Astérisque

JEAN-FRANÇOIS MATTEI

Quasi-homogénéité et équiréductibilité de feuilletages holomorphes en dimension deux

Astérisque, tome 261 (2000), p. 253-276

<http://www.numdam.org/item?id=AST_2000__261__253_0>

Astérisque
261, 2000, p. 253–276

QUASI-HOMOGÉNÉITÉ ET ÉQUIRÉDUCTIBILITÉ DE FEUILLETAGES HOLOMORPHES EN DIMENSION DEUX

par

Jean-François Mattei

Résumé. — Après avoir étudié la dépendance analytique des séparatrices d'une famille « équisingulière » de germes de feuilletages holomorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$, nous définissons la quasihomogénéité comme une propriété de rigidité. Nous obtenons un théorème de type K. Saito pour les germes de feuilletages quasi-homogènes et un théorème de type Briançon-Skoda dans le cas général.

Vocabulaire et notations

On désignera par $\mathcal{O}_M$ et par Λ^1_M respectivement les faisceaux des germes de fonctions holomorphes et de 1-formes différentielles holomorphes sur une variété holomorphe M. Pour $m \in Z \subset M$ le germe de Z en m sera noté Z, m.

Le *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\eta)$ d'une 1-forme $\eta \in \Lambda^1_M(M)$ est l'ensemble des points m de M où $\eta(m) \in T^*_m M$ est nulle. Lorsque $\mathrm{Sing}(\eta), m$ est de codimension 1 on peut décomposer le germe η_m de η en ce point,

$$\eta_m = h\eta'_m \qquad h \in \mathcal{O}_{M,m}, \quad \eta' \in \Lambda^1_{M,m},$$

de manière que $\mathrm{codim}\,(\mathrm{Sing}(\eta'_m)) \geq 2$. Cette décomposition est unique, à unité multiplicative près et η'_m s'appellera le *saturé local de* η *au point* m. On notera

$$\Sigma(\eta) := \{m \in M \mid \eta'_m(m) = 0\}$$

que l'on appellera *lieu singulier strict de* η.

Lorsque la forme η vérifie la *condition d'intégrabilité* $\eta \wedge d\eta \equiv 0$, elle définit un feuilletage $\mathcal{F}_\eta$, éventuellement singulier, de *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}_\eta) := \mathrm{Sing}(\eta)$. La collection des saturés locaux de η définit le *feuilletage saturé* $\mathcal{F}^{\mathrm{sat}}_\eta$ *associé à* $\mathcal{F}_\eta$; son *lieu singulier* $\mathrm{Sing}(\mathcal{F}^{\mathrm{sat}}_\eta)$ est égal à $\Sigma(\eta)$.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 32A10, 32A20, 32B10,34C20, 34C35, 58F23, 32G34, 32S15, 32S30, 32S45, 32S65.
Mots clefs. — Singularités, champs de vecteurs, feuilletage, equisingularité, courbes, quasi-homogénéité, déformation, modules, formes normales.

Un sous-ensemble analytique Z de M est dit *ensemble invariant* (resp. *strictement invariant*) de η si la restricion de η (resp. des saturés locaux de η) à la partie régulière de Z est identiquement nulle. Lorsque η est intégrable, un *ensemble invariant de* $\mathcal{F}_\eta^{\mathrm{sat}}$ est un ensemble strictement invariant de η.

Si au voisinage d'un point m d'une sous-variété lisse V de M le saturé local η'_m de η vérifie l'une des conditions suivantes :

(1) $m \in \Sigma(\eta)$,

(2) $m \notin \Sigma(\eta)$, $\eta'_m \mid_V \not\equiv 0$ et $\eta'_m \mid_V (m) = 0$,

on dira que m est un *point singulier strict du couple* $(\eta; V)$. Pour une hypersurface H à croisements normaux $\Sigma(\eta; H)$ désignera l'ensemble des points $m \in H$ qui sont points singuliers stricts d'au moins un des couples formés par η et une composante irréductible locale de H en m.

Fixons un point t d'une variété holomorphe P. Un sous-ensemble analytique W de M est dit *étale au dessus de t via une submersion* $\pi : M \longrightarrow P$ si la restriction de π à W est un difféomorphisme local en chaque point de $\pi^{-1}(t) \cap W$. Cette propriété est ouverte lorque $\pi \mid_W$ est propre. On notera $W_t := \pi^{-1}(t) \cap W$.

Conventions. — Lorsque nous ne précisons pas, les objets considérés ici : variété, courbe, application, champ de vecteurs... sont supposés holomorphes. Nous dirons aussi « 1-forme » pour : « 1-forme différentielle holomorphe ».

1. Introduction

Classiquement la *quasi-homogénéité* d'un germe $f(x, y)$ de fonction holomorphe — ici à l'origine de $\mathbb{C}^2$ — se définit par l'existence de coordonnées $u(x, y), v(x, y)$ dans lesquelles f est *un polynôme quasi-homogène* : son nuage de Newton est contenu dans une droite :

$$f = P(u, v) = \sum_{\alpha i + \beta j = d} P_{ij} u^i v^j.$$

Cette propriété se caractérise algébriquement **[16]** par l'appartenance de f à son *idéal jacobien* $J(f) := (f'_x, f'_y)$. On dispose aussi d'une caractérisation en terme de comparaison des modules de la fonction f à de ceux de la courbe $f^{-1}(0)$. On peut montrer que f est quasi-homogène si et seulement si toute déformation de f

$$F \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}, \quad F_0 = f, \quad F_t(0,0) = 0, \qquad F_t(x, y) := F(x, y; t),$$

qui est topologiquement triviale, satisfait l'équivalence : F est analytiquement triviale $\Longleftrightarrow$ la famille de germes de courbes $\left(F_t^{-1}(0)\right)_t$ est analytiquement triviale ;

La *trivialité topologique*, resp. la *trivialité analytique*, de F signifie ici l'existence de germes d'homéomorphismes, resp. de biholomorphismes, Φ de $\mathbb{C}^{2+p}, 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{2+p}, 0$ et L de $\mathbb{C}^{1+p}, 0 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{1+p}, 0$, qui commutent avec les projections sur $\mathbb{C}^p, 0$, valent l'identité pour $t = 0$ et satisfont : $L \circ (F;t) \circ \Phi = (f;t)$. Cette dernière relation signifie que Φ conjugue les feuilletages de $\mathbb{C}^{2+p}, 0$ définis par dF et par $df \circ \pi$, avec $\pi(x,y;t) := (x,y)$.

L'objet principal de cet article est d'étudier les notions de quasi-homogénéité pour un germe de feuilletage holomorphe $\mathcal{F}_\omega$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ défini par un germe de 1-forme

$$\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy, \quad a,b \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \quad \mathrm{Sing}(\omega) = \{0\}.$$

D'après un résultat de C. Camacho et P. Sad **[4]** un tel feuilletage admet toujours une *séparatrice*, c'est à dire un germe à l'origine de courbe analytique irréductible invariante. Il peut en admettre une infinité, on dit alors que ω est *dicritique*. Si ce n'est pas le cas, nous notons $\mathrm{Sep}(\omega)$ ou $\mathrm{Sep}(\mathcal{F}_\omega)$ le germe de l'union des séparatrices de ω.

Définition 1.1. — Nous disons qu'un germe de 1-forme holomorphe non-dicritique ω à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est *topologiquement quasi-homogène* si toute déformation topologiquement triviale $\eta := A(x,y;t)dx + B(x,y;t)dy$ de ω satisfait l'équivalence :

- η est analytiquement triviale si et seulement si la déformation de germes de courbes à l'origine $(\mathrm{Sep}(\eta_t))_t$ est analytiquement triviale,

où η_t désigne le germe à l'origine de la restriction de η à $\mathbb{C}^2 \times t$.

Pour les feuilletages quasi-hyperboliques génériques (définis au chapitre 6) on dispose d'un critère différentiel de trivialité topologique **[14]** **[15]** :

- Une déformation η d'une 1-forme quasi-hyperbolique générique est topologiquement triviale si et seulement si il existe des germes $C_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}$ tels que la 1-forme $\Omega := \eta + \sum_j C_j(x,y;t)dt_j$ est intégrable (*i.e.* $\Omega \wedge d\Omega \equiv 0$) et définit un déploiement équisingulier de $\mathcal{F}_\omega$, *cf.* (6.1).

L'espace (lisse de dimension finie) universel des déploiements équisinguliers construit dans **[10]** s'interprète donc comme l'espace des modules analytiques dans une classe topologique donnée. On est ainsi ammené à définir au chapitre 6 la notion de *quasi-homogénéité au sens des déploiements* ou encore *d-quasi-homogénéité* d'une 1-forme ω par la propriété suivante : « Tout déploiement équisingulier Ω de ω satisfait l'équivalence : Ω est analytiquement trivial $\Longleftrightarrow$ la famille de germes de courbe $(\mathrm{Sep}(\Omega_t))_t$ est analytiquement triviale ». On peut alors affaiblir les hypothèses et considérer la classe plus large des 1-formes non-dicritiques dont la résolution ne comporte aucune singularité de type selle-nœud ; ces formes seront appellées *semi-hyperboliques*. On obtient :

Théorème A. — *Soit $\omega := a(x,y)dx + b(x,y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f(x,y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ une équation réduite de* $\mathrm{Sep}(\omega)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *ω est d-quasi-homogène,*

(2) *f appartient à l'idéal $(a, b) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$,*
(3) *df est topologiquement quasi-homogène,*
(4) *f appartient à l'idéal $(f'_x, f'_y) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$,*
(5) *il existe des coordonnées u, v à l'origine, des fonctions $g, h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ avec $u(0) = v(0) = 0$, $g(0) \neq 0$ et des entiers α, β, $d \in \mathbb{N}$ tels que : f s'exprime comme un polynôme quasi-homogène $f = \sum_{\alpha i+\beta j=d} P_{ij} u^i v^j \in \mathbb{C}[[u, v]]$ et $g\omega = df + h\,(\beta v du - \alpha u dv)$.*

Ce théorème appliqué aux 1-formes quasi-hyperboliques génériques donne directement :

Théorème B. — *Soit $\omega := a(x, y)dx + b(x, y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe quasi-hyperbolique générique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f(x, y) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ une équation réduite de* Sep(ω). *Alors les assertions* (2) (3) (4) *et* (5) *du théorème A sont équivalentes à*

(1′) *ω est topologiquement quasi-homogène.*

Pour montrer le théorème A nous serons ammenés (6.7) à prouver le

Théorème. — *Soit ω un germe de 1-forme semi-hyperbolique. Alors toute déformation topologiquement triviale $(X_t)_t$ de $X_0 :=$ Sep(ω) est réalisée comme la famille de séparatrices d'un déploiement équisingulier. En particulier il existe une déformation topologiquement triviale η de ω, à pseudo-groupe d'holonomie constant, telle que pour t assez petit $X_t =$ Sep(η_t).*

Lorsque ω n'est pas quasi-homogène, nous mettons en évidence sur l'espace universel des déploiements équisinguliers un « feuilletage singulier », défini par un sous-module involutif du module des germes de champs de vecteurs holomorphes, dont « l'espace des feuilles » s'identifie à l'espace des modules locaux du germe de courbe Sep(ω).

