dont la classe conforme ne dépend que de la structure CR (et pas du choix d'une forme de contact) ; pour une formulation de cette métrique proche de celle que nous utiliserons, voir **[Lee86]**. Cette métrique peut être décrite de la manière suivante : on fixe une forme de contact η, d'où un champ de Reeb R ; associée à cette donnée, on a la connexion de Tanaka-Webster, qui induit une connexion sur le fibré $\mathcal{F}$: notons σ la 1-forme de connexion sur $\mathcal{F}$ induite. Alors la métrique de Fefferman a l'expression [**Lee86**, théorème 5.1]

$$\pi^* g + \frac{2}{m+2}\pi^*\eta \cdot \left(\sigma - \frac{s}{2(m+1)}\pi^*\eta\right), \tag{6.1}$$

où g est la métrique sur $\ker\eta$, prolongée par 0 sur le champ de Reeb R, et s est la courbure scalaire de Webster.

Si S^{4m+3} est munie d'une structure de contact quaternionienne V, l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ est une variété CR, intégrable, non dégénérée, de signature $(4m+2,2)$. Ainsi, le fibré en cercles associé au fibré canonique de $\mathcal{T}$ admet une métrique de Fefferman, pseudo-riemannienne de signature $(4m+3,3)$, dont la classe conforme ne dépend que de la structure de départ. Or, la construction de cette métrique via les twisteurs est assez indirecte, puisqu'elle nécessite en particulier le calcul de la connexion de Tanaka-Webster en fonction de la connexion adaptée, alors que la construction directe d'une métrique de signature $(4m+3,3)$ sur un fibré en $\mathbb{S}^3$ au-dessus de S, sans utiliser la construction de l'espace des twisteurs, est naturelle et simple. Il m'a donc paru utile de donner ici une construction rapide en fonction de la connexion adaptée de la structure de contact.

Dans la situation que nous regardons, le Sp_mSp_1-fibré V admet la présentation

$$V = H \otimes E,$$

où H est un Sp_1-fibré et E un Sp_m-fibré. Le fibré en sphères $\mathcal{F}$ de H est un Sp_1-fibré principal :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

Par exemple, dans le cas homogène, on a $\mathbb{S}^{4m+3} = Sp_{m+1}Sp_1/Sp_mSp_1$, et la métrique homogène naturelle de $\mathcal{F} = Sp_{m+1}Sp_1/Sp_m$ est effectivement de signature $(4m+3,3)$.

Théorème II.6.1. — *Soit une variété S^{4m+3} ($m \geqslant 2$) munie d'une Sp_mSp_1-métrique de Carnot-Carathéodory g_V, et soit $\overline{g_V}$ le prolongement de g_V sur S en une forme* *quadratique de noyau engendré par les champs de Reeb. Soit η une 1-forme de contact à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, et σ la 1-forme de connexion sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\mathfrak{sp}_1 = \mathbb{R}^3$ (cette identification est réalisée grâce à la base (I_1, I_2, I_3)). Alors la métrique conforme $[\gamma]$ sur $\mathcal{F}$, où*

$$\gamma = \pi^* \overline{g_V} - 4\eta \cdot \left(\sigma + \frac{s}{16m(m+2)}\eta \right),$$

ne dépend que de la classe conforme de g_V.

Rappelons que, dans cet énoncé, le point $\cdot$ désigne le produit symétrique des formes.

Remarque II.6.2. — Je ne montre pas, *stricto sensu*, que cette métrique est la métrique de Fefferman associée à l'espace des twisteurs de S (il faudrait d'ailleurs prendre une certaine puissance du fibré canonique). En effet, je n'ai pas voulu calculer le lien entre la connexion de Tanaka-Webster et la connexion adaptée. Le théorème construit donc simplement une métrique conforme canonique sur $\mathcal{F}$ associée à S. Cependant la forme de la métrique, comparée à (6.1), suggère fortement qu'il s'agit bien d'une métrique de Fefferman associée à $\mathcal{T}$; de plus, il est probable que la courbure scalaire de S est un multiple constant de la courbure scalaire de Webster, et donc de la courbure scalaire de $\mathcal{F}$; ainsi, le problème de Yamabe envisagé se ramènerait — formellement — au problème de Yamabe sur la variété pseudo-riemannienne $\mathcal{F}$. Dans le cadre CR strictement pseudo-convexe (mais $\mathcal{F}$ ne l'est pas), ce problème a été étudié par Jerison et Lee **[JL89]**.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que si on multiple g_V par f^2, alors γ aussi est multipliée par f^2. Il est suffisant de vérifier cette assertion infinitésimalement, donc de vérifier

$$\dot{\overline{g_V}} - 4\eta \cdot \left(\dot\sigma + \frac{\dot s}{16m(m+2)}\eta \right) = 0. \tag{6.2}$$

Notons $\alpha = f^{-1}df$ (infinitésimalement $d\dot f$) comme dans la section II.4. D'après le lemme II.4.1, le champ de Reeb R_i devient $R_i + r_i$ avec $r_i = -2I_i\alpha^\flat$; cette modification du supplémentaire de V induit une modification de $\overline{g_V}$ facile à calculer :

$$\dot{\overline{g_V}} = 2\eta\beta, \quad \beta_i|_V = 2I_i\alpha, \quad \beta_i|_W = 0.$$

Regardons à présent la forme de connexion σ : toujours d'après le lemme II.4.1, on a

$$\dot\sigma|_V = \sum_1^3 (I_i\alpha)I_i,$$

donc $-4\dot\sigma|_V + 2\beta|_V = 0$, ce qui implique que l'égalité (6.2) est vérifiée sur V.

L'égalité (6.2) se réduit maintenant à

$$\eta \cdot \left(\dot\sigma|_W + \frac{\dot s}{16m(m+2)}\eta|_W \right) = 0. \tag{6.3}$$

Par le lemme II.4.3, on a

$$\dot{\sigma}_{R_i} = (2I_i \nabla \alpha^\flat)_{\mathfrak{sp}_1};$$

alors on calcule la symétrisation

$$\begin{aligned}(\eta \cdot \dot{\sigma})|_W &= \frac{1}{2m} \sum_{i,j=1}^{3} \langle I_i \nabla \alpha^\flat, I_j \rangle \eta_i \cdot \eta_j \\ &= \frac{1}{2m} \sum_i \langle I_i \nabla \alpha^\flat, I_i \rangle \eta_i^2\end{aligned}$$

car les termes pour $i \neq j$ sont antisymétriques ; par conséquent

$$(\eta \cdot \dot{\sigma})|_W = \frac{1}{2m} \operatorname{tr}^V (\nabla \alpha^\flat) \eta^2.$$

D'un autre côté, on a vu dans le lemme II.4.4 que la courbure scalaire obéit à la loi

$$\dot{s} = -8(m+2) \operatorname{tr}^V (\nabla \alpha^\flat),$$

donc l'égalité (6.3) est démontrée. □

II.7. Le cas de la dimension 7

Comme on l'a vu après le théorème initial II.1.3, le cas où S est de dimension 7 (et donc la distribution V est de dimension 4) est particulier. En géométrie quaternion-kählérienne aussi, le cas de la dimension 4 est particulier, puisqu'on doit alors définir quaternion-kählérien par antiautodual et Einstein. On dispose alors d'un espace des twisteurs jouissant des mêmes propriétés que ses analogues de dimension supérieure. Mais la condition Einstein antiautodual est d'ordre 2 sur la métrique, au lieu de 1 pour quaternion-kählérien en dimension supérieure ou égale 8.

Dans la situation d'une structure de contact quaternionienne V en dimension 7, j'ignore s'il est toujours possible de trouver un supplémentaire W tel que les connexions induites satisfassent toutes les propriétés nécessaires à notre construction twistorielle, d'où va dépendre, dans le chapitre suivant, la construction de métriques quaternion-kählériennes dont l'infini conforme est la structure de contact initiale. C'est à l'évidence un problème fort intéressant dans la théorie, qui pourrait être lié à la question de l'existence, en dimension 8, de structures quaternioniennes symplectiques (dont la 4-forme fondamentale Ω est fermée), mais non quaternion-kählériennes.

Faute de résoudre ces problèmes, je serai amené, en dimension 7, à supposer l'existence d'un supplémentaire W et d'une connexion adaptée tels que les propriétés (1.1) et (2.19) sur la torsion soient vérifiées, ainsi que les lemmes II.5.2 et II.5.3 sur la courbure. Le théorème II.5.1 s'applique à un tel objet.

II.8. Structures de contact octonioniennes

Le but de cette section est de montrer rapidement qu'une $Spin_7$-métrique de Carnot-Carathéodory possède également une connexion adaptée canonique. J'utiliserai librement des notations similaires à celles de la situation quaternionienne.

II.8.A. Algèbre octonionienne. — Soit $\mathbb{O}$ l'algèbre des octonions. Définissons, pour $u \neq 0$,

$$L_u(x) = ux,$$

alors l'identité de Moufang implique

$$L_u L_v L_u^{-1} = -L_{uvu}.$$

Le groupe $Spin_7 \subset SO_8$ est engendré par la sphère

$$\mathbb{S}^6 = \{L_u, u \in \operatorname{Im} \mathbb{O}, |u| = 1\},$$

et est caractérisé comme le sous-groupe de SO_8 qui conjugue $\mathbb{R}^7 = \{L_u, u \in \operatorname{Im} \mathbb{O}\}$ sur lui-même. Les L_u pour $u \in \mathbb{S}^6$ fournissent des structures complexes, et on prendra une base $I_1, \dots, I_7$; on a alors une décomposition de $\mathfrak{so}_8$ en $\mathfrak{so}_7$-modules irréductibles comme

$$\Lambda^2 \mathbb{O} = \mathfrak{so}_8 = \mathfrak{so}_7 \oplus \mathbb{R}^7. \tag{8.1}$$

Comme représentation de $Spin_7$, on a par **[Sal89]** les décompositions

$$\mathbb{O} \otimes \mathbb{O} = \oplus_{i=0}^3 \Lambda^i \mathbb{R}^7, \tag{8.2}$$

$$\Lambda^1 \otimes \mathbb{R}^7 = \mathbb{O} \oplus \ker m, \tag{8.3}$$

où $m : \Lambda^1 \mathbb{R}^7 \otimes \mathbb{O} \to \mathbb{O}$ est l'application naturelle induite par (8.1). Enfin, fait important, on a

$$\Lambda^3 \mathbb{O} = \Lambda^1 \mathbb{R}^7 \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O} \oplus \ker m,$$

via la composition

$$\Lambda^1 \mathbb{R}^7 \otimes \mathbb{O} \hookrightarrow \Lambda^2 \mathbb{O} \otimes \mathbb{O} \xrightarrow{a} \Lambda^3 \mathbb{O}. \tag{8.4}$$

II.8.B. Connexion adaptée. — Il est remarquable que, encore dans cette situation, on puisse définir un supplémentaire canonique de la distribution de contact octonionienne V.

