

Astérisque

ALBERT FATHI

Une caractérisation des stades à virages circulaires

Astérisque, tome 261 (2000), p. 89-101

http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__261__89_0

© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE CARACTÉRISATION DES STADES À VIRAGES CIRCULAIRES

par

Albert Fathi

Résumé. — Nous donnons une minoration du volume d'un domaine compact convexe d'un espace euclidien dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Nous caractérisons le cas d'égalité.

0. Introduction

On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire usuel. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^n . La sphère unité dans \mathbb{R}^n est notée \mathbb{S}^{n-1} .

Afin de simplifier, dans cette introduction, nous allons considérer un convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide et de bord C^2 . Pour $x \in \partial K$, notons $N(x)$ le vecteur unitaire normal à ∂K en x et pointant à l'extérieur de K . L'application $N : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est C^1 . Puisque les espaces tangents $T_x \partial K$ et $T_{N(x)} \mathbb{S}^{n-1}$ sont tous les deux égaux au sous-espace vectoriel $N(x)^\perp$ orthogonal à $N(x)$, la dérivée $DN(x)$ est donc une application linéaire de $N(x)^\perp$ dans lui-même, on sait qu'elle est symétrique et définie positive. Les valeurs propres de $DN(x)$, notées $\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)$, sont donc ≥ 0 , on les appelle les courbures principales. On a $\|DN(x)\| = \max(\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x))$, puisque $DN(x)$ est symétrique. Les rayons de courbure principaux $R_1(x), \dots, R_{n-1}(x)$ sont les inverses $\kappa_1(x)^{-1}, \dots, \kappa_{n-1}(x)^{-1}$. Soit $H_i(x)$ la $i^{\text{ème}}$ fonction symétrique de $\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)$. On note par σ la mesure d'aire induite par la métrique euclidienne sur ∂K . On définit $\mathcal{H}_i(K) = \int_{\partial K} H_i(x) d\sigma(x)$. Le théorème de Gauss-Bonnet donne $\mathcal{H}_{n-1}(K) = s_{n-1}$ l'aire de la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R}^n .

On pose :

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{sup}} &= \sup\{\kappa_i(x) \mid x \in \partial K, i = 1, \dots, n-1\} \\ R_{\text{inf}} &= \inf\{R_i(x) \mid x \in \partial K, i = 1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Classification mathématique par sujets (1991). — 52A10, 52A20, 52A40, 53C99.

Mots clefs. — Convexe, rayon de courbure, Blaschke, volume.

En particulier, on a $\kappa_{\text{sup}} = \sup\{\|DN(x)\| \mid x \in \partial K\}$.

Blaschke a montré qu'une boule de rayon R_{inf} roulait librement à l'intérieur de K , (cf. [Bl, pages 114–119] et [Le, Theorem 2.1, page 1055]). Si on définit l'application $\mathcal{N} : \partial K \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\mathcal{N}(x, t) = x - tN(x)$, le théorème de Blaschke montre que \mathcal{N} est un plongement de $\partial K \times [0, R_{\text{inf}}[$ dans K . Il en résulte le théorème suivant :

Théorème 0.1. — *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe C^2 , alors, on a :*

$$V(K) \geq R_{\text{inf}} S(K) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i R_{\text{inf}}^{i+1} \frac{\mathcal{H}_i}{i+1},$$

où $V(K)$ est le volume de K et $S(K)$ est l'aire de son bord ∂K .

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si K est une boule euclidienne.

Plus généralement, si K est un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est C^1 , on dit que K est $C^{1,1}$ si le plan tangent $T_x \partial K$ est lipschitzien comme fonction de $x \in \partial K$. Il revient au même de dire que l'application normale $N : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est lipschitzienne. Dans ce cas, les courbures sont définies presque partout. On peut voir que l'on peut faire rouler librement une boule de rayon $R > 0$ à l'intérieur d'un compact convexe K si et seulement si ∂K est $C^{1,1}$ (cf. [Ho, Proposition 2.4.3, p. 97]). Il n'est donc pas étonnant que le théorème précédent s'étende au cas $C^{1,1}$. Le cas d'égalité ayant lieu précisément quand $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\}$ avec C compact convexe de dimension $\leq n - 1$ et $R > 0$.

Dans le cas où $C = S$ est un segment de \mathbb{R}^2 , un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, S) \leq R\}$ est ce que l'on appelle, pour des raisons visuelles évidentes, un *stade à virages circulaires*. Remarquons que le bord d'un tel stade est soit un cercle de rayon R si S est réduit à un point, soit la réunion de deux segments, de mêmes longueurs et parallèles à S et de deux demi-cercles de rayon R , par conséquent si S n'est pas réduit à un point, un tel stade n'est jamais C^2 .

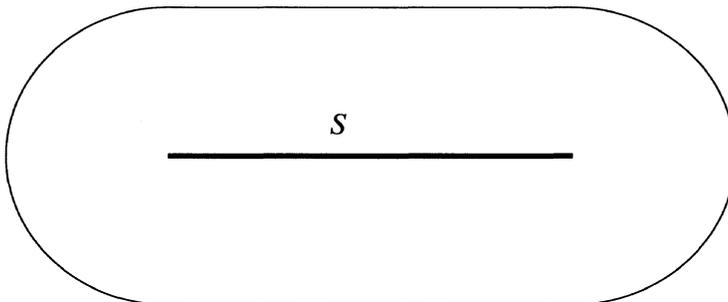


FIGURE 1. Un stade à virages circulaires.

