Astérisque

RAPHAËL KRIKORIAN

Réductibilité des systèmes produits-croisés à valeurs dans des groupes compacts

Astérisque, tome 259 (1999)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__259__R1_0>

ASTÉRISQUE 259

RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES PRODUITS-CROISÉS À VALEURS DANS DES GROUPES COMPACTS

Raphaël Krikorian

Société Mathématique de France 1999

Raphaël Krikorian
Centre de Mathématiques de l'École polytechnique, U.M.R. 7640 du CNRS, 91128 Palaiseau
et
École Nationale Supérieure de Technique Avancée UMA-LMA, 32, Bd Victor, 75015 Paris.
E-mail : `krikor@math.polytechnique.fr`

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 34C35, 58 Fxx.

Mots clefs. — Systèmes produits-croisés, solutions de Floquet, petits diviseurs, méthode KAM, méthode d'Eliasson, quasi-périodicité, transversalité à la Pyartli.

RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES PRODUITS-CROISÉS À VALEURS DANS DES GROUPES COMPACTS

Raphaël Krikorian

Résumé. — Nous étudions dans cet ouvrage le problème de la conjugaison à des constantes (réductibilité) des systèmes produits-croisés quasi-périodiques à valeurs dans des groupes compacts semi-simples, de même que celui de l'existence de solutions de type Floquet pour des systèmes d'équations différentielles linéaires quasi-périodiques à valeurs dans des algèbres compactes semi-simples.

Le résultat principal du livre (chapitre 6) est que, pour des familles de systèmes quasi-périodiques à un paramètre réel à valeurs dans le groupe des rotations de l'espace (de dimension 3), la réductibilité a lieu pour presque toute valeur du paramètre (pourvu que la famille soit suffisamment proche d'une famille de systèmes constants). Pour sa démonstration, qui repose sur une technique d'élimination des résonances due à L.H. Eliasson, nous introduisons une notion de transversalité à la Pyartli, ce qui nous permet de contrôler la dépendance des valeurs propres en fonction du paramètre. Nous faisons également usage d'un théorème de réductibilité pour un ensemble de paramètres de mesure positive, montré dans le cas des groupes compacts semi-simples au chapitre 3. Nous montrons également au chapitre 5, toujours dans le cas des groupes compacts semi-simples, que modulo un revêtement qui ne dépend que du groupe, l'ensemble des systèmes réductibles est dense au voisinage des constantes. Le chapitre 4 du livre établit un théorème de forme normale qui permet de retrouver le résultat en mesure positive du chapitre 3. Enfin nous donnons au chapitre 2 une condition nécessaire et suffisante (modulo un revêtement fini) de réductibilité des systèmes produits-croisés et faisons l'étude du centralisateur des systèmes constants.

***Abstract* (Reducibility of skew-product systems with values in compact groups)**

In this book we study the problem of reducibility (conjugacy to constants) of quasi-periodic skew-product systems with values in compact semisimple groups, as well as the existence of Floquet type solutions for linear differential quasi-periodic systems with values in compact semisimple algebras.

The main result (chapter 6) is that for real one parameter families of quasi-periodic systems with values in the group of rotations of the 3-space, reducibility holds for almost all value of the parameter (provided the family is close enough to some family of constant systems). For the proof of this result, which relies on a resonance removing procedure due to L.H. Eliasson, we introduce a notion of transversality *à la* Pyartli,

which enables us to keep on controlling the dependance of the eigenvalues on the parameter. We also use a positive measure reducibility theorem proven, in case the group is compact semisimple, in chapter 3. We also prove in chapter 5, again in the compact semisimple group case, that modulo some finite covering which depends only on the group, the set of reducible systems is dense near the constants. Chapter 4 is devoted to a normal form type theorem which enables us to recover the result of chapter 3. Finally, we give in chapter 2 a necessary and sufficient condition (modulo a finite covering) for reducibility of skew-product systems and study the centralizer of constant systems.

Table des matières

INTRODUCTION

L'étude de l'équation de Hill à coefficient quasi-périodique (*cf.* **[23]**, **[4]** pour plus de détails)

$$-y'' + q(t)y = \lambda y, \tag{1}$$

avec $q(t) = Q(t\omega/2\pi)$, où Q est $\mathbf{Z}^d$-périodique et $\omega \in \mathbf{R}^d$, a intéressé de nombreux auteurs comme en particulier Dinaburg-Sinaï **[7]**, Moser-Pöschel **[21]**, Herman **[15]**, Eliasson **[9]**, **[10]**, dont la motivation était de décrire le spectre de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel à potentiel quasi-périodique, ceci en tentant de généraliser au cas quasi-périodique la théorie de Floquet. Bien que l'apparition de phénomènes de petits diviseurs, désormais classique en théorie des systèmes dynamiques, interdise une transcription mot à mot du théorème de Floquet et complique considérablement les démonstrations, cette tentative, dans laquelle les travaux des auteurs précédemment cités ainsi que la connaissance accumulée depuis H. Weyl sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger ont joué un rôle important, a finalement abouti (au moins dans un cadre perturbatif) dans le travail de L.H. Eliasson **[9]**. L'énoncé de ce théorème est que si ω vérifie une condition diophantienne, aux grandes énergies le spectre de l'équation (1) est absolument continu. L'utilisation de techniques à la K.A.M (Kolmogorov-Arnold-Moser), l'introduction d'un *nombre de rotation* associé à l'équation (1) ainsi que l'interprétation spectrale du problème considéré sont les ingrédients de **[9]**. On peut réinterpréter (1) comme une équation différentielle linéaire sur $(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d) \times \mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= U_\lambda(\theta) \cdot X(\theta) \\ \theta' &= \omega/2\pi, \end{aligned} \tag{2}$$

avec

$$U_\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(\theta) - \lambda & 0 \end{pmatrix},$$

où $\omega \in \mathbf{R}^d$ est le vecteur des fréquences des coefficients et $X(t) = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Ainsi U_λ est à valeurs dans l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbf{R})$. Il s'agit alors d'obtenir des représentations de Floquet $X(t) = B(t\omega/2\pi + \theta_0) \cdot e^{U_0 t} \cdot X_0$ de *toutes* les solutions de (2) (B étant $\mathbf{Z}^d$-périodique). Quand c'est le cas le système est dit *réductible.* Le théorème d'Eliasson se traduit dans ce contexte en disant que si ω vérifie une condition diophantienne et si Q est suffisamment petit, alors pour presque toute valeur de λ, U_λ est réductible modulo une conjugaison B qui est $2\mathbf{Z}^d$-périodique.

Il est alors naturel de se demander si le résultat précédent admet des analogues quand on remplace le groupe $SL(2, \mathbf{R})$ par un autre groupe de Lie G (par exemple semi-simple). Une des difficultés étant que des problèmes liés aux petits diviseurs apparaissent déjà quand on étudie le groupe compact maximal, il est naturel de commencer par l'étude du cas où G lui-même est compact : ceci constitue le propos du présent ouvrage. Nous essaierons de répondre en particulier aux questions de « densité » (topologique ou métrique) des systèmes réductibles aux voisinages des constantes. Comme ce type de problèmes est lié à l'étude de systèmes produits croisés, nous définissons ces derniers dans la suite.

Nous noterons $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ le tore d-dimensionnel et G un groupe de Lie (réel) qui sera souvent un groupe de matrices. Le groupe des difféomorphismes de classe C^s ($s \in \mathbf{N} \cup \{\omega, \infty\}$ où ω signifie dans ce contexte « analytique réel ») de $\mathbf{T}^d \times G$ sera noté $\mathrm{Diff}^s(\mathbf{T}^d \times G)$.

Si $f \in C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^k)$ nous notons

$$|f|_s = \max_{|\beta| \leq s} \max_{\theta \in \mathbf{T}^d} |\partial^\beta f(\theta)|,$$

les normes C^s.

Si f est analytique et $h > 0$, nous noterons (quand ceci a un sens),

$$|f|_h = \sup_{z \in B_h} |\widetilde{f}(z)|,$$

où $\widetilde{f}$ est le prolongement holomorphe de f à la bande complexe $B_h = \mathbf{R}^d \oplus \sqrt{-1}[-h, h]^d$. Nous serons particulièrement intéressés dans la suite par le sous-groupe

$$SW^s(\mathbf{T}^d, G) \subset \mathrm{Diff}^s(\mathbf{T}^d \times G)$$

constitué des difféomorphismes de $\mathbf{T}^d \times G$ de la forme

$$(\theta, y) \longmapsto (\theta + \alpha, A(\theta) \cdot y)$$

où $\alpha \in \mathbf{T}^d$ et $A \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$. Un tel difféomorphisme, que nous noterons (α, A), sera dit produit croisé (en anglais *skew-product*). Ce sont en fait des cocycles sur $\mathbf{T}^d \times G$. Si $\alpha \in \mathbf{T}^d$ est fixé, l'ensemble $\{(\alpha, A),\ A \in C^s(\mathbf{T}^d, G)\}$ sera noté $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$.

Remarquons que si A est une constante le difféomorphisme (α, A) est simplement la translation à gauche sur le groupe de Lie $\mathbf{T}^d \times G$.

L'itéré n-ième d'un élément $(\alpha, A) \in SW^s(\mathbf{T}^d, G)$ s'écrit :

$$(\alpha, A)^n(\theta, y) = (\theta + n\alpha, A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta) \cdot y),$$

ce qui montre que la compréhension de la dynamique du difféomorphisme (α, A) est équivalente à celle des produits $A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta)$ qui dans le cas où G est un groupe de matrices et α est minimal (*i.e.* $x \mapsto x + \alpha$ a toutes ses orbites denses sur $\mathbf{T}^d$) sont des *produits quasi-périodiques de matrices.*

Afin d'étudier ces derniers, introduisons enfin une notion de conjugaison fibrée : soient $\alpha \in \mathbf{T}^d$ et $A_1, A_2 \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$, on dira que $B \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$ conjugue A_1 à A_2 si le difféomorphisme associé $(0, B) \in SW^s(\mathbf{T}^d, G)$ conjugue (α, A_1) à (α, A_2) (qui sont tous deux dans $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$), c'est-à-dire si l'on a $(0, B) \circ (\alpha, A_1) \circ (0, B)^{-1} = (\alpha, A_2)$, ce qui peut se récrire

$$A_2(\theta) = B(\theta + \alpha) A_1(\theta) B(\theta)^{-1}, \ \forall \theta \in \mathbf{T}^d.$$

L'objet du présent ouvrage est l'étude des classes de conjugaisons fibrées des groupes $SW^s_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ dans le cas où G est un groupe compact semi-simple et α est minimal. Une classe de conjugaison particulierement intéressante est celle des systèmes (α, A_0) où A_0 est une constante; les difféomorphismes de cette classe de conjugaison seront dits *réductibles.* La dynamique d'un (α, A) réductible, donc de la forme $(0, B) \circ (\alpha, A_0) \circ (0, B)^{-1} = (\alpha, B(\cdot + \alpha) A_0 B(\cdot)^{-1})$ est alors très simple puisque dans ce cas les $(\alpha, A)^n$ s'écrivent

$$(\alpha, A)^n = (n\alpha, B(\cdot + n\alpha) A_0^n B(\cdot)^{-1}),$$

et pour des A_0 génériques les orbites sont difféomorphes au tore $\mathbf{T}^d \times T_{\max}$ où $T_{\max}$ est le (puisque A_0 est générique) tore maximal passant par A_0.

Les difféomorphismes produits croisés interviennent également de façon naturelle dans l'étude des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont quasi-périodiques et à valeurs dans l'algèbre g d'un groupe de Lie G. Rappelons quelques définitions : une fonction $f \in C^s(\mathbf{R}, G)$ est *quasi-périodique* de vecteurs de fréquence $(\omega_1/2\pi, \ldots, \omega_d/2\pi) \in \mathbf{R}^d$, s'il existe $F \in C^s(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ telle que $f(t) = F(t\omega_1/2\pi, \ldots, t\omega_d/2\pi)$. Le $\mathbf{Z}$-module engendré par $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ s'appelle le *module des fréquences.*

Les équations que nous considérons sont donc de la forme

$$X'(t) = u(t) X(t),$$

où u s'écrit sous la forme $u(t) = U(t\omega_1/2\pi, \ldots, t\omega_d/2\pi)$, avec $U \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ (g étant l'algèbre du groupe G). Il est équivalent d'étudier le flot suivant sur $\mathbf{T}^d \times G$,

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= U(\theta) \cdot X(\theta) \\ \theta' &= \omega/2\pi. \end{aligned} \tag{3}$$

Le cas qui nous intéresse est celui où l'on peut ramener l'étude du système (3) à celui d'un système à coefficients constants c'est-à-dire avec $U = U_0 \equiv$ constante, au moyen d'une transformation de la forme

$$Y(x) = B(x)^{-1} \cdot X(x),$$

avec $B \in C^s(\mathbf{T}^d, G)$. Il faut donc déterminer U_0 et B qui satisfont alors à *l'équation de réductibilité*

$$U_0 = L_{\omega/2\pi} B(x) \cdot B(x)^{-1} + \mathrm{Ad}(B(x)) \cdot U(x),$$

où $\mathrm{Ad}(B) \cdot U = B \cdot U \cdot B^{-1}$, ce que l'on notera, $(\omega/2\pi, U_0)$ $\mathcal{R}(B)$ $(\omega/2\pi, U)$. Ceci n'est rien d'autre qu'une généralisation de la théorie de Floquet, valide dans le cas périodique, au cas quasi-périodique, puisque ceci signifie que toute solution de (3) admet une écriture de la forme

$$X(t) = B(t\omega_1/2\pi + \theta_0, \ldots, t\omega_d/2\pi + \theta_d) \cdot e^{U_0 t} X_0.$$

Les deux aspects, difféomorphismes et flots, sont étroitement liés et l'on peut formuler pour chacun d'eux des énoncés dont les formes sont équivalentes et les démonstrations similaires (bien que généralement moins techniques dans le cas des flots). Aussi avons-nous formulé les énoncés des théorèmes de notre travail en privilégiant souvent le point de vue le moins technique.

Passons maintenant à la présentation du contenu du livre.

Le chapitre 1 regroupe quelques rappels et définitions de notions de base. Nous y avons inclus deux propositions élémentaires qui tentent de justifier le fait que l'on se restreigne seulement aux conjugaisons fibrées. La première (prop. 1.2.2) montre que dans le cas où $d = 1$ et $G = \mathbf{T}^1$, une conjugaison homotope à l'identité de classe C^2 entre deux éléments de $SW^\infty_\alpha(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$ est en général fibrée. La seconde (prop. 1.2.4) prouve que si deux systèmes $(\alpha_i, A_i) \in SW^\infty_{\alpha_i}(\mathbf{T}^d, G)$, $i = 1, 2$ sont conjugués par un difféomorphisme de $\mathrm{Diff}(\mathbf{T}^d \times G)$ homotope à l'identité, alors α_1 et α_2 sont rationnellement dépendants pourvu que d soit suffisamment grand, c'est-à-dire pourvu que les systèmes possèdent suffisamment de fréquences.

Le chapitre 2 donne une condition (nécessaire et) suffisante de réductibilité des éléments de $SW^\infty_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ en termes de compacité du groupe des itérés (théorème 2.2.3) : soient α minimal et $(\alpha, A) \in SW^\infty_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ dont l'adhérence des itérés (positifs et négatifs) est compacte en topologie C^∞ ; alors il existe un entier $\widetilde{\chi}_G > 0$ ne dépendant que du groupe G, tel que A s'écrive sous la forme $A(\theta) = B(\theta + \alpha) A_0 B(\theta)^{-1}$ avec $A_0 \in G$ constant et $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d, G)$ $\widetilde{\chi}_G \mathbf{Z}^d$-périodique. Ainsi le système est réductible modulo un revêtement $\widetilde{\chi}_G$-fini. Dans le cas particulier où $G = SU(L)$, on peut choisir $\widetilde{\chi}_G = 1$. Si en outre A_0 est dans un ensemble de mesure de Haar totale dans G, alors la conjugaison B peut être choisie $\mathbf{Z}^d$-périodique (proposition 2.2.4). Ce théorème est à rapprocher des critères de réductibilité des difféomorphismes du cercle que donne M. Herman dans **[14]** ou encore de la condition de stabilité des germes holomorphes.

Nous précisons également les relations entre les deux notions de réductibilité, dans le cas des difféomorphismes d'une part et dans celui des flots d'autre part (théorème 2.2.1) : si le temps 1 d'un flot est réductible il en est de même du flot tout entier (la réciproque étant triviale).

Nous faisons par ailleurs une étude du groupe des centralisateurs des cocycles constants (théorème 2.5.8) ainsi que des conjugaisons possibles entre cocycles constants (proposition 2.5.9).

Le chapitre 3 (théorème 3.1.1) donne la démonstration d'un résultat en mesure positive dans le cas des flots (classique dans l'esprit) : supposons que ω fixé satisfasse à une condition diophantienne; il existe alors $\varepsilon_0, s_0 > 0$ tels que si $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ vérifie $|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0$, alors dans toute famille à un paramètre réel $\lambda A + F(\theta)$ ($a \neq b$, $\lambda \in [a, b] \subset \mathbf{R}$, $A \in g$ constant, $|A| \leq 1$), l'ensemble des λ pour lesquels le système $(\omega/2\pi, \lambda A + F)$ n'est pas réductible est de mesure inférieure à cte $\cdot\, |F|_{s_0}^\nu$, où $\nu > 0$ est une constante indépendante de F. La démonstration de ce résultat qui repose sur une technique K.A.M. standard, peut également se faire dans un cadre analytique.

Nous présentons au chapitre 4 un théorème (théorème 4.1.1) de forme normale dans le cas des difféomorphismes, grandement inspiré de la section 7 du manuscrit **[16]** de M. Herman, qui est le suivant : soit $u_0 \in G$ dont les racines vérifient une condition diophantienne par rapport à $\alpha \in \mathbf{T}^d$. Appelons Γ un supplémentaire de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$ dans g, l une projection sur $\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$ et $\mathcal{E} = \{B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g),\ l(B(0)) = 0\}$. Alors il existe $\varepsilon_0, s_0 > 0$ tels qu'à tout $u \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ vérifiant $|u - u_0|_{s_0} \leq \varepsilon_0$, on peut associer un unique couple $(B, C) \in \mathcal{E} \times \Gamma$ tel que $u(\theta) = e^C \cdot e^{B(\theta+\alpha)} \cdot u_0 \cdot e^{-B(\theta)}$. En outre, la dépendance de (B, C) en fonction de u est C^∞ au sens de Hamilton.

Ce théorème nous permet de retrouver en suivant **[25]** le résultat en mesure positive du chapitre 3 (théorème 3.1.1). La démonstration, qui repose sur le théorème de Hamilton d'inversion locale dans des espaces de Fréchet, ne peut cependant pas s'adapter au cas analytique (comparer avec le chapitre 3).

Dans le chapitre 5 nous étudions la densité (topologique) des systèmes réductibles aux voisinages des constantes. Le théorème (théorème 5.1.1) s'énonce ainsi dans le cas des flots : soient $A_0 \in g$ et ω diophantien fixés. Il existe alors $\varepsilon_0, s_0 > 0$ et un entier $\chi_G > 0$ (ne dépendant que du groupe G), tels que la proposition suivante soit vraie : si $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ vérifie $|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $s \in \mathbf{N}$, il existe $F' \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G \mathbf{Z}^d, g)$ tel que $|(A_0+F')-(A_0+F)|_s \leq \varepsilon$ et tel que $(\omega/2\pi, A_0+F')$ est réductible sur $\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d$ (c'est-à-dire qu'il existe $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d, G)$, $\chi_G\mathbf{Z}^d$-périodique, tel que $L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1} + \mathrm{Ad}(B) \cdot (A_0 + F')$ soit une constante). En outre, dans le cas où G est un groupe unitaire, χ_G peut être choisi égal à 1 (ce qui signifie que, dans ce cas, les systèmes réductibles forment un ensemble dense aux voisinages des constantes). La démonstration utilise la méthode développée par Eliasson dans **[9]**, **[10]**, une technique d'élimination des résonances entre les racines et les résultats des chapitres 2 et 3.

Le chapitre 6 est une réponse positive à une question posée par L.H. Eliasson dans **[10]** et améliore considérablement le résultat du chapitre 5 dans le cas où $G = SO(3, \mathbf{R})$ et dans un cadre analytique. Le théorème (théorème 6.2.1) peut s'énoncer de la façon suivante : soient $A \neq 0 \in so(3)$ et $\omega \in \mathbf{T}^d$ diophantien fixés. Pour tout $h > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $F \in C_h^\omega(\mathbf{T}^d, so(3))$ vérifiant $|F|_h \leq \varepsilon_0$, l'ensemble des $\lambda \in [a,b] \subset \mathbf{R}$ ($a \neq b$) pour lesquels $(\omega/2\pi, \lambda A + F)$ n'est pas réductible est de mesure nulle. Le même résultat subsiste si F dépend de façon raisonnable du paramètre λ. Ce théorème contraste avec le résultat d'Eliasson **[10]**, qui affirme qu'on peut trouver au voisinage de 0 un G_δ-dense de systèmes analytiques non réductibles. Ceci semble indiquer (sans le prouver) que l'ensemble des systèmes non réductibles au voisinage de 0, bien qu'étant un G_δ-dense, est négligeable au sens de Kolmogorov, c'est-à-dire que sa trace sur des familles génériques à k-paramètres réels ($k \in \mathbf{N}$), est de mesure de Lebesgue nulle. La démonstration du théorème qui utilise la méthode d'élimination des résonances d'Eliasson **[9]**, **[10]**, se trouve compliquée par le fait que dans le cas $SO(3)$, l'on ne dispose pas d'une bonne notion de nombre de rotation fibré (*cf.* **[15]**, **[17]**) ni de son interprétation spectrale. Nous introduisons donc, inspiré d'un article de Pyartli **[22]**, une notion de transversalité plus fine, ceci afin de contrôler la dépendance des racines en fonction du paramètre. Le théorème en mesure positive du chapitre 3 est alors utilisé. On pourra aussi consulter **[19]**.

Remerciements. — Le texte que nous présentons reprend pour une grande part celui de la Thèse de Doctorat que l'auteur a soutenue à l'École polytechnique le 17 Janvier 1996. Nous avons cependant effectué quelques modifications par rapport au texte initial, notamment au chapitre 2, où nous nous sommes efforcé de rendre certaines preuves plus claires par l'étude du groupe des centralisateurs des systèmes produits-croisés constants. Nous complétons également dans ce même chapitre, la démonstration trop rapide que nous avions donnée du théorème 2.2.3. Nous avons aussi tenté de simplifier la preuve du théorème 6.2.1 du chapitre 6 et de rendre plus explicites les estimations.

C'est grâce aux critiques et encouragements de Haakan Eliasson, Michel Herman, François Laudenbach et Jean-Christophe Yoccoz que cet ouvrage a pu voir le jour. L'auteur tient donc à leur exprimer ses plus vifs remerciements.

CHAPITRE 1

RAPPELS ET NOTATIONS DIFFÉOMORPHISMES PRODUITS-CROISÉS, SYSTÈMES QUASI-PÉRIODIQUES

1.1. Notations

1.1.a. Le tore $\mathbf{T}^d$. — Soit d un entier positif. On notera $\mathbf{T}^d$ le tore d-dimensionnel défini comme étant le quotient de groupes additifs $\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$. Nous noterons π_d ou plus simplement π la projection canonique $\pi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{T}^d$.

On supposera $\mathbf{R}^d$ muni de sa métrique euclidienne classique : si $x = (x_1, \dots, x_d)$ et $y = (y_1, \dots, y_d)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^d$ le produit scalaire de x et de y est

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{d} x_i y_i.$$

La norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ induit la métrique quotient sur le tore $\mathbf{T}^d$: si $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ sont deux relèvements à $\mathbf{R}^d$ de $x, y \in \mathbf{T}^d$,

$$|x - y| = \inf_{p \in \mathbf{Z}^d} |\widetilde{x} - \widetilde{y} + p|.$$

Si $\alpha \in \mathbf{T}^d$, nous noterons R_α la translation

$$\begin{aligned} R_\alpha : \mathbf{T}^d &\longrightarrow \mathbf{T}^d \\ x &\longmapsto x + \alpha, \end{aligned}$$

Nous dirons que α est *minimal* si R_α l'est (c'est-à-dire si toute orbite de R_α sur le tore $\mathbf{T}^d$ est dense).

1.1.b. Groupes de Lie. — Soit G un groupe de Lie réel (resp. complexe) et g son algebre réelle (resp. complexe) de Lie associée (c'est-à-dire l'espace tangent en l'identité à G). Si u, v sont deux éléments de G on notera comme d'habitude uv leur produit dans G. Si X, Y sont dans l'algebre g, $[X, Y]$ désigne le crochet de Lie de X et Y. Rappelons que l'expression $[X, Y]$ est $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) linéaire en X et Y, antisymétrique et vérifie pour tout $X, Y, Z \in g$, l'identité de Jacobi

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0.$$

Nous noterons Ad la représentation adjointe de G à g : si $u \in G$, $\mathrm{Ad}(u)$ est l'application linéaire tangente en l'identité à

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad} : G &\longrightarrow G \\ v &\longmapsto uvu^{-1} \end{aligned}$$

La représentation tangente notée ad est une représentation linéaire de l'algèbre g sur g ; ainsi pour tout $X \in g$, $\mathrm{ad}(X)$ est un endomorphisme de g. En outre, pour tous $X, Y \in g$,

$$\mathrm{ad}(X) \cdot Y = [X,Y].$$

Rappelons que lorsque G est un sous groupe (fermé) du groupe linéaire $GL(n, \mathbf{R})$ le produit uv de deux éléments de G est le produit matriciel et que le crochet de deux X, Y de l'algebre g est

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Définissons l'importante forme bilinéaire de Cartan-Killing sur g : si X, Y sont dans g,

$$\kappa(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X) \circ \mathrm{ad}(Y)),$$

où $\mathrm{tr}(f)$ désigne la trace de l'endomorphisme f de g. Il est facile de voir que κ est invariante sous l'action adjointe de G (resp. g) c'est-à-dire que, pour $X, Y \in G$ et $u \in G$ (resp. $Z \in g$)

$$\kappa(\mathrm{Ad}(u) \cdot X, \mathrm{Ad}(u) \cdot Y) = \kappa(X,Y)$$

(resp.

$$\kappa(\mathrm{ad}(Z) \cdot X, \mathrm{ad}(Z) \cdot Y) = \kappa(X,Y).)$$

Les propriétés de κ (non degenerescence, positivité, négativité) déterminent pour une grande part celles de l'algebre et du groupe. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 2.

Enfin nous noterons exp l'application exponentielle $\exp : g \to G$. Mentionnons la formule suivante :

$$\exp \circ \mathrm{ad} = \mathrm{Ad} \circ \exp,$$

où la notation exp du membre de gauche désigne l'exponentielle de matrice

$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!},$$

pour une matrice X.

1.1.c. Espaces fonctionnels. — Si M, N sont deux variétés différentiables ou analytiques, l'espace des fonctions r fois différentiables $r \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$ (ω signifiant « analytique réel ») de M vers N est notée $C^r(M, N)$. Si $r = \infty$, c'est un espace de Fréchet dont les semi-normes correspondent aux sup des dérivées successives des fonctions évaluées dans diverses cartes locales. Dans la suite nous supposerons pour simplifier que le groupe de Lie G est plongé dans un $\mathbf{R}^p$, ce qui est toujours le cas lorsque c'est un groupe compact (*cf.* chapitre 2) ou un sous groupe de matrices.

Les espaces $C^k(\mathbf{T}^d, G)$. — Pour $k < \infty$, $C^k(\mathbf{T}^d, G)$ sont des espaces de Banach quand on les munit de la norme

$$|F|_k = \max_{0 \le i \le k} \sup_{\theta \in \mathbf{T}^d} |D^i F(\theta)|,$$

où $D^i F(\theta)$ représente la dérivée de F au point $\theta \in \mathbf{T}^d$. L'espace $C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ est un espace de Fréchet lorsqu'on le munit des normes $|\ |_k$.

L'espace $\mathrm{Diff}^k(\mathbf{T}^d \times G)$. — C'est l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbf{T}^d \times G$.

L'espace $C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$. — Soit $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ et $\widetilde{F} \in C^\infty(\mathbf{R}^d, g)$ telle que $\widetilde{F} = F \circ \pi_d$; $\widetilde{F}$ étant 1-périodique, on peut lui associer son développement en série de Fourier

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \widehat{\widetilde{F}}(k) e^{2\pi i (k,x)}, \quad i = \sqrt{-1},$$

avec

$$\widehat{\widetilde{F}}(k) = \int_{[0,1]^d} \widetilde{F}(x) e^{-2\pi i (k,x)} dx.$$

La régularité de F peut alors se lire sur la croissance de ses coefficients de Fourier. Pour $s \geq 0$ entier nous noterons $H^s(\mathbf{T}^d, g)$ l'espace de Sobolev

$$H^s(\mathbf{T}^d, g) = \{f \in L^2(\mathbf{T}^d, g), \partial^\alpha f \in L^2(\mathbf{T}^d, g),\ \forall\, \alpha,\ |\alpha| \leq s\}.$$

C'est un espace de Hilbert admettant comme produit scalaire

$$(f, g) = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{[0,1]^d} \partial^\alpha f \cdot \overline{\partial^\alpha g} dx.$$

Nous utiliserons plutôt une norme euclidienne équivalente :

$$|f|_{H^s} = \Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} (1 + |k|^2)^s |\widehat{f}(k)|^2 \Big)^{1/2}.$$

Introduisons également les troncatures et les restes de la série de Fourier à l'ordre N :

$$T_N F(x) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{F}(k) e^{2\pi i (k,x)},$$

et

$$R_N F(x) = \sum_{|k| > N} \widehat{F}(k) e^{2\pi i (k,x)}.$$

On définira également $\dot{T}_N F$ comme la troncature à l'ordre N sans le terme constant. Nous énonçons maintenant une propriété qui nous sera constamment utile :

Proposition 1.1.1. — *Pour tout $s \in \mathbf{N}$, il existe une constante positive C_s telle que, pour tous $f, g \in H^s(\mathbf{T}^d) \cap L^\infty$,*

$$|fg|_{H^s} \leq C_s(|f|_0|g|_{H^s} + |f|_{H^s}|g|_0).$$

De même, pour $f, g \in C^\infty$,

$$|fg|_s \leq c_s(|f|_s|g|_0 + |f|_0|g|_s),$$

formule qui se déduit des inégalités de convexité :

$$|\partial^{ts_1+(1-t)s_2} f|_0 \leq c_s |f|_{s_1}^t |f|_{s_2}^{1-t},$$

pour $0 \leq t \leq 1$, $s_1, s_2 \geq 0$.

Les espaces $C^\omega_\delta(\mathbf{T}^d, g)$. — Nous notons comme d'habitude $\overline{w}$ le nombre complexe conjugué de $w \in \mathbf{C}$. et pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbf{C}^d$ nous posons

$$|z| = (z_1\overline{z}_1 + \cdots + z_d\overline{z}_d)^{1/2}.$$

Définissons alors $\sigma : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^d$ l'involution

$$\sigma(z_1, \dots, z_d) = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_d),$$

et pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$ la translation $R_k : \mathbf{C}^d \to \mathbf{C}^d$, $R_k(z) = z + k$.

Nous dirons qu'un sous-ensemble R de $\mathbf{C}^d$ est un rectangle s'il est le produit de d pavés de la forme $I_l + \sqrt{-1}J_l$ $(1 \leq l \leq d)$ où I_l, J_l sont des intervalles de $\mathbf{R}$. Si U est un ouvert de $\mathbf{C}^d$, nous définirons $\overline{R}(U)$ comme étant le plus petit rectangle fermé qui contient U (c'est-à-dire l'intersection de tous les rectangles fermés le contenant) et nous noterons $R(U)$ l'intérieur de $\overline{R}(U)$. Enfin, pour $h > 0$ et pour tout sous-ensemble V de $\mathbf{C}^d$ nous posons

$$W_h(V) = R(\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{dist}(z, \overline{V}) < h\}),$$

où $\mathrm{dist}(z, \overline{V})$ est la distance de z à l'adhérence de V soit

$$\mathrm{dist}(z, \overline{V}) = \inf_{u \in \overline{V}} |z - u|.$$

Ceci étant, nous notons pour $h > 0$ et $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $C^\omega_h(\Lambda)$ l'ensemble des fonctions analytiques réelles f définies sur Λ et qui admettent une extension continue $\widetilde{f}$ sur $\overline{W_h(\Lambda)}$ et holomorphe sur $W_h(\Lambda)$. Remarquons qu'une telle extension, si elle existe, est nécéssairement unique. Nous définissons alors la norme suivante :

$$|f|_h = \sup_{z \in W_h(\Lambda)} |\widetilde{f}(z)|. \tag{1}$$

Nous noterons de même $C^\omega_h(\mathbf{T}^d)$ l'ensemble des $f \in C^\omega_h(\mathbf{R}^d)$ telles que sur $W_h(\mathbf{R}^d)$,

$$f \circ \sigma = \sigma \circ f, \tag{2}$$

et, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$f \circ R_k = f, \tag{3}$$

(remarquer que $W_h(\mathbf{R}^d)$ est invariant par σ et R_k). Pour toute fonction analytique réelle définie sur le tore $\mathbf{T}^d$ (c'est-à-dire $\mathbf{Z}^d$-périodique) il existe alors un $h > 0$ pour lequel $f \in C_h^\omega(\mathbf{R}^d)$. Ainsi, l'ensemble des f analytiques réelles définies sur le tore $\mathbf{T}^d$ coincide avec

$$C^\omega(\mathbf{T}^d) = \bigcup_{h>0} C_h^\omega(\mathbf{T}^d).$$

Chacun des espaces $C_h^\omega(\mathbf{T}^d)$ muni de la norme (1) est un espace de Banach.

Nous utiliserons au chapitre 6 des familles analytiques à un paramètre réel de fonctions analytiques. Si Λ est un intervalle réel, δ et h deux nombres positifs, nous définirons comme précédemment $C_{h,\delta}^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda)$ comme étant l'ensemble des $f(x, \lambda)$ admettant une extension $\widetilde{f}$ holomorphe sur $W_h(\mathbf{R}^d) \times W_\delta(\Lambda)$, continue sur l'adhérence de cet ensemble et telles que (2), (3) soient vérifiées sur $W_h(\mathbf{R}^d)$ avec $f = f(\cdot, \lambda)$ pour tout $\lambda \in W_\delta(\Lambda)$. Nous noterons alors

$$|f|_{h,\delta} = \sup_{(z,w)\in W_h(\mathbf{R}^d)\times W_\delta(\Lambda)} |\widetilde{f}(z, w)|.$$

Comme précédemment,

$$C^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda) = \bigcup_{h>0,\delta>0} C_{h,\delta}^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda).$$

Tout ce qui précède ce généralise facilement au cas où f est à valeurs dans l'algèbre g.

Comme en 1.1.c, on peut définir pour $f \in C_h^\omega(\mathbf{T}^d, g)$ ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ ainsi que la troncature et le reste à l'ordre N, $T_N f$, $R_N f$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.1.2. — *Si $f \in C_h^\omega(\mathbf{T}^d, g)$ alors pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,*

$$|\widehat{f}(k)| \leq |f|_h e^{-2\pi|k|h}, \tag{4}$$

et il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $0 < h_1 < h$ et tout $N \in \mathbf{N}$ on ait

$$|R_N(f)|_{h_1} \leq C \frac{|f|_h}{(h - h_1)^d} e^{-2\pi(N+1)(h-h_1)}. \tag{5}$$

On se reportera pour une preuve de ce résultat à **[14]**, lemme 3.5.1 p. 206.

1.2. Difféomorphismes produits-croisés

Si X, Y désignent deux variétés lisses, p_1, p_2 les projections respectives de $X \times Y$ sur X, Y ; on notera $\widetilde{\mathcal{SW}}^k(X,Y)$ l'ensemble des C^k-difféomorphismes fibrés en Y sur le produit $X \times Y$, c'est-à-dire l'ensemble des C^k-difféomorphismes de $X \times Y$ de la forme

$$\begin{aligned} F : X \times Y &\longrightarrow X \times Y \\ (x,y) &\longmapsto (f(x), g(x,y)), \end{aligned}$$

où $f \in \mathrm{Diff}^k(X)$ et $g \in C^k(X \times Y, Y)$. Nous noterons $F = (f,g) \in \widetilde{\mathcal{SW}}^k(X,Y)$ un tel difféomorphisme.

En fait, dans la suite, nous étudierons presque exclusivement le cas particulier où d'une part $X = \mathbf{T}^d$ et $f = R_\alpha$ est une translation, et où d'autre part Y est un groupe de Lie et $g(x,y) = g(x) \cdot y$ avec $g \in C^k(X,Y)$, $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$. Nous noterons encore (α, g) le difféomorphisme $(\alpha, g)(\theta, y) = (\theta + \alpha, g(\theta) \cdot y)$.

Lorsque Y est un espace vectoriel et que, pour tout $x \in X$, $g(x, \cdot)$ est un automorphisme de Y, on dit que le système est linéaire et on note $\mathcal{SW}(X,Y)$ l'espace des difféomorphismes corespondant.

Un des buts principaux de cet ouvrage est d'étudier les classes de conjugaisons des difféomorphismes fibrés. Nous dirons que deux éléments, F_1 et F_2 de $\widetilde{\mathcal{SW}}(X,Y)$ (respectivement $\mathcal{SW}(X,Y)$) sont *conjugués* s'il existe un difféomorphisme $h \in \mathrm{Diff}(X \times Y)$ tel que

$$F_1 \circ h = h \circ F_2. \tag{6}$$

Si en outre le difféomorphisme h est lui même dans $\widetilde{\mathcal{SW}}(X,Y)$ (resp. $\mathcal{SW}(X,Y)$) on dira que F_1 et F_2 sont *conjugués dans les fibres* (resp. linéairement conjugués dans les fibres).

1.2.a. Un cas où le difféomorphisme conjugant est automatiquement fibré

C'est le cas de $\widetilde{\mathcal{SW}}(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$. Rappelons le résultat suivant dû à M. Herman ([**15**] Th. 5.3, p. 487) :

Théorème 1.2.1. — *Soit $F : X \times \mathbf{T}^1 \to X \times \mathbf{T}^1$ (où X est un espace topologique), un homéomorphisme homotope à l'identité et préservant l'orientation, de la forme $F(x,y) = (f(x), g(x,y))$ et supposons que f soit uniquement ergodique sur X (*i.e.* n'admette qu'une seule mesure de probabilité invariante). Notons en outre $\widetilde{F}(x,t) = (f(x), \widetilde{g}(x,t))$ un relèvement de F à $X \times \mathbf{R}$. Alors, pour tout $(x,t) \in X \times \mathbf{R}$, la limite suivante :*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}(p_2 \circ \widetilde{F}^n(x,t) - t)$$

existe et est indépendante du choix de (x,t) *(où on a noté* $\widetilde{F}$ *un relèvement de* F *à* $\mathbf{R}$ *et* p_2 *la projection* $X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *sur le second facteur). On l'appelle le nombre de rotation fibré de* F *et on le note* $\rho_f(F)$*. Pour toute mesure de probabilité* μ *invariante sur* $X \times \mathbf{T}^1$ *par* F *on a*

$$\rho_f(F) = \int_{X \times \mathbf{T}^1} (p_2 \circ \widetilde{F}(x,t) - t) d\mu(x,t).$$

Ce nombre est un invariant de conjugaison. En outre, dans le cas où par exemple $X = \mathbf{T}^1$ *et où* $f(x) = x + \rho_b$ *est une rotation, le vecteur de rotation* (ρ_b, ρ_f) *du système* $(f(x), g(x,t))$*, est encore un invariant de conjugaison.*

Utilisant ce résultat nous démontrons à présent que dans le cas particulier où $f = R_\alpha$, la notion de conjugaison et celle de conjugaison fibrée définies en 1.2 coïncident. Soient $F_i \in \widetilde{\mathcal{SW}}^\infty(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$, $i = 1, 2$, de la forme $F_i(x,y) = (x + \alpha_i, A_i(x,y))$ et soit $h \in \mathrm{Diff}^2(\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1)$ homotope à l'identité, conjugant F_1 et F_2 :

$$h \circ F_1 = F_2 \circ h;$$

alors d'après le théorème précédent, $\alpha_1 = \alpha_2$ et $\rho_f(F_1) = \rho_f(F_2)$. Nous noterons $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ et $\rho_f = \rho_f(F_1) = \rho_f(F_2)$. On a alors :

Proposition 1.2.2. — *Si* (α, ρ_f) *est minimal sur* $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1$*, alors* $h \in \widetilde{\mathcal{SW}}^2(\mathbf{T}^1, \mathbf{T}^1)$*.*

Démonstration. — Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage vertical du produit $\mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1$, c'est-à-dire celui dont les feuilles sont les

$$\mathcal{F}_\theta = \{\theta\} \times \mathbf{T}^1.$$

Le feuilletage image admet pour feuilles les $h(\mathcal{F}_\theta)$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.2.3. — *Il existe* θ, θ' *tels que* $h(\mathcal{F}_\theta) = \mathcal{F}_{\theta'}$*.*

Démonstration. — Appelons $p_1 : \mathbf{T}^1 \times \mathbf{T}^1 \to \mathbf{T}^1$ la projection sur la première coordonnée. Supposons par l'absurde que le lemme soit faux. Alors, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^1$, il existe $(\theta, y) \in \mathcal{F}_\theta$ tel que la *propriété* $(P_{(\theta,y)})$ suivante soit vérifiée :

Propriété $(P_{(\theta,y)})$. — $h(\mathcal{F}_\theta)$ *et* $\mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))}$ *sont transverses et ont une intersection finie.*

Vu que h conjugue F_1 et F_2, il vient, pour tout n,

$$h \circ F_1^n = F_2^n \circ h.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} h \circ F_1^n(\theta, y) &= h(\theta + n\alpha, A_{1,n}(\theta, y)) \\ &= F_2^n(h(\theta, y)) \\ &= p_1(h(\theta, y)) + n\alpha, A_{2,n}(h(\theta, y))). \end{aligned}$$

On a noté $A_{i,n}(\theta, y) = p_2((\alpha, A_i)^n(\theta, y))$. Ainsi,

$$h \circ F_1^n(\theta, y) \in \mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))+n\alpha} \cap h(\mathcal{F}_{\theta+n\alpha}).$$

Choisissons une suite n_i telle que $n_i\alpha \to 0$ (une telle suite existe toujours). Pour $i \geq i_0$ assez grand les feuilles $\mathcal{F}_\theta$ et $\mathcal{F}_{\theta+n_i\alpha}$ d'une part et les feuilles $\mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))}$ et $\mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))+n_i\alpha}$ d'autre part sont C^1-proches. Comme on a supposé que les feuilles $\mathcal{F}_{p_1(\theta,y)}$ et $\mathcal{F}_\theta$ sont transverses, il découle que, pour i assez grand les feuilles $\mathcal{F}_{\theta+n_i\alpha}$ et $\mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))+n_i\alpha}$ sont transverses et leur intersection est donc finie. En outre, au sens de la distance de Hausdorff (ici entre ensemble finis), quand $n_i \to \infty$,

$$\mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))+n_i\alpha} \cap h(\mathcal{F}_{\theta+n_i\alpha}) \longrightarrow \mathcal{F}_{p_1(h(\theta,y))} \cap h(\mathcal{F}_\theta).$$

Ceci prouve que $A_{2,n_i}(h(\theta, y))$ s'accumule sur un nombre fini de points et on devrait donc avoir pour un entier $r > 0$,

$$\lim_{i\to\infty} \rho_f(F_2^{n_i r}) = 0.$$

Or $\rho_f(F_2^{n_i r}) = n_i r \rho_f(F_2)$. Ainsi pour toute suite n_i telle que $n_i\alpha$ tend vers 0 sur $\mathbf{T}^1$, il en est de même de $n_i r \rho_f(F_2)$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle (α, ρ_f) est minimal. □

Le lemme précédent démontre la proposition puisque de l'équation de conjugaison il vient que $h(\mathcal{F}_{\theta+n\alpha}) = \mathcal{F}_{\theta'+n\alpha}$, et α etant minimal, on a pour tout $\eta \in \mathbf{T}^1$, $h(\mathcal{F}_{\theta+\eta}) = \mathcal{F}_{\theta'+\eta}$, soit $h(\mathcal{F}_\eta) = \mathcal{F}_{\eta+\gamma}$, où $\gamma = \theta' - \theta$, ce qui achève de démontrer la proposition. □

1.2.b. Les espaces $SW_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$. — Soient G un groupe de Lie, $\alpha \in \mathbf{T}^d$. On définit $SW_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ comme l'ensemble des $F \in \mathcal{SW}(\mathbf{T}^d, G)$ de la forme

$$F(\theta, y) = (\theta + \alpha, A(\theta) \cdot y).$$

Nous noterons (α, A) un tel difféomorphisme F et $SW(\mathbf{T}^d, G)$ l'union des $SW_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ pour $\alpha \in \mathbf{T}^d$.

La proposition suivante montre (imparfaitement) que les espaces $SW_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ sont en quelque sorte stables par conjugaison, pourvu que le nombre de fréquences soit suffisamment grand.

Proposition 1.2.4. — *Soient G un groupe de Lie, d_G sa dimension, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{T}^d$, $F_i \in SW_{\alpha_i}(\mathbf{T}^d, G)$, $i = 1, 2$. Supposons qu'il existe $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^d \times G)$ homotope à l'identité vérifiant $F_1 \circ h = h \circ F_2$ et que $d > d_G$. Alors, α_1 et α_2 sont linéairement dépendants sur $\mathbf{Q}$.*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que α_1 et α_2 soient indépendants sur $\mathbf{Q}$.

Fixons $(\theta_0, y_0) \in \mathbf{T}^d \times G$ et définissons T_1 comme étant l'adhérence des $F_1^{n_i}(\theta_0, y_0)$ pour les suites (n_i) telles que $n_i\alpha_1 \to 0$. Cet ensemble s'identifie au sous groupe fermé (non nécessairement abélien) des valeurs d'adhérence des produits

$$A_1(\theta + (n_i - 1)\alpha_1) \cdots A_1(\theta)$$

où $n_i\alpha \to 0$. Sa dimension (au moins comme groupe de Lie) est donc inférieure où égale à d_G.

D'autre part, vu que $h \circ F_1^{n_i}(\theta_0, y_0) = F_2^{n_i} \circ h(\theta_0, y_0)$, il apparaît que

$$p_1(h(F_1^{n_i}(\theta_0, y_0))) = p_1(h(\theta_0, y_0)) + n_i\alpha_2.$$

Si α_1 et α_2 étaient indépendants sur $\mathbf{Q}$, on pourrait trouver pour tout $\eta \in \mathbf{T}^d$ une suite n_i telle que $n_i\alpha \to 0$ et $n_i\beta \to \eta$. On aurait alors,

$$p_1(h(T_1)) = \mathbf{T}^d.$$

Par le théorème de Sard, $p_1 \circ h$ est de rang maximal en un point de T_1, d'où il vient $\dim T_1 \leq d_G$, ce qui est en contradiction avec $d_G < d$. (On peut également consulter **[13]** lemme 12.3 p. 345). □

Remarquons que le résultat précédent est trivialement faux dans le cas où $G = \mathbf{T}^1$, $d = 1$ comme le montre par exemple le cas où $A_1(\theta, y) = (\theta+\alpha, y)$, $A_2(\theta, y) = (\theta, y+\alpha)$ et $h(\theta, y) = (y, \theta)$ (remarquer cependant qu'ici h n'est pas homotope à l'identité).

Les propositions précédentes montrent qu'il est naturel de se restreindre au problème où l'on cherche à conjuguer $(\alpha, A_1), (\alpha, A_2) \in SW_\alpha(\mathbf{T}^d, G)$ par un élément $(0, B) \in SW_0(\mathbf{T}^d, G)$. C'est désormais dans ce cadre que nous travaillerons.

Remarquons que, puisque $(\alpha, A)(\theta, y) = (\theta + \alpha, A(\theta)y)$, on a

$$(\alpha, A)^n(\theta, y) = (\theta + n\alpha, A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta)y).$$

On notera souvent $A^{(n)}(\theta)$ le produit $A(\theta + (n-1)\alpha) \cdots A(\theta)$.

L'équation de conjuguaison (6) s'écrit avec $F_i = (\alpha, A_i)$, $h = (0, B)$,

$$A_1(\theta) = B(\theta + \alpha)A_2(\theta)B(\theta)^{-1}.$$

On écrira souvent par la suite,

$$(\alpha, A_1)\, \mathcal{R}(B) (\alpha, A_2),$$

et on dira plus simplement que A_2 et A_1 sont conjugués. De la même façon, on dit que A est *réductible* s'il est conjugué à une application constante.

1.3. Flots fibrés

Nous reprenons les notations de la section précédente et supposons G connexe.

Nous dirons que $\{(t\omega, Z^t(\cdot))\}_{t\in\mathbf{R}}$ est *un flot fibré* de classe C^k ($k \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\}$) si $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$ est de classe C^k de $\mathbf{R} \to SW^k(\mathbf{T}^d, G)$ et si Z^t vérifie l'équation de cocycle :

$$Z^{t+s}(\theta) = Z^t(\theta + s\omega) \cdot Z^s(\theta),$$

pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$ et tous $s, t \in \mathbf{R}$.

Remarquons que si pour tout $t \in \mathbf{R}$, $Z^t(\cdot) \equiv$ cste est constante et si $t \mapsto Z^t(0)$ est continue, alors l'équation de cocycle entraîne que

$$Z^t(\theta) \equiv e^{tU_0},$$

où $U_0 \equiv$ cste (ne dépend pas de t ni de θ) et est dans l'algèbre g de G. Nous dirons qu'un tel flot est *constant.*

Deux flots fibrés $\{(t\omega, Z_i^t(\cdot)) \in SW^k(\mathbf{T}^d, G)\}_t$ $(i = 1,2)$ sont alors *conjugués* s'il existe $(0, B) \in SW^k(\mathbf{T}^d, G)$ tel que

$$\forall\, (t,\theta) \in \mathbf{R} \times \mathbf{T}^d, \quad Z_2^t(\theta) = B(\theta + t\omega) Z_1^t(\theta) B(\theta)^{-1}.$$

Nous noterons alors, $\{(t\omega, Z_1^t(\cdot))\}_t \, \mathcal{R}(B) \{(t\omega, Z_2^t(\cdot))\}_t$.

Un flot fibré est *réductible* s'íl est conjugué à un flot *constant.*

Faisons la remarque évidente suivante :

Si deux flots $\{(t\omega, Z_i^t(\cdot))\}_t$ $(i = 1,2)$ *vérifient*

$$\{(t\omega, Z_1^t(\cdot))\}_t \, \mathcal{R}(B) \{(t\omega, Z_2^t(\cdot))\}_t,$$

alors pour tout $t \in \mathbf{R}$ *les difféomorphismes produits-croisés* $(t\omega, Z_1^t(\cdot))$ *et* $(t\omega, Z_2^t(\cdot))$ *vérifient*

$$(t\omega, Z_1^t(\cdot)) \, \mathcal{R}(B) (t\omega, Z_2^t(\cdot)).$$

Nous démontrerons au chapitre 2 une réciproque partielle de ce résultat.

1.4. Équations différentielles linéaires à coefficients quasi-périodiques

1.4.a. Rappels : la théorie de Floquet. — Nous énonçons en guise de motivation, le classique théorème de Floquet :

Théorème 1.4.1. — *Soit* $u \in C^\infty(\mathbf{R}, gl(n, \mathbf{K}))$, *(*$\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$*) un champ de vecteurs* T*-périodique. Alors toute solution de l'équation différentielle* $X'(t) = u(t) \cdot X(t)$, $X(0) = \mathrm{Id}$, *s'écrit sous la forme* $X(t) = b(t) e^{u_0 t}$, *où* u_0 *est une constante et* b *une fonction (i)* T*-périodique si* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, *(ii)* $2T$*-périodique si* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Le but de la théorie des systèmes linéaires à coefficients quasi-périodiques, est de voir dans quelle mesure le théorème précédent se généralise au cas où u est quasi-périodique.

1.4.b. Presque-périodicité et quasi-périodicité. — Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application. Rappelons que f est dite *presque périodique* si la famille des translatées de f, $(\tau_a f)_{a \in \mathbf{R}} = (f(\cdot - a))_{a \in \mathbf{R}}$, est relativement compacte en topologie uniforme. Il existe alors une unique manière de munir H d'une structure de groupe topologique qui fait de $a \mapsto \tau_a$ un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans H. Le groupe topologique H est abélien compact séparable (mais avec petits sous-groupes), et son groupe dual $\widehat{H}$ (le groupe des caractères) est au plus dénombrable. Puisque $\tau : \mathbf{R} \to H$, par dualité

$\widehat{\tau} : \widehat{H} \to \widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$ est injective ; on appelle *module des fréquences* de f l'image $\widehat{\tau}(\widehat{H})$ que l'on note $\mathcal{M}(f)$. D'après le théorème de Peter-Weyl, f est limite uniforme de combinaisons linéaires de fonctions $x \to e^{\sqrt{-1}\lambda x}$, $\lambda \in \mathcal{M}(f)$. Il est en outre possible de montrer que, pour tout réel β, la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-\sqrt{-1}\beta t}dt$$

existe et est non-nulle seulement pour un ensemble au plus dénombrable $(\lambda_j)_{j\in\mathbf{N}}$ de valeurs de β, les *fréquences* de f. Le $\mathbf{Z}$-module engendré par ces fréquences est en fait le module des fréquences $\mathcal{M}(f)$.