Théorème II.8.1. — *Si une variété S, de dimension 15, est munie d'une $Spin_7$-métrique de Carnot-Carathéodory g_V, alors il y a un unique supplémentaire W de V tel que la connexion V-partielle suivant V induite par la métrique préserve la $Spin_7$-structure. Cette connexion partielle vérifie encore l'analogue des propositions II.1.7 et II.1.9.*

Démonstration. — L'espace des 7-uplets $(I_1, \dots, I_7)$ induisant une structure $Spin_7$ compatible à la métrique est homogène ; dans la décomposition

$$\mathfrak{so}_8 = \mathfrak{so}_7 \oplus \mathbb{R}^7,$$

le morceau $\mathfrak{so}_7$ préserve la $Spin_7$-structure, tandis que le morceau $\mathbb{R}^7$ donne les «vraies» déformations infinitésimales. Si on pose $\omega_i = d\eta_i|_V$, on déduit que, pour toute connexion métrique, on a

$$\nabla((d\eta_i)) \in \Lambda^1 V \otimes \mathfrak{so}_8 = \Lambda^1 V \otimes (\mathfrak{so}_7 \oplus \mathbb{R}^7),$$

et que la connexion préserve la $Spin_7$-structure si la composante dans $\Lambda^1 V \otimes \mathbb{R}^7$ est nulle.

D'un autre côté, une modification de supplémentaire est donnée par une application $u : W \to V$, avec modification de la connexion partielle adaptée par la 1-forme, similaire à (1.13),

$$a_X = \frac{1}{2} \sum_1^7 u(R_i) \wedge I_i X + \langle u(R_i), X \rangle I_i.$$

Lemme II.8.2. — *L'application qui à u associe la projection de a sur le facteur $\Lambda^1 V \otimes \mathbb{R}^7$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — L'application u et la projection de a vivent dans l'espace

$$\Lambda^1 \mathbb{R}^7 \otimes V = V \oplus \ker m;$$

par le lemme de Schur, il suffit de vérifier que l'application, qui est $Spin_7$-équivariante, est injective sur chaque facteur ; je laisse au lecteur cette vérification. □

D'après le lemme, il existe donc une unique modification de supplémentaire u qui tue l'obstruction à préserver la $Spin_7$-structure ; la première partie du théorème est donc démontrée.

Passons à la seconde partie : on a, comme dans le cas quaternionien,

$$\boldsymbol{a}(\nabla \omega_i) = -\sum_1^7 (i_{R_j} d\eta_i)|_V \wedge \omega_j;$$

mais, puisque l'antisymétrisation (8.4) est un isomorphisme, la dérivée $\nabla \omega_i$ est complètement déterminée par $\boldsymbol{a}(\nabla \omega_i)$, donc

$$\nabla \omega_i = -\sum_1^7 (i_{R_j} d\eta_i)|_V \otimes \omega_j,$$

d'où résulte $i_{R_i} d\eta_j|_V = -i_{R_j} d\eta_i|_V$. □

Finalement, on a l'existence d'une connexion adaptée vérifiant la définition suivante.

Définition II.8.3. — Si une variété S^{15} est munie d'une $Spin_7$-métrique de Carnot-Carathéodory, sa *connexion adaptée* est la connexion ∇ vérifiant :

- suivant V, la connexion ∇ est la connexion partielle adaptée construite par le théorème II.8.1 ;
- suivant le supplémentaire canonique W, la connexion ∇ est le $Spin_7$-prolongement sur V issu du lemme II.2.1, étendu sur W par l'isomorphisme $R_i \to I_i$.

Cette connexion est probablement l'outil de base pour l'étude, que je n'ai malheureusement pas faite, des structures de contact octonioniennes.

CHAPITRE III

MÉTRIQUES QUATERNION-KÄHLÉRIENNES

Dans ce chapitre, nous montrons le théorème D, à savoir qu'une structure de contact quaternionienne sur une variété S^{4m+3}, avec $m \geqslant 2$, analytique réelle, est toujours l'infini conforme d'une métrique quaternion-kählérienne, définie au voisinage de S. En dimension 7, nous serons amenés à supposer de plus qu'elle vérifie les hypothèses de la section II.7. En dimension 3, il n'y a plus de structure de contact, simplement une métrique conforme, et on retrouve le théorème de Le Brun **[LeB82]**.

Dans la première section, étant donnée une structure de contact quaternionienne sur S, analytique réelle, on construit l'espace des twisteurs de la métrique souhaitée. Cet espace des twisteurs doit avoir comme bord l'espace $\mathcal{T}$ des twisteurs CR de S. Il est obtenu par la construction géométrique suivante : on complexifie S en $S^{\mathbb{C}}$, et on étend l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ de S en un $\mathbb{CP}^1$-fibré $\mathcal{T}^c$ au-dessus de $S^{\mathbb{C}}$. La structure CR J sur $\mathcal{T}$ permet de construire une distribution de $\mathcal{T}^c$, constituée de l'intersection des vecteurs de type $(0,1)$ pour J avec l'horizontal de la connexion du fibré $\mathcal{T}^c \to S^{\mathbb{C}}$; l'intégrabilité de J entraîne celle de la distribution, d'où un feuilletage de $\mathcal{T}^c$, dont l'espace des feuilles porte les structures géométriques d'un espace de twisteurs. Dans le cas de la dimension 3, les feuilles du feuilletage holomorphe s'identifient aux géodésiques nulles pour la métrique (complexe) de $S^{\mathbb{C}}$, et on récupère la construction de Le Brun. En dimension supérieure, notre espace de twisteurs n'a plus rien à voir avec des espaces de géodésiques nulles, comme ceux étudiés par Le Brun dans **[LeB89]**.

Le problème qui reste à traiter est de vérifier que l'espace des twisteurs construit est celui d'une métrique asymptotiquement symétrique, dont l'infini conforme est la structure de contact quaternionienne de départ. Dans la seconde section, ce problème est traité de manière plus globale (proposition III.2.1) : partant d'un espace de twisteurs satisfaisant certaines propriétés générales, on montre qu'il induit une métrique quaternion-kählérienne, asymptotiquement symétrique, d'infini conforme une structure de contact quaternionienne. On peut appliquer ce résultat, d'une part, aux espaces de twisteurs construits dans la première section, ce qui fournit le théorème D (théorème III.3.1), d'autre part, aux espaces de twisteurs construits par Le Brun dans **[LeB91]**, ce qui montre que la famille de dimension infinie de métriques, construite par Le Brun, est bien du type envisagé ici ; en particulier, il existe beaucoup de structures de contact quaternioniennes.

La troisième section conclut en analysant les liens entre le théorème D et le théorème A de construction de métriques d'Einstein globales asymptotiquement symétriques. En particulier, si on applique ce dernier théorème dans le cas quaternionien, la métrique d'Einstein globale fournie est approchée à un haut degré par la métrique quaternion-kählérienne locale construite par le théorème D.

III.1. Construction de l'espace des twisteurs

Soit S^{4m+3} munie d'une structure de contact quaternionienne, analytique réelle. Nous commençons par construire un espace $\mathcal{N}$, candidat à être l'espace des twisteurs de la métrique quaternion-kählérienne à construire.

III.1.A. Complexification de S et de $\mathcal{T}$. — Rappelons que la variété S est munie d'un espace de twisteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathcal{T} \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & S \end{array}$$

qui est une variété CR de dimension $4m+5$ par le théorème II.5.1.

Complexification de S. — Considérons à présent la variété complexifiée $S^{\mathbb{C}}$. Les 1-formes (η_1, η_2, η_3) s'étendent sur $S^{\mathbb{C}}$ en des 1-formes holomorphes à valeurs complexes ; la décomposition

$$TS = V \oplus W$$

s'étend en une décomposition holomorphe

$$TS^{\mathbb{C}} = V^{\mathbb{C}} \oplus W^{\mathbb{C}}$$

et la connexion adaptée ∇ s'étend en une connexion holomorphe sur $TS^{\mathbb{C}}$; les structures complexes I_1, I_2 et I_3 s'étendent en des structures presque complexes de $V^{\mathbb{C}}$, commutant à la multiplication par i, et on peut définir le fibré des structures presque complexes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 & \longrightarrow & \mathcal{T}^c = \{xI_1 + yI_2 + zI_3, x^2+y^2+z^2 = 1\} \\ & & \big\downarrow \pi \\ & & S^{\mathbb{C}} \end{array}$$

La variété $\mathcal{T}^c$ n'est pas la complexification de $\mathcal{T}$ (ce qui explique notre notation avec l'exposant c au lieu de $\mathbb{C}$), mais plutôt une extension du fibré $\mathcal{T}$ au-dessus de $S^{\mathbb{C}}$; a priori, ce n'est donc pas une variété holomorphe.

Extension de $\mathcal{T}$. — Cependant, on peut définir $\mathcal{T}^c$ plus intrinsèquement de la manière suivante. Si E est un espace vectoriel complexe muni d'une forme quadratique complexe, on note $\mathbf{P}_0(E)$ l'espace des directions nulles de E ; en particulier, si E est de dimension 3, alors $\mathbf{P}_0(E)$ est une courbe de degré deux $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$. À présent, pour $s \in S$, il y a une identification canonique

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_s & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{P}_0(W_s \otimes \mathbb{C}) \\ I_1 & \longmapsto & [R_2 + iR_3]. \end{array} \tag{1.1}$$

On peut donc redéfinir $\mathcal{T}^c$ par la formule

$$\mathcal{T}^c = \mathbf{P}_0(W^{\mathbb{C}}).$$

Comme $W^{\mathbb{C}}$ est un sous-fibré holomorphe, on déduit que $\mathcal{T}^c$ est bien un fibré holomorphe au-dessus de $S^{\mathbb{C}}$.