Enfin au chapitre 7 nous comparons l'idéal (a, b) de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ engendré par les coefficients de ω, à l'idéal définissant Sep(ω). On obtient le résultat suivant qui généralise — et redémontre — un théorème de J. Briançon **[2]**, **[3]** :

Théorème C. — *Soit $\omega := a(x, y)dx + b(x, y)dy$ un germe de 1-forme holomorphe semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $f = 0$ une équation réduite de* Sep(ω). *Alors f^2 appartient à l'idéal (a, b).*

2. Réduction des singularités et équiréduction

Rappelons qu'un germe de 1-forme singulière $\omega := a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy$ à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est dit *réduit* s'il existe des coordonnées locales u, v, $u(0) = v(0) = 0$, dans lesquelles le saturé de ω à l'origine s'ecrit $\omega'_0 = udv + \lambda v du + \cdots$, $\lambda \notin \mathbb{Q}_{<0}$. Lorsque le saturé de $\mathcal{F}_\omega$ est régulier à l'origine nous dirons encore que ω est réduit. Plus généralement, η désignant une 1-forme sur une surface M et $Z \subset M$ une courbe à croisements normaux, on dira que *le couple* (η, Z) *est réduit en* $m \in Z$ si le saturé η'_m de η en m est réduit et satisfait une des deux conditions suivantes :

(1) $\eta'_m(m) = 0$, η est réduit, et Z est strictement invariant,
(2) $\eta'_m(m) \neq 0$ et $m \notin \Sigma(\eta; Z)$.

Nous notons $C(\eta, Z)$ l'ensemble des points de M où (η, Z) n'est pas réduit.

Lorsque ω n'est pas réduit, on lui associe une succession d'applications d'éclatement $E^i_\omega : M^i_\omega \longrightarrow M^{i-1}_\omega$ de la manière suivante :

– $M^0_\omega = \mathbb{C}^2$ et E^1_ω est l'application d'éclatement de l'origine,
– $E^1_\omega, \ldots, E^i_\omega$ étant définis, désignons par $E_{\omega,i}$ le composé $E^1_\omega \circ \cdots \circ E^i_\omega$, par D^i_ω le diviseur exceptionnel ${E_{\omega,i}}^{-1}(0)$ et notons $\omega_i := {E_{\omega,i}}^*(\omega)$. Alors E^{i+1}_ω est l'éclatement simultané des points de $C\left(\omega_i, D^i_\omega\right)$.

Un théorème classique de A. Seidenberg *cf.* **[17]** ou **[11]**, assure que cette succession d'éclatements s'arrête à une certaine hauteur h_ω :

$$C\left(\omega_{h_\omega}, D^{h_\omega}_\omega\right) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad C\left(\omega_{h_\omega-1}, D^{h_\omega-1}_\omega\right) \neq \varnothing.$$

Nous notons dans toute la suite :

$$(1)\qquad \begin{gathered} E_\omega := E_{\omega,h_\omega}, \quad M_\omega := M^{h_\omega}_\omega, \quad D_\omega := D^{h_\omega}_\omega, \\ \widetilde{\omega} := {E_\omega}^*(w), \quad \widetilde{\mathcal{F}}_\omega := \mathcal{F}^{\mathrm{sat}}_{\widetilde{\omega}}, \quad \widetilde{\Sigma}_\omega := \Sigma\left(\widetilde{\omega}; D^{h_\omega}_\omega\right). \end{gathered}$$

Une *déformation de* $\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ *de base* $\mathbb{C}^p, 0$ est un germe de 1-forme du type

$$\eta = A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy, \quad A, B \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}$$

qui vérifie :

$$A(x,y;0) = a(x,y), \quad B(x,y;0) = b(x,y), \quad A(0,0;t) = B(0,0;t) = 0.$$

Ainsi η définit un « germe de famille analytique de germes de 1-formes », en considérant les restrictions η_t de η à $\mathbb{C}^2 \times t, (0,t)$. Nous désignerons souvent la déformation η par $(\eta_t)_{t\in\mathbb{C}^p,0}$.

Définition 2.1. — Une déformation η d'un germe non réduit $\omega \in \Lambda^1_{\mathbb{C}^2,0}$ est dite *équiréductible* s'il existe une succession finie d'éclatements $E^i_\eta : M^i_\eta \longrightarrow M^{i-1}_\eta$ telle que

(1) chaque E^i_η est un éclatement de centre une sous variété-lisse $C^{i-1}_\eta \subset M^{i-1}_\eta$ de codimension 2,
(2) notons encore $E_{\eta,i} := E^1_\eta \circ \cdots \circ E^i_\eta$, $D^i_\eta := {E_{\eta,i}}^{-1}(0)$, $\eta_i := {E_{\eta,i}}^*(\eta)$ et $\pi_{\eta,i} := \pi \circ E_{\eta,i}$ où π est la projection $\pi(x,y;t) := t$. Alors les variétés $\Sigma\left(\eta_i, D_{\eta,i}\right)$ et $C\left(\eta_i, D_{\eta,i}\right)$ sont lisses et étales via $\pi_{\eta,i}$ au dessus de $\mathbb{C}^p, 0$ et sont contenues dans D^i_η,
(3) pour $t \in \mathbb{C}^p$ assez petit la succession d'éclatements obtenus par restriction de chaque E^i_η aux fibres de $\pi_{\eta,i}$ et $\pi_{\eta,i-1}$ est exactement la succession d'éclatements de la réduction de η_t.

Lorsque ω est réduit on convient que l'équiréductibilité de η signifie que $\Sigma(\eta) = 0 \times \mathbb{C}^p, 0$ et que pour tout $t \in \mathbb{C}^p$ assez petit, η_t est réduit.

Remarquons que $\eta_t := xdy + (\lambda + t)ydx + \cdots$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ n'est pas une déformation équiréductible, puisque η_t n'est pas réduite pour $t \in -\lambda + \mathbb{Q}_{<0}$.

3. Formes semi-hyperboliques

Ce sont les formes qui dans **[5]** s'appelleraient « courbes généralisées non-dicritiques ». Conservons les notations des paragraphes précédents.

Définition 3.1. — On dit qu'un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de 1-forme à singularité isolée $\omega := a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ est *semi-hyperbolique* si D_ω est un sous ensemble invariant de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ et si toutes les singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont du type : $udv + \lambda vdu + \cdots$ avec $\lambda \notin \mathbb{Q}_{\leq 0}$.

La première condition signifie que ω n'est pas dicritique (*cf.* Introduction). Il est prouvé dans **[5]** que la seconde condition implique les trois propriétés suivantes, où $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ désigne une équation réduite de $\mathrm{Sep}(\omega)$:

P1. La réduction de ω est exactement la *réduction de f*, c'est à dire la réduction de df ;

P2. Le *nombre de Milnor* de ω à l'origine, $\mu_0(\omega) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/(a,b)\right)$ est égal au *nombre de Milnor de f* à l'origine $\mu_0(f) := \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/(f'_x, f'_y)\right)$. De plus cette propriété est caractéristique : si ω (non-dicritique) n'est pas semi-hyperbolique, alors $\mu_0(f) < \mu_0(\omega)$;

P3. Associons à chaque composante irréductible D de D_ω les poids suivants :
   (1) *la multiplicité $m_\omega(D)$ de D suivant ω*, c'est à dire le plus grand entier k tel que $u^{-k}\widetilde{\omega}$ soit holomorphe, $u \in \mathcal{O}_{M_\omega,m}$ désignant une équation réduite locale de D en un point $m \in D$ quelconque,
   (2) *la multiplicité $m_f(D)$ de D*, comme composante de $\{f \circ E_\omega = 0\}$, c'est à dire $m_f(D) := m_{df}(D) + 1$;

   Alors, pour toute composante irréductible D de D_ω, on a : $m_\omega(D) = m_f(D) - 1$.

Notons maintenant
$$S'_\omega := {E_\omega}^{-1}\left(\mathrm{Sep}(\omega)\right)$$
la courbe formée de D_ω et des transformées strictes de $\mathrm{Sep}(\omega)$. Considérons le faisceau $\mathcal{X}_{M_\omega, S'_\omega}$ des des germes de champs de vecteurs de M_ω tangents à S'_ω en chacun de ses points réguliers et le sous-faisceau $\mathcal{X}_{M_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_\omega}$ des champs tangents au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. Restreignons ces faisceaux à D_ω
$$\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} := i^{-1}\left(\mathcal{X}_{M_\omega, \widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right), \qquad \mathcal{X}_{S'_\omega} := i^{-1}\left(\mathcal{X}_{M_\omega}, S'_\omega\right), \tag{2}$$
où $i : D_\omega \hookrightarrow M_\omega$ désigne l'application d'inclusion. Ce sont des faisceaux de modules cohérents sur
$$\widetilde{\mathcal{O}} := i^{-1}(\mathcal{O}_{M_\omega}).$$

***Lemme 3.2* (clé).** — *Soit ω un germe de 1-forme semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors le sous-faisceau d'idéaux de $\widetilde{\mathcal{O}}$ engendré par l'image du morphisme*

$$\widetilde{\omega}\cdot : \mathcal{X}_{S'_\omega} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{O}}, \qquad Z \longmapsto \widetilde{\omega}\cdot Z$$

est égal au faisceau d'idéaux $(f\circ E_\omega)$ engendré par la section globale $f\circ E_\omega$ de $\widetilde{\mathcal{O}}$; En d'autres termes, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} \xrightarrow{\rho} \mathcal{X}_{S'} \xrightarrow{\widetilde{\omega}\cdot} (f\circ E_\omega) \longrightarrow 0, \tag{3}$$

où ρ désigne le morphisme d'inclusion, et $\widetilde{\omega} := E_\omega{}^*(w)$.