Le théorème suivant donne une caractérisation des stades circulaires :

Théorème 0.2. — Soit C une courbe convexe fermée plane de classe $C^{1,1}$. Notons par l sa longueur, par A l'aire entourée et par R_{inf} la borne inférieure des rayons de courbure. On a :

$$A \geq lR_{\text{inf}} - \pi R_{\text{inf}}^2.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si C borde un stade à virages circulaires.

Remarque 0.3. — 1) Quand ce manuscrit était pratiquement terminé, Victor Bangert nous a communiqué les travaux d'Innami [In₁, In₂]. Certains des résultats d'Innami sont très proches des nôtres. En fait, bien que l'inégalité qu'Innami établit dans [In₁, Corollary 2], pour les hypersurfaces convexes lisses, soit moins bonne que la nôtre, les méthodes utilisées dans son travail sont les mêmes que les nôtres (en particulier, [In₁, Lemma 5] n'est rien d'autre que le théorème de Blaschke) et donc un examen de sa démonstration donne l'inégalité du théorème 0.1 ci-dessus. Bien sûr, sa minoration du volume étant moins bonne, le cas d'égalité est plus facile à analyser. Par ailleurs ses méthodes ne s'appliquent pas au cas des convexes de bord de classe $C^{1,1}$.

2) Dans [In₁], Innami établit aussi une minoration de $V(K)$ pour le cas où K est de bord lisse mais n'est pas nécessairement convexe. Il faut, alors, remplacer R_{inf} par le rayon $r(K)$ de la plus grande boule euclidienne qui roule librement à l'intérieur de K . Un examen de sa démonstration, ou de la démonstration du théorème 1.1 ci-dessous, montre que l'on peut établir la même inégalité que dans le théorème 1.1, à condition de remplacer R_{inf} par $r(K)$, dès que ∂K est $C^{1,1}$ (on peut voir que cette dernière condition implique $r(K) > 0$). Il serait intéressant d'analyser le cas d'égalité.

3) Dans [Ga], on établit l'inégalité $\pi l/A \leq \int_0^l \kappa(s)^2 ds$, pour une courbe convexe C de classe C^2 dans le plan. Cette inégalité est optimale quand C s'approche d'un cercle. Si C s'approche d'un stade à virages circulaires quelconque, on voit que $\int_0^l \kappa(s)^2 ds$ tend vers $2\pi/R_{\text{inf}}$. L'inégalité de Gage devient donc dans ce cas limite $A \geq lR_{\text{inf}}/2$, ce qui est moins bon que le théorème 1.2, dans le cas d'un stade qui n'est pas un disque.

4) Il est bon de signaler ici que si C est un convexe dans \mathbb{R}^n , les ensembles de la forme $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ sont tous, pour $R > 0$, des convexes à bord $C^{1,1}$. Ceci résulte du fait, bien connu, que $x \mapsto d(x, C)$ est $C^{1,1}$ sur $\mathbb{R}^n \setminus C$. Pour une démonstration, on peut consulter par exemple [Ho, theorem 2.1.30, p. 62], où il est montré que cette fonction est différentiable ; de plus, son gradient sur $\mathbb{R}^n \setminus C$ est donné par $x \mapsto (x - p_C(x))/\|x - p_C(x)\|$, où $p_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ est la projection sur le point le plus proche de C . Or p_C est lipschitzienne. (On peut voir qu'une fonction distance à un fermé F dans une variété riemannienne M qui est différentiable en tous les points de $M \setminus F$ est, en fait, $C^{1,1}$ sur $M \setminus F$).

1. Un théorème de Blaschke

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe. Les observations suivantes sont élémentaires et bien connues (cf. par exemple le paragraphe 3.1 sur la soustraction de Minkowski dans [Sc]). Si $r \geq 0$, on pose :

$$K_r^- = \{x \in K \mid d(x, \partial K) \geq r\}.$$

L'ensemble K_r^- est un compact convexe. La convexité résulte du fait que $x \in K_r^-$ si et seulement si $x + B(0, r) \subset K$. On peut voir que la frontière de K_r^- dans \mathbb{R}^n est $\partial K_r^- = \{x \in K \mid d(x, K) = r\}$. On a aussi $\overset{\circ}{K}_r^- = \cup_{s>r} K_s^-$, où $\overset{\circ}{K}_r^-$ désigne l'intérieur du compact K_r^- . En particulier, si on pose $\rho_{\max} = \sup\{r \geq 0 \mid \exists x \in K, d(x, \partial K) = r\}$, on a $K_r^- = \emptyset$ pour $r > \rho_{\max}$, l'ensemble $K_{\rho_{\max}}^-$ est un convexe compact non vide de dimension $\leq n - 1$ et, pour $r < \rho_{\max}$, la frontière ∂K_r^- est homéomorphe à \mathbb{S}^{n-1} et $\overset{\circ}{K}_r^- \neq \emptyset$. (Le nombre ρ_{\max} est le rayon de la plus grande boule euclidienne contenue dans K .)

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Pour $x \in \partial K$, notons $N(x)$ le vecteur unitaire normal à ∂K en x orienté vers l'extérieur de K . L'application $N : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est lipschitzienne. Posons :

$$\kappa_{\sup} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max \left\{ \frac{\|N(x) - N(x')\|}{\|x - x'\|} \mid x, x' \in \partial K, x \neq x', \|x - x'\| \leq \varepsilon \right\},$$

et on définit $R_{\inf} = \kappa_{\sup}^{-1}$.