L'espace $\mathcal{T}^c$ est doté de diverses structures héritées de $\mathcal{T}$. D'une part, le fibré

$$\mathcal{T}^c \xrightarrow{\pi} S^{\mathbb{C}}$$

est muni de la connexion adaptée ∇, qui décompose le fibré tangent

$$T_I\mathcal{T}^c = \mathrm{Hor}_I^{\nabla} \mathcal{T}^c \oplus T_I\mathcal{T}^c_{\pi(I)}.$$

D'autre part, la forme de contact

$$\eta^r = x\eta_1 + y\eta_2 + z\eta_3$$

sur $\mathcal{T}$ s'étend sur $\mathcal{T}^c$ en une $(1,0)$-forme, qui n'est cependant pas holomorphe, comme le montre le lemme suivant.

Lemme III.1.1. — *Une trivialisation (I_1, I_2, I_3) étant choisie, on a au point I_1 l'égalité*

$$\bar\partial\eta^r = \frac{1}{2}(dy - idz) \wedge (\eta_2 + i\eta_3).$$

Démonstration. — On a évidemment, au point I_1,

$$d\eta^r = d\eta_1 + dy \wedge \eta_2 + dz \wedge \eta_3;$$

par rapport à la structure complexe i de $\mathcal{T}^c$, la forme $d\eta_1$ est de type $(2,0)$, les formes η_2 et η_3 sont de type $(1,0)$, alors que $idy = dz$; le lemme en résulte. □

Enfin, la définition de la structure presque complexe J sur $\ker(\eta^r) \subset \mathcal{T}$ s'étend manifestement sur $\mathcal{T}^c$ pour donner une structure presque complexe J sur $\ker(\eta^r) \subset \mathcal{T}^c$, qui commute bien entendu à la multiplication par i. Cependant, puisque η^r n'est pas holomorphe, J ne l'est pas non plus.

III.1.B. Construction d'un feuilletage sur $\mathcal{T}^c$. — On va à présent construire un feuilletage sur $\mathcal{T}^c$ par des feuilles de dimension complexe $2m+1$. Nous commençons par définir une distribution $\mathcal{F} \subset T\mathcal{T}^c$ par

$$\mathcal{F}_I = \mathrm{Hor}^\nabla \cap T_J^{0,1}. \tag{1.2}$$

Il n'est pas clair que ce soit une distribution holomorphe, puisque J n'est pas holomorphe. Pour le montrer, nous avons besoin du lemme suivant, probablement classique.

Lemme III.1.2. — *Soit V^{4m} un espace vectoriel quaternionien, avec la 2-sphère de structures complexes $\mathbb{S}^2 \subset \mathrm{End}(V)$; le fibré trivial $V^{\mathbb{C}} = V \otimes \mathbb{C}$ au-dessus de $\mathbb{S}^2$ se décompose au point $I \in \mathbb{S}^2$ en*

$$V_I^{\mathbb{C}} = V_I^{1,0} \oplus V_I^{0,1}.$$

Alors le sous-fibré $(V_I^{0,1})_{I\in\mathbb{S}^2}$ est un sous-fibré holomorphe de $V^{\mathbb{C}}$, isomorphe au fibré $\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbb{C}^{2m}$, tandis que $V^{1,0} = \overline{V^{0,1}}$ est antiholomorphe.

Démonstration. — Je tiens l'approche suivante de Paul Gauduchon. Le fibré $V^{0,1}$ est engendré par les sections $X + iIX$, où $X \in V$ est fixé ; l'opérateur $\overline{\partial}$ de $f : S \to V^{\mathbb{C}}$ s'écrit, pour un vecteur tangent u identifié à un élément de $\mathrm{End}(V)$,

$$\overline{\partial}_u f = \frac{1}{2}(d_u f + i d_{I\circ u} f).$$

Par conséquent, on a, toujours pour $u \in T\mathbb{S}^2 \subset \mathrm{End}(V)$,

$$2\overline{\partial}_u(X + iIX) = d_u(X + iIX) + i d_{I\circ u}(X + iIX) = iu(X) - (I \circ u)(X)$$

qui est à nouveau de type $(0,1)$ pour I, ce qui prouve que le fibré $V_I^{0,1}$ est un sous-fibré holomorphe du fibré trivial $V^{\mathbb{C}}$.

De la même manière, pour un vecteur de type $(1,0)$,

$$2\overline{\partial}_u(X + iIX) = -iu(X) + (I \circ u)(X)$$

qui est de type $(0,1)$; cela montre que, pour tout $X \in V$ fixé, la section

$$I \longmapsto X + iIX \in V^{\mathbb{C}}/V_I^{0,1}$$

est holomorphe ; armé de ces $4m$ sections, le lecteur vérifiera sans peine que

$$V^{\mathbb{C}}/T_I^{0,1} = \mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2m},$$

d'où résulte le lemme. □

Ce lemme montre que, dans la définition de la distribution $\mathcal{F}$, on ne peut espérer remplacer $T_J^{0,1}$ par $T_J^{1,0}$. En effet, il implique le lemme suivant.

Lemme III.1.3. — *La distribution $\mathcal{F}$ définie par* (1.2) *est holomorphe.*

Démonstration. — Il s'agit de voir que l'opérateur $\overline{\partial}$ sur le fibré tangent de $\mathcal{T}^c$ préserve la distribution ; comme nous disposons sur $\mathcal{T}^c$ de la connexion holomorphe ∇, il suffit de vérifier cela, d'une part horizontalement, d'autre part verticalement. Or, horizontalement, il est clair que tous les objets sont holomorphes (car définis par complexification) ; par conséquent, on est ramené à tester que $\mathcal{F}$ est holomorphe verticalement. La distribution $\mathcal{F}$ se décompose en deux morceaux :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{F} \cap \pi^* V^{\mathbb{C}}) \oplus (\mathcal{F} \cap \pi^* W^{\mathbb{C}}),$$

et nous allons montrer que chacun des deux morceaux est holomorphe.

Le premier morceau s'identifie, au point $I \in \mathcal{T}^c$, à

$$V_I^{0,1} \subset \pi^* V^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Hor}_I^{\nabla};$$

en vertu du lemme précédent, il est holomorphe verticalement.

Le second morceau s'identifie, par exemple en $I = I_1$, à

$$\mathbb{C}(R_2 + iR_3) \subset \pi^* W^{\mathbb{C}} \subset \mathrm{Hor}_{I_1}^{\nabla};$$

via l'identification (1.1), il s'identifie donc sur la fibre

$$\mathcal{T}_s^c = \mathbf{P}_0(W_s^{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^2$$

à la restriction du fibré tautologique $\mathcal{O}(-1)$ de $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$, donc (puisque la courbe $\mathbf{P}_0(W^{\mathbb{C}})$ dans $\mathbb{C}\mathbf{P}^2$ est de degré 2) au fibré $\mathcal{O}(-2)$ sur $\mathbf{P}_0(W^{\mathbb{C}}) = \mathcal{T}_s^c$; en particulier, il est holomorphe. $\square$

Lemme III.1.4. — *La distribution $\mathcal{F}$ est intégrable, et définit donc un feuilletage sur $\mathcal{T}^c$.*

Démonstration. — Comme, par le théorème II.5.1, J est une structure CR intégrable sur la variété $\mathcal{T}$, elle vérifie

$$[T_J^{0,1}\mathcal{T}, T_J^{0,1}\mathcal{T}] \subset T_J^{0,1}\mathcal{T}.$$

Cette propriété s'étend immédiatement à l'espace $\mathcal{T}^c$. Il reste donc à vérifier que si X et Y sont dans $\mathcal{F}$, alors $[X,Y]$ reste bien horizontal. Or, au point $I \in \mathcal{T}^c$,

$$[X,Y]_{\mathrm{Ver}} = -R_{X,Y}^{\nabla} \cdot I;$$

puisque X et Y sont de type $(0,1)$, on peut écrire

$$X = x + iIx, \quad Y = y + iIy,$$

alors

$$R_{X,Y}^{\nabla} \cdot I = \big(R_{x,y} - R_{Ix,Iy} + i(R_{Ix,y} + R_{x,Iy})\big) \cdot I;$$

par définition, i agit sur l'espace tangent à la fibre $T_I\mathcal{T}_s^c$ par multiplication par I, donc $R_{X,Y}^{\nabla} \cdot I = 0$ par le lemme II.5.2. $\square$

Remarque III.1.5. — Dans le cas de la dimension 3 (donc $m = 0$), on a $V = 0$ et $\mathcal{T}^c$ est l'espace des directions nulles de $TS^{\mathbb{C}}$; les feuilles intégrales du feuilletage $\mathcal{F}$ sont donc simplement les géodésiques nulles de $S^{\mathbb{C}}$ et on retrouve la construction de Le Brun dans **[LeB82]**.

L'espace des feuilles. — L'*espace des feuilles* du feuilletage $\mathcal{F}$ sera noté $\mathcal{N}$: localement, c'est une variété complexe de dimension $2m + 3$. Comme la construction que nous faisons est purement locale, nous éviterons les questions globales à propos de $\mathcal{N}$ et nous contenterons de regarder comme défini localement au voisinage de la fibre $\mathcal{T}_s$ d'un point de s (le feuilletage étant transverse à cette fibre).

L'espace $\mathcal{T}^c$ est maintenant muni des deux projections

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}^c & \xrightarrow{q} & \mathcal{N} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ S^{\mathbb{C}} & & \end{array}$$

Pour les constructions géométriques qui vont suivre, il est nécessaire de comprendre plus précisément la projection q. Si on se donne une feuille $F \in \mathcal{N}$ du feuilletage $\mathcal{F}$, alors l'espace tangent en F à $\mathcal{N}$ s'identifie à la fibre du fibré normal de $F \subset \mathcal{T}^c$ à un point quelconque $I \in F$, c'est-à-dire à l'espace

$$N(F/\mathcal{T}^c)_I = T_I\mathcal{T}^c/(\mathrm{Hor}^{\nabla} \cap T_J^{0,1})_I.$$

En particulier, ces divers espaces $N(F/\mathcal{T}^c)_I$, pour I variant dans la feuille F, doivent s'identifier canoniquement.