Démonstration. — En un point c de D_ω fixons des coordonnées locales u, v dans lesquelles $f\circ E_\omega = u^p v^q$ avec $q \neq 0$. On est nécéssairement dans l'une des deux éventualités suivantes :

(a) $p = 0$. — Alors D_ω et $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont réguliers au point c et d'après la propriété P3 ci-dessus on a

$$\widetilde{\omega} = v^{q-1}\left(A(u,v)vdu + B(u,v)dv\right) \quad \text{avec} \quad B(0,0)\neq 0,$$

$$\mathcal{X}_{S'_\omega,c} = \widetilde{\mathcal{O}}_c\frac{\partial}{\partial u} \oplus \widetilde{\mathcal{O}}_c v\frac{\partial}{\partial v}.$$

(b) $p \neq 0$. — Alors si D_ω est régulier, $p = 1$ car f est réduit. Toujours à l'aide de P3 on obtient :

$$\widetilde{\omega} = u^{p-1}v^{q-1}\left(A(u,v)vdu + B(u,v)udv\right) \quad \text{avec} \quad A(0,0),\ B(0,0)\neq 0,$$

$$\mathcal{X}_{S'_\omega,c} = \widetilde{\mathcal{O}}_c u\frac{\partial}{\partial u} \oplus \widetilde{\mathcal{O}}_c v\frac{\partial}{\partial v}.$$

Dans chaque cas on a bien : $\widetilde{\omega}\cdot\mathcal{X}_{S'_\omega,c} = (f\circ E_\omega)_c$. □

La semi-hyperbolicité est une propriété ouverte par déformation équiréductibles. En effet :

***Proposition 3.3*.** — *Soit $(\eta_t)_t$ une déformation équiréductible d'un germe ω de 1-forme semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors pour tout t assez petit le germe η_t est aussi semi-hyperbolique.*

Démonstration. — En raisonnant par récurrence sur h_ω, on se ramène aisément au cas où ω est réduit. Par continuité des valeurs propres de la partie linéaire de η_t la proposition est alors triviale. □

Les propriétés P1 et P3 peuvent aussi s'exprimer conjointement en terme d'arbre dual.

***Définition 3.4*.** — On appelle *arbre dual associé à ω* le graphe pondéré et fléché $\mathbb{A}^*(\omega)$ construit de la manière suivante :

- à chaque composante irréductible de D_ω on associe biunivoquement un sommet de $\mathbb{A}^*(\omega)$. Deux sommets de $\mathbb{A}^*(\omega)$ sont joints par une arête ssi les composantes de D_ω correspondantes s'intersectent ;
- on munit un sommet de $\mathbb{A}^*(\omega)$ d'une flèche pour chaque point singulier de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ qui n'est pas un point singulier de $\mathcal{D}_\omega$;
- les sommets correspondant à une composante dicritique (*i.e.* non-invariante) de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ portent une double flèche ;
- chaque sommet est pondéré par l'auto-intersection de la composante de D_ω correspondante.

On aurait pu aussi pondérer $\mathbb{A}^*(\omega)$ *par multiplicités* : le sommet correspondant à une composante D est affecté du poids $m_\omega(D)$. Lorsque ω est la différentielle d'une fonction à singularités isolées il est bien connu que ces deux pondérations sont équivalentes : on passe biunivoquement de l'une à l'autre par une correspondance affine [**8**]. Grâce à la propriété P3 il en est de même lorsque ω est semi-hyperbolique. Les propriétes P1 et P3 des formes semi-hyperboliques se résument ainsi :

P4. Les arbres duaux de ω et de df munis de leurs deux pondérations : auto-intersections et multiplicités, sont égaux, f désignant toujours une équation réduite de $\mathrm{Sep}(\omega)$.

Lorsque ω n'est plus semi-hyperbolique cette propriété n'est pas toujours vérifiée, cela dépend de la transversalité des variétés fortes des singularités de type selle-nœud de $\mathcal{F}_\omega$ aux branches du diviseur exceptionnel. Dans [**12**] [**13**] nous caractérisons et classifions formellement les 1-formes qui satisfont P4. Cependant le théorème 1 de [**5**] permet facilement de montrer la propriété suivante :

P5. Lorsque ω est semi-hyperbolique, les multiplicités $m_\omega(D)$ ne dépendent que de l'arbre dual $\mathbb{A}^*(\omega)$ pondéré par auto-intersections. De plus, dans l'ensemble $\Lambda^1(\mathbb{A}^*)$ des germes de 1-formes ayant toutes le même arbre dual $\mathbb{A}^*$ (pondéré avec les auto-intersections), les formes semi-hyperboliques réalisent pour chaque sommet le minimum des pondérations par multiplicités.

On en déduit le

Théorème 3.5. — *Une déformation η d'un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme semi-hyperbolique est équiréductible si et seulement si, pour t assez petit, on a les égalités des arbres duaux pondérés par auto-intersection : $\mathbb{A}^*(\eta_t) \equiv \mathbb{A}^*(\omega)$.*

Remarquons que dans l'hypothèse de ce théorème, on ne suppose pas l'égalité $\mathrm{Sing}(\eta) = 0 \times \mathbb{C}^p, 0$ mais seulement l'inclusion $\mathrm{Sing}(\eta) \subset 0 \times \mathbb{C}^p, 0$.

Démonstration. — Un sens de cette équivalence est trivial, montrons la suffisance de la condition d'égalité des arbres.

Il est clair que chaque η_t est non-dicritique. On en déduit en particulier que l'équiréductibilité de η est triviale lorsque ω est réduite, car ω ne peut bifurquer en un selle-nœud. Dans ce cas l'équiréduction consiste à ne pas éclater. La démonstration se fait par induction de la manière suivante. Définissons d'abord par récurrence la notion de *n-équiréductibilité* :

- Nous disons que η est *0-équiréductible* si ω est réduite et η est équiréductible : chaque η_t est réduit.
- Nous disons que η est *1-équiréductible* si η n'est pas 0-équiréductible et si après l'éclatement $E^1 : M^1 \longrightarrow \mathbb{C}^{2+p}$ de $C^1 := 0 \times \mathbb{C}^p$ l'ensemble suivant
$$\Sigma^1 := \Sigma(\eta^1; D^1) \cap D^1 \quad \text{avec} \quad \eta^1 := {E^1}^*(\eta), \quad D^1 := (E^1)^{-1}(C^1)$$
est lisse et étale[(1)] au dessus de P.
- Nous disons que η est *n-équiréductible*, $2 \leq n \leq h_\omega$, si η est 1-équiréductible et au voisinage de chaque branche de Σ^1 le saturé de η_1 est k-équiréductible avec $k \leq (n-1)$.

Il suffit de prouver, sous l'hypothèse du théorème, que :

(1) η est 1-équiréductible,

(2) si η est n-équiréductible, alors η est aussi $(n+1)$-équiréductible, $n \leq h_\omega$;

L'équiréduction se construira alors en éclatant successivement les lieux singuliers stricts contenus dans le diviseur exceptionnel le long desquels le transformé saturé de η n'est pas 0-équiréductible.

Montrons 1. Notons comme d'habitude η^1_t, D^1_t, π^1_t les restrictions de η^1, D^1 et π^1 à $M^1_t := (\pi^1)^{-1}(t)$, avec : $\pi : \mathbb{C}^{2+p} \longrightarrow \mathbb{C}^p$ désignant la projection linéaire et $\pi^1 := \pi \circ E^1$. La multiplicité $\nu(t)$ de η_t à l'origine est égale à $m_{\eta_t}(D^1_t)$. La semicontinuité de $\nu(t)$ et la propriété de minimalité de P5 appliquée à D^1_t entrainent que $\nu(t)$ est constant. Ainsi la restriction de π^1 à Σ^1_t est à fibres $\Sigma^1_{\eta_t}$ finies. Le nombre d'éléments de $\Sigma^1_{\eta_t}$ est constant égal au nombre de flèches et d'arêtes portées par le sommet de $\mathbb{A}^*(\eta_t)$ correspondant à D^1_ω. Il est constant puisque $\mathbb{A}^*(\eta_t) = \mathbb{A}^*(\omega)$. On en déduit que Σ^1 est étale via π^1.

Montrons 2. La n-équiréductibilité de ω permet de construire n applications d'éclatements $E^i : M^i \longrightarrow M^{i-1}$ de la manière suivante : E^1 est l'éclatement de $C^1 = 0 \times \mathbb{C}^p$; Notons
$$E_i := E^1 \circ \cdots \circ E^{i-1}, \quad \pi^i := \pi \circ E_i, \quad D^i := {E_i}^{-1}(C^1),$$
$$\eta^i := {E_i}^*(\eta), \quad \Sigma^i := \Sigma(\eta^i, D^i) \cap D^i,$$
et définissons par induction E^i comme l'éclatement de centre l'union $C^i \subset M^{i-1}$ des branches de Σ^i où η^i n'est pas 0-équiréductible. On sait de plus que chaque Σ^i est lisse et étale au dessus de $\mathbb{C}^p$ via π^i. Montrons que η^n est 1-équiréductible le long de chaque branche C^n_r $r = 1, \ldots, k$ de $C^n \subset M^n$. Pour cela paramétrisons chaque C^n_r

(1) Dans cette définition il n'est pas supposé que $\Sigma(\eta^1; D^1)$ est contenu dans D^1.

par une section $c_r(t)$ de π^n. La multiplicité $\nu_r(t)$ au point $c_r(t)$ de la restriction η_t^n de η^n à $M_t^n := (\pi^n)^{-1}(t)$ se décompose en

$$\nu_r(t) = \widetilde{\nu}_r(t) + \sum_j m_{\eta_t,j}(D_t^n(r))$$

où $D_{t,j}^n(r)$ désigne les composantes irréductibles de $D_t^n := D^n \cap M_t^n$ qui passent par le point $c_r(t)$ et $\widetilde{\nu}_r(t)$ désigne la multiplicité du saturé local de η_t^n au point $c_r(t)$. Eclatons l'ensemble C^{n+1} des branches de Σ^n où η^n n'est pas 0-équiréductible, $E^{n+1} : M^{n+1} \longrightarrow M^n$. D'après le lemme suivant

Lemme 3.6. — *Les fonctions $t \longmapsto \widetilde{\nu}_r(t)$ sont constantes, $r = 1, \ldots, k$.*

l'ensemble $\Sigma^{n+1} := \Sigma\left(\eta^{n+1}; D^{n+1}\right)$ avec

$$\eta^{n+1} := \left(E^{n+1}\right)^*(\eta^n) \qquad D^{n+1} := \left(E^{n+1}\right)^{-1}(D^n)$$

est fini au-dessus de $\mathbb{C}^p$ via $\pi^{n+1} := \pi^n \circ E^{n+1}$. Pour conclure il suffit de voir qu'il est étale ou, ce qui revient au même, que le nombre $s^n(t)$ de points de sa fibre au dessus de $t \in \mathbb{C}^p$ est indépendant de t. Mais $s^n(t)$ est la somme des nombres de flèches et d'arêtes portées par les sommets de $\mathbb{A}^*(\eta_t)$ correspondant aux diviseurs créés par les éclatements des points $c_r(t)$, $r = 1, \ldots, k$. Ces sommets se détectent sur $\mathbb{A}^*(\eta_t)$ à partir de la pondération par auto-intersection. D'où la conclusion. □

Démonstration du lemme (3.6). — Supposons que $\widetilde{\nu}_1(0) \leq \cdots \leq \widetilde{\nu}_k(0)$ et désignons par $\mathbb{A}_r^*(t)$ l'arbre dual (pondéré par auto-intersections) du saturé de η_t^n au point $c_r(t)$. Fixons pour chaque t une bijection

$$\rho_t : \{1, \ldots, k\} \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$$

telle que $\mathbb{A}_r^*(t) = \mathbb{A}_{\rho_r(t)}^*(0) \subset \mathbb{A}^*(\omega)$; De telles applications existent puisque l'arbre dual de η_t est constant et que pour chaque t la suite $\left(E_t^i\right)_{i=1,\ldots,n}$ correspond à la suite $\left(E_{\eta_t}^i\right)_{i=1,\ldots,n}$ extraite de la réduction de η_t ; On sait que cette suite se détecte dans $\mathbb{A}^*(\eta_t)$ à partir des auto-intersections.