Si ∂K est C^2 , alors cette définition coïncide avec celle donnée plus haut, car les deux définitions donnent la constante Lipschitz de $N : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n$, où ∂K est muni de la métrique intrinsèque.

Si K a un bord de classe $C^{1,1}$, on peut aussi définir l'application $\mathcal{N} : \partial K \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ par $\mathcal{N}(x, t) = x - tN(x)$.

Nous donnons une démonstration du théorème de Blaschke valable dans le cas $C^{1,1}$.

Théorème 1.1 (Blaschke). — *Soit K un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe $C^{1,1}$. Pour tout $x \in \partial K$ et tout $r \in [0, R_{\inf}]$, on a*

$$d(x - rN(x), \partial K) = r.$$

Démonstration. — Pour $r \geq 0$, considérons l'application partielle

$$\mathcal{N}_r : \partial K \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \longmapsto \mathcal{N}(x, r).$$

On a pour tout $r \geq 0$ l'inclusion $\partial K_r^- \subset \mathcal{N}_r(\partial K)$. En effet, si $x \in K$ est tel que $d(x, \partial K) = r > 0$, soit $x_0 \in \partial K$ tel que $d(x, x_0) = r$, comme ∂K est C^1 et x_0 réalise le minimum de $d(y, x)$ pour $y \in \partial K$, on a que $x_0 - x$ est colinéaire à la normale $N(x_0)$, par conséquent $x = x_0 - rN(x_0) = \mathcal{N}_r(x_0)$, puisque $\|x - x_0\| = r$ et $N(x_0)$ pointe à l'extérieur de K .

Posons alors

$$R_0 = \sup\{r \in [0, R_{\inf}] \mid \forall x \in \partial K, \forall s \in [0, r], d(\mathcal{N}_s(x), \partial K) = s\}.$$

On a $\mathcal{N}(\partial K \times [0, R_0]) \subset K$. En effet, comme $d(\mathcal{N}_s(x), \partial K) = s$, pour $s \in [0, R_0]$, on a $\mathcal{N}_s(x) \notin \partial K$, pour $s \in]0, R_0]$. Or $N(x)$ pointe vers l'extérieur de K , donc on a $\mathcal{N}_s(x) \in \overset{\circ}{K}$ pour $s > 0$ petit.

Supposons $R_0 < R_{\text{inf}}$. Fixons R tel que $R_0 < R < R_{\text{inf}} = \kappa_{\text{sup}}^{-1}$. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $r \in [0, R]$, l'application partielle $\mathcal{N}_r : \partial K \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \mathcal{N}(x, r)$ soit injective sur tout ensemble de ∂K de diamètre $\leq \varepsilon$. En effet, puisque $R\kappa_{\text{sup}} < 1$, il existe $k > \kappa_{\text{sup}}$ tel que $Rk < 1$. Par définition de κ_{sup} , il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x, x' \in K$, avec $\|x - x'\| \leq \varepsilon$, on ait $\|N(x) - N(x')\| \leq k\|x - x'\|$. Par conséquent

$$\|\mathcal{N}_r(x) - \mathcal{N}_r(x')\| \geq \|x - x'\| - r\|N(x) - N(x')\| \geq (1 - kr)\|x - x'\|.$$

L'injectivité résulte donc de $1 - kr \geq 1 - kR > 0$.

Toujours sous l'hypothèse $R_0 < R_{\text{inf}}$, montrons que l'on a $R_0 < \rho_{\text{max}}$ et que l'application \mathcal{N}_r est un homéomorphisme de ∂K sur ∂K_r^- pour tout $r \in [0, R_0]$.

En effet, pour $r \in [0, R_0]$, l'application \mathcal{N}_r est localement injective, de plus, comme $d(\mathcal{N}_r(x), \partial K) = r$, pour tout $x \in \partial K$, l'application \mathcal{N}_r envoie ∂K , qui est homéomorphe à \mathbb{S}^{n-1} dans ∂K_r^- , la frontière, comme sous-ensemble de \mathbb{R}^n , de l'ensemble convexe compact K_r^- . Il résulte du théorème de Brouwer d'invariance du domaine que ∂K_r^- est homéomorphe à \mathbb{S}^{n-1} (en particulier, on a $r < \rho_{\text{max}}$ et donc $R_0 < \rho_{\text{max}}$) et que $\mathcal{N}_r : \partial K \rightarrow \partial K_r^-$ est un revêtement. Comme les ∂K_r^- sont deux à deux disjoints, on voit que \mathcal{N} induit un revêtement de $\partial K \times [0, R_0]$ (homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$) sur $\bigcup_{r \in [0, R_0]} \partial K_r^- = K \setminus \overset{\circ}{K}_{R_0}^-$ (lui aussi homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$). Or, sur $\partial K = \partial K_0^- = \mathcal{N}^{-1}(\partial K_0^-)$, l'application \mathcal{N} est l'identité, donc le revêtement est de degré 1 et \mathcal{N} est un homéomorphisme de $\partial K \times [0, R_0]$ sur $\{x \in K \mid 0 \leq d(x, \partial K) \leq R_0\}$.