Explicitons cette identification. Puisque le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres du fibré

$$\pi : \mathcal{T}^c \longrightarrow S^{\mathbb{C}},$$

au moins localement, la feuille F est donnée par sa projection $F_0 = \pi(F)$ et une section de π :

$$\sigma : F_0 \longrightarrow \mathcal{T}^c, \quad \pi \circ \sigma = 1.$$

Réciproquement, la donnée d'une sous-variété $F_0^{2m+1} \subset S^{\mathbb{C}}$ et d'une section $\sigma : F_0 \to \mathcal{T}^c$ de π fournit une feuille intégrale du feuilletage $\mathcal{F}$ si et seulement si

(1.3) $$T_sF_0 = T^{0,1}_{\sigma(s)}S^{\mathbb{C}},$$

(1.4) la section σ est parallèle le long de F_0.

La condition (1.3) définit σ de manière unique, et la condition (1.4) est une condition supplémentaire, de nature différentielle, sur σ ; par exemple, dans le cas de la dimension 3 traité par Le Brun, la première condition définit σ comme vecteur tangent nul à la courbe F_0, et la seconde est l'équation aux géodésiques $\nabla_\sigma \sigma = 0$.

Avant d'énoncer le lemme expliquant les déformations infinitésimales des feuilles, nous avons besoin de quelques notations. Observons que, par rapport à une structure complexe I_1, on a la décomposition

$$T\mathcal{J}^c = T^{1,0}_{I_1}\mathcal{J}^c \oplus T^{0,1}_{I_1}\mathcal{J}^c \oplus \mathbb{C}R_1 . \tag{1.5}$$

Nous définissons la *partie de type* $(1,0,1/2)$ *par rapport à* I_1 *d'un vecteur* X par la formule

$$X^{1,0,1/2} = \frac{1}{2}(1 - iI_1)X = X^{1,0} + \frac{1}{2}X_{R_1}.$$

On peut alors énoncer le lemme suivant.

Lemme III.1.6. — *Une déformation infinitésimale de la feuille* F *est équivalente à la donnée :*

(1) *d'une section holomorphe* X *de* $TS^{\mathbb{C}}/T^{0,1}_{\sigma}$ *le long de* F_0,

(2) *d'une déformation* $\dot\sigma$ *de* σ,

qui vérifient les équations, pour tout vecteur $f \in TF_0$,

$$\nabla^{1,0,1/2}_f X = T^{1,0,1/2}_{f,X} + \frac{1}{2}i\dot\sigma f,$$
$$\nabla_f \dot\sigma = R_{f,X}\sigma,$$

où les parties $(1,0,1/2)$ *sont prises par rapport à la structure complexe* σ.

Remarque III.1.7. — Il y a une analogie avec le cas des géodésiques : F_0 correspond à une géodésique c et σ correspond au vecteur tangent c' à la géodésique ; la seconde équation s'écrit alors

$$\nabla_{c'}\nabla_X c' = R_{c',X}c',$$

c'est-à-dire

$$\nabla_{c'}\nabla_{c'}X = R_{c',X}c' + \nabla_{c'}T_{c',X}$$

qui est l'équation de Jacobi en présence d'une connexion avec torsion.

En particulier, dans le cas de la dimension 3, la seconde équation est donc l'équation de Jacobi, alors que la première garantit que la déformation reste parmi les géodésiques nulles.

Démonstration. — La condition (1.3) s'écrit

$$(\sigma(s) + i)f = 0, \quad f \in T_s F_0; \tag{1.6}$$

si on prend une famille à un paramètre $(F_0)_t$ vérifiant cette propriété, avec en $t = 0$ le vecteur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial t} = X$, alors les crochets de X avec les vecteurs de F_0 sont nuls, donc, pour tout vecteur tangent f de F_0,

$$\nabla_X f = \nabla_f X + T_{X,f};$$

la différentiation de la condition (1.6) donne alors

$$\dot\sigma f + (\sigma(s) + i)(\nabla_f X + T_{X,f}) = 0. \tag{1.7}$$

Observons que, puisque la structure complexe σ est constante le long d'une feuille F_0 (et nous poserons $I_1 = \sigma$ pour simplifier les notations), la connexion ∇ préserve, le long de F_0, la décomposition (1.5) ; aussi $(\sigma(s)+i)\nabla_f X$ ne fait pas intervenir la composante de X sur $T^{0,1}_{I_1}$. De plus, si $X \in T^{0,1}_{I_1}$, alors on peut écrire $2X = X + iI_1X$ et $2f = f + iI_1 f$, et

$$(1.8)\qquad \begin{aligned} 8(T_{f,X})^{1,0,1/2} &= T_{f+iI_1f,X+iI_1X} - iI_1T_{f+iI_1f,X+iI_1X} \\ &= (1-iI_1)\big(T_{f,X} - T_{I_1f,I_1X} + I_1(T_{f,I_1X} + T_{I_1f,X})\big); \end{aligned}$$

cette quantité s'annule comme on l'a vu dans la section II.5.C. Il en résulte que l'équation (1.7) est vide sur $X^{0,1}_{I_1}$, comme attendu, et donc porte uniquement sur l'image de X dans le fibré normal $TS^{\mathbb{C}}/T^{0,1}_{I_1} = T^{1,0,1/2}_{I_1}S^{\mathbb{C}}$, préservé par ∇ au-dessus de F_0 ; en utilisant la décomposition (1.5), on en déduit la première équation demandée.

Pour la seconde équation, il suffit de différentier, dans les mêmes conditions, l'équation (1.4), à savoir

$$\nabla_f\sigma = 0, \quad f \in TF_0;$$

je laisse au lecteur le soin de reproduire dans notre situation le calcul classique qui mène, dans le cas des géodésiques, à l'équation de Jacobi. □

III.1.C. Géométrie de l'espace des feuilles. — Nous étudions à présent la géométrie de l'espace des feuilles $\mathcal{N}$, qui est appelé à devenir l'espace des twisteurs de la variété quaternion-kählérienne que nous voulons construire.

Courbes $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$. — Puisque le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres de π, pour tout point $x \in S^{\mathbb{C}}$, on dispose d'une courbe

$$\mathcal{C}_s = q(\pi^{-1}(s)) \subset \mathcal{N}.$$

Les $(\mathcal{C}_s)_{s\in S^{\mathbb{C}}}$ (appelées *sphères célestes* par LeBrun dans le cas de la dimension 3) constituent une famille de courbes de dimension $4m+3$. Le lemme suivant permettra de compléter la famille.

Lemme III.1.8. — *Le fibré normal d'une courbe $\mathcal{C}_s$ dans $\mathcal{N}$ est $\mathcal{O}(1)\otimes\mathbb{C}^{2m+2}$. Par conséquent, la famille de dimension $4m+3$ des courbes $(\mathcal{C}_s)_{s\in S^{\mathbb{C}}}$ se complète localement de manière unique en une famille de dimension $4m+4$, que nous noterons $M^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Le fibré normal à la courbe $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{N}$ n'est autre que

$$T\mathcal{T}^c_s/(\mathrm{Hor}^\nabla \cap T^{0,1}_J) = \pi^*V^{\mathbb{C}}/V^{0,1}_J \oplus \pi^*W^{\mathbb{C}}/W^{0,1}_J;$$

d'après le lemme III.1.2, on a

$$\pi^*V^{\mathbb{C}}/V^{0,1}_J = \mathcal{O}(1)\otimes\mathbb{C}^{2m},$$

tandis que, comme en dimension 3 (voir par exemple [**LeB82**, théorème 3.12]),

$$\pi^*W^{\mathbb{C}}/W^{0,1}_J = \mathcal{O}(1)\oplus\mathcal{O}(1).$$

Cela montre l'assertion sur le fibré normal ; la seconde assertion résulte alors du théorème de Kodaira. □

Structure de contact. — Nous définissons à présent une structure de contact (holomorphe) sur $\mathcal{N}$. Définissons tout d'abord un fibré holomorphe en droites L qui est le tangent aux fibres de $\pi : \mathcal{T}^c \to S^{\mathbb{C}}$; en particulier, sur une fibre $\mathcal{T}^c_s$, on a

$$L|_{\mathcal{T}^c_s} = \mathcal{O}(2).$$

La 1-forme qui au point I_1 de $\mathcal{T}^c$ vaut $\eta_2 + i\eta_3$ s'étend en une 1-forme holomorphe η^c à valeurs dans le fibré L. De manière plus précise, si on prend sur la sphère $\mathbb{S}^2$ une coordonnée holomorphe (obtenue par projection stéréographique)

$$\zeta = \frac{y + iz}{1 + x},$$

alors la forme η^c est définie par la formule

$$\eta^c = (\eta_2 + i\eta_3) + 2\zeta\eta_1 - \zeta^2(\eta_2 - i\eta_3). \tag{1.9}$$

Cette formule montre que η^c est bien une forme holomorphe.

Puisque η^c est de type $(1, 0)$ par rapport à J, il est clair que η^c annule le feuilletage $\mathcal{F}$. En réalité, on a le lemme plus fort suivant.

Lemme III.1.9. — *La* 1*-forme η^c à valeurs dans L descend sur l'espace des feuilles $\mathcal{N}$ en une structure de contact.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le noyau de η^c descend sur $\mathcal{N}$. Pour cela, nous prenons une feuille intégrale $F = (F_0, \sigma)$ du feuilletage $\mathcal{F}$; pour simplifier les notations, nous choisissons des structures complexes (I_1, I_2, I_3) le long de F_0 de sorte que $I_1 = \sigma$; ainsi I_1 est-elle parallèle le long de F_0. Par conséquent, il existe une 1-forme α sur F_0, telle que

$$(\nabla I_2)|_{F_0} = \alpha I_3, \quad (\nabla I_3)|_{F_0} = -\alpha I_2.$$

Au niveau des vecteurs R_i correspondants, compte tenu des propositions II.1.9 et de la définition II.2.8, cela signifie que l'on a les mêmes relations ; la base duale (η_1, η_2, η_3) satisfait donc les mêmes relations, avec α transformée en $-\alpha$. En particulier,

$$\big(\nabla(\eta_2 + i\eta_3)\big)|_{F_0} = i\alpha \otimes (\eta_2 + i\eta_3).$$