Quand ce dernier est de rang fini égal à d, f peut toujours s'écrire sous la forme

$$f(t) = F(t\omega_1/2\pi, \dots, t\omega_d/2\pi),$$

où $F \in C^0(\mathbf{T}^d, \mathbf{R})$ et où les ω_i vérifient $\mathbf{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbf{Z}\omega_d = \mathcal{M}(f)$. On dit dans ce cas que f est *quasi-périodique* ; on appellera souvent $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbf{R}^d$ le *vecteur des fréquences* bien que les ω_i ne soient pas nécéssairement les fréquences de $f(t) = F(t\omega_1/2\pi, \dots, t\omega_d/2\pi)$ (par contre $(\mathbf{Z}, \omega) = \mathcal{M}(f)$). Par définition les fonctions quasi-périodiques f de classe C^*, $* \in \mathbf{N}\cup\{\infty, \omega\}$, (on prendra soin de ne pas confondre le vecteur des fréquences $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ avec le symbole ω qui signifie « analytique réel »), sont celles pour lesquelles F est de classe C^*. Remarquons que si ω est à coordonnées rationnelles, f est périodique.

1.4.c. Systèmes quasi-périodiques. — Soient G un groupe de Lie, g son algèbre, $F \in C^*(\mathbf{T}^d, g)$ $(* \in \mathbf{N} \cup \{\infty, \omega\})$ et $f(t) = F \circ \pi_d(\omega t)$ avec $\omega \in \mathbf{R}^d$ minimal. L'étude de l'équation différentielle à coefficients quasi-périodiques

$$\dot{X}(t) = f(t)X(t),$$

se réduit alors à celle de l'équation différentielle sur $\mathbf{T}^d \times G$ définie par le champ de vecteurs $(\omega/2\pi, F(\cdot)) \in T(\mathbf{T}^d \times G)$:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(\theta)X \\ \dot{\theta} &= \omega/2\pi. \end{aligned} \tag{7}$$

Les solutions de cette équation sont à valeurs dans le groupe G. Nous noterons $(\omega/2\pi, F(\cdot)) \in sw(\mathbf{T}^d, G)$.

Deux applications $F_1, F_2 \in C^*(\mathbf{T}^d, g)$ sont dites *conjuguées* s'il existe $B \in C^*(\mathbf{T}^d, G)$ telle que, pour toute solution X_1 de l'équation (7) avec F_1 à la place de F, la fonction $X_2(t) = B(t\omega/2\pi)^{-1}X_1(t)$, est solution de la même équation différentielle avec F_2 à la place de F. Il est équivalent d'écrire

$$F_2(x) = L_{\omega/2\pi}B(x) \cdot B(x)^{-1} + \mathrm{Ad}(B(x)) \cdot F_1(x),$$

ce que l'on notera

$$(\omega/2\pi, F_2)\, \mathcal{R}(B) (\omega/2\pi, F_1).$$

On a alors

$$(\omega/2\pi, F_1)\,\mathcal{R}(B^{-1})(\omega/2\pi, F_2).$$

Remarquons que si F_1, F_2, F_3 et B_1, B_2 satisfont à

$$(\omega/2\pi, F_2)\,\mathcal{R}(B_1)(\omega/2\pi, F_1),\ \ (\omega/2\pi, F_3)\,\mathcal{R}(B_2)(\omega/2\pi, F_2),$$

alors

$$(\omega/2\pi, F_3)\,\mathcal{R}(B_2 B_1)(\omega/2\pi, F_1).$$

Un système est dit *réductible* s'il est conjugué à une constante.

1.4.d. Liens entre difféomorphismes fibrés et flots. — Avec les notations des sections précédentes, notons $(t\omega/2\pi, Z_i^t(\cdot)) \in SW(\mathbf{T}^d, G)$ le flot au temps t du système (7) avec $F = F_i$ ($i = 1, 2$), c'est-à-dire l'application qui à toute condition initiale $\widetilde{X}_{t=0} = (\theta, y) \in \mathbf{T}^d \times G$ associe la valeur au temps t de la solution de (7),

$$\widetilde{X}(t) = (t\omega/2\pi, Z^t(\theta)) \cdot \widetilde{X}(0) = (\theta + t\omega/2\pi, Z^t(\theta)y).$$

Remarquons que $Z^t(\cdot)$ vérifie l'équation de cocycle,

$$Z^{t+s}(\theta) = Z^t(\theta + s\omega/2\pi) \cdot Z^s(\theta),$$

pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$, $s, t \in \mathbf{R}$.

Les deux notions de réductibilité précédentes développées en 1.2 et en 1.4.b sont en fait liées.

Proposition 1.4.2. — *Avec les notations du 1.4.b, $(\omega/2\pi, F_2)\,\mathcal{R}(B)(\omega/2\pi, F_1)$, au sens des champs de vecteurs si et seulement si, pour tout t,*

$$(t\omega/2\pi, Z_2^t(\cdot))\,\mathcal{R}(B)(t\omega/2\pi, Z_1^t(\cdot))$$

au sens des flots fibrés (c'est-à-dire si $Z_2^t(\theta + t\omega/2\pi) = B(\theta + t\omega/2\pi) Z_1^t(\theta) \cdot B(\theta)^{-1}$).

En particulier si $(\omega/2\pi, F_1)$ et $(\omega/2\pi, F_2)$ sont conjugués il en est de même de leurs temps 1 respectifs. Nous donnerons au chapitre 2 une réciproque partielle à ce résultat.

Démonstration. — Appelons X la solution de

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= F_2(\theta + t\omega/2\pi)X(t) \\ X(0) &= X_0, \end{aligned}$$

et posons

$$Y(t) = B_f(\theta + t\omega/2\pi)^{-1} \cdot X(t).$$

On a

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= -B^{-1}L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1}(\theta + t\omega/2\pi) \cdot X(t) + B(\theta + t\omega/2\pi) \cdot \dot{X}(t)\\ &= \left[-B^{-1}L_{\omega/2\pi}B(\theta + t\omega/2\pi) + B(\theta + t\omega/2\pi)^{-1}F(\theta + t\omega/2\pi)B(\theta + t\omega/2\pi)\right] \cdot\\ &\qquad \cdot B(\theta + t\omega/2\pi)^{-1}X(t),\\ &= F_1(\theta + t\omega/2\pi) \cdot Y(t).\end{aligned}$$

Ainsi, par définition du flot,

$$Y(t) = Z_1^t(\theta) \cdot Y(0),$$

et

$$\begin{aligned}X(t) &= B(\theta + t\omega/2\pi)Y(t)\\ &= B(\theta + t\omega/2\pi)Z_1^t(\theta)B(\theta)^{-1}X(0)\\ &= Z_2^t(\theta)X(0).\end{aligned}$$

ce qui prouve

$$Z_2^t(\theta) = B(\theta + t\omega/2\pi)Z_1^t(\theta)B(\theta)^{-1}.$$

La réciproque est immédiate (il suffit de dériver l'identité précédente par rapport à t). Ceci achève la preuve de la proposition 3.4.1. □

Remarque. — Nous avons noté $sw(\mathbf{T}^d, G)$ l'ensemble des champs de vecteurs (fibrés) sur $\mathbf{T}^d \times G$: c'est l'algèbre de Lie du groupe $SW(\mathbf{T}^d, G)$.

N.B. — Quand on travaille dans l'algèbre $sw(\mathbf{T}^d, G)$ il est plus commode pour des questions de notations de remplacer ω par $\omega/2\pi$.

CHAPITRE 2

RÉDUCTIBILITÉ DES SYSTÈMES PRODUITS-CROISÉS

2.1. Introduction

Dans ce chapitre nous donnons une condition nécessaire et (modulo un revêtement fini) suffisante de réductibilité des difféomorphismes de $SW^\infty(\mathbf{T}^d, G)$. Grossièrement ce résultat montre que la réductibilité C^k, $(k \geq 1)$ d'un difféomorphisme de $SW^k(\mathbf{T}^d, G)$ est équivalente à la compacité (en topologie C^k) des itérés de ce dernier. Ce type d'énoncé est à rapprocher des conditions nécessaires et suffisantes de réductibilité des difféomorphismes du cercle (et dans une certaine mesure des tores), données par M. Herman dans **[14]**, ainsi que des germes holomorphes dans le plan complexe (dans ce cas-ci la condition de compacité des itérés peut se reformuler de façon plus géométrique en terme de stabilité au sens de Lyapunov pour le système).

Signalons également qu'un critère de compacité utile pour des ensembles fonctionnels est le théorème d'Ascoli : *Si G est un groupe compact, toute famille équicontinue de* $\mathrm{Diff}^k(\mathbf{T}^d \times G)$ *est relativement compacte dans* $\mathrm{Diff}^k(\mathbf{T}^d \times G)$. *Ainsi, les propriétés suivantes sont équivalentes si* $\mathbf{A} \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^d \times G)$ *:*

(a) *pour tout k la famille $(D^k\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est bornée.*
(b) $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *est relativement compacte dans* $\mathrm{Diff}^k(\mathbf{T}^d \times G)$ *pour tout $k \geq 0$.*
(c) $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ *est relativement compacte dans* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^d \times G)$.

Les mêmes énoncés sont vrais avec $\mathbf{N}$ *à la place de* $\mathbf{Z}$.

2.2. Enoncés des théorèmes

Le premier résultat que nous démontrons est une réciproque partielle à la proposition 1.4.2 du chapitre 1.

Théorème 2.2.1. — *Soit G est un groupe de Lie compact semi-simple et soient $t_0 \in \mathbf{R}$, $\omega \in \mathbf{T}^d$ tels que $t_0\omega$ soit minimal sur $\mathbf{T}^d$ et $(t\omega, Z^t(\cdot)) \in SW(\mathbf{T}^d, G)$ un flot fibré.*

Supposons qu'il existe $B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ et $A_0 \in G$ tels que

$$\forall\, \theta \in \mathbf{T}^d, \quad Z^{t_0}(\theta) = B(\theta + t_0\omega) A_0 B(\theta)^{-1};$$

alors, il existe $X \in g$ tel que

$$\forall\, t \in \mathbf{R},\ \forall\, \theta \in \mathbf{T}^d, \quad Z^t(\theta) = B(\theta + t\omega) e^{tX} B(\theta)^{-1}.$$

Remarquons que l'on doit supposer que Z^{t_0} est conjugué à une constante.

Les résultats principaux de ce chapitre sont les théorèmes 2.2.2 et 2.2.3 qui suivent.

Théorème 2.2.2. — *Soient G un groupe de Lie compact semi-simple connexe, $\omega \in \mathbf{T}^d$ minimal et $(t\omega, A_t(\cdot)) \in SW^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ un flot tel que $\{(t\omega, A_t(\cdot))\}_{t\in\mathbf{R}}$ soit d'adhérence compacte en topologie C^∞ dans $SW(\mathbf{T}^d, G)$. Alors il existe $X_0 \in g$ et $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ tel que*

$$(t\omega, A_t(\cdot))\, \mathcal{R}(B)(t\omega, e^{X_0 t}),$$

où χ_G est un entier non nul ne dépendant que de G. En outre, si $G = SU(w+1)$, $\chi_G = 1$.

Dans le cas discret le résultat est un peu moins précis :

Théorème 2.2.3. — *Soient G un groupe de Lie compact semi-simple connexe, $\omega \in \mathbf{T}^d$ minimal et $(\omega, A(\cdot)) \in SW^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ tel que $\{(\omega, A)^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ soit d'adhérence compacte en topologie C^∞ dans $SW(\mathbf{T}^d, G)$. Alors il existe $A_0 \in G$ et $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\widetilde{\chi}_G\mathbf{Z}^d, G)$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, on ait*

$$A(x) = B(x+\omega) A_0 B(x)^{-1},$$

où $\widetilde{\chi}_G$ est un entier non nul ne dépendant que du groupe G. Si $\chi_G \neq 1$ (où χ_G est l'entier du théorème 2.2.2) on peut en fait choisir $\widetilde{\chi}_G = c_G\chi_G$ où c_G est le cardinal du centre (discret) de G ; si $\chi_G = 1$, en particulier si $G = SU(w+1)$, on peut choisir $\widetilde{\chi}_G = 1$.

On peut compléter ce dernier énoncé par la proposition :

Proposition 2.2.4. — *Soient A, B, A_0 tels que*

$$A \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G), \quad B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/T\mathbf{Z}^d, G) \text{ (T entier non nul)}, \quad A_0 \in G$$

et vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$A(x) = B(x+\omega) A_0 B(x)^{-1}.$$

Alors, il existe un ensemble de mesure totale $\mathcal{S} \subset G$ tel que, si $A_0 \in \mathcal{S}$, (ω, A) est en fait réductible dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$.On dira alors que (ω, A_0) est générique.

Nous donnons également dans la section 2.5 deux autres résultats : le premier (théorème 2.5.8) donne une description des centralisateurs des cocycles constants (ou conjugués à des constantes) tandis que le second (proposition 2.5.9) caractérise les conjugaisons entre cocycles constants.

2.3. Résultats sur les groupes compacts

Nous rappelons en 2.3.a, 2.3.b des résultats classiques sur les groupes de Lie compacts semi-simples et donnons en 2.3.c, 2.3.d des résultats qui nous serons utiles par la suite.

2.3.a. La réduction à la dimension finie

Groupes sans petits sous-groupes

Définition 2.3.1. — Soit G un groupe topologique et e l'identité de G ; on dit que G est sans petits sous-groupes s'il existe un voisinage de l'identité ne contenant aucun sous-groupe (topologique) autre que $\{e\}$.

Il existe des groupes qui ne jouissent pas de cette propriété, par exemple $\prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{T}^1$, ou le groupe des entiers p-adiques. En revanche, les groupes de Lie sont tous sans petits sous-groupes. La réciproque est vraie pour les groupes localement compacts comme le montre le théorème suivant dont on trouvera la démonstration dans [**20**] (chap. IV, th. 4.4, p. 169).

***Théorème 2.3.2* (Gleason, Montgomery, Zippin).** — *Soit G un groupe topologique localement compact sans petits sous-groupes ; alors on peut munir G d'une structure de groupe de Lie.*

Citons une version plus faible du résultat précédent mais plus facile à montrer (*cf.* par exemple [**20**], chap. II, th. 2.20, p. 99).

Théorème 2.3.3. — *Soit G un groupe compact sans petits sous-groupes ; alors G est homéomorphe (et isomorphe) à un sous-groupe d'un groupe orthogonal $O(n, \mathbf{R})$ (ou un sous groupe du groupe unitaire $U(n)$).*

Rappelons enfin (*cf.* par exemple [**6**]) :

Théorème 2.3.4. — *Un groupe de Lie compact abélien est isomorphe (topologiquement) au produit d'un tore $\mathbf{T}^M$ par un groupe fini F. Dans le cas où le groupe est monothétique (*i.e.* est l'adhérence d'un groupe engendré par un élément), le groupe F est cyclique isomorphe à $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ (l dans $\mathbf{Z} - \{0\}$).*

Les groupes qui nous intéressent sont les sous-groupes des groupes de difféomorphismes pour lesquels on dispose du théorème connu ci-dessous. Pour la commodité du lecteur nous en donnons une démonstration.

Théorème 2.3.5. — *Soit X une variété C^∞ différentiable, compacte, connexe. Alors l'ensemble* $\mathrm{Diff}^r(X)$, *$r \in \mathbf{N}$, $r \neq 0$ (resp. $r = \infty$) est un groupe de Lie banachique (resp. fréchetique) sans petits sous-groupes.*

Esquisse de la preuve de « sans petits sous-groupes ». — Remarquons que le cas général découle du cas où $r = 1$, ce que nous supposons désormais. Il suffit alors de démontrer que si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit et si, pour tout n,

$$|f^n - \mathrm{Id}\,|_1 \leq \varepsilon, \tag{1}$$

alors

$$f = \mathrm{Id}\,. \tag{2}$$

Il suffit pour cela de démontrer que pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U_x où (2) a lieu.

Soit alors (V_x, ϕ), $\phi : V_x \to \mathbf{R}^p$, une carte locale en $x \in X$ telle que $x, f(x) \in V_x$ et posons

$$\widetilde{f} = \phi \circ f \circ \phi^{-1}.$$

L'application $\widetilde{f}$ est définie sur un voisinage $W \subset \mathbf{R}^p$ et est à valeurs dans $\mathbf{R}^p$. Vu (1), quitte à prendre W plus petit, f^n est définie sur W pour tout $n \geq 1$, au même titre que $\widetilde{f}_n$. Soit alors

$$g_n = \frac{\mathrm{Id} + \widetilde{f} + \widetilde{f}^2 + \cdots + \widetilde{f}^{n-1}}{n},$$

définie sur W. Remarquons que

$$g_n \circ \widetilde{f} = g_n + \frac{\widetilde{f}^n - \mathrm{Id}}{n}. \tag{3}$$

En outre, d'après (1),

$$|g_n - \mathrm{Id}\,|_1 \leq \varepsilon. \tag{4}$$

La formule des accroissements finis nous donne,

$$g_n(\widetilde{f}(x)) - g_n(x) = \int_0^1 Dg_n((1-t)x + t\widetilde{f}(x)) \cdot (\widetilde{f}(x) - x)dt,$$

c'est-à-dire, d'après (3) et (1),

$$|(\widetilde{f}(x) - x) + \int_0^1 (Dg_n((1-t)x + t\widetilde{f}(x)) - \mathrm{Id}) \cdot (\widetilde{f}(x) - x)dt| \leq \frac{\varepsilon}{n};$$

or d'après (4), si ε est suffisamment petit, la norme du membre de gauche de cette inégalité est supérieur à $|\widetilde{f}(x) - x|/2$, si bien que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|\widetilde{f}(x) - x| \leq \frac{2\varepsilon}{n}.$$

On a donc, en faisant $n \to \infty$, $\widetilde{f}(x) = x$ *i.e.* $\widetilde{f} = \mathrm{Id}$, ce qu'il fallait démontrer. □

2.3.b. Groupes de Lie : rappels. — Considérons G un groupe de Lie réel compact connexe (donc plongé dans un groupe de matrices), d'algèbre de Lie g. Nous noterons comme d'habitude $[X,Y]$, le crochet de deux $X,Y \in g$, ce que l'on peut aussi écrire,

$$\mathrm{ad}(X)\cdot Y = [X,Y].$$

De la même manière on introduit la représentation Adjointe,

$$\mathrm{Ad}(u)\cdot X,$$

définie pour $u \in G$, $X \in g$, comme étant le vecteur tangent en l'identité au chemin,

$$u\gamma(t)u^{-1},$$

où γ est à valeurs dans G, $\gamma(0) = \mathrm{Id}$ et $\dot\gamma(0) = X$. On notera,

$$\mathrm{Ad}(u)\cdot v = uvu^{-1}.$$

Nous noterons κ la forme de Cartan-Killing,

$$\kappa(X,Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\cdot \mathrm{ad}(Y)),$$

qui est une forme bilinéaire symétrique définie sur g.

L'algèbre est dite

- *semi-simple*, si κ est non-dégénérée ;
- *compacte* si κ est négative.

Le groupe G semi-simple est compact si et seulement si l'algèbre est compacte.

Nous supposerons désormais G compact semi-simple et noterons pour $X \in g$, $e^X = \exp(X) \in G$ l'exponentielle de X ; rappelons que $\exp : g \to G$ est surjective quand G est compact.

Tores maximaux. — On dit que $T \subset G$ est un tore maximal de G si c'est un sous-groupe abélien, compact, connexe, maximal pour l'inclusion de G. De tels tores sont effectivement isomorphes à des $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$. L'algèbre de Lie $t \subset g$ d'un tore maximal $T \subset G$ est une sous-algèbre de Lie abélienne maximale (pour l'inclusion) de g et réciproquement, toute sous-algèbre abélienne maximale $t \subset g$ est l'algèbre de Lie d'un tore maximal $T \subset G$. Nous appelerons sous-algèbres toriques maximales de telles sous-algèbres.

Le théorème fondamental est le suivant (on se reportera par exemple à **[6]** ou encore à **[13]**).

Théorème 2.3.6. — *Soient G un groupe compact semi-simple et g son algèbre de Lie. Alors,*

(i) *par tout point $u \in G$ (resp. $X \in g$) passe au moins un tore maximal (resp. une sous-algèbre torique maximale) ;*

(ii) *si T et T' (resp. t et t' dans g) sont deux tores maximaux de G (resp. deux sous-algèbres toriques maximales de g), il existe $x \in G$ qui conjugue T et T', (resp. t et t') c'est-à-dire :*

$$T' = x \cdot T \cdot x^{-1} \quad (\textit{resp.} \quad t' = \mathrm{Ad}(x) \cdot t);$$

(iii) *le centralisateur d'un tore maximal T, c'est-à-dire*

$$C(T) = \{x \in G,\ \forall y \in T,\ xy = yx\},$$

est egal à T ;

(iv) *si $N(T)$ est le normalisateur d'un tore maximal T,*

$$N(T) = \{x \in G,\ \mathrm{Ad}(x) \cdot T \subset T\},$$

alors T est distingué dans $N(T)$ et le groupe $W_T = N(T)/T$ est de cardinal fini; tous ces groupes W_T sont isomorphes : c'est le groupe de Weyl de G.

Un point $x \in G$ est dit *régulier* s'il n'est contenu que dans un seul tore maximal. Sinon il est dit *singulier*. Un point est dit *générique* si $\mathrm{Adh}(x^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est un tore maximal. Un élément générique est régulier.

Remarque. — Si $u \in G$ est tel que $\mathrm{Ad}(u) = \mathrm{Id}$, alors u est dans le centre de G et $u^{c_G} = \mathrm{Id}$ où $c_G = \#\mathrm{Cent}(G)$.

Racines. — Soit donc T un tore maximal du groupe compact semi-simple connexe G et t son algèbre de Lie. Pour $H \in t$, l'élément $\mathrm{ad}(H) \in gl(g)$ est un endomorphisme antisymétrique de $gl(g)$; en outre, t étant abélienne, tous les $\mathrm{ad}(H)$, $H \in t$ commutent et sont donc simultanément diagonalisables sur $\mathbf{C}$. On peut alors énoncer,

Proposition 2.3.7. — *Dans la situation précédente, il existe un ensemble Δ de formes linéaires réelles non-nulles α sur t qui peut s'écrire $\Delta = \widetilde{\Delta} \cup (-\widetilde{\Delta})$ (donc invariant par $\alpha \mapsto -\alpha$) et des éléments $X_\alpha \in g$ tels que*

(i) $g = t \oplus_{\alpha\in\widetilde{\Delta}} (\mathbf{R}X_\alpha \oplus \mathbf{R}X_{-\alpha})$,

(ii) *pour tout $H \in t$ et tout $\alpha \in \Delta$*

$$\mathrm{ad}(H) \cdot X_\alpha = \sqrt{-1}\alpha(H)X_{-\alpha}.$$

On appelle les α les racines de g relatives à t.

Il est en outre possible de démontrer que la forme de Killing définie sur g reste non dégénérée quand on la restreint à t ; nous pouvons donc définir $h_\alpha \in t$ le dual de $\alpha \in t^*$ par rapport à la forme de Killing restreinte à t, c'est-à-dire

$$\kappa(h_\alpha, \cdot)_{|t} = \alpha.$$

Ceci permet de définir une forme bilinéaire symétrique sur t^*,

$$(\alpha, \beta) = \alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha).$$

En outre,

$$(\alpha, \alpha) = 2,$$

et les coefficients de la matrice des (α, β), $\alpha, \beta \in \Delta$, dite *matrice de Cartan*, sont des entiers dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Bases de Weyl. — Les racines ne sont pas linéairement indépendantes entre elles. Il est toutefois possible de choisir une base $S = (\alpha_1, \dots, \alpha_w)$ de t^* parmi celles-ci vérifiant la propriété suivante : pour toute racine $\alpha \in \Delta$, il existe des entiers $m_{\alpha,j}$ tous positifs ou tous négatifs, tels que $\alpha = \sum_{j=1}^{w} m_{\alpha,j}\alpha_j$. Une telle base sera dite de Weyl.

Signalons un résultat dont on se servira plus loin : la matrice des (α, β) avec $\alpha, \beta \in S$ (S étant la base de Weyl) est inversible. Notons cependant que les $(h_\alpha)_{\alpha\in S}$ forment une base qui n'est *pas* la duale de $(\alpha)_{\alpha\in S}$ pour le crochet de dualité.

Représentation dans un groupe unitaire $U(L)$, caractères, poids. — Reprenant les notations précédentes, nous notons $T \subset G$ un tore maximal, t son algèbre de Lie, $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\widetilde{q}}\}$ l'ensemble des racines par rapport à t et nous supposons que $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$ est une base de Weyl. Le groupe G étant compact, il en existe d'après le théorème 2.3.3 une représentation fidèle ρ dans un groupe unitaire $U(L)$ (L entier ≥ 1). Nous notons $T(L)$ le tore maximal constitué des matrices diagonales de $U(L)$.

Vu que la famille $\rho(T) \subset U(L)$ est abélienne, il existe $P \in U(L)$ tel que pour tout $v \in T$,

$$\rho(v) = P \cdot \mathrm{diag}(\zeta_1(v), \dots, \zeta_L(v)) \cdot P^{-1},$$

où les $\zeta_j(v)$ sont sur le cercle S^1. Les $\zeta_j(\cdot)$, $1 \leq j \leq L$ sont alors des morphismes de $G \to S^1$ que l'on appelle les *caractères* de la representation ρ.

Par monodromie, il existe des formes $\mathbf{R}$-linéaires sur t, à savoir $\phi_1, \dots, \phi_L$, telles que, pour tout $1 \leq j \leq L$ et tout $X \in t$,

$$\zeta_j(\exp(X)) = e^{\sqrt{-1}\phi_j(X)}$$

Les $\phi_i \in t^*$ qui sont non-nuls sont par définition les *poids* de la représentation ρ. Nous noterons respectivement Car_ρ et Poids_ρ les familles $\{\zeta_1, \dots, \zeta_L\}$ et $\{\phi_1, \dots, \phi_L\}$. Nous appelerons souvent dans la suite les valeurs propres de $\rho(v)$, $v \in G$, les ρ-caractères de v.

Nous pouvons citer le théorème de dualité suivant (*cf.* [**6**], prop. 21.14.3, p. 96).

Théorème 2.3.8. — *Les poids ϕ sont dans l'ensemble des formes $\mathbf{C}$-linéaires sur $t\otimes\mathbf{C}$, telles que, pour tout $\alpha \in S$, $\phi(h_\alpha)$ est entier.*

Ecrivons alors

$$\phi = \sum_{\alpha\in S} \mu_\alpha \alpha,$$

où les μ_α sont dans $\mathbf{C}$. Vu que

$$\phi(h_\beta) = \sum_{\alpha \in S} \mu_\alpha \alpha(h_\beta),$$

il vient que, pour tout $\beta \in S$,

$$\sum_{\alpha \in S} \mu_\alpha (\alpha, \beta) \in \mathbf{Z}.$$

Or nous avons vu que la matrice des $(\alpha, \beta)_{\alpha, \beta \in S}$ à coefficients dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, est inversible. Nous avons ainsi prouvé

Lemme 2.3.9. — *Les poids sont combinaisons linéaires à coefficients dans $e^{-1}\mathbf{Z}$ des racines de la base de Weyl, où e est un entier non nul ne dépendant que de l'algèbre g.*

Nous introduirons également la représentation $\mathrm{Ad}_\rho = \mathrm{Ad} \circ \rho$ de G agissant sur $M(L, \mathbf{C})$; ses poids sont alors de la forme $\phi_k - \phi_l$, $1 \le k \ne l \le L$ et nous les noterons $p_1, \ldots, p_{L^2-L}$; nous noterons pour simplifier les notations $p_{L^2-L+1}, \ldots, p_{L^2}$ les $\phi_j - \phi_j = 0$, $1 \le j \le L$.

Nous appellerons $\beta_1, \ldots, \beta_q$ les formes linéaires définies de la manière suivante :

- $\beta_i = \alpha_i$ pour $1 \le i \le \widetilde{q}$,
- $\beta_i = p_{i-\widetilde{q}}$ pour $\widetilde{q} + 1 \le i \le L^2 + \widetilde{q} = q$.

Ainsi, pour tout $i \le q$, il existe $m_{i,j}$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ tels que

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{w} m_{i,j} \beta_j.$$

Le cas du groupe spécial unitaire. — A titre d'exemple et puisque nous en aurons besoin par la suite, nous illustrons ce qui a été dit précédemment dans le cas simple où $G = SU(w+1)$, l'ensemble des matrices unitaires de déterminant 1. Son centre est isomorphe à l'ensemble des racines $(w+1)$-ième de l'unité et son algèbre de Lie est $g = su(w+1)$, l'ensemble des matrices anti-hermitiennes de trace nulle. Les éléments de G sont à valeurs propres sur le cercle unité tandis que celles des éléments de g sont imaginaires pures. Nous noterons $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{w+1})$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_{w+1}$. Ainsi si $T \subset G$ est un tore maximal de G, tout $A \in T$ peut s'écrire

$$A = P \cdot \mathrm{diag}(e^{\sqrt{-1}\lambda_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\lambda_{w+1}}) \cdot P^{-1},$$

où $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{w+1} = 0$ et où $P \in SU(w+1)$ ne dépend que de T. De même si t est une algèbre torique maximale tout $X \in t$ s'écrit

$$X = P \cdot \mathrm{diag}(\sqrt{-1}\lambda_1(X), \ldots, \sqrt{-1}\lambda_{w+1}(X)) \cdot P^{-1},$$

où $\lambda_j(X) \in \mathbf{R}$, $\lambda_1(X) + \cdots + \lambda_{w+1}(X) = 0$ et où P ne dépend que de t. Les $\lambda_j(X)$ sont alors des formes $\mathbf{R}$-linéaires sur t. Les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ sont les

$$\sqrt{-1}(\lambda_k(X) - \lambda_l(X)), \quad 1 \leq k, l \leq w+1$$

et les racines de t sont par conséquent les formes linéaires $\lambda_k - \lambda_l$, $1 \leq k, l \leq w+1$, $l \neq k$. Notons $\alpha_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$, $1 \leq j \leq w$; $(\alpha_1, \ldots, \alpha_w)$ est une base de t^*, la base de Weyl et toute racine $\alpha = \lambda_k - \lambda_l$, $k \leq l$ s'écrit $\alpha = \alpha_k + \cdots + \alpha_{l-1}$. Si nous reprenons les notations précédentes $\widetilde{q} = w(w+1)$ et les $m_{i,j}$, $1 \leq i \leq \widetilde{q}$, $1 \leq j \leq w$, vérifient la propriété (P) suivante :

Propriété (P). — *Pour tout i, il existe $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$ et $1 \leq j_i^- \leq j_i^+$ tels que, pour $j_i^- \leq j \leq j_i^+$, $m_{i,j} = \varepsilon_i$ et $m_{i,j} = 0$ sinon.*

Lemme 2.3.10. — *Si une matrice carrée M vérifie la condition (P) son déterminant appartient à $\{0, -1, 1\}$.*

Démonstration. — Ce résultat se démontre par récurrence sur l'ordre n de la matrice M. que nous écrirons en lignes,

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}.$$

Notons pour une ligne L_i, $e_-(L_i), e_+(L_i)$ les «extrémités» gauche et droite de L_i, c'est-à-dire, dans la définition de la propriété P donnée plus haut, les entiers j_i^-, j_i^+. On peut alors définir une relation d'ordre lexicographique sur les lignes L_i par : $L_i \leq L_j$ si $e_-(L_i) < e_-(L_j)$, ou si $e_-(L_i) = e_-(L_j)$ et $e_+(L_i) \geq e_+(L_j)$. Remarquons que si parmi les lignes L_i deux sont égales le déterminant de M est trivialement nul, tandis que si ce n'est pas le cas, l'ordre défini précédemment est total et on peut, quitte à changer par ± 1 le déterminant de M, supposer que $L_1 < L_2 < \cdots < L_n$. Dans ce cas-ci, notons p le plus grand entier inférieur à n pour lequel $e_-(L_1) = \cdots = e_-(L_p)$ et M_1 la matrice

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_p - L_1 \\ L_{p+1} \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix},$$

qui vérifie la propriété P et $\det M = \det M_1$. En outre, la première colonne de M_1 est

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

si bien qu'en développant le déterminant de M_1 suivant la première colonne, on voit que $\det M_1$ est le déterminant de la matrice extraite de M_1 en enlevant la première ligne et la première colonne; mais une telle matrice vérifie (P) et est d'ordre $n-1$. La récurrence est donc établie. □

Enfin, appelons $(H_1, \dots, H_w) \subset t$ la base duale pour le crochet de dualité (et non pas pour la forme de Cartan-Killing) de la base de Weyl $(\alpha_1, \dots, \alpha_w)$. On a alors

$$H_j = P \operatorname{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) P^{-1} - \frac{j}{w+1} \operatorname{Id},$$

où les 1 occupent les j premières places sur la diagonale; on peut aussi écrire

$$H_j = P \Big(\sum_{k=1}^{j} E_{kk} - \frac{j}{w+1} \sum_{l=1}^{w+1} E_{ll} \Big) P^{-1} \in t_{A,P},$$

où on a noté E_{ij} la matrice dont les coefficients sont tous nuls sauf celui placé à la i-ième ligne et j-ième colonne qui vaut 1.

2.3.c. Elimination des résonances. — Nous considérons dans cette section un espace vectoriel réel t de dimension w sur lequel sont définies q formes linéaires $\beta_1, \dots, \beta_q$. Nous supposerons que les $(\beta_j)_{1 \leq j \leq w}$ constituent une base du dual t^* de t et nous noterons $(H_i)_{i \in \{1, \dots, w\}}$ une base duale c'est-à-dire $\beta_j(H_i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). Nous supposons en outre que les $(\beta_j)_{w+1 \leq j \leq q}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$w+1 \leq j \leq q, \quad \beta_j = \sum_{k=1}^{w} m_{j,k} \beta_k,$$

où les $m_{j,k}$ sont des rationnels.

Nous notons $t_{\mathbf{Q}}$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les $H_1, \dots, H_w$ et $t^*_{\mathbf{Q}}$ son $\mathbf{Q}$-espace dual. On a alors $t^*_{\mathbf{Q}} = \operatorname{Vect}_{\mathbf{Q}}(\beta_1, \dots, \beta_q)$.

Considérons à présent $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in \mathbf{R}^d$ un vecteur minimal c'est-à-dire tel que $x \mapsto x + \omega$ soit minimal sur $\mathbf{R}^d / \mathbf{Z}^d$ et notons $(\mathbf{Q}^d, \omega)$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\omega_1 + \dots + \mathbf{Q}\omega_d$. Remarquons que le fait que ω soit minimal implique

$$\mathbf{Q} \cap (\mathbf{Q}^d, \omega) = \{0\}.$$

Vu comme $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, $\mathbf{R}$ peut donc s'écrire,

$$\mathbf{R} = (\mathbf{Q}^d, \omega) \oplus \mathbf{Q} \oplus F',$$

où F' est un $\mathbf{Q}$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$. Nous noterons $\pi_\omega : \mathbf{R} \to (\mathbf{Q}^d, \omega)$ la projection $\mathbf{Q}$-linéaire de noyau $F = F' \oplus \mathbf{Q}$. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.3.11. — *Soient $X \in t$ et $\omega \in \mathbf{R}^d$ minimal. Il existe un entier μ (dépendant de X) et des rationnels x_i dans $\frac{1}{\mu}\mathbf{Z}^d$ pour lesquels, si on pose $H = \sum_{i=1}^{w}(x_i, \omega)H_i$, alors, pour tout $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$,*

$$\pi_\omega(\beta(X)) = \beta(H) = \pi_\omega(\beta(H)).$$

Avant de passer à la démonstration du lemme, nous donnons un corollaire et une définition.

Corollaire 2.3.12. — *Avec les notations précédentes, pour tout $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$ et tout $k \in \mathbf{Q}^d$, on a l'implication*

$$\beta(X - H) - (k, \omega) \in \mathbf{Q} \Longrightarrow k = 0.$$

Démonstration du corollaire. — On a choisi π_ω tel que $\pi_\omega(\mathbf{Q}) = 0$; si on a donc $\beta(X - H) - (k, \omega) \in \mathbf{Q}$ avec $k \in \mathbf{Q}^d$, $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$, alors

$$0 = \pi_\omega(\beta(X - H) - (k, \omega)) = -\pi_\omega((k, \omega)) = -(k, \omega),$$

et ω étant minimal, $k = 0$. □

Définition 2.3.13. — Nous dirons alors qu'un réel β (resp. un élément $\zeta \in \mathbf{T}^1$) est *ω-non résonnant* si, pour tout $k \in \mathbf{Q}^d$, $\beta - (k, \omega) \in \mathbf{Q}$ (resp. $\zeta = e^{2\pi i(k,\omega)}$) implique $k = 0$ et nous noterons $\beta \in NR(\omega)$ (resp. $\zeta \in NR_{\mathbf{T}^1}(\omega)$).

Passons à la démonstration du lemme.

Démonstration du lemme 2.3.11. — Notons X^* l'application $\mathbf{Q}$-linéaire,

$$\begin{aligned} X^* : t^*_{\mathbf{Q}} &\longrightarrow \mathbf{R} = (\mathbf{Q}^d, \omega) \oplus F, \\ \beta &\longmapsto \beta(X) = \langle X, \beta \rangle. \end{aligned}$$

L'application $\mathbf{Q}$-linéaire

$$\pi_\omega \circ X^* : t^*_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathbf{Q}\omega_1 + \cdots + \mathbf{Q}\omega_d$$

s'écrit sous la forme

$$\pi_\omega \circ X^* = \psi_1\omega_1 + \cdots + \psi_d\omega_d,$$

où les ψ_i sont dans $(t^*_{\mathbf{Q}})$ et il existe donc des Y_i, $1 \leq i \leq d$ dans $t_{\mathbf{Q}}$ tels que $\psi_i = \langle Y_i, \cdot \rangle$, c'est-à-dire tels que pour tout $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$, $\psi_i(\beta) = \beta(Y_i)$. On a donc, pour tout $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$,

$$\begin{aligned} \pi_\omega(\beta(X)) &= \beta(Y_1)\omega_1 + \cdots + \beta(Y_d)\omega_d \\ &= \beta(Y_1\omega_1 + \cdots + Y_d\omega_d), \end{aligned}$$

puisque β est également dans $t^*_{\mathbf{R}}$. Comme les Y_i, $1 \leq i \leq d$ sont dans $t_{\mathbf{Q}}$, il existe des rationnels y_{ik} tels que $Y_i = \sum_{k=1}^{w} y_{ik} H_k$ et, si on note $H = Y_1\omega_1 + \cdots + Y_d\omega_d$, on a

$$H = \sum_{k=1}^{w} (x_k, \omega) H_k,$$

où x_k, $1 \leq k \leq w$, est le vecteur $x_k = (y_{1k}, \ldots, y_{dk}) \in \mathbf{Q}^d$. Comme les y_{ik} sont rationnels et en nombre fini, il existe un entier μ non nul tel que $x_k \in (\frac{1}{\mu}\mathbf{Z})^d$, $1 \leq k \leq w$. On a ainsi montré,

$$\forall\, \beta \in t^*_{\mathbf{Q}}, \quad \pi_\omega(\beta(X)) = \beta(H),$$

avec H de la forme désirée. Pour conclure la démonstration du lemme il suffit de constater que, pour tout $1 \leq i \leq q$, $\beta_i(H) \in (\mathbf{Q}^d, \omega)$ et, par conséquent, pour tout $\beta \in t^*_{\mathbf{Q}}$, $\beta(H) \in (\mathbf{Q}^d, \omega)$; on a donc $\pi(\beta(H)) = \beta(H)$. □

2.3.d. Un lemme algébrique. — Nous démontrons un lemme qui précise la structure des sous-groupes abéliens d'un groupe compact. Si $K \subset G$ nous noterons, pour un entier m,

$$K^m = \{x^m,\ x \in K\}.$$

Lemme 2.3.14. — *Soit G un groupe de Lie réel compact connexe semi-simple ; il existe alors un entier $\chi_G \geq 1$, qui ne dépend que de G, tel que pour toute partie abélienne K de G, il existe un tore maximal T de G tel que*

$$K^{\chi_G} \subset T.$$

Dans le cas où $G = SU(N)$, pour $N \geq 1$, alors $\chi_G = 1$.

Rappelons tout d'abord le théorème suivant dont on trouvera une démonstration dans [**1**], p. 175, cor. 3.9.6.

Théorème 2.3.15. — *Soient $P_1, \ldots, P_k$ des polynômes dans $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Notons d le plus grand des $\deg P_i$, $1 \leq i \leq d$. Alors, le nombre de composantes connexes de l'ensemble algébrique (fermé)*

$$V = \{x \in \mathbf{R}^n,\ P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0\},$$

est borné par d^{k+n-1}.

Démonstration du lemme 2.3.14. — Vu que G est compact, il en existe une représentation fidèle ρ dans un groupe unitaire $U(L)$, $L \geq 1$. On peut donc identifier G à un sous-groupe de $U(L)$ ce que nous ferons.

Les élements de K forment alors une famille commutative de matrices hermitiennes de $U(L)$ et sont donc simultanement diagonalisables dans une même base hermitienne. Si $T(L)$ est un tore maximal fixé dans $U(L)$, cela signifie qu'il existe $z \in U(L)$ tel que

$$zKz^{-1} \subset T(L),$$

ou encore

$$K \subset z^{-1}T(L)z.$$

Ainsi,

$$K \subset G \cap z^{-1}T(L)z.$$

Vu que G est compact, c'est un sous-groupe algébrique réel de $U(L)$ et donc de $M(2L, \mathbf{R})$, défini par une équation,

$$G = \{x \in M(2L, \mathbf{R}),\ P_G(x) = 0\},$$

où $P_G \in \mathbf{R}[X_1, \ldots X_{(2L)^2}]$. De même le tore $T(L)$ est défini par

$$T(L) = \{x \in M(2L, \mathbf{R}),\ P_T(x) = 0\}.$$

Ainsi,

$$G \cap z^{-1}T(L)z = \{x \in M(2L, \mathbf{R}),\ R_z(x) = 0\},$$

où R_z est par exemple le polynôme de $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_{(2L)^2}]$, égal à

$$R_z(x) = P_G(x)^2 + P_T(zxz^{-1})^2.$$

Notons L_z l'automorphisme linéaire de $M(2L, \mathbf{R})$

$$L_z : x \longmapsto zxz^{-1}.$$

C'est une application polynomiale de degré 1 dans $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_{(2L)^2}]$. De ce fait, pour tout $z \in U(L)$, $P_T \circ L_z$ est un polynôme de degré inférieur à celui de P_T. Le degré de R_z est donc borné par un entier qui ne dépend que du groupe G et que l'on note d_G. La remarque qui suit le théorème 2.3.6 montre alors que le nombre de composantes connexes de

$$Z = G \cap z^{-1}T(L)z,$$

est inférieur à

$$\chi_G = d_G^{(2L)^2}.$$

Notons Z_0 la composante connexe neutre de Z. Le groupe quotient Z/Z_0, est fini de cardinal égal au nombre de composantes connexes de Z dans G. Ainsi, pour tout $x \in Z$,

$$x^{\chi_G} \in Z_0,$$

Ceci montre que

$$K^{\chi_G} \subset Z_0.$$

Comme Z_0 est un sous-groupe abélien compact connexe, c'est un tore et il est donc inclus dans un tore maximal T de G. Ceci achève la preuve du lemme 2.3.14 $\square$

2.4. Démonstration du théorème 2.2.1

Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème 2.2.1 (qui est une réciproque partielle à la remarque faite au chapitre 1 en 1.3. Afin de simplifier les notations nous démontrons le théorème dans le cas $t_0 = 1$. Il suffit pour cela de voir que si le temps 1 du flot fibré induit par $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$, flot que nous noterons, $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$ ($Z^t(\cdot)$ étant dans $C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$), est constant égal à A_0 (c'est-à-dire $Z^1(\theta) \equiv A_0$), alors $Z^t(\cdot)$ est de la forme $Z^t(\cdot) \equiv e^{tX}$ ($X \in g$ ne dépend pas de $\theta \in \mathbf{T}^d$).

Reprenons les notations du 1.3 et notons Adh^∞ l'adhérence en topologie C^∞. On note $T_f \subset \mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^d \times G)$ le groupe abélien (par hypothèse),

$$T_f = \mathrm{Adh}^\infty((\omega t, Z^t))_{t\in\mathbf{R}}.$$

Lemme 2.4.1. — *T_f est isomorphe à un tore $\mathbf{T}^q = \mathbf{R}^q/\mathbf{Z}^q$.*

Démonstration

(i) Déjà T_f est compact car $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$ est uniformément continue et l'ensemble $\mathrm{Adh}^k((n\omega, Z^n(\cdot)))_{n\in\mathbf{Z}}$ étant compact pour tout $k \geq 0$, il vient que $\mathrm{Adh}^k((\omega t, Z^t(\cdot)))_{t\in\mathbf{R}}$ est également compact pour tout $k \geq 0$.

(ii) Vu que $\mathbf{T}^d \times G$ est compact, le théorème 2.3.5 et le (i) ci dessus montrent que T_f est un groupe abélien compact *sans petits sous-groupes*. En outre, il est connexe car il est l'adhérence de l'image de $\mathbf{R}$ par l'application continue $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$. Appliquant alors le théorème 2.3.4, on peut dire que T est isomorphe à un tore $\mathbf{T}^q$. $\square$

On notera $\eta : \mathbf{R} \to T_f$ le morphisme $t \mapsto (\omega t, Z^t(\cdot))$. Ainsi $\eta(1) = (\omega, Z^1(\cdot)) \equiv (\omega, A_0)$. Enfin T_{A_0} désignera un tore maximal passant par A_0 ; il est de la forme $e^{t_{X_0}}$ où $X_0 \in g$ est tel que $e^{X_0} = A_0$ et où t_{X_0} est une algèbre torique maximale de g passant par X_0.

Le sous-groupe abélien compact de $\mathbf{T}^d \times T_{A_0}$ engendré par (ω, A_0) c'est-à-dire l'adhérence des $(n\omega, A_0^n)$, $n \in \mathbf{Z}$, est le produit d'un tore par un $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ ($l \in \mathbf{Z} - \{0\}$). Par conséquent, le groupe $\mathrm{Adh}(nl\omega, A_0^{nl})_{n\in\mathbf{Z}}$ est un tore que l'on notera T_c (c pour « constante » par opposition à f pour fonction). Remarquons en outre que $T_c \subset T_f$.

Comme T_c est un tore, il existe un morphisme $\gamma : \mathbf{R} \to T_c \subset \mathbf{T}^d \times e^{t_{X_0}}$ tel que

$$\gamma(l) = (l\omega, A_0^l).$$

Dans $\mathbf{T}^d \times e^{t_{X_0}}$, le groupe à un paramètre $\gamma(\mathbf{R})$ est donc de la forme

$$\gamma(t) = (t\omega, e^{tX}), \tag{5}$$

où $X \in e^{t_{X_0}}$ (puisque les projections de $\mathbf{T}^d \times e^{t_{X_0}}$ sur $\mathbf{T}^d$ et $e^{t_{X_0}}$ sont des morphismes de groupes).

Rappelons que nous avons noté $\eta : \mathbf{R} \to T_f$, $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$ et que $\gamma(l) = \eta(l)$. Considérons alors $\beta : \mathbf{R} \to T_f$, $t \mapsto \eta(t)\gamma(t)^{-1}$. On a ainsi

$$\beta(l) = \mathrm{Id}\,. \tag{6}$$

En outre, β étant à valeurs dans T_f, s'écrit sous la forme

$$\beta(t) = (0, U_t(\cdot)), \tag{7}$$

où $U_t(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ vérifie pour tous $t, s \in \mathbf{R}$,

$$U_{t+s}(\cdot) = U_t(\cdot)U_s(\cdot). \tag{8}$$

Montrons alors le,

Lemme 2.4.2. — *Les fonctions $\theta \mapsto U_t(\theta)$ sont constantes.*

Démonstration. — Dérivons l'égalité (8) par rapport à θ et multiplions par $U_{t+s}(\theta)^{-1}$; il vient, en posant

$$X_t(\theta) = (\partial_\theta U_t(\theta))U_t(\theta)^{-1},$$

$(X_t \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g))$, l'égalité

$$X_{t+s}(\cdot) = X_t(\cdot) + X_s(\cdot),$$

ceci pour tous $t, s \in \mathbf{R}$.

Par conséquent,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad X_t(\cdot) = tX_1(\cdot). \tag{9}$$

Mais d'après (6), (7), $X_{t+l}(\cdot) = X_t(\cdot)$ si bien que d'après (9), $X_1(\cdot) \equiv 0$ et donc pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$, $t \in \mathbf{R}$, $X_t(\theta) = 0$. Par conséquent $U_t(\theta) = U_t(0)$ pour tous $t \in \mathbf{R}$, $\theta \in \mathbf{T}^d$. □

Nous notons $U_t = U_t(0)$.

Nous pouvons maintenant conclure la preuve du théorème 2.2.1.

La famille à un paramètre $t \mapsto U_t$ peut donc s'écrire

$$U_t = e^{t\widetilde{X}}, \tag{10}$$

avec $e^{l\widetilde{X}} = \mathrm{Id}$, $\widetilde{X} \in g$. Les égalités (5), (7), (10) et la définition de β montrent que

$$\eta(t) = (t\omega, e^{t\widetilde{X}}e^{tX}).$$

Mais comme $\eta(t)\eta(-t) = (0, \mathrm{Id})$, on a

$$e^{t\widetilde{X}}e^{tX}e^{-t\widetilde{X}}e^{-tX} = \mathrm{Id},$$

c'est-à-dire en faisant tendre t vers 0,

$$[X, \widetilde{X}] = 0.$$

On a donc

$$\eta(t) = (t\omega, e^{t(X+\widetilde{X})}),$$

ce qui conclut la preuve du théorème 2.2.1. □

2.5. Centralisateurs des cocycles constants

Nous étudions dans cette section le groupe des centralisateurs d'un cocycle constant (γ, C) où $C \in G$ et $\gamma \in \mathbf{T}^d$ sera supposé minimal. Si ce groupe est connu, il est clair que l'on peut décrire le groupe des centralisateurs de tout cocycle (non nécessairement constant) conjugué à (γ, C). Nous noterons $Z_{SW}(\gamma, C)$ le sous groupe de $SW(\mathbf{T}^d, G)$ des centralisateurs de (γ, C) et $Z_G(C)$ celui de $C \in G$ dans G, c'est-à-dire par définition :

$$Z_{SW}(\gamma, C) = \{(\alpha, A) \in SW(\mathbf{T}^d, G),\ (\alpha, A) \circ (\gamma, C) = (\gamma, C) \circ (\alpha, A)\},$$

et

$$Z_G(C) = \{U \in G,\ UC = CU\}.$$

Nous définissons encore

$$Z_{SW_\gamma}(C) = \{A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G),\ (\gamma, A) \in Z_{SW}(\gamma, C)\}.$$

Un cocycle $(\alpha, A) \in SW(\mathbf{T}^d, G)$ est dans $Z_{SW}(\gamma, C)$ $(C \in G)$ si et seulement si, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$,

$$A(\theta + \gamma)C = CA(\theta),$$

ou encore

$$A(\theta + \gamma) = CA(\theta)C^{-1}. \tag{11}$$

Ainsi, $(\alpha, A) \in Z_{SW}(\gamma, C)$ si et seulement si $(\gamma, A) \in Z_{SW}(0, C)$.

2.5.a. Remarques générales. — L'étude de $Z_{SW}(\gamma, C)$ repose sur une généralisation des deux remarques suivantes.

Remarque 2.5.1. — Si nous notons $T_C \in G$ un tore maximal passant par C et si (γ, C) est *minimal* sur $T_C \times \mathbf{T}^d$, l'égalité (11) montre que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$A(\theta + n\gamma) = C^n A(\theta) C^{-n};$$

comme (γ, C) est minimal, on peut trouver une suite d'entiers $n_i \in \mathbf{Z}$ telle que $(n_i\gamma, C^{n_i}) \to (0, C)$, quand $i \to \infty$. L'égalité (11) montre donc que, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$, $A(\theta) = CA(\theta)C^{-1}$, c'est-à-dire (vu que C est en particulier générique *cf.* 2.3.b), $A(\theta) \in Z_G(C) = Z_G(T_C) = T_C$. Utilisant à nouveau (11), il vient que, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$, $A(\theta + \gamma) = A(\theta)$, c'est-à-dire, γ étant minimal, que A est constante : $A(\theta) = A(0) \in T_C$.

Pour l'étude du cas général, la seconde remarque qui suit est importante.