Les multiplicités $m_{\eta_t}(D_t^n(r))$ sont constantes puisque Σ^n est fini au-dessus de $\mathbb{C}^p$. D'autre part $\nu_r(t)$ est la multiplicité du diviseur créé par l'éclatement de $c_r(t)$ dans M_t^n. Appliquons pour $t = 0$ la propriété P5 de minimalité des multiplicités de $\mathbb{A}^*(\omega)$ puis la semicontinuité inférieure des $\widetilde{\nu}_r(t)$. Il vient :

$$\widetilde{\nu}_{\rho_t(r)}(0) \leq \widetilde{\nu}_r(t) \leq \widetilde{\nu}_r(0) \qquad r = 1, \ldots, k. \tag{4}$$

En sommant ces inégalités on obtient $\sum_r \widetilde{\nu}_r(0) = \sum_r \widetilde{\nu}_r(t)$. La semi-continuité des $\widetilde{\nu}_r(t)$ permet de conclure. □

4. Déformations équisingulières de germes de courbes planes

Classiquement une *déformation de base* $\mathbb{C}^p, 0$ *d'un germe de courbe* analytique $X_0 \subset \mathbb{C}^2, 0$ est la donnée (X, π) d'un germe d'hypersurface $X \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p, 0$ qui intersecte $\mathbb{C}^2 \times 0$ suivant X_0, contient $0 \times \mathbb{C}^p, 0$ et de la projection canonique

$$\pi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p.$$

On associe ainsi à (X, π) le «germe de famille analytique» de germes en $(0, t)$ de courbe plane $X_t := \pi^{-1}(t) \cap X$. Nous noterons souvent la déformation (X, π) par $(X_t)_{t \in \mathbb{C}^p, 0}$, ou plus simplement par $(X_t)_t$. Tout germe d'application holomorphe λ de $\mathbb{C}^q, 0$ dans $\mathbb{C}^p, 0$ permet de construire la *déformation* $\left(X_{\lambda(s)}\right)_s$ *obtenue par à partir de* $(X_t)_t$ *par le changement des paramètres* λ ; elle est définie par l'hypersurface de $\mathbb{C}^{2+q}, 0$ d'équation $F(x, y; \lambda(s)) = 0$, où $F(x, y; t) = 0$ est une équation réduite de X.

Deux déformations (X, π) et (Y, π) de X_0 de même base $\mathbb{C}^p, 0$ sont dites *topologiquement équivalentes*, resp. *analytiquement équivalentes*, s'il existe un germe d'homéomorphisme, resp. de biholomorphisme de $\mathbb{C}^{2+p}, 0$ qui commute avec π, vaut l'identité sur $\mathbb{C}^2 \times 0$ et transforme X en Y. Une déformation équivalente à la *déformation constante* $(X_0 \times \mathbb{C}^p, \pi)$ est dite *triviale.*

Lorsque la restriction à $\mathbb{C}^2 \times 0$ d'une équation réduite de X est une équation réduite de X_0 on dit que la déformation est *plate.* Cela signifie que *l'ensemble critique* $\mathrm{Crit}(X, \pi)$, constitué des points singuliers de X et des points critiques de la restriction de π à la partie lisse de X, est fini au-dessus de $\mathbb{C}^p, 0$ via π.

On retrouve la notion classique d'équiréductibilité **[18]** **[19]** en posant :

Définition 4.1. — Une déformation (X, π) d'un germe de courbe plane X_0 est dite *équiréductible* si elle est plate et si, $F(x, y; t)$ étant une équation réduite de X, la 1-forme $\eta_F := \dfrac{\partial F}{\partial x} dx + \dfrac{\partial F}{\partial y} dy$ définit une déformation équiréductible de df, avec $f(x, y) := F(x, y; 0)$.

Les résultats classiques de Zariski et Lê Dung Trang - C. P. Ramanujam **[18]** **[19]** **[9]** affirment que les propriétés suivantes, relatives à une déformation (X, π) de X_0 de base $\mathbb{C}^p, 0$, sont équivalentes :

(1) (X, π) est équiréductible,
(2) (X, π) est topologiquement triviale,
(3) $\mathrm{Crit}(X, \pi) = 0 \times \mathbb{C}^p$,
(4) $\mu_{(o,t)}(X_t) = \mu_0(X_0)$ pour t assez petit,

où $\mu_{(o,t)}(X_t)$ désigne le nombre de Milnor d'une équation réduite de X_t. Lorsque ces conditions sont satisfaites la déformation est dite *équisingulière.* L'existence d'un espace semi-universel pour ces déformations est bien connue. Nous allons en donner ici une construction géométrique qui nous sera utile par la suite.

Introduisons d'abord la notion de vitesse de déformation. Pour cela fixons une déformation équiréductible (X, π), $X = F^{-1}(0)$, de $X_0 = f^{-1}(0)$ de base $\mathbb{C}^p, 0$. L'image réciproque X' de X par l'application d'équiréduction $E_X := E_{\eta_F} : M_X \longrightarrow \mathbb{C}^{2+p}, 0$ peut être considérée comme une « déformation » de $X'_0 := X' \cap {\pi_X}^{-1}(0)$, avec $\pi_X := \pi \circ E_X$. En fait, puisque X' est à croisements normaux, son germe en chaque point de $D_{X_0} := D_X \cap {\pi_X}^{-1}(0)$, $D_X := {E_X}^{-1}(0 \times \mathbb{C}^p)$, est une déformation analytiquement triviale du germe de X'_0. On construit ainsi un recouvrement $\mathcal{U} := (U_i)_i$ de D_{X_0} et, le long de chaque U_i, des germes d'applications de trivialisations :

$$\Psi_i : (M_X, U_i) \xrightarrow{\sim} (M_{X_0} \times \mathbb{C}^p, U_i \times 0)\,, \qquad \Psi_i(X', U_i) = X'_0 \times \mathbb{C}^p, U_i \times 0$$

qui valent l'identité en restriction à $M_{X_0} := {\pi_X}^{-1}(0)$. Il est facile de voir, en obtenant par exemple les Ψ_i par intégrations de champs de vecteurs, que l'on peut faire cette construction avec un *recouvrement $\mathcal{U}$ adapté* dans le sens suivant : ses ouverts sont de deux types

– la trace sur D_{X_0} de « polydisques » de M_{X_0}

$$P(m; \varepsilon) := \{|\, u_m \,| < \varepsilon, |\, v_m \,| < \varepsilon\}\,, \quad m \in \mathrm{Sing}(X'_0),$$

où u_m, v_m sont des coordonnées locales en m telles que $u_m v_m$ définit X'_0,

– les composantes connexes de $D_{X_0} - \bigcup_m P(m; \varepsilon/2)$.

L'intérêt d'un tel recouvrement est de ne pas avoir d'intersection d'ouverts trois à trois non-triviale.

La 1-cocycle défini par la cochaine $\Phi_{ij} := \Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ est à valeurs dans le faisceau de base $D_{X_0} \times 0 \subset D_{X_0} \times \mathbb{C}^p$, noté $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}^p}\,(M_{X_0}; X'_0)$, des germes aux points de D_{X_0} d'automorphismes analytiques de $M_{X_0} \times \mathbb{C}^p$ valant l'identité au dessus de 0, commutent avec $\pi_{X_0 \times C^p}$ et laissent $X'_0 \times \mathbb{C}^p$ invariant. Il rend compte de la non-trivialité globale de X' — et donc de X. Ainsi les *« vitesses initiales de déformation »* de X sont les cocycles

$$\left[\frac{\partial X}{\partial t_k}\right]_{t=0} := \left[\left.\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial t_k}\right|_{t=0}\right] \in H^1\left(D_{X_0}; \mathcal{X}_{X'_0}\right)$$

où $\mathcal{X}_{X'_0}$ désigne, comme au paragraphe précédent, faisceau de base D_{X_0} des germes de champs de vecteurs sur M_{X_0} qui sont tangents à X'_0 en chaque point régulier. D'après un théorème [**1**] d'Andreotti-Grauert, $H^1\left(D_{X_0};\ X_{X'_0}\right)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie car D_{X_0} est exceptionnel et $\mathcal{X}_{X'_0}$ est un $\mathcal{O}_{M_{X_0}}$-module cohérent.

Théorème 4.2. — *Il existe une déformation équisingulière $\left(X_u^U\right)_u$ de X_0 de base $\mathbb{C}^{\tau(X_0)}, 0$ avec $\tau(X_0) := \dim_{\mathbb{C}} H^1\left(D_{X_0}; \mathcal{X}_{X'_0}\right)$, qui est semi-universelle dans le sens suivant : toute déformation équisingulière $(X_t)_{t \in \mathbb{C}^p, 0}$ de X_0 est analytiquement équivalente à une déformation $\left(X^U_{\lambda(t)}\right)_t$ obtenue à partir de $\left(X_u^U\right)_u$ par un changement de paramètres $\lambda : \mathbb{C}^p, 0 :\longrightarrow \mathbb{C}^{\tau(X_0)}, 0$ dont la dérivée en 0 est unique. De plus on a* *une identification canonique*

$$\sigma_{X_0} : T_0\mathbb{C}^{\tau(X_0)} \xrightarrow{\sim} H^1\left(D_{X_0}; \mathcal{X}_{X'_0}\right)$$

et via cette identification la dérivée $T_0\lambda$ de λ à l'origine s'écrit

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left.\frac{\partial}{\partial t_k}\right|_{u=0} \longmapsto \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \left[\frac{\partial X}{\partial t_k}\right]_{t=0}. \tag{5}$$

Remarque 4.3. — Pour $(X_t)_t = \left(X_u^U\right)_u$ la formule (5) définit l'identification σ_{X_0}.