Considérons à présent une déformation infinitésimale de la feuille F, donnée par un champ de vecteurs X le long de F_0 satisfaisant les équations du lemme III.1.6. Compte tenu de sa définition par (1.9), la forme η^c le long de F_0 se réduit à $\eta_2 + i\eta_3$. Étant donné un champ de vecteurs f sur F_0, on a le calcul

$$\begin{aligned} f \cdot \big((\eta_2 + i\eta_3)(X)\big) &= i\alpha_f(\eta_2 + i\eta_3)(X) + (\eta_2 + i\eta_3)(\nabla_f X) \\ &= i\alpha_f(\eta_2 + i\eta_3)(X) + i(\eta_2 + i\eta_3)(T^{1,0,1/2}_{f,X} + \frac{1}{2}\dot\sigma f). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Mais $f \in V^{0,1}_{I_1} \oplus \mathbb{C}(R_2 + iR_3)$ et $\dot\sigma \in \mathbb{R}I_2 \oplus \mathbb{R}I_3$, si bien qu'on vérifie facilement $(\eta_2 + i\eta_3)(\dot\sigma f) = 0$. D'autre part, on peut supposer X de type $(1, 0, 1/2)$, et on obtient la formule similaire à (1.8),

$$8T_{f,X}^{1,0,1/2} = (1 - iI_1)\big(T_{f,X} + T_{I_1 f, I_1 X} + I_1(-T_{f,I_1 X} + T_{I_1 f,X})\big);$$

Il y a deux cas dans lesquels la torsion $T_{f,X}^{1,0,1/2}$ est susceptible d'avoir une composante non triviale sur $W^{\mathbb{C}}$:

- d'une part, quand f et X sont dans $V^{\mathbb{C}}$,

$$T_{f,X} + T_{I_1 f, I_1 X} = 2d\eta_1(f,X)R_1,$$

  donc on déduit $(\eta_2 + i\eta_3)T_{f,X}^{1,0,1/2} = 0$;
- d'autre part, quand f et X sont dans $W^{\mathbb{C}}$, on calcule la torsion par la formule (2.20), ce qui donne

$$(T_{R_2+iR_3, R_2-iR_3})_{W^{\mathbb{C}}} = -2iT_{R_2,R_3} = -4i\lambda R_1,$$
$$(T_{R_2+iR_3,R_1})_{W^{\mathbb{C}}} = 2\lambda(-R_3 + iR_2);$$

  à nouveau, on obtient à chaque fois $(\eta_2 + i\eta_3)T_{f,X}^{1,0,1/2} = 0$.

Finalement, notre équation (1.10) se réduit à

$$f \cdot \big((\eta_2 + i\eta_3)(X)\big) = i\alpha_f(\eta_2 + i\eta_3)(X),$$

ce qui prouve que le noyau de η^c est constant le long de F_0, et descend donc à $\mathcal{N}$.

Il reste à voir que la structure induite sur $\mathcal{N}$ est bien de contact. Il suffit de le vérifier sur $\mathcal{T}^c$; or, compte tenu de la définition (1.9), on a le long de F_0 l'égalité

$$d\eta^c = d\eta_2 + id\eta_3 + (dy + idz) \wedge \eta_1;$$

il s'agit de vérifier que c'est bien symplectique sur

$$\ker \eta^c/TF = V^{\mathbb{C}}/V_{I_1}^{0,1} \oplus \mathbb{C}R_1 \oplus (\mathbb{R}I_2 \oplus \mathbb{R}I_3);$$

le morceau $d\eta_2 + id\eta_3$ est symplectique sur $V_{I_1}^{1,0}$ et le morceau $(dy + idz) \wedge \eta_1$ sur $\mathbb{C}R_1 \oplus (\mathbb{R}I_2 \oplus \mathbb{R}I_3)$; le lemme est donc démontré. □

Le lemme suivant caractérise les champs de plans de la structure de contact de $\mathcal{N}$.

Lemme III.1.10. — *Les champs de plans de contact de $\mathcal{N}$ sont engendrés par les sphères célestes $\mathcal{C}_s$, $s \in S^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Soit une feuille F, nous voulons vérifier que $\ker \eta^c$ est engendré par les $(\mathcal{C}_s)_{s\in F_0}$, où $F_0 = \pi(F)$; pour cela, nous devons tout ramener en un point $s_0 \in F_0$; faisons à nouveau un choix de trivialisation locale (I_1, I_2, I_3) près de s_0, de sorte que $J|_F = I_1$ est parallèle ; pour $x \in F$ proche de $x_0 = \sigma(s_0)$, l'espace tangent à $T_{\pi(x)}$ en x n'est autre que $\mathbb{R}I_2 \oplus \mathbb{R}I_3$; ramenons par transport parallèle I_2 dans le normal à F en x_0 : l'application fournie par ce transport parallèle τ,

$$x \longmapsto \tau_{x\to x_0} I_2 \in N_{x_0}$$

a pour différentielle, d'après le lemme III.1.6,

$$\dot{x} \in T_{s_0}F_0 \longmapsto -\frac{1}{2} i I_2 \dot{x} \in TS^{\mathbb{C}}/T^{0,1}_{I_1};$$

comme

$$I_2(T^{0,1}_{I_1}) = V^{1,0}_{I_1} \oplus \mathbb{C}R_1,$$

toutes les directions normales, proches de I_2 et éléments du noyau de η^c, sont engendrées par des sphères $\mathcal{C}_s$ pour $s \in F_0$ proche de s_0 ; ainsi les espaces tangents des sphères célestes engendrent-ils tout le noyau de η^c. □

Transversalité des courbes à la structure de contact. — Si les courbes $\mathcal{C}_s$ pour $s \in S^{\mathbb{C}}$ sont tangentes aux distributions de contact, cela ne sera plus le cas en général pour une courbe $\mathcal{C}_m$ pour $m \in M^{\mathbb{C}}$. La structure de contact sur $\mathcal{N}$ est donnée par une 1-forme holomorphe à valeurs dans un fibré L ; je l'appelle encore L car il est clair que son tiré-en-arrière sur $\mathcal{T}^c$ n'est autre que le fibré L déjà défini plus haut, et je note encore η^c la forme de contact. Sur chaque courbe $\mathcal{C}_s$ ($s \in S^{\mathbb{C}}$), et donc plus généralement sur les courbes $\mathcal{C}_m$ ($m \in M^{\mathbb{C}}$), le fibré L s'identifie au fibré $\mathcal{O}(2)$; en particulier, la forme de contact η^c à valeurs dans L, restreinte au tangent de $\mathcal{C}_m$, fournit sur $\mathcal{C}_m$ un élément de $H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes L)$. Définissons un fibré en droites $\mathcal{L}$ sur $M^{\mathbb{C}}$ par

$$\mathcal{L}_m = H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes L),$$

et notons Θ la section définie par η^c. Observons que $\Theta(m) = 0$ si et seulement si $\mathcal{C}_m$ est tangente à la distribution de contact.

Lemme III.1.11. — *La structure de contact sur $\mathcal{N}$ est transverse aux sphères célestes $(\mathcal{C}_s)_{s \in S^{\mathbb{C}}}$, c'est-à-dire la différentielle de Θ sur $S^{\mathbb{C}}$ est non dégénérée. En particulier, $S^{\mathbb{C}} = \Theta^{-1}(0)$ est une hypersurface lisse de $M^{\mathbb{C}}$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que la différentielle $d\Theta$ est non dégénérée en un point $s \in S^{\mathbb{C}}$. Pour cela, on va exhiber une section φ du fibré normal de $\mathcal{C}_s \subset \mathcal{N}$, qui vérifie les conditions

- $\varphi \in \ker \eta^c$;
- $d\eta^c(\varphi, X) \neq 0$ pour un vecteur tangent X à $\mathcal{C}_s$;

ces deux conditions impliquent que $d\Theta$ est non nulle sur le vecteur tangent à $M^{\mathbb{C}}$ induit par φ.

La solution est simple : il suffit de considérer

$$\varphi(xI_1 + yI_2 + zI_3) = xR_1 + yR_2 + zR_3; \tag{1.11}$$

bien sûr, la section φ n'est pas holomorphe ! cependant, elle le devient après projection sur $T\mathcal{T}^c/T^{0,1}_J$; en effet, par exemple au point I_1, on a

$$d\varphi = dyR_2 + dzR_3 = \frac{1}{2}\big((dy + idz)(R_2 - iR_3) + (dy - idz)(R_2 + iR_3)\big)$$

donc seul le terme $(dy + idz)(R_2 - iR_3)$, de type $(1,0)$, demeure après projection ; ainsi φ définit bien une section du fibré normal, qui est manifestement dans le noyau de η^c. À présent, la différentielle, par exemple au point I_1, de la forme η^c, est

$$d\eta^c = d\eta_2 + id\eta_3 + (dy + idz) \wedge \eta_1, \tag{1.12}$$

d'où résulte immédiatement la seconde propriété cherchée sur φ. □

III.1.D. Globalisation. — Remarquons que l'on peut supposer que la complexification $S^{\mathbb{C}}$ vient avec une structure réelle, dont les points fixes sont les points de S. Cette structure réelle est compatible à toutes les constructions faites plus haut. En particulier, on notera M l'espace des points réels de $M^{\mathbb{C}}$: c'est une variété (localement définie) de dimension $4m + 4$.

D'autre part, l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ de S, devient, via la projection q, une sous-variété de codimension 1 de $\mathcal{N}$, et la structure CR de $\mathcal{T}$ est fournie par l'inclusion ; cela montre que $\mathcal{T}$ (et donc S) détermine le germe de $\mathcal{N}$, comme variété complexe ; de plus, les sphères célestes $(\mathcal{C}_s)_{s\in S^{\mathbb{C}}}$ déterminent aussi le germe de $M^{\mathbb{C}}$ par le théorème de Kodaira (lemme III.1.8) ; enfin, le germe de la structure de contact est aussi déterminé de manière unique grâce au lemme III.1.11. Cela signifie que nos constructions sont canoniques au niveau des germes ; a priori locales, elles se recollent donc le long de S. De plus, elles sont indépendantes du choix de facteur conforme sur S, puisque l'espace des twisteurs $\mathcal{T}$ est invariant conforme par le théorème II.5.1.

Compte tenu que $\mathcal{N}$ est munie de la famille $M^{\mathbb{C}}$ de courbes à fibré normal $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2m+2}$, de la structure de contact η^c, et que ces courbes sont transverses aux directions de contact en dehors de $S^{\mathbb{C}}$, nous pouvons appliquer la construction twistorielle de Salamon **[Sal82]** (voir **[LeB89]** pour la construction inverse dont on a besoin ici). On en déduit la proposition suivante.