Remarque 2.5.2. — Soit $D : \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \to T_C$ un morphisme de groupe (c'est-à-dire $D(\theta + \theta') = D(\theta)D(\theta')$). L'égalité (11) donne,

$$\forall\, \theta \in \mathbf{T}^d, \quad D(\theta + 2\gamma)A(\theta + \gamma)D(\theta + \gamma)^{-1} = D(\theta + 2\gamma)CA(\theta)C^{-1}D(\theta + \gamma)^{-1},$$

et, comme $D(\theta)$ est un morphisme et prend ses valeurs dans le tore T_C,

$$D(\theta+2\gamma)A(\theta+\gamma)D(\theta+\gamma)^{-1} = CD(\gamma)D(\theta+\gamma)A(\theta)D(\theta)^{-1}(CD(\gamma))^{-1},$$

ce qui se récrit

$$(12) \qquad (\gamma, D\circ R_\gamma \cdot A\cdot D^{-1}) \in Z_{SW}(\gamma, D(\gamma)C) \iff (\gamma, A) \in Z_{SW}(\gamma, C).$$

La remarque 2.5.1 précédente admet une version plus générale qui dit en gros que si C est « non résonnant », le centralisateur de (γ, C) est constitué de cocycles constants. Afin de rendre l'exposé plus clair et puisque nous en aurons besoin par la suite, nous illustrons ceci dans le cas des groupes unitaires.

Proposition 2.5.3. — *Soit $C \in U(L)$ de valeurs propres les $e^{2\pi\sqrt{-1}\phi_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}\phi_L}$ et $\gamma \in \mathbf{T}^d$ minimal. Supposons que les $\phi_i - \phi_j$, $1 \le i,j \le L$ soient γ-non-résonnants et soit $A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, U(L))$ vérifiant, pour tout $x \in \mathbf{T}^d$,*

$$A(x+\gamma) = CA(x)C^{-1}.$$

Alors $A(\cdot)$ est constante.

Démonstration. — Comme C est toujours unitairement diagonalisable, il suffit de démontrer le résultat quand C est diagonale ce que nous ferons :

$$C = \operatorname{diag}(e^{2\pi\sqrt{-1}\phi_1}, \dots, e^{2\pi\sqrt{-1}\phi_L}).$$

Ainsi, $\operatorname{Ad}(C)$ est une matrice diagonale d'éléments diagonaux les $e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)}$, $1 \le i,j \le L$. Nous considérons d'autre part A comme étant à valeurs dans $M(L,\mathbf{C})$ et écrivons son développement en série de Fourier

$$A(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)} A_k,$$

avec $A_k \in M(L,\mathbf{C})$. Si nous notons $A_k^{i,j} \in \mathbf{C}$, $1 \le i,j \le L$ les coefficients de la matrice A_k, on a alors

$$C(A_k^{i,j})_{i,j}C^{-1} = (e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)}A_k^{i,j})_{i,j},$$

et l'équation $A(x+\gamma) = CA(x)C^{-1}$, équivaut aux égalités

$$A_k^{i,j}(e^{2\pi\sqrt{-1}(k,\gamma)} - e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)}) = 0,$$

ou encore

$$A_k^{i,j}e^{2\pi\sqrt{-1}(k,\gamma)} \cdot (1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j-(k,\gamma))}) = 0,$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $1 \le i,j \le L$. Si $k \ne 0$, comme les $\phi_i - \phi_j$ appartiennent à $NR(\gamma)$, le facteur $(1 - e^{2\pi i(\phi_i-\phi_j-(k,\gamma))})$ est toujours différent de 0 et, par conséquent, $A_k^{i,j} = 0$ pour tous les $1 \le i,j \le L$: A est donc constante. $\square$

On a alors immédiatement :

Corollaire 2.5.4. — *Soit $T_C \subset G$ un tore maximal passant par $C \in G$ et supposons que les caractères ζ_i, $1 \le i \le L$, d'une représentation Ad_ρ (de la section 2.3) de G agissant sur $M(L, \mathbf{C})$ vérifient pour tout i, $\zeta_i(C) \in NR_{\mathbf{T}^1}(\gamma)$. Alors*

$$Z_{SW}(\gamma, C) = Z_G(C);$$

(en particulier les éléments de $Z_{SW}(\gamma, C)$ sont des constantes).

Nous montrons à présent dans la section qui suit comment faire pour que les hypothèses de la proposition 2.5.3 soient vérifiées.

2.5.b. Elimination des résonances. — L'ingrédient de cette section sera la remarque 2.5.2 et en particulier l'équivalence (12). Fixons comme dans la section 2.3 une représentation ρ de G dans un groupe unitaire $U(L)$ et notons $\mathrm{Ad}_\rho = \mathrm{Ad} \circ \rho$ la représentation associée de G agissant sur $M(L, \mathbf{C}) \supset U(L)$. Nous voulons donc trouver un morphisme $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \to T_C$ tel que

$$\mathrm{Car}_{\mathrm{Ad}_\rho}(\widetilde{D}(\gamma)C) \subset NR_{\mathbf{T}^1}(\gamma).$$

Malheureusement ceci n'est pas toujours possible si on se limite à des morphismes $\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \to T_C$. Par contre si on autorise des morphismes $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d \to T_C$, $m \in \mathbf{N} - \{0\}$ (c'est-à-dire que l'on autorise un revêtement fini de $\mathbf{T}^d$) cela devient possible. Nous verrons au 2.5.c comment obtenir un revêtement de degré borné par un entier ne dépendant que de G.

Proposition 2.5.5. — *Il existe $\mu \in \mathbf{Z} - \{0\}$ et $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/\mu Z^d \to T_C$ un morphisme tel que*

$$\mathrm{Car}_{\mathrm{Ad}_\rho}(\widetilde{D}(\gamma)C) \subset NR_{\mathbf{T}^1}(\gamma);$$

(par conséquent si $\mathrm{Car}_{\mathrm{Ad}_\rho}(C) \subset \exp(2\pi\sqrt{-1}(\mathbf{Q}^d, \gamma))$, alors $\widetilde{D}(\gamma)C = \mathrm{Id}$).

Corollaire 2.5.6. — *Si $(\gamma, A) \in Z_{SW}(\gamma, C)$ et si $\widetilde{D}$ est le morphisme précédent, alors $\widetilde{D} \circ R_\gamma \cdot A \cdot \widetilde{D}^{-1} = \widetilde{U}$, où $\widetilde{U}$ est une constante dans $Z_G(\widetilde{D}(\gamma)C)$.*

Le corollaire 2.5.6 découle du corollaire 2.5.4 et de la proposition 2.5.5. Démontrons la proposition 2.5.5.

Démonstration de la proposition 2.5.5. — Posons $C = e^{2\pi X}$ où $X \in g$ et soient respectivement $T_C \in G$, $t_X \in g$, des tores passant par $C \in G, X \in g$ tels que $\exp(t_X) = T_C$. D'après le corollaire 2.3.12, il existe $\widetilde{\mu} \in \mathbf{N} - \{0\}$ et $H = -\sum_{i=1}^{w}(x_i, \gamma)H_i \in t_X$ où $x_i \in \frac{1}{\widetilde{\mu}}\mathbf{Z}^d$, $H_i \in t_X$ tel que, pour tout $\beta \in \mathrm{Poids}_{\mathrm{Ad}_\rho}$, $\beta(X - H) \in NR(\gamma)$.

Ainsi, si on note $\mu = c_G\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/\mu\mathbf{Z}^d \to T_C$ le morphisme

$$\widetilde{D}(\theta) = \exp(-2\pi \sum_{i=1}^{w}(x_i, \theta)H_i),$$

on a $\mathrm{Car}_{\mathrm{Ad}_\rho}(\widetilde{D}(\gamma)C) \subset NR_{\mathbf{T}^1}(\gamma)$. Or, d'après (12), $\widetilde{D} \circ R_\gamma A \widetilde{D}^{-1} \in Z_{SW_\gamma}(\widetilde{D}(\gamma)C)$, si bien que le corollaire 2.5.4 permet de conclure la preuve de la proposition 2.5.5 $\square$

Remarquons que, pour $\theta \in \mathbf{R}^d$,

$$A(\theta) = \widetilde{D}(\theta+\gamma)^{-1}U_1\widetilde{D}(\theta) = \widetilde{D}(\theta+\alpha)^{-1}\widetilde{D}(\alpha-\gamma)U_1\widetilde{D}(\theta),$$

c'est-à-dire que (α, A) est conjugué à une constante modulo un morphisme $\mu\mathbf{Z}^d$-périodique.

En fait on peut toujours trouver un morphisme $D : \mathbf{R}^d/\nu_G\mathbf{Z}^d \to T_C$ (*i.e.* $\nu_G\mathbf{Z}^d$-périodique) qui conjugue (α, A) à une constante, où $\nu_G \in \mathbf{N} - \{0\}$ *ne dépend que du groupe* G. C'est l'objet de la section qui suit.

2.5.c. Diminution de la période. — La procédure est contenue dans la proposition qui suit.

Proposition 2.5.7. — *Soient $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/\mu\mathbf{Z}^d \to T_C$ un morphisme et $\widetilde{U}$ un élément de G tels que l'application de $\mathbf{R}^d \to G$, $\theta \mapsto \widetilde{D}(\theta)^{-1}\widetilde{U}\widetilde{D}(\theta)$, soit $\mathbf{Z}^d$-périodique. Il existe alors un entier $\nu_G \neq 0$ ne dépendant que de G et morphisme $D : \mathbf{R}^d/\nu_G\mathbf{Z}^d \to T_C$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{R}^d$,*

$$(D(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1}) \cdot \widetilde{U} = \widetilde{U} \cdot (D(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1}).$$

Démonstration. — Notons t_C l'algèbre de Lie de T_C. Par monodromie, il existe un morphisme $\widetilde{X} : \mathbf{R}^d/\mu\mathbf{Z}^d \to t_C$, tel que $\exp(2\pi\widetilde{X}(\theta)) = \widetilde{D}(\theta)$. Soient $\beta_{\widetilde{q}+1}, \dots, \beta_{q=\widetilde{q}+L^2} \in t^*$ les poids (éventuellement nuls) de la représentation $\mathrm{Ad}_\rho = \mathrm{Ad} \circ \rho$ de G agissant sur $M(L, \mathbf{C}) \supset U(L)$. Il existe une décomposition en somme directe,

$$M(L, \mathbf{C}) = \bigoplus_{i=1}^{L^2} \mathbf{C}E_i,$$

telle que, pour tout θ,

$$\mathrm{Ad}(\rho(\widetilde{D}(\theta)^{-1})) \cdot E_j = e^{-2\pi\sqrt{-1}\beta_{\widetilde{q}+j}(\widetilde{X}(\theta))} \cdot E_j.$$

Comme $\widetilde{D}(\theta)^{-1}\widetilde{U}\widetilde{D}(\theta)$ est $\mathbf{Z}^d$-périodique, on en déduit que si $\widetilde{U}$ s'écrit $\widetilde{U} = \sum_{i=1}^{L^2} \lambda_j E_j$, alors,

- soit $\lambda_j = 0$,
- soit pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, $\beta_{\widetilde{q}+j}(\widetilde{X}(k)) \in \mathbf{Z}$. Nous noterons alors $l_{j,k} = \beta_{\widetilde{q}+j}(\widetilde{X}(k))$.

Si on note $J = \{j,\ \lambda_j \neq 0\}$ on a alors,

$$\forall\, j \in J,\ \forall\, k \in \mathbf{Z}^d,\ \beta_{\widetilde{q}+j}(\widetilde{X}(k)) \in \mathbf{Z}. \tag{13}$$

Soit $(\beta_{\widetilde{q}+j},\ j \in \widetilde{J})$ une base de $\mathrm{Vect}(\beta_{\widetilde{q}+j},\ j \in J) \subset t^*$, que l'on peut compléter en une base de t^* par des éléments de la base de Weyl $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r})$. Appelons $(H_1, \dots, H_w)$ une base duale de celle-ci dans t_C. Comme les $\beta_1, \dots, \beta_q$ s'expriment comme combinaisons linéaires à coefficients entiers (ne dépendant que de G et de la représentation

ρ choisie une fois pour toutes) des éléments de la base de Weyl $(\alpha_1, \ldots, \alpha_w)$, il existe un entier $\widetilde{\nu}_G \neq 0$ ne dépendant que de G tel que, pour tout α de la base de Weyl,

$$\alpha(H_k) \in \widetilde{\nu}_G^{-1}\mathbf{Z}. \tag{14}$$

Posons alors,

$$X(\theta) = -\sum_{j\in\widetilde{J}} \beta_j(\widetilde{X}(\theta))H_j,$$

et $D(\theta) = \exp(2\pi X(\theta))$. Par définition des H_k on a $\beta_j(X(\theta) - \widetilde{X}(\theta)) = 0$ pour tout $j \in \widetilde{J}$ et par conséquent,

$$\forall j \in J,\ \beta_j(X(\theta) - \widetilde{X}(\theta)) = 0.$$

Vu que

$$\mathrm{Ad}(D(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1}) \cdot \widetilde{U} = \sum_{i=1}^{L^2} \exp(2\pi\sqrt{-1}\beta_j(X(\theta) - \widetilde{X}(\theta))) \cdot \lambda_j E_i,$$

et que $\lambda_j = 0$ pour $j \notin J$, on en déduit que, pour tout θ, $D(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1}$ commute à $\widetilde{U}$.

En outre, pour tout racine α de la base de Weyl et tout $k \in \mathbf{Z}^d$, $\alpha(X(k)) \in \widetilde{\nu}_G^{-1}\mathbf{Z}^d$, d'après (13) et (14). L'application $D : \mathbf{R}^d \to T_C$ est donc bien un morphisme de $\mathbf{R}^d/\nu_G\mathbf{Z}^d \to T_C$, où $\nu_G = c_G\widetilde{\nu}_G$ (c_G étant le cardinal du centre de G), qui vérifie les conclusions de la proposition. □

2.5.d. Conclusion. — Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.5.8. — *Si γ est minimal sur $\mathbf{T}^d$ et si $C \in G$ alors, le cocycle $(\alpha, A) \in SW(\mathbf{T}^d, G)$ est dans $Z_{SW}(\gamma, C)$ si et seulement si il existe un morphisme*

$$D : \mathbf{R}^d/\nu_G\mathbf{Z}^d \longrightarrow T_C$$

et un $U \in Z_G(D(\gamma)C)$ tels que

$$D(\theta + \alpha)A(\theta)D(\theta)^{-1} = D(\alpha - \gamma)U \ \ (\equiv \text{cste}). \tag{15}$$

Démonstration. — Nous savons déjà d'après 2.5.a, 2.5.b qu'il existe $\widetilde{D} : \mathbf{R}^d/\mu\mathbf{Z}^d \to T_C$ et $\widetilde{U} \in Z_G(\widetilde{D}(\gamma)C)$ tels que

$$\widetilde{D}(\theta + \gamma)A(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1} = \widetilde{U};$$

ainsi, si nous multiplions les membres gauche et droite de l'égalité

$$A(\theta) = \widetilde{D}(\theta + \gamma)^{-1}\widetilde{U}\widetilde{D}(\theta)$$

respectivement par $D(\theta + \gamma)$ et $D(\theta)^{-1}$, où $D : \mathbf{R}^d/\nu_G\mathbf{Z}^d \to T_C$ est le morphisme du 2.5.c, nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned} D(\theta + \gamma)A(\theta)D(\theta)^{-1} &= D(\theta + \gamma)\widetilde{D}(\theta + \gamma)^{-1}\widetilde{U}\widetilde{D}(\theta)D(\theta)^{-1} \\ &= \widetilde{D}(\gamma)^{-1}D(\gamma)(D\widetilde{D}^{-1})(\theta)^{-1} \cdot \widetilde{U} \cdot ((D\widetilde{D}^{-1})(\theta))^{-1} \\ &= \widetilde{D}(\gamma)^{-1}D(\gamma)\widetilde{U}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\widetilde{U}$ commute à $D(\theta)\widetilde{D}(\theta)^{-1}$ et le fait que $D, \widetilde{D}$ prenant leurs valeurs dans le même tore T_C commutent entre eux. Ainsi, D est un morphisme tel que

$$\begin{aligned} D(\theta+\alpha)A(\theta)D(\theta)^{-1} &= D(\alpha-\gamma)D(\gamma)\widetilde{D}(\gamma)^{-1}\widetilde{U} \\ &= D(\alpha)\widetilde{D}(\gamma)^{-1}\widetilde{U}. \end{aligned}$$

Montrons enfin que $U = D(\alpha)\widetilde{D}(\gamma)^{-1}\widetilde{U}D(\gamma-\alpha)$ est bien tel que $U \in Z_G(D(\gamma)C)$. Si (15) a lieu, alors $D(\theta+\gamma)A(\theta)D(\theta)^{-1} = U$, et comme $(\gamma, A) \in Z_{SW}(\gamma, C)$,

$$D(\theta+\gamma)^{-1}UD(\theta+\gamma)C = CD(\theta+\gamma)^{-1}UD(\theta),$$

c'est-à-dire $U = D(\gamma)CU(D(\gamma)C)^{-1}$ et donc $U \in Z_G(D(\gamma)C)$. Le calcul que nous venons de faire montre la réciproque, achevant la preuve du théorème 2.5.8. □

2.5.e. Conjugaison entre cocycles constants. — Nous étudions dans cette section le problème suivant : à quelles conditions deux cocycles constants (γ, C_1), (γ, C_2) sont-ils conjugués c'est-à-dire existe-t-il $B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ tel que

$$B(\theta+\gamma)C_1B(\theta)^{-1} = C_2. \tag{16}$$

Quitte à supposer la conjugaison B seulement $m\mathbf{Z}^d$-périodique, nous pouvons toujours faire l'hypothèse que les ρ-caractères de C_1 sont γ-non-résonants (il suffit pour cela de procéder comme en 2.5.b et de multiplier B par un morphisme de $\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d$ dans G). En outre, quitte à remplacer $B(\theta)$ par $B(0)^{-1}B(\theta)$ et C_2 par $B(0)^{-1}C_2B(0)$, on peut toujours supposer que $B(0) = \mathrm{Id}$, ce que nous ferons.

Si $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_d)$ et si nous notons

$$Z_i(\theta) = \frac{1}{2\pi}B(\theta)^{-1}\partial_{\theta_i}B(\theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, g),$$

dériver (16) par rapport à θ_i donne

$$\forall\, \theta \in \mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, \quad Z_i(\theta+\gamma) = C_1Z_i(\theta)C_1^{-1},$$

ce qui, en utilisant le corollaire 2.5.4 et le fait que les ρ-caractères de C_1 sont non-résonants, montre que $Z_i(\theta)$ est constant et commute à C_1. Par conséquent, si on note $L_\gamma = \sum_{i=1}^d \gamma_i\partial_{\theta_i}$,

$$B(\theta)^{-1}L_\gamma B(\theta) = 2\pi\sum_{i=1}^d \gamma_iZ_i,$$

et donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$B(\gamma t) = e^{2\pi t\sum_{i=1}^d \gamma_iZ_i}, \tag{17}$$

ce qui montre, γ étant minimal, que les $(B(\theta))$, $\theta \in \mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d$, sont à valeurs sur un même tore contenant $(e^{2\pi t\sum_{i=1}^d \gamma_iZ_i})_{t\in\mathbf{R}}$ et commutent à C_1. En particulier, les $Z_i =$

$B(\theta)^{-1}\partial_{\theta_i}B(\theta)$ commutent entre eux et avec C_1, ce qui, compte tenu de l'hypothèse $B(0) = \mathrm{Id}$, de (17) et de la définition des Z_i, montre que

$$\forall\, \theta,\ B(\theta) = e^{2\pi\sum_{i=1}^{d}\theta_i Z_i}.$$

Par conséquent, B est un morphisme de $\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d$ dans G. L'équation (16) se récrit donc

$$B(\theta+\gamma)B(\theta)^{-1} = C_2C_1^{-1},$$

soit

$$e^{2\pi\sum_{i=1}^{d}\gamma_i Z_i} = C_2C_1^{-1}.$$

Ainsi, C_1 et C_2 commutent. D'autre part, B étant $m\mathbf{Z}^d$-périodique, on a pour toute racine $\alpha\in\Delta$, $\alpha(Z_i)\in m^{-1}\mathbf{Z}$, et donc si on note $\zeta = e^{\sqrt{-1}\alpha}$, $\zeta(C_2C_1^{-1})\in \exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{m}\mathbf{Z})$.

Nous avons donc prouvé :

Proposition 2.5.9. — *Si deux cocycles constants (γ, C_1), (γ, C_2) sont conjugués par une conjugaison $(0, B)$ avec $B\in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ telle que $B(0) = \mathrm{Id}$, alors pour toute racine $\alpha\in\Delta$, si on note $\zeta = e^{\sqrt{-1}\alpha}$, $\zeta(C_1)\zeta(C_2)^{-1}\in\exp(2\pi\sqrt{-1}/m\mathbf{Z})$ et B est un morphisme de $\mathbf{T}^d$ dans G.*

La réciproque est trivialement vraie.

2.6. Démonstrations des théorèmes 2.2.2 et 2.2.3

2.6.a. Le groupe des itérés. — Supposons donc donné $(\omega, A)\in SW^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ (ω minimal), dont la suite des itérés est compacte en topologie C^∞. Le groupe abélien $\mathcal{T}(\omega, A) = \mathrm{Adh}^\infty((\omega, A)^n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est donc un groupe abélien compact *sans petits sous-groupes*. On a donc, d'après les théorèmes 2.3.3 et 2.3.4 :

Lemme 2.6.1. — *$\mathcal{T}(\omega, A)$ est homéomorphe au produit $\mathbf{R}^M/\mathbf{Z}^M\times\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Ainsi,*

$$\mathcal{T}((\omega, A)^l) := \mathrm{Adh}^\infty(((\omega, A)^l)^n)_{n\in\mathbf{Z}}$$

est homéomorphe à un tore $\mathbf{T}^M$.

Il est donc naturel d'étudier la réductibilité de (ω, A) quand $\mathcal{T}(\omega, A)$ est connexe. C'est ce que nous faisons dans la section qui suit.

2.6.b. Réductibilité de (α, A) quand $\mathcal{T}(\alpha, A)$ est compact connexe. — Cette section 2.6.b est consacrée à la preuve de la proposition qui suit ainsi qu'à celle du théorème 2.2.2.

Proposition. — *Supposons que $\mathcal{T}(\omega, A)$ soit compact (ω étant minimal). Il existe alors $B\in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ (où χ_G est l'entier du lemme 2.3.14) et $A_0\in G$ tels que, pour tout $x\in\mathbf{R}^d$,*

$$A(x) = B(x+\omega)A_0B(x)^{-1}.$$

et B vérifie, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$B(x + \chi_G k\omega)^{-1} B(x) \in T_{A_0},$$

pour tout $x \in \mathbf{T}^d$, où T_{A_0} est un tore maximal passant par A_0.

Corollaire. — *Le théorème 2.2.2 est vrai.*

Démonstration du corollaire. — Notons $\mathcal{T}$ l'adhérence de $\{(s\omega, Z^s(\cdot))\}_{s\in\mathbf{R}}$ en topologie C^∞ : c'est un groupe abélien compact connexe donc il est homéomorphe à un tore de dimension finie. Nous noterons η le morphisme $t \mapsto (t\omega, Z^t(\cdot))$. Notons pour $t \in \mathbf{R}$, $\mathcal{T}_t$ l'adhérence de $\{(t\omega, Z^t(\cdot))^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$. Nous allons montrer que l'ensemble E des $t \in \mathbf{R}$ tels que $\mathcal{T}_t$ égale $\mathcal{T}$ est un G_δ-dense de $\mathbf{R}$. Considérons un recouvrement de $\mathcal{T}$ (qui est un tore de dimension finie) par des ouverts $(\mathcal{U}_p)_{p\in\mathbf{N}}$ et notons E_p l'ensemble des $t \in \mathbf{R}$ tels que $\mathcal{T}_t \cap \mathcal{U}_p$ soit non vide. C'est évidemment un ensemble ouvert. Il est en outre dense dans $\mathbf{R}$ puisque pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\widetilde{t} \in \mathbf{R}$ tel que $|\widetilde{t} - t| < \varepsilon$ et tel que l'ensemble des $nt + m\widetilde{t}$, $n, m \in \mathbf{Z}$ soit dense dans $\mathbf{R}$. En particulier, il existe $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que $\eta(nt + m\widetilde{t}) \in \mathcal{U}_p$. Or, si on note $t' = \dfrac{nt + m\widetilde{t}}{n+m}$, on a $|t' - t| < \varepsilon$ et $(n+m)\eta(t') \in \mathcal{U}_p$ c'est-à-dire que $\mathcal{T}_{t'} \cap \mathcal{U}_p$ est non vide. Ainsi, $E = \cap_p E_p$ est un G_δ-dense.

De la même façon l'ensemble E^ω des $t \in \mathbf{R}$ tels que $t\omega$ soit minimal sur $\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ est un G_δ-dense. Choisissons alors $t_0 \in E \cap E^\omega$; l'élément $(t_0\omega, Z^{t_0}(\cdot))$ vérifie les hypothèses de la proposition précédente et est donc conjugué à une constante modulo un revêtement χ_G-fini. Le théorème 2.2.1 permet alors de conclure la preuve du corollaire. □

Nous noterons $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\omega, A)$.

Propriété de cocycle. — Tout élément $\eta \in \mathcal{T}$ est un élément de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T}^d \times G)$ de la forme suivante :

$$\begin{array}{rccc} \eta : & \mathbf{T}^d \times G & \longrightarrow & \mathbf{T}^d \times G \\ & (\theta, y) & \longmapsto & (\theta + \alpha, V(\theta)y), \end{array}$$

où $V \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ et $\alpha \in \mathbf{T}^d$. Nous noterons $\alpha = p(\eta)$, $V(\theta) = V_\eta(\theta)$. Ainsi

$$\eta(\theta, y) = (\theta + p(\eta), V_\eta(\theta)y).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \eta' \circ \eta(\theta, y) &= (\theta + p(\eta' \circ \eta), V_{\eta'\circ\eta}(\theta)y) \\ &= (\theta + p(\eta) + p(\eta'), V_{\eta'}(\theta + p(\eta))V_\eta(\theta)y) \\ &= (\theta + p(\eta) + p(\eta'), V_\eta(\theta + p(\eta'))V_{\eta'}(\theta)y). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$p : (\mathcal{T}, \circ) \longrightarrow (\mathbf{T}^d, +)$$

est un morphisme continu. On a en outre la propriété de cocycle :

$$V_{\eta' \circ \eta} = V_{\eta'} \circ R_{p(\eta)} \cdot V_\eta. \tag{18}$$

Lemme 2.6.2. — *Soit $p : \mathbf{R}^M/\mathbf{Z}^M \to \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$, un morphisme continu de groupes additifs et surjectif ($M \geq d$). Alors il existe un morphisme continu $r : \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d \to \mathbf{R}^M/\mathbf{Z}^M$ et un entier $m \geq 1$ tel que*

$$p \circ r = m \cdot \mathrm{Id}.$$

Démonstration. — Le morphisme p admet un relèvement $\widetilde{p} \in \mathrm{Lin}(\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^d)$ surjectif et envoyant $\mathbf{Z}^M$ dans $\mathbf{Z}^d$. La matrice de $\widetilde{p}$ dans les bases canoniques respectives de $\mathbf{R}^M, \mathbf{R}^d$ est donc de rang maximal, à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et définit une application $\mathbf{Q}$-linéaire $\widetilde{p} : \mathbf{Q}^M \to \mathbf{Q}^d$, qui est également de rang maximal (et donc surjective). Il existe par conséquent $\widetilde{r} : \mathbf{Q}^d \to \mathbf{Q}^M$, $\mathbf{Q}$-linéaire telle que $\widetilde{p} \circ \widetilde{r} = \mathrm{Id}$. Ceci montre qu'il existe un entier $m \geq 1$ pour lequel $m\widetilde{r} : \mathbf{Z}^d \to \mathbf{Z}^M$. Finalement, $r = m\widetilde{r}$ définit une application $\mathbf{T}^d \to \mathbf{T}^M$, vérifiant $p \circ r = m \cdot \mathrm{Id}$. □

Construction de la conjugaison. — Definissons K comme étant

$$K = \{V_\eta(0),\ \eta \in \mathcal{T},\ p(\eta) = 0\}.$$

K est un sous groupe abélien de G puisque la propriété de cocycle (18) peut se récrire, si $p(\eta) = p(\eta') = 0$,

$$V_{\eta \circ \eta'}(0) = V_\eta(0) \cdot V_{\eta'}(0).$$

Ainsi, $\eta \to V_\eta(0)$ est un morphisme.

Le lemme 2.3.11 montre qu'il existe un tore maximal T contenant K^{χ_G}.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.6.3. — *Il existe $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, G)$ (m étant l'entier du lemme 2.6.2) et $A_0 \in G$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,*

$$A(x) = B(x + \omega) A_0 B(x)^{-1}.$$

En outre, il existe un tore maximal T_{A_0} passant par A_0 tel que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$B(x + k\chi_G)^{-1} B(x) \in T_{A_0},$$

où χ_G est l'entier défini en 2.3.d.

Démonstration. — Nous montrons dans un premier temps qu'il est possible de trouver un $B \in C^0(\mathbf{T}^d, G)$ qui vérifie les conclusions de la proposition, puis nous montrons que ce B est en fait C^∞.

Puisque $\mathcal{T} := \mathrm{Adh}((\omega, A)^n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est un tore il existe toujours un élément $a \in \mathcal{T}$ tel que

$$\chi_G a = (\omega, A).$$

Avec les notations du lemme 2.6.2 qui définissent r, m, notons $\omega' \in \mathbf{T}^d$, un point satisfaisant

$$p \circ r(\omega') = m\omega' = p(a) \tag{19}$$

$(p((\omega, A)) = \omega)$; alors

$$p \circ r(\chi_G \omega') = p(\chi_G a) = \omega = m\chi_G \omega'. \tag{20}$$

La propriété de cocycle donne, vu $p \circ r(\theta) = m\theta$,

$$\begin{aligned} V_{\chi_G a + r(\theta)}(0) &= V_{\chi_G a}(m\theta) \cdot V_{r(\theta)}(0) \\ &= V_{\chi_G a - r(\chi_G \omega') + r(\chi_G \omega' + \theta)}(0) \\ &= V_{r(\chi_G \omega' + \theta)}(0) \cdot V_{\chi_G a - r(\chi_G \omega')}(0). \end{aligned}$$

Donc,

$$V_{r(\chi_G \omega' + \theta)}(0) = V_{\chi_G a}(m\theta) \cdot V_{r(\theta)}(0) \cdot V_{\chi_G (a - r(\omega'))}(0)^{-1},$$

ou encore

$$V_{r(\chi_G \omega' + \theta)}(0)^{-1} V_{\chi_G a}(m\theta) \cdot V_{r(\theta)}(0) = V_{\chi_G (a - r(\omega'))}(0). \tag{21}$$

Remarquons que (19) entraîne

$$p(a - r(\omega')) = 0,$$

et donc, si

$$A_0 = V_{\chi_G (a - r(\omega'))}(0),$$

on a, par définition de K,

$$A_0 = V_{\chi_G (a - r(\omega'))}(0) = V_{a - r(\omega')}(0)^{\chi_G} \in K^{\chi_G} \subset T.$$

Posons, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$B(x) = V_{r(\pi_d(x/m))}(0),$$

où $\pi_d : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$ est la projection canonique. B est donc $m\mathbf{Z}^d$-périodique et continue puisque $V_{r(\theta)}(0)$ l'est.

Puisque $V_{\chi_G a} = (\omega, A)$, l'equation (21) se récrit, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$A(mx) = B(mx + m\chi_G \omega') A_0 B(mx)^{-1},$$

ou, d'après (20),

$$A(x) = B(x + \omega) A_0 B(x)^{-1}.$$

On a ainsi démontré la première partie de la proposition 2.6.3 avec une conjugaison seulement continue.

Posons $\theta = \pi_d(x/m)$ et $\theta' = \pi_d(x + k\chi_G/m)$. On a

$$\begin{aligned} V_{r(\theta)}(0) &= V_{r(\theta')}(0 + p(r(\theta) - r(\theta'))) \cdot V_{r(\theta) - r(\theta')}(0) \\ &= V_{r(\theta')}(0) \cdot V_{r(\theta) - r(\theta')}(0), \end{aligned}$$

puisque
$$p(r(\theta')-r(\theta))=m(\theta'-\theta)=\pi_d(\chi_G k)=0.$$
Ainsi,
$$V_{r(\theta')}(0)^{-1}\cdot V_{r(\theta)}(0)=V_{-r(\theta')+r(\theta)}(0),$$
Or, ce dernier est dans K^{χ_G} car il est de la forme
$$\chi_G\cdot r(\pi_d(k/m)).$$
$(p\circ r(\pi_d(k/m))=\pi_d(k))$. Ceci et la remarque faite plus haut montre que
$$B(x+k\chi_G)^{-1}B(x)\in K^{\chi_G}\subset T_{A_0},$$
complétant la démonstration de la proposition 2.6.3 avec un B continu.

Montrons à présent que B est de classe C^∞. Il suffit pour cela de montrer le lemme suivant.

Lemme. — *Supposons que $(\omega,A)\in SW^\infty(\mathbf{T}^d,G)$ soit tel que $\mathcal{T}(\omega,A)$ soit compact en topologie C^∞ et qu'il existe $B\in C^0(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d,G)$ et $A_0\in G$ tels que*

$$\forall\, x\in\mathbf{R}^d,\ A(x)=B(x+\omega)A_0B(x)^{-1}. \tag{22}$$

Alors, B est de classe C^∞.

Démonstration. — Nous noterons $A_n(\theta)=A(\theta+(n-1)\omega)\cdots A(\theta)$; on a donc $(\omega,A(\cdot))^n=(n\omega,A_n(\cdot))$ et

$$A_n(x)=B(x+n\omega)A_0^nB(x)^{-1}. \tag{23}$$

La suite $A_n(\cdot)$ est relativement compacte en topologie C^∞ dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d,G)$.

Soit $X_0\in g$ tel que $e^{X_0}=A_0$ et notons $\beta_1,\ldots,\beta_q$ les nombres $\beta_1(X_0),\ldots,\beta_q(X_0)$ où les β_i sont les formes linéaires définies dans la section 2.3.b. Supposons par exemple que $(\omega_1,\ldots,\omega_d,\beta_1,\ldots,\beta_r)$ soient indépendants sur $\mathbf{Q}$ tandis que, pour $q\geq i\geq r+1$,
$$\beta_i\in\mathbf{Q}\omega_1+\cdots\mathbf{Q}\omega_d+\mathbf{Q}\beta_1+\cdots+\mathbf{Q}\beta_r.$$
Il est alors possible de trouver une suite d'entiers n_i telle que
$$\lim_{i\to\infty}n_i(\omega_1,\ldots,\omega_d,\beta_1,\ldots,\beta_r)=(\omega_1,\ldots,\omega_d,0,\ldots,0)\quad(\mathrm{mod}\ \mathbf{Z}).$$
Il est alors clair que les $n_i\beta_j$, $r+1\leq j\leq q$ convergent quand $i\to\infty$, vers des ensembles $\widetilde{\beta}_j+\frac{1}{\widetilde{\xi}}\mathbf{Z}$ où les $\widetilde{\beta}_j$ sont dans le $\mathbf{Q}$-module engendré seulement par $\omega_1,\ldots,\omega_d$ et où $\widetilde{\xi}$ est un entier non nul. Par conséquent quand $i\to\infty$, $(c_G\widetilde{\xi}n_i\omega,A_0^{c_G\widetilde{\xi}n_i})$ (c_G étant le cardinal du centre de G) converge dans $\mathbf{T}^d\times T_{A_0}$ (où T_{A_0} est un tore maximal passant par A_0) vers un élément $(\xi\omega,\widetilde{A}_0)$ où les caractères de $\widetilde{A}_0$ sont dans $\exp(\sqrt{-1}(\mathbf{Q}^d,\omega))$ et où $\xi=c_G\widetilde{\xi}$. Par ailleurs, la relative compacité de la suite $A_n(\cdot)$ montre donc qu'en passant à la limite dans (23) (quitte à extraire une sous suite de (n_i)) il existe $\widetilde{A}\in C^\infty(\mathbf{T}^d,G)$ tel que $(\omega,\widetilde{A}(\cdot))\in\mathcal{T}(\omega,A)$ et qui vérifie

$$\widetilde{A}(x)=B(x+\xi\omega)\widetilde{A}_0B(x)^{-1}. \tag{24}$$

Nous noterons de même $(\omega, \widetilde{A})^n = (n\omega, \widetilde{A}_n)$. Appliquons alors la proposition 2.5.5 : quitte à remplacer m par un de ses multiples et à multiplier B à droite par un morphisme (qui est forcément C^∞) de $\mathbf{T}^d$ dans G, on peut toujours supposer que $\widetilde{A}_0 = \mathrm{Id}$; c'est ce que nous ferons tout en conservant les mêmes notations pour m et B. L'égalité (24) se récrit alors

$$\widetilde{A}(x) = B(x + \xi\omega)B(x)^{-1}. \tag{25}$$

On a donc

$$\widetilde{A}_k(x)B(x) = B(x + k\xi\omega),$$

pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Plongeons à présent G dans $U(L) \subset M(L, \mathbf{C})$ *via* ρ. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B_\varepsilon \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, M(L, \mathbf{C}))$ qui est ε-proche de B en topologie C^0 ($|B_\varepsilon - B|_0 \leq \varepsilon$), si bien que si ε est suffisamment petit,

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d} B_\varepsilon(x)^{-1} \cdot B(x)\, \mathrm{d}x - \mathrm{Id} \right| < \frac{1}{2},$$

et l'intégrale précédente est une matrice inversible dans $M(L, \mathbf{C})$.

Il vient alors en multipliant à gauche les membres droite et gauche de (25) par $B_\varepsilon(x + k\xi\omega)^{-1}$ et en prenant la moyenne de $k = 1$ à $k = n$,

$$\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x + k\xi\omega)^{-1} A_{k-1}(x)\Big) \cdot B(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} B_\varepsilon(x + k\xi\omega)^{-1} B(x + k\xi\omega).$$

Puisque $\xi\omega$ est minimal sur $\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d$ et que $B_\varepsilon^{-1} \cdot B$ est continue, le membre de droite converge uniformément vers

$$\overline{I} = \int_{\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d} B_\varepsilon(x)^{-1} \cdot B(x)\, \mathrm{d}x$$

qui est inversible, tandis que la relative compacité de la suite $(B_\varepsilon(. + k\xi\omega)^{-1} A_k(\cdot))_k$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, M(L, \mathbf{C}))$ entraîne celle de la moyenne du membre de gauche et la convergence de cette moyenne (pour une suite extraite) vers une fonction $Z \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, M(L, \mathbf{C}))$. On a alors

$$Z(x) \cdot B(x) = \overline{I},$$

et puisque $\overline{I}$ est inversible (tout comme $B(x)$) il en est de même de $Z(x)$. Au total, $B(x) = Z(x)^{-1} \cdot \overline{I}$ est une fonction de classe C^∞. Ceci conclut la preuve du lemme. □

Enonçons à présent :

Lemme 2.6.4. — *Supposons qu'il existe $A \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$, $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, G)$, $A_0 \in G$, tels que*

$$A(x) = B(x + \omega)A_0B(x)^{-1},$$

et que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$,

$$B(x+k\chi_G)^{-1}B(x) \in T_{A_0},$$

où T_{A_0} est un tore maximal passant par A_0, et χ_G est l'entier défini en 2.3.d; alors il existe $\overline{B} \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$, $\overline{A}_0 \in G$ tel que

$$(\omega, A)\,\mathcal{R}(\omega, \overline{B})\ (\omega, A_0).$$

Démonstration. — Posons pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$C_k(x) = B(x+k\chi_G)^{-1}B(x) \in T_{A_0}; \tag{26}$$

Utilisant le fait que A est $\mathbf{Z}^d$-périodique,

$$A(x) = B(x+k\chi_G+\omega)A_0B(x+k\chi_G)^{-1},$$

et donc

$$A_0 = C_k(x+\omega)A_0C_k(x)^{-1}.$$

Remarquons qu'évidemment

$$A_0 \in K^{\chi_G}.$$

au même titre que C_k (*cf.* (26)), si bien que C_k commute à A_0, et l'équation précédente se récrit

$$C_k(x+\omega) = C_k(x);$$

comme ω est minimal, et C_k est $m\mathbf{Z}^d$ périodique, C_k est constant; on notera cette constante $C_k \in T_{A_0}$. Remarquons que, pour tout $k, l \in \mathbf{Z}^d$,

$$C_{k+l} = C_kC_l.$$

Donnons le lemme évident suivant,

Lemme 2.6.5. — *Soit $k \mapsto C_k$ un homomorphisme de $\mathbf{Z}^d$ sur un tore T. On peut alors le prolonger en un morphisme $\widetilde{C}$ de $\mathbf{R}^d$ à valeurs dans T (donc pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\widetilde{C}(k) = C_k$).*

Démonstration du lemme 2.6.5. — En effet, si $\rho_i : T = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est la projection, $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \mapsto \overline{x}_i$, alors, $\rho_i \circ \widetilde{C}$ est un caractère de $\mathbf{Z}^n$, donc de la forme $\rho_i(k) = (\alpha_i, k) \pmod{\mathbf{Z}}$, où $\alpha_i \in \mathbf{R}^n$. Il suffit donc de prolonger C en $\widetilde{C}$,

$$\widetilde{C}(x) = \sum_{i=1}^{n} j_i(\alpha_i, x),$$

où $j_i : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ est l'injection canonique, $\overline{x}_1 \mapsto (0, \ldots, 0, \overline{x}_i, 0, \ldots, 0)$.

Ceci achève la preuve du lemme 2.6.5. □

Ecrivons

$$B(x+\chi_Gk)^{-1}B(x) = C(k) = \widetilde{C}(x+\chi_Gk)\widetilde{C}(x)^{-1},$$

soit

$$B\widetilde{C}(x+\chi_Gk) = B\widetilde{C}(x),$$

c'est-à-dire que $B\widetilde{C}$ est $\chi_G\mathbf{Z}^d$-périodique.

En outre,

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x+\omega)A_0B(x)^{-1} \\ &= B(x+\omega)\widetilde{C}(x+\omega)(A_0\widetilde{C}(-\omega))\widetilde{C}(x)^{-1}B(x)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que A est réductible modulo un revêtement χ_G- fini et complète la preuve du lemme 2.6.4. □

Les lemmes précédents fournissent la preuve de la proposition 2.6.3.

2.6.c. Réductibilité de A dans le cas général, preuve du théorème 2.2.3

Les sections 2.6.a et 2.6.b montrent (en reprenant les notations du 2.6.a) que $(\omega, A)^l = (l\omega, A_l)$ est réductible modulo un revêtement χ_G-fini, *i.e.* qu'il existe $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ et $U_0 \in G$ tels que, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$B(x+l\omega)A_l(x)B(x)^{-1} = U_0.$$

Ceci se récrit

$$B(x+l\omega)A(x+(l-1)\omega)\cdots A(x)B(x)^{-1} = e^{X_0},$$

soit

$$\widehat{A}(x+(l-1)\omega)\cdots\widehat{A}(x) = e^{X_0},$$

si on pose

$$\widehat{A}(x) = B(x+\omega)A(x)B(x)^{-1}. \tag{27}$$

Par conséquent, dans $SW(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ on a $(\omega, \widehat{A})^l = (l\omega, U_0)$ et par conséquent,

$$(\omega, \widehat{A}) \in Z_{SW}(l\omega, U_0).$$

Appliquons le théorème 2.5.8 aux systèmes $(\omega, \widehat{A}), (l\omega, U_0)$ dans $SW(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$: il existe un morphisme $D : \mathbf{R}^d/\chi_G\nu_G\mathbf{Z}^d \to G$ et un $A_0 \in G$ tels que

$$D(\theta+\omega)\widehat{A}(\theta)D(\theta)^{-1} = A_0;$$

en vertu de l'identité (27), ceci signifie que (ω, A) est réductible sur $\mathbf{R}^d/\widetilde{\chi}_G\mathbf{Z}^d \times G$ où $\widetilde{\chi}_G = \chi_G\nu_G$. Ceci conclut la preuve de la première partie du théorème 2.2.3.

Considérons à présent afin de conclure la preuve du théorème 2.2.3, le cas particulier où $\chi_G = 1$. On a alors de la même façon que dans le lemme 2.6.4,

Proposition 2.6.6. — *Supposons que $\chi_G = 1$ et qu'il existe des applications $A \in C^\infty(\mathbf{R}^d, G)$, $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/m\mathbf{Z}^d, G)$ et une constante $A_0 \in G$ telles que*

$$A(x) = B(x+\omega)A_0B(x)^{-1}.$$

Alors il existe $\widetilde{B} \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ et $\widetilde{A}_0 \in G$ tels que $(\omega, A)\,\mathcal{R}(\omega, \widetilde{B})(\omega, \widetilde{A}_0)$.

Démonstration. — Déjà, quitte à remplacer m par un de ses multiples, à multiplier B à droite par un morphisme D de $\mathbf{T}^d \to G$ et à remplacer A_0 par $\widetilde{A}_0 = D(-\omega)A_0$, il est possible de faire en sorte que les conclusions de la proposition 2.5.5 soient vérifiées pour $\widetilde{A}_0$. En reprenant les notations du lemme 2.6.4, on a encore

$$C_k(x+\omega) = \widetilde{A}_0 C_k(x) \cdot A_0^{-1},$$

et, d'après le corollaire 2.5.4, $C_k = \text{cste}$. On a alors pour tous $k, l \in \mathbf{Z}^d$, $C_{k+l} = C_k C_l$ ainsi que $C_k \widetilde{A}_0 = \widetilde{A}_0 C_k$. Comme χ_G vaut 1 les C_k et $\widetilde{A}_0$ sont dans un même tore maximal. Le lemme 2.6.5 s'applique et on conclut comme dans le lemme 2.6.4. □

Ceci termine la preuve du théorème 2.2.3. □

2.7. Démonstration de la proposition 2.2.4

Fixons T_G un tore maximal de G. Le groupe produit $\mathbf{T}^d \times T_G$ est difféomorphe à un tore de dimension finie. On peut donc définir l'ensemble $\mathcal{S}_T$ des $U \in T_G$ tels que (ω, U) soit minimal (sur le tore produit). Il suffit alors de poser

$$\mathcal{S} = \bigcup_{V \in G} \operatorname{Ad}(V) \cdot \mathcal{S}_T.$$

Lemme 2.7.1. — *Le complémentaire de $\mathcal{S}$ dans G est de mesure nulle pour la mesure de Haar de G.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser la formule de Weyl (*cf.* par exemple **[6]**, prop. 21.15.4, p. 106). □

Terminons la preuve : il suffit de la faire pour les difféomorphismes. Supposons donc que, pour $A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$, il existe $A_0 \in G$ et $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d, G)$, $T\mathbf{Z}^d$-périodique (T entier non-nul), tels que

$$A(x) = B(x+\omega) A_0 B(x)^{-1}. \tag{28}$$

Pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, posons

$$C_k(x) = B(x+k)^{-1} \cdot B(x).$$

L'hypothèse suivant laquelle B est $T\mathbf{Z}^d$-périodique montre que

$$C_T(x) = \operatorname{Id}.$$

Par ailleurs l'equation (28) peut s'écrire

$$A_0 = B(x+k+\omega)^{-1} A(x) B(x+k),$$

et donc

$$A_0 = C_k(x+\omega) A_0 C_k(x),$$

ou encore

$$C_k(x+\omega) = \operatorname{Ad}(A_0) \cdot C_k(x). \tag{29}$$

Ainsi, pour tout entier l,

$$C_k(x + l\omega) = \mathrm{Ad}(A_0^l) \cdot C_k(x);$$

comme A_0 est dans $\mathcal{S}$, il est possible de trouver une suite l_i telle que $l_i\omega$ tende vers 0 dans $\mathbf{T}^d$ et $A_0^{l_i}$ tende vers un élement régulier noté $\overline{A}$.

Donc,

$$C_k(x) = \mathrm{Ad}(\overline{A}) \cdot C_k(x).$$

et donc $C_k(x)$ est dans le tore maximal T_{A_0} (car $\overline{A}$ est régulier). En particulier, $C_k(x)$ commute à A_0 et donc, vu (29),

$$C_k(x + \omega) = C_k(x),$$

c'est-à-dire que C_k est constante. En outre, les C_k sont dans le tore T_{A_0} et

$$C_{k+l} = C_k C_l.$$

Donc, $k \mapsto C_k$ est un morphisme de $\mathbf{Z}^d$ sur un tore (*cf.* lemme 2.6.5). On peut toujours prolonger ce morphisme à $\mathbf{R}^d$. Notons le $C(x)$. On a

$$B(x + k)^{-1}B(x) = C(k) = C(x + k)C(x)^{-1},$$

et donc

$$(BC)(x + k)^{-1}BC(x) = \mathrm{Id}.$$

En outre,

$$\begin{aligned} A(x) &= B(x + \omega)A_0B(x)^{-1} \\ &= B(x + \omega)C(x + \omega)(A_0C(-\omega))C(x)^{-1}B(x)^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que A est réductible modulo $\widetilde{B} = BC$. □

CHAPITRE 3

MÉTHODE K.A.M. CLASSIQUE, RÉSULTATS EN MESURE POSITIVE

Nous donnons dans ce chapitre une démonstration du fait que, pour une famille de systèmes quasi-périodiques dépendant d'un paramètre réel et proche d'une famille de systèmes constants, la réductibilité a lieu pour un ensemble de mesure positive (en le paramètre). Ce résultat n'est certainement pas nouveau (dans un cadre analytique et un peu différent on peut consulter **[8]**, **[18]**, **[3]**), mais nous sera utile pour aborder les problèmes de densité au chapitre 5. En outre, la preuve elle même est une introduction aux méthodes qui seront développées ultérieurement. Le théorème que nous montrons est essentiellement de type perturbatif et nous permet d'illustrer la classique mais puissante technique due à Kolmogorov, Arnold et Moser (KAM). On peut cependant en donner une démonstration plus rapide dans le cas C^∞ (mais inefficiente en analytique) qui repose sur un théorème de forme normale que nous exposons au chapitre 4 et dont la démonstration utilise le théorème d'inversion locale de Hamilton.

Nous ne considérons dans ce qui suit que le cas des flots.

3.1. Enoncé du théorème

Dans tout ce chapitre G est un groupe de Lie réel compact semi-simple, g représente son algèbre de Lie, t est un tore maximal. L'ensemble des racines par rapport à t sera noté, comme au chapitre 2, Δ. Nous noterons $\widetilde{q}, r, m$ respectivement, le nombre de racines de l'algèbre, la dimension de t, la dimension de l'algèbre g.

Nous rappelons que nous notons $|\ |_s$ les normes C^s et $|\ |_{H^s}$ les normes de Sobolev H^s. Si $F \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d)$, nous notons $\widehat{F}(k)$ le k-ième coefficient de Fourier de F, $T_N F$ la série tronquée $\sum_{|k|\leq N} \widehat{F}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)}$, $R_N F$ le reste $F - T_N F$ et $\dot{T}_N F = T_N F - \widehat{F}(0)$.

Nous supposons *fixé* $\omega \in \mathbf{R}^d$ dans $CD(\gamma, \sigma)$ où $\gamma > 0$ et $\sigma > d$ ce qui signifie que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$|(k, \omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}.$$

C'est un résultat classique que l'ensemble,

$$\bigcup_{\gamma > 0} CD(\gamma, \sigma),$$

est de mesure totale dans $\mathbf{R}^d$, pourvu que $\sigma > d$. Introduisons également l'ensemble $DS^\tau_\omega(N, K)$ (en abrégé $DS^\tau(N, K)$), où N, K, τ sont des réels positifs, constitué des $\alpha \in \mathbf{R}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, tel que $0 < |k| \leq N$, l'inégalité,

$$|\alpha - (k, \omega)| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau}.$$

On comparera cet ensemble aux ensembles $DS(N, K)$ définis au chapitre 5 qui correspondent au cas $\tau = 0$.

Nous fixons également,

$$\nu > 2d + 2. \tag{1}$$

Ceci étant, nous pouvons définir

$$a_2 = 4\left(6m^2 \max(\sigma, \tau) + \frac{d}{2} + 3\widetilde{q}\nu\right) + 1 = 4a_1 + 1, \tag{2}$$

$$s_0 = 3\left(d + a_2 + \frac{13}{2}\nu + 3\right), \tag{3}$$

$$\beta_0 = 2(a_2 + 1) + 7\nu.$$

Nous fixons aussi $\Lambda = [a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ de longueur $|\Lambda| = b - a$.

Le théorème principal est le suivant :

Théorème 3.1.1. — *Supposons fixé $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$. Soit $A_1(\lambda)$ un élément de $C^\infty(\Lambda, t)$ (*i.e.* à valeurs dans le tore t) tel que, pour tout $\alpha \in \Delta$,*

$$\partial_\lambda |\alpha \circ A_1(\lambda)| \geq \mu_1 > 0,$$

et

$$M_1 = \max_{j=0,1,2} |\partial^j_\lambda A|,$$

où $\mu_1 > 0$ est fixé. Il existe alors $s_0 \in \mathbf{Z}_+$ défini par (3) et $\eta_0 > 0$ de la forme

$$\eta_0 = (\text{cste}) \cdot \left(\frac{\mu_1}{M_1^{a_2}}\right)^{\beta_0},$$

(où $C > 0$ est une constante) pour lesquels le résultat suivant est vrai : si $F_1(x, \lambda) \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$ vérifie $\eta = \max_{j=0,1,2} |\partial^j_\lambda F_1|_{s_0} < \eta_0$, alors l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$

pour lesquels le sytème $(\omega/2\pi, A_1(\lambda) + F_1(\cdot,\lambda))$ n'est pas réductible est de mesure de Lebesgue inférieure à

$$(\mathrm{cste})\mu_1^{-1} \cdot \eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0},$$

où la constante dépend de tous les autres paramètres du problème. D'autre part, quitte à enlever un ensemble de mesure nulle de l'ensemble des λ pour lesquels $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ est réductible, on peut supposer que le système $(\omega/2\pi, A(\lambda) + F(\cdot,\lambda))$ est conjugué à un élément générique au sens du chapitre 2.