Démonstration. — Elle se fait par les mêmes techniques que celles utilisées dans **[10]** pour la construction d'un déploiement universel de ω. Aussi nous n'en donnons que les grandes lignes. Notons $\tau := \tau(X_0)$.

Etape 1. — Le recouvrement $\mathcal{U}$ étant adapté, on montre par une technique simple de recollements que tout cocycle $[\Phi_{ij}]$ à valeur dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}^p}(M_{X_0}; X'_0)$ est le cocycle associé à une déformation équiréductible de X_0 de base $\mathbb{C}^q, 0$.

Etape 2. — Donnés des éléments $\left[V_{ij}^1\right], \ldots, \left[V_{ij}^q\right]$ de $H^1\left(\mathcal{U}; \mathcal{X}_{X'_0}\right)$ on montre qu'il existe une déformation équiréductible $(X, \pi_{\mathbb{C}^q})$ de X_0 telle que $\left[\frac{\partial X}{\partial t_k}\right]_{t=0} = \left[V_{ij}^k\right]$, $k = 1\ldots, q$. Il suffit pour cela d'appliquer ce qui précède au composé des flots ϕ_{ij,t_k} des champs V_{ij}^k.

Etape 3. — On construit $\left(X_u^U\right)_u$ grace à l'étape précédente, en imposant aux cocycles $\left[\frac{\partial X^U}{\partial u_k}\right]_{u=0}$, $k = 1, \ldots, \tau$ de former une base de $H^1\left(\mathcal{U}; \mathcal{X}_{X'_0}\right)$.

Etape 4. — Donnée une déformation équiréductible $(Y_t)_t$ de X_0 de base quelconque $\mathbb{C}^p, 0$, on construit grace à 1. une déformation équiréductible $(Z_{u,t})_{u,t}$ de base $\mathbb{C}^\tau \times \mathbb{C}^p, 0$ telle que $(Z_{u,0})_u = \left(X_u^U\right)_u$ et $(Z_{0,t})_t = (Y_t)_t$.

Etape 5. — On construit « l'application de Kodaira-Spencer » de $(Z_{u,t})_{u,t}$. Pour cela on considère un représentant $\underline{X_0}$ du germe X_0 sur une boule B^2 et un representant $\underline{Z}$ de la déformation Z construite à l'étape précédente sur un polydisque $B^2 \times B$, les boules $B^2 \subset \mathbb{C}^2$ et $B \subset \mathbb{C}^{\tau+p}$ étant de rayons assez petits. Soit $E_{\underline{Z}} : M_{\underline{Z}} \longrightarrow B^2 \times B$ l'application d'équiréduction de $\underline{Z}$; notons $\underline{Z}' := E_{\underline{Z}}^{-1}(Z)$. Considérons sur $M_{\underline{Z}}$ le faisceau $\mathcal{X}_{\underline{Z}'}^v$ des germes de champs de vecteurs de $M_{\underline{Z}}$ qui sont tangents à $\underline{Z}'$ et verticaux pour la projection $\pi' := \pi \circ E_{\underline{Z}}$, *i.e.* $T\pi' \cdot Z \equiv 0$, où $\pi : B^2 \times B \longrightarrow B$ désigne la projection canonique. D'après un théorème classique de Grauert le faisceau de base $B^2 \times B$

$$R^1(E_{\underline{Z}*})\left(\mathcal{X}_{\underline{Z}'}^v\right) : W \longmapsto H^1\left(E_{\underline{Z}}^{-1}(W); \mathcal{X}_{\underline{Z}'}^v\right)$$

est cohérent sur $\mathcal{O}_{B^2\times B}$. Il est visiblement à support dans $0 \times B$. Ainsi

$$R^1(\pi'_*)\left(\mathcal{X}_{\underline{Z}'}^v\right) : W \longmapsto H^1\left({\pi'}^{-1}(W); \mathcal{X}_{\underline{Z}'}^v\right)$$

est un faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_B$. D'après Andreotti-Grauert on a aussi

$$R^1(\pi'_*)\left(\mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}\right)(W) = H^1\left({\pi'}^{-1}(W)\cap D_{\underline{Z}}; \mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}\right), \quad D_{\underline{Z}} := E_{\underline{Z}}^{-1}(0\times B).$$

Visiblement tout champ de vecteur V dans B se relève sur les ouverts U_j d'un recouvrement de $M_{\underline{Z}}$ en des sections champs V_j qui sont tangents à $\underline{Z}'$. *L'application de Kodaira-Spencer de* $(Z_{u,t})_{u,t}$ est le morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+\tau},0}$-modules de types finis

$$\left[\frac{\partial Z}{\partial(u,t)}\right] : \mathcal{X}_{\mathbb{C}^{2+\tau},0} \longrightarrow R^1(\pi'_*)\left(\mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}\right)_0, \quad V \longmapsto [V_j - V_i]. \tag{6}$$

Son noyau $\mathcal{N}$ est constitué des champs V qui admettent un relevé $\widetilde{V}$ global. Ainsi, par intégration des flots de V et de $\widetilde{V}$, la déformation $(Z_{u,t})_{u,t}$ est analytiquement triviale lorsque (u,t) varie sur une orbite de V.

Etape 6. — On construit la factorisation λ. Remarquons d'abord que (6) est surjective. En effet considérons $\mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}$ comme un faisceau de modules sur l'anneau $A := \mathcal{O}_B(B)$. Soit $\mathfrak{M}\subset A$ l'idéal des fonctions qui s'annulent à l'origine. A l'aide d'un bon recouvrement de $D_{\underline{Z}}$ sans intersection 3 à 3 non-triviales, on montre facilement l'égalité :

$$R^1(\pi'_*)\left(\mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}\right)(B)\otimes_A A/\mathfrak{M} \simeq H^1\left(D_{\underline{Z}}; \mathcal{X}^v_{\underline{Z}'}\otimes_A A/\mathfrak{M}\right) \simeq H^1\left(D_{X_0}; \mathcal{X}_{X'_0}\right). \tag{7}$$

Ainsi, avec ces identifications $\sigma_Z := \left[\frac{\partial Z}{\partial(u,t)}\right]\otimes_A A/\mathfrak{M}$ est l'application

$$\sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k\left.\frac{\partial}{\partial u_k}\right|_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{p}\beta_k\left.\frac{\partial}{\partial t_k}\right|_{(0,0)} \longmapsto \sum_{k=1}^{\tau}\alpha_k\left[\frac{\partial Z}{\partial u_k}\right]_{u=0,t=0} + \sum_{k=1}^{p}\beta_k\left[\frac{\partial Z}{\partial t_k}\right]_{u=0,t=0}.$$

Cette application est visiblement surjective. Le lemme de Nakayama et l'exactitude à droite du produit tensoriel donnent le surjectivité de $\left[\frac{\partial Z}{\partial(u,t)}\right]$.

De manière plus précise, on a la suite exacte

$$0\longrightarrow \mathcal{N}(0)\longrightarrow T_{(0,0)}\mathbb{C}^\tau\times\mathbb{C}^p \xrightarrow{\sigma_Z} H^1\left(D_{X_0};\mathcal{X}_{X'_0}\right)\longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{N}(0)$ est le sous-espace de $T_0\mathbb{C}^{\tau+p}$ formé des valeurs[(2)] à l'origine des éléments de $\mathcal{N}$; La restriction de σ_Z à $T_0\mathbb{C}^\tau\times 0$ est un isomorphisme ; Ainsi $\mathcal{N}(0)$ est de dimension p et transverse à $T_0\mathbb{C}^\tau\times 0$.

Enfin on voit facilement que $\mathcal{N}$ est involutif, *i.e.* $[\mathcal{N},\mathcal{N}]\subset\mathcal{N}$. D'après un résultat de D. Cerveau **[6]** page 266, $\mathcal{N}$ contient un sous-module libre involutif $\mathcal{T}$ de rang p, tel que $\mathcal{T}(0)=\mathcal{N}(0)$. Le feuilletage régulier $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ définit par $\mathcal{T}$ est transverse à $\mathbb{C}^\tau\times 0$. Lorsque le paramètre (u,v) varie sur une feuille de $\mathcal{F}_\mathcal{T}$ la déformation $(Z_{u,t})_{u,t}$ est triviale. On obtient le changement de paramètres désiré en prenant le germe de l'application $\lambda : 0\times\mathbb{C}^p,(0,0)\longrightarrow\mathbb{C}^\tau\times 0,(0,0)$ qui consiste à suivre les feuilles de $\mathcal{F}_\mathcal{T}$. □

(2) En général $\mathcal{N}(0)$ n'est pas égal à $\mathcal{N}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{\tau+p},0}}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{2+p},0}/(u,t)$.

Remarque 4.4. — On voit facilement à partir de cette construction que la factorisation λ est nécéssairement identiquement nulle lorsque $(X_t)_t$ est triviale.

5. Familles de séparatrices

Les déformations de courbes qui nous intéressent ici sont les familles de séparatrices d'une déformation de 1-forme. A priori cette notion n'est pas bien définie et la dépendance analytique d'une famille de séparatrices demande à être précisée.

Définition 5.1. — Soit η une déformation de base quelconque $\mathbb{C}^p, 0$ d'un germe de 1-forme semi-hyperbolique ω à l'origine de $\mathbb{C}^2$ et (X, π) une déformation de base $\mathbb{C}^p, 0$ de $X_0 := \mathrm{Sep}(\omega)$. Nous disons que (X, π) est une *famille de séparatrices de* η si pour toute valeur t assez petite du paramètre le germe de 1-forme η_t en $(0, t) \in \mathbb{C}^2 \times t$ est non-dicritique et admet X_t comme courbe invariante (non nécéssairement irréductible).

L'existence de famille de séparatrices permettra d'obtenir de bons critères d'équiréductibilité. Cependant je ne sais pas répondre aux questions suivantes :

(1) Est-ce qu'une déformation η d'une 1-forme semi-hyperbolique η_0, de lieu singulier $\mathrm{Sing}(\eta) = 0 \times \mathbb{C}^p, 0$ admet nécéssairement une famille de séparatrices (X, π) telle que $X_t = \mathrm{Sep}(\eta_t)$?
(2) Même question en supposant de plus que chaque η_t est semi-hyperbolique.