Proposition III.1.12. — *Si S^{4m+3} est une variété munie d'une structure de contact quaternionienne conforme, analytique réelle, alors S est le bord d'une variété analytique réelle unique M, telle que*

- *$M - S$ admette une métrique quaternion-kählérienne ;*
- *l'espace des twisteurs de $M - S$ (avec sa forme de contact et sa famille de sphères $\mathbb{S}^2$) s'étend sur S et y coïncide avec l'espace des twisteurs CR de S.*

Démonstration. — La seule chose restant à voir est que l'espace des points réels de $M^{\mathbb{C}}$ a deux composantes connexes, séparées par S ; comme S a une orientation canonique (puisque V est orienté par sa Sp_mSp_1-structure et W par $\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \eta_3$), on peut choisir canoniquement un côté. □

III.2. Construction twistorielle inverse

À partir de l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ construit dans la section précédente, nous allons étudier, par la construction twistorielle inverse, la métrique induite sur M, de sorte d'élucider les liens entre cette métrique est la structure quaternionienne initiale. Cette étude est partiellement similaire à celle faite par Le Brun dans [**LeB91**], où il regarde les métriques obtenues après certaines déformations globales de l'espace des twisteurs de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}\mathbf{H}^{m+1}$; mais Le Brun n'avait pas étudié les objets induits au bord par ses exemples.

Nous donnons donc un énoncé abstrait, sans supposer a priori que l'espace des twisteurs provient de la construction faite dans la section III.1. Cet énoncé montre donc, en particulier, que les métriques produites par Le Brun sont asymptotiquement symétriques ; cela fournit un nombre important d'exemples de telles métriques quaternion-kählériennes, et donc de structures de contact quaternioniennes.

Proposition III.2.1. — *Soit $\mathcal{N}$ une variété complexe de dimension $2m+3$, munie*

- *d'une structure de contact η^c à valeurs dans un fibré L ;*
- *d'une famille de dimension $2m+2$ de courbes $(\mathcal{C}_m)_{m\in M^{\mathbb{C}}}$, de fibré normal $\mathcal{O}(1)\otimes\mathbb{C}^{2m+2}$, telle que les courbes $\mathcal{C}_m$ soient transverses à la distribution de contact sauf sur une hypersurface $S^{\mathbb{C}}\subset M^{\mathbb{C}}$;*
- *d'une structure réelle compatible à ces données (et fournissant une métrique positive).*

Alors $\mathcal{N}$ est l'espace des twisteurs de la variété quaternion-kählérienne $M-S$, et la métrique est asymptotiquement symétrique, avec infini conforme une structure de contact quaternionienne dont l'espace des twisteurs CR est $\mathcal{N}|_S$.

Dans le cas où $\mathcal{N}$ provient, via la proposition III.1.12, d'une structure de contact quaternionienne, alors l'infini conforme de la métrique coïncide avec la structure de contact quaternionienne initiale.

Remarque III.2.2. — Dans le cas où $\mathcal{N}$ provient de la construction twistorielle faite dans la section III.1, la transversalité est donnée par le lemme III.1.11. En réalité, cette transversalité est toujours satisfaite [**LeB91**, proposition 1].

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de la proposition. Certains énoncés sont parallèles à ceux donnés par Le Brun dans sa construction twistorielle [**LeB91**].

III.2.A. Construction de la métrique. — Nous expliquons brièvement la construction de la métrique quaternion-kählérienne à partir des données twistorielles. La plupart des faits ci-dessous sont standards [**LeB89**].

Rappelons que l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ est muni d'une 1-forme de contact η^c, à valeurs dans le fibré L. Sur chaque courbe $\mathcal{C}_m\subset\mathcal{T}^c$ ($m\in M^{\mathbb{C}}$), le fibré L est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, et le fibré normal de $\mathcal{C}_m$ est isomorphe à $\mathcal{O}(1) \otimes \mathbb{C}^{2m+2}$ par le lemme III.1.8. On peut donc définir des fibrés E et H, à fibres $\mathbb{C}^{2(m+1)}$ et $\mathbb{C}^2$, par

$$\begin{aligned} E_m &= H^0(\mathcal{C}_m, L^{-1/2} \otimes N_m), \\ H_m &= H^0(\mathcal{C}_m, L^{1/2}); \end{aligned}$$

à cause de la racine carrée de L, ces fibrés risquent de n'être définis que localement ; cependant, le résultat final ne dépend pas du choix de $L^{1/2}$. Puisque L s'identifie à $\mathcal{O}(2)$, on a

$$T_m M^{\mathbb{C}} = H^0(\mathcal{C}_m, N_m) = E_m \otimes H_m.$$

Les fibrés E et H sur $M^{\mathbb{C}} - S^{\mathbb{C}}$ admettent des formes symplectiques ω_E et ω_H, définies par :

- puisque $N_m = (\ker \eta^c)|_{\mathcal{C}_m}$ si $m \notin S^{\mathbb{C}}$, on peut poser

$$\omega_E = d\eta^c;$$

- la forme ω_H est obtenue par composition

$$\Lambda^2 H^0(\mathcal{C}_m, L^{1/2}) \xrightarrow{w} \mathcal{L}_m = H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes L) \xrightarrow{\Theta^{-1}} \mathbb{C},$$

  où le wronskien est défini par $w(u \wedge v) = udv - vdu$, et Θ, définie avant le lemme III.1.11, est la section de $\mathcal{L}$ induite par η^c (elle s'annule exactement sur $S^{\mathbb{C}}$).

Enfin, la métrique (complexe) sur $M^{\mathbb{C}}$ est fournie par multiplication :

$$g = \omega_E \otimes \omega_H.$$

Les formes symplectiques fournissent sur E et H des $Sp_m(\mathbb{C})$ et $Sp_1(\mathbb{C})$-structures, et on montre que g préserve la $Sp_m(\mathbb{C})Sp_1(\mathbb{C})$-structure induite.

On peut retrouver plus directement les trois 2-formes de la $Sp_m(\mathbb{C})Sp_1(\mathbb{C})$-structure de la manière suivante. Puisque, sur chaque courbe, L est isomorphe à $\mathcal{O}(2)$, on a

$$H^0(\mathcal{C}_m, L) = \mathrm{Sym}^2 H^0(\mathcal{C}_m, L^{1/2}) = \mathrm{Sym}^2 H_m;$$

la $Sp_1(\mathbb{C})$-structure sur H induit une $SO_3(\mathbb{C})$-structure sur $\mathrm{Sym}^2 H$, c'est-à-dire une métrique et une orientation ; à présent, puisque $N_m = \ker \eta^c$ en dehors de $S^{\mathbb{C}}$, la 2-forme $d\eta^c$ sur N_m, à valeurs dans L, définit une application

$$H^0(\mathcal{C}_m, N_m) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Sym}^2 H_m; \tag{2.1}$$

le choix d'une $SO_3(\mathbb{C})$-trivialisation de $\mathrm{Sym}^2 H_m$ fournit trois 2-formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ qui définissent aussi la structure quaternionienne.

III.2.B. Comportement à l'infini. — Nous étudions, sous les hypothèses de la proposition III.2.1, le comportement de la métrique g sur l'hypersurface $S^{\mathbb{C}}$.

Lemme III.2.3 (**[LeB91**, page 736]). — *La métrique g s'étend analytiquement sur $S^{\mathbb{C}}$ avec un pôle d'ordre 2.*

Démonstration. — Les formes symplectiques ω_E et ω_H ne sont pas définies sur $S^{\mathbb{C}}$, mais, en les multipliant par Θ, on peut les prolonger. En effet, $d\eta^c$ n'est pas bien défini sur $\Lambda^2 N_m$ qui est distinct de $\ker \eta^c$ si $m \in S^{\mathbb{C}}$, mais $\eta^c \wedge d\eta^c$ l'est, et

$$(\Theta\omega_E)_m = \eta^c \wedge d\eta^c \quad \in H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes \Lambda^2 N_m^* \otimes L^2) = \mathcal{L}_m \otimes \Lambda^2 E_m^*; \tag{2.2}$$

de la même manière,

$$(\Theta\omega_H)_m = w \quad \in \mathcal{L}_m \otimes \Lambda^2 H_m^* \tag{2.3}$$

est parfaitement défini sur $S^{\mathbb{C}}$ aussi. Ainsi, la métrique

$$\Theta^2 g = (\Theta\omega_E) \otimes (\Theta\omega_H)$$

à valeurs dans le fibré $\mathcal{L}^2$, est lisse ; comme Θ s'annule à l'ordre 1 sur $S^{\mathbb{C}}$ par le lemme III.1.11, on en déduit le lemme. □

La première partie du lemme suivant vient aussi de l'article de Le Brun.

Lemme III.2.4. — *Sur $S^{\mathbb{C}}$, la forme $\Theta\omega_E$ a un noyau de codimension 2, égal au point $s \in S^{\mathbb{C}}$ à*

$$H^0(\mathcal{C}_s, (N_s \cap (\ker \eta^c) \cap (T\mathcal{C}_s)^{\perp_{d\eta^c}}) \otimes L^{-1/2}).$$

Dans le cas où l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ provient de la proposition III.1.12, alors ce noyau est encore égal à

$$H^0(\mathcal{C}_s, (V^{\mathbb{C}}/V_J^{0,1}) \otimes L^{-1/2}).$$

Démonstration. — Soit u un vecteur tangent à $\mathcal{C}_s$, et $\sigma, \tau \in H^0(\mathcal{C}_s, N_s \otimes L^{-1/2})$, alors on a

$$(\eta^c \wedge d\eta^c)(u, \sigma, \tau) = -\eta^c(\sigma) d\eta^c(u, \tau) + \eta^c(\tau) d\eta^c(u, \sigma); \tag{2.4}$$

par conséquent, d'après (2.2), la section σ représente un élément du noyau de $\Theta\omega_E$ si on a les deux conditions

$$\eta^c(\sigma) = 0,$$
$$d\eta^c(u, \sigma) = 0, \quad u \in T\mathcal{C}_s;$$

cela montre la première partie du lemme.