Pour $r \in [0, R]$, l'application \mathcal{N}_r est injective sur tout ensemble de diamètre $< \varepsilon$. Comme \mathcal{N}_{R_0} est globalement injective, un raisonnement classique utilisant la compacité de ∂K montre qu'il existe $R' \in]R_0, R]$ tel que \mathcal{N}_r reste globalement injective pour $r \in]R_0, R'[,$ En effet, sinon on trouve $x_n, y_n \in \partial K$ et $r_n > R_0$ tels que $x_n \neq y_n, \mathcal{N}_{r_n}(x_n) = \mathcal{N}_{r_n}(y_n)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = R_0$. Par la compacité de ∂K , quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_\infty$. Par continuité, on obtient $\mathcal{N}_{R_0}(x_\infty) = \mathcal{N}_{R_0}(y_\infty)$ et donc $x_\infty = y_\infty$, par l'injectivité (globale) de \mathcal{N}_{R_0} . Pour n assez grand, on trouve donc $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ et $r_n < R$. Ce qui contredit l'injectivité de \mathcal{N}_{r_n} sur tout ensemble de diamètre $< \varepsilon$, pour $r \in [0, R]$, puisque $x_n \neq y_n$ et $\mathcal{N}_{r_n}(x_n) = \mathcal{N}_{r_n}(y_n)$.

Pour $R_0 \leq r < \min(R', \rho_{\text{max}})$, on voit donc que $\mathcal{N}_r(\partial K)$ est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^{n-1} et contient ∂K_r^- qui est homéomorphe à la même sphère. Le théorème de Brouwer d'invariance du domaine implique l'égalité $\mathcal{N}_r(\partial K) = \partial K_r^-$. On a donc $d(\mathcal{N}_r(x), \partial K) = r$, pour tout $x \in \partial K$ et tout $r \in]R_0, \min(R', \rho_{\text{max}})[,$ ce qui est contradictoire avec la définition de R_0 . \square

Le corollaire suivant est en fait équivalent au théorème de Blaschke (cf. [Th, Corollaires p. 584] pour une autre démonstration) :

Corollaire 1.2. — *Sous les hypothèses de 1.1, la restriction de \mathcal{N} à $\partial K \times [0, R_{\text{inf}}[$ est injective et à valeurs dans K .*

On a $K = \mathcal{N}(\partial K \times [0, R_{\text{inf}}]) \cup K_{R_{\text{inf}}}^-$, la réunion étant disjointe. De plus

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-) \leq R_{\text{inf}}\}.$$

Démonstration. — L'injectivité de \mathcal{N} sur $\partial K \times [0, R_{\text{inf}}[$ est en fait déjà contenue dans la preuve de 1.1. Il n'est pas inintéressant de voir qu'elle résulte directement de l'énoncé de 1.1, par un argument géométrique bien connu.

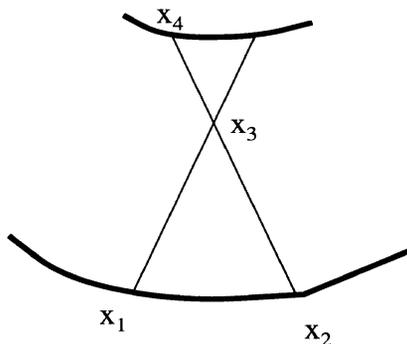


FIGURE 2

Supposons que x_1 et x_2 sont deux points distincts de ∂K tels qu'il existe $r_1, r_2 \in [0, R_{\text{inf}}[$ vérifiant $x_1 - r_1 N(x_1) = x_2 - r_2 N(x_2)$. Posons

$$x_3 = x_1 - r_1 N(x_1) = x_2 - r_2 N(x_2).$$

On trouve par le théorème de Blaschke $d(x_3, \partial K) = r_1 = r_2$. Posons par exemple $x_4 = x_1 - R_{\text{inf}} N(x_1)$ (cf. Figure 2). Les points x_4, x_3, x_2 ne sont pas colinéaires donc

$$\begin{aligned} d(x_4, x_2) &< d(x_4, x_3) + d(x_3, x_2) \\ &= \|x_1 - R_{\text{inf}} N(x_1) - (x_1 - r_1 N(x_1))\| + \|x_2 - r_2 N(x_2) - x_2\| \\ &= R_{\text{inf}} - r_1 + r_2 = R_{\text{inf}}. \end{aligned}$$

Par conséquent $R_{\text{inf}} = d(x_4, \partial K) \leq d(x_4, x_2) < R_{\text{inf}}$, ce qui est absurde.

Par la démonstration du théorème de Blaschke, l'application \mathcal{N}_r est un homéomorphisme de ∂K sur $\partial K_r^- = \{x \in K \mid d(x, \partial K) = r\}$ pour $r < R_{\text{inf}}$. Le fait qu'alors $K = \mathcal{N}(\partial K \times [0, R_{\text{inf}}]) \cup K_{R_{\text{inf}}}^-$, la réunion étant disjointe, en résulte.

Du théorème de Blaschke, il résulte que $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-) \leq R_{\text{inf}}\}$. Montrons que cette inclusion est une égalité. En effet, si $x \notin K$ et $y \in K_{R_{\text{inf}}}^-$ est tel que $d(x, y) = d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-)$, le segment $[x, y]$, joignant x à y , coupe ∂K en un point que

l'on notera y_0 . Par définition de $K_{R_{\text{inf}}}^-$, on a $d(y, y_0) \geq R_{\text{inf}}$. Comme $d(x, y_0) > 0$, car $x \notin \partial K$, on obtient

$$d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-) = d(x, y) = d(x, y_0) + d(y, y_0) \geq d(x, y_0) + R_{\text{inf}} > R_{\text{inf}}.$$

Par conséquent $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-) \leq R_{\text{inf}}\} \subset K$. □

Nous aurons besoin de comprendre ce qui se passe dans le cas où $K_{R_{\text{inf}}}^-$ est d'intérieur vide. Par exemple, si $K \subset \mathbb{R}^2$ est tel que $K_{R_{\text{inf}}}^-$ soit d'intérieur vide, alors $K_{R_{\text{inf}}}^-$ est un segment, éventuellement réduit à un point, et donc $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K_{R_{\text{inf}}}^-) \leq R_{\text{inf}}\}$ est un stade à virages circulaires, qui n'est C^2 que si c'est un disque. Ce dernier résultat est vrai en toute dimension.