Une réponse affirmative impliquerait d'après ce qui suit que η est équiréductible. Un critère d'équiréductibilité dans ce cadre serait la constance du nombre de Milnor de η_t et cela étendrait à ces feuilletages les théorèmes de Zariski et Lê Dung Trang-Ramanujam. Cela donnerait aussi, lorsque η est la différentielle d'une fonction F, une démonstration de l'implication « $\mu(F_t)$ constant $\Rightarrow m_0(F_t)$ constant » qui n'utiliserait pas le critère topologique de Lê Dung Trang-Ramanujam.

De la même manière que pour l'ouverture de la semi-hyperbolicité on montre :

Proposition 5.2. — *Toute déformation équiréductible η d'un germe de 1-forme semi-hyperbolique ω possède une famille de séparatrices (X, π) qui est une déformation équiréductible de* $\mathrm{Sep}(\omega)$ *et qui satistait :* $X_t = \mathrm{Sep}(\eta_t)$.

Une « réciproque » à cette proposition est :

Proposition 5.3. — *Soit η une déformation de base quelconque $\mathbb{C}^p, 0$ d'un germe de 1-forme semi-hyperbolique ω qui possède une famille de séparatrices (X, π). Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *η est équiréductible,*
(2) $\mathrm{Sing}(\eta) = 0 \times \mathbb{C}^p, 0$
(3) $\mu(\eta_t) = \mu(\omega)$,
(4) (X, π) *est équisingulière,*

Démonstration. — L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) et l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) sont triviales. Comme $\mathrm{Crit}(X)$ est contenu dans $\mathrm{Sing}(\eta)$, l'implication (3) $\Rightarrow$ (4) résulte de la propriété P2 des formes semi-hyperboliques énoncée au §3 et du critère (4) d'équisingularité donné au chapitre 4.

Supposons (X, π) équisingulière. D'après P2 on a les inégalités :

$$\mu_{(o,t)}(\eta_t) \geq \mu_{(o,t)}\left(\mathrm{Sep}(\eta_t)\right) \geq \mu_{(o,t)}(X_t) = \mu_0\left(\mathrm{Sep}(\omega)\right) = \mu_0(\omega). \tag{8}$$

Par semicontinuité $\mu_0(\omega) \geq \mu_{(o,t)}(\eta_t)$ et, dans (8), on a partout égalité. Ainsi chaque η_t est semi-hyperbolique et $X_t = \mathrm{Sep}(\eta_t)$. La propriété P1 du chapitre 3 permet de conclure à l'équiréduction de η. □

Ces conditions équivalentes n'impliquent pas, bien sûr, la trivialité topologique de la déformation ; c'est déjà faux lorsque ω est réduit. On a cependant :

Corollaire 5.4. — *Soit η une déformation topologiquement triviale d'un germe de* 1-*forme ω semi-hyperbolique à l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors η est équiréductible.*

Démonstration. — La difficulté vient du fait qu'on ne sait pas à priori que la collection des germes $\mathrm{Sep}(\eta_t)$ est contenue dans une hypersurface de $\mathbb{C}^{2+p}$. Il est clair que chaque η_t est non-dicritique et $\mathrm{Sep}(\eta_t)$ est bien défini. Soit $\Phi := (\Phi_t; t)$ un homéomorphisme trivialisant η, défini sur voisinage assez petit de l'espace des paramètres $P := 0 \times \mathbb{C}^p, 0$ pour que $\mathrm{Sing}(\eta) = P$. Il est clair que $\mu_{(0,t)}(\eta_t)$ est constant. L'image de $\mathrm{Sep}(\omega)$ par Φ_t est une courbe analytique de $\mathbb{C}^2 \times 0$ invariante par η_t. Le même raisonnement avec Φ_t^{-1} prouve que $\Phi_t(\mathrm{Sep}(\omega)) = \mathrm{Sep}(\eta_t)$.

Montrons que chaque η_t est semi-hyperbolique. L'invariance topologique du nombre de Milnor d'un germe de courbe, la propriété P2, la semi-continuité inférieure de $t \longmapsto \mu_{(0,t)}(\eta_t)$ et ce qui précède donnent les relations

$$\mu_0(\mathrm{Sep}(\omega)) = \mu_{(0,t)}(\mathrm{Sep}(\eta_t)) \leq \mu_{(0,t)}(\eta_t) = \mu_0(\omega).$$

La semi-hyperbolicité de ω impliquant l'égalité de $\mu_0(\omega)$ et $\mu_0(\mathrm{Sep}(\omega))$, la ligne précédente ne comporte que des égalités. On conclut de nouveau par P2.

D'après la propriété P4 des 1-formes semi-hyperboliques on a l'égalité des arbres duaux pondérés $\mathbb{A}^*(\eta_t) = \mathbb{A}^*(\mathrm{Sep}(\eta_t))$. On sait d'autre part que l'arbre dual pondéré de réduction d'un germe de courbe plane est un invariant topologique de ce germe. En effet les paires de Puiseux sont des invariants topologique **[20]** et elles donnent, *cf.* **[8]** la réduction des singularités. On conclut par (3.5) □

6. Notions de quasi-homogénéité

Considérons d'abord la quasi-homogénéité au sens des déploiements équisinguliers. Nous conservons les notations des chapitres précédents.

Définition 6.1. — Soit $\omega = a(x,y)\,dx + b(x,y)\,dy$ un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de 1-forme semi-hyperbolique. Un *déploiement équisingulier de ω de base $\mathbb{C}^p$* est un germe de 1-forme à l'origine de $\mathbb{C}^{2+p}$

$$\Omega := A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy + \sum_{j=1}^{p} C_j(x,y;t)dt_j$$

qui satisfait la condition d'intégrabilité $\Omega \wedge d\Omega \equiv 0$ et tel que :

(1) les germes à l'origine de $\mathbb{C}^{2+p}$ des sous-ensembles

$$\{A = B = 0\} \quad \text{et} \quad \{A = B = C_1 = \cdots = C_p = 0\}$$

sont identiques et égaux à $0 \times \mathbb{C}^p, 0$.

(2) la déformation de ω définie par

$$\eta := A(x,y;\,t)\,dx + B(x,y;\,t)\,dy$$

est équiréductible ; Nous la notons $(\Omega_t)_t$;

(3) le diviseur exceptionnel D_Ω de l'équiréduction de η, que nous notons ici $E_\Omega : M_\Omega \longrightarrow \mathbb{C}^{2+p}$, est une hypersurface invariante du feuilletage singulier saturé de codimension un $\widetilde{\mathcal{F}_\Omega}$ défini par les saturés locaux de $\widetilde{\Omega} := E_\Omega^{-1}(\Omega)$. De plus $\mathrm{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_\Omega) = \mathrm{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_\eta)$ et $\Sigma(\widetilde{\mathcal{F}}_\Omega; D_\Omega) = \Sigma(\widetilde{\eta}; D_\Omega)$.

Un tel déploiement définit sur $\mathbb{C}^{2+p}, 0$ un feuilletage $\mathcal{F}_\Omega$ de codimension 1 de lieu singulier $0 \times \mathbb{C}^p, 0$ et transverse en dehors de ce lieu singulier à la projection linéaire $\pi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$. Une *équivalence* de deux déploiements Ω^1 et Ω^2 est une équivalence des déformations associées qui en plus transforme $\mathcal{F}_{\Omega^1}$ en $\mathcal{F}_{\Omega^2}$. On définit de même le *transformé d'un déploiement par un changement de base* $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) : \mathbb{C}^q, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p, 0$ comme la 1-forme $\lambda^\star\Omega$ sur $\mathbb{C}^{2+q}, 0$ obtenue en posant $t_j = \lambda_j(s)$ dans l'expression de Ω.

Un déploiement équisingulier Ω possède d'après (3.3) et (5.2) un *ensemble de séparatrices* : une hypersurface invariante $\mathrm{Sep}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{2+p}, 0$ qui est une déformation équisingulière de $\mathrm{Sep}(\omega)$ et telle que $\mathrm{Sep}(\Omega) \cap \mathbb{C}^2 \times t = \mathrm{Sep}(\Omega_t)$.

***Théorème 6.2* ([10]).** — *Tout germe ω de 1-forme à l'origine de $\mathbb{C}^2$ possède un déploiement équisingulier Ω^U, de base $\mathbb{C}^{\delta(\omega)}, 0$, qui est universel dans le sens suivant : tout déploiement équisingulier Ω de base quelconque $\mathbb{C}^p, 0$ est analytiquement équivalent à un déploiement du type $\lambda^\star\Omega^U$, avec $\lambda : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^{\delta(\omega)}$. De plus Ω^U est unique à unité multiplicative près et*

$$\delta(\omega) := \sum_c \frac{(\nu_c - 1)(\nu_c - 2)}{2}$$

où c décrit l'ensemble $\bigsqcup_{i=0,\ldots,h_\omega} C_\omega^i$ de tous les points que l'on éclate (0 compris) lors de la réduction de ω et ν_c désigne la multiplicité en $c \in C_\omega^i$ du saturé du transformé ω^i de ω, cf. *ch. 2. De plus on a une identification canonique*

$$\sigma_{\Omega^U} : T_0\mathbb{C}^{\delta(\omega)} \longrightarrow H^1(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}),$$

où $\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}$ désigne le faisceau de base D_ω des germes (aux points de D_ω) de champs de vecteurs tangents au feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ et au diviseur D_ω.

Avant de prouver le théorème A de l'introduction précisons la notion de quasi-homogénéité au sens des déploiements.

Définition 6.3. — Un germe de 1-forme à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est dit *d-quasihomogène* si tout déploiement équisingulier de base quelconque Ω satisfait l'équivalence :

- Ω est holomorphiquement trivial si et seulement si la déformation de courbes $(\mathrm{Sep}(\Omega_t))_t$ est holomorphiquement triviale.

Remarque 6.4. — Lorsque ω est exacte, $\omega = df$, tout déploiement de ω est donné par une 1-forme exacte **[11]**. Dans ce cas la définition ci-dessus est équivalente à la définition classique de quasi-homogénéité de f.