Remarquons que si on choisit ν grand $(3\nu/2\beta_0)$ est de l'ordre de $(3/2)\cdot(2a\widetilde{q}+7)^{-1}$ (mais s_0 devient grand également).

Le théorème précédent est également vrai en analytique, et le résultat en classe C^∞ en découle (*cf.* par exemple **[14]** ou le chapitre 6 section 10). Nous ferons cependant la démonstration en classe C^∞.

Remarque. — L'hypothèse qui oblige $A_1(\lambda)$ à n'évoluer que sur un tore maximal, n'est en fait pas restrictive puisque par conjugaison on peut presque toujours se ramener à ce cas (*cf.* lemme 3.4.3).

3.2. Méthode de démonstration

Nous exposons celle-ci dans le cas lisse, le plan en analytique étant le même (seules les estimées sont différentes).

Notons $A_1(\lambda) + F_1(\cdot,\lambda)$, le système initial, et supposons que

$$|F_1|_{s_0} < \varepsilon_1,$$

où ε_1 est un réel suffisamment petit.

La méthode naturelle pour résoudre le problème de la réductibilité, est de chercher une conjugante $B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ proche de l'identité, donc de la forme $B = e^Y$, $Y \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ proche de 0, qui conjugue $A_1 + F_1$ à un système $A_2 + F_2$ avec F_2 du « second ordre » par rapport à F_1 (F_1 étant supposé du « premier ordre »),

$$A_2 + F_2 = L_{\omega/2\pi}B(x)\cdot B(x)^{-1} + \mathrm{Ad}(B(x))\cdot(A_1+F_1). \tag{4}$$

En remarquant que

$$e^Y \approx I + Y,$$

et

$$\mathrm{Ad}(e^Y) = e^{\mathrm{ad}(Y)} \approx \mathrm{Id} + \mathrm{ad}(Y),$$

et en ne retenant que les termes du 1er ordre dans (4), il vient

$$A_2 = L_{\omega/2\pi}Y\cdot(I-Y) + (\mathrm{Id}+\mathrm{ad}(Y))\cdot(A_1+F_1),$$

soit, en ne retenant toujours que les termes d'ordre 1,

$$A_2 = L_{\omega/2\pi}Y + A_1 + F_1 + [Y, A_1],$$

ou encore

$$-L_{\omega/2\pi}Y + [A_1, Y] = F_1 - (A_2 - A_1). \tag{5}$$

Les fonctions que l'on cherche étant définies sur le tore $\mathbf{T}^d$, on peut regarder leurs composantes de Fourier (que l'on note avec des chapeaux) ; il vient

$$\operatorname{ad}(A_1) \cdot \widehat{Y}(0) = \widehat{F}_1(0) - (A_2 - A_1), \tag{6}$$

et pour $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$-\sqrt{-1}(k, \omega)\widehat{Y}(k) + \operatorname{ad}(A_1) \cdot \widehat{Y}(k) = \widehat{F}_1(k).$$

Comme $\operatorname{ad}(A_1)$ n'est pas inversible on est conduit à poser,

$$A_2 = A_1 + \widehat{F}_1(0),$$

et il reste à résoudre pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$[\operatorname{ad}(A_1) - \sqrt{-1}(k, \omega)\,\mathrm{Id}] \cdot \widehat{Y}(k) = \widehat{F}_1(k).$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\widetilde{q}}$ sont les racines de A_1, l'endomorphisme $\operatorname{ad}(A_1) - \sqrt{-1}(k, \omega)\,\mathrm{Id}$ de g admet pour valeurs propres, $-\sqrt{-1}(k, \omega)$ avec multiplicité $\dim t$ et $\sqrt{-1}(\alpha_i(A_1) - (k, \omega))$. Son déterminant sera non nul si les $\alpha_j(A_1) - (k, \omega)$ sont non nuls ; cependant ceci n'est pas suffisant car ils peuvent être très petits, auquel cas Y est grand. Pour éviter ce problème de *petits diviseurs*, on doit imposer des *conditions diophantiennes* sur les $\alpha_i(A_1)$ c'est-à-dire qui garantissent que ces derniers sont assez loin des (k, ω) ; elles sont typiquement de la forme

$$|\alpha_i(A_1) - (k, \omega)| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau}. \tag{7}$$

Ceci permet d'obtenir des estimées du type,

$$|Y|_s \leq C(K)|F|_{s+\tau'},$$

où τ' dépend de τ et de d. Pour éviter ce phénomène de perte de τ' dérivées, caractéristique des problèmes de petits diviseurs, il faut modifier l'équation (5) en y remplaçant F_1 par une troncature de sa série de Fourier à l'ordre $N > 0$, $T_N F_1$. Les estimées ainsi obtenues deviennent :

$$|Y|_s \leq C(K)N^\beta |F|_s, \tag{8}$$

où $\beta > 0$ dépend de τ et de d mais pas de s.

Résumons ce que nous avons dit. Si l'on peut imposer des conditions diophantiennes (7), pour tout $0 < |k| \leq N$, l'équation linéarisée

$$-L_{\omega/2\pi}Y + [A_1, Y] = T_N F_1 - \widehat{F}_1(0), \tag{9}$$

admet une solution Y vérifiant (8). Posons alors

$$A_2 = A_1 + \widehat{F}_1(0),$$

$$F_2 = L_{\omega/2\pi} e^Y \cdot e^{-Y} + \mathrm{Ad}(e^Y) \cdot (A_1 + F_1) - A_2.$$

Le fait que (modulo un reste dû à l'introduction d'une troncature de F_1), F_2 soit « quadratique » en Y et F, permet de combattre le facteur N^β dans (8) et d'obtenir que F_2 est « beaucoup plus petit » que F_1. Ainsi si la procédure précédente peut être itérée, on obtient des suites, A_n, F_n, Y_n, avec F_n, Y_n tendant très vite vers 0. Le produit $e^{Y_n} \cdots e^{Y_1}$ converge vers un B et A_n converge vers un A. Il vient

$$(\omega/2\pi, A_1 + F_1(\cdot))\,\mathcal{R}(B)\ (\omega/2\pi, A).$$

Il n'y a cependant aucune raison pour qu'à l'ordre n les $\alpha_i(A_n)$ soient diophantiens. Pour pallier ce problème, il suffit de remarquer que dans la construction précédente, les A_n dépendent en fait de λ, et il est possible de voir que si $A_1(\lambda)$ a une « bonne » dépendance en λ, il en est de même de $A_n(\lambda)$. Ainsi pour obtenir des conditions diophantiennes sur $A_2(\lambda)$ il suffira d'exclure de l'ensemble des paramètres, les mauvais λ. De même, vu que $A_2(\lambda)$ est une petite perturbation de $A_1(\lambda)$ et de ce fait a une bonne dépendance en λ, il suffit d'enlever de l'ensemble des bons paramètres obtenu à l'étape précédente, un nouvel ensemble de mauvais paramètres. Si l'on peut montrer qu'après l'itération (infinie) de cette procédure l'ensemble des bons paramètres est de mesure positive, le résultat sera démontré.

Le plan du chapitre sera donc le suivant.

Dans la section 3.3, nous écrivons un lemme concernant l'équation linéarisée (9).

En 3.4, nous donnons un lemme de conjugaison qui fournit des estimées à la n-ième étape en fonction de la $(n-1)$-ième.

Au 3.5 enfin, nous achevons la preuve du théorème.

3.3. L'équation linéarisée

Nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. — *Soient $M, N \geq 2$, $\Lambda \in \mathbf{R}$ un intervalle, $A(\lambda) \in C^\infty(\Lambda, t)$ une famille à un paramètre satisfaisant, pour tout $\alpha \in \Delta$ et tout $\lambda \in \Lambda$,*

$$\alpha \circ A(\lambda) \in DS^\tau(N, K), \tag{10}$$

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j A(\lambda)| \leq M,$$

et $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$. Alors, il existe $Y \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$ vérifiant

(i) *pour tout $(x, \lambda) \in \mathbf{R}^d \times \Lambda$,*

$$L_{\omega/2\pi} Y(x, \lambda) + [A(\lambda), Y(x, \lambda)] = \dot{T}_N F(x, \lambda),$$

(ii) *Pour* $j = 0, 1, 2$,

$$|\partial_\lambda^j Y|_s \leq c_{1,s} K^{3\tilde{q}} M^{3m^2} N^{6m^2 \max(\sigma,\tau)+d/2} (\max_{0\leq l\leq j} |\partial_\lambda^l F|_s), \tag{11}$$

$$|\partial_\lambda^j L_{\omega/2\pi} Y|_s \leq c_{1,s} K^{3\tilde{q}} M^{3m^2} N^{6m^2 \max(\sigma,\tau)+d/2} \max_{0\leq l\leq j} |\partial_\lambda^l F|_s, \tag{12}$$

avec (par exemple),

$$c_{1,s} = 300 \cdot (2\pi)^s 2^{d/2} (2 + |\omega|)^{3m^2} ((m^2)!)^3 (1 + \gamma^{3r}). \tag{13}$$

Démonstration. — Associons à tout $A \in g$, l'élément $A \otimes 1 \in g \otimes \mathbf{C}$. Alors, $\mathrm{ad}(A\otimes 1) \in gl(g\otimes\mathbf{C})$ est semi-simple et ses valeurs propres sont 0 avec multiplicité $r = \dim t$ et les $\sqrt{-1}\cdot(\alpha(A))_{\alpha\in\Delta}$. Ainsi l'opérateur $\mathrm{ad}(A\otimes 1) + \sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id}$, est également semi-simple de valeurs propres $\sqrt{-1}(k,\omega)$ avec multiplicité $\dim t$ et $(\sqrt{-1}\alpha(A) + \sqrt{-1}(k,\omega))$, $\alpha \in \Delta$. Son déterminant vaut donc

$$|\det(\mathrm{ad}(A) + \sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id})| = |(k,\omega)|^r \cdot \Big(\prod_{\alpha\in\Delta} |\alpha(A) + (k,\omega)|\Big),$$

et, vu l'hypothèse sur les racines de A,

$$\begin{aligned} |\det(\mathrm{ad}(A) + \sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id})| &\geq (\gamma^{-1}/|k|^\sigma)^r \cdot (K^{-1}/|k|^\tau)^{\tilde{q}} \\ &\geq \gamma^{-r} K^{-\tilde{q}} |k|^{-(r\sigma+\tilde{q}\tau)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Nous utiliserons desormais le même symbole pour désigner A et $A \otimes 1$.

Si $U \in gl(g)$ est un endomorphisme inversible, il existe une constante $c_1 = (m^2)!$ ($m = \dim g$) telle que (on prend ici la norme sup sur les coefficients de matrices),

$$|U^{-1}| \leq \tilde{c}_1 |\det(U)|^{-1} |U|^{m^2-1};$$

Ceci implique, en posant $U_k = \sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A)$,

$$\begin{aligned} |[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A)]^{-1}| &\leq \tilde{c}_1 |k|^{r\sigma+\tilde{q}\tau} \gamma^r K^{\tilde{q}} \cdot |[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A)]|^{m^2-1} \\ &\leq \tilde{c}_1 |k|^{r\sigma+\tilde{q}\tau} \gamma^r K^{\tilde{q}} \cdot (2|A| + (k,\omega)|)^{m^2-1} \\ &\leq \tilde{c}_1 |k|^{r\sigma+\tilde{q}\tau} \gamma^r K^{\tilde{q}} \cdot (2M + |\omega|N)^{m^2-1} \\ &\leq \tilde{c}_1 (2 + |\omega|)^{m^2-1} |k|^{r\sigma+\tilde{q}\tau} \gamma^r K^{\tilde{q}} (N + M)^{m^2-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Vu que $M + N \leq NM$ (puisque $M, N \geq 2$) nous avons finalement prouvé que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\big|[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A(\lambda))]^{-1}\big| \leq \tilde{c}_2 |k|^{r\sigma+\tilde{q}\tau} K^{\tilde{q}} \cdot (MN)^{m^2-1}, \tag{16}$$

avec

$$\tilde{c}_2 = (2 + |\omega|)^{m^2-1} (m^2)! \gamma^r.$$

Posons alors, pour $0 < |k| \leq N$,

$$\widehat{Z}(k,\lambda) = [\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A(\lambda))]^{-1} \cdot \widehat{F}(k,\lambda), \tag{17}$$

où $\widehat{F}(k,\lambda)$ représente le k-ième coefficient de Fourier de $F(\cdot,\lambda)$, c'est-à-dire

$$\widehat{F}(k,\lambda)=\int_{[0,1]^d}F(x,\lambda)e^{-2\pi\sqrt{-1}(k,x)}dx.$$

Définissons également l'élément de $C^\infty(\mathbf{T}^d\times\Lambda,g\otimes\mathbf{C})$,

$$Z(x,\lambda)=\sum_{0<|k|\le N}\widehat{Z}(k,\lambda)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)}, \tag{18}$$

et enfin dans $C^\infty(\mathbf{T}^d\times\Lambda,g)$, (en notant $\Re$ la partie réelle et $\overline{z}$ le complexe conjugué de z),

$$Y(x,\lambda)=\Re(Z(x,\lambda))=\frac{1}{2}(Z(x,\lambda)+\overline{Z}(x,\lambda)). \tag{19}$$

Remarquons que, du fait de l'identité

$$L_{\omega/2\pi}Z(x,\lambda)=\sum_{0<|k|\le N}\sqrt{-1}(k,\omega)\widehat{Z}(k,\lambda)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)},$$

et de la définition de Z, il vient

$$L_{\omega/2\pi}Z(x,\lambda)+\mathrm{ad}(A(\lambda))\cdot Z(x,\lambda)=\dot{T}_NF(x,\lambda),$$

et donc également

$$L_{\omega/2\pi}Y(x,\lambda)+\mathrm{ad}(A(\lambda))\cdot Y(x,\lambda)=\dot{T}_NF(x,\lambda).$$

Evaluons à présent $\max_{j=0,1,2}|\partial_\lambda^j Z(\cdot,\lambda)|_s$ pour $\lambda\in\Lambda$, en écrivant, pour tout multi-indice α (*cf.* formule (18)),

$$|\partial_x^\alpha\partial_\lambda^j Z(\cdot,\lambda)|_0\le\sum_{0<|k|\le N}|k|^\alpha|\widehat{\partial_\lambda^j Z}(k,\lambda)| \tag{20}$$

et en remarquant que

$$\widehat{\partial_\lambda^j Z}(k,\lambda)=\partial_\lambda^j\widehat{Z}(k,\lambda).$$

L'équation (17) et la formule de Leibniz montrent que, pour $j=0,1,2$,

$$\partial_\lambda^j\widehat{Z}(k,\lambda)=\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}(\partial_\lambda^l V_k(\lambda))(\partial_\lambda^{j-l}\widehat{F}(k,\lambda)),$$

où l'on a posé

$$V_k(\lambda)=U_k^{-1}(\lambda)=[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id}+\mathrm{ad}(A(\lambda))]^{-1},$$

et donc

$$\max_{j=0,1,2}|\partial_\lambda^j\widehat{Z}(k,\lambda)|\le 8\cdot\max_{0\le l\le 2}(1,|\partial_\lambda^l V_k(\lambda)|)\cdot\max_{0\le l\le 2}(1,|\partial_\lambda^l\widehat{F}(k,\lambda)|). \tag{21}$$

Evaluons $\max_{0\le l\le 2}(|\partial_\lambda^l V_k(\lambda)|)$ pour $j=0,1,2$:

$$\partial_\lambda V_k=-U_k^{-1}\partial_\lambda U_kU_k^{-1},$$

$$\partial_\lambda^2 V_k=2U_k^{-1}\partial_\lambda U_kU_k^{-1}\partial_\lambda U_kU_k^{-1}-U_k^{-1}\partial_\lambda^2U_kU_k^{-1},$$

et par conséquent,

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j V_k(\lambda)| \leq 2 \cdot \max_{j=0,1,2} (1, |\partial_\lambda^j U_k(\lambda)|^2) \cdot \max(1, |U_k(\lambda)^{-1}|^3).$$

Vu (16) on a

$$\max(1, |U_k(\lambda)^{-1}|^3) \leq \widetilde{c}_2^3 |k|^{3r\sigma + 3\widetilde{q}\tau} K^{3\widetilde{q}} (NM)^{3(m^2-1)},$$

et d'autre part, puisque, pour $j = 1, 2$, $\partial_\lambda^j U_k(\lambda) = \partial_\lambda^j(\mathrm{ad}(A(\lambda)))$, on a

$$\begin{aligned} \max_{j=0,1,2} (1, |\partial_\lambda^j U_k(\lambda)|^2) &\leq \max(1, (2M + |\omega| N), 2M)^2 \\ &\leq (2 + |\omega|)^2 (MN)^2. \end{aligned}$$

Au total il vient

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j V_k(\lambda)| \leq 2\widetilde{c}_2^3 (2 + |\omega|)^2 K^{3\widetilde{q}} (MN)^{3m^2-1} |k|^{3r\sigma + 3\widetilde{q}\tau},$$

et donc, pour $0 < |k| \leq N$,

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j V_k(\lambda)| \leq \widetilde{c}_3 K^{3\widetilde{q}} M^{3m^2-1} N^{3r\sigma + 3\widetilde{q}\tau + 3m^2 - 1}, \tag{22}$$

où on a posé

$$\widetilde{c}_3 = 2\widetilde{c}_2^3 (2 + |\omega|)^2.$$

D'après (21) et (22) et vu que $r + \widetilde{q} \leq m^2$ on a

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j Z(\cdot, \lambda)|_s \leq 8 \cdot \widetilde{c}_3 K^{3\widetilde{q}} M^{3m^2-1} N^{6m^2} \cdot$$

$$\cdot \max(\sigma, \tau) \max_{|\alpha| \leq s} \max_{j=0,1,2} \sum_{0<|k|\leq N} |k|^\alpha |\widehat{\partial_\lambda^j F}(k, \lambda)|.$$

Or l'estimée (6) de la proposition A.1.1 de l'annexe montre que

$$\sum_{0<|k|\leq N} |k|^\alpha |\widehat{\partial_\lambda^j F}(k, \lambda)| \leq (2\pi)^s (N+1)^{d/2} |\partial_\lambda^j F(\cdot, \lambda)|_s.$$

Par conséquent ($N + 1 \leq 2N$),

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j Z(\cdot, \lambda)|_s \leq \widetilde{c}_4 K^{3\widetilde{q}} M^{3m^2-1} N^{6m^2 \max(\sigma,\tau) + d/2} \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F(\cdot, \lambda)|_s,$$

où

$$\widetilde{c}_4 = 8(2\pi)^s 2^{d/2} \widetilde{c}_3,$$

et, d'après (19),

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j Y(\cdot, \lambda)|_s \leq \widetilde{c}_4 K^{3\widetilde{q}} M^{3m^2-1} N^{6m^2 \max(\sigma,\tau) + d/2} \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F(\cdot, \lambda)|_s, \tag{23}$$

Puisque nous en aurons besoin dans la suite, nous donnons des estimées similaires pour $L_{\omega/2\pi} Y$.

Vu que

$$L_{\omega/2\pi} Y + [A, Y] = \dot{T}_N F,$$

il vient, pour $j = 0, 1, 2$,

$$L_{\omega/2\pi}\partial_\lambda^j Y = \dot{T}_N(\partial_\lambda^j F) - \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \partial_\lambda^l(\mathrm{ad}(A)) \cdot \partial_\lambda^{j-l} Y,$$

ce qui montre que (*cf.* l'annexe section A.1)

$$|L_{\omega/2\pi}\partial_\lambda^j Y|_s \leq (N+1)^{d/2}(2\pi)^s|\partial_\lambda^j F|_s + 2^j \max_{0\leq l\leq j} |\partial_\lambda^l \,\mathrm{ad}(A)| \cdot \max_{0\leq l\leq j} |\partial_\lambda^l Y|_s.$$

Utilisant les inégalités (23) on voit que

$$\max_{j=0,1,2} |L_{\omega/2\pi}\partial_\lambda^j Y|_s \leq \widetilde{c}_5.K^{3\widetilde{q}}M^{3m^2}N^{6m^2\max(\sigma,\tau)+d/2} \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F(\cdot,\lambda)|_s,$$

avec

$$\widetilde{c}_5 = 2(2^{d/2}(2\pi)^s + 8\widetilde{c}_4).$$

Le lemme 3.3.1 est démontré (puisque $c_{1,s} \geq \max(\widetilde{c}_4, \widetilde{c}_5)$). □

3.4. Le lemme de conjugaison dans le cas diophantien

Dans ce paragraphe nous supposerons que $\Lambda \subset \mathbf{R}$ est un intervalle, $A(\cdot) \in C^\infty(\Lambda, t)$ une famille à un paramètre d'éléments constants sur le tore t ; soit également $F \in C^\infty(\Lambda \times \mathbf{T}^d, g)$ et posons

$$\varepsilon_s = \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F|_s, \qquad M = \max_{j=0,1,2}(|\partial_\lambda^j A|, 2).$$

Nous ferons également l'hypothèse qu'il existe $\mu > 0$ et $\rho > 0$ tel que, pour toute racine α,

$$\forall\, \lambda \in \Lambda, \quad |\partial_\lambda(\alpha \circ A)| \geq \mu > 0 \quad \text{et} \quad |(\alpha \circ A)(\lambda)| \geq \rho > 0.$$

Nous supposerons en outre que (ν étant défini par (1))

$$K = N^\nu, \tag{24}$$

si bien que les estimées (11), (12) se récrivent

$$\max_{j=0,1,2}(|\partial_\lambda^j Y(\cdot,\lambda)|_s, |\partial_\lambda^j L_{\omega/2\pi} Y(\cdot,\lambda)|_s) \leq c_{1,s}(MN)^{a_1} \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F(\cdot,\lambda)|_s, \tag{25}$$

avec ($\max(\sigma,\tau) \geq 1$),

$$a_1 = 6m^2\max(\sigma,\tau) + \frac{d}{2} + 3\widetilde{q}\nu. \tag{26}$$

Remarquons $a_1 \geq 6$.

Le lemme fondamental que nous démontrons dans ce paragraphe est le suivant (nous renvoyons à (13) pour la notation $c_{1.s}$) :

Lemme 3.4.1. — *Supposons que ε_0 vérifie*

$$c_{1,0}(MN)^{a_1}\varepsilon_0 \leq 1; \tag{27}$$

(en particulier $\varepsilon_0 \leq 1$). Il existe alors une constante $c_6 > 0$ pour laquelle ce qui suit est vrai : si ρ vérifie

$$\rho \geq 4c_6^{-1}\varepsilon_0,$$

et

$$|\Lambda| \leq (1/2)c_6\rho M^{-1},$$

et si pour tout $\lambda \in \Lambda$ et toute racine $\alpha \in \Delta$, on a

$$\alpha \circ A(\lambda) \in DS^{\tau}(N, K),$$

alors il existe $B = e^Y \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, G)$, $A' \in C^\infty(\Lambda, t)$, $F' \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$ tels que

$$A' + F' = L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1} + \mathrm{Ad}(B) \cdot (A + F),$$

$$|\alpha \circ A'| \geq \rho' > 0, \qquad |\partial_\lambda(\alpha \circ A')| \geq \mu' > 0, \qquad \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j A'| \leq M',$$

avec

$$M' = M + c_8\rho^{-3}M^3\varepsilon_0, \tag{28}$$

$$\varepsilon'_s \leq \rho^{-2}M^{a_2}[c_{2,s}N^{a_2}(\varepsilon_s\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) + c_{2,s'}\varepsilon_{s'}N^{-(s'-s-d-1)}], \tag{29}$$

$$\rho' \geq \rho - c_8\rho^{-3}M^3\varepsilon_0, \qquad \mu' \geq \mu - c_8\rho^{-3}M^3\varepsilon_0,$$

$$|B - \mathrm{Id}\,|_s \leq c_8(\rho^{-1} + c_{1,s}(NM)^{a_2})\varepsilon_s, \tag{30}$$

$$|\partial_\lambda^j A'(\lambda) - \partial_\lambda^j A(\lambda)| \leq c_8\rho^{-3}M^3\varepsilon_0, \tag{31}$$

où $c_8 > 0$ est une constante,

$$|Y|_s \leq c_{1,s}(MN)^{a_1}\varepsilon_s$$

$$c_{2,s} = c_s c_{1,s}^4, \tag{32}$$

$$a_2 = 4a_1 + 1, \tag{33}$$

et où on a noté $\varepsilon'_s = \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F'|_s$.

La démonstration du lemme précédent se fait en deux étapes : dans un premier temps on démontre que l'on peut conjuguer $(\omega/2\pi, A + F(\cdot))$ à $(\omega/2\pi, \widetilde{A} + \widetilde{F}(\cdot))$ avec $\widetilde{F}$ beaucoup plus petit que F. C'est ce qui est fait dans le lemme 3.4.2. Cependant la famille $\widetilde{A}(\lambda)$ n'est pas forcément sur le tore t, bien que n'en étant pas très loin. Dans un second temps utilisant le lemme 3.4.3 on construit une conjugaison $\widetilde{B}(\lambda)$ qui ramène $\widetilde{A}(\lambda)$ sur le tore t.

Lemme 3.4.2. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe* $\widetilde{F} \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$, $\widetilde{A} \in C^\infty(\Lambda, g)$ *et* $Y \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$ *tels que*

$$(\omega/2\pi, \widetilde{A} + \widetilde{F}(\cdot))\, \mathcal{R}(e^Y)\ (\omega/2\pi, A + F(\cdot)),$$

$$\widetilde{A}(\lambda) = A + \widehat{F}(0, \lambda),$$

$$\widetilde{\varepsilon}_s \leq c_s c_{1,s}^4 (MN)^{4a_1} (\varepsilon_0 \varepsilon_s + \varepsilon_0^2) + c_{s'} \varepsilon_{s'} N^{-(s'-s-d-1)},$$

$$|Y|_s \leq c_{1,s} (MN)^{a_1} \varepsilon_s.$$

Démonstration. — Posons

(34) $$\varepsilon_s = \max_{0 \leq j \leq 2} |\partial_\lambda^j F|_s,$$

Le lemme 3.3.1 nous fournit un $Y \in C^\infty(\Lambda \times \mathbf{T}^d, g)$ tel que

$$L_{\omega/2\pi} Y + [Y, A] + \dot{T}_N F = 0,$$

et vérifiant

(35) $$\max_{j=0,1,2} (|\partial_\lambda^j Y|_s, |\partial_\lambda^j L_{\omega/2\pi} Y|_s) \leq c_{1,s} (NM)^{a_1} \max_{0 \leq l \leq 2} |\partial_\lambda^j F|_s.$$

Posons alors

$$\widetilde{A} = A + \widehat{F}(0, \lambda),$$

$$\widetilde{F} = L_{\omega/2\pi} e^Y \cdot e^{-Y} + \mathrm{Ad}(e^Y) \cdot (A + F) - \widetilde{A},$$

ainsi que

$$\widetilde{\varepsilon}_s = \max_{0 \leq j \leq 2} |\partial_\lambda^j \widetilde{F}|_s.$$

Calculons,

$$\begin{aligned}
\widetilde{F} &= L_{\omega/2\pi} e^Y \cdot e^{-Y} + \mathrm{Ad}(e^Y) \cdot (A + F) - \widetilde{A} \\
&= (D(e^Y) \cdot L_{\omega/2\pi} Y) \cdot e^{-Y} + [\mathrm{Ad}(e^Y) - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(Y)] \cdot (A + F) \\
&\qquad + (\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(Y)) \cdot (A + F) - \widetilde{A} \\
&= (S(Y) + \mathrm{Id}) \cdot L_{\omega/2\pi} Y + L(Y) \cdot (A + F) + A + F + [Y, A] + [Y, F] - \widetilde{A}.
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$L(Y) = \mathrm{Ad}(e^Y) - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(Y) = e^{\mathrm{ad}(Y)} - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(Y),$$

et

$$S(Y) \cdot H = [(D\exp)(Y) - \mathrm{Id}] \cdot He^{-Y} = \left[\frac{e^{\mathrm{ad}(Y)} - \mathrm{Id}}{\mathrm{ad}(Y)} - \mathrm{Id} \right] \cdot H.$$

Remarquons qu'il a été fait usage de la formule donnant la dérivée de l'exponentielle (*cf.* **[13]** Th. 1.7 p. 105) :

$$e^{-Y} D\exp(X) \cdot H = \frac{\mathrm{Id} - e^{\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}(X)} \cdot H.$$

Utilisant le fait que

$$L_{\omega/2\pi} Y + [Y, A] + \dot{T}_N F = 0,$$

on obtient

$$\widetilde{F} = S(Y) \cdot L_{\omega/2\pi} Y + L(Y) \cdot (A + F) + [Y, F] + R_N F,$$

et donc

$$\partial_\lambda^j \widetilde{F} = \partial_\lambda^j (S(Y) \cdot L_{\omega/2\pi} Y) + \partial_\lambda^j (L(Y) \cdot (A + F)) + \partial_\lambda^j ([Y, F]) + \partial_\lambda^j (R_N F).$$

Il s'agit d'évaluer chacun des termes précédents dans le membre de droite.

3.4.a. Estimées. — Si l'on applique les résultats de la section A.2.a de l'annexe, il vient, pourvu que

$$|Y|_0 \leq 1,$$

c'est-à-dire, si l'estimée (27) est vérifiée, les inégalités,

$$|L(Y)|_s \leq c_s |Y|_s |Y|_0,$$

$$|(DL)(Y)|_s \leq c_s |Y|_s,$$

$$|(D^2L)(Y)|_s \leq c_s (1 + |Y|_s);$$

de façon similaire,

$$|S(Y)|_s \leq c_s |Y|_s,$$

$$|(DS)(Y)|_s \leq c_s (1 + |Y|_s),$$

$$|(D^2S)(Y)|_s \leq c_s (1 + |Y|_s).$$

Comme

$$\partial_\lambda (L(Y)) = (DL)(Y) \cdot \partial_\lambda Y,$$

$$\partial_\lambda^2 (L(Y)) = (DL)(Y) \cdot \partial_\lambda^2 Y + (D^2L)(Y) \cdot (\partial_\lambda Y, \partial_\lambda Y),$$

on a

$$|\partial_\lambda (L(Y))|_s \leq c_s (|(DL)(Y)|_s |\partial_\lambda Y|_0 + |(DL)(Y)|_0 |\partial_\lambda Y|_s),$$

et donc

$$|\partial_\lambda (L(Y))|_s \leq c_s (|Y|_s |\partial_\lambda Y|_0 + |Y|_0 |\partial_\lambda Y|_s).$$

De même,

$$|\partial_\lambda^2(L(Y))|_s \le c_s|(DL)(Y)|_s|\partial_\lambda^2 Y|_0 + |(DL)(Y)|_0|\partial_\lambda^2 Y|_s$$
$$+ |(D^2)L(Y)|_s|\partial_\lambda Y|_0^2 + |(D^2)L(Y)|_0|\partial_\lambda Y|_s|\partial_\lambda Y|_0,$$

soit

$$|\partial_\lambda^2(L(Y))|_s \le c_s(|\partial_\lambda Y|_0|\partial_\lambda Y|_s + |\partial_\lambda Y|_0^2(1+|Y|_s) + |Y|_s|\partial_\lambda^2 Y|_0 + |Y|_0|\partial_\lambda^2 Y|_s),$$

Utilisant l'inégalité (35), il vient

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j L(Y)|_s \le c_s c_{1,s}^3 (NM)^{3a_1}(\varepsilon_s\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2(1+\varepsilon_s)),$$

et comme $\varepsilon_0 \le 1$,

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j L(Y)|_s \le c_s c_{1,s}^3 (NM)^{3a_1}(\varepsilon_s\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2). \tag{36}$$

De même,

$$\partial_\lambda(S(Y)) = (DS)(Y)\cdot\partial_\lambda Y,$$

$$\partial_\lambda^2(S(Y)) = (DS)(Y)\cdot\partial_\lambda^2 Y + (D^2S)(Y)\cdot(\partial_\lambda Y, \partial_\lambda Y),$$

et donc

$$|\partial_\lambda(S(Y))|_s \le c_s(|\partial_\lambda Y|_0(1+|Y|_s) + |\partial_\lambda Y|_s), \tag{37}$$

ainsi que

$$|\partial_\lambda^2(S(Y))|_s \le c_s(|\partial_\lambda Y|_0|\partial_\lambda Y|_s + |\partial_\lambda Y|_0^2(1+|Y|_s) + |\partial_\lambda^2 Y|_0(1+|Y|_s) + |\partial_\lambda^2 Y|_s), \tag{38}$$

Ainsi, (37), (38) et (35) entraînent (vu que $\varepsilon_0 \le 1$)

$$|\partial_\lambda(S(Y))|_s \le c_s c_{1,s}^3 (MN)^{3a_1}(\varepsilon_0(1+\varepsilon_s) + \varepsilon_s),$$

$$|\partial_\lambda^2(S(Y))|_s \le c_s c_{1,s}^3 (MN)^{3a_1}(\varepsilon_s + (\varepsilon_0 + \varepsilon_0^2)(1+\varepsilon_s) + \varepsilon_s\varepsilon_0).$$

Comme $\varepsilon_0 \le 1$, ceci se récrit, pour $j = 0,1,2$,

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j(S(Y))|_s \le c_s c_{1,s}^3 (MN)^{3a_1}(\varepsilon_s + \varepsilon_0). \tag{39}$$

Nous rappelons que nous avons défini ε_s en (34). Ce qui précède permet d'écrire d'après (36), (vu $\varepsilon_0 \leq 1$, $M \geq 2$) pour $j = 0, 1, 2$,

$$\begin{aligned}
|\partial_\lambda^j (L(Y) \cdot (A+F)|_s &\leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\partial_\lambda^l L(Y) \cdot \partial_\lambda^{j-l}(A+F)|_s \\
&\leq c_s \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\partial_\lambda^l L(Y)|_s |\partial_\lambda^{j-l}(A+F)|_0 \\
&\qquad\qquad + |\partial_\lambda^l L(Y)|_0 |\partial_\lambda^{j-l}(A+F)|_s \\
&\leq 2^j c_s \cdot c_{1,s}^3 (NM)^{3a_1} \left[(\varepsilon_s \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) \cdot (M + \varepsilon_0) + \varepsilon_0^2 \cdot (M + \varepsilon_s)\right] \\
&\leq c c_{1,s}^3 (NM)^{3a_1+1} (\varepsilon_s \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2). \qquad (40)
\end{aligned}$$

Pour S, d'après (39)

$$\begin{aligned}
|\partial_\lambda^j (S(Y) \cdot (L_{\omega/2\pi} Y)|_s &\leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\partial_\lambda^l S(Y) \cdot \partial_\lambda^{j-l} L_{\omega/2\pi} Y|_s \\
&\leq c_s \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\partial_\lambda^l S(Y)|_s |\partial_\lambda^{j-l}(L_{\omega/2\pi} Y)|_0 \\
&\qquad\qquad + |\partial_\lambda^l S(Y)|_0 |\partial_\lambda^{j-l}(L_{\omega/2\pi} Y)|_s \\
&\leq 2^j c_s \cdot c_{1,s}^4 (NM)^{4a_1} [(\varepsilon_s + \varepsilon_0)\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \varepsilon_s] \\
&\leq c_s c_{1,s}^4 (NM)^{4a_1} (\varepsilon_s \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2). \qquad (41)
\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
|\partial_\lambda^j ([Y, F])|_s &\leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |[\partial_\lambda^l Y, \partial_\lambda^{j-l} F]|_s \\
&\leq \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} |\partial_\lambda^l Y|_s |\partial_\lambda^{j-l} F|_0 + |\partial_\lambda^l Y|_0 |\partial_\lambda^{j-l} F|_s \\
&\leq c_s c_{1,s} (MN)^{a_1} \varepsilon_s \varepsilon_0. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Estimées pour le reste. — Enfin,

$$\partial_\lambda^j R_N F = R_N(\partial_\lambda^j F);$$

l'inégalité (7) de la proposition A.1.1 de l'annexe montre que, pour $s' \geq s + d + 1$,

$$|\partial_\lambda^j R_N F|_s \leq c_{s'} \frac{|\partial_\lambda^j F|_{s'}}{N^{s'-s-d-1}} \leq c_{s'} \varepsilon_{s'} N^{-(s'-s-d-1)}, \qquad (43)$$

Les inégalités (40), (41), (42), (43) montrent alors que ($a_1 \geq 1$)

$$\widetilde{\varepsilon}_s \leq c_s c_{1,s}^4 (MN)^{4a_1} (\varepsilon_s \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2) + c_{s'} \varepsilon_{s'} N^{-(s'-s-d-1)},$$

ce qui achève la preuve du lemme 3.4.2. □

Les $\widetilde{A}(\lambda)$ que l'on obtient de cette façon ne sont cependant pas sur un tore maximal mais n'en sont pas trop loin. Cette observation est exploitée dans le lemme suivant qui nous permet de ramener par conjugaison $\widetilde{A}(\lambda)$ sur le tore maximal t.

3.4.b. Revenir sur le tore. — Notons $W(A_0, \delta)$ le voisinage de A_0 dans g,

$$W(A_0, \delta) = \{A \in g, \ |A - A_0| < \delta\},$$

et notons $\operatorname{dist}(A_0, E)$ la distance de A_0 à l'ensemble E.

Lemme 3.4.3. — *Soient $M > 0$, $\rho > 0$, t un tore maximal, Δ les racines par rapport à t et $A_0 \in t$ tel que $|A_0| \leq M$. Il existe alors des constantes c_6, c_7, une fonction $\delta(\rho) = c_6\rho$, et une application analytique ψ_{A_0} telles que, si pour tout $\alpha \in \Delta$,*

$$|\alpha(A_0)| \geq \rho,$$

les assertions suivantes sont vérifiées :

(i) $\psi_{A_0} \in C^\infty(W(A_0, \delta(\rho)), g)$,

(ii) $\sup_{A \in W(A_0, \delta(\rho))} |D^j \psi_{A_0}(A)| \leq c_7 \rho^{-j}$, *ainsi que*

$$\sup_{A \in W(A_0, \delta(\rho))} |D^j(e^{\psi_{A_0}(A)} - \mathrm{Id})| \leq c_7 \rho^{-j};$$

(iii) *pour tout $A \in W(A_0, \delta(\rho))$,*

$$\mathrm{Ad}(e^{\psi_{A_0}(A)}) \cdot A = e^{\mathrm{ad}(\psi_{A_0}(A))} \cdot A \in t,$$

(iv) *pour tout $A \in g$, l'endomorphisme $D\psi_{A_0}(A)$ restreint à t vérifie*

$$|D^j \psi_{A_0}(A) \rceil t| \leq c_7 \rho^{-(j+1)} \operatorname{dist}(A, t),$$

(v) *de même,*

$$|D^j(\mathrm{Ad}(e^{\psi_{A_0}(A)})) - \mathrm{Id} \rceil t| \leq c_7 \rho^{-(j+1)} \operatorname{dist}(A, t). \tag{44}$$

(vi) *Enfin,*

$$|e^{\psi_{A_0}(A)} - \mathrm{Id}\,| \leq c_7 \rho^{-1} \operatorname{dist}(t, A). \tag{45}$$

Démonstration. — Notons k un supplémentaire de t dans g,

$$g = k \oplus t.$$

L'application Ψ, définie par

$$\begin{aligned} \Psi : k \times t &\longrightarrow g \\ (X, Y) &\longmapsto \mathrm{Ad}(e^X) \cdot (A_0 + Y), \end{aligned}$$

est analytique et sa différentielle en $(0,0)$,

$$D\Psi(0,0) = [X, A_0] + Y,$$

est clairement inversible (puisque $\alpha(A_0) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta$). Le théorème d'inversion locale complété par le théorème A.3.1 de l'annexe, montre que Ψ est un difféomorphisme analytique d'un voisinage de $(0,0)$ sur $W(A_0, \delta(\rho))$ avec

$$\delta(\rho) = c_6\rho.$$

En outre, on a pour $j = 0, 1, 2$,

$$\max_{A \in W(A_0,\delta(\rho))} |D^j\Psi^{-1}(A)| \leq c_7\rho^{-j},$$

Soit p_1 la projection,

$$\begin{array}{rcl} p_1 : k \times t & \longrightarrow & k \\ (X, Y) & \longmapsto & X, \end{array}$$

et définissons

$$\psi_{A_0} = p_1 \circ \Psi^{-1}.$$

Les conclusions (i), (ii) (iii), sont alors immédiates. Pour prouver (iv) il suffit de constater que, pour tout $H \in t$,

$$D\psi_{A_0}(H)|t = 0,$$

car ψ_{A_0} s'annule sur t. Par conséquent l'inégalité des accroissements finis montre que

$$\begin{array}{rcl} |D^j\psi(A)|t| & \leq & \max|D^{j+1}\psi| \cdot \operatorname{dist}(t, A) \\ & \leq & c_7\rho^{-(j+1)} \operatorname{dist}(t, A). \end{array}$$

La démonstration de (v) s'effectue de la même façon : vu que $\operatorname{Ad}(e^{\psi_{A_0}}) - \operatorname{Id} = 0$ sur le tore t, on a

$$D^j((\operatorname{Ad}(e^{\psi_{A_0}}) - \operatorname{Id})|t) = 0,$$

et l'inégalité des accroissements finis donne

$$\begin{array}{rcl} |D^j(\operatorname{Ad}(e^{\psi_{A_0}(A)}) - \operatorname{Id})|t| & \leq & \max|D^{j+1}(\operatorname{Ad}(e^{\psi_{A_0}}) - \operatorname{Id})| \cdot \operatorname{dist}(t, A) \\ & \leq & c_7\rho^{-(j+1)} \operatorname{dist}(t, A). \end{array}$$

Enfin la preuve de (vi) s'effectue de la même manière. Ce qui achève de prouver le lemme. □

Fixons $\lambda_0 \in \Lambda$. L'hypothèse que l'on fait montre que, pour tout $\alpha \in \Delta$,

$$|\alpha \circ A| \geq \rho,$$

et, pour $\lambda \in \Lambda$, par le théorème des accroissements finis (vu que $|\lambda - \lambda_0| \leq (1/2M)c_6\rho$)

$$|A(\lambda) - A(\lambda_0)| < \frac{1}{2}c_6\rho.$$

On a donc

$$|\widetilde{A}(\lambda) - A(\lambda_0)| \leq \frac{1}{2}c_6\rho + \varepsilon_0,$$

et comme $\varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}c_6\rho$, il vient que, pour $\lambda \in \Lambda$,

$$\widetilde{A}(\lambda) \in W(A(\lambda_0), \delta(\lambda)).$$

On peut appliquer le lemme 3.4.3 et définir, en posant $\psi = \psi_{A(\lambda_0)}$,

$$\widetilde{B}(\lambda) = \exp(\psi(A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda))).$$

Par définition il vient donc, pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda)) \cdot (A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda)) \in t.$$

Posons alors

$$A'(\lambda) = \mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda)) \cdot (A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda)),$$

$$F'(\lambda) = \mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda)) \cdot \widetilde{F}(\lambda),$$

$$B(\lambda) = \widetilde{B}(\lambda) \cdot e^{Y(\lambda)}.$$

D'après (44), (45),

$$|\,\mathrm{Ad}(B(\lambda))|_2 \leq c\rho^{-2}(M + \varepsilon_0),$$

et donc, pour $j = 0, 1, 2$,

$$|\partial_\lambda^j F'|_s \leq c\rho^{-2}(M + \varepsilon_0)\widetilde{\varepsilon}_s \leq c\rho^{-2}M\widetilde{\varepsilon}_s,$$

ce qui, du fait de l'inégalité concernant $\widetilde{\varepsilon}_s$, donne la formule (29).

Remarquons que le (vi) de la proposition précédente entraîne que, pour tout λ,

$$|\widetilde{B}(\lambda) - \mathrm{Id}\,| \leq c\rho^{-1}\,\mathrm{dist}(A + \widehat{F}(0,\lambda), t),$$

et comme $A(\lambda) \in t$,

$$|\widetilde{B}(\lambda) - \mathrm{Id}\,| \leq c_7\rho^{-1}\varepsilon_0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\widetilde{B}(\lambda)e^Y - \mathrm{Id}\,|_s &\leq 2(c_7\rho^{-1}\varepsilon_0 + |Y|_s) \\ &\leq c(c_7\rho^{-1} + c_{1,s}(NM)^{a_1})\varepsilon_s, \end{aligned} \tag{46}$$

ce qui donne l'estimée (30).

Enfin, notons $f = \mathrm{Ad}(e^{\psi_{A_0}}) - \mathrm{Id}$. Constatons :

$$A'(\lambda) - A(\lambda) = \mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda) - \mathrm{Id}) \cdot (A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda)) + \widehat{F}(0,\lambda); \tag{47}$$

évaluons alors, $|\partial_\lambda^j(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda)) - \mathrm{Id})| = |\partial_\lambda^j f(A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda))|$. On a

$$\begin{aligned} \partial_\lambda(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda)) - \mathrm{Id}) &= Df(A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda)) \cdot (\partial_\lambda A + \partial_\lambda F(0,\lambda)) \\ &= Df(A(\lambda) + \widehat{F}(0,\lambda)) \cdot (\partial_\lambda A) + Df(A(\lambda) \\ &\qquad + \widehat{F}(0,\lambda)) \cdot (\partial_\lambda F(0,\lambda)). \end{aligned}$$

Or, d'après les inégalités (v) du lemme 3.4.3,

$$\begin{aligned}|(Df)(A(\lambda)+\widehat{F}(0,\lambda))\cdot(\partial_\lambda A)| &\leq M\cdot c_7\rho^{-2}|\widehat{F}(0,\lambda)| \\ &\leq c_7\rho^{-2}M\varepsilon_0,\end{aligned} \tag{48}$$

et

$$|(Df)(A(\lambda)+\widehat{F}(0,\lambda))\cdot(\partial_\lambda F(0,\lambda))| \leq cc_7\rho^{-2}\varepsilon_0.$$

Ainsi,

$$|\partial_\lambda(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda))-\mathrm{Id})| \leq cc_7\rho^{-2}M\varepsilon_0.$$

De même,

$$\begin{aligned}\partial_\lambda^2(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda))-\mathrm{Id}) = (D^2f)(A(\lambda)+\widehat{F}(0,\lambda))\cdot(\partial_\lambda A+\partial_\lambda\widehat{F}(0,\lambda),\partial_\lambda A+\partial_\lambda\widehat{F}(0,\lambda)) \\ +(Df)(A(\lambda)+\widehat{F}(0,\lambda))\cdot(\partial_\lambda^2 A(\lambda)+\partial_\lambda^2 F(0,\lambda)).\end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite se majore comme précédemment par

$$M^2c_7\rho^{-3}\varepsilon_0+c_7\rho^{-2}(2M\varepsilon_0+\varepsilon_0^2) \leq cc_7\rho^{-3}M^2\varepsilon_0;$$

le second terme quant à lui est majoré par

$$c_7\rho^{-2}M\varepsilon_0.$$

Au total,

$$|\partial_\lambda^2(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda))-\mathrm{Id})| \leq cc_7\rho^{-3}M^2\varepsilon_0.$$

Par conséquent, la formule (47) montre que, pour $j=0,1,2$,

$$\begin{aligned}|\partial_\lambda^j A'(\lambda)-\partial_\lambda^j A(\lambda)| &\leq \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\partial_\lambda^l(\mathrm{Ad}(\widetilde{B}(\lambda))-\mathrm{Id})\partial_\lambda^{j-l}(A+\widehat{F}(0,\lambda))+\partial_\lambda^j\widehat{F}(0,\lambda) \\ &\leq cM^2\varepsilon_0\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\rho^{-(j+1)}\cdot(M+\varepsilon_0)+\varepsilon_0 \\ &\leq cc_7M^3\rho^{-3}\varepsilon_0.\end{aligned}$$

En choisissant $c_8=cc_7>0$ convenablement et en posant

$$c_{2,s}=c_s\cdot c_{1,s}^4 \geq c_s(c_{1,s}^4+cc_7)$$

avec pour tout s', $c_{2,s'}\geq c_{s'}$, ceci achève la preuve du lemme 3.4.1. □

3.5. La récurrence

Posons, pour $\nu>2d+2$,

$$s_0 \geq 3\left(d+a_2+\frac{13}{2}\nu+3\right), \tag{49}$$

$$\beta_0=2(a_2+1)+7\nu,\ (\beta_0\geq 2), \tag{50}$$

$$c_{3,s_0} = 2c_{2,s_0} + c_{2,s_0}.$$

Observons que $c_{3,s} \geq c_{2,s} \geq c_{1,s} > 1$, que chacune de ces expressions est croissante en s et que $a_2 \geq a_1$.

Posons encore

$$\eta_0 = \left(3c_8 c_{3,s_0} (2M_1)^{a_2} \mu_1^{-1}\right)^{-\beta_0}, \tag{51}$$

et, pour $\eta > 0$,

$$N(\eta) = \eta^{-1/\beta_0}; \tag{52}$$

on a alors pour $0 < \eta < \eta_0$, $N(\eta) > 1$.

Posons pour $n = 0$, $N_0(\eta) = 0$ et définissons $N_n(\eta)$,

$$N_n = N^{(3/2)^{n-1}}. \tag{53}$$

Pour $n \geq 0$ nous définirons alors

$$K_n = N_n^{\nu},$$

$$\rho = N^{-\nu} \tag{54}$$

($\nu > 0$, *cf.* (1)). Remarquons que $N_n = N_{n-1}^{3/2}$. En outre, comme $\beta_0 \geq a_1 + 1$, (51) montre que, pour tout $0 < \eta \leq \eta_0$,

$$c_{1,0}(2M_1 N_n)^{a_1} N_n(\eta)^{-\beta_0} \leq 1. \tag{55}$$

Dans la suite ω est un élément de $CD(\gamma, \sigma)$, t un tore maximal de g, $A(\lambda) \in C^\infty(\Lambda, t)$, $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda, g)$; $\rho\ \mu, M > 0$ satisfont pour tout $\alpha \in \Delta$,

$$|\alpha \circ A| \geq \rho > 0, \quad |\partial_\lambda(\alpha \circ A)| \geq \mu > 0,$$

$$M = \max_{j=0,1,2}(2, |\partial_\lambda^j A|),$$

$$\varepsilon_s = \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F|_s,$$

$$|\Lambda| \leq \frac{c_6 \rho}{8M}$$

$$M_1 = M.$$

Ceci étant on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition 3.5.1. — *Soient $0 < \eta \leq \eta_0$. Si F vérifie*

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F|_{s_0} \leq \eta,$$

alors pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble Π_n de sous intervalles de Λ, disjoints deux à deux (Π_n n'est cependant pas une partition de Λ) pour lequel les propositions suivantes sont vraies :

(i) *Si* $\Lambda_{n,j} \in \Pi_n$*, il existe* $A_n \in C^\infty(\Lambda_{n,j}, t)$*,* $F_n \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda_{n,j}, g)$ *et* $Y_n \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times \Lambda_{n,j}, g)$ *tels que*

$$A_n(\lambda) + F_n(\cdot,\lambda) = L_{\omega/2\pi}(e^{Y_n(\cdot,\lambda)}) \cdot e^{-Y_n(\cdot,\lambda)} + \mathrm{Ad}(e^{Y_n(\cdot,\lambda)}) \cdot (A_{n+1}(\lambda) + F_{n+1}(\cdot,\lambda)).$$

(ii) *Pour tout* $\lambda \in \Lambda_{n,j}$*, et tout* $p \leq n$*,*

$$\alpha \circ A_n \in DS^\tau(N_p, K_p) \cap \mathbf{R}\backslash[-\rho_n, \rho_n] \quad et \quad |\Lambda_{n,j}| \leq \frac{c_6 \rho}{8M} \leq \frac{c_6 \rho_n}{2M_n},$$

où $\rho_n = \inf(1, |\alpha \circ A_n|)$

(iii$_n$) *Si on note* $\varepsilon_{n,s} = \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F_n|_s$*,* $\mu_n = \min(1, \inf_{\alpha \in \Delta} |\partial_\lambda(\alpha \circ A_n)|)$ $M_n = \max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j A_n|$*, alors*

$$\varepsilon_{n,0} \leq N_n^{-\beta_0}, \tag{56}$$

$$\varepsilon_{n,s_0} \leq N_n^{2(d+2+2\nu)}, \tag{57}$$

$$M_n \leq (2M_1)\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right). \tag{58}$$

$$\mu_n \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)\mu, \quad \rho_n \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right)\rho. \tag{59}$$

(iv) *Tout* $\Lambda_{n+1,j} \in \Pi_{n+1}$ *est dans un* $\Lambda_{n,i} \in \Pi_n$ *et*

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{\Lambda_n \in \Pi_n} \Lambda_n - \bigcup_{\Lambda_{n+1} \in \Pi_{n+1}} \Lambda_{n+1}\right) \leq 4c_\tau (2\widetilde{q})^{n+1} N_{n+1}^{-(\nu-3d)} \cdot \frac{1}{\mu}. \tag{60}$$

(v) *Si* $l_n = \mathrm{card}\ \Pi_n$*, alors*

$$l_n \leq (2\widetilde{q})^n N_{n+1}^{2d}.$$

(vi)

$$|Y_n|_s \leq c_{1,s}(N_n, M_n)^{a_1} \varepsilon_{n,s}$$

La démonstration du résultat précédent se fait par recurrence.