Complément 1.3. — *Si K est C^2 , alors $K_{R_{\text{inf}}}^-$ est d'intérieur vide si et seulement si K est une boule euclidienne (et dans, ce cas $K_{R_{\text{inf}}}^-$ est réduit au centre de la boule).*

Posons pour simplifier $C = K_{R_{\text{inf}}}^-$ et $R = R_{\text{inf}} > 0$. Il suffit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.4. — *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe de dimension $\leq n - 1$ non réduit à un point et $R > 0$. Considérons un segment S joignant deux points $c_1, c_2 \in C$ tels que $\|c_1 - c_2\| = \sup\{\|c - c'\| \mid c, c' \in C\}$, alors il existe un plan affine P contenant S et tel que $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ soit le stade à virages circulaires $\{x \in P \mid d(x, S) \leq R\}$. En particulier $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ n'est pas C^2 .*

Démonstration. — Appelons $p_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$, la projection de \mathbb{R}^n sur le compact convexe C , le point $p_C(x)$ est donc l'unique point de C dont la distance à x est $d(x, C)$.

Quitte à translater C , on peut supposer $c_1 = 0$. On posera $c = c_2$. Comme C n'est pas réduit à un point $c \neq 0$. On a :

$$p_C(tc) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t \leq 0, \\ tc, & \text{pour } t \in [0, 1], \\ c, & \text{pour } t \geq 1. \end{cases}$$

Montrons, par exemple, le dernier cas. Si $t \geq 1$ et $c' \in C$, on a

$$d(0, c) + d(c, tc) = d(0, tc) \leq d(0, c') + d(c', tc) \leq d(0, c) + d(c', tc),$$

d'où $d(c, tc) \leq d(c', tc)$ pour tout $c' \in C$, donc $p_C(tc) = c$.

Puisque C contient 0 et est de dimension $\leq n - 1$, on peut trouver un hyperplan vectoriel H contenant C . Soit v un vecteur unitaire orthogonal à H . On a :

$$\forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad p_C(x + \alpha v) = p_C(x).$$

En effet, comme $C \subset H$, on a, pour tout $c' \in C$, l'égalité

$$d(x + \alpha v, c') = (\|x - c'\|^2 + \alpha^2)^{1/2}.$$

Il suffit, alors, de minimiser sur $c' \in C$.

Dans le plan vectoriel P engendré par le segment $S = [0, c]$ et le vecteur v , on obtient alors :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\} \cap P = \{x \in P \mid d(x, S) \leq R\},$$

ce qui est le stade cherché.

Comme le segment S contient les deux points distincts 0 et c , le stade trouvé n'est pas C^2 . Pour finir de montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ n'est pas C^2 , il reste alors à remarquer que le plan P est transverse à $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$, car il contient le point 0 qui est à l'intérieur du convexe $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\}$, et par conséquent P ne peut être contenu dans aucun hyperplan de support de $\{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\}$. \square

Remarque 1.5. — On peut montrer que si K est un compact convexe d'intérieur non vide avec ∂K de classe $C^{1,1}$, alors pour tout $r > K_{R_{\text{inf}}}$, l'application $\mathcal{N} : \partial K \times [0, r] \rightarrow \mathbb{R}^n$ n'est pas injective.

Dans le cas où ∂K est suffisamment lisse, c'est une conséquence du fait que l'on ne minimise plus les distances au-delà du premier point conjugué (ou focal). C'est aussi contenu dans la démonstration de Blaschke de son théorème.

Dans le cas où ∂K n'est que $C^{1,1}$, cela vient d'un phénomène de régularité de la distance : on peut voir que si $\mathcal{N} : \partial K \times [0, r[\rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective, alors $x \mapsto d(x, \partial K)$ est $C^{1,1}$ sur l'ouvert $\mathcal{N}(\partial K \times]0, r[) \subset \mathbb{R}^n$.

2. Une minoration du volume d'un corps convexe de bord $C^{1,1}$

Nous considérons toujours un compact convexe $K \subset \mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide et de bord $C^{1,1}$. L'application $N : \partial K \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ est lipschitzienne. Par le théorème de Rademacher (cf. [EG, theorem 2, p. 81]), elle est dérivable pour σ -presque tout $x \in \partial K$, où σ est la mesure d'aire sur ∂K , sous-variété C^1 de \mathbb{R}^n muni de sa métrique euclidienne usuelle. En tout point où $N(x)$ est dérivable, la dérivée $DN(x)$ est encore une application linéaire, symétrique et semi-définie positive de $N(x)^\perp$ dans lui-même (voir appendice). En un tel point, les valeurs propres, notées $\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)$, de $DN(x)$ sont donc ≥ 0 , on les appelle les courbures principales. On a encore $\|DN(x)\| = \max(\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x))$, puisque $DN(x)$ est symétrique. En un point où la fonction N est dérivable, on définit de même $H_i(x)$ comme la $i^{\text{ème}}$ fonction symétrique de $\kappa_1(x), \dots, \kappa_{n-1}(x)$. Les fonctions H_1, \dots, H_{n-1} existent donc σ -presque partout. On définit $\mathcal{H}_i(K) = \int_{\partial K} H_i(x) d\sigma(x)$. On peut démontrer, dans ce cas aussi, le théorème de Gauss-Bonnet, c'est-à-dire que $\mathcal{H}_{n-1}(K) = s_{n-1}$ l'aire de la sphère unité \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R}^n .