Quand l'espace des twisteurs provient de la construction de la section III.1, il faut se rappeler que si $s \in S^{\mathbb{C}}$, alors le fibré normal se décompose en

$$N_s = V^{\mathbb{C}}/V_J^{0,1} \oplus W^{\mathbb{C}}/W_J^{0,1};$$

la section φ définie en (1.11) donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}\varphi \longrightarrow W^{\mathbb{C}}/W_J^{0,1} \xrightarrow{\eta^c} L \to 0;$$

ainsi, on a l'identification

$$N_s \cap \ker \eta^c = V^{\mathbb{C}}/V_J^{0,1} \oplus \mathbb{C}\varphi;$$

le calcul (1.12) montre que l'intersection avec l'orthogonal de $T\mathcal{C}_s$ se réduit à $V^{\mathbb{C}}/V_J^{0,1}$. □

En revanche, il est clair que la forme $\hat{\omega}_H$ est non dégénérée sur $S^{\mathbb{C}}$. Il en résulte que la métrique $\Theta^2 g$, à valeurs dans $\mathcal{L}^2$, a sur $S^{\mathbb{C}}$ un noyau de codimension 4. On va étudier plus précisément les termes singuliers de g sur $S^{\mathbb{C}}$.

III.2.C. Reconstruction de la métrique de Carnot-Carathéodory. — On explique à présent comment récupérer les données initiales à partir de l'espace des twisteurs. Comme on l'a vu, la section Θ de $\mathcal{L}$ s'annule sur $S^{\mathbb{C}}$; nous sommes donc amenés à faire un choix de trivialisation de $\mathcal{L}$ sur $S^{\mathbb{C}}$, équivalent au choix d'un facteur conforme, en choisissant localement

$$\ell : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Ce choix effectué, on dispose le long de $S^{\mathbb{C}}$ d'une forme symplectique sur H définie par

$$\hat{\omega}_H : \Lambda^2 H^0(\mathcal{C}_m, L^{1/2}) \xrightarrow{\ w\ } H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes L) \xrightarrow{\ \ell\ } \mathbb{C};$$

par conséquent, on dispose d'une $SO_3(\mathbb{C})$-métrique sur $\operatorname{Sym}^2 H$; en particulier, on peut trouver une $SO_3(\mathbb{C})$-trivialisation locale,

$$\operatorname{Sym}^2 H \xrightarrow{\ \sim\ } \mathbb{C}^3. \tag{2.5}$$

Termes d'ordre −2. — Il est alors facile de définir trois 1-formes (η_1, η_2, η_3) sur $X^{\mathbb{C}}$ le long de $S^{\mathbb{C}}$, par

$$H^0(\mathcal{C}_s, N_s) \xrightarrow{\ \eta^c\ } H^0(\mathcal{C}_s, L) = \operatorname{Sym}^2 H \longrightarrow \mathbb{C}^3; \tag{2.6}$$

de plus, quitte à étendre un peu la trivialisation ℓ autour de $S^{\mathbb{C}}$, la section Θ de $\mathcal{L}$ fournit une fonction

$$\rho = \ell\Theta : X^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui s'annule uniquement sur $S^{\mathbb{C}}$.

Lemme III.2.5. — *Le long de $S^{\mathbb{C}}$, la forme quadratique $\ell^2\Theta^2 g$ est donnée par*

$$\ell^2\Theta^2 g = d\rho^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^3.$$

Démonstration. — On peut choisir une section φ du fibré normal N_s d'une courbe $\mathcal{C}_s$ au-dessus de $s \in S^{\mathbb{C}}$, vérifiant $\eta^c(\varphi) = 0$ et $i_\varphi d\eta^c|_{T\mathcal{C}_s} \neq 0$; un exemple de telle section avait été donné dans le lemme III.1.11 ; la section $i_\varphi d\eta^c|_{T\mathcal{C}_s}$ constitue un élément de $\mathcal{L}_s$, donc on peut normaliser φ de sorte que

$$\ell(i_\varphi d\eta^c|_{T\mathcal{C}_s}) = 1.$$

Si u est tangent à $\mathcal{C}_s$ et σ est une section du fibré normal N_s, alors l'équation (2.4) nous donne

$$\eta^c \wedge d\eta^c(u, \varphi, \sigma) = \eta^c(\sigma) i_\varphi d\eta^c(u),$$

c'est-à-dire

$$i_\varphi \Theta d\eta^c = \eta^c.$$

Or, les trois 2-formes de la structure quaternion-kählérienne sont obtenues en composant $d\eta^c$, à valeurs dans L, avec une trivialisation de $H^0(\mathcal{C}_m, L)$, orthonormale pour la métrique $\omega_H \otimes \omega_H$; comme $\hat{\omega}_H = \ell\Theta\omega_H$, on déduit de l'égalité précédente

$$i_\varphi \ell^2 \Theta^2 \omega_i = \eta_i,$$

d'où résulte le lemme. □

Termes d'ordre -1. — La métrique g induit des termes d'ordre -1 intrinsèques sur le noyau des termes d'ordre -2. Appelons ce noyau

$$V^{\mathbb{C}} := \ker(d\rho, (\eta_i)) = H^0\big(\mathcal{C}_s, N_s \cap (\ker \eta^c) \cap (T\mathcal{C}_s)^{\perp_{d\eta^c}}\big).$$

Dans le cas où l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ provient de la construction de la section III.1, la notation est cohérente, puisque, par le lemme III.2.4, on retombe bien sur l'espace $V^{\mathbb{C}}$ initial.

Le long de $S^{\mathbb{C}}$, la forme $d\eta^c$, à valeurs dans L, induit une 2-forme non dégénérée $\hat{\omega}_E$ définie par

$$\Lambda^2 H^0(\mathcal{C}_s, (\ker \Theta\omega_E) \otimes L^{-1/2}) \xrightarrow{d\eta^c} \mathcal{L}_s \xrightarrow{\ell} \mathbb{C}.$$

Par conséquent, $V^{\mathbb{C}}$ est muni de la métrique

$$g_{V^{\mathbb{C}}} = \hat{\omega}_H \otimes \hat{\omega}_E.$$

De manière similaire à (2.1), en utilisant la trivialisation (2.5), la $Sp_m(\mathbb{C})Sp_1(\mathbb{C})$-structure induite est obtenue par trois 2-formes $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ sur $V^{\mathbb{C}}$.

Lemme III.2.6. — *Les formes ω_i sur $V^{\mathbb{C}}$ sont reliées aux 1-formes η_i définies en (2.6) par*

$$\omega_i = (d\eta_i)|_{V^{\mathbb{C}}}.$$

En particulier, la métrique $g_{V^{\mathbb{C}}}$ est une métrique de Carnot-Carathéodory (complexe).

Démonstration. — En un point $s \in S^{\mathbb{C}}$, si X et Y sont deux vecteurs de $V^{\mathbb{C}}$, correspondant à des sections σ_X et σ_Y de $N_s \cap (\ker \eta^c) \cap (T\mathcal{C}_s)^{\perp_{d\eta^c}}$, alors les $\omega_i(X, Y)$ sont obtenus comme l'image par la trivialisation (2.5) de $d\eta^c(\sigma_X, \sigma_Y) = -\eta^c([\sigma_X, \sigma_Y]) \in H^0(\mathcal{C}_s, L)$. La seule chose à montrer est donc

$$\eta^c(\sigma_{[X,Y]}) = \eta^c([\sigma_X, \sigma_Y]),$$

identité que le lecteur établira sans difficulté en considérant la fibration double dont est munie la variété d'incidence

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} & \mathcal{C} = \{(m, x), m \in M^{\mathbb{C}}, x \in \mathcal{C}_m \subset \mathcal{N}\} \arrow[l] \arrow[d] \\ & M^{\mathbb{C}} \end{tikzcd}$$

□

III.2.D. Démonstration de la proposition III.2.1. — À partir des deux lemmes précédents, nous avons élucidé les termes d'ordre -2 et -1 près de $S^{\mathbb{C}}$ de la métrique g, issue de la construction twistorielle. On en déduit le lemme suivant.

Lemme III.2.7. — *Sous les hypothèses de la proposition III.1.12, la métrique g a près de $S^{\mathbb{C}}$ le comportement*

$$g \sim \frac{1}{\rho^2}(d\rho^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \rho g_{V^{\mathbb{C}}}).$$

En particulier, g est asymptotiquement symétrique et a pour infini conforme la structure de contact quaternionienne initiale.

Démonstration. — Les deux lemmes précédents montrent que, près de $S^{\mathbb{C}}$,

$$g = \frac{g_{-2}}{\rho^2} + \frac{g_{-1}}{\rho} + \cdots$$

avec

$$g_{-2} = d\rho^2 + \sum_1^3 \eta_i^2, \quad g_{-1}|_{\ker g_{-2}} = g_{V^{\mathbb{C}}}.$$

Les termes d'ordre -1 qui n'ont pas été calculés sont, par rapport à la métrique, d'un ordre inférieur, d'où résulte le lemme. □

La première partie de la proposition III.2.1 résulte immédiatement de ce lemme, en prenant la partie réelle de $M^{\mathbb{C}}$. Dans le cas où l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ provenait de la construction de la section III.1, la description (2.6) des trois 1-formes de contact η_i sur $S^{\mathbb{C}}$ montre qu'elles réalisent un isomorphisme

$$H^0(\mathcal{C}_s, W^{\mathbb{C}}/(W_J^{0,1} \oplus \mathbb{C}\varphi)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^3,$$

où φ est la section donnant un vecteur «normal» à $S^{\mathbb{C}}$, définie dans la démonstration du lemme III.1.11. Cet isomorphisme coïncide avec l'identification initiale de $W^{\mathbb{C}}$

avec $\mathbb{C}^3$. La métrique de Carnot-Carathéodory conforme au bord est donc bien la même. □

III.3. Métriques quaternion-kählériennes asymptotiquement symétriques

Nous concluons ce chapitre par l'énoncé que nous voulions, qui est une conséquence directe des deux propositions III.1.12 et III.2.1.

Théorème III.3.1. — *Soit une variété S^{4m+3}, avec $m \geqslant 2$, munie d'une structure de contact quaternionienne. Alors S est l'infini conforme d'une unique métrique quaternion-kählérienne, asymptotiquement symétrique et analytique réelle jusqu'au bord.*

Démonstration. — La proposition III.1.12 construit l'espace des twisteurs, et la proposition III.2.1 montre qu'il s'agit bien d'une métrique asymptotiquement symétrique, d'infini conforme la structure de contact quaternionienne initiale. L'énoncé d'unicité provient de l'énoncé d'unicité de la proposition III.1.12, puisque deux telles métriques ont un espace des twisteurs analytique jusqu'au bord, où il coïncide avec l'espace des twisteurs CR de S. □

Remarque III.3.2. — Dans le cas $m = 1$, le théorème reste valable, à condition de supposer de plus que S soit munie d'une connexion adaptée, comme discuté dans la section II.7.