Définition de Π_n. — Posons $A_0 = A_1$, $F_0 = F_1$ et $\Lambda_0 = \Lambda = [a,b]$, et supposons la proposition vraie à l'ordre $n \geq 0$. Puisque (55) est vérifiée, le lemme 3.4.1 nous permet de construire A_{n+1}, F_{n+1} $(n \geq 1)$ vérifiant pour $\lambda \in \cup_{\Lambda_{n,j} \in \Pi_n} \Lambda_{n,j}$,

$$A_{n+1}(\lambda) = A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot).$$

Supposant définis à l'ordre n les intervalles $\Lambda_{n,j} \in \Pi_n$, introduisons

$$J_{n+1,j} = \Lambda_{n,j} \cap \bigcup_{\alpha \in \Delta} \bigcup_{0<|k|\leq N_{n+1}} \left((\alpha \circ A_{n+1})^{-1}\left(\left[(k,\omega) - \frac{K_{n+1}^{-1}}{|k|^\tau}, (k,\omega) + \frac{K_{n+1}^{-1}}{|k|^\tau}\right]\right)\right).$$

Appelons $\Pi_{n+1,j}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Lambda_{n,j} - J_{n+1,j}$. On pose alors

$$\Pi_{n+1} = \cup_j \Pi_{n+1,j}.$$

C'est un ensemble d'intervalles disjoints de Λ. Par définition pour tout $\alpha \in \Delta$ on a $\alpha \circ A_{n+1}(\lambda) \in DS^{\tau}(N_{n+1}, K_{n+1})$ et $|\alpha \circ A_{n+1}(\lambda)| > \rho_{n+1}$. En outre $|\Lambda_{n+1,j}| \leq |\Lambda| \leq c_6\rho/8M \leq c_6\rho_{n+1}/2M_{n+1}$.

Ceci démontre que (ii) est vrai à l'ordre $n+1$.

Appelons l_n le nombre d'éléments de Π_n. Vu que, pour $\alpha \in \Delta$, $\alpha \circ A_n$ est un difféomorphisme (donc strictement monotone), le nombre de composantes connexes de

$$\bigcup_{0<|k|\leq N_{n+1}} \left((\alpha \circ A_n)^{-1} \left(\left[(k,\omega) - \frac{K_{n+1}^{-1}}{|k|^{\tau}}, (k,\omega) + \frac{K_{n+1}^{-1}}{|k|^{\tau}} \right] \right) \cap \Lambda_{n,j} \right),$$

est plus petit que $2 + \widetilde{q} N_{n+1}^d \leq 2\widetilde{q} N_{n+1}^d$. Ainsi on a

$$l_{n+1} \leq 2\widetilde{q} \cdot l_n \cdot N_{n+1}^d,$$

soit

$$l_{n+1} \leq (2\widetilde{q})^n N_{n+1}^d \cdots N_1^d \leq (2\widetilde{q})^{n+1} N_{n+2}^{2d}.$$

Ceci démontre donc le (v) à l'ordre $n+1$.

Puisque, pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha \circ A_n$ est un difféomorphisme (donc monotone strictement) sur chaque $\Lambda_{n,j} \in \Pi_n$, vérifiant

$$|\partial_{\lambda}(\alpha \circ A_n(\lambda))| \geq \mu_n > 0,$$

et comme la mesure de chaque $J_{n,j}$ est plus petite que

$$\sum_{0<|k|\leq N_{n+1}} \frac{2K_{n+1}^{-1}}{|k|^{\tau}} \leq 2c_{\tau} K_{n+1}^{-1},$$

où $c_{\tau} = \sum_{|k|>0} |k|^{-\tau} < \infty$ ($\tau > d$), on déduit que ($\nu > 2d+2$)

$$\begin{aligned}
\text{mes}\left(\bigcup_{\Lambda_n \in \Pi_n} \Lambda_n - \bigcup_{\Lambda_{n+1} \in \Pi_{n+1}} \Lambda_{n+1} \right) &\leq \#\Pi_n \cdot 2c_{\tau} N_{n+1}^{-\nu} \cdot \frac{1}{\mu} \\
&\leq 4c_{\tau}(2\widetilde{q})^{n+1} \cdot N_{n+1}^{-(\nu-3d)} \cdot \frac{1}{\mu}
\end{aligned}$$

Ceci prouve (60).

Estimées pour $\varepsilon_{n,0}$, ε_{n,s_0}, M_n. — Choisissons donc $\Lambda_{n+1} \in \Pi_{n+1}$. Observons que (56) montre que

$$\varepsilon_{n,0} \leq N_n^{-\beta_0},$$

et par conséquent, en tenant compte de (55), $c_{1,0}(M_n N_n)^{a_1}\varepsilon_{n,0} \leq 1$.

Le lemme 3.4.1 s'applique et montre qu'il existe $A_{n+1} \in C^\infty(\Lambda_{n+1}, t)$, $F_{n+1} \in C^\infty(\Lambda_{n+1} \times \mathbf{T}^d, g)$, et $Y_n \in C^\infty(\Lambda_{n+1} \times \mathbf{T}^d, g)$ tels que

$$A_n + F_n = L_{\omega/2\pi} e^{Y_n} \cdot e^{-Y_n} + \mathrm{Ad}(e^{Y_n}) \cdot (A_{n+1} + F_{n+1}),$$

satisfaisant

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F_{n+1}| \leq \varepsilon_{n+1,s}, \quad |Y_n|_s \leq c_{1,s}(M_n N_n)^{a_1}\varepsilon_{n,s}$$

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq \rho_n^{-2} M_n^{a_2} \left[c_{2,s} N_n^{a_2}(\varepsilon_{n,s}\varepsilon_{0,n} + \varepsilon_{0,n}^2) + c_{2,s'}\varepsilon_{n,s'} N_n^{-(s'-s-d-1)}\right],$$

$$M_{n+1} \leq M_n + c_8 \rho_n^{-3} M_n^3 \varepsilon_{n,0}.$$

ce que nous récrivons en tenant compte de la définition de ρ_n,

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq M_n^{a_2}[c_{2,s} N_n^{a_2+2\nu}(\varepsilon_{n,s}\varepsilon_{0,n} + \varepsilon_{0,n}^2) + c_{2,s'}\varepsilon_{n,s'} N_n^{-(s'-s-d-1-2\nu)}], \tag{61}$$

$$M_{n+1} \leq M_n + c_8 N_n^{3\nu} M_n^3 \varepsilon_{n,0}. \tag{62}$$

Si nous faisons successivement $s = s' = s_0$ et $s = 0, s' = s_0$, il vient, en majorant grossièrement les inégalités (61), (62) et en posant $c_{3,s_0} = 2c_{2,0} + c_{2,s_0}$,

$$\varepsilon_{n+1,s_0} \leq c_{3,s_0} M_n^{a_2}\left[N_n^{a_2+2\nu}(\varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s_0} + \varepsilon_{n,0}^2) + N_n^{d+1+2\nu}\varepsilon_{n,s_0}\right], \tag{63}$$

$$\varepsilon_{n+1,0} \leq c_{3,s_0} M_n^{a_2}\left[N_n^{a_2+3\nu}\varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{-(s_0-d-1-2\nu)}\varepsilon_{n,s_0}\right], \tag{64}$$

$$M_{n+1} \leq M_n + c_8 N_n^{3\nu} M_n^3 \varepsilon_{n,0}, \tag{65}$$

$$\mu_{n+1} \geq \mu_n - c_8 N_n^{3\nu} M_n^3 \varepsilon_{n,0}, \quad \rho_{n+1} \geq \rho_n - c_8 N_n^{3\nu} M_n^3 \varepsilon_{n,0}. \tag{66}$$

On a alors, le lemme suivant qui établit que $(\mathrm{iii})_{n+1}$ est vrai.

Lemme 3.5.2. — *Soit $\varepsilon_{1,s_0} \leq \eta_0$; si les inégalités (56)-(59) sont vraies pour $1 \leq n \leq p$, pour tout $1 \leq n \leq p+1$, la propriété (P_n) suivante est vraie :*

$$\varepsilon_{n,s_0} \leq N_n^{2(d+2+2\nu)},$$

$$\varepsilon_{n,0} \leq N_n^{-\beta_0},$$

$$M_n \leq (2M_1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right),$$

$$\mu_n \geq \mu_1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right).$$

Démonstration. — Prouvons le lemme précédent par recurrence.

La propriété est vraie pour $n=1$ puisqu'on a $\eta = N_1(\eta)^{-\beta_0}$.

Les formules (63), (64),(65), (66) montrent que, pour voir que P_n implique P_{n+1} pour tout $n \geq 1$, il suffit de vérifier

$$c_{3,s_0}(2M_1)^{a_2}\left(N_n^{a_2+2\nu}(N_n^{-\beta_0}N_n^{2(d+2+2\nu)}+N_n^{-2\beta_0})+N_n^{d+1}N_n^{2(d+2+2\nu)}\right) \leq N_{n+1}^{2(d+2+2\nu)},$$

avec $N_{n+1}^{2(d+2+2\nu)} = N_n^{3(d+2+2\nu)}$ et

$$c_{3,s_0}(2M_1)^{a_2}\left(N_n^{a_2+2\nu}N_n^{-2\beta_0}+N_n^{-(s_0-d-1-2\nu)}N_n^{2(d+2+2\nu)}\right) \leq N_{n+1}^{-\beta_0} = N_n^{-(3/2)\beta_0},$$

$$2M_1\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+c_8N_n^{3\nu}\left(2M_1(1-\frac{1}{2^n})\right)^3N_n^{-\beta_0} \leq 2M_1\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right),$$

$$\mu_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right)-c_8N_n^{3\nu}(2M_1)\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^3N_n^{-\beta_0} \geq \mu_1\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Pour vérifier les deux dernières inégalités, il suffit de voir que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$c_8(2M_1)^3N_n^{3\nu-\beta_0} \leq \frac{2M_1}{2^{n+1}},$$

et

$$c_8(2M_1)^3N_n^{3\nu-\beta_0} \leq \frac{\mu_1}{2^{n+1}},$$

c'est-à-dire

$$c_8N_n^{3\nu-\beta_0}2^{n+1}(2M_1)^2 \leq 1,$$

et

$$c_8N_n^{3\nu-\beta_0}2^{n+1}(2M_1)^3\mu_1^{-1} \leq 1.$$

Or comme $(3/2)^n \geq n$ pour $n \geq 1$ et puisque $\beta_0 \geq 2a_2 \geq 6$ on a

$$N_n^{3\nu-\beta_0} \leq N^{-6n} \leq N^{-(n+1)},$$

par conséquent, pour tout $n \geq 1$,

$$N_n^{3\nu-\beta_0}2^{n+1} \leq (2/N)^{-(n+1)} \leq 2/N.$$

Le choix (52) de $N_1(\rho) = N(\rho)$ que l'on a fait montre que les inégalités que nous voulions démontrer sont satisfaites puisque

$$N \geq \max(2c_8M_1^3\mu_1^{-1}, 2c_8M_1^2).$$

Les deux premières inégalités se récrivent,

$$c_{3,s_0}(2M_1)^{a_2}\left[N_n^{a_2+2\nu-\beta_0-(d+2+\nu)}+N_n^{a_2+2\nu-2\beta_0-3(d+2+2\nu)}+N_n^{-1}\right] \leq 1,$$

$$c_{3,s_0}(2M_1)^{a_2}\left[N_n^{a_2+2\nu-(1/2)\beta_0}+N_n^{-s_0+(d+1+2\nu)+2(d+2+2\nu)+(3/2)\beta_0}\right] \leq 1.$$

Or les choix que nous avons faits pour s_0, β_0 (*cf.* (49), (50)) montrent que tous les exposants intervenant dans les expressions précédentes sont plus petits ou égaux à -1. Il suffit donc de vérifier, pour tout $n \geq 1$,

$$3c_{3,s_0}(2M_1)^{a_2} N_n^{-1} \leq 1,$$

ce qui est vrai vu le choix que nous avons fait pour $\eta_0 > \eta = N^{-\beta_0}$ (*cf.* (51)).

Ceci achève la récurrence. La proposition 3.5.1 est démontrée. □

3.5.a. Estimées plus fines sur $\varepsilon_{n,s}$ et convergence

Quelques lemmes. — Nous énonçons maintenant deux lemmes élémentaires qui nous évitent les répétitions.

Lemme 3.5.3. — *Soient $\alpha > 0$, $\gamma \geq 1$ tels que $\alpha/2 + 1/2 < 3\gamma/2 - 2/3$ et $\beta > 0$ tel que*

$$2(\alpha+1) < \beta < \frac{2}{3}(\gamma - 1).$$

Si u_n est une suite vérifiant

$$u_{n+1} \leq C(N_n^\alpha u_n^2 + N_n^{-\gamma});$$

alors, si u_n tend vers 0,

$$u_n = O(N_n^{-\beta}).$$

Démonstration

(i) Il est facile de vérifier que, pour n suffisamment grand, $n \geq n_0$,

$$C(N_n^\alpha N_n^{-2\beta} + N_n^{-\gamma}) \leq N_n^{-(3/2)\beta} = N_{n+1}^{-\beta}, \tag{67}$$

du fait de

$$C(N_n^{\alpha-(1/2)\beta} + N_n^{(3/2)\beta-\gamma}) \leq 1.$$

En effet remarquons que $\alpha - (1/2)\beta \leq -1$, et $(3/2)\beta - \gamma \leq -1$; ainsi, si n_0 est suffisamment grand, pour $n \geq n_0$,

$$CN_n^{\alpha-(1/2)\beta} \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad CN_n^{(3/2)\beta-\gamma} \leq \frac{1}{2};$$

par conséquent, l'inégalité (67) est toujours satisfaite.

Ceci montre que, pour $n \geq n_0$, si $u_n \leq N_n^{-\beta}$, alors $u_{n+1} \leq N_{n+1}^{-\beta}$.

(ii) Remarquons que $\beta < (2/3)\gamma$, si bien que $\gamma/\beta > 3/2$. Fixons alors $2 > \theta$ tel que $\gamma/\beta > \theta > 3/2$ et supposons n_0 assez grand. L'alternative est maintenant la suivante :

(a) soit pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n \geq (N_n^{-\gamma})^{1/\theta},$$

auquel cas $(0 < u_n < 1)$

$$u_{n+1} \leq C(N_n^\alpha u_n^2 + u_n^\theta) \leq 2CN_n^\alpha u_n^\theta;$$

de façon classique on voit alors que, pour tout $\beta' > (\alpha+1)(\theta-(3/2))^{-1}$, et $n \geq n_0(\beta')$,

$$u_n \leq N_n^{-\beta'},$$

et $u_n = O(N_n^{-\infty})$ c'est-à-dire décroît plus vite que tout $N_n^{-\beta}$ pour tout $\beta > 0$.

(b) soit il existe une sous suite n_k pour laquelle,

$$u_{n_k} < (N_{n_k}^{-\gamma})^{1/\theta} \quad \text{et} \quad u_{n_k} \leq N_{n_k}^{-\gamma/\theta}.$$

Or $\gamma/\theta > \beta$, donc

$$u_{n_k} < N_{n_k}^{-\beta},$$

à partir d'un certain rang, n_{k_0}. L'application du (i) montre donc que, pour $n \geq n_k$, $u_n \leq N_n^{-\beta}$.

Ceci achève la preuve du lemme 3.5.3. □

Lemme 3.5.4. — *Soit u_n une suite telle que*

$$u_{n+1} \leq C(N_n^{-\gamma_1} u_n + N_n^{-\gamma_2}),$$

avec $\gamma_2 \geq 0$, alors,

(i) *si $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ alors, pour tout $0 < b < (2/3)\min(\gamma_1,\gamma_2)$,*

$$u_n = O(N_n^{-b}).$$

(ii) *sinon, si $\gamma_1 = 0$,*

$$u_n = O(C^n). \tag{68}$$

(iii) *si $\gamma_1 < 0$ alors, pour tout $b > 2|\gamma_1|$,*

$$u_n = O(N_n^b). \tag{69}$$

Démonstration. — Supposons $C > 1$ pour simplifier. On a

$$u_n \leq C^{n-1}(N_{n-1}\cdots N_1)^{-\gamma_1}u_1 + C^{n-2}(N_{n-1}\cdots N_2)^{-\gamma_1} a N_1^{-\gamma_2} + \cdots + aN_{n-1}^{-\gamma_2},$$

or,

$$N_{n-1}\cdots N_j = N_1^{\sum_{k=j}^{n-1}(3/2)^{k-1}} \leq N_1^{2((3/2)^{n-1}-(3/2)^{j-1})} = N_n^2 N_j^{-2},$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_n &\leq C^n N_n^{-2\gamma_1}(N_1^{2\gamma_1} + N_2^{2\gamma_1}N_1^{-\gamma_2} + \cdots + N_{n-1}^{2\gamma_1}N_{n-2}^{-\gamma_2}) + N_{n-1}^{-\gamma_2} \\ &\leq cC^n N_n^{-2\gamma_1}(N_1^{2\gamma_1} + N_2^{2\gamma_1} + \cdots + N_{n-1}^{2\gamma_1}) + N_{n-1}^{-\gamma_2}. \end{aligned}$$

Dans le cas (i) ceci donne la majoration

$$\begin{aligned} u_n &\leq cC^n n N_n^{-2\gamma_1} N_{n-1}^{2\gamma_1} + N_{n-1}^{-\gamma_2} \\ &\leq cnC^n N_n^{-(2/3)\gamma_1} + N_n^{-(2/3)\gamma_2}, \end{aligned}$$

et donc la conclusion du lemme dans ce cas. Les autres cas se traitent de la même façon. □

Proposition 3.5.5. — *Avec les notations précédentes, $\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\infty})$.*

Démonstration. — Les deux résultats précédents nous permettent de prouver les lemmes suivants.

Lemme 3.5.6. — *Pour tout $s \geq 0$,*

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{2(d+1+2\nu)+1}).$$

Démonstration. — En effet, on a d'après (61) en faisant $s' = s$,

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq c_{2,s}(2M_1)^{a_2} \left((N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0} + N_n^{d+1+2\nu})\varepsilon_{n,s} + N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}^2\right).$$

D'après la proposition 3.5.1,

$$\varepsilon_{n,0} = O(N_n^{-\beta_0})$$

et, puisque $\beta_0 \geq a_2 + 2\nu$,

$$N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0} \leq c \quad \text{et} \quad N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}^2 \leq c,$$

où c est une constante positive. Il suffit d'appliquer le (iii) eq. (69) du lemme 3.5.4 avec $C = 2c.c_{2,s}(2M_1)^{a_2}$, $\gamma_1 = d + 1 + 2\nu$ et $\gamma_2 = 0$ pour obtenir le résultat ($N \geq 1$). □

Ceci permet de montrer :

Lemme 3.5.7. — *On a $\varepsilon_{n,0} = O(N_n^{-\infty})$.*

Démonstration. — On a pour $s \geq 0$ et pour une constante C_s,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1,0} &\leq c_{3,s}(2M_1)^{a_2}(N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}^2 + \varepsilon_{n,s}N_n^{-s+d+1+2\nu}) \\ &\leq c_{3,s}(2M_1)^{a_2}(N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}^2 + C_s N_n^{-s+3(d+1+2\nu)+1}). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\beta > 2(a_2+1+2\nu)$ est fixé, choisissons $s \geq 0$ tel que $s > (3/2)\beta+3(d+1+2\nu)+2$ et appliquons le lemme 3.5.3 (remarquer que l'inégalité (56) montre qu'à partir d'un certain rang $\varepsilon_{n,0}$ est suffisamment petit pour que l'on soit dans les hypothèses du lemme) ; il vient que

$$\varepsilon_{n,0} = O(N_n^{-\beta}),$$

puisque $2(a_2 + 1) \leq \beta \leq \frac{2}{3}(s - (3(d + 1 + 2\nu) + 2))$. □

Enfin,

Lemme 3.5.8. — *Pour tout $s \geq 0$ et tout $\beta > 0$,*

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\beta}).$$

Démonstration. — Appliquant (61) et tenant compte des lemmes 3.5.6 et 3.5.7, il vient, avec $\beta > 0$ (grand),

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1,s} &\leq (c_{2,s} + c_{2,s'})(2M_1)^{a_2}\left(N_n^{a_2+2\nu}(\varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s} + \varepsilon_{n,0}^2) + \varepsilon_{n,s'}N_n^{-(s'-s-d-1-2\nu)}\right) \\ &\leq (c_{2,s} + c_{2,s'})(2M_1)^{a_2}\left(N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s} + N_n^{-s'+s+3(d+1+2\nu)+1} + \varepsilon_{n,0}^2 N_n^{a_2+2\nu}\right). \end{aligned}$$

Le lemme précédent montre que l'on a, par exemple,

$$\max(N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}^2, N_n^{a_2+2\nu}\varepsilon_{n,0}) = O(N_n^{-3\beta/2});$$

si l'on prend s' tel que $s'-s-3(d+1+2\nu)+1 = 3\beta/2$,

$$N_n^{-(s'-s-3(d+1+2\nu)-1)} = O(N_n^{-3\beta/2}),$$

et il vient, en appliquant le lemme 3.5.4, que

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\beta}),$$

ce qui conclut le lemme. □

La démonstration de la proposition 3.5.5 est terminée. □

3.6. Estimées sur la mesure de l'ensemble des mauvais paramètres

D'après le iv) de la proposition 3.5.1, on peut définir,

$$\Lambda_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{\Lambda_{n,j}\in\Pi_n} \Lambda_{n,j}.$$

On a alors,

Lemme 3.6.1. — *Si*

$$\max_{j=0,1,2} |\partial_\lambda^j F(\cdot,\lambda)|_{s_0} \leq \min(\eta_0, \left(\frac{1}{4\widetilde{q}}\right)^{3\beta_0/2(\nu-3d)}),$$

alors pour tout $\lambda\in\Lambda_\infty$, $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ est réductible et on a,

$$\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty) \leq (100\widetilde{q}M(b-a)\frac{c_\tau}{c_6})\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0}.$$

Démonstration. — On a sous le hypothèses de la proposition 3.5.1,

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty) &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{mes}\Big(\bigcup_{\Lambda_{n,j}\in\Pi_n}\Lambda_{n,j} - \bigcup_{\Lambda_{n+1,j}\in\Pi_{n+1}}\Lambda_{n+1,j}\Big)\\ &\leq 2c_\tau\sum_{n=0}^{\infty}(2\widetilde{q})^{n+1}N_{n+1}(\eta)^{-(\nu-3d)}\cdot\frac{1}{\mu},\end{aligned}$$

et comme $N_n^{-1}\leq N_1^{-2n/3}$ (car $(3/2)^{n-1}\geq(2/3)n$ pour $n\geq 1$) on obtient, pourvu que,

$$2\widetilde{q}\leq\frac{1}{2}N^{2(\nu-3d)/3},$$

l'inégalité,

$$\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty)\leq 2c_\tau\cdot 2\widetilde{q}\cdot N_1^{-(\nu-3d)}.$$

Par conséquent, si

$$\eta\leq\left(\frac{1}{4\widetilde{q}}\right)^{3\beta_0/2(\nu-3d)},$$

on a

$$\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty)\leq 8c_\tau\widetilde{q}\eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0}.$$

Supposons à présent que l'on travaille sous les hypothèses du théorème 3.1.1 et ramenons nous à celles de la proposition 3.5.1. Pour cela remarquons que quitte à enlever un ensemble de $\lambda\in[a,b]$ de mesure inférieure à $(2\rho\widetilde{q}/\mu)$ on a bien

$$|(\alpha\circ A)(\lambda)|\geq\rho.$$

Découpons à présent l'ensemble qui reste en $[8M(b-a)/c_6\rho]$ intervalles d'égale longueur inférieure à $(c_6\rho/8M)$ et appliquons le résultat que nous avons obtenu précédemment. Il vient,

$$\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty)\leq\frac{2\rho\widetilde{q}}{\mu}+\left[\frac{8M(b-a)}{c_6\rho}\right]\cdot 8c_\tau\widetilde{q}\eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0},$$

et comme on a choisi $\rho=N^{-\nu}=\eta^{\nu/\beta_0}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}([a,b]-\Lambda_\infty)&\leq\frac{50\widetilde{q}M(b-a)}{c_6}\cdot c_\tau\cdot\frac{1}{\mu}2\eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0}\\&\leq\left(100\widetilde{q}M(b-a)\frac{c_\tau}{c_6}\right)\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\eta^{2(\nu-3d)/3\beta_0}.\end{aligned}$$

Par ailleurs pour $\lambda\in\lambda_\infty$ les produits, $\cdots e^{Y_n(\lambda)}\cdots e^{Y_1(\lambda)}$ convergent en topologie C^∞ vers un $G_\infty\in C^\infty(\mathbf{T}^d,G)$, $F_n\to 0$ et $A_n\to A_\infty\in g$ vue l'estimée obtenue dans la proposition 3.5.5 pour $\varepsilon_{n,s}$. Ceci termine la preuve du lemme 3.6.1. □

La première partie du théorème 3.1.1 est démontrée.

3.6.a. Généricité. — Considérons la situation suivante où Λ est un intervalle, et où l'on suppose donné, pour tout $n\geq 1$, un ensemble Π_n d'intervalles $\Lambda_{n,j}$ de Λ, dont les intérieurs sont disjoints deux à deux et sur lesquels sont définies des fonctions f_n C^1 par morceaux (c'est-à-dire dérivables sur chaque $\Lambda_{n,j}\in\Pi_n$). Faisons également l'hypothèse que, pour tout $\Lambda_{n,j}\in\Pi_n$ et tout $1\leq n'\leq n$, il existe $\Lambda_{n',j'}\in\Pi_{n'}$ qui contienne $\Lambda_{n,j}$. Nous appellerons l_n le cardinal de Π_n, E_n l'ensemble

$$E_n=\bigcup_{\Lambda_{n,j}\in\Pi_n}\Lambda_{n,j},$$

et K l'intersection des E_n. Enfin nommons (H) l'hypothèse suivante :

Hypothèse (H)

(i) *On a* $\sum_{n\geq1}|f_{n+1}-f_n|_{C^1}^{1/2}\cdot l_n<\infty$.

(ii) *Il existe* $\mu>0$ *tel que, sur tout* $\Lambda_{n,j}$, $f_n'|\Lambda_{n,j}\geq\mu>0$ *(où* f_n' *est la dérivée de* f_n*).*

Appelons f la limite des f_n. On peut alors énoncer :

Proposition 3.6.2. — *Si l'hypothèse (H) ci-dessus est satisfaite, alors pour tout ensemble* W *de mesure nulle,* $f^{-1}(W)\cap K$ *est également négligeable.*

Démonstration. — On pourrait en fait démontrer que f est Whitney et obtenir une minoration de la dérivée du prolongement mais nous procèderons directement.

(i) Nous posons $\varepsilon_n = |f_{n+1} - f_n|_{C^2}$.

Ordonnons partiellement les intervalles de Λ de la façon suivante : nous disons que $\Lambda \leq \Lambda'$ si l'extrémité droite de Λ est plus petite que l'extrémité gauche de Λ'. On notera $e^+(I)$ (resp. $e^-(I)$) l'extrémité droite (resp. gauche) de l'intervalle I. On numérote de façon que $\Lambda_{n,0} \leq \Lambda_{n,1} \leq \Lambda_{n,2} \dots$

Fixons $n_0 \geq 1$. On définit alors $\widetilde{\Pi}_n$ pour $n \geq n_0$ par récurrence de la manière qui suit. Posons $\widetilde{\Lambda}_{n,1} = \Lambda_{n,1}$, $\widetilde{\Pi}_{n_0} = \Pi_{n_0}$, et supposons construits les $\widetilde{\Pi}_k$, $n_0 \leq k \leq n-1$. Soit alors Π_n^0 l'ensemble des composantes connexes de

$$\Lambda_{n,j} \cap \left(\bigcup_{\widetilde{\Lambda}_{n-1,i} \in \widetilde{\Pi}_{n-1}} \widetilde{\Lambda}_{n-1,i} \right).$$

On a $\#\Pi_n^0 \leq \#\Pi_n$. Définissons alors $\widetilde{\Pi}_n$ de la façon suivante : supposons $\Lambda_{n,1}^0 \leq \dots \leq \Lambda_{n,l_n^0}^0$ et posons $\widetilde{\Lambda}_{n,1} = \Lambda_{n,1}^0$; faisant l'hypothèse que $\widetilde{\Lambda}_{n,p}$ est défini, nous définissons $\widetilde{\Lambda}_{n,p+1}$ comme étant le premier intervalle non vide supérieur à $\widetilde{\Lambda}_{n,p}$ parmi les $[e^+(\widetilde{\Lambda}_{n,p}) + \varepsilon_n^{1/2}, \infty) \cap \Lambda_{n,j}^0$.

Remarquons, en notant $\lambda_n = \#\Pi_n$, $\widetilde{E}_n = \cup \widetilde{\Lambda}_{n,j}$ (resp. E_n^0), que

$$m(E_n^0 - \widetilde{E}_n) \leq \varepsilon_n^{1/2} \cdot \#\Pi_n^0 \leq \varepsilon_n^{1/2} l_n.$$

Calculons

$$E_n = E_n \cap E_{n-1} = (E_n \cap \widetilde{E}_{n-1}) \cup (E_n \cap (E_{n-1} - \widetilde{E}_{n-1})),$$

Or, $E_n^0 = E_n \cap \widetilde{E}_n$, et donc

$$m(E_n - E_n^0) \leq m(E_{n-1} - \widetilde{E}_{n-1}).$$

En conséquence,

$$m(E_n - \widetilde{E}_n) \leq m(E_{n-1} - \widetilde{E}_{n-1}) + \varepsilon_n^{1/2} l_n,$$

soit

$$m(K - \widetilde{K}_{n_0}) \leq \sum_{n \geq n_0} \varepsilon_n^{1/2} l_n.$$

(ii) Construisons alors des $\widetilde{f}_n | \widetilde{E}_n$ de classe C^1 et qui prolongent les $f_n | E_n \cap \widetilde{E}_n$ et vérifient

$$|\widetilde{f}_{n+1} - \widetilde{f}_n|_{C^1} \leq c\varepsilon_n,$$

où c est une constante ne dépendant pas de n. À cet effet constatons

Lemme 3.6.3. — *Soient a_0, a_1 deux réels et $\delta > 0$. Il existe une fonction η définie sur $[0, \delta]$ telle que*

$$\eta(0) = a_0, \ \eta'(0) = a_1,$$
$$\eta(\delta) = \eta'(\delta) = 0.$$

et vérifiant

$$|\eta|_1 \leq c(|a_0| + |a_1|)\delta^{-1}.$$

Démonstration. — En effet il existe θ_1, θ_2 deux fonctions C^1 sur $[0,1]$ telles que $\theta_i(1) = \theta_i'(1) = 0$, $i = 1,2$, et $\theta_1(0)\theta_2'(0) - \theta_1'(0)\theta_2(0) = 1$. Il existe alors toujours b_0, b_1 tels que $\eta(0) = a_0$, $\eta'(0) = a_1$ où $\eta = b_0\theta_1 + b_1\theta_2$, avec $\max(|b_i|) \leq \max|a_i|$. La normalisation à $[0,\delta]$ donne la conclusion. □

Par construction les $\widetilde{\Lambda}_{n,j}$ sont distants les uns des autres d'au moins $\varepsilon_n^{1/2}$; par conséquent il suffit de prolonger $f|\widetilde{E}_n$ entre les intervalles ce qui est possible d'après le lemme précédent, en posant sur chacune des moitiés du trou,

$$\widetilde{f}_n = \widetilde{f}_{n-1} + \eta_n,$$

avec

$$\eta_n(0) = f_n(0) - f_{n-1}(0), \qquad \eta_n'(0) = f_n'(0) - f_{n-1}'(0).$$

Au total,

$$|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}_{n-1}|_{C^1} \leq c\varepsilon_n^{-(1/2)} \cdot \varepsilon_n.$$

(iii) Ainsi $\widetilde{f}_n$ converge C^1 vers un $\widetilde{f}$, $\widetilde{f}|\widetilde{K}_{n_0} = f|\widetilde{K}_{n_0}$. En outre, $\widetilde{f}'|E_n \geq (1/2)\mu > 0$. Donc,

$$m(\widetilde{f}^{-1}(W) \cap E_n) = 0,$$

si $m(W) = 0$. Ainsi $m(f^{-1}(W) \cap \widetilde{K}_{n_0}) = 0$, et donc, en faisant $n_0 \to \infty$, $m(f^{-1}(W) \cap K) = 0$. □

La dernière partie du théorème 1.1 découle de ce qui précède puisque l'hypothèse **(H)** est vérifiée pour $f_n(\lambda) = \alpha \circ A_n(\lambda)$ pour tout $\alpha \in \Delta$. □

CHAPITRE 4

THÉORÈMES DE FORMES NORMALES ET APPLICATIONS

Nous démontrons dans ce chapitre un théorème de formes normales pour les systèmes (produits) fibrés et nous l'appliquons à l'étude de la réductibilité de tels systèmes. Nous prouvons ainsi un résultat en mesure positive analogue à celui du chapitre 3. La démonstration du théorème de forme normale repose sur le théorème d'inversion locale de Hamilton pour de bonnes applications entre bons espaces de Fréchet. La démonstration que nous proposons du résultat en mesure positive, s'inspire fortement de la section 7 de **[16]** ainsi que de **[25]** où sont exposés les travaux de M. Herman.

4.1. Notations et énoncé du résultat

Dans ce qui suit G désigne un groupe de Lie réel connexe (mais non nécessairement compact) plongé dans un groupe de matrices, d'algèbre g. Nous notons comme d'habitude $\mathbf{T}^d$ le tore $\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d$. Dans toute la suite σ, h, H sont des réels positifs fixés tels que $\sigma > h > d$ et $\omega \in \mathbf{T}^d$ est également *fixé* et vérifie une condition diophantienne,

$$\forall\, l \in \mathbf{Z},\ \forall\, k \neq 0,\ |(k,\omega)+l| \geq \frac{H^{-1}}{|k|^h}.$$

Nous noterons, changeant ainsi de notations par rapport aux chapitres 2, 3 et 5, pour $\gamma > H$, $CD(\gamma,\sigma)$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{C}$ vérifiant pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$, $l \in \mathbf{Z}$,

$$\left|\frac{\alpha}{2\pi} - \sqrt{-1}(k,\omega) + l\right| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}; \tag{1}$$

remarquons qu'alors pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$, si on pose $\zeta = e^\alpha$,

$$2 \cdot |\zeta - e^{2\pi i (k,\omega)}| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma} \quad (i = \sqrt{-1}). \tag{2}$$

Rappelons également que si $u \in G$, on peut définir l'automorphisme $\mathrm{Ad}(u)$ de g défini comme étant l'application linéaire tangente en l'identité de G de $v \mapsto uvu^{-1}$.

Nous introduisons enfin l'ensemble $CD_g(\gamma,\sigma)$ (resp. $CD_G(\gamma,\sigma)$) des éléments $A \in g$ (resp. $u \in G$) dont toutes les valeurs propres de $\mathrm{ad}(A)$ (resp. $\mathrm{Ad}(u)$), sont dans $CD(\gamma,\sigma)$ (resp. vérifient comme ζ, l'inégalité (2) pour tout $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$). Nous noterons $\overline{q} = (\dim g)^2$ la dimension de $gl(g)$.

Dans la suite, si $u \in G$, l_u désignera un projecteur linéaire sur le sous espace $\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u)) \subset g$ et Γ_u un supplémentaire de l'image $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u)) \subset g$.

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 4.1.1. — *Soient $\gamma, \sigma > 0$ et $u_0 \in G$ un élément de $CD_G(\gamma,\sigma)$. Notons $\Gamma = \Gamma_{u_0}$ et $\mathcal{E} = \{B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g),\ l_{u_0}(B(0)) = 0\}$. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et un entier s_0 tels que, pour tout $u \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ vérifiant $|u - u_0|_{s_0} \leq \varepsilon_0$, il existe un unique couple $(B, C) \in \mathcal{E} \times \Gamma$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$,*

$$u(\theta) = e^C \cdot e^{B(\theta+\omega)} u_0 e^{-B(\theta)}. \tag{3}$$

En outre, on peut choisir $\varepsilon_0 = \mathrm{cste} \cdot \gamma^{-\nu}$ où $\nu > o$ et la constante ne dépendent pas de γ. On dira que (3) est une forme normale pour u.

4.2. Le cadre du théorème de Hamilton

Nous ferons usage dans ce qui suit du théorème d'inversion locale de Hamilton qui s'applique aux « bonnes » applications entre « bons » espaces de Fréchet, dont nous rappelons la définition et quelques propriétés ci-dessous. Nous renvoyons le lecteur à **[11]**, **[12]** pour un exposé plus complet incluant la preuve du théorème de Hamilton, ainsi qu'à **[2]** où sont illustées d'autres utilisations de ce dernier en systèmes dynamiques.

4.2.a. Bons espaces de Fréchet et bonnes applications

Espaces de Fréchet. — Un espace vectoriel topologique E est dit *localement convexe* si et seulement si sa topologie provient d'une famille de semi-normes $|\ |_i$ $(i \in \mathbf{N})$ (une semi-norme vérifie les mêmes propriétés qu'une norme à l'exception de « $|x| = 0$ entraîne $x = 0$ »), c'est-à-dire si la famille des $U_{i,j} = \{x \in E,\ |x|_i \leq j^{-1}\}$, $(i,j) \in \mathbf{N} \times (\mathbf{N} - \{0\})$, constitue une base de voisinage pour la topologie de E. L'espace E est de *Hausdorff* si et seulement si $x \in E$ est nul dès que tous les $|x|_i$ le sont. Un *espace de Fréchet* est alors un espace vectoriel topologique localement convexe de Hausdorff complet pour la distance $d(x,y) = \sum_{i \geq 0} 2^{-i} |x - y|_i$.

Exemple 4.2.1. — L'espace $C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^p)$ des fonctions lisses de $\mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}^p$ qui sont $\mathbf{Z}^d$-périodiques, muni des normes $|f|_i = \max_{x \in \mathbf{R}^d} \max_{|\alpha| \leq i} |\partial^\alpha f(x)|$, est un espace de Fréchet.

Différentiabilité Gateaux. — Soient E, F deux espaces vectoriels topologiques, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \mapsto F$ une application continue. On dit que f est *différentiable au sens Gâteaux* s'il existe une application

$$\begin{array}{rcl} Df : U \times E & \longrightarrow & F \\ (x,h) & \longmapsto & Df(x) \cdot h, \end{array}$$

continue en (x, h) et linéaire en h telle que, pour tout $(x, h) \in U \times E$, la limite suivante existe et vérifie

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + t \cdot h) - f(x)) = Df(x) \cdot h.$$

On peut alors définir par récurrence la différentiabilité C^k.

Bonnes applications. — Soient $(E, |\ |_i)$, $(F, |\ |_i)$ deux espaces de Fréchet (dont on note de la même façon les semi-normes respectives), $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$ une application. On dit que f est une *bonne* application (« tame » en anglais), si pour tout $x_0 \in U$ il existe un voisinage $V \subset U$ de x_0, un entier $r \geq 0$ et des consantes $c_i > 0$ tels que

$$\forall\, x \in V,\ \forall\, i \in \mathbf{N}, \quad |f(x)|_i \leq c_i(1 + |x|_{i+r}).$$

On dit que f est une bonne application de classe C^k si f ainsi que ses dérivées (au sens Gâteaux) sont de bonnes applications continues.

Bons espaces de Fréchet. — Soit $(E, |\ |_i)$ un bon espace de Fréchet échelonné (c'est-à-dire que, pour tout i, $|\ |_i \leq |\ |_{i+1}$). On dit que c'est un *bon espace de Fréchet* s'il existe une famille $(S(t))_{t \geq 1}$ d'applications linéaires continues de $E \to E$ un entier $r \geq 0$ ainsi que des constantes $c_{p,q} > 0$ tels que, pour tout $(k, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $k \leq n$,

$$\begin{array}{rcl} \forall\, x \in E,\ \forall\, t > 1,\ |S(t)x|_n & \leq & c_{n,k} t^{n-k+r} |x|_k \\ |(\mathrm{Id} - S(t)) \cdot x|_k & \leq & c_{k,n} t^{k-n+r} |x|_n. \end{array} \tag{4}$$

Les opérateurs $S(t)$ sont appelés opérateurs de lissage.

Exemple 4.2.2. — Dans $C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{R}^n)$ toute fonction f admet un développement en série de Fourier $f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)}$ $(i = \sqrt{-1})$. Posons

$$(T_N f)(x) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)}, \qquad (R_N f)(x) = \sum_{|k| > N} \widehat{f}(k) e^{2\pi i (k,x)};$$

les opérateurs $S(t)f = T_t f$ sont des opérateurs de lissage comme le montrent en partie les estimées de la proposition A.1.1 de l'annexe.

A partir des inégalités (4) on peut prouver les inégalités d'interpolation de Hadamard :

$$|x|_l \leq c(k, n) |x|_k^{1-\alpha} |x|_n^\alpha,$$

où α est défini par $l = (1 - \alpha)k + \alpha n$ $(n, k, l \geq 0)$.

4.2.b. Propriétés. — Mentionnons enfin la proposition suivante dont on trouvera la preuve dans **[12]**.

Proposition 4.2.3. — *Soient X une variété compacte de dimension finie, E, F deux espaces vectoriels réels de dimensions finies. Alors*

(i) *l'espace $C^\infty(X,E)$ muni des normes $|\ |_k$ est un bon espace de Fréchet*

(ii) *l'application de composition*

$$\begin{array}{rcl} C^\infty(X,E)\times C^\infty(E,F) & \longrightarrow & C^\infty(X,F) \\ (f,g) & \longmapsto & g\circ f, \end{array}$$

est une bonne application C^∞ ;

(iii) *si $g\in C^\infty(E,F)$ alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \beta_g : C^\infty(X,E) & \longrightarrow & C^\infty(X,F) \\ f & \longmapsto & g\circ f, \end{array}$$

est une bonne application C^∞, et sa différentielle (Gâteaux) en f est donnée par

$$\begin{array}{rcl} D\beta_g(f) : C^\infty(X,E) & \longrightarrow & C^\infty(X,F) \\ \Delta f & \longmapsto & D\beta_g(f)\cdot\Delta f, \end{array}$$

où $D\beta_g(f)\cdot\Delta f$ représente $x\mapsto D\beta_g(f(x))\cdot\Delta f(x)$;

(iv) *si $g\in C^\infty(E,F)$ alors*

$$\begin{array}{rcl} \beta_g : C^\infty(X,F) & \longrightarrow & C^\infty(X,E) \\ f & \longmapsto & f\circ g, \end{array}$$

est une bonne application C^∞ et sa différentielle en f est

$$\begin{array}{rcl} D\beta_g(f) : C^\infty(X,F) & \longrightarrow & C^\infty(X,E) \\ \Delta f & \longmapsto & (x\mapsto \Delta f(g(x))); \end{array}$$

(v) *si $f\in C^\infty(E,E)$ est inversible alors, si U est un voisinage suffisamment petit contenant f,*

$$\begin{array}{rcl} U & \longrightarrow & C^\infty(E,E) \\ g & \longmapsto & g^{-1}, \end{array}$$

est une bonne application C^∞, où g^{-1} représente l'application réciproque de g.

Pour les preuves des points (i)-(iv) on se reportera à **[12]** prop. 2.3.3, p. 147 et pour celle du point (i) on consultera **[12]** Th. 2.3.5, p. 148 ou **[12]** th. 1.3.6 p. 137.

4.3. Le théorème de Hamilton et ses généralisations

Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'inversion locale de Hamilton.

Théorème 4.3.1. — *Soient E, F deux bons espaces de Fréchet, U un ouvert de E, f une bonne application C^r ($2 \leq r \leq \infty$) de U dans F, x_0 un point de U et $y_0 = f(x_0)$. Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V_0 de x_0 dans U et une bonne application continue et linéaire en la seconde variable : $L : V_0 \times F \to E$ tels que si $x \in V_0$, $Df(x)$ soit inversible d'inverse $L(x)$. Alors x_0, y_0, possèdent des voisinages ouverts, V dans V_0 et W dans F respectivement entre lesquels f établit un bon difféomorphisme C^r (*i.e.* f est bijective de V sur W et $f^{-1} : W \to V$ est une bonne application C^r).*

Nous aurons besoin par la suite d'une version plus fine du théorème de Hamilton qui précise la taille du voisinage où a lieu l'inversion locale. Ce résultat se déduira en fait du théorème de Hamilton appliqué à de gros espaces de Fréchet.

4.3.a. Une version uniforme du théorème de Hamilton. — Nous considérons dans la suite E, F deux bons espaces de Fréchet (dont on note de la même façon les semi-normes respectives), $U \subset E$ un voisinage de E contenant 0, r un entier positif ainsi que des constantes $C_s > 0$ indexées par $s \in \mathbf{N}$. Nous noterons alors $\mathbf{A}(r, (C_s)_s, U)$ l'ensemble des bonnes applications continues $f : U \to F$, satisfaisant $f(0) = 0$ ainsi que les inégalités

$$\forall\, s \in \mathbf{N},\ |f(x)|_s \leq C_s(1 + |x|_{s+r}). \tag{5}$$

Si $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, nous noterons $\mathbf{A}^k(r, (C_s)_s, U)$ l'ensemble des bonnes applications f de classe C^k, $f : U \to F$, telles que, pour tout $0 \leq j \leq k$, $D^j f \in \mathbf{A}(r, (C_s)_s, U)$. S'il existe $L : U \times F \to E$ une bonne application continue appartenant à $\mathbf{A}(r, (C_s)_s, U)$ linéaire en la seconde variable $y \in F$, telle que, pour tout $x \in U$, $Df(x)$ soit inversible d'inverse $L(x)$ on écrira $f \in \mathbf{A}^{-1}(r, (C_s)_s, U)$ (noter l'abus de notation). Si en outre (par exemple) $f \in \mathbf{A}^2(r, (C_s)_s, U)$ on écrira $f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r, (C_s)_s, U)$.

Nous supposons dans la suite que $U \supset \{x \in E,\ |x|_r \leq 1\}$. Nous noterons alors plus brièvement $\mathbf{A}^{2,-1}(r, (C_s)_s)$ l'ensemble défini plus haut. Le lemme suivant est alors facile :

Lemme 4.3.2. — *Si $f \in \mathbf{A}(r, (C_s), U)$, $g \in \mathbf{A}(r', (C'_s), f(U))$, alors on a $g \circ f \in \mathbf{A}(r + r', (C''_s), U)$, avec $C''_s = (1 + C'_s)(1 + C_{s+r'})$.*

Démonstration. — Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} |g(f(x))|_s &\leq C'_s(1 + |f(x)|_{s+r'}) \leq C'_s(1 + C_{s+r'}(1 + |x|_{s+r+r'})) \\ &\leq (1 + C'_s)(1 + C_{s+r'})(1 + |x|_{s+r+r'}). \end{aligned}$$

□

Nous pouvons alors énoncer :

Théorème 4.3.3. — *Soit $f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s,U)$. Il existe alors $r_1, \varepsilon_1 > 0$ qui ne dépendent que de r de U et de la suite $(C_s)_s$ tels que l'inverse f^{-1} de f existe et est défini sur le voisinage V_1 de $0 \in \mathcal{F}$, $V_1 = \{y \in E,\ |y|_{r_1} \leq \varepsilon_1\}$. En outre, pour $y \in V_1$, $|f^{-1}(y)|_s \leq c_s(1+|y|_{s+r_1})$.*

Démonstration. — Introduisons l'espace des fonctions

$$E^{\mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)} = \prod_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)} E \times \{f\} = \{(x_f)_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)}\ :\ x_f \in E\}$$

et posons

$$\mathcal{E} = \{(x_f)_f \in E^{\mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)},\ \forall s \in \mathbf{N}, \sup_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)} |x_f|_s < \infty\}.$$

On peut ainsi munir $\mathcal{E}$ des semi-normes

$$|(x_f)_{f \in\ \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)}|_s = \sup_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)} |x_f|_s.$$

On vérifie que $\mathcal{E}$ muni de ces semi-normes est un espace de Fréchet. De la même manière on associe l'espace de Fréchet $\mathcal{F}$ à F.

Nous pouvons également définir sur $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ des opérateurs de lissage (au sens de (4))

$$\mathcal{S}(t)((x_f)_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)}) = (S(t) \cdot x_f)_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)},$$

qui vérifient bien les inégalités (4). Ainsi $(\mathcal{E}, |\ |_s, \mathcal{S}(t))$ est un bon espace de Fréchet (au même titre que $\mathcal{F}$).

Nous introduisons à présent une application $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ qui est une bonne application continue :

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ (x_f)_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)} & \longmapsto & (f(x_f))_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s)}. \end{array}$$

Les inégalités (5) montrent que θ est une bonne application continue (et même C^k si les f le sont), contenue dans $\mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s,\mathcal{U})$ où $\mathcal{U} = \{(x_f)_{f \in \mathbf{A}^{2,-1}(r,(C_s)_s,U)},\ x_f \in U\}$, et on notera cet ensemble-là $\mathbf{A}^{2,-1}_{\mathcal{E}}(r,(C_s)_s)$. Les hypothèses du théorème de Hamilton sont alors vérifiées pour $\theta : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, et il existe $r_1, \varepsilon_1 > 0$ tels que θ^{-1} existe et réalise un bon difféomorphisme C^k de $\{|(y_f)_f|_{r_1} \leq \varepsilon_1\}$ sur un voisinage de $0 \in \mathcal{E}$. Réinterprété, ceci donne la conclusion du théorème. □

Nous donnons à présent une version un peu plus générale du résultat précédent.

Théorème 4.3.4. — *Soit $f \in \mathbf{A}^2_{\mathcal{E}}(r,(C_s)_s,U)$ dont la dérivée $Df(x)$ admet un bon inverse continu sur U, et $M > 0$ un réel tel que $(Df)^{-1} \in \mathbf{A}(r,(MC_s)_s,U)$. Alors il existe $\nu > 0$ ($\nu = 2$), ε_1 et r_1 ne dépendant que de $(r,(C_s),U)$ (mais pas de M), tels que l'inverse f^{-1} de f existe et est défini sur un voisinage de la forme $\{y \in F,\ |y|_{r_1} < M^{-\nu}\varepsilon_1\}$; en outre, sur ce voisinage-là, $f^{-1} \in \mathcal{A}^2(r_1, M^\nu(c_s)_s)$.*

Démonstration. — Posons $g = Df(0)^{-1} \cdot f$. Vu que $(Df(0))^{-1} \in \mathbf{A}(r, M(C_s)_s, U)$, et que $f \in \mathbf{A}^2(r, (C_s)_s, U)$, d'après le lemme 4.3.2, il apparaît que $g \in \mathbf{A}^2(2r, M(C'_s)_s, U)$ où $C'_s = (1 + C_s)(1 + C_{s+r})$. Posons également, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\varepsilon x).$$

On a

$$g_\varepsilon(0) = 0, \quad Dg_\varepsilon(0) = \mathrm{Id}, \quad Dg_\varepsilon(x) = Dg(\varepsilon x),$$

$$D^2 g_\varepsilon(x) = \varepsilon D^2 g(\varepsilon x). \tag{6}$$

De (6) et de $D^2 g \in \mathbf{A}(2r, M(C''_s), U)$, il vient que

$$D^2 g_\varepsilon \in \mathbf{A}(2r, \varepsilon M(C'_s)_s, U).$$

En outre, la formule des accroissements finis montre que

$$Dg_\varepsilon(x) - \mathrm{Id} = \int_0^1 D^2 g_\varepsilon(tx) \cdot (x, \cdot) dt,$$

si bien que

$$Dg_\varepsilon - \mathrm{Id} \in \mathbf{A}(2r, 2\varepsilon M(C'_s)_s, U),$$

et donc

$$Dg_\varepsilon \in \mathbf{A}(2r, 1 + 2\varepsilon M(C'_s)_s, U). \tag{7}$$

Utilisons à nouveau la formule des accroissements finis :

$$g_\varepsilon(x) - 0 = \int_0^1 Dg_\varepsilon(tx) \cdot x dt,$$

d'où $g_\varepsilon \in \mathbf{A}(2r, 2(1 + 2\varepsilon M(C'_s)_s, U)$. Remarquons que

$$(Dg_\varepsilon(x))^{-1} \in \mathbf{A}(2r, M(C'_s)_s, U), \tag{8}$$

car $(Dg_\varepsilon(x))^{-1} = (Df(\varepsilon x))^{-1} \cdot Df(0)$. Ecrivons alors

$$\begin{aligned} (Dg_\varepsilon)^{-1} - \mathrm{Id} &= -(Dg_\varepsilon)^{-1}((Dg_\varepsilon) - \mathrm{Id}) \\ &= -(Dg(\varepsilon x))^{-1} \cdot (Dg_\varepsilon - \mathrm{Id}). \end{aligned} \tag{9}$$

Ainsi, (7), (8) et (9) montrent que $(Dg_\varepsilon)^{-1} - \mathrm{Id} \in \mathbf{A}(4r, 1 + 2\varepsilon^2 M(C''_s)_s, U)$, où $C''_s = (1 + C'_s)(1 + C'_{s+2r})$. Ainsi si $\varepsilon = M^{-2}$, $g_\varepsilon \in \mathbf{A}^{2,-1}(4r, 2(1 + C''_s)_s, U)$. Il suffit alors d'appliquer le théorème 4.3.3 à g_ε pour obtenir la conclusion du théorème 4.3.4 avec $\nu = 2$. □

4.3.b. Dépendance Whitney. — Soit K un fermé de $\mathbf{R}^n$, E un espace de Fréchet et $x : K \to E$ une application. Soit $p > 1$ tel que $k < p \leq k+1$ où k est un entier; on dit que x est dans $\mathrm{Lip}^p(K,E)$ *au sens de Whitney* s'il existe des applications $x^{(j)} : K \to E$ associées à tout multi-indice $j = (j_1, \dots, j_n)$ tel que $|j| \leq k$ et qui vérifient :

$$\forall\,(\beta,\alpha) \in K \times K, \quad x^{(j)}(\beta) = \sum_{|j+l|\leq k} \frac{x^{(j+l)}(\alpha)}{l!}(\beta-\alpha)^l + R_j(\beta,\alpha),$$

$$x^{(0)} = x,$$

$$|x^{(j)}(\alpha)|_s \leq M_s, \text{ et } |R_j(\beta,\alpha)|_s \leq M_s|\beta-\alpha|^{p-|j|}, \text{ pour tout } \beta,\alpha \in K, \ |j| \leq k.$$

Le choix des $x^{(j)}$, $|j| \geq 1$ n'est pas unique; nous noterons $|x|_{s,p,K}$ (et plus brièvement par la suite $|x|_{s,p}$) l'infimum des M_s vérifiant les inégalités précédentes. On dira que x est C^∞-Whitney si elle est dans $\mathrm{Lip}^p(K,E)$ pour tout $p > 1$ et on notera $x \in C^\infty(K,E)$.