Théorème 2.1. — Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe d'intérieur non vide et dont le bord est de classe $C^{1,1}$, alors, on a :

$$V(K) \geq R_{\text{inf}}S(K) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i R_{\text{inf}}^{i+1} \frac{\mathcal{H}_i(K)}{i+1},$$

où $V(K)$ est le volume de K et $S(K)$ est l'aire de son bord ∂K .

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) \leq R\},$$

où C est un compact convexe de \mathbb{R}^n de dimension $n - 1$.

En particulier, si K est de bord C^2 , l'inégalité est une égalité si et seulement si K est une boule euclidienne.

Démonstration. — On sait que $\mathcal{N} : \partial K \times [0, R_{\text{inf}}[\rightarrow K$ est injectif. Comme $\mathcal{N}(x, r) = x - rN(x)$, il est clair que \mathcal{N} est lipschitzienne, donc la dérivée existe $\sigma \times dr$ -presque partout et $DN(x, r) : N(x)^\perp \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée par

$$DN(x, r)(u, t) = u - rDN(x)(u) + tN(x), \quad \sigma \times dr\text{-presque partout.}$$

Par conséquent, en $\sigma \times dr$ -presque tout (x, r) , le jacobien $\text{Jac}_{x,r}(\mathcal{N})$ vaut

$$\det(\text{Id}_{N(x)^\perp} - rDN(x)) = \prod_{j=1}^{n-1} (1 - r\kappa_j(x)) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r^i H_i(x).$$

La formule du changement de variable, qui est valide car \mathcal{N} est lipschitzien injectif (cf. [EG, theorem 1, p. 96]), donne :

$$\begin{aligned} V(\mathcal{N}(\partial K \times [0, R_{\text{inf}}])) &= \int_{\partial K \times [0, R_{\text{inf}}[} \left[1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i r^i H_i(x) \right] d\sigma(x)dr, \\ &= R_{\text{inf}}S(K) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i R_{\text{inf}}^{i+1} \frac{\mathcal{H}_i(K)}{i+1}. \end{aligned}$$

Or par 1.2, l'ensemble K contient $\mathcal{N}(\partial K \times [0, R_{\text{inf}}[)$, d'où l'inégalité :

$$V(K) \geq R_{\text{inf}}S(K) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i R_{\text{inf}}^{i+1} \frac{\mathcal{H}_i}{i+1}.$$

Toujours par 1.2, cette inégalité est une égalité si et seulement si $V(K_{R_{\text{inf}}}^-) = 0$. Comme $K_{R_{\text{inf}}}^-$ est un convexe, le cas d'égalité est donc équivalent à $K_{R_{\text{inf}}}^-$ de dimension $\leq n - 1$. Il suffit alors d'appliquer 1.3 pour conclure. \square

Dans le cas où $n = 2$, il n'y a qu'une intégrale de courbure $\mathcal{H}_1(K) = \mathcal{H}_{n-1}(K)$ qui vaut 2π par le théorème de Gauss–Bonnet. On trouve, alors que l'aire de K est supérieure à $R_{\text{inf}}l - \pi R_{\text{inf}}^2$, où l est la longueur de ∂K . C'est le théorème 0.2.

3. Complément

On considère, un compact convexe d'intérieur non vide et de bord de classe C^2 . On peut se demander dans quel cas \mathcal{N} est un plongement sur $\partial K \times [0, R_{\text{inf}}]$. Bien sûr, le convexe K ne peut pas être une boule euclidienne, car alors $\mathcal{N}_{R_{\text{inf}}}$ est constante. On peut obtenir d'autres convexes de bord C^∞ avec $\mathcal{N}_{R_{\text{inf}}}$ non-injective, en prenant, par exemple dans le plan, un convexe avec un arc de cercle non-dégénéré dans son bord. Le résultat suivant est donc optimal :

Théorème 3.1. — *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un convexe compact d'intérieur non vide et dont le bord est C^ω (i.e. analytique réel). Si K n'est pas une boule euclidienne alors \mathcal{N} est un plongement sur $\partial K \times [0, R_{\text{inf}}]$.*

En fait, en posant $C = K_{R_{\text{inf}}}^-$ et $R = R_{\text{inf}}$, ceci découle du théorème :

Théorème 3.2. — *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe non réduit à un point. Notons $p_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ la projection, définie par $d(x, C) = d(x, p_C(x))$. Si $R > 0$ est tel que $\partial C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ soit C^ω , alors p_C est injective sur ∂C_R .*

Démonstration. — Rappelons que $p_C(x)$ est aussi caractérisé par la propriété suivante :

Le point $p_C(x)$ est le seul point $c \in C$ tel que $\forall y \in C, \langle x - c, y - c \rangle \leq 0$.

Il en résulte que pour tout $c \in C$, l'ensemble $p_C^{-1}(c)$ est un cône convexe de sommet c . Notons F_c , le sous-espace affine engendré par $p_C^{-1}(c)$. La convexité de $p_C^{-1}(c)$ implique que l'intérieur de $p_C^{-1}(c)$ en tant que sous ensemble de F_c est non vide.