Démonstration du théorème A. — Notons $\delta := \delta(\omega)$ et $\tau := \tau(\omega)$. La déformation

$$(\mathrm{Sep}(\Omega^U); \pi_{\mathbb{C}^\delta}) = \left(\mathrm{Sep}(\Omega^U_v)\right)_{v\in\mathbb{C}^\delta} \tag{9}$$

de $X_0 := \mathrm{Sep}(\omega)$ se factorise dans la déformation équisingulière semi-universelle $\left(X^U, \pi_{\mathbb{C}^\tau}\right)$ de X_0. Donnons-nous un changement de base $\Lambda^U : \mathbb{C}^\delta \longrightarrow \mathbb{C}^\tau$ tel que (9) soit analytiquement conjuguée à $\left(X^U_{\Lambda^U(v)}\right)$. Nous allons calculer la dérivée à l'origine de Λ^U.

D'après le lemme (1.1.5) de **[10]** le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_{\Omega^U}$ est localement analytiquement trivial et l'on peut construire des germes de trivialisations

$$\Psi_i : M_{\Omega^U}, U_i \xrightarrow{\sim} M_\omega \times 0, U_i \times 0$$

qui sont définis au voisinage de chaque ouvert U_i d'un recouvrement adapté $\mathcal{U}$ (*cf.* ch. 4) de $D_\omega \subset M_\omega \hookrightarrow M_{\Omega^U}$. On dispose maintenant d'un cocycle

$$\left[\frac{\partial \mathcal{F}_{\Omega^U}}{\partial v_k}\right]_{v=0} := \left[\left.\frac{\partial \Psi_i \circ {\Psi_j}^{-1}}{\partial v_k}\right|_{v=0}\right] \in H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right). \tag{10}$$

Il résulte de la construction de **[10]** que l'identification σ_{Ω^U} du théorème (6.2) s'explicite par :

$$\sigma_{\Omega^U}\left(\sum_k \alpha_k \left.\frac{\partial}{\partial v_k}\right|_{v=0}\right) = \sum_k \alpha_k \left[\frac{\partial \mathcal{F}_{\Omega^U}}{\partial v_k}\right]_{v=0}. \tag{11}$$

D'autre part chaque Ψ_i induit une trivialisation de $S' := {E_\Omega}^{-1}(\mathrm{Sep}(\Omega^U))$. Ainsi, $\mathcal{X}_{S'}$ désignant la restriction à D_ω du faisceau des champs de vecteurs sur M_ω qui sont tangents à S' en chaque point régulier, le cocycle

$$\left[\frac{\partial \mathrm{Sep}(\Omega^U)}{\partial v_k}\right]_{v=0} \in H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{S'}\right)$$

est l'image de (10) par l'application

$$\check{\rho} : H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right) \longrightarrow H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{S'}\right)$$

induite par l'inclusion de faisceaux $\rho : \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} \longrightarrow \mathcal{X}_{S'}$. On déduit de (11) et (4.3) l'égalité suivante (modulo les identifications σ_{Ω^U} et σ_{X^U})

$$T_0\Lambda^U = \check{\rho}. \tag{12}$$

Grâce au lemme clé (3.2) on va pouvoir calculer $T_0\Lambda^U$. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega} \xrightarrow{\rho} \mathcal{X}_{S'} \xrightarrow{\widetilde{\omega}\cdot} (f \circ E_\omega) \longrightarrow 0 \tag{13}$$

où f désigne encore une équation réduite de $S := \mathrm{Sep}(\omega)$. La suite longue de cohomologie associée se décompose en

$$0 \longrightarrow H^0\left(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right) \longrightarrow H^0\left(D_\omega; \mathcal{X}_{S'}\right) \longrightarrow H^0\left(D_\omega; (f \circ E_\omega)\right) \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}\right) \longrightarrow H^1\left(D_\omega; \mathcal{X}_{S'}\right) \longrightarrow H^1\left(D_\omega; (f \circ E_\omega)\right) \longrightarrow 0$$

puisque le recouvrement $\mathcal{U}$ n'a pas d'intersection trois à trois non triviale. Le faisceau $(f \circ E_\omega)$ est isomorphe à $\mathcal{O}$ car engendré par une section triviale. Ainsi[(3)] $H^1\left(D_\omega; (f \circ E_\omega)\right)$ est nul. On en déduit le

Lemme 6.5. — *Si ω est semi-hyperbolique, alors $\Lambda^U : \mathbb{C}^{\delta(\omega)}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^{\tau(\omega)}, 0$ est un germe de submersion.*

Les sections globales des faisceaux de (13) définissent des objets holomorphes sur une petite boule épointée centrée en $0 \in \mathbb{C}^2$; ils se prolongent à l'origine par le théorème classique d'Hartogs. Ainsi, N est le conoyau de l'application $\omega\cdot : V \longmapsto w\cdot V$ qui, à tout élément du module $\mathcal{X}_{S,0} \subset \mathcal{X}_{\mathbb{C}^2,0}$ des germes en 0 de champs de vecteurs de $\mathbb{C}^2, 0$ tangents à S, associe un élément de l'idéal (a, b) de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ engendré par f. Comme tout élément de (a, b) peut s'écrire $\omega \cdot V$ ce conoyau est égal au quotient $(f)/(a, b) \cap (f)$

En conclusion on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{(f)}{(a, b) \cap (f)} \longrightarrow T_0\mathbb{C}^\delta \xrightarrow{T_0\Lambda^U} T_0\mathbb{C}^\tau \longrightarrow O \tag{14}$$

D'après la remarque (4.4) la sous variété $(\Lambda^U)^{-1}(0)$ est l'ensemble dans lequel se factorise nécéssairement toute déformation triviale de $\mathrm{Sep}(\omega)$. Par définition ω est d-quasi-homogène si et seulement si $(\Lambda^U)^{-1}(0) = \{0\}$. Puisque Λ^U est une submersion on obtient les équivalences des propriétés :

---

(3) On peut facilement voir que $H^1\left(D_\omega; \mathcal{O}\right) = 0$: Par un simple calcul de séries de Laurent pour un seul éclatement, puis par induction à l'aide de la suite exacte de Mayer-Vietoris.

(i) ω est d-quasi-homogène,

(ii) $\dfrac{(f)}{(a,b)\cap(f)} = 0$,

(iii) $\delta(\omega) = \tau(S)$.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer les équivalences du théorème.

L'équivalence $(1') \Leftrightarrow (2)$ correspond à (i) $\Leftrightarrow$ (ii). En appliquant (i) $\Leftrightarrow$ (ii) à df on obtient $(3) \Leftrightarrow (4)$. Pour obtenir $(1') \Leftrightarrow (3)$ on applique successivement le critère (i) $\Leftrightarrow$ (iii) à ω et à df, puis on remarque que $\delta(\omega) = \delta(df)$. En effet grâce à la propriété P3 des formes semi-hyperboliques, les multiplicités $m_\omega(D)$ et $m_{df}(D)$ sont toutes égales ; il en est de même des ν_c qui s'en déduisent linéairement. Il reste à prouver $(2) \Leftrightarrow (5)$

Visiblement $\omega \cdot g^{-1}\left(\alpha u\dfrac{\partial}{\partial u} + \beta v\dfrac{\partial}{\partial v}\right) = f$; ce qui donne $(2) \Leftarrow (5)$.

Pour l'implication réciproque exprimons que $f^{-1}(0)$ est séparatrice de ω en écrivant

$$\omega \wedge df = fH dx \wedge dy, \qquad H \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}. \tag{15}$$

Par hypothèse on dipose d'un champ Z qui satisfait $\omega \cdot Z = f$. Ce champ est tangent à $f^{-1}(0) = \mathrm{Sep}(\omega)$ et donc $df \cdot Z$ peut s'écrire fR, $R \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$. Le produit intérieur i_Z appliqué à chaque membre de (15) donne

$$df - R\omega = H i_Z(dx \wedge dy). \tag{16}$$

D'après ce qui est déjà prouvé df est ausi quasi-homogène et on dispose d'un champ Z' qui vérifie $df \cdot Z' = f$. Ce champ est colinéaire à Z le long de la séparatrice commune $f^{-1}(0)$ et l'on a : $dx \wedge dy(Z, Z') = f\Delta'$, ainsi que $\omega \cdot Z' = fR'$, avec $\Delta', R' \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$. En appliquant Z' à (16) on obtient

$$RR' = 1 - H\Delta'. \tag{17}$$

Remarquons que $RR' \neq 0$. En effet la multiplicité à l'origine $\nu_0(H)$ de H est minorée à l'aide de (15) par $\nu_0(\omega) - 1$ et R est non nul dès que $\nu_0(\omega) > 1$. D'autre part le cas $\nu(\omega) = 1, H(0) \neq 0$ ne peut se produire : sinon la fonction f qui est quasi-homogène et de même multiplicité que ω, s'écrirait dans de bonnes coordonnées $v^2 + u^q$; l'équation (15) se résout alors immédiatement, les relations entre f'_u et f'_v étant toutes triviales ; finalement on obtiendrait

$$\frac{1}{H}\omega = W df + \frac{1}{2} v du - \frac{1}{q} u dv,$$

ce qui est exclu car ω n'est pas dicritique.

Pour achever la démonstration prenons de nouveau des coordonnées u, v dans lesquelles f est un polynôme quasi-homogène. Les calculs précédents peuvent alors se refaire avec $Z' := \alpha u\dfrac{\partial}{\partial u} + \beta v\dfrac{\partial}{\partial v}$ où α et β sont les poids des coefficients de f. Puisque

$R' := \frac{\omega \cdot Z'}{f}$ est non nul on peut aussi poser $Z := \frac{1}{R'} Z$. L'équation (16) devient

$$df - g\omega = h(\beta v du - \alpha u dv), \qquad g = \frac{f}{\omega \cdot Z'} \neq 0.$$

Ceci qui achève la démonstration. □

Remarque 6.6. — Tout déploiement équisingulier est topologiquement trivial **[10]** et visiblement le pseudo-groupe d'holonomie du feuilletage régulier d'un voisinage épointé $W - t$ de $0 \in \mathbb{C}^2$ est indépendant de t. On déduit alors immédiatement du lemme (6.5) le

Corollaire 6.7. — *Soit ω un germe de 1-forme semi-hyperbolique. Alors toute déformation topologiquement triviale (X, π) de* $\mathrm{Sep}(\omega)$ *est réalisée comme la séparatrice d'un déploiement équisingulier,* i.e. *il existe un déploiement équisingulier Ω de ω tel que $X = \mathrm{Sep}(\Omega)$. En particulier la déformation $(\Omega_t)_t$ de ω est topologiquement triviale, à pseudogroupe d'holonomie constant et pour t assez petit $X_t = \mathrm{Sep}(\Omega)_t$.*

Démonstration du théorème B. — Rappelons la notion de quasi-hyperbolicité introduite dans **[14]** **[15]**.