Le théorème fondamental est alors le suivant :

***Théorème 4.3.5* (d'extension de Whitney).** — *Il existe un opérateur* Ext_k *de* $\mathrm{Lip}^p(K,E)$ *dans* $\mathrm{Lip}^p(\mathbf{R}^n,E)$ *tel que, pour tout* $x \in \mathrm{Lip}^p(K,E)$, $\mathrm{Ext}_r(x)|_K = x$ *(c'est-à-dire que* $\mathrm{Ext}_k(x)$ *est une extension de* x *à* $\mathbf{R}^n$*) et telle que, pour tout* $s \in \mathbf{N}$, $|\mathrm{Ext}_k(x)|_{s,p,\mathbf{R}^n} \leq \kappa \cdot |x|_{s,p,K}$ *où* $\kappa > 0$ *est une constante indépendante de* K *(elle ne dépend que de* n*).*

La démonstration se fait, par exemple, en adaptant au cadre Fréchet celle donnée par E. Stein dans **[24]**, p. 176.

Notons alors E, F deux espaces de Fréchet et K un fermé de $\mathbf{R}^n$. Notons $\mathcal{E}^{(p)}$,et $\mathcal{F}^{(p)}$, $1 < p < \infty$ (resp. $p = \infty$) les espaces $\mathrm{Lip}^p(K,E)$ et $\mathrm{Lip}^p(K,E)$ (resp. $C^\infty(K,E)$ et $C^\infty(K,F)$). En utilisant la définition précédente, il n'est pas très difficile de construire comme en 3.2 des opérateurs de lissage et de voir que $\mathcal{E}^{(p)}$ et $\mathcal{F}^{(p)}$ sont de bons espaces de Fréchet si E et F le sont.

La proposition qui suit est utile dans les applications.

Proposition 4.3.6. — *Supposons que pour tout* $\alpha \in K$ *nous disposions d'une bonne application linéaire inversible* $L_\alpha : E \to F$ *appartenant à* $\mathcal{A}^{1,-1}(r,(C_s)_s)$ *où* r *et* $(C_s)_s$ *sont indépendants de* $\alpha \in K$ *et supposons en outre que* L *définie par* $L((x_\alpha)_{\alpha\in K}) = (L_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in K}$ *soit une application de* $\mathcal{E}^{(p)}$ *dans* $\mathcal{F}^{(p)}$ *(*$1 < p \leq \infty$*). Alors* $L : \mathcal{E}^{(p)} \to \mathcal{F}^{(p)}$ *est une bonne application inversible et son inverse* L^{-1} *est aussi une bonne application.*

Nous laissons la démonstration de cette proposition en exercice; notons qu'l s'agit en particulier de vérifier que si $(y_\alpha)_{\alpha\in K}$ est dans $\mathrm{Lip}^p(K,F)$ (resp. dans $C^\infty(K,F)$), il en est de même de $(L_\alpha^{-1}(y_\alpha))_{\alpha\in K}$.

4.4. Choix des espaces et des applications

4.4.a. Dans la suite nous supposerons fixé u_0 un élément de G. Rappelons que nous avons associé à u, le projecteur linéaire l sur le sous espace de g, $\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$, et que nous avons noté Γ un supplémentaire de l'image $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$ dans g. On notera π la projection sur Γ par rapport à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$. On peut prolonger l, π à l'algèbre complexifiée $g_c = g \otimes \mathbf{C}$; plus précisement, l reste un projecteur de $g \otimes \mathbf{C}$ sur $\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \otimes \mathbf{C}$ et π est la projection sur $\Gamma_c = \Gamma \otimes \mathbf{C}$, par rapport à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \otimes \mathbf{C}$.

L'exponentielle $\exp : g \to G$ réalise un difféomorphisme d'un voisinage V de 0 dans g sur un voisinage de l'identité dans G. Quitte à choisir $U \subset V \subset g$ un voisinage de 0 dans g, l'application

$$\begin{aligned} \Psi : U \times U \times U &\longrightarrow g \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \exp^{-1}(\exp X \exp Y u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1}), \end{aligned}$$

qui est bien définie, est un difféomorphisme local C^∞ au voisinage de $(0,0,0)$.

Calculons sa différentielle en $(X, Y, Z) \in U^3$. Rappelons que si $f : M \to M$ est C^∞, nous avons noté $Df(x) : T_x M \to T_{f(x)} M$ l'application linéaire tangente en x à f. Si $u \in G$, on définit $L_u(x) = u \cdot x$ et $R_u(x) = x \cdot u$ les translation à gauche et à droite. Remarquons que si $X \in g = T_{\mathrm{Id}} G$, $DL_u(\mathrm{Id}) \cdot X$ et $DR_u(\mathrm{Id}) \cdot X$ sont dans $T_u G$. Nous noterons respectivement $u \cdot X$ et $X \cdot u$ ces éléments. On vérifie par exemple que $X \to u \cdot X \cdot u^{-1}$ qui est définie de $g \to g$ et représente l'application linéaire tangente à $v \mapsto uvu^{-1}$ en $\mathrm{Id} \in G$ est $\mathrm{Ad}(u) \cdot X$.

Ainsi, si on note $\exp W = w = \exp X \exp Y u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1}$,

$$\begin{aligned} &D\Psi(X, Y, Z) \cdot (\Delta x, \Delta Y, \Delta Z) \\ &\qquad = D \exp^{-1}(w) \cdot [(D \exp(X) \cdot \Delta X) \cdot \exp Y u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1} \\ &\qquad\qquad + \exp X \cdot (D(\exp)(Y) \cdot \Delta Y) \cdot u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1} \\ &\qquad\qquad - \exp X \exp Y u_0 \cdot ((\exp Z)^{-1} (D(\exp)(Z) \cdot \Delta Z) \cdot (\exp Z)^{-1}] \cdot u_0^{-1}. \end{aligned}$$

Notons $K(X) \cdot \Delta X = (\exp X)^{-1} (D(\exp)(X)) \cdot \Delta X$; $K(X)$ est donc un élément de $gl(g)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} &D\Psi(X, Y, Z) \cdot (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z) \\ &= D(\exp^{-1})(W) \cdot \{\exp X \exp Y (\exp Y)^{-1} \cdot (K(X) \cdot \Delta X) \cdot \exp Y u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1} \\ &\qquad + \exp X \exp Y (K(Y) \cdot \Delta Y) \cdot u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1} \\ &\qquad - \exp X \exp Y u_0 (K(Z) \cdot \Delta Z) u_0^{-1} u_0 (\exp Z)^{-1} u_0^{-1}\}, \end{aligned}$$

soit

$$D\Psi(X,Y,Z)\cdot(\Delta X,\Delta Y,\Delta Z) = D(\exp^{-1})(W)\cdot\{W\cdot \mathrm{Ad}(u_0(\exp Z)^{-1}u_0^{-1})^{-1} \cdot \mathrm{Ad}((\exp Y)^{-1})\cdot(K(X)\cdot\Delta X) + K(Y)\cdot\Delta Y - \mathrm{Ad}(u_0)\cdot K(Z)\cdot\Delta Z\},$$

et finalement, vu que $D(\exp^{-1})(w)\cdot(w\cdot H) = K(W)^{-1}\cdot H$ ($\exp W = w$),

$$D\Psi(X,Y,Z)\cdot(\Delta X,\Delta Y,\Delta Z) = K(W)^{-1}\cdot \mathrm{Ad}(u_0^{-1}(\exp Z)u_0) \cdot\{[\mathrm{Ad}(\exp Y)^{-1}\cdot K(X)\cdot\Delta X] + K(Y)\cdot\Delta Y - \mathrm{Ad}(u_0)\cdot K(Z)\cdot\Delta Z\}.$$

4.4.b. Rapplelons que nous avons noté $\mathcal{E} = \{B\in C^\infty(\mathbf{T}^d,g),\ l(B(0)) = 0\}$; c'est un sous-espace fermé du bon espace de Fréchet $C^\infty(\mathbf{T}^d,g)$. D'après **[12]** def. 1.3.1, lemma 1.3.3 p. 136, $\mathcal{E}$ est un bon espace de Fréchet.

Nous pouvons définir sur un voisinage W de (0,0) dans $\mathcal{E}\times\Gamma$ l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{W}(\subset \mathcal{E}\times\Gamma) &\longrightarrow C^\infty(\mathbf{T}^d,g)\\ (B,C) &\longmapsto \exp^{-1}((\exp C)(\exp B\circ R_\omega)u_0(\exp B)^{-1}u_0^{-1})\\ &\quad = \Psi(C, B\circ R_\omega, B),\end{aligned}$$

où on a noté $B\circ R_\omega = B(\cdot+\omega)$. L'application Φ est d'après la proposition 4.2.3 et le calcul du 4.4.a une bonne application C^∞ et sa dérivée en $(B,C)\in\mathcal{W}$ est égale à

$$D\Phi(B,C)\cdot(\Delta B,\Delta C) = K(W)^{-1}\cdot\mathrm{Ad}(u_0(\exp B)^{-1}u_0^{-1}) \cdot\{\mathrm{Ad}(\exp B\circ R_\omega)\cdot K(c)\cdot\Delta C + K(B\circ R_\omega)\cdot(\Delta B\circ R_\omega) - \mathrm{Ad}(u_0)\cdot K(B)\cdot\Delta B\}.$$

Notant $K_1(B,C)\cdot H = K(\exp C(\exp B\circ R_\omega)u_0(\exp B)^{-1}u_0^{-1})^{-1}\cdot\mathrm{Ad}(u_0(\exp B)^{-1}u_0^{-1})\cdot H$, on a

$$D\Phi(B,C)\cdot(\Delta B,\Delta C) = K_1(B,C)\cdot\{(\mathrm{Ad}(\exp B)\circ R_\omega)\cdot K(C)\cdot\Delta C + (K(B)\Delta B)\circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0)K(B)\cdot\Delta B\}.$$

Nous avons ainsi prouvé :

Proposition 4.4.1. — *L'application Φ est une bonne application. Sa dérivée en $(B,C)\in\mathcal{U}$ vaut :*

$$D\Phi(B,C)\cdot(\Delta B,\Delta C) = K_1(B,C) \cdot\{(\mathrm{Ad}(\exp B)\circ R_\omega)\cdot K(C)\cdot\Delta C + (K(B)\Delta B)\circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0)K(B)\cdot\Delta B\}.$$

D'après le théorème de Hamilton, pour établir le théorème 4.1.1, il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 4.4.2. — *Il existe un voisinage $\mathcal{U}_1\subset\mathcal{W}$ et une bonne application continue $L:\mathcal{U}_1\times C^\infty(\mathbf{T}^d,g)\to\mathcal{E}\times\Gamma$, linéaire en la seconde variable, tels que si $((B,C),H)\in\mathcal{W}_1\times C^\infty(\mathbf{T}^d,g)$, alors $L((B,C),H) = L(B,C)\cdot H$ est linéaire en H et $L(B,C)$ est un inverse de Φ.*

L'utilisation de la proposition 4.2.3 montre que les applications K, K_1 définies en 4.4.a sont de bonnes applications continues et admettent de bons inverses continus. Par conséquent pour démontrer la proposition 4.4.2, il suffit de montrer :

Proposition 4.4.3. — *L'application*

$$\begin{aligned} \Phi_2 : \mathcal{W} \times (\mathcal{E} \times \Gamma) &\longrightarrow C^\infty(\mathbf{T}^d, g) \\ ((B,C),(\Delta B, \Delta C)) &\longmapsto ((\mathrm{Ad}(\exp B) \circ R_\omega) \cdot K(C) \cdot \Delta C + (K(B)\Delta B) \circ R_\omega \\ &\qquad - \mathrm{Ad}(u_0) K(B) \cdot \Delta B), \end{aligned}$$

admet un bon inverse continu.

La démonstration de cette proposition occupe la section 4.5.

4.5. Construction de l'inverse pour l'équation linéarisée et estimations

Fixons $(B,C) \in \mathcal{U}$ et $\Delta A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$. Rappelons que nous avons noté plus haut π la projection sur (un supplémentaire) Γ (de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$) parallèlement à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$.

4.5.a. Méthode. — Avec les notations du 4.4, on cherche à résoudre

(10) $\Delta A = (\mathrm{Ad}(\exp B) \circ R_\omega) \cdot K(C) \cdot \Delta C + (K(B)\Delta B) \circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0) K(B) \cdot \Delta B.$

Posons

$$\widetilde{\Delta C} = \mathrm{Ad}(\exp B \circ R_\omega) K(C) \cdot \Delta C, \ \widetilde{\Delta B} = K(B) \cdot \Delta B.$$

Nous avons à résoudre

$$\Delta A = \widetilde{\Delta C} + \widetilde{\Delta B} \circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0) \cdot \widetilde{\Delta B}. \tag{11}$$

A cet effet, passons en séries de Fourier. Si on note $f_k \in g \otimes \mathbf{C}$ le k-ième coefficient de Fourier de $f \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$,

$$f_k = \int_{[0,1]^d} e^{-2\pi i (k,x)} f(x) dx,$$

on constate que l'équation (11) est équivalente aux équations

$$\Delta A_0 = \widetilde{\Delta C}_0 + (\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \widetilde{\Delta B}_0, \tag{12}$$

et, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$\Delta A_k = \widetilde{\Delta C}_k + (e^{2\pi i (k,\omega)} \mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \widetilde{\Delta B}_k. \tag{13}$$

Projetons la relation (12) sur Γ, par l'action de π :

$$\pi(\Delta A_0) = \pi(\widetilde{\Delta C}_0), \tag{14}$$

puisque par définition de π, $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \subset \ker \pi$. Nous montrerons au point 4.5.b qu'étant donné ΔA, il existe un $\Delta C \in \Gamma$ auquel est associé un $\widetilde{\Delta C}_0$, tel que (14) ait lieu. Ceci permettra de déterminer les $\widetilde{\Delta C}_k$ et, ω étant diophantien, on pourra en déduire les $\widetilde{\Delta B}_k$ et par conséquent $\widetilde{\Delta B}$ et ΔB (*cf.* lemme 4.5.3). Après avoir vérifié que $\Delta B, \Delta C$ sont dans g (et pas seulement dans $g \otimes \mathbf{C}$), on vérifiera l'unicité (*cf.* lemme 4.5.5).

4.5.b. Existence. — Dans ce qui suit nous supposons donné $\Delta A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$. Etablissons tout d'abord le

Lemme 4.5.1. — *Pourvu que* $(B, C) \in \mathcal{U}$ *un voisinage suffisamment petit de* $(0,0)$ *dans* $\mathcal{E} \times \Gamma$, *il existe un unique* $\Delta C \in \Gamma$ *pour lequel*

$$\pi(\Delta A_0) = \pi\left(\int_{\mathbf{T}^d} \Delta A(x)dx\right) = \pi(L(B,C)\cdot \Delta C), \tag{15}$$

où on a noté, $L(B,C)\cdot\Delta C = \mathrm{Ad}(\exp B \circ R_\omega)\cdot K(C)\cdot \Delta C$. *Il existe alors une constante* $c_1 > 0$ *telle que*

$$|\Delta C| \leq c_1 |\Delta A|_0.$$

Démonstration. — Pour $(B, C) \in \mathcal{W}$, $\pi \circ L(B,C)$ envoit Γ dans lui même. En outre, l'application

$$\{B \in C^0(\mathbf{T}^d, g),\ l(B)(0) = 0\} \times \Gamma \longrightarrow \mathrm{End}(\Gamma) \tag{16}$$

$$(B, C) \longmapsto \pi \circ L(B,C), \tag{17}$$

est continue et vaut l'identité de $\mathrm{End}(\Gamma)$ en $(B,C) = (0,0)$. Ainsi, quitte à réduire le voisinage $\mathcal{U}$, pour tout $(B,C) \in \mathcal{U}$, $\pi \circ L(B,C)$ est inversible de $\Gamma \to \Gamma$, et son inverse admet une norme bornée par $c_1 > 0$. □

Résolvons à présent les équations (13) pour $k \neq 0$.

Lemme 4.5.2. — *Avec* ΔC *déterminé comme dans le lemme 4.5.1, il existe des* $\overline{\Delta B}_k \in g \otimes \mathbf{C}$ *pour lesquels, pour tout* $k \neq 0$ *dans* $\mathbf{Z}^d$,

$$\Delta A_k = \widetilde{\Delta C}_k + (e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \overline{\Delta B}_k, \tag{18}$$

et vérifiant

$$|\overline{\Delta B}_k| \leq c_{u_0} \gamma^{\overline{q}} |k|^{\sigma \overline{q}} (|\Delta A_k| + |\widetilde{\Delta C}_k|), \tag{19}$$

$c_{u_0} > 0$ *est une constante ne dépendant que de* u_0. *Si en outre le groupe* G *est compact semi-simple, la constante* c_{u_0} *ne dépend pas de* u_0 *mais uniquement du groupe* G.

Démonstration. — Il suffit de résoudre

$$\Delta A_k - \widetilde{\Delta C}_k = [e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)] \cdot \Delta B_k,$$

ce qui est possible vu l'hypothèse (1) que l'on fait sur les valeurs propres de u_0. Utilisons la formule classique

$$|U^{-1}| \leq (\det U)^{-1} |U|^{\overline{q}-1},$$

pour $U \in GL(\dim g, \mathbf{C})$. D'après l'hypothèse (1), pour tout $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$,

$$|\det(e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))| \geq c'_{u_0}\left(\frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}\right)^{\overline{q}},$$

et

$$|e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)| \leq c''_{u_0},$$

en posant, $c''_{u_0} = 1 + |\mathrm{Ad}(u_0)|$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$,

$$|(e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))^{-1}| \leq c_{u_0}\gamma^{\overline{q}}|k|^{\overline{q}\sigma},$$

où $c_{u_0} = {c'_{u_0}}^{-1}{c''_{u_0}}^{\overline{q}-1}$. Par conséquent, si on pose

$$\overline{\Delta B}_k = (e^{2\pi i(k,x)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))^{-1} \cdot (\Delta A_k - \widetilde{\Delta C}_k),$$

on obtient l'inégalité (19) et l'égalité (18). Afin d'achever la preuve du lemme 4.5.2 remarquons que si G est compact, alors, pour tout $u_0 \in G$, $z \in \mathbf{C}$,

$$|\det(z\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))| \leq c|z\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)|,$$

où $c > 0$ est une constante ne dépendant que de G et non pas de u_0. □

Posons à présent

$$\overline{\Delta B}(\theta) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}} (\overline{\Delta B})_k e^{2\pi i(k,\theta)}.$$

La relation (19) et l'inégalité (4) de la section A.1 de l'annexe montrent que $\overline{\Delta B} \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g \otimes \mathbf{C})$ et que

$$\begin{aligned}
|\overline{\Delta B}(\theta)|_s &\leq c_{u_0}\gamma^{\overline{q}} \sum_{k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}} |k|^{\sigma\overline{q}+s}(|\Delta A_k| + |\widetilde{\Delta C}_k|),\\
&\leq c_s c_{u_0}\gamma^{\overline{q}}(|\Delta A|_{\sigma\overline{q}+s+(d+1)/2} + |\widetilde{\Delta C}|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2}),
\end{aligned}$$

et donc

$$|\overline{\Delta B}|_s \leq c_s c_{u_0}\gamma^{\overline{q}}(|\Delta A|_{\sigma\overline{q}+s+(d+1)/2} + |\widetilde{\Delta C}|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2}).$$

Enfin comme $\widetilde{\Delta C} = \mathrm{Ad}(\exp(B \circ R_\omega)) \cdot K(C) \cdot \Delta C$, on a

$$|\widetilde{\Delta C}|_s \leq c'_s|\Delta C|_s|B|_s|C|,$$

et donc, vu (15),

$$|\overline{\Delta B}|_s \leq c_s c_{u_0}\gamma^{\overline{q}}(|\Delta A|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2} + |B|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2}|C||\Delta A|_0). \tag{20}$$

Montrons à présent le lemme suivant :

Lemme 4.5.3. — *Avec les notations précédentes, il existe $\Delta B \in \mathcal{E}_c$ (c pour « complexifié ») avec*

$$\mathcal{E}_c = \{\Delta B \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g \otimes \mathbf{C}) :\ l_c(\Delta B)(0) = 0\},$$

telle que si l'on pose $\widetilde{\Delta B} = K(B) \cdot \Delta B$, on ait, pour tout $k \neq 0$, l'égalité suivante entre coefficients de Fourier :

$$\widetilde{\Delta B}_k = \overline{\Delta B}_k,$$

et (pour $k = 0$)

$$(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \widetilde{\Delta B}_0 = \widetilde{\Delta A}_0 - \widetilde{\Delta C}_0.$$

En outre, pour tout $s \geq 0$, l'inégalité suivante à lieu :

(21) $$|\Delta B|_s \leq c_{u_0,s}\gamma^{\overline{q}}(1 + |\Delta A|_{r_1})(1 + |B|_{s+r_1} + |\Delta A|_{s+r_1}),$$

où on a posé $r_1 = \sigma\overline{q} + (d+1)/2$. Si en outre le groupe G est compact, $c_{u_0,s}$ ne dépend que de s (et de G) et pas de u_0.

Démonstration. — Posons $\Delta B' = K(B)^{-1} \cdot \overline{\Delta B}$, et définissons pour tout $D \in \mathcal{E}_c$, l'élément de $gl(\mathrm{Im}\, l_c)$ ($\mathrm{Im}\, l_c = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \otimes \mathbf{C}$), par :

(22) $$H(D) \cdot Y = l(K(D)^{-1}(0) \cdot Y).$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \{D \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g \otimes \mathbf{C}),\ l(D)(0) = 0\} & \longrightarrow & gl(\mathrm{Im}\, l_c) \\ D & \longmapsto & H(D), \end{array}$$

est continue et pour $D \equiv 0$, $H(0) = \mathrm{Id}_{|\,\mathrm{Im}\, l_c}$. Ainsi quitte à prendre un voisinage $\mathcal{W}'' \subset \mathcal{W}$, pour tout $B \in \mathcal{W}''$, $H(B)$ est inversible dans $gl(\mathrm{Im}\, l \otimes \mathbf{C})$ et il existe un unique X_0 *constant* dans $\mathrm{Im}\, l \otimes \mathbf{C}$ pour lequel

$$H(B) \cdot X_0 = l(\Delta B'(0)),$$

et

$$|X_0| \leq c_3 \cdot |\Delta B'(0)| \leq c_3 \cdot |\Delta B'|_0;$$

la définition de B' montre que

(23) $$|X_0| \leq c_4 |\overline{\Delta B}|_0.$$

Posant alors

$$\Delta B = \Delta B' - K(B)^{-1} \cdot X_0,$$

(remarquer que $K(B)^{-1} \cdot X_0$ n'est pas nécessairement constant) il vient (*cf.* (22))

$$\begin{array}{rcl} l(\Delta B(0)) & = & l(\Delta B'(0)) - l(K(B)^{-1}(0) \cdot X_0), \\ & = & l(\Delta B'(0)) - H(B) \cdot X_0, \\ & = & 0. \end{array}$$

D'autre part,

$$\widetilde{\Delta B} = K(B) \cdot \Delta B = K(B) \cdot \Delta B' - X_0 = \overline{\Delta B} - X_0,$$

si bien que, pour tout $k \neq 0$,

$$\widetilde{\Delta B}_k = \overline{\Delta B}_k.$$

Enfin, comme $\widetilde{\Delta B}_0 = \overline{\Delta B}_0 - X_0$, on déduit

$$(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \widetilde{\Delta B}_0 = (\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot \overline{\Delta B}_0,$$

puisque l'on a choisi $X_0 \in \mathrm{Im}\, l_c = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \otimes \mathbf{C}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |\Delta B|_s &\leq |\Delta B'|_s + |K(B)^{-1}|_s \cdot |X_0|) \\ &\leq |K(B)^{-1} \cdot \overline{\Delta B}|_s + |K(B)^{-1}|_s \cdot |X_0| \\ &\leq c_s|K(B)|_s(|\overline{\Delta B}|_0 + |X_0|) + |K(B)|_0 \cdot (|\overline{\Delta B}|_s + |X_0|); \end{aligned}$$

les inégalités (23) puis (20) montrent que

$$\begin{aligned} |\Delta B|_s &\leq c_s|K(B)|_s|\overline{\Delta B}|_0 + |K(B)|_0|\overline{\Delta B}|_s \\ &\leq c_s c_{u_0}\gamma^{\overline{q}}|B|_s\Big(|\Delta A|_{\sigma\overline{q}+(d+1)/2} + |B|_{\sigma\overline{q}+(d+1)/2}|C||\Delta A|_0\Big) \\ &\qquad + |B|_0\Big(|\Delta A|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2} + |B|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2}|C||\Delta A|_0\Big). \end{aligned}$$

Comme l'on a choisi $\mathcal{W}''$ suffisamment petit pour que $|C| \leq 1$, $|B|_{\sigma\overline{q}+(d+1)/2} \leq 1$, on peut écrire

(24)

$$|\Delta B|_s \leq c_{5,s}\gamma^{\overline{q}}\Big(1 + |\Delta A|_{\sigma\overline{q}+(d+1)/2}\Big)\Big(1 + |B|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2} + |\Delta A|_{s+\sigma\overline{q}+(d+1)/2}\Big).$$

□

Nous avons finalement montré :

Proposition 4.5.4. — *Il existe un voisinage $\mathcal{W} \subset \mathcal{E} \times \Gamma$ tel que, pour tout $(B, C) \in \mathcal{W}$, et tout $\Delta A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$, on peut trouver $(\Delta B, \Delta C) \in (\mathcal{E} \otimes \mathbf{C}) \times (\Gamma \otimes \mathbf{C})$ vérifiant l'équation (10) et satisfaisant aux estimées (21).*

Pour pouvoir définir l'application inverse il nous faut également prouver l'unicité du couple $(\Delta B, \Delta C)$.

4.5.c. Unicité. — Prouvons le lemme suivant :

Lemme 4.5.5. — *Il existe un voisinage $\mathcal{W}_3$ tel que si*

$$(B, C) \in \mathcal{W}_3 \quad \text{et} \quad \Phi(B, C) \cdot (\Delta B^1, \Delta C^1) = \Phi(B, C) \cdot (\Delta B^2, \Delta C^2),$$

alors $\Delta B^1 = \Delta B^2$, $\Delta C^1 = \Delta C^2$.

Démonstration. — Posons

$$\widetilde{\Delta C^i} = \mathrm{Ad}(\exp B \circ R_\omega) \cdot K(C) \cdot \Delta C^i, \qquad \widetilde{\Delta B^i} = K(B) \cdot \Delta B^i,$$

$i = 1, 2$. Rappelons que l'on doit avoir

$$\widetilde{\Delta C}^2 + \widetilde{\Delta B}^2 \circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0) \cdot \widetilde{\Delta B}^2 = \widetilde{\Delta C}^1 + \widetilde{\Delta B}^1 \circ R_\omega - \mathrm{Ad}(u_0) \cdot \widetilde{\Delta B}^1,$$

et donc, passant en composantes de Fourier, pour tout $k \neq 0$,

$$\widetilde{\Delta C}_k^1 - \widetilde{\Delta C}_k^2 = (e^{2\pi i(k,\omega)}\,\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot (\widetilde{\Delta B}_k^2 - \widetilde{\Delta B}_k^1),$$

et, pour $k = 0$,

$$\widetilde{\Delta C}_0^1 - \widetilde{\Delta C}_0^2 = (\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot (\widetilde{\Delta B}_0^2 - \widetilde{\Delta B}_0^1).$$

Donc, appliquant π il vient $\pi(\widetilde{\Delta C}_0^1) = \pi(\widetilde{\Delta C}_0^2)$, soit

$$\pi \circ L(B, C) \cdot \Delta C^1 = \pi \circ L(B, C) \cdot \Delta C^2.$$

Mais comme l'on a choisi (B, C) dans un voisinage $\mathcal{W}'$ de (0,0) dans $\mathcal{E} \times \Gamma$, de façon que $\pi \circ L(B, C)$ soit injective, ceci entraîne $\Delta C^1 = \Delta C^2$. Ceci montre au passage que $\widetilde{\Delta C}_k^1 - \widetilde{\Delta C}_k^2 = 0$ et la formule (13) pour $k \neq 0$, montre que $\widetilde{\Delta B}_k^1 = \widetilde{\Delta B}_k^2$ pour tout $k \neq 0$ dans $\mathbf{Z}^d$. En particulier $\widetilde{\Delta B}^2 - \widetilde{\Delta B}^1$ est une fonction constante égale à sa valeur en 0, $\widetilde{\Delta B}^2(0) - \widetilde{\Delta B}^1(0)$. En outre, (12) montre que $(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot (\widetilde{\Delta B}^2(0) - \widetilde{\Delta B}^1(0)) = 0$, soit

$$(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cdot (K(B) \cdot (\Delta B^2 - \Delta B^1)(0)) = 0.$$

De ce fait,

$$(K(B) \cdot (\Delta B^2 - \Delta B^1)(0)) \in \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)),$$

et donc

$$(\Delta B^2 - \Delta B^1)(0) \in K(B)^{-1} \cdot (\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \cap W_c, \tag{25}$$

où on a noté W_c un supplémentaire de $\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \otimes \mathbf{C}$ dans $g \otimes \mathbf{C}$. Or, comme d'une part on a choisi $\mathcal{W}'$ suffisamment petit de façon que l'opérateur $K(B)(0)$ soit proche de l'identité ($= K(0)(0)$), comme d'autre part, $K(0)^{-1} \cdot (\ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0))$ et W sont transverses, on peut affirmer que, pour $B \in \mathcal{W}'$, l'intersection (25) reste transverse, réduite à 0. Par conséquent,

$$\Delta B^1(0) = \Delta B^2(0),$$

si bien que

$$\widetilde{\Delta B}^1(0) = K(B)(0) \cdot \Delta B^1(0) = K(B)(0) \cdot \Delta B^2(0) = \widetilde{\Delta B^2}(0),$$

Nous avons montré quelques lignes plus haut que $\widetilde{\Delta B}^2 - \widetilde{\Delta B}^1$ était constante, donc $\widetilde{\Delta B}^2 = \widetilde{\Delta B}^1$ et par conséquent, $\Delta B^1 = \Delta B^2$. □

Corollaire 4.5.6. — *Les ΔB, et ΔC déterminés plus haut sont dans g et pas seulement dans $g \otimes \mathbf{C}$.*

Démonstration. — En effet ΔA étant dans g, si on note σ_c la conjugaison complexe,

$$D\Phi(B, C) \cdot (\Delta B, \Delta C) = \sigma_c(D\Phi(B, C) \cdot (\Delta B, \Delta C) = D\Phi(B, C) \cdot (\sigma_c(\Delta B), \sigma_c(\Delta C)).$$

L'unicité montrée dans le lemme précédent prouve que $\Delta B = \sigma_c(\Delta B)$, $\Delta C = \sigma_c(\Delta C)$, ce qui termine la preuve du corollaire 4.5.6. □

Nous avons finalement prouvé que ΔA détermine de façon univoque $(\Delta B, \Delta C)$ pourvu que $(B, C) \in \mathcal{W}_4$ un voisinage suffisamment petit de (0,0) dans $\mathcal{E} \times \Gamma$; nous pouvons donc poser $L(B, C) \cdot \Delta A = (\Delta B, \Delta C)$. Cette application est bien un inverse de $D\Phi$. En outre, les estimées (24) montrent que L est une bonne application continue.

En fin de compte, nous avons montré la proposition 4.4.3, et l'utilisation du théorème de Hamilton termine la preuve du théorème 4.1.1.

4.5.d. Cas des groupes compacts. — Nous récrivons le théorème de forme normale dans le cas où le groupe G est compact semi-simple (bien que l'on pourrait en donner une version dans le cas semi-simple seulement).

Soit $u_0 \in G$ un élément générique de G, T_{u_0} le (puisque u_0 est générique) tore maximal passant par u_0 et $t = t_{u_0}$ l'algèbre associée. Puisque u_0 est régulier on peut écrire

$$t_{u_0} = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)),$$

et

$$g = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)).$$

Il est alors possible de choisir

$$\mathcal{E} = C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)),$$

$$\Gamma = t_{u_0} = \ker(\mathrm{Id} - \mathrm{Ad}(u_0)).$$

4.5.e. Estimation de la taille du voisinage où a lieu l'inversion. — Supposons donc G compact semi-simple. Le fait que la condition diophantienne $CD(\gamma, \sigma)$ n'intervienne pas dans le calcul des normes $|D^2\Phi|_s$, et l'inégalité (21) montrent que $\Phi \in \mathbf{A}^{2,-1}(r_1, \gamma^{\overline{q}}(c_s), U)$ où $r_1 = \sigma\overline{q} + (d+1)/2$ et où $c_s = c_{u_0,s}$ ne dépend que de s (et de G) mais pas de u_0. On peut alors appliquer le théorème 4.3.4 et énoncer :

Proposition 4.5.7. — *Avec les notations de la section 4.5, Φ^{-1} est définie sur l'ensemble $\{A \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g) : |A|_{r_2} \leq \gamma^{-\nu}\varepsilon_2\}$ où $\varepsilon_2 > 0$, $r_2 \in \mathbf{N}$ et $\nu > 0$ ne dépendent pas de γ.*

4.6. Application à l'obtention de résultats en mesure positive

Ce qui suit s'inspire fortement de l'article de J.-C. Yoccoz au séminaire Bourbaki **[25]**.

Nous supposerons dans la suite que G est un groupe compact semi-simple comme en 4.5.d.

Nous avons vu précédemment que si $u(\theta) \in C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$ est C^∞ proche de u_0, constante dans G dont les valeurs propres de l'adjoint satisfont des conditions diophantiennes $CD(\gamma, \sigma)$, alors il existe un unique couple $(v, w) \in \mathcal{E}_G \times \Gamma$ pour lequel

$$\forall\, \theta \in \mathbf{T}^d, \quad u(\theta) = wv(\theta + \omega)u_0 v(\theta)^{-1},$$

la dépendance de (v, w) en u est alors bonne et C^∞. Notre propos à présent est de faire varier u_0 et de voir dans quelle mesure les résultats précédents persistent d'une part, et d'autre part de déterminer la dépendance de (v, w) en u_0.

4.6.a. Dépendance C^∞ au sens de Whitney. — Dans ce qui suit nous fixons une algèbre torique maximale $t \subset g$.

Nous reprenons dans cette section la notion de dépendance Whitney introduite dans la section 4.3.b

Notons $CD_G(\gamma, \sigma)$ (resp. $CD_g(\gamma, \sigma)$, $CD_t(\gamma, \sigma)$) l'ensemble des $u_0 \in G$ (resp. $X \in G$, $X \in t$) dont les valeurs propres de l'adjoint $\mathrm{Ad}(u_0)$ (resp. $\mathrm{ad}(u_0)$), satisfont à la condition diophantienne $CD(\gamma, \sigma)$. Vu que $u_0 \to \mathrm{Ad}(u_0)$ (resp. $X \to \mathrm{ad}(X)$) est continue et vue la dépendance continue des valeurs propres, $CD_G(\gamma, \sigma)$ (resp. $CD_g(\gamma, \sigma)$, $CD_t(\gamma, \sigma)$) est fermé puisque $CD(\gamma, \sigma)$ l'est. Posons pour $1 < p \leq \infty$ fixé (typiquement $p = 2$), $\widetilde{\mathcal{E}} = \mathrm{Lip}^p(CD_G(\gamma, \sigma), \mathcal{E})$, $\widetilde{G} = \mathrm{Lip}^p(CD_G(\gamma, \sigma), \Gamma)$, $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathrm{Lip}^p(CD_G(\gamma, \sigma), C^\infty(\mathbf{T}^d, g))$.

Pour $\varepsilon > 0, p > 1$ et $r \in \mathbf{N}$ notons

$$\widetilde{\mathcal{W}}(r, p, \varepsilon) = \{F \in \mathrm{Lip}^p(CD_G(\gamma, \sigma), C^\infty(\mathbf{T}^d, g)),\ |F|_{r,p} \leq \varepsilon\}.$$

D'après 4.3.b, les espaces $\widetilde{\mathcal{E}}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{H}}$, sont de bons espaces de Fréchet ; par ailleurs, en reprenant ligne à ligne les calculs faits dans les sections 4.4 et 4.5 d'une part et en utilisant la proposition 4.3.6 et le théorème 4.3.4 d'autre part, il n'est pas difficile de voir que :

(i) l'application $\widetilde{\Phi}$ définie par

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} : \widetilde{\mathcal{E}} \times \widetilde{\Gamma} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}} \\ ((B_u)_{u \in CD_G(\gamma,\sigma)}, (C_u)_{u \in CD_G(\gamma,\sigma)}) &\longmapsto (\Phi_u(B_u, C_u))_{u \in CD_G(\gamma,\sigma)}, \end{aligned}$$

où Φ_u est l'application définie en 4.4.b, est une bon difféomorphisme C^∞ qui envoit $(0,0) \in \widetilde{\mathcal{E}} \times \widetilde{\Gamma}$ sur $0 \in \widetilde{\mathcal{H}} = \mathrm{Lip}^p(CD_G(\gamma, \sigma), C^\infty(\mathbf{T}^d, g))$;

(ii) l'application $\widetilde{\Phi}^{-1}$ est une bonne application C^∞ définie sur un voisinage

$$\widetilde{\mathcal{W}}(r_2, p, \varepsilon_2 \gamma^{-\nu_2}),$$

où $r_2 \in \mathbf{N}$, $\varepsilon_2, \nu_2 > 0$ ne dépendent pas de γ.

Résumons :

Théorème 4.6.1. — *Il existe $\nu_2 > 0$, $r_2 \geq 0$, tels que, pour tout $(A_u)_{u \in CD_G(\gamma,\sigma)} \in \widetilde{\mathcal{W}}(r_2, p, \gamma^{-\nu_2}\varepsilon_2)$, il existe un unique $(\widetilde{B}, \widetilde{C}) \in \widetilde{\mathcal{E}} \times \widetilde{\Gamma}$ vérifiant*

$$\forall u \in CD_G(\gamma, \sigma), \quad A_u = \Phi_u(B_u, C_u),$$

et la dépendance de $((B_u)_u, (C_u)_u)$ en fonction de $(A_u)_u$ est donnée par une bonne application C^∞ (entre espaces munis de la Lip^p *topologie au sens de Whitney). En outre,*

$$\widetilde{\Phi} \in \mathbf{A}^{2,-1}(r_2, \gamma^{\nu_2}(c_s)_s).$$

Reformulons le théorème précédent en posant $u = e^{\overline{A}}$, $\overline{A} \in g$ et $A = \overline{A} + F$.

Corollaire 4.6.2. — *Soit V un ouvert borné de g. Il existe $B \in \mathrm{Lip}^p(CD_g(\gamma,\sigma), \mathcal{E})$, et $C \in \mathrm{Lip}^p(CD_g(\gamma,\sigma), \Gamma)$ tels que, pour tout $\overline{A} \in V \cap CD_g(\gamma,\sigma)$ et tout $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d \times V)$ vérifiant*

$$|F|_{r_2,p} \leq \varepsilon_2 \gamma^{-\nu_2},$$

on ait, pour tout $\theta \in \mathbf{T}^d$,

$$e^{\overline{A}+F(\theta,\overline{A})} = e^{C(F,\overline{A})} e^{B(\theta+\omega,F,\overline{A})} e^{\overline{A}} e^{-B(\theta,F,\overline{A})}. \tag{26}$$

On a alors, pour $j = 0,1,2$, $D^jC \in \mathcal{A}(r_2, p, \gamma^{\nu_2}(c_s)_s)$. L'expression (26) est alors unique.

4.6.b. Résultats en mesure positive. — Soit V un ouvert borné de g. Remarquons que si $\overline{A}, \overline{A}_2 \in t$, on peut toujours écrire

$$e^{\overline{A}+\overline{A}_2} = e^{\overline{A}_2} e^{\overline{A}},$$

si bien que l'unicité de l'écriture (26) montre :

Lemme 4.6.3. — *Si $\overline{C} = \mathrm{Ext}_k(C)$ est l'extension Whitney de l'application C définie dans le corollaire 4.6.2, alors pour tout $\overline{A} \in CD_t(\gamma,\sigma) \cap V$ et tout $\overline{A}_2 \in t$ vérifiant $|\overline{A}_2| \leq \varepsilon_2 \gamma^{-\nu_2}$ on a*

$$\overline{C}(\overline{A}_2, \overline{A}) = \overline{A}_2.$$

En particulier, en tout point de densité $\overline{A}$ de $CD_t(\gamma,\sigma)$,

$$\frac{\partial}{\partial G} \overline{C}(-G, \overline{A} + G)|_{G=0} = -\mathrm{Id}\,.$$

Démonstration. — La première partie du lemme est évidente d'après ce qui précède. En particulier pour tout $G \in t$, $|G| \leq \varepsilon_2 \gamma^{-\nu_2}$, tel que $\overline{A} + G \in CD(\gamma,\sigma) \cap t$ on a

$$\overline{C}(-G, \overline{A} + G) = -G.$$

Comme $\overline{A}$ est un point de densité, il n'est pas difficile de voir (utiliser une décomposition en cônes au voisinage de $\overline{A}$) qu'il existe $\dim t$ vecteurs linéairement indépendants $v_i \in t$ et des suites $G_{n,i} \in t$ tels que $\overline{A} + G_{n,i} \in CD_t(\gamma,\sigma)$ et $|G_{n,i}|^{-1} G_{n,i} \to v_i$; par conséquent, $(\frac{\partial}{\partial G} \overline{C}(-G, \overline{A}+G))|_{G=0} \cdot v_i = -v_i$, c'est-à-dire la conclusion du lemme. □

Nous noterons $\widetilde{CD}_t(\gamma,\sigma)$ l'ensemble des points de densité de $CD_t(\gamma,\sigma)$; rappelons que presque tout point d'un ensemble de mesure positive est de densité (*cf.* par exemple [**24**]). Nous noterons en outre pour $\varepsilon>0$,

$$W_2(p,\varepsilon)=\{G\in \mathrm{Lip}^p(\widetilde{CD}_t(\gamma,\sigma),t),\ |G|_p\leq\varepsilon\}.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.6.4. — *Il existe $\varepsilon_3>0$, $r_3\in\mathbf{N}$, $\nu_3>0$ et une application*

$$G:\widetilde{\mathcal{W}}(r_3,p,\varepsilon_3\gamma^{-\nu_3})\longrightarrow W_2(p,\varepsilon_2\gamma^{-\nu_2})$$

tels que, pour tout $\overline{A}\in\widetilde{CD}_t(\gamma,\sigma)$,

$$\overline{C}(F(\overline{A})-G(\overline{A},F(\overline{A})),\overline{A}+G(\overline{A},F(\overline{A}))=0.$$

En outre, $G\in\mathcal{A}^2(r_3,p,\gamma^{\nu_3}(c_s)_s)$.

Démonstration. — Définissons

$$\begin{array}{rcl} f:\widetilde{\mathcal{W}}(r_2,p,\varepsilon_2\gamma^{-\nu_2})\times W_2(p,\varepsilon_2\gamma^{-\nu_2}) & \longrightarrow & W_2(p,\varepsilon_2\gamma^{-\nu_2}) \\ (F,G(\cdot)) & \longmapsto & \overline{C}(F-G(\cdot),\cdot+G(\cdot)). \end{array}$$

Le lemme 4.6.3 montre que

$$D_{G(\cdot)}f(0,0)=-\,\mathrm{Id}\,.$$

Remarquons d'autre part que d'après le théorème de Whitney du 4.3.b, $|\widetilde{C}|_{s,p}\leq\kappa|C|_{s,p}$, pour tout $s\in\mathbf{N}$ ($\kappa>0$ étant indépendante de γ) et donc d'après le corollaire 4.6.2, $f\in\mathcal{A}^2(r_2,p,\kappa\gamma^{\nu_2}(c_s)_s)$. Par conséquent, $D_{G(\cdot)}f(F,G)$ est inversible pour tout $(F,G)\in\widetilde{\mathcal{W}}(r_2,p,\eta\gamma^{-\nu_2})\times W_2(p,\eta\gamma^{-\nu_2})$ pour un $\eta>0$ suffisamment petit et indépendant de γ. On peut donc appliquer un théorème des fonctions implicites à la Hamilton qui découle immédiatement du théorème 4.3.4 : il existe $r_3\in\mathbf{N}$, $\varepsilon_3>0$ et $G:\widetilde{\mathcal{W}}(r_3,p,\varepsilon_3\gamma^{-\nu_3})\to W_2(p,\eta\gamma^{-\nu_2})$ une bonne application C^∞ telle que $G\in\mathcal{A}^2(r_3,p,\gamma^{\nu_3}(c_s)_s)$,

$$f(F,G(F,.))=0,$$

c'est-à-dire telle que pour tout $\overline{A}\in\widetilde{CD}_g(\gamma,\sigma)$ on ait

$$\overline{C}(F(\overline{A})-G(\overline{A},F(\overline{A})),\overline{A}+G(\overline{A},F(\overline{A})))=0.$$

□

On peut alors énoncer :

Théorème 4.6.5. — *Si $F\in C^\infty(\mathbf{T}^d\times V,g)$ vérifie $|F|_{r_3}\leq\varepsilon_4\gamma^{-\nu_3}$ où $\varepsilon_4>0$ est suffisamment petit (et indépendant de γ), alors l'ensemble des $\overline{A}\in t\cap V$ pour lesquels* $\exp(\overline{A}+F)$ *n'est pas réductible est de mesure inférieure à $a_{d,\sigma}\gamma^{-1}$, où $a_{d,\sigma,V}$ est une constante qui ne dépend que de d,σ,V.*

Démonstration. — Supposons donc F fixée. D'après (26), l'ensemble des $\overline{A}$ pour lesquels $\exp(\overline{A}+F)$ est réductible contient l'ensemble des $\overline{A}$ qui sont dans $\widetilde{CD}_t(\gamma,\sigma)$ et pour lesquels $\overline{A}+G(\overline{A},F)\in CD_t(\gamma,\sigma)$. Notons $\overline{G}$ l'extension Whitney de G. On a alors (en vertu du théorème de Whitney) $\overline{G}\in\mathcal{A}^2(r_3,p,\gamma^{\nu_3}(c_s)_s)$ et comme $\overline{G}(\overline{A},0)=0$, le théorème des accroissements finis montre que, si $|F|_{r_3}\leq\varepsilon_4\gamma_4^{-\nu_3}$ avec $\varepsilon_4>0$ suffisamment petit et indépendant de γ,

$$|\partial_{\overline{A}}\overline{G}(\overline{A},F)|\leq\frac{1}{100}.$$

Ainsi $\overline{A}\mapsto\overline{A}+G(\overline{A},F)$ est un difféomorphisme proche de l'identité et, par conséquent, la mesure des $\overline{A}\in V$ pour lesquels, $\overline{A}+G(\overline{A},F)\notin CD_t(\gamma,\sigma)$ est plus petite que $2m((V\cap t)-CD_t(\gamma,\sigma))$ (où m est la mesure de Lebesgue). Or d'après (26), l'ensemble des $\overline{A}\in V\cap t$ pour lesquels $\exp(\overline{A}+F)$ n'est pas réductible est contenu dans la réunion de $(V\cap t)-\widetilde{CD_t(\gamma,\sigma)}$ et de l'ensemble des $\overline{A}\in V\cap t$ pour lesquels $\overline{A}+G(\overline{A},F)\notin CD_t(\gamma,\sigma)$. On peut donc dire que l'ensemble des $\overline{A}\in V\cap t$ pour lesquels $\exp(\overline{A}+F)$ n'est pas réductible est de mesure inférieure à $3m((V\cap t)-CD_t(\gamma,\sigma))$, c'est-à-dire est de mesure plus petite que $a_{d,\sigma,V}\gamma^{-1}$, $a_{d,\sigma,V}>0$ étant une constante indépendante de γ. □

On a également

Corollaire 4.6.6. — *Si avec les notations précédentes $|F|\leq\varepsilon_4$, l'ensemble des $\overline{A}$ dans $t\cap V$ pour lesquels $\exp(\overline{A}+F)$ n'est pas réductible est de mesure inférieure à $\widetilde{a}\varepsilon^{1/\nu_3}$ où $\widetilde{a}=a\varepsilon_4^{1/\nu_3}>0$ ne dépend que de H,σ,d,g.*

Démonstration. — Il suffit de choisir $\varepsilon\leq H^{-\nu_3}\varepsilon_4$ de façon que $\gamma=(\varepsilon_4/\varepsilon)^{1/\nu_3}$ soit plus grand que H (introduit dans la section 4.1) et d'appliquer le théorème précédent avec ce γ. □

On déduit également, comme dans la démonstration du théorème 4.6.5, le résultat en mesure positive du chapitre 3 :

Théorème 4.6.7. — *Soient Λ un intervalle compact de $\mathbf{R}$, $\mu>0$ et $\overline{A}(\lambda)\in C^\infty(\Lambda,t)$ vérifiant pour toute racine $\beta\in\Delta$ et tout $\lambda\in\Lambda$, $|\partial_\lambda(\beta\circ A)(\lambda)|\geq\mu>0$. Alors il existe $\varepsilon_4>0$ et $r_3\in\mathbf{N}$ tels que si $F\in C^\infty(\mathbf{T}^d\times\Lambda,g)$ vérifie*

$$\max_{0\leq j\leq 2}|\partial_\lambda^j F(\cdot,\lambda)|_{r_3}\leq\varepsilon\leq\varepsilon_4,$$

l'ensemble des paramètres $\lambda\in\Lambda$ pour lesquels $\exp(\overline{A}(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ n'est pas réductible est de mesure inférieure à $\mathrm{cte}\cdot\mu^{-1}\varepsilon^{1/\nu_3}$.

Démonstration. — De la même façon que dans la démonstration du théorème 4.6.5, l'ensemble des $\lambda\in\Lambda$ pour lesquels $\exp(\overline{A}(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ n'est pas réductible est dans la réunion de l'ensemble des $\lambda\in\Lambda$ pour lesquels $\overline{A}(\lambda)\notin\widetilde{CD}_t(\gamma,\sigma)$ et de celui des

λ pour lesquels $g(\lambda) = \overline{A}(\lambda) + G(\overline{A}(\lambda), F(\cdot, \lambda))$ n'est pas dans $CD_t(\gamma, \sigma)$. Or avec F choisi comme dans l'hypothèse du théorème 4.6.5, pour toute racine $\beta \in \Delta$,

$$|\partial_\lambda(\beta \circ \overline{g})(\lambda)| \geq \frac{\mu}{2}.$$

La mesure de l'ensemble des λ pour lesquels $\exp(\overline{A}(\lambda) + F(\lambda))$ n'est pas réductible est donc majorée par $3\mu^{-1}\#(\Delta)m([-M, M] - CD(\gamma, \sigma))$ où $M = \max_{\beta \in \Delta} |\beta(\overline{A}(\Lambda))|$. On conclut alors la preuve du théorème 4.6.7 comme dans la démonstration du corollaire 4.6.6. $\square$

Remarque. — En utilisant la notion de *transversalité à la Pyartli* (*cf.* chapitre 6) ou de courbe non-planaire (*cf.* **[22]**, **[25]**) on pourrait en fait démontrer à partir du théorème 6.2.1 une version plus générale du théorème 4.6.7 où l'hypothèse de torsion sur $\overline{A}(\lambda)$, $|\partial_\lambda(\beta \circ A)(\lambda)| \geq \mu > 0$, est remplacée par une condition plus faible (de non-planéarité par exemple).