Montrons que F_c intersecte l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C . On sait déjà par 1.4, que $\overset{\circ}{C}$ n'est pas vide. Si F_c n'intersectait pas $\overset{\circ}{C}$, il serait contenu dans un hyperplan affine H de support de C . Notons H_1 et H_2 les deux composantes connexes de $\mathbb{R}^n \setminus H$ avec $C \subset H_1 \cup H$. La caractérisation de p_C donnée plus haut montre que la demi droite D_2 , issue de c , incluse dans H_2 et perpendiculaire à H en c , serait contenue dans $p_C^{-1}(c)$. Ce qui est absurde, car $p_C^{-1}(c) \subset F_c \subset H$.

Montrons que la dimension q de F_c est nécessairement 1. En effet, comme F_c intersecte l'intérieur du convexe $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$, il est transverse au bord ∂C_R , par conséquent $F_c \cap \partial C_R$ est une hypersurface C^ω de F_c . Cette hypersurface est homéomorphe à \mathbb{S}^{q-1} , car c'est le bord du compact convexe $F_c \cap C_R$ d'intérieur non vide dans l'espace affine F_c de dimension q . De plus $F_c \cap \partial C_R$ contient l'intersection $p_C^{-1}(c) \cap \{x \in F_c \mid \|x - c\| = R\}$, or cette intersection est d'intérieur non vide dans la sphère $\{x \in F_c \mid \|x - c\| = R\}$ de dimension $q - 1$, car le cône $p_C^{-1}(c)$ est de sommet c et d'intérieur non vide comme sous-ensemble de F_c . La fonction analytique réelle $x \mapsto \|x - c\|^2$ est donc nulle sur un ouvert non vide de $F_c \cap \partial C_R$ qui est une variété C^ω homéomorphe à \mathbb{S}^{q-1} . Si $q \geq 2$, on voit que $F_c \cap \partial C_R$ est connexe, donc $x \mapsto \|x - c\|^2$ est constante sur $F_c \cap \partial C_R$. Comme $F_c \cap \partial C_R$ est une sous-variété

compacte de codimension 1 dans F_c , nous obtenons

$$F_c \cap \partial C_R = \{x \in F_c \mid \|x - c\| = R\}.$$

Nous en concluons que $F_c \cap C = \{c\}$, ce qui est impossible, car $F_c \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$.

Par conséquent, le sous-espace affine F_c est une droite. Comme $F_c \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$, le compact convexe $C \cap F_c$ est un segment d'intérieur non vide, donc nous ne pouvons pas avoir $p_C^{-1}(c) = F_c$; ce qui force $p_C^{-1}(c) \cap \partial C_R$ à être réduit à un seul point. \square

Remarque 3.3. — 1) Dans la preuve précédente, nous avons rappelé le fait bien connu suivant :

Si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un compact convexe et $p_C : \mathbb{R}^n \rightarrow C$ est la projection, alors $p_C^{-1}(c)$ est un cône de sommet c pour tout $c \in C$. De plus, quand C est d'intérieur non vide, on peut voir que $p_C^{-1}(c)$ n'est pas un sous espace affine, car le sous espace affine F_c engendré par $p_C^{-1}(c)$ coupe l'intérieur de C .

Il s'ensuit que quand C est d'intérieur non vide les préimages de p_C restreint à un ensemble de la forme $\partial C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, C) = R\}$ sont toutes homéomorphes à des disques de dimension (dépendant du point) $\leq n - 1$; en particulier, ces préimages sont connexes.

2) On voit donc que si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un compact, convexe, d'intérieur non vide, de bord $C^{1,1}$ et tel que $K_{R_{\text{inf}}}^-$ soit aussi d'intérieur non vide, alors, les préimages de $\mathcal{N}_{R_{\text{inf}}}$ sont des disques topologiques. Ce qui n'est pas très étonnant car $\mathcal{N}_{R_{\text{inf}}}$ est la limite d'homéomorphismes et par conséquent les préimages devraient être de «shape», au sens de Borsuk, trivial.

3) On aurait pu utiliser ce qui a été dit en 1), pour donner une démonstration légèrement différente du théorème de Blaschke.

Le théorème 3.1 a un corollaire intéressant.

Pour $k \geq 2$, introduisons l'espace \mathcal{C}_k des hypersurfaces de classe C^k de \mathbb{R}^n compactes et strictement convexes (c'est-à-dire ayant toutes leurs courbures principales > 0 en tout point). On munit \mathcal{C}_k de la topologie C^k . Le sous-ensemble \mathcal{C}_k est ouvert dans l'espace des hypersurfaces compactes C^k de \mathbb{R}^n , muni de la topologie C^k , c'est donc un espace de Baire. Si on enlève de \mathcal{C}_k le sous-ensemble formé par les hypersurfaces qui sont des boules euclidiennes, on trouve encore un ouvert de l'espace des hypersurfaces compactes C^k de \mathbb{R}^n muni de la topologie C^k . Cet ouvert est dense dans \mathcal{C}_k . On en déduit que les hypersurfaces C^ω de \mathcal{C}_k qui ne sont pas des boules euclidiennes forment un ensemble dense dans \mathcal{C}_k . Si $S \in \mathcal{C}_k$, on définit l'application $N^S : S \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$, par $N^S(x)$ est la normale unitaire à S en x orientée vers l'extérieur. On définit aussi l'application $\mathcal{N}^S : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, par $\mathcal{N}^S(x, r) = x - rN^S(x)$. Les applications N^S et \mathcal{N}^S sont C^{k-1} . De plus, puisque $k \geq 2$, on peut définir R_{inf}^S comme dans l'introduction, il est clair que R_{inf}^S dépend continument de S dans la topologie C^2 .