Dans le cas $m = 0$, pour une métrique conforme sur S, le théorème est dû à Le Brun **[LeB82]**.

Remarque III.3.3. — Dans le cas où S est munie d'une structure 3-sasakienne (section II.2.D), le théorème devient trivial. En effet, dans ce cas, les formes de contact η_1, η_2 et η_3 satisfont des relations similaires à celles de l'espace hyperbolique quaternionien, si bien que la formule

$$g = dr^2 + \operatorname{sh}^2(2r)\eta^2 + \operatorname{sh}^2(r)\overline{g_V}$$

donne la métrique quaternion-kählérienne cherchée ; en effet, les identités indiquées dans la section II.2.D montrent que, par exemple, la première 2-forme ω_1 s'écrit

$$\omega_1 = dr \wedge \operatorname{sh}(2r)\eta_1 + \operatorname{sh}^2(2r)\eta_2 \wedge \eta_3 + \operatorname{sh}^2(r)(d\eta_1 - 4\eta_2 \wedge \eta_3);$$

on établit facilement l'identité

$$d\omega_1 = -(4\operatorname{ch}^2 r - 1)(\eta_2 \wedge \omega_3 - \eta_3 \wedge \omega_2),$$

qui montre, avec les identités obtenues par permutation circulaire, que la métrique g est bien quaternion-kählérienne.

Le théorème ne répond pas de manière exhaustive à la question de l'unicité : en effet, il me semble vraisemblable que toute métrique quaternion-kählérienne, asymptotiquement symétrique, soit analytique jusqu'au bord et donc coïncide avec la métrique construite par le théorème à partir de la même donnée au bord. Cependant, je n'ai pas traité ce problème de régularité ; à la place, je propose l'énoncé plus faible suivant, qui concerne exclusivement les métriques d'Einstein construites à partir des techniques du chapitre I.

Proposition III.3.4. — *Soit g_0 une métrique quaternion-kählérienne, asymptotiquement symétrique, telle que $L^2\mathbf{H}^1(g_0) = 0$. Si g_V est une $Sp_m Sp_1$-métrique de Carnot-Carathéodory sur S, proche de l'infini conforme de g_0, alors la métrique d'Einstein asymptotiquement symétrique g ayant pour infini conforme g_V (construite par le théorème I.4.14), vérifie à l'infini*

$$|g - \gamma| = O\big(e^{-(\mathcal{H}+\sqrt{\mathcal{H}^2+\nu}-\varepsilon)r}\big),$$

où $\mathcal{H} = 2m + 3$, $\nu = -8$, et γ est la métrique quaternion-kählérienne associée à g_V par le théorème III.3.1. Si g est quaternion-kählérienne, alors g coïncide avec γ, et est donc analytique réelle jusqu'au bord.

Démonstration. — Le principe de la preuve est très simple : on refait la démonstration du théorème I.4.14 en approximant la métrique d'Einstein g à trouver par γ plutôt que par une approximation d'ordre 1 ; cela donnera le même résultat à cause de l'unicité de la métrique d'Einstein. La démonstration du théorème continue à fonctionner en fournissant une solution différant de γ par un élément d'un espace à poids C_δ pourvu que l'opérateur de déformation infinitésimale $\frac{1}{2}(D^{g_0})^* D^{g_0} - \mathring{R}^{g_0}$ reste un isomorphisme pour le poids δ. D'après la proposition I.3.9, cela est vrai si

$$\delta < \mathcal{H} + \sqrt{\mathcal{H}^2 + \nu},$$

ce qui donne la proposition (attention, ce poids n'a pas de raison d'être optimal, voir la section I.3.C).

Dans le cas où g est de plus quaternion-kählérienne, puisque g est approximée à un ordre élevé par γ, il n'est pas difficile de vérifier que l'espace des twisteurs de g s'étend sur S, par exemple de manière C^1, et coïncide sur S avec l'espace des twisteurs CR ; il est alors analytique. Il ne reste plus qu'à déduire $g = \gamma$ de l'énoncé d'unicité du théorème III.3.1. □

BIBLIOGRAPHIE

[AC92] M. T. Anderson & J. Cheeger – « C^α-compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below », *J. Differential Geom.* **35** (1992), p. 265–281.

[And90] M. T. Anderson – « Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds », *Invent. Math.* **102** (1990), p. 429–445.

[BCG95] G. Besson, G. Courtois & S. Gallot – « Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative », *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), p. 731–799.

[Bes87] A. L. Besse – *Einstein manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[BG98] C. P. Boyer & K. Galicki – « 3-Sasakian manifolds », Essays on Einstein Manifolds (C. LeBrun & M. Wang, éds.), International Press, 1998, à paraître.

[Biq97] O. Biquard – « Métriques d'Einstein à cusps et équations de Seiberg-Witten », *J. reine angew. Math.* **490** (1997), p. 129–154.

[Biq98] O. Biquard – « Einstein deformations of hyperbolic metrics », Essays on Einstein Manifolds (C. LeBrun & M. Wang, éds.), International Press, 1998, à paraître.

[BK81] P. Buser & H. Karcher – *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque, vol. 81, Société Mathématique de France, Paris, 1981.

[Bon82] E. Bonan – « Sur l'algèbre extérieure d'une variété presque hermitienne quaternionique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **295** (1982), p. 115–118.

[CY80] S. Y. Cheng & S. T. Yau – « On the existence of a complete Kähler metric on non-compact complex manifolds and the regularity of Fefferman's equation », *Comm. Pure Appl. Math.* **33** (1980), p. 507–544.

[EMM91] C. L. Epstein, R. B. Melrose & G. A. Mendoza – « Resolvent of the Laplacian on strictly pseudoconvex domains », *Acta Math.* **167** (1991), p. 1–106.

[Fef76] C. L. FEFFERMAN – « Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains », *Ann. Math. (2)* **103** (1976), p. 395–416.

[FG85] C. L. FEFFERMAN & C. R. GRAHAM – « Conformal invariants », *The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984)*, Astérisque, vol. hors série, Société Mathématique de France, 1985, p. 95–116.

[FGR97] E. FALBEL, C. GORODSKI & M. RUMIN – « Holonomy of sub-Riemannian manifolds », *Int. J. Math.* **8** (1997), p. 317–344.

[FH91] W. FULTON & J. HARRIS – *Representation theory: a first course*, Springer-Verlag, 1991.

[GL91] C. R. GRAHAM & J. M. LEE – « Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball », *Adv. Math.* **87** (1991), p. 186–225.

[Her98] M. HERZLICH – « Scalar curvature and rigidity of odd-dimensional complex hyperbolic spaces », *Math. Ann.* **312** (1998), p. 641–657.

[HH97] E. HEBEY & M. HERZLICH – « Harmonic coordinates, harmonic radius and convergence of Riemannian manifolds », *Rend. Mat. Appl. (7)* **17** (1997), p. 569–605.

[Hit95] N. J. HITCHIN – « Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations », *J. Differential Geom.* **42** (1995), p. 30–112.

[JL89] D. JERISON & J. M. LEE – « Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem », *J. Differential Geom.* **29** (1989), p. 303–343.

[Koi78] N. KOISO – « Nondeformability of Einstein metrics », *Osaka J. Math.* **15** (1978), p. 419–433.

[LeB82] C. R. LEBRUN – « $\mathcal{H}$-space with a cosmological constant », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **380** (1982), p. 171–185.

[LeB89] C. LEBRUN – « Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry », *Math. Ann.* **284** (1989), p. 353–376.

[LeB91] C. LEBRUN – « On complete quaternionic-Kähler manifolds », *Duke Math. J.* **63** (1991), p. 723–743.

[LeB95] C. LEBRUN – « Einstein metrics and Mostow rigidity », *Math. Res. Lett.* **2** (1995), p. 1–8.

[Lee86] J. M. LEE – « The Fefferman metric and pseudohermitian invariants », *Trans. Amer. Math. Soc.* **296** (1986), p. 411–429.

[Lee88] J. M. LEE – « Pseudo-Einstein structures on CR manifolds », *Amer. J. Math.* **110** (1988), p. 157–178.

[Leu93] M. C. LEUNG – « Pinching theorem on asymptotically hyperbolic spaces », *Internat. J. Math.* **4** (1993), p. 841–857.

[LM82] J. M. LEE & R. B. MELROSE – « Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation », *Acta Math.* **148** (1982), p. 159–192.

[Maz91] R. MAZZEO – « Elliptic theory of differential edge operators. I. », *Comm. Partial Differential Equations* **16** (1991), p. 1615–1664.

[Mel92] R. B. MELROSE – « Calculus of conormal distributions on manifolds with corners », *Int. Math. Res. Not.* **3** (1992), p. 51–61.

[MO89] M. MIN-OO – « Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds », *Math. Ann.* **285** (1989), p. 527–539.

[Ped86] H. PEDERSEN – « Einstein metrics, spinning top motions and monopoles », *Math. Ann.* **274** (1986), p. 35–59.

[Sal82] S. SALAMON – « Quaternionic Kähler manifolds », *Invent. Math.* **67** (1982), p. 143–171.

[Sal89] S. SALAMON – *Riemannian geometry and holonomy groups*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[SH36a] J. A. SCHOUTEN & J. HAANTJES – « Beitraege zur allgemeinen (gekruemmten) konformen Differentialgeometrie », *Math. Ann.* **112** (1936), p. 594–629.

[SH36b] J. A. SCHOUTEN & J. HAANTJES – « Beitraege zur allgemeinen (gekruemmten) konformen Differentialgeometrie. II », *Math. Ann.* **113** (1936), p. 568–583.

[Swa89a] A. F. SWANN – « Aspects symplectiques de la géométrie quaternionique », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), p. 225–228.

[Swa89b] A. F. SWANN – « Quaternionic Kähler geometry and the fundamental 4-form », *Proceedings of the Workshop on Curvature Geometry (Lancaster, 1989)* (Lancaster), ULDM Publ., 1989, p. 165–173.

[Tan75] N. TANAKA – *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, vol. 9, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1975.

[Wal73] N. R. WALLACH – *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker, 1973.

[Web79] S. M. WEBSTER – « Pseudo-hermitian structures on a real hypersurface », *J. Differential Geom.* **13** (1979), p. 25–41.

[Wit81] E. WITTEN – « A new proof of the positive energy theorem », *Comm. Math. Phys.* **80** (1981), p. 381–402.