CHAPITRE 5

DENSITÉ ET QUASI-DENSITÉ DES SYSTÈMES RÉDUCTIBLES AU VOISINAGE DES CONSTANTES

5.1. Introduction

Nous abordons dans ce chapitre l'étude de la densité des systèmes réductibles aux voisinages des constantes dans un groupe G compact semi-simple connexe. Le résultat principal est que si G est le groupe $SO(3)$, $SO(4)$, $SU(2)$, $SU(N)$, alors au voisinage des constantes les systèmes réductibles sont denses. Dans le cas où G est un groupe compact semi-simple connexe général, la densité n'est plus assurée, mais on obtient un résultat de densité modulo un revêtement χ_G-fini, χ_G étant un entier positif ne dépendant que du groupe G (celui défini au chapitre 2).

Notons comme d'habitude $C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ l'ensemble des fonctions lisses sur le tore d-dimensionnel et à valeurs dans l'algèbre g du groupe. Le résultat que l'on aimerait démontrer est le suivant : étant donné $A \in g$, dans l'ensemble des $A + F$ avec $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$, et $|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0$ pour un certain s_0 et un ε_0 petit, les systèmes réductibles constituent une partie dense. Le résultat que nous montrons est seulement le suivant :

Théorème 5.1.1. — *Soient G un groupe compact semi-simple, $A \in g$ un élément de son algèbre g et $\omega \in CD_d(\gamma, \sigma)$* (mod 1) *c'est-à-dire satisfaisant pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$ et tout $l \in \mathbf{Z}$,*

$$|(k, \omega) + l| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}.$$

Il existe $\varepsilon_0, s_0 > 0$ et un entier χ_G ne dépendant que du groupe tels que, pour tout $F \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$ vérifiant $|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0$ et tous $\varepsilon, s > 0$, il existe $F' \in C^\infty(\mathbf{R}^d, g)$ qui est $\chi_G \mathbf{Z}^d$-périodique, rendant $(\omega/2\pi, A + F')$ réductible modulo une fonction χ_G-périodique, et satisfaisant, $|(A + F') - (A + F)|_s \leq \varepsilon$. D'autre part, si $G = SO(3, \mathbf{R})$, $SU(N)$ ($N \geq 1$), alors on peut prendre $\chi_G = 1$, c'est-à-dire que l'ensemble des systèmes réductibles est dense dans

$$\{A + F, \quad F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g), \quad |F|_{s_0} \leq \varepsilon_0\}, \quad g = so(3, \mathbf{R}), su(N).$$

5.2. Description de la preuve

5.2.a. La méthode d'Eliasson dans le cas $SO(3,\mathbf{R})$. — La démonstration du résultat précédent repose sur une méthode introduite par Eliasson dans **[9]** et **[10]**, dans le cas où le groupe G égale $SL(2,\mathbf{R})$ (qui n'est pas compact) ou $SO(3)$. Illustrons cette dernière dans le cas où le groupe $G = SO(3)$, dont l'algèbre est l'ensemble des matrices anti-symétriques de trace nulle. Soit alors $A_1 \in g = \mathbf{R}^3$ et $\mathrm{ad}(A_1) \in \mathrm{End}(g)$ l'opérateur adjoint associé dont les valeurs propres sont 0, $\sqrt{-1}\alpha_1$, $-\sqrt{-1}\alpha_1$. D'après ce que l'on a vu au chapitre 3, si α_1 est diophantien, et si $F_1 \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ est suffisament petit, il existe $Y_1 \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ tel que

$$(\omega/2\pi, A_1 + F_1(\cdot)) \ \mathcal{R}(e^{Y_1}) \ (\omega/2\pi, A_2 + F_2(\cdot)),$$

avec $F_2(\cdot)$ bien plus petit que $F_1(\cdot)$ et $A_2 = A_1 + \widehat{F}_1(0)$. Si les racines $\pm\alpha_2$ de A_2 sont à nouveau diophantiennes, on peut recommencer la procédure précédente et ainsi de suite.

Dans le cas où α_1 est résonnant il semble donc que l'on soit désarmé. L'idée d'Eliasson pour obvier à ce problème (*cf.* aussi **[21]**) est que si l'on renonce à chercher une conjugaison proche de l'identité, il est possible de conjuguer dans tous les cas $A_1 + F_1$ à un système $A_2 + F_2$ avec F_2 beaucoup plus petit que F_1. En fait il est toujours possible d'enlever une résonance.

Fixons comme au chapitre 3, $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$ diophantien, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall\, k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}, \quad |(k,\omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma},$$

et deux suites K_n, N_n avec $K_n \geq \gamma 2^{1+\sigma} N_n^\sigma$. Notons α_n la racine à la n-ième étape de $\mathrm{ad}(A_n)$.

(i) Si α_n est diophantien jusqu'à l'ordre N_n *i.e.*

$$\forall\, k,\ 0 < |k| \leq N_n, \quad |\alpha_n - (k,\omega)| \geq \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau},$$

on peut appliquer la procédure décrite au chapitre 3.

(ii) Sinon, vu l'hypothèse que l'on a faite sur N_n, K_n, il est possible de montrer que l'inégalité précédente n'est violée que pour une valeur au plus de k, disons k_0. Remarquons alors que la fonction

$$B_n(x) = e^{-2\pi (k_0, x) A_n / |A_n|},$$

est bien dans $C^\infty(\mathbf{T}^d, G)$, et commute pour toute valeur de x à A_n. Ainsi,

$$\begin{aligned} L_{\omega/2\pi} B_n \cdot B_n^{-1} + \mathrm{Ad}(B_n)\cdot(A_n + F_n) &= -(k_0,\omega)\frac{A_n}{|A_n|} + A_n + \mathrm{Ad}(B_n)\cdot F_n \\ &= \frac{A_n}{|A_n|}(-(k_0,\omega) + |A_n|) + \mathrm{Ad}(B_n)\cdot F_n. \end{aligned}$$

Il apparaît donc, si on pose $\widetilde{A}_n = A_n - (k_0,\omega)A_n/|A_n|$, et $\widetilde{F}_n = \mathrm{Ad}(B_n)\cdot F_n$, que $B_n(\cdot)$ conjugue $(\omega/2\pi, A_n + F_n(\cdot))$ à $(\omega/2\pi, \widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n(\cdot))$ avec $\alpha(\widetilde{A}_n) = \alpha(A_n) - (k_0,\omega)$ très proche de 0, et $\widetilde{F}_n = \mathrm{Ad}(B_n)\cdot F_n$ guère moins petit que F_n.

La remarque fondamentale est maintenant que, ω étant diophantien, $\alpha(\widetilde{A}_n)$ qui est très proche de 0 peut être considéré comme diophantien jusqu'à l'ordre N_n. La procédure du (i) peut donc s'appliquer et on trouve un $\widetilde{Y}_n$ conjuguant $\widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n$ à $A_{n+1} + F_{n+1}$ avec F_{n+1} beaucoup plus petit que F_n.

Ainsi, dans tous les cas on aura construit des suites $A_n, F_n(\cdot), Y_n(\cdot), B_n(\cdot)$ telles que

$$(1) \qquad (\omega/2\pi, A_1 + F_1(\cdot))\ \mathcal{R}(e^{\widetilde{Y}_{n-1}}B_{n-1}\cdots e^{\widetilde{Y}_1}B_1)\ (\omega/2\pi, A_n + F_n(\cdot)),$$

le terme F_n décroissant très vite avec n. Cependant, les $B_n(\cdot)$ étant loin de l'identité, il n'y a aucune raison pour que le produit intervenant plus haut en (1) converge.

La densité dans ce cas est alors particulièrement facile à démontrer puisque l'égalité de conjugaison se récrit

$$A_1 + F_1 - \mathrm{Ad}(G_n)\cdot F_n = L_{\omega/2\pi}G_n\cdot G_n^{-1} + \mathrm{Ad}(G_n)\cdot(A_n),$$

avec

$$G_n = e^{\widetilde{Y}_{n-1}}B_{n-1}\cdots e^{\widetilde{Y}_1}B_1;$$

or F_n tend vers 0 bien plus vite que ne croît G_n, si bien que le terme $\mathrm{Ad}(G_n)\cdot F_n$ tend vers 0. Le résultat de densité est démontré.

5.2.b. Etude du cas général

Le problème des racines résonnantes. — Pour pouvoir transposer les résultats précédents au cas où G est un groupe compact quelconque, il faut tout d'abord être capable d'éliminer les résonances. Ce problème est plus délicat à résoudre que dans le cas $SO(3)$ du fait d'éventuelles résonances entre les racines elles mêmes. Par exemple pour $G = SO(2\times 4)$, si on note $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ les racines de la base de Weyl, $\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ est également une racine. Supposons que par hasard, $\beta_3(A) = \beta_4(A) = 0$ et $\beta_1(A) = (k,\omega)$, $\beta_2(A) = \frac{1}{2}(k,\omega)$. Alors, $(\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_4)(A) = 2(k,\omega)$ est résonnant. Il est facile de voir qu'il est impossible d'enlever cette résonance (sans en créer de nouvelles) en ajoutant des entiers x_i aux $\beta_i(A)$. En d'autres termes, on ne peut pas enlever cette résonance par des conjugaisons de la forme $e^{2\pi(k,x)H}$, k étant entier et H sur un tore maximal passant par A, vérifiant pour tout racine β, $\beta(H) \in \mathbf{Z}$. Si l'on cherche par contre un tel B avec $k \in \frac{1}{2}\mathbf{Z}^d$ cela devient possible; la conjugaison B est alors seulement $2c_G\mathbf{Z}^d$-périodique (c_G étant le cardinal du centre de G).

Le phénomène d'augmentation de période décrit plus haut n'apparaît cependant pas dans le cas où le groupe $G = SU(N)$, du fait des relations particulières entre les racines. La démonstration de la densité dans le cas $SU(N)$ est donc la même que celle du cas $SO(3)$, modulo une procédure d'élimination des résonances que nous donnons au 5.3.

Dans le cas général, le résultat démontré est donc qu'à la n-ième étape, il existe une conjugaison $G_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d, G)$, $c_G P_n \mathbf{Z}^d$-périodique, qui conjugue $A_1 + F_1$ à $A_n + F_n$ avec $A_n \in g$, $F_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d, g)$, $P_n \mathbf{Z}^d$-périodique où $P_n \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

Ainsi, $A_1 + F_1 - \mathrm{Ad}(B_n) \cdot F_n$ qui est très proche de $A_1 + F_1$ dans $C^\infty(\mathbf{R}^d, g)$ est réductible mais seulement dans $C^\infty(\mathbf{R}^d / P_n \mathbf{Z}^d, G)$. Ceci n'est donc pas satisfaisant.

Comment diminuer la période. — Il est cependant possible de diminuer la période précédente et de trouver une conjugaison $\widetilde{B}_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d / \chi_G \mathbf{Z}^d, G)$ où χ_G est une constante ne dépendant que du groupe.

Ce dernier point utilisera les résultats montrés au chapitre 2. Appelons $Z_i(\cdot)$ le temps 2π du flot associé à $A_i + F_i(\cdot)$. D'après les résultats du 1.4, Z_1 est conjugué à Z_n modulo $B = G_n$. Ainsi, pour $x \in \mathbf{R}^d$,

$$B(x+\omega) Z_1(x) B(x)^{-1} = Z_n(x).$$

Ecrivant une égalité similaire pour $k \in \mathbf{Z}^d$, et utilisant la $\mathbf{Z}^d$-périodicité de Z_1, il vient

$$B(x+k+\omega) Z_1(x) B(x+k)^{-1} = Z_n(x+k),$$

ce qui donne

$$B(x+k+\omega) B(x+\omega)^{-1} Z_n(x) B(x) B(x+k)^{-1} = Z_n(x+k).$$

Posons

$$C_k(x) = B(x+k) B(x)^{-1},$$

et remarquons que $Z_n(x)$ est pratiquement constant égal à $e^{2\pi A_n}$, puisque F_n est très petit. Il vient alors

$$C_k(x+\omega) \approx e^{2\pi A_n} C_k(x) e^{-2\pi A_n}.$$

Si $2\pi A_n$ était générique (au sens du chapitre 2), et si l'approximation précédente était exacte, la minimalité de ω entraînerait que $C_k(x)$ ($x \in \mathbf{R}^d$) est constant égal à $C_k \in G$. Il est possible de montrer qu'en fait $C_k(x) \approx C_k$. Il apparaît alors que

$$C_{k+l} \approx C_k C_l,$$

et

$$C_k A_n \approx A_n C_k.$$

Ainsi les $(C_k)_{k \in \mathbf{Z}^d}$ forment une famille presque abélienne.

Supposons dans la suite qu'elle soit effectivement abélienne. On pourrait dire, d'après le lemme 2.3.14 du chapitre 2, que, pour un certain χ_G ne dépendant que du groupe, les $C_k^{\chi_G}$ sont sur un même tore (maximal) T_{A_n}. Ceci permettrait d'étendre les C_k en $C(x)$ défini sur $\mathbf{R}^d$, à valeurs dans le tore maximal T_{A_n} et tel que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$C(k\chi_G) = C_{k\chi_G}.$$

Ainsi, si l'on pose

$$\widetilde{B}(x) = C(x)^{-1}B(x),$$

on a

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(x+k)\widetilde{B}(x)^{-1} &= C^{-1}(x+k)B(x+k)B(x)^{-1}C(x)^{-1} \\ &= C(x+k)^{-1}C_kC(x),\end{aligned}$$

et donc pour $k \in \chi_G\mathbf{Z}^d$, les trois termes précédents commutent et $\widetilde{B}(x+k) = \widetilde{B}(x)$, *i.e.* $\widetilde{B}$ est $\chi_G\mathbf{Z}^d$-périodique.

On a également

$$L_{\omega/2\pi}BB^{-1} + \mathrm{Ad}(B)(A_1 + F_1) = A_n + F_n,$$

soit

$$\begin{aligned}A_1 + F_1 &= L_{\omega/2\pi}B^{-1} \cdot B + \mathrm{Ad}(B^{-1}) \cdot (A_n + F_n) \\ &= L_{\omega/2\pi}B^{-1}B + \mathrm{Ad}(B^{-1}C)(\mathrm{Ad}(C^{-1}) \cdot (A_n + F_n)) \\ &= L_{\omega/2\pi}(B^{-1}CC^{-1})CC^{-1}B + \mathrm{Ad}(B^{-1}C) \cdot (A_n + \mathrm{Ad}(C^{-1}) \cdot F_n) \\ &= L_{\omega/2\pi}(B^{-1}C) \cdot (B^{-1}C)^{-1} \\ &\qquad + Ad(B^{-1}C) \cdot (A_n + (L_{\omega/2\pi}C^{-1})C + \mathrm{Ad}(C^{-1}) \cdot F_n).\end{aligned}$$

Remarquons que $(L_{\omega/2\pi}C^{-1}) \cdot C = \text{cste}$. Soit alors $H \in T_{A_n}$; on utilise le résultat de réductibilité en mesure positive montré aux chapitres 3, 4, pour établir que

$$\lambda H + A_n + (L_{\omega/2\pi}C^{-1}) \cdot C + \mathrm{Ad}(C^{-1}) \cdot F_n,$$

est réductible pour un $|\lambda| \leq \text{cste} \cdot |F_n|^\alpha$. Ceci montre que $A_1 + F_1 - \mathrm{Ad}(\widetilde{B}) \cdot (\lambda H)$ est réductible dans $\mathbf{R}^d/c_GP_n\mathbf{Z}^d$. Mais comme l'on peut choisir λ de façon que la constante à laquelle est conjugué le système soit générique, en utilisant la proposition 2.2.4 on voit que $A_1 + F_1 - \mathrm{Ad}(\widetilde{B})(\lambda H)$ qui est dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, g)$ est conjugué à une constante modulo $\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d$.

La démonstration se fera donc suivant le plan suivant.

Après avoir procédé dans les sections 5.3 et 5.4 à l'étude des résonances entre les racines et montré que la procédure d'Eliasson peut être mise en œuvre, pourvu que l'on accepte des conjugaisons qui ne sont plus 1-périodiques mais seulement P_n-périodique (à la n-ième étape), nous donnons les estimées sur les F_n dans les sections 5.5 et 5.6 et décrivons la méthode utilisée pour réduire la périodicité de la conjugaison au 5.7. Enfin nous concluons la démonstration du théorème au 5.8.

5.3. Résonances

5.3.a. Notations, définitions. — Nous noterons $CD(\gamma,\sigma)$ l'ensemble des $\omega \in \mathbf{R}^d$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$|(k,\omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma};$$

de même $CD(\gamma,\sigma) \pmod 1$ sera l'ensemble des $\omega \in \mathbf{R}^d$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$ et tout $l \in \mathbf{Z}$,

$$|(k,\omega) - l| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}.$$

Considérons des entiers positifs N, P et un réel $K > 0$ tels que

$$K > 2^{1+\sigma}\gamma P N^\sigma. \tag{2}$$

Pour de tels nombres nous définissons les ensembles $DS(N,K,P) = DS_\omega(N,K,P)$ des $\alpha \in \mathbf{R}$ « diophantiens jusqu'à l'ordre N », c'est-à-dire satisfaisant pour tout $0 < |k| \leq N$, $k \in \mathbf{Z}^d$, (noter que, par rapport au chapitre 3, $\widetilde{i} = 0$)

$$|\alpha - (k/P,\omega)| > K^{-1}. \tag{3}$$

Son complémentaire sera noté $RS(N,K,P) = RS_\omega(N,K,P)$.

Enfin si $L \geq 1$ est un entier, nous appelerons $DS_\omega(N,K,P) \pmod{L^{-1}}$ l'ensemble des α tels que, pour tout $0 < |k| \leq N$ et tout $l \in \mathbf{Z}^d$,

$$|\alpha - (k/P,\omega) - \frac{l}{L}| > K^{-1}.$$

L'ensemble $RS(N,K,P) \pmod{L^{-1}}$ sera défini de façon analogue.

Nous donnons maintenant le lemme suivant inspiré d'Eliasson (**[9]**, **[10]**).

Lemme 5.3.1. — *Soient $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$, P, N', N des entiers positifs et $K > 0$ un réel tels que $N' \geq N$ et*

$$K \geq 2^{1+\sigma}\gamma P N'^\sigma \ (\geq 2^{1+\sigma}\gamma P N^\sigma).$$

(i) *Si $\alpha \in RS(N,K,P)$ alors*

   (a) *il existe un* unique *k_0, $0 < |k_0| \leq N$ tel que*

$$|\alpha - (k_0/P,\omega)| \leq K^{-1},$$

   (b) *et dans ce cas on a, $\alpha - (k_0/P,\omega) \in DS(N',K,P)$.*

(ii) *Si $\alpha \in DS(N,K,P)$ alors $\alpha - (k/P,\omega) \in DS(N - |k|, K, P)$.*

Démonstration. — Pour (i)(a) : s'il existait deux $k_i \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k_i| \leq N$ $(i = 1,2)$ violant l'inégalité (3), on aurait

$$|((k_1 - k_2)/P,\omega)| \leq 2K^{-1},$$

soit

$$|(k_1 - k_2,\omega)| \leq 2K^{-1}P,$$

Or, vu que $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$,

$$|(k_1-k_2,\omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k_1-k_2|^\sigma} \geq \frac{\gamma^{-1}}{(2N)^\sigma}.$$

D'où il viendrait

$$\frac{\gamma^{-1}}{(2N)^\sigma} \leq 2K^{-1}P,$$

ce qui contredit (2) et démontre le point (i)a.

(i)(b) : Maintenant, soit k_0 tel que $0<|k_0|\leq N$ pour lequel

$$|\alpha-(k_0/P,\omega)| \leq K^{-1}.$$

Alors pour tout $0<|k|\leq N'$, on a

$$\begin{aligned} |\alpha-(k_0/P,\omega)-(k/P,\omega)| &\geq |(k/P,\omega)|-|\alpha-(k_0/P,\omega)| \\ &\geq \gamma^{-1}N'^{-\sigma}P^{-1}-K^{-1}, \\ &\geq K^{-1}, \end{aligned}$$

vu que l'on a supposé, $2^{1+\sigma}K^{-1}\leq\gamma^{-1}N'^{-\sigma}P^{-1}$. Ceci montre (i)b.

La démonstration de (ii) est claire puisque si $|l|\leq N-|k|$,

$$\begin{aligned} |\alpha-(k/P,\omega)-(l/P,\omega)| &= |\alpha-((l+k)/P,\omega)| \\ &\geq K^{-1}, \end{aligned}$$

puisque $|k+l|\leq|k|+|l|\leq N$. □

Supposons $K\geq 20PN$.

Lemme 5.3.2. — *Soient* $\omega\in CD_d(\gamma,\sigma)$ (mod 1), $K\geq 20PN$ *et posons* $\widetilde{\omega}=(\omega,1)\in\mathbf{R}^{d+1}$. *Si* $\beta\in\mathbf{R}$ *vérifie*

$$|\beta|\leq(1/20P)N,$$

et s'il existe $k_0\in\mathbf{Z}^d$, $l_0\in\mathbf{Z}$ *vérifiant*

$$|k_0|+|l_0|\leq\frac{N}{20(1+|\omega|)},$$

pour lesquels

$$\beta-(k_0/P,\omega)-\frac{l_0}{P}\in DS_{\widetilde{\omega}}(N,K,P),$$

alors

$$\beta-(k_0/P,\omega)\in DS_\omega\left(\frac{N}{20(1+|\omega|)},K,P\right) \pmod{1/P}$$

Démonstration. — Supposons par l'absurde qu'il existe $0 < |k| \leq N/20(1+|\omega|)$ et $l \in \mathbf{Z}$ pour lesquels

$$|\beta - (k_0/P, \omega) - (k/P, \omega) - l/P| < K^{-1}, \tag{4}$$

alors

$$|l| \leq P(|\beta| + K^{-1}) + |k_0||\omega| + |k||\omega|,$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} |l - l_0| &\leq |l| + |l_0| \\ &\leq P(|\beta| + K^{-1}) + |k_0||\omega| + |k||\omega| + |l_0| \\ &\leq \frac{1}{4}N. \end{aligned}$$

Mais alors, (4) implique

$$\left|\beta - (k_0/P, \omega) - \frac{l_0}{P} - (k/P, \omega) - \frac{l - l_0}{P}\right| < K^{-1},$$

ce qui du fait de $0 < |k| + |l - l_0| \leq N$, contredit $\beta \in DS_{\bar{\omega}}(N, K, P) \pmod{1/P}$. □

5.3.b. Elimination des résonances. — La méthode d'élimination des résonances repose sur le constat suivant : il est toujours possible, en résolvant des systèmes d'équations linéaires à coefficients rationnels, de ramener à 0 les racines résonnantes. Cependant cette procédure perturbe les racines qui auparavant étaient diophantiennes et qui pourraient très bien devenir résonnantes. Pour prendre en compte cette difficulté, il suffit de procéder de la façon suivante : soit toutes les racines sont déjà diophantiennes, auquel cas il n'y a rien à faire ; sinon certaines sont résonnantes et on peut enlever ces résonances. Si cette dernière procédure rend résonnantes les racines diophantiennes qui restent, c'est que celles-ci n'étaient pas assez diophantiennes et on peut en fait les considérer comme résonnantes. On réitere alors l'algorithme précédent avec un ensemble de racines résonnantes initiales élargi jusqu'à aboutir à une partition en racines résonnantes d'une part et en racines diophantiennes qui restent diophantiennes après avoir ramené à 0 les racines résonnantes d'autre part. Ceci est contenu dans le lemme 5.3.4.

Nous considérons dans cette section un espace vectoriel réel t de dimension w sur lequel sont définies q formes linéaires $\beta_1, \ldots, \beta_q$. Nous supposerons que les $(\beta_j)_{1 \leq j \leq w}$ constituent une base du dual de t, t^* et nous noterons $(H_i)_{i \in \{1,\ldots,w\}}$ une base duale. Nous supposons en outre que les $(\beta_j)_{w+1 \leq j \leq q}$ peuvent s'écrire sous la forme

$$w + 1 \leq j \leq q, \quad \beta_j = \sum_{k=1}^{w} m_{j,k}\beta_k,$$

où les $m_{j,k}$ sont des rationnels de la forme $v_{j,k}/e$ ($v_{j,k}$ et e dans $\mathbf{Z}$), avec $|v_{j,k}| \leq b$.

Si ν est une matrice inversible extraite de la matrice $(m_{j,k})$, son inverse ν^{-1} est à coefficients dans $\mathbf{Q}$; comme les ν sont en nombre fini, on peut toujours supposer qu'il existe $b, \widetilde{D}$ entiers positifs (≥ 1) tels que leurs coefficients soient de la forme $x/\widetilde{D}$, où $x \in \mathbf{Z}$ est de module inférieur ou égal à b.

Nous poserons
$$D = e^2 \widetilde{D}.$$

Si N, K, P sont fixés comme dans la sous-section 5.3.a, nous définissons $q+1$ entiers, $(N_i)_{1 \leq i \leq q+1}$ vérifiant $N_1 = N$ et
$$N_{i+1} \geq a \cdot N_i,$$
où
$$a = \max(4b^2(q+1)^2 2^{1+\sigma}\gamma D^{1+\tau}, 4b(1+q)^2 2^{1+\sigma} e, 40(1+|\omega|)qb\widetilde{c}_1),$$
où $\widetilde{c}_1 = 2b(1+q)^2(1+b)^2 e 2^q$.

Posons également
$$\widetilde{N}_i = 20(1+|\omega|) \cdot N_i.$$
Constatons que
$$2 \cdot (1 - \frac{2b(1+q)^2(1+b)^2 e}{a})^{-1} \geq 1.$$

Nous pouvons énoncer la proposition suivante.

Proposition 5.3.3. — *Soit $K \geq 4b^2(q+1)^2 2^{1+\sigma}\gamma D^{q+1}\widetilde{N}_{q+1}^{\sigma}$, et $A \in t$; alors il existe $p \leq q$ et des entiers $k_i \in \mathbf{Z}^d$ vérifiant*
$$|k_i| \leq \widetilde{c}_1 \cdot \widetilde{N}_p,$$
où $\widetilde{c}_1 = 2b(1+q)^2(1+b)^2 e 2^q$, et tels que, si l'on pose
$$\widetilde{A} = A - \sum_{i=1}^{w} \frac{(k_i, \omega)}{D^{p+1}} H_i,$$
on ait, pour tout $j \leq q$,
$$\beta_j(\widetilde{A}) \in DS((1/2)\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1}).$$
En outre,
$$|\widetilde{A}| \leq c_7(1+|A|).$$
avec $c_7 = qe(1+q)^2(1+b)^2 + Cq$.

Démonstration. — Dans tout ce qui suit $A \in g$ est fixé. Nous montrons tout d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.3.4. — *Soit $E = \{\beta_1(A), \dots, \beta_q(A)\}$. Il existe une partition de E en*
$$E = (E \cap RS(\widetilde{N}_p, K, D^p)) \cup (E \cap DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1}).$$

Démonstration. — Posons $R_i = RS(\widetilde{N}_i, K, D^i)$, $D_i = DS(\widetilde{N}_i, K, D^i)$. Si $\alpha \in R_i$, il existe $|k| \leq \widetilde{N}_i$ tel que

$$|\alpha - (k/D^i, \omega)| \leq K^{-1},$$

donc

$$|\alpha - (kD/D^{i+1}, \omega)| \leq K^{-1},$$

et, par conséquent, $\alpha \in R_{i+1}$ puisque $D\widetilde{N}_i \leq \widetilde{N}_{i+1}$. Ainsi,

$$R_i \subset R_{i+1} \quad \text{et} \quad D_{i+1} \subset D_i.$$

Posons alors $p := \max\{i \leq q, D_i \cap E \neq D_{i+1} \cap E\}$. Nous avons

$$D_{p+1} \cap E = D_p \cap E \quad \text{et donc} \quad E = (D_{p+1} \cap E) \cup (R_p \cap E).$$

□

Nous poserons désormais

$$I_d = \{i \mid 1 \leq i \leq q, \beta_i(A) \in DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1})\},$$

et

$$I_r = \{i \mid 1 \leq i \leq q, \beta_i(A) \in RS(\widetilde{N}_p, K, D^p)\}.$$

Nous passons maintenant à la preuve de la proposition 5.3.3.

Définition de H_r. — Pour $j \leq w$ tel que $j \in I_r$, il existe l_j, $0 < |l_j| \leq \widetilde{N}_p$ pour lesquels

$$|\beta_j(A) - (l_j/D^p, \omega)| \leq K^{-1};$$

nous posons alors

$$H_r = \sum_{j \in I_r \cap \{1,\dots,w\}} (l_j/D^p, \omega) H_j.$$

Définition de H_d. — Pour $j \geq w+1$, nous avons

$$\beta_j(A) = \sum_{k=1}^{w} m_{j,k} \beta_k(A). \tag{5}$$

Si en outre $j \in I_r \cap \{w+1, \dots, q\}$, introduisons l'élément $\beta'_j \in t^*$,

$$\beta'_j = \sum_{k \in I_d \cap \{1,\dots,w\}} m_{j,k} \beta_k,$$

(*i.e.* nous ne retenons dans la somme (5) que les termes pour lesquels $\beta_k(A) \in DS_\omega(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1})$).

A présent nous extrayons de la famille $(\beta'_j)_{j\in I_r\cap\{w+1,\dots q\}}$ une famille libre $(\beta'_t)_{t\in I_r^l}$ avec $I_r^l \subset I_r \cap \{w+1,\dots q\}$ (l pour libre). Ainsi, pour tout $j \in I_r \cap \{w+1,\dots,q\}$, on a

$$\beta'_j = \sum_{t\in I_r^l} g_{j,t}\beta'_t, \tag{6}$$

où les $g_{j,t}$ sont dans $\mathbf{Q}$ de modules inférieurs à b (puisque les $g_{j,t}$ sont des mineurs extraits de la matrice $(m_{i,j})$).

Démontrons le lemme suivant :

Lemme 5.3.5. — *Il existe $H_d \in t$,*

$$H_d = \sum_{k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}} (x_k,\omega)H_k,$$

avec $x_k = u_k/e\widetilde{D}D^p$, vérifiant

$$|\beta'_j(A-H_d)| \le bq(1+q)K^{-1},$$

et

$$|u_k| \le e(1+q)^2(1+b)^2\widetilde{N}_p,$$
$$|(x_k,\omega)| \le e(1+q)^2(1+b)^2|A|.$$

Démonstration. — Puisque les $\beta_j(A)$, $j \in I_r \cap \{w+1,\dots,q\}$ sont résonnants ($\in RS_\omega(\widetilde{N}_p, K, D^p)$), il existe l_j, $0<|l_j|\le \widetilde{N}_p$ pour lequel

$$|\beta_j(A) - (l_j/D^p,\omega)| \le K^{-1}.$$

Donc, d'après (5),

$$\left|\sum_{k\in I_d\cap\{1,\dots w\}} m_{j,k}\beta_k(A) + \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{j,k}\beta_k(A) - (l_j/D^p,\omega)\right| \le K^{-1},$$

soit

$$\left|\beta'_j(A) + \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{j,k}(\beta_k(A) - (l_k/D^p,\omega))\right.$$
$$\left. + \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{j,k}(l_k/D^p,\omega) - (l_j/D^p,\omega)\right| \le K^{-1}$$

où

$$|\beta_k(A) - (l_k/D^p,\omega)| \le K^{-1},$$

pour $k \in I_r \cap \{1,\dots,w\}$. Par conséquent,

$$\left|\beta'_j(A) - \left((l_j/D^p,\omega) - \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{j,k}(l_k/D^p,\omega)\right)\right| \le K^{-1} + qK^{-1}.$$

Or nous avons :

Lemme 5.3.6. — *Il existe $(x_k)_{k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}}$ dans $\mathbf{Z}^d$ de la forme $u_k/e\widetilde{D}D^p$ avec*

$$|u_k| \in d\cdot e(1+q)^2(1+b)^2\widetilde{N}_p,$$

et vérifiant pour tout $t\in I_r^l$,

$$\sum_{k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}x_k = \frac{l_t}{D^p} - \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}\frac{l_k}{D^p}.$$

Démonstration. — Il suffit de résoudre le système précédent pour chaque coordonnées dans $\mathbf{Z}^d$.

D'après la définition des $(\beta_t')_{t\in I_r^l}$ les formes linéaires $(\sum_{k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}\beta_k)_{t\in I_r^l}$ forment un système libre et par conséquent la matrice $(m_{t,k})_{t\in I_r^l,k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}}$ est de rang maximal. La théorie classique des systèmes linéaires montre alors qu'en égalant à 0 certains des x_k, on peut résoudre le système précédent et obtenir des x_k soit nuls soit de la forme

$$\nu^{-1}\cdot\left(\frac{l_t}{D^p} - \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}\frac{l_k}{D^p}\right)_{t\in I_r^l},$$

(en colonnes) ou encore

$$\nu^{-1}\cdot\left(\frac{el_t}{eD^p} - \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} \frac{v_{t,k}}{e}\frac{l_k}{D^p}\right)_{t\in I_r^l},$$

ν étant une matrice carrée inversible de rang maximal extraite de la matrice

$$(m_{t,k})_{t\in I_r^l,k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}}$$

où $m_{t,k} = v_{t,k}/e$, $|v_{t,k}|\leq a$.

Ainsi les coefficients de ν^{-1} étant de la forme $w_{t,k}/\widetilde{D}$, $|w_{t,k}|\leq b$, les x_k sont de la forme $u_k/e\widetilde{D}D^p$ avec

$$\begin{aligned}|u_k| &\leq q(e\widetilde{N}_pb + q\widetilde{N}_pb^2)\\ &\leq e(1+q)^2(1+b)^2\widetilde{N}_p.\end{aligned}$$

De la même façon, vu que

$$\sum_{k\in I_d\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}(x_k,\omega) = \left(\frac{l_t}{D^p} - \sum_{k\in I_r\cap\{1,\dots,w\}} m_{t,k}\frac{l_k}{D^p},\omega\right);$$

il vient les estimées annoncées pour (x_k,ω). Ceci démontre le lemme 5.3.6. □

Nous avons finalement prouvé que, pour $t\in I_r^l$,

$$|\beta_t'(A-H_d)|\leq K^{-1}+qK^{-1},$$

D'après (6) il vient, pour $j \in I_r \cap \{1, \ldots, w\}$,

$$|\beta'_j(A - H_d)| \leq bq(1+q)K^{-1},$$

c'est-à-dire la conclusion du lemme 5.3.5 $\square$

Conclusion. — Posons $H = H_r + H_d$.

– Si $i \in I_r \cap \{1, \ldots, w\}$, alors $\beta_i(H_d) = 0$ et

$$\beta_i(A - H_r - H_d) = \beta_i(A) - (l_i/D^p, \omega),$$

si bien que

$$|\beta_i(A - H)| \leq K^{-1},$$

et d'après le (i) du lemme 5.3.1, $\beta_i(A - H) \in DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1})$.

– Si $i \in I_d \cap \{1, \ldots, s\}$, alors

$$\begin{aligned} \beta_i(A - H) &= \beta_i(A - H_d) \\ &= \beta_i(A) - \sum_{k \in I_d \cap \{1,\ldots,w\}} (x_k, \omega)\beta_i(H_k), \\ &= \beta_i(A) - (x_k, \omega), \end{aligned}$$

avec $x_k = u_k / e\widetilde{D}D^p$ et

$$|u_k| \leq e(1+q)^2(1+b)^2\widetilde{N}_p.$$

Le (ii) du lemme 5.3.1 et le fait que $\beta_i(A) \in DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1})$ montrent que

$$\beta_i(A) \in DS(\widetilde{N}_{p+1} - e(1+q)^2(1+b)^2\widetilde{N}_p, K, D^{p+1}).$$

– Si $i \in I_r \cap \{w+1, \ldots, q\}$.

$$\begin{aligned} \beta_i(A - H) &= \sum_{j=1}^{w} m_{i,j}\beta_j(A - H) \\ &= \sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}\beta_j(A - H) + \sum_{j \in I_d \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}\beta_j(A - H) \\ &= \beta'_i(A - H_d) + \sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}\beta_j(A - H_r) \\ &= \beta'_i(A) + \sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}(\beta_j(A) - (l_j/D^p, \omega)). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\beta_i(A - H)| \leq bq(1+q)K^{-1} + qbK^{-1} \leq (1+q)^2 bK^{-1}.$$

D'après le (i) du lemme 5.3.1, il apparaît que

$$\beta_i(A - H) \in DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1}).$$

– Si $i \in I_d \cap \{w+1, \ldots, q\}$.

$$\begin{aligned}
\beta_i(A-H) &= \beta_i(A) - \beta_i(H) \\
&= \beta_i(A) - \sum_{j=1}^{w} m_{i,j}\beta_j(H) \\
&= \beta_i(A) - \sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}\beta_j(H_r) - \sum_{k \in I_d \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,k}\beta_k(H_d) \\
&= \beta_i(A) - \sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,j}(l_j/D^p, \omega) - \sum_{k \in I_d \cap \{1,\ldots,w\}} m_{i,k}(x_k, \omega).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\beta_i(H)$ est de la forme

$$\left(\sum_{j \in I_r \cap \{1,\ldots,w\}} \frac{v_{i,j} l_j}{eD^p} + \sum_{k \in I_d \cap \{1,\ldots,w\}} \frac{v_{i,k} u_k}{e \cdot e\widetilde{D} D^p}, \omega \right),$$

i.e. de la forme $(z_i/D^{p+1}, \omega)$ (puisque $D = e^2\widetilde{D}$) avec

$$|z_i| \leq qDb\widetilde{N}_p + b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p.$$

Du fait de $\beta_i(A) \in DS(\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1})$ il vient, d'après le (i) du lemme 5.3.1,

$$\beta_i(A-H) \in DS(\widetilde{N}_{p+1} - 2b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p, K, D^{p+1}).$$

Ainsi dans tous les cas,

$$\beta_i(A-H) \in DS(\widetilde{N}_{p+1} - 2b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p, K, D^{p+1}).$$

avec $|k_j| \leq 2b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p$, pourvu que

$$K \geq 4b^2(q+1)2^{1+\sigma}\gamma D\widetilde{N}_q^{\sigma}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\widetilde{N}_{p+1} - 2b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p &\geq \left(\widetilde{N}_{p+1} - \frac{2b(1+q)^2(1+b)^2 e}{a}\widetilde{N}_{p+1} \right) \\
&\geq \left(1 - \frac{2b(1+q)^2(1+b)^2 e}{a} \right) \widetilde{N}_{p+1} \\
&\geq (1/2)\widetilde{N}_{p+1},
\end{aligned}$$

vu le choix que l'on a fait pour a. D'autre part,

$$|k_i| \leq 2b(1+q)^2(1+b)^2 e\widetilde{N}_p.$$

Enfin, d'une part,

$$|(x_k, \omega)| \leq e(1+q)^2(1+b)^2|A|,$$

ce qui entraîne

$$|H_d| \leq qe(1+q)^2(1+b)^2|A|;$$

d'autre part,

$$|H_r| \leq q(\beta_j(A) + K^{-1}) \leq c \cdot q \cdot (|A| + 1).$$

Au total ceci prouve

$$|\widetilde{A}| \leq c_7(1 + |A|),$$

avec $c_7 = qe(1+q)^2(1+b)^2 + c \cdot q$. Ceci conclut la preuve de la proposition. □

Enfin :

Corollaire 5.3.7. — *Soit $K \geq 4(40(1+|\omega|))^\sigma b^2(1+q)^2 2^{1+\sigma}\gamma D^{q+1} N_{q+1}^\sigma$, et soit $A \in t$ tel que $|A| \leq (1/20D^q)N$; alors il existe $p \leq q$ et des entiers $k_i \in \mathbf{Z}^d$, vérifiant*

$$|k_i| \leq c_1 \cdot N_p,$$

où $c_1 = 8|\omega| D^q \widetilde{c}_1$, et tels que si l'on pose

$$\widetilde{A} = A - \sum_{i=1}^{w} \frac{(k_i, \omega)}{D^{p+1}} H_i,$$

on ait pour tout $j \leq q$,

$$\beta_j(\widetilde{A}) \in DS(N_{p+1}, K, D^{p+1}) \pmod{\frac{1}{D^{p+1}}\mathbf{Z}}.$$

En outre,

$$|\widetilde{A}| \leq c_7 |A|.$$

Démonstration. — Appliquons la proposition précédente avec $\widetilde{\omega} = (\omega, 1)$ à la place de ω et $d+1$ à la place de d. Il existe ainsi des entiers $\widetilde{k}_i = (k_i, l_i)$, $|\widetilde{k}_i| \leq \widetilde{c}_1 \widetilde{N}_p$, tels qu'on ait

$$\beta_j(A) - \left(\frac{\sum_{i=0}^{w} m_{j,i} k_i}{D^{p+1}}, \omega\right) - \frac{\sum_{i=0}^{w} m_{j,i} l_i}{D^{p+1}} \in DS_{\widetilde{\omega}}((1/2)\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1}).$$

Posons

$$\widetilde{A} = A - \sum_{i=0}^{w} \frac{(k_i, \omega)}{D^{p+1}} H_i,$$

Alors pour tout j,

$$\beta_j(\widetilde{A}) = \beta_j(A) - \left(\frac{\sum_{i=0}^{w} m_{j,i} k_i}{D^{p+1}}, \omega\right).$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sum_{i=1}^{w} m_{j,i} \widetilde{k}_i}{D^{p+1}}\right| &\leq q b \widetilde{c}_1 \widetilde{N}_p \\ &\leq \frac{q b \widetilde{c}_1}{a} \widetilde{N}_{p+1} \\ &\leq \frac{1}{20(1+|\omega|)} \widetilde{N}_{p+1}, \end{aligned}$$

d'après le choix de a. On peut donc appliquer le lemme 5.3.2 dont les hypothèses sont satisfaites pour prouver que

$$\beta_j(\widetilde{A}) \in DS_\omega\left(\frac{1}{2}\frac{1}{20(1+|\omega|)}\widetilde{N}_{p+1}, K, D^{p+1}\right) \pmod{1/D^{p+1}},$$

c'est-à-dire ce que l'on voulait montrer puisque $N_{p+1} \geq (1/40(1+|\omega|)\widetilde{N}_{p+1}$. □

5.4. Rappels d'algèbre et applications

Nous reprenons dans cette section les notations du chapitre 2 section 2.3.b. Nous supposons donc dans la suite que G est un groupe compact semi-simple, g son algèbre de Lie associée, t une algèbre torique maximale; nous notons $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\widetilde{q}}\}$ l'ensemble des racines par rapport à t et nous supposons que $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_w\}$ est une base de Weyl. G étant compact, il en existe une représentation fidèle dans un $U(L)$ (L entier ≥ 1). Nous notons $T(L)$ le tore maximal constitué des matrices diagonales de $U(L)$. Nous notons toujours $p_1, \dots, p_{L^2}$ les poids relatifs à la représentation $\mathrm{Ad} \circ \rho$.

De façon à retrouver les notations du paragraphe précédent, nous noterons $\beta_1, \dots, \beta_q$ les formes linéaires définies de la manière suivante :

- pour $1 \leq i \leq \widetilde{q}$, $\beta_i = \alpha_i$,
- pour $\widetilde{q} + 1 \leq i \leq L^2 + \widetilde{q} = q$, $\beta_i = p_{i-\widetilde{q}}$.

Pour tout $j \geq w + 1$, il existe $m_{i,j}$ à coefficients dans $\mathbf{Q}$ tels que

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{w} m_{i,j}\beta_j.$$

5.4.a. Le cas $G = SU(N)$. — Dans ce cas la situation est plus simple puisque les les β_j non nuls sont les racines $\alpha \in \Delta$. Le lemme 2.3.10 permet ainsi de montrer, si l'on reprend les notations du 5.3, que $e = \widetilde{D} = 1$ et donc $D = 1$ (*cf.* 2.3.10).

5.5. Comment se rapprocher des constantes

Nous reprenons dans ce paragraphe les notations du 5.4 et montrons comment l'on peut se rapprocher des constantes en s'affranchissant des conditions diophantiennes sur les racines.

Soient $A \in g$, t_A un tore maximal passant par A, $F \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$,

$$M = \max(1, |A|),$$

et posons pour tout $s > 0$,

$$\varepsilon_s = |F|_s.$$

De la même façon que dans la section 5.3, $N_1 = N$ est un entier, auquel on associe q autres entiers $N_2, \ldots, N_{q+1}$ vérifiant

$$N_i \geq aN_{i-1};$$

nous ferons l'hypothèse qu'il existe $\nu > 0$ tel que

$$K = N^{\nu} \geq c_3(\omega) N_{q+1}^{\sigma}. \tag{7}$$

avec

$$c_3(\omega) = 160(1+|\omega|)^q b^2 (q+1)^2 2^{1+\sigma} \gamma D^{q+1}. \tag{8}$$

D'après le corollaire 5.3.7, il existe un entier $1 \leq p \leq q$, pour lequel il existe w éléments k_i de $\mathbf{Z}^d$,

$$|k_i| \leq c_1 \cdot N_p,$$

tels que

$$A - \sum_{i=1}^{w} \frac{(k_i, \omega)}{D^{p+1}} H_i \in DS(N_{p+1}, K, D^{p+1}) \quad (\mathrm{mod}\ \frac{1}{D^{p+1}}\mathbf{Z}). \tag{9}$$

Montrons alors :

Lemme 5.5.1. — *Il existe $\widetilde{A} \in t_A$, $\widetilde{F} \in C^{\infty}(\mathbf{R}^d / D^{p+1}\mathbf{Z}^d, g)$, tels que :*

$$(\omega/2\pi, \widetilde{A} + \widetilde{F}(\cdot))\ \mathcal{R}(\widetilde{B})\ (\omega/2\pi, A + F(\cdot)), \tag{10}$$

avec

$$\widetilde{B}(x) = \exp\Big(2\pi \sum_{i=1}^{w} \frac{-(k_i, x)}{D^{p+1}} H_i\Big),$$

$$\widetilde{A} \in DS_{\omega}(N_{p+1}, K, D^{p+1}) \quad (\mathrm{mod}\ \frac{1}{D^{p+1}}\mathbf{Z}),$$

$$|\widetilde{A}| \leq c_7(|A| + 1),$$

et

$$|\widetilde{F}|_s \leq c_s(N_p^s \varepsilon_0 + \varepsilon_s); \tag{11}$$

en outre,

$$|R_{N_{p+1}} \widetilde{F}|_s \leq c_{s,s'} \frac{\varepsilon_{s'}}{(N_{p+1} - N_p)^{s'-s-d-1}},$$

$$|\widetilde{B}|_s \leq c_s N_p^s.$$

Démonstration. — En effet, si on note

$$\widetilde{B}(x) = \exp\Big(2\pi \sum_{i=1}^{w} \frac{-(k_i, x)}{D^{p+1}} H_i\Big),$$

il apparaît que $\widetilde{B}$ est bien $c_G \cdot D^{p+1}\mathbf{Z}^d$-périodique où c_G est le cardinal du centre de G, tandis que $\mathrm{Ad}(\widetilde{B})$ et $\widetilde{F}$ sont $D^{p+1}\mathbf{Z}^d$ périodiques.

En outre,

$$L_{\omega/2\pi}\widetilde{B}\cdot\widetilde{B}^{-1}+\mathrm{Ad}(\widetilde{B})\cdot(A+F)=-\sum_{i=1}^{s}\frac{(k_i,\omega)}{D^{p+1}}H_i+A+\mathrm{Ad}(\widetilde{B})\cdot F,$$

car, $\widetilde{B}(\cdot)$ et A commutent puisqu'ils sont sur le même tore maximal. Ainsi si on pose,

$$\widetilde{A}=-\sum_{i=1}^{w}\frac{(k_i,\omega)}{D^{p+1}}H_i+A,$$

et

$$\widetilde{F}=\mathrm{Ad}(\widetilde{B})\cdot F,$$

la formule (10) est vérifiée.

En outre, d'après (9), $\widetilde{A}\in DS(N_{p+1},K,D^{p+1})$, et

$$\begin{aligned}|\widetilde{F}|_s&\le c_s(|\,\mathrm{Ad}(\widetilde{B})|_0|F|_s+|\,\mathrm{Ad}(\widetilde{B})|_0|F|_s)\\&\le c_s(N_p^s\varepsilon_0+\varepsilon_s).\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, il suffit d'utiliser le fait que

$$\pi_i(\widetilde{F})=e^{-2\pi(k_i,x)/D^{p+1}}\pi_i(F),$$

où π_i désigne la projection sur $\mathbf{C}H_i$. Ceci achève la preuve du lemme 5.5.1. □

Nous allons à présent appliquer le lemme 3.4.2 du chapitre 3 pour prouver la proposition qui suit ; nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que nous changeons de notations par rapport au chapitre 3 (A et $\widetilde{A}$ deviennent respectivement $\widetilde{A}$ et A').

Rappelons que nous avions défini au chapitre 3 (*cf.* formules (26) et (2)),

$$a_1=6m^2\max(\sigma,\tau)+\frac{d}{2}+3\widetilde{q}\nu, \tag{12}$$

$$a_2=4(6m^2\max(\sigma,\tau)+\frac{d}{2}+3\widetilde{q}\nu)+1, \tag{13}$$

(où m est la dimension de l'algèbre g) ainsi que des constantes $c_{1,s},c_s,c_7$ (*cf.* équation (13) du lemme 3.3.1 et les lemmes 3.4.1, 3.4.3).

Lemme 5.5.2. — *Si l'on suppose*

$$c_{1,0}(c_7MN_{q+1})^{a_1}\varepsilon_0\le 1, \tag{14}$$

il existe $\widetilde{Y}\in C^\infty(\mathbf{R}^d/D^{p+1}\mathbf{Z}^d,g)$, $A'\in g$, $F'\in C^\infty(\mathbf{R}^d/D^{p+1}\mathbf{Z}^d,g)$ tels que

$$(\omega/2\pi,A'+F'(\cdot))\ \mathcal{R}(e^{\widetilde{Y}})\ (\omega/2\pi,\widetilde{A}+\widetilde{F}(\cdot)),$$

et, si on note $\varepsilon'_s=|F'|_s$, on a :

$$\begin{aligned}\varepsilon'_s\le{}& c_sc_{1,s}^4(\omega)D^{12r(p+1)}(MN_{p+1})^{4a_1}(N_p^s\varepsilon_0^2+\varepsilon_0\varepsilon_s)\\&+c_{s'}\frac{\varepsilon_{s'}}{(N_{p+1}-N_p)^{s'-s-d-1}}D^{(p+1)(s'-s)},\end{aligned}$$

et

$$|A'| \leq c_7(|A|+1),$$

$$(15) \qquad |\widetilde{Y}|_s \leq c_s c_{1,s}(MN_p)^{a_1}(N_p^s \varepsilon_0 + \varepsilon_s).$$

Démonstration. — Vu que $\widetilde{A} \in DS_\omega(N_{p+1}, K, D^{p+1})$, on a

$$\widetilde{A} \in DS_{\omega/D^{p+1}}(N_{p+1}, K, 1).$$

Remarquons que puisque $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$ on a $\omega/D^{p+1} \in CD(\gamma D^{p+1}, \sigma)$. D'autre part, vu que $c_{1,s} = c_s \cdot (2+|\omega|)^{3m^2} \cdot (1+\gamma)^{3r}$, il vient

$$(16) \qquad c_{1,s}(\omega/D^{p+1}) = c \cdot c_{1,s}(\omega) \cdot D^{3r(p+1)}.$$

Remarquons également que si $\widetilde{M} = \max(1, |\widetilde{A}|)$,

$$(17) \qquad \widetilde{M} \leq c_7 M.$$

Appliquons alors le lemme 3.4.2 du chapitre 3 (ce qui est possible vu (14) et (11)) à

$$\widetilde{A} + \widetilde{F}_0(x) := \widetilde{A} + F(D^{p+1}x);$$

(on prend les fonctions constantes en λ) ; notons que $\widetilde{F}_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$. Il existe donc $\widetilde{Y}_0 \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$, $A_0' \in g$, et $F_0' \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, g)$ tels que

$$\left(\frac{\omega}{2\pi D^{p+1}}, \widetilde{A} + \widetilde{F}_0(\cdot)\right) \mathcal{R}(e^{Y_0}) \left(\frac{\omega}{2\pi D^{p+1}}, A_0' + F_0'(\cdot)\right),$$

avec

$$|F_0'|_s \leq c_s c_{4,s}^4\left(\frac{\omega}{D^{p+1}}\right)(\widetilde{M}N_{p+1})^{4a_1}\left(|\widetilde{F}_0|_s|\widetilde{F}_0|_0 + c_{s'}|\widetilde{F}_0|_0^2\right) + |\widetilde{F}_0|_{s'}N_{p+1}^{-(s'-s-d-1)}.$$

Rappelons alors que

$$(18) \qquad |\widetilde{F}_0|_s \leq c_s(N_p^s|F_0|_0 + |F_0|_s),$$

et

$$|R_{N_{p+1}}\widetilde{F}_0|_s \leq c_{s'}\frac{|F_0|_{s'}}{(N_{p+1}-N_p)^{s'-s-d-1}};$$

par conséquent, tenant compte de (16-17) il vient

$$\begin{aligned}|F_0'|_s \leq c_s c_{4,s}^4(\omega)D^{12r(p+1)}(MN_{p+1})^{4a_1}((N_p^s|F_0|_0 \\ + |F_0|_s)|F_0|_0 + |F_0|_0^2) + c_{s'}\frac{|F_0|_{s'}}{(N_{p+1}-N_p)^{-(s'-s-d-1)}}.\end{aligned}$$

Ainsi, vu que

$$c^{-1} \cdot D^{-(p+1)s}|F_0'|_s \leq |F'|_s \leq c \cdot D^{-(p+1)s}|F_0'|_s,$$

il vient

$$|F'|_s \le c_s c_{1,s}^4(\omega) D^{12r(p+1)} (MN_{p+1})^{4a_1} (N_p^s \varepsilon_0^2 + \varepsilon_s \varepsilon_0) \\ + c_{s'} \frac{\varepsilon_{s'}}{(N_{p+1} - N_p)^{-(s'-s-d-1)}} D^{(s'-s)(p+1)},$$

Ceci démontre l'estimée relative à ε'_s.