Corollaire 3.4. — Si $k \geq 2$, pour un S générique (au sens de Baire) dans \mathcal{C}_k , muni de la topologie C^k , l'application $\mathcal{N}^S : S \times [0, R_{\text{inf}}^S] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective.

Démonstration. — Considérons $\mathcal{N}_{R_{\text{inf}}^S}^S : S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il n'est pas difficile de voir que, pour $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{S \in \mathcal{C}_k \mid \text{les préimages de } \mathcal{N}_{R_{\text{inf}}^S}^S \text{ sont de diamètre } < \varepsilon\}$$

est un ouvert de \mathcal{C}_k , car $k \geq 2$. Cet ouvert est dense, puisqu'il contient toutes les hypersurfaces C^ω appartenant à \mathcal{C}_k et qui ne sont pas des boules euclidiennes. Par conséquent, l'intersection $\bigcap_{n \geq 1} \mathcal{U}_{1/n}$ est un G_δ dense dans l'espace de Baire \mathcal{C}_k . Or cette intersection est précisément l'ensemble des hypersurfaces $S \in \mathcal{C}_k$ telles que $\mathcal{N}^S : S \times [0, R_{\text{inf}}^S] \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit injective. \square

4. Appendice : symétrie et positivité de DN

Dans cet appendice, nous montrons que DN est symétrique et semi-définie positive. Ce fait est bien connu. Ainsi que nous allons le voir, l'argument généralement donné dans le cas où ∂K est C^2 s'adapte aisément.

Supposons que N soit dérivable en $x_0 \in \partial K$. Quitte à changer de système de coordonnées, on peut supposer que $x_0 = 0$ et que $N(x_0) = N(0)$ est $(0, \dots, 0, 1)$, le dernier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Par le théorème des fonctions implicites, au voisinage de 0, la sous-variété ∂K de classe C^1 est le graphe d'une fonction φ de classe C^1 définie sur un voisinage ouvert U de 0 dans \mathbb{R}^{n-1} . Notons (x_1, \dots, x_{n-1}) les coordonnées canoniques d'un point x de \mathbb{R}^{n-1} . Dans la carte

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})),$$

on a $N(x) = X(x)/\|X(x)\|$, avec $X(x) = (-\partial_1 \varphi(x), \dots, -\partial_{n-1} \varphi(x), 1)$, où $\partial_j \varphi$ est la dérivée partielle de φ par rapport à x_j . En particulier, la dernière coordonnée de $N(x)$ est $\|X(x)\|^{-1}$. Elle est dérivable en 0, puisque N l'est. Il en résulte que X est dérivable en 0 et par conséquent φ a une dérivée seconde en 0. Cette dérivée seconde $D^2 \varphi(0)$ est symétrique par le théorème de Schwarz. Montrons alors que la forme bilinéaire associée à $DN(0)$ n'est rien d'autre que $-D^2 \varphi(0)$. Sur U , le produit scalaire $\langle \partial_i f(x), N(x) \rangle$ est identiquement nul. Puisque f a aussi une dérivée seconde en 0, par dérivation, on obtient

$$\langle \partial_i f(0), \partial_j N(0) \rangle = -\langle \partial_{j,i}^2 f(0), N(0) \rangle = -\partial_{j,i}^2 \varphi(0).$$

Pour montrer que $DN(0)$ est semi-définie positive, il suffit de voir que $D^2 \varphi(0)$ est semi-définie négative. Puisque $N(0)$ est le dernier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n , l'hypersurface convexe ∂K est située dans le demi-espace formé par les points $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle y, N(0) \rangle \leq 0$. Par conséquent, on a $\varphi \leq 0$ sur U , or $\varphi(0) = 0$. Il en résulte que φ a un maximum en 0 et donc $D^2 \varphi(0)$ est semi-définie négative.

Références

- [Bl] W. Blaschke. *Kreis und Kugel*. Chelsea, New York, 1949.
- [EG] L.C. Evans & R.F. Gariepy. *Measure Theory & Fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor & London, 1992.
- [Ga] M.G. Gage. *An isoperimetric inequality with applications to curve shortening*. Duke Math. J. **50** (1983), 1225–1229.
- [Ho] L. Hörmander. *Notions of Convexity*. Progress in Mathematics vol. 127. Birkhäuser, Boston, Basel & Berlin, 1994.
- [In₁] N. Innami. *Isoperimetric inequalities depending on injectivity radius from boundary*, in Complex Structures and Vector Fields, edited by S. Dimiev & K. Segikawa. World Scientific, Singapore, 1995.
- [In₂] N. Innami. *Volume, surface area and inward injectivity radius*. Preprint, Niigata University.
- [Le] K. Leichtweiss. *Convexity and Differential Geometry*, in Handbook of Convex Geometry **B**, edited by P.M. Gruber & J.M. Wills. North-Holland, Amsterdam, London, New York & Tokyo, 1993.
- [Sc] R. Schneider *Convex Bodies : The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia in Mathematics and its Applications **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Th] R. Thom. *Sur le cut-locus d'une variété plongée*. J. Differential Geometry, **6** (1972), 577–586.

A. FATHI, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, École Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France • E-mail : afathi@umpa.ens-lyon.fr