Définition 6.8. — Un germe ω de 1-forme différentielle à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est dit *quasi-hyperbolique* si D_ω est un sous-ensemble invariant de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ et les singularités de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ sont toutes du type $udv + \lambda v du + \cdots$ avec $\lambda \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$. Si de plus il existe une composante irréductible D de D_ω telle que le groupe d'holonomie de $D - \widetilde{\Sigma}_\omega \cap D$ n'est pas résoluble, nous dirons ici que ω est *quasi-hyperbolique générique*.

Cette notion de généricité est plus faible que celle définie dans **[14]**, **[15]** mais elle est suffisante pour ce qui suit. Dans **[12]** **[13]** nous montrons que dans l'ensemble des 1-formes quasi-hyperboliques celles qui ne satisfont pas cette condition de généricité est contenu dans un ensemble pro-algébrique de codimension infinie. L'intérêt de cette notion est dans le

Théorème 6.9 (**[14]**, **[15]**). — *Toute déformation η topologiquement triviale d'un germe ω de 1-forme quasi-hyperbolique générique est sous-jacent à un déploiement équisingulier,* i.e. *il existe un déploiement équisingulier Ω de ω de même base que η tel que $(\eta_t)_t \equiv (\Omega_t)_t$.*

La condition de non-résolubilité d'holonomie de (6.8) implique que ω n'admet pas de *facteur intégrant* c'est à dire de fonction $k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ telle que $d(\omega/k) = 0$; sinon l'holonomie de chaque composante de D_ω serait linéaire **[7]**. Cela impose[4] que deux déploiements de ω qui induisent la même déformation sont égaux, à coefficient multiplicatif près. On en déduit immédiatement le :

[4] C'est un calcul facile, d'autant plus que pour le lemme qui suit il suffit de le faire dans le cas d'un déploiement analytiquement trivial.

Lemme 6.10. — *Un germe de* 1*-forme quasi-hyperbolique générique est topologiquement quasi-homogène (1.1) si et seulement si elle est d-quasi-homogène.*

Ceci achève la démonstration. □

7. Une généralisation d'un théorème de J. Briançon

Nous allons prouver le théorème C de l'introduction, qui généralise un résultat **[2]** de J. Briançon en dimension 2 étendu par la suite en dimension quelconque par cet auteur et H. Skoda **[3]** :

– le carré de toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ appartient l'idéal jacobien de f.

Fixons un germe en $0 \in \mathbb{C}^2$ de 1-forme semi-hyperbolique ω, une équation réduite f de $\mathrm{Sep}(\omega)$ et conservons les notations (1), (2). Nous allons construire une section globale V du faisceau $\mathcal{X}_{S'}$ des champs de vecteurs tangents à $S' := {E_\omega}^{-1}(\mathrm{Sep}(\omega))$, qui vérifie

$$\widetilde{\omega} \cdot V = f^2 \circ E_\omega. \tag{18}$$

On obtient le théorème C en prenant l'image directe de V sur $\mathbb{C}^2, 0$, prolongée à l'origine par le théorème d'Hartogs.

Dans M_ω, au voisinage de chaque ouvert W_i d'un recouvrement $\mathcal{W}$ assez fin de D_ω, il existe d'après le lemme (3.2) un champ de vecteurs W_i vérifiant $\widetilde{\omega} \cdot V_i = f \circ E_\omega$. Le cocycle $V_{ij} := V_i - V_j$ est à valeurs dans le faisceau $\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}$ des champs tangents à $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. On va voir que

$$[f \circ E_\omega \cdot V_{ij}] = 0 \in H^1(D_\omega; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}_\omega}). \tag{19}$$

Ainsi les champs $f \circ E_\omega \cdot V_i$ se recollent en un champ global V vérifiant (18).

Le théorème ci-dessous, qui peut s'interpréter comme une forme géométrique du théorème de Briançon, donne immédiatement (19). Considérons une succession finie $E^i : M^i \longrightarrow M^{i-1}$, $i = 1, \dots, h$ d'éclatements de centres finis et au dessus de l'origine de $\mathbb{C}^2 =: M^0$. Notons

$$\widetilde{E} := E^1 \circ \cdots \circ E^h, \quad D^i := {E_i}^{-1}(0), \quad \widetilde{D} := D^h,$$

et désignons par $\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}$ le faisceau des champs de vecteurs de M^h tangents au feuilletage saturé $\widetilde{\mathcal{F}}$ défini par $\widetilde{E}^\star(\omega)$. Fixons une équation réduite f de $\mathrm{Sep}(\omega)$ et notons $F := f \circ \widetilde{E}$.

Théorème 7.1. — *Soit ω un germe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ de* 1*-forme semi-hyperbolique. Alors le morphisme*

$$[F] \cdot : H^1\left(\widetilde{D}; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right) \longrightarrow H^1\left(\widetilde{D}; \mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right), \qquad [Y_{ij}] \longmapsto [F \cdot Y_{ij}]$$

est identiquement nul.

Démonstration. — Raisonnons par récurrence sur h. Nous avons calculé dans **[10]** une base de $H^1\left(\widetilde{D};\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$ pour $h=1$: on se donne en $0\in\mathbb{C}^2$ un champ de vecteurs Z à singularité isolée qui annule ω ; on recouvre l'éclaté M^1 de l'origine de $\mathbb{C}^2$ par les deux cartes canoniques $(U_1; x_1 := x, y_1 := y/x)$ et $(U_2; x_2 := x/y, y_2 := y)$; le relevé de Z dans la première carte s'écrit $x_1^{\nu-1}Z_1$ ou ν est la multiplicité à l'origine de Z et Z_1 est un champ de vecteurs défini holomorphe et à singularités isolées sur U_1 ; alors les champs

$$Z_{\alpha\beta} := x_1^{\alpha}y_1^{\beta}\cdot Z_1, \qquad (\alpha,\beta)\in I := \{\alpha\geq 0 \mid \alpha-\nu+1<\beta<0\}$$

induisent une base de $H^1\left(\widetilde{D};\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. De plus les champs de vecteurs suivants :

$$x_1^{\alpha}y_1^{\beta}\cdot Z_1, \qquad \alpha\geq 0, \qquad \beta\geq 0 \quad \text{ou} \quad \beta\leq\alpha-\nu+1$$

sont dans $B^1\left(\widetilde{D};\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)$. La multiplicité de f à l'origine est aussi égale à ν car ω est semi-hyperbolique. Ainsi $(F)\subset(x_1^{\nu})$ et les champs $F\cdot Z_{\alpha\beta}$, $(\alpha,\beta)\in I$ sont des cobords ; et le théorème est montré pour $h=1$.

Le pas de récurrence se fait en utilisant la décomposition **[10]** suivante :

$$0\longrightarrow H^1\left(D^1;\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}^1}\right)\xrightarrow{\xi} H^1\left(\widetilde{D};\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)\xrightarrow{\zeta} H^1\left(D';\mathcal{X}_{\widetilde{\mathcal{F}}}\right)\longrightarrow 0 \tag{20}$$

où D' est l'union des composantes irréductibles de $\widetilde{D}$ autres que D^1, ζ est le morphisme de restriction et ξ est induit par le plongement naturel de D^1 dans $\widetilde{D}$. Sur le premier terme de cette suite exacte le morphisme $[F]\cdot$ est nul ; c'est le calcul ci-dessus. La nullité de $[F]\cdot$ sur le troisième terme de (20) résulte de l'hypothèse de récurrence appliquée à $\widetilde{\mathcal{F}}^1$ au voisinage de chaque point du centre d'éclatement de E^2. □

Références

[1] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **90**, pages 193 à 259, (1962).

[2] J. Briançon, *A propos d'une question de J. Mather*, Preprint Université de Nice, 1973.

[3] J. Briançon et H. Skoda, *Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes n un point de* $\mathbb{C}^n$, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, **série A 278**, pages 949 à 951, (1974).

[4] C. Camacho et P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, Annals of Mathematics, **115**, pages 579 à 595, (1982).

[5] C. Camacho, A. Lins Neto et P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, Journal of Differential Geometry, **20**, pages 143 à 174, (1984).

[6] D. Cerveau, *Distributions involutives singulières*, Annales de l'Institut Fourier, **29, 3**, pages 261 à 294, (1979).

[7] D. Cerveau et J.-F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque, **97**, (1982).

[8] D. Eisenbud et W. Neumann, *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*, Princeton University Press, Annals of mathematics Studies, 110, (1985).

[9] Lê Dung Trang et C.P. Ramanujam, *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type*, American Journal of Mathematics, **98, 1**, pages 67 à 78, (1976).

[10] J.-F. Mattei, *Modules de feuilletages holomorphes singuliers : 1 équisingularité*, Inventiones Mathematicae, **103**, pages 297 à 325, (1991).

[11] J.-F. Mattei et R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **Série 4, t. 13**, pages 469 à 523, (1980).

[12] J-F. Mattei et E. Salem, *Classification formelle des feuilletages génériques de* $(\mathbb{C}^2, 0)$, preprint.

[13] J-F. Mattei et E. Salem, *Classification formelle et analytique de feuilletages singuliers de* $(\mathbb{C}^2, 0)$, C. R. Académie des Sciences, Paris, **Série 1, t. 352**, pages 773 à 778, (1997).

[14] J-F. Mattei et E. Salem, *Classification topologique et analytique des feuilletages génériques de* $(\mathbb{C}^2, 0)$, en préparation.

[15] J-F. Mattei et E. Salem, *Complete systems of topological and analytical invariants for a generic foliation of* $(\mathbb{C}^2, 0)$, Mathematical Reasearch Letters, **4**, pages 131 à 141, (1997).

[16] K. Saito, *Quasi-homogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen*, Inventiones Mathematicae, **14**, pages 123 à 142, (1971).

[17] A. Seidenberg, *Reduction of singularities of the differentiable equation* $AdY = BdX$, American Journal of Mathematics, **90**, pages 248 à 269, (1968).

[18] O. Zariski, *Studies in equisingularity I : Equivalent singularities of algebraic curves*, American Journal of Mathematics, **87**, pages 507 à 536, (1965).

[19] O. Zariski, *Studies in equisingularity II : Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero)*, American Journal of Mathematics, **87**, pages 972 à 1006, (1965).

[20] O. Zariski, *On the topology of algebroid singularities*, American Journal of Mathematics, **54**, pages 433 à 465, (1932).

J.-F. Mattei, Université Paul Sabatier, Laboratoire de Mathématiques Emile Picard, UMR-CNRS 5580, 118 route de Narbonne, 31 062 Toulouse Cedex, France
E-mail : `mattei@picard.ups-tlse.fr`