Enfin, le lemme 3.4.2 du chapitre 3 montre que

$$|\widetilde{Y}_0|_s \le c_{1,s}(MN_{p+1})^{a_1} |\widetilde{F}_0|_s,$$

ce qui compte tenu de (18) et (17) donne l'estimée (15). □

Au total,

Proposition 5.5.3. — *Si $c_0 c_{1,0}(MN_p)^{a_1}\varepsilon_0 \le 1$, alors il existe un entier $1 \le p \le q$, et des $A' \in g$, $F' \in C^\infty(\mathbf{R}^d/D^{p+1}\mathbf{Z}^d, g)$, $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/c_G \cdot D^{p+1}\mathbf{Z}^d, G)$ tels que*

$$(\omega/2\pi, A' + F') \ \mathcal{R}(B) \ (\omega/2\pi, A + F).$$

$$\varepsilon'_s \le c_s c_{1,s}^4(\omega) D^{12r(p+1)} (MN_{p+1})^{4a_1} (N_p^s \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_s) \\ + c_{s'} \frac{\varepsilon_{s'}}{(N_{p+1} - N_p)^{s'-s-d-1}} D^{(p+1)(s'-s)},$$

$$|A'| \le c_7(|A| + 1),$$

$$|B|_s \le c_s(N_p^s + (MN_{p+1})^{a_1}(N_p^s \varepsilon_0 + \varepsilon_s)).$$

Démonstration. — En effet comme le groupe G est compact,

$$|e^Y \widetilde{B}|_s \le c_s(|e^Y|_s + |\widetilde{B}|_s) \le c_s(N_p^s + (MN_{p+1})^{a_1}(N_p^s \varepsilon_0 + \varepsilon_s)).$$

□

Nous énonçons maintenant un corollaire immédiat,

Corollaire 5.5.4. — *Si $A \in g$, $F \in C^\infty(\mathbf{R}^d/T\mathbf{Z}^d, g)$, et si*

$$c_0 c_{1,0}(MN_p)^{a_1}\varepsilon_0 \le 1,$$

alors il existe un entier $1 \le p \le q$ et des $A' \in g$, $F' \in C^\infty(\mathbf{R}^d/D^{p+1}T\mathbf{Z}^d, g)$ et un $B \in C^\infty(\mathbf{R}^d/c_G D^{p+1}T\mathbf{Z}^d, G)$, tels que

$$(\omega/2\pi, A' + F'(\cdot) \ \mathcal{R}(B) \ (\omega/2\pi, A + F(\cdot)),$$

$$\varepsilon'_s \le c_s c_{4,s}^4(\omega)(TD^{(p+1)})^{12r} (MN_{p+1})^{4a_1} (N_p^s \varepsilon_0^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_s) \\ + c_{s'} \frac{\varepsilon_{s'}}{(N_{p+1} - N_p)^{s'-s-d-1}} (TD^{(p+1)})^{(s'-s)},$$

$$|B|_s \le c_s(N_p^s + (MN_{p+1})^{a_1} T^s (N_p^s \varepsilon_0 + \varepsilon_s)).$$

$$M' \leq c_7 M.$$

Démonstration. — Il suffit en effet de poser $A + F_0(x) = A + F(T \cdot x)$, et d'appliquer les résultats qui précèdent ; il existe ainsi A', F_0' tels que

$$\left(\frac{\omega}{2\pi T}, A' + F_0'\right) \ \mathcal{R}(B_0) \ \left(\frac{\omega}{2\pi T}, A + F_0\right),$$

avec

$$(19) \quad |F_0'|_s \leq c_s c_{4,s}(\omega) T^{12r} D^{12r(p+1)} (M N_{p+1})^{4a_1} T^s (N_p^s \varepsilon_0^2 + \varepsilon_s \varepsilon_0) + c_{s'} \frac{\varepsilon_{s'} T^{s'} D^{(s'-s)(p+1)}}{(N_{p+1} - N_p)^{-(s'-s-d-1)}}.$$

$$|A'| \leq c_7(|A| + 1).$$

Comme $|F'|_s = T^{-s}|F_0'|_s$, on vérifie les estimées ; ceci conclut la preuve du corollaire. □

5.6. Estimations

Nous montrons dans cette section :

Théorème 5.6.1. — *Posons $M = \max(1, |A|)$. Il existe des réels $s_0 \in \mathbf{N}, \varepsilon_0 > 0$ et un entier $P > 0$ tels que : pour tout $A \in g$ et $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ vérifiant*

$$|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0,$$

il existe des suites $(n \geq 1)$ d'entiers $1 \leq p_n \leq q$, $P_n \geq 1$ et des suites $A_n \in g$, $F_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/P_n\mathbf{Z}^d, g)$, $G_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/c_G P_n \mathbf{Z}^d, G)$ telles que

$$A_1 + F_1 = L_{\omega/2\pi} G_n \cdot G_n^{-1} + \mathrm{Ad}(G_n) \cdot (A_n + F_n),$$

$$|A_n| \leq M^n,$$

$$P_n = D^{p_{n-1}+1} P_{n-1}, \quad P_1 = 1,$$

$$P_n \leq P^{n-1} \leq P^n.$$

et pour tout $s > 0$,

$$|F_n|_s = O(N_n^{-\infty}),$$

$$(20) \qquad |G_n|_s \leq c_s^n N_{n-1,p_{n-1}}^s.$$

5.6.a. Notations, définitions. — Nous référant aux définitions du 5.3, nous posons

$$P = (4c_7) M_1 \chi_G D^q c_G,$$

([ ] représente la partie entière), et nous notons a_n,

$$a_n = 4b^2(1+q)^2 2^{1+\sigma} \gamma P^{(n-1)(1+q)}.$$

Définition de β_0, s_0. — Nous posons, $\eta = 1/26$, et choisissons $2 > \mu > 1$ tel que $7\mu - 6\mu^{q+1} = 1/2$, ce qui est toujours possible ($q \geq 1$) ; remarquons qu'alors,

$$6\mu \leq 6\mu^q \leq 7,$$

ce qui entraîne,

$$\mu \leq \mu^q \leq \frac{7}{6}, \tag{21}$$

soit

$$\mu^{q+1} \leq \left(\frac{7}{6}\right)^2 < \frac{3}{2}.$$

Nous définissons également (*cf.* (12), (13)) pour les définitions de a_1, a_2)

$$a_4 = \max(4a_1\mu^{q+1}, 12r, (q+1)),$$

$$a_5 = 2\mu(d+1) + 4,$$

$$M = \max(c_7, M_1),$$

$$s_0 = \eta \max(2 + a_4, a_5 + \mu(d+1) + 2),$$

$$\beta_0 = \frac{2}{3}(\mu - \eta)s_0.$$

En particulier on a

$$\beta_0 \geq 2(a_4 + 2), \tag{22}$$

puisque

$$\beta_0 = \frac{2}{3}(\mu - \eta)s_0 \geq \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{26}\right) \cdot 26 \cdot (a_4 + 2),$$

et

$$\frac{\mu - \eta}{\mu^{q+1} + \eta} \geq \frac{6}{7}. \tag{23}$$

Définition de δ_0. — Si $\delta > 0$, nous définissons

$$N(\delta) = \delta^{-1/\beta_0},$$

et pour $n \geq 1$,

$$N_n(\delta) = N^{(3/2)^{n-1}}.$$

Posons pour $1 \leq i \leq q+1$,

$$N_{n,i} = N_n^{\mu^i}, \quad \widetilde{N}_{n,i} = 20(1 + |\omega|)N_{n,i}.$$

Lemme 5.6.2. — *Posons $\nu = 1+\mu^{q+1}\sigma$ et $K_n = N_n^{\nu}$; il existe un réel $3^{-1/\beta_0} > \delta_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \delta < \delta_0$ ce qui suit est vérifié pour tout $n \geq 1$ en posant $N = N(\delta)$:*

$$N_{n,i} \geq \max(2, a_n) N_{n,i-1}, \tag{24}$$

$$K_n \geq 2^{1+\sigma}\gamma_n P^{(1+q)n} \widetilde{N}_{n,q}, \tag{25}$$

$$N_{n,q+1} \leq N_{n+1,1}, \tag{26}$$

$$N_{n,i+1} - N_{n,i} \geq (1/2) N_{n,i}, \tag{27}$$

$$c_{s_0} c_{1,s_0}(\omega)^4 M_1^{a_4} (4Pc_7)^{na_4} \leq N_n. \tag{28}$$

Démonstration

Pour (24) : Si $0 < \delta \leq \delta_0$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$N_n^{(\mu-1)} \geq 4b^2(1+q)^2 2^{1+\sigma}\gamma P^{n(1+q)} = a_n,$$

si l'on a choisi $\delta_0 > 0$ suffisamment petit. Ainsi, on a toujours,

$$N_{n,i} = N_n^{\mu^i} = N_n^{(\mu-1)\mu^{i-1}} \cdot N_{n,i-1} \geq \max(2, a_n) \cdot N_{n,i-1}.$$

Par conséquent la relation (24) est bien vérifiée.

Pour (25) : D'autre part, vu que $N_n(\delta) = N(\delta)^{(\frac{3}{2})^{n-1}}$, on a pour tout $n \geq 1$,

$$N_n \geq 2^{1+\sigma}\gamma P^{n(1+q)^2},$$

pourvu que $\delta_0 > 0$ soit suffisamment petit ; de ce fait, si on pose $\nu = 1 + \mu^{q+1}\sigma$,

$$N_n^{\nu} \geq 2^{1+\sigma}\gamma_n P^{(1+q)n} \widetilde{N}_{n,q+1},$$

alors $K_n = N_n^{\nu}$ satisfait bien à (25).

Pour (26) : il suffit de constater que $\mu^q \leq (3/2)$.

(27-28) se démontre comme (25). □

5.6.b. Premières estimées. — Nous prouvons à présent :

Proposition 5.6.3. — *Si $|F|_{s_0} \leq \delta_0$, alors pour tout $n \geq 1$, il existe des entiers $1 \leq p_n \leq q$, $P_n \geq 1$, et des éléments*

$$A_n \in g, \quad F_n \in C^{\infty}(\mathbf{R}^d/P_n\mathbf{Z}^d, g), \quad G_n \in C^{\infty}(\mathbf{R}^d/c_G \cdot P_n\mathbf{Z}^d, G),$$

$\mathrm{Ad}(G_n)$ *étant $P_n\mathbf{Z}^d$-périodique, qui vérifient, si on pose $M_n = \max(1, |A_n|)$, $\varepsilon_{n,s} = |F_n|_s$ $(s \in \mathbf{N})$,*

$$A_1 + F_1 = L_{\omega/2\pi} G_n \cdot G_n^{-1} + \mathrm{Ad}(G_n) \cdot (A_n + F_n),$$

$$P_n = D^{p_{n-1}+1} P_{n-1}, \quad P_1 = 1,$$

$$P_n \leq P^{n-1},$$

$$|M_n| \leq c_7^n M_1, \ (c_7 \geq 1), \tag{29}$$

$$\varepsilon_{n,0} \leq N_n^{-\beta_0}, \tag{30}$$

$$\varepsilon_{n,s_0} \leq N_n^{a_5}, \tag{31}$$

$$|G_{n+1}|_s \leq c_s((N_{n,p_n}^s + P_n^s(M_n N_{n,p_n+1})^{a_1}(N_{n,p_n}^s \varepsilon_{n,0} + \varepsilon_{n,s})) + |G_n|_s). \tag{32}$$

Démonstration. — La démonstration de cette proposition se fait par récurrence. Posons $N = N(\delta_1)$ où δ_1 est à déterminer et remarquons que si $N(\delta_1)$ est suffisamment grand c'est-à-dire si δ_1 est suffisamment petit, la proposition est vraie à l'ordre $n = 1$. Supposons la vraie jusqu'à l'ordre $n = i$. Remarquons que puisque $a_4 \geq a_1$, si $0 < \delta < \delta_0$,

$$c_{1,0}(M_n N_{n,p_n+1})^{a_1} \varepsilon_{n,0} \leq 1. \tag{33}$$

Or

$$c_{1,0}(M_n N_{n,p_n+1})^{a_1} \varepsilon_{n,0} \leq c_{1,0} c_7^{na_1} M_1^{a_1} N_n^{\mu^q a_1} N_n^{-\beta_0}.$$

Comme $\beta_0 \geq \mu^q \sigma + 1$, ceci donne le résultat (33) pourvu que l'on ait choisi $N(\delta) = \delta^{-1/\beta_0}$ suffisamment grand c'est-à-dire $\delta < \delta_1$ suffisamment petit.

Puisque P a été choisi de façon que $P_{n+1} = P_n D^{p_n+1} \leq P^n$, il est possible d'appliquer le corollaire 5.5.4, qui fournit,

$$A_{n+1} \in g, \ F_{n+1} \in C^\infty(\mathbf{R}^d / P_n D^{p_n+1} \mathbf{Z}^d, g), \ B_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d / c_G P_n D^{p_n+1} \mathbf{Z}^d, G),$$

tels que

$$(\omega/2\pi, A_n + F_n) \ \mathcal{R}(B_n) \ (\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1}),$$

et

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1,s} \leq c_s c_{1,s}(\omega)^4 P^{12rn} (M_n N_{n,p_n+1})^{4a_1} (N_{n,p_n}^s \varepsilon_{n,0}^2 + \varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s}) \\ + c_{s'} \frac{P^{n(p_n+1)(s'-s)} \varepsilon_{n,s'}}{(N_{n,p_n+1} - N_{n,p_n})^{s'-s-d-1}}. \end{aligned} \tag{34}$$

Compte tenu de $N_{n,p_n+1} \leq N_n^{\mu^{q+1}}$, de $a_4 \geq \max(4a_1\mu^{q+1}, 12r)$ et de

$$N_{n,p_n+1} - N_{n,p_n} \geq (1/2) N_{n,p_n+1} \geq (1/2) N_n^\mu,$$

on obtient les inégalités

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1,s} \leq c_s c_{4,s}(\omega)^4 P^{a_4 n} M_n^{a_4} (N_n^{a_4+\mu^{q+1}s} \varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{a_4} \varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s}) \\ + c_{s'}(2P)^{na_4(s'-s)} N_n^{-\mu(s'-s-d-1)} \varepsilon_{n,s'}. \end{aligned}$$

et

$$M_{n+1} \leq c_7 M_n.$$

Récrivant ces inégalités avec successivement, $s = s' = s_0$, et $s = 0$, $s' = s_0$, on a

$$(35) \quad \varepsilon_{n+1,s_0} \le c_{s_0} c_{1,s_0}(\omega)^4 P^{a_4 n} M_n^{a_4} (N_n^{a_4+\mu^{q+1}s_0} \varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{a_4} \varepsilon_{n,0} \varepsilon_{n,s_0}) + c_{s_0} N_n^{\mu(d+1)} \varepsilon_{n,s_0},$$

$$(36) \quad \varepsilon_{n+1,0} \le c_0 c_{1,0}(\omega)^4 P^{a_4 n} M_n^{a_4} N_n^{a_4} \varepsilon_{n,0}^2 + c_{s_0} P^{n a_4 s_0} N_n^{-\mu(s_0-d-1)} \varepsilon_{n,s_0},$$

$$(37) \quad M_{n+1} \le c_7 M_n.$$

Lemme 5.6.4. — *Si les inégalités (29-31) sont vérifiées pour tout, $n \le j$, alors elles le sont aussi pour $j+1$.*

Démonstration. — Supposons la proposition vraie pour $n \le i$. Alors, vu que $M_n \le c_7^n M_1$ et que l'on a (28), il apparaît que les équations (35-37) se récrivent

$$\varepsilon_{n+1,s_0} \le N_n (N_n^{a_4+\mu^{q+1}s_0} \varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{a_4} \varepsilon_{n,0} \varepsilon_{n,s_0}) + N_n N_n^{\mu(d+1)} \varepsilon_{n,s_0},$$

$$(38) \quad \varepsilon_{n+1,0} \le N_n N_n^{a_4} \varepsilon_{n,0}^2 + N_n N_n^{-\mu(s_0-d-1)} \varepsilon_{n,s_0},$$

$$(39) \quad M_{n+1} \le c_7 M_n.$$

(a) Les inégalités $(37)_n$, (29) montrent

$$M_{n+1} \le c_7 M_n \le 2c_7 (2c_7)^n M_1,$$

ce qui établit $(29)_{i+1}$.

(b) Tenant compte de (35-36) on voit que, pour vérifier $(29)_{i+1}$, $(31)_{i+1}$, il suffit de s'assurer que, pour tout $i \ge n \ge 1$,

$$(40) \quad N_n (N_n^{a_4+\mu^{q+1}s_0} N_n^{-2\beta_0} + N_n^{a_4} N_n^{-\beta_0} N_n^{a_5}) + N_n N_n^{\mu(d+1)} N_n^{a_5} \le N_n^{(3/2)a_5}.$$

$$(41) \quad N_n N_n^{a_4} N_n^{-2\beta_0} + N_n N_n^{-\mu(s_0-d-1)} N_n^{a_5} \le N_n^{-(3/2)\beta_0},$$

soit

$$N_n^{1+a_4-(1/2)\beta_0} + N_n^{1-\mu(s_0-d-1)+a_5+(3/2)\beta_0} \le 1,$$

$$N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s_0-(3/2)a_5-2\beta_0} + N_n^{1+a_4-\beta_0-(1/2)a_5} + N_n^{1+\mu^{q+1}(d+1)-(1/2)a_5} \le 1.$$

Or le choix de β_0, s_0 montre que

$$(42) \quad 1 + a_4 - (1/2)\beta_0 \le -1,$$

$$(43) \quad 1 - (s_0 - d - 1)\mu + a_5 + (3/2)\beta_0 \le -1,$$

$$(44) \quad 1 + a_4 + \mu^{q+1}s_0 - 2\beta_0 - (3/2)a_5 \le -1,$$

$$(45) \quad 1 + a_4 - \beta_0 - (1/2)a_5 \le -1,$$

$$(46) \quad 1 + \mu(d+1) - (1/2)a_5 \le -1.$$

En effet :

- (46) est immédiat d'après la définition de a_5 ;
- (45) et (42) découle de $\beta_0 \geq 2(a_4+2)$.
- pour (44), remarquons que $a_4 + 2 - (3/2)a_5 \leq \eta s_0$, et par conséquent,

$$\begin{aligned}
-a_4 - \mu^{q+1}s_0 + 2\beta_0 + (3/2)a_5 - 2 &\geq 2\beta_0 - (\mu^{q+1}+\eta)s_0, \\
&\geq (4/3)s_0(\mu-\eta) - (\mu^{q+1}+\eta)s_0, \\
&\geq (\mu-\eta)s_0\left(\frac{4}{3} - \frac{\mu^{q+1}+\eta}{\mu-\eta}\right) \\
&\geq \left(1-\frac{1}{26}\right)\cdot s_0\left(\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\right) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

- en ce qui concerne (43), constatant que $\mu(d+1)+a_5+1 \leq 2(d+1)+a_5+2 \leq \eta s_0$, on peut écrire,

$$\begin{aligned}
-(s_0-d-1)\mu + a_5 + (3/2)\beta + 2 &\leq \eta s_0 - \mu s_0 + (3/2)\beta \\
&\leq (\eta-\mu)s_0 + (3/2)\beta \\
&\leq (\eta-\mu)s_0 - (\mu-\eta)s_0 \\
&\leq 0;
\end{aligned}$$

Ainsi les inégalités (41-40) sont toujours vérifiées dès que $N(\delta) \geq 3$, ce qui est bien le cas vu le choix fait pour δ_0 : le lemme est démontré. $\square$

Enfin comme le groupe est compact et que

$$G_{n+1} = e^{\widetilde{Y}_n}\widetilde{B}_n \cdot G_n = B_n \cdot G_n,$$

on a

$$|G_{n+1}|_s \leq c_s(|B_n|_s + |G_n|_s),$$

et compte tenu de (19), on obtient (32) à l'ordre $n+1$, ce qui termine la preuve de la proposition 5.6.3. $\square$

Simplifions un peu les notations en remarquant que d'après (28), (34) se récrit

$$(47) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{n+1,s} \leq c_s(N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s}\varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{1+a_4}\varepsilon_{n,0}\varepsilon_{n,s}) \\ + c_{s'}(2P)^{na_4(s'-s)}N_n^{-\mu(s'-s-d-1)}\varepsilon_{n,s'}. \end{aligned}$$

5.6.c. Estimées plus fines. — Introduisons la

Propriété $(Q(\beta,s))$. — *Pour tout $n \geq 1$ et $s \geq 0$ on a*

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{a_5}) \quad \textit{et} \quad \varepsilon_{n,0} = O(N_n^{-\beta}).$$

La proposition suivante est alors vérifiée :

Proposition 5.6.5. — *Si $Q(\beta, s)$ est vraie avec $s \geq s_0$ et $\beta = (2/3)(\mu - \eta)s$ (donc $\geq \beta_0$), alors $Q(\beta', s')$ est vraie avec*

$$\beta' = \frac{2}{3}(\mu - \eta)s', \quad s' = \frac{8}{7}s.$$

Démonstration. — Montrons tout d'abord,

Lemme 5.6.6. — *Si $Q(\beta, s)$ est vraie avec $s \geq s_0$, $\beta = (2/3)(\mu - \eta)s$ ($\beta \geq \beta_0$), alors $Q(\beta, s')$ l'est également pour $s' = (8/7)s$.*

Démonstration. — L'inégalité (47) montre avec $s' = s$ et en majorant $(2P)^{a_4 n}$ par N_n que

$$\varepsilon_{n+1,s'} \leq c_{s'} \left(N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s'} \varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{1+a_4} \varepsilon_{n,s'} \varepsilon_{n,0} + \varepsilon_{n,s'} N_n^{\mu(d+1)} + 1 \right).$$

L'hypothèse nous permet d'affirmer,

$$\varepsilon_{n,0} \leq C_\beta N_n^{-\beta},$$

où $C_\beta > 1$. On a ainsi

$$\varepsilon_{n+1,s'} \leq c_{s'} N_n [\varepsilon_{n,s'} (N_n^{\mu(d+1)+1} + \varepsilon_{n,0} N_n^{a_4+1}) + N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s'} \varepsilon_{n,0}^2],$$

soit

$$\varepsilon_{n+1,s'} \leq c_{s'} \left[\varepsilon_{n,s'} (N_n^{\mu(d+1)+1} + C_\beta N_n^{a_4-\beta+1}) + C_\beta^2 N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s'-2\beta} \right]. \tag{48}$$

Or d'après le choix fait pour β ($\beta \geq \beta_0$),

$$1 + a_4 - \beta \leq -1; \tag{49}$$

prouvons que

$$1 + a_4 + \mu^{q+1}s' - 2\beta \leq -1; \tag{50}$$

en effet :

$$1 + a_4 + \mu^{q+1}s' - 2\beta + 1 = a_4 + (8/7)\mu^{q+1}s - (4/3)s(\mu - \eta) + 1;$$

or, $1 + a_4 + 1 \leq \eta s_0 \leq \eta s'$, d'où

$$\begin{aligned} a_4 + \mu^{q+1}s' - 2\beta + 2 &\leq (\frac{8}{7}\mu^{q+1} - \frac{4}{3}(\mu - \eta) + \eta)s \\ &\leq (\frac{8}{7}(\mu^{q+1} + \eta) - \frac{4}{3}(\mu - \eta))s \\ &\leq \frac{4}{3}s(\mu - \eta) \left(\frac{24}{28} \frac{\mu^{q+1} + \eta}{\mu - \eta} - 1 \right) \\ &\leq \frac{4}{3}s(\mu - \eta) \left(\frac{24}{28} \cdot \frac{7}{6} - 1 \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons par conséquent écrire en place de (48),

$$\varepsilon_{n+1,s'} \leq c_{s'} [\varepsilon_{n,s'} (N_n^{\mu(d+1)+1} + 1) + C_\beta^2 N_n^{-1}].$$

Le lemme 3.5.4 du chapitre 3 montre alors que

$$\varepsilon_{n,s'} = O(N_n^{a_5}),$$

puisque

$$a_5 \geq 2(\mu(d+1)+1)+1,$$

ce qui achève la preuve du lemme 5.6.6. □

Nous pouvons maintenant terminer la preuve de la proposition 5.6.5 : la formule (47) montre que $(s=0)$,

$$\varepsilon_{n+1,0} \leq c_0 N_n^{1+a_4} \varepsilon_{n,0}^2 + c_{s'}(2P)^{a_4 n s'} N_n^{-\mu(s'-d-1)},$$

et on sait en outre que $\varepsilon_{n,0} \to 0$. Le lemme 3.5.3 du chapitre 3 montre que pour tout $2(a_4+2) < \beta' < \frac{2}{3}(\mu(s'-d-1)-2)$ on a $\varepsilon_{n,0} = O(N_n^{-\beta'})$. En particulier, $\beta' = (2/3)(\mu-\eta)s'$ convient car pour $s' \geq s_0$,

$$(\mu-\eta)s' \leq \mu(s'-d-1)-2,$$

vu le choix fait pour s_0 $(\eta s_0 \geq \mu(d+1)+2)$. □

Au total l'application des lemmes précédents nous permet de construire des suites β_i, s_i $(i \geq 0)$, avec $s_0 = s_0$,

$$s_{i+1} = \frac{8}{7}s_i,$$

$$\beta_i = \frac{2}{3}(\mu-\eta)s_i,$$

pour lesquelles $Q(\beta_i, s_i)$ est toujours vérifiée, et il est évident que $s_i, \beta_i \to \infty$. Pour conclure notre propos il ne nous reste plus qu'à vérifier :

Corollaire 5.6.7. — *Pour tout $s \geq 0$ et tout $\beta > 0$, on a*

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\beta}).$$

Démonstration. — En effet, la formule (47) nous permet d'écrire, avec $s' = s_i$,

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq c_s(N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s}\varepsilon_{n,0}^2 + N_n^{1+a_4}\varepsilon_{n,s}\varepsilon_{n,0}) + c_{s_i}\varepsilon_{n,s_i}(2P)^{a_4 n s_i} N_n^{-\mu(s_i-s-d-1)};$$

ainsi, vu que $Q(\beta_i, s_i)$ est vérifiée,

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq C c_s N_n^{1+a_4-\beta_i}\varepsilon_{n,s} + \left(c_s N_n^{1+a_4+\mu^{q+1}s-2\beta_i} + c_{s_i} N_n^{a_5-\mu(s_i-s-d-1)}(2P)^{a_4 n s_i}\right),$$

et comme $2 + a_4 \leq \beta_i/2$,

$$\varepsilon_{n+1,s} \leq C c_s N_n^{1-\beta_i/2} + c_s N_n^{\mu^{q+1}s-\beta_i} + c_{s_i} N_n^{-\mu s_i + a_5 + \mu(s+d+1)}.$$

Le lemme 3.5.4 du chapitre 3 montre que

$$\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\gamma_i}),$$

avec

$$\gamma_i = -1 + \frac{2}{3}\min\left(\frac{1}{2}\beta_i - 1, \beta_i - \mu^{q+1}s, \mu s_i - (a_5 + \mu(s+d+1))\right);$$

il est clair que $\gamma_i \to +\infty$, et la conclusion du corollaire est avérée. □

Pour terminer la démonstration du théorème 5.6.1, remarquons que comme $\varepsilon_{n,s} = O(N_n^{-\infty})$, il vient de (32)

$$|G_n|_s \leq c_s(N^s_{n-1,p_{n-1}} + |G_{n-1}|_s),$$

c'est-à-dire

$$|G_n|_s \leq c_s^n(N^s_{n-1,p_{n-1}} + N^s_{n-2,p_{n-2}} + \cdots + N^s_{1,p_1}),$$

et comme d'après (26),

$$N^s_{n-1,p_{n-1}} \geq N^s_{n-2,p_{n-2}} \geq \cdots \geq N^s_{1,p_1},$$

on obtient

$$|G_{n,s}|_s \leq nc_s N^s_{n-1,p_{n-1}} \leq (2c_s)^n N^s_{n-1,p_{n-1}},$$

ce qui est (20).

La démonstration du théorème 5.6.1 est terminée.

5.7. Comment diminuer la période

5.7.a. Utilisation de la minimalité. — On a la proposition suivante :

Proposition 5.7.1. — *Soit $A_0 \in u(L)$ dont les valeurs propres de l'adjoint* $\mathrm{ad}(A_0) \in gl(u(L))$ *(les poids) sont toutes dans $DS_\omega(N,K,P)$* (mod 1) *et soit $C \in C^\infty(\mathbf{T}^d, U(L))$, tel que, pour tout $x \in \mathbf{T}^d$ et tout s,*

$$\left|C(x+\omega) - e^{2\pi A_0}C(x)e^{-2\pi A_0}\right|_s \leq \varepsilon_s. \tag{51}$$

Alors, pour tout $s' > s$,

$$|C(x) - C(0)|_s < 2\varepsilon_s KN + a_{s'}N^{-(s'-s-d-1)}|C|_{s'},$$

où $a_{s'} > 0$ est une constante ne dépendant que de s'.

Démonstration. — Comme A_0 est toujours unitairement diagonalisable, il suffit de démontrer le résultat quand A_0 est diagonale d'éléments diagonaux $\sqrt{-1}\phi_1, \ldots, \sqrt{-1}\phi_L$. Ainsi, $\mathrm{ad}(A_0)$ est une matrice diagonale d'éléments diagonaux les $\sqrt{-1}(\phi_i - \phi_j)$, $1 \leq i,j \leq L$. Nous considérons d'autre part $C(\cdot)$ comme étant à valeurs dans $M(L,\mathbf{C})$ et nous notons $(C_{i,j}(\cdot))_{i,j}$ $1 \leq i,j \leq L$ les coefficients de la matrice $C(\cdot)$, si bien que $C_{i,j}(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{T}^d, \mathbf{C})$. Comme

$$e^{2\pi A_0}(C_{i,j}(x))_{i,j}e^{-2\pi A_0} = (e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)}C_{i,j}(x))_{i,j},$$

l'inégalité (51) se récrit pour tout $1 \leq i,j \leq L$,

$$\left|C_{i,j}(x+\omega) - e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)}C_{i,j}(x)\right|_s \leq \varepsilon_s,$$

pour tout $s \in \mathbf{N}$. Si on note $\widehat{C}_{i,j}(k)$ le k-ième coefficient de Fourier de $C_{i,j}(\cdot)$, on a en particulier pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$\left|\widehat{C}_{i,j}(k)(e^{2\pi\sqrt{-1}(k,\omega)} - e^{2\pi\sqrt{-1}(\phi_i-\phi_j)})\right| \leq \frac{\varepsilon_s}{|k|^s},$$

et donc

$$\left|\widehat{C}_{i,j}(k)||e^{2\pi\sqrt{-1}((k,\omega)-(\phi_i-\phi_j))}\right| \leq \frac{\varepsilon_s}{|k|^s},$$

c'est-à-dire, vu que les valeurs propres de $\mathrm{ad}(A_0)$ sont dans $DS(N,K,P)$ (mod 1), pour tout $0 < |k| \leq N$,

$$|\widehat{C}_{i,j}(k)| \leq 2K\frac{\varepsilon_s}{|k|^s}.$$

Par conséquent,

$$\Big|\sum_{0<|k|\leq N} \widehat{C}_{i,j}(k)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,.)}\Big|_s \leq 2NK\varepsilon_s;$$

d'autre part, d'après l'inégalité (43) du chapitre 3, pour $s' > s \geq 0$,

$$|\sum_{|k|>N} \widehat{C}_{i,j}(k)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,.)}|_s \leq a_{s'}\frac{1}{N^{s'-s-d-1}}|C_{i,j}|_{s'}.$$

On en déduit donc

$$|C_{i,j}(\cdot) - \widehat{C}_{i,j}(0)|_s \leq 2NK\varepsilon_s + a_{s'}\frac{1}{N^{s'-s-d-1}}|C_{i,j}|_{s'}.$$

Ce qui est la conclusion de la proposition 5.7.1. □

5.7.b. Un lemme de géométrie algébrique réelle

Proposition 5.7.2. — *Soient $(C_k)_{k\in\mathbf{Z}^d}$, U des éléments de G, $P \in \mathbf{Z}$, tels que, pour tout $k, l \in \mathbf{Z}^d$,*

$$C_k^P = \mathrm{Id}, \quad |C_{k+l} - C_kC_l| \leq \eta, \quad |C_kU - UC_k| \leq \eta.$$

Alors, il existe un entier χ_G et des constantes positives a, α ne dépendant que du groupe G, un $U' \in G$, un tore maximal T contenant U'^{χ_G} et un morphisme de groupes,

$$\Gamma : \mathbf{R}^d/(P\chi_G)\mathbf{Z}^d \longrightarrow T$$

tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$|U - U'| \leq a \cdot d^{2\alpha}\eta^\alpha,$$

$$|C_{\chi_G k} - \Gamma(\chi_G k)| \leq a\chi_G P d^{2\alpha}\eta^\alpha,$$

pourvu que $0 < \eta < \mathrm{cste} \cdot P^{1/2}$.

Démonstration. — Soit E le sous ensemble semi-algébrique de G^{d+1} des $(d+1)$-uplets, $(u_1, \dots, u_d, V)$, vérifiant pour $1 \le i, j \le d$,

$$u_i u_j = u_j u_i,$$

et

$$u_i V = V u_i.$$

Définissons également,

$$f(u_1, \dots, u_d, V) = \sum_{1 \le i < j \le d} |u_i u_j - u_j u_i| + \sum_{1 \le i \le d} |u_i V - V u_i|.$$

Il est clair que $f(u_1, \dots u_d, V) = 0$ si et seulement si

$$\operatorname{dist}((u_1, \dots, u_d, V); E) = 0,$$

où dist représente la distance euclidienne à l'ensemble E (on a plongé G dans $M(L, \mathbf{R})$). Les deux fonctions f et $\operatorname{dist}(\cdot, E)$ étant semi-algébriques, on peut appliquer les inégalités de Lojasewicz (*cf.* [**1**], prop 2.3.11 p. 63) qui assurent l'existence de deux réels positifs, a, α tels que

$$f(u_1, \dots, u_d, V) \ge a \operatorname{dist}((u_1, \dots u_d, V); E)^{\alpha}.$$

Posons $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0) \in \mathbf{Z}^d$ (1 à la i-ème place) et $u_i = C_{e_i}$. Il vient $f(u_1, \dots, u_d, U) \le d^2 \eta$, donc

$$\operatorname{dist}(u_1, \dots, u_d, U), E) \le a \cdot d^{2\alpha} \eta^{\alpha}.$$

Ceci démontre qu'il existe Γ'_{e_i}, $i = 1, \dots, d$ et U', tels que la famille $(\Gamma'_{e_1}, \dots, \Gamma'_{e_d}, U')$ soit abélienne et vérifie

$$|\Gamma'_{e_i} - C_{e_i}| \le a \eta^{\alpha} d^{2\alpha}, \quad |U' - U| \le a \eta^{\alpha} d^{2\alpha}.$$

Définissons alors,

$$\Gamma'_k = \Gamma'^{k_1}_{e_1} \cdots \Gamma'^{k_d}_{e_d}.$$

et rappelons le lemme élémentaire suivant,

Lemme 5.7.3. — *Choisissons une norme* Ad*-invariante sur g et soient $(x_i)_{1 \le i \le n}$ une famille d'éléments de G et $(h_i)_{1 \le i \le n}$ de g. Notons $h = \sup |h_i|$. Alors si $a \cdot nh \le 1$,*

$$|(x_1 e^{h_1} x_2 e^{h_2} \cdots x_n e^{h_n})(x_1 \cdots x_n)^{-1} - \mathrm{Id}\,| \le a \cdot nh.$$

Démonstration. — Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} x_1 e^{h_1} x_2 e^{h_2} \cdots x_n e^{h_n} (x_1 \cdots x_n)^{-1} &= x_1 e_1^h x_1^{-1} x_1 x_2 e^{h_2} \cdots e^{h_n} x_n^{-1} \cdots x_1^{-1} \\ &= \mathrm{Ad}(x_1) e^{h_1} \cdots \mathrm{Ad}(x_1 \cdots x_n) e^{h_n}. \end{aligned}$$

Vu que $|\,\mathrm{Ad}(u) \cdot e^h - \mathrm{Id}\,| \le ah$, il vient que le terme à estimer est de norme inférieure où égale à $(1 + ah)^n - 1$. L'hypothèse $anh \le 1$ donne la conclusion. □

Ainsi, vu que

$$|C_k - C_{e_1}^{k_1} \cdots C_{e_d}^{k_d}| \le aPd\eta,$$

si $aPd\eta \le 1$, on a pour tout $|k| \le P$,

$$\begin{aligned} |C_k - \Gamma'_k| &\le aP(d^{2\alpha}\eta^\alpha + d\eta) \\ &\le 2aPd^{2\alpha}\eta^\alpha. \end{aligned}$$

(vu que l'on a choisi, $\eta \le cP^{1/\alpha}$).

Le fait que $\Gamma'_{e_1}, \ldots, \Gamma'_{e_d}, U'$ commutent et l'utilisation du lemme 2.3.14 du chapitre 2 montrent qu'il existe χ_G ne dépendant que du groupe tel que U'^{χ_G} et les $\Gamma'^{\chi_G}_{e_i}$ sont sur un même tore maximal T.

Enfin, on a

$$|\Gamma'_{P\chi_G e_i} - C_{P\chi_G e_i}| \le a\chi_G P d^{2\alpha}\eta^\alpha,$$

c'est-à-dire

$$|\Gamma'^{P\chi_G}_{e_i} - \mathrm{Id}\,| \le a\chi_G P d^{2\alpha}\eta^\alpha;$$

il existe donc sur le tore T des éléments Γ_{e_i} vérifiant

$$\Gamma_{e_i}^{P\chi_G} = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad |\Gamma_{e_i}^{\chi_G} - \Gamma'^{\chi_G}_{e_i}| \le a\chi_G d^{2\alpha}\eta^\alpha.$$

Posons $\Gamma_k = \Gamma_{e_1}^{k_1} \cdots \Gamma_{e_d}^{k_d}$; on a, utilisant à nouveau le lemme 5.7.3, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$|\Gamma_k^{\chi_G} - C_{k\chi_G}| \le a\chi_G P d^{2\alpha}\eta^\alpha.$$

Par définition les Γ_k, U' forment une famille abélienne. Le lemme 2.6.5 du chapitre 2 assure l'existence d'un morphisme comme Γ, ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

5.7.c. Approximation de fonctions $\mathbf{Z}^d$-périodiques par des fonctions $p^{-1}\mathbf{Z}^d$-périodiques. — Montrons la propriété suivante.

Proposition 5.7.4. — *Soit $G \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, G)$ et $p \in \mathbf{N} - \{0\}$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,*

$$|G(x + k/p) - G(x)|_s \le \varepsilon_s.$$

Alors il existe $Q \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\frac{1}{p}\mathbf{Z}^d, G)$ tel que

$$|Q - G|_{s-d/2} \le c_s\sqrt{d} \cdot p \cdot \varepsilon_s,$$

$$|GQ^{-1} - \mathrm{Id}\,|_{s-d/2} \le c_s \cdot d^{1/2} \cdot p \cdot |G|_s \cdot \varepsilon_s.$$

Démonstration. — On rappelle que l'on a plongé G dans $U(L)$ et dans $M(L, \mathbf{C})$. Il est donc possible d'écrire la décomposition de Fourier de B à coefficients dans $M(L, \mathbf{C})$,

$$G(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \widehat{G}(k) e^{2\pi i (k,x)},$$

et

$$|G|_{H^s} = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}(1+|k|^2)^s|\widehat{G}(k)|^2\right)^{1/2}.$$

Calculons la norme de la différence pour $l \in \mathbf{Z}^d$ donné,

$$G(x+l/p) - G(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}^d}\left(e^{2\pi i(k,l)/p}-1\right)\widehat{G}(k)e^{2\pi i(k,x)},$$

et, si on note $|\ |_{H^s}$ la s-ième norme de Sobolev,

$$|G(x+l/p)-G(x)|_{H^s} = \left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^d}(1+|k|^2)^s\left|e^{2\pi i(k,l)/p}-1\right|^2|\widehat{G}(k)|^2\right)^{1/2}.$$

Remarquons que si $(k,l) \notin p\mathbf{Z}$,

$$\left|e^{2\pi i(k,l)/p}-1\right|^2 \geq c|(k,l)|^2/p^2 \geq c\frac{1}{p^2}.$$

Par conséquent (vu que $|\ |_{H^s} \leq |\ |_s$), nous avons démontré que, pour tout $l \in \mathbf{Z}^d$,

$$\left(\sum_{k,(k,l)\notin p\mathbf{Z}}(1+|k|^2)^s|\widehat{G}(k)|^2\right)^{1/2} \leq c\cdot p\cdot\varepsilon_s.$$

Vu que

$$\{k,\ k\notin p\mathbf{Z}\} \subset \bigcup_{k=1}^{d}\{k,(k,e_i)\notin p\mathbf{Z}\},$$

il vient

$$\left(\sum_{k\notin p\mathbf{Z}^d}(1+|k|^2)^s|\widehat{G}(k)|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{d}\cdot p\cdot\varepsilon_s.$$

Posons

$$G_1(x) = \sum_{k\in p\mathbf{Z}^d}\widehat{G}(k)e^{2\pi i(k,x)},$$

qui est dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\frac{1}{p}\mathbf{Z}^d, M(L,\mathbf{C}))$. D'après ce qui précède,

$$|G-G_1|_{H^s} \leq \sqrt{d}\cdot p\cdot\varepsilon_s,$$

d'où

$$|G-G_1|_{s-d/2} \leq c_s d^{1/2}p\varepsilon_s.$$

Néanmoins, G_1 n'est pas à valeurs dans le groupe G. Pour pallier cette lacune, il suffit de remarquer que le groupe G étant une variété plongée de $M(L,\mathbf{C})$, admet un voisinage tubulaire muni d'une projection lisse, $(W_\delta(G),\pi)$,

$$\pi: W_\delta(G) \longrightarrow G, \quad \pi|G = \mathrm{Id},$$

Posons $Q(\cdot) = \pi \circ G_1(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\frac{1}{p}\mathbf{Z}^d, M(L,\mathbf{C}))$ et remarquons que

$$Q(\cdot) - G(\cdot) = (\pi - \mathrm{Id}) \circ (G(\cdot) + (G(\cdot) - G_1(\cdot))) - (\pi - \mathrm{Id}) \circ G(\cdot);$$

l'inégalité (ii) de la proposition A.2.3 de l'annexe montre alors que

$$\begin{aligned} |Q - G|_{s-d/2} &\leq c_s(1 + |G|_s)|G - G_1|_{s-d/2} \\ &\leq c_s(1 + |G|_s)\sqrt{d} \cdot p \cdot \varepsilon_s. \end{aligned}$$

Egalement,

$$|GQ^{-1} - \mathrm{Id}\,|_{s-d/2} \leq c_s \cdot d \cdot p \cdot (1 + |G|_s) \cdot \varepsilon_s.$$

□

5.7.d. Diminution de la période. — Enonçons maintenant une conséquence immédiate du théorème du 5.6.a, du lemme 5.5.1 et du corollaire 5.3.7,

Théorème. — *Soit $M > 0$. Il existe s_0, ε_0, P tels que pour tout $A \in g$, $|A| \leq M$, et $F \in C^\infty(\mathbf{T}^d, g)$ vérifiant*

$$|F|_{s_0} \leq \varepsilon_0,$$

il existe, pour tout $n \geq 1$ des suites

$$\widetilde{A}_n \in g,\ \widetilde{F}_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, g),\ \widetilde{G}_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/c_G P_{n+1}\mathbf{Z}^d, G),$$

($\mathrm{Ad}(\widetilde{G}_n)$ étant $P_{n+1}\mathbf{Z}^d$-périodique) telles que

$$A_1 + F_1 = L_{\omega/2\pi}\widetilde{G}_n \cdot \widetilde{G}_n^{-1} + \mathrm{Ad}(\widetilde{G}_n) \cdot (\widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n),$$

$$\widetilde{A}_n \in DS(N_{n,p_n+1}, K_n, P_{n+1}) \quad (\mathrm{mod}\ P_{n+1}),$$

$$|\widetilde{A}_n| \leq c_7^n M_1,$$

et pour tout $s > 0$,

$$|\widetilde{F}_n(P_{n+1}\cdot)|_s = O(N_n^{-\infty}),$$

$$|\widetilde{G}_n(P_{n+1}\cdot)|_s \leq c N_{n,p_n}^s.$$

Le résultat que nous voulons obtenir dans ce paragraphe est le suivant :

Théorème 5.7.5. — *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, il existe des suites $A_{n,1}$, $F_{n,2} \in C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, g)$ et $Q_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ telles que*

$$A_1 + F_1 = L_{\omega/2\pi}Q_n \cdot Q_n^{-1} + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (A_{n,1} + F_{n,2}),$$

et vérifiant, pour tout $s > 0$,

$$|F_{n,2}|_s = O(N_n^{-\infty}), \quad |Q_n|_s = O(N_{n,p_n}^s).$$

Démonstration. — Nous consacrons le reste de la section à la démonstration du théorème 5.7.5.

Introduisons un entier $M \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $M_n \leq (1/10)M^n$, de façon que $\widetilde{A}_n/M^n$ ait tous ses poids inférieurs à $(\pi/2)$. On peut en outre choisir M de manière que $\chi_G M^n \geq P^n \geq P_n$.

Reprenons les notations du théorème du 5.7.d et considérons le temps $2\pi/\chi_G M^n$ du flot Z_1 associé à $A_1 + F_1$ et Z_n celui associé à $\widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n$. D'après les résultats de la section 1.4 du chapitre 1, on a

$$Z_1(x) = \widetilde{G}_n\left(x + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) Z_n(x)\widetilde{G}_n(x)^{-1}.$$

Comme

$$|\widetilde{F}_n|_s \leq \varepsilon_{n,s},$$

il est facile de voir que

$$\left|Z_n(\cdot) - e^{2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}\right|_s \leq c\widetilde{\varepsilon}_{n,s}. \tag{52}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}^d$,

$$Z_1(x+k) = \widetilde{G}_n\left(x + k + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) Z_n(x+k)\widetilde{G}_n(x+k)^{-1};$$

or Z_1 est $\mathbf{Z}^d$-périodique et donc

$$\widetilde{G}_n\left(x + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) Z_n(x)\widetilde{G}_n(x)^{-1} = \widetilde{G}_n\left(x + k + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) Z_n(x+k)\widetilde{G}_n(x+k)^{-1},$$

soit

$$Z_n(x+k) = \widetilde{G}_n\left(x + k + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right)^{-1} \widetilde{G}_n\left(x + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) Z_n(x)\widetilde{G}_n(x)^{-1}\widetilde{G}_n(x+k),$$

et

$$\widetilde{G}_n\left(x + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right)^{-1} \widetilde{G}_n\left(x + k + \frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) = Z_n(x)\widetilde{G}_n(x)^{-1}\widetilde{G}_n(x+k)Z_n(x+k)^{-1}.$$

Posons

$$C_{n,k}(x) = \widetilde{G}_n(x)^{-1}\widetilde{G}_n(x+k), \tag{53}$$

et

$$\eta_{n,s} = \max_{k \in \mathbf{Z}^d} |C_{n,k}(x) - C_{n,k}(0)|_s.$$

Lemme 5.7.6. — *On a pour tout $s > 0$,*

$$|C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_s \leq \eta_{n,s} = O(N_n^{-\infty}).$$

Démonstration. — En effet pour $x \in \mathbf{R}^d$,

$$C_{n,k}\left(x+\frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) = Z_n(x)C_{n,k}(x)Z_n(x+k)^{-1}.$$

L'inégalité (52) montre que

$$\left|C_{n,k}\left(x+\frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) - e^{2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}C_{n,k}(x)e^{-2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}\right|_s \leq C|C_{n,k}|_s\widetilde{\varepsilon}_{n,0} + |C_{n,k}|_0\widetilde{\varepsilon}_{n,s},$$

et comme

$$|C_{n,k}|_s \leq |\widetilde{G}_n|_s|\widetilde{G}_n|_0 \leq cN_{n,p_n}^s, \tag{54}$$

il vient

$$\left|C_{n,k}\left(x+\frac{\omega}{\chi_G M^n}\right) - e^{2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}C_{n,k}(x)e^{-2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}\right|_s \leq c_s(N_{n,p_n}^s\widetilde{\varepsilon}_{n,0} + \widetilde{\varepsilon}_{n,s}).$$

Remarquons que du fait de $\widetilde{A}_n \in DS_\omega(N_{n,p_n+1}, K_n, P_{n+1}) \pmod{P_{n+1}}$ il vient

$$\frac{\widetilde{A}_n}{M^n\chi_G} \in DS_{\omega/M^n\chi_G}(N_{n,p_n+1}, K_nM^n\chi_G, P_{n+1}) \pmod 1.$$

Il est alors possible d'appliquer la proposition 5.7.1 à $\widetilde{C}_{n,k}(\cdot) = C_{n,k}(P_{n+1}\cdot)$ qui est $\mathbf{Z}^d$-périodique, ce qui donne, en utilisant $K_n \leq N_n^\nu$ et $M_n\chi_G \leq cN_n$, $P_{n+1} \leq cN_n$,

$$\begin{aligned} |C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_s &\leq 2P_{n+1}(N_{n,p_n+1}^s\widetilde{\varepsilon}_{n,0} + \widetilde{\varepsilon}_{n,s})K_nM^n\chi_GN_{n,p_n+1} \\ &\qquad + P_{n+1}a_{s'}N_{n,p_n+1}^{-(s'-s-d-1)}|C_{n,k}|_{s'} \\ &\leq c_sN_n^{\mu^{q+1}s+\nu+\mu^{q+1}+1}\widetilde{\varepsilon}_{n,s} + a_{s'}N_{n,p_n}^{s'-\mu(s'-s-d-1)+1}. \end{aligned} \tag{55}$$

Finalement, si $\eta_{n,s} = |C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_s$,

$$\eta_{n,s} \leq c_sN_n^{(s+1)\mu^{q+1}+\nu+1}\widetilde{\varepsilon}_{n,s} + a_{s'}N_{n,p_n}^{\mu(s+d+1)-(\mu-1)s'+1},$$

et donc si on choisit s' suffisamment grand ($\mu > 1$), on obtient

$$\eta_{n,s} = O(N_n^{-\infty}).$$

$\square$

Posons $C_{n,k} = C_{n,k}(0)$; d'après (53),

$$C_{n,k+l}(x) = C_{n,k}(x+l)\cdot C_{n,l}(x);$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} |C_{n+k}(0) - C_{n,k}(0)\cdot C_{n,k}(0)| &\leq |C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_0|C_{n,l}(0)| \\ &\leq \eta_{n,0}. \end{aligned}$$

En outre, d'après (53) et la $c_G P_{n+1}$-périodicité de $\widetilde{G}_n$,

$$C_{n,c_G P_{n+1}k}(0) = \mathrm{Id};$$

enfin, en faisant dans (54) $x = 0$ et en utilisant (55),

$$\left|C_{n,k}(0)e^{2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n} - e^{2\pi\widetilde{A}_n/\chi_G M^n}C_{n,k}(0)\right| \leq \eta_{n,0}.$$

La proposition 5.7.2 établit ainsi l'existence de $A'_n \in g$ et d'un morphisme Γ_n de $\mathbf{R}^d/P_{n+1}c_G\chi_G\mathbf{Z}^d$ sur le tore maximal T passant par $e^{2\pi A'_n/\chi_G M^n}$, tel que

$$\left|e^{2\pi A'_n/M^n\chi_G} - e^{2\pi\widetilde{A}_n/M^n\chi_G}\right| \leq c_9\eta_{n,0}^{\alpha},$$

et pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$,

$$|\Gamma_n(\chi_G k) - C_{n,\chi_G k}| \leq c_9\eta_{n,0}^{\alpha}.$$

Vu que pour n assez grand $A_n/\chi_G M^n$ est dans un voisinage fixe de 0, l'inégalité des accroissements finis montre que

$$|A'_n - \widetilde{A}_n| \leq c_{10}\chi_G M^n\eta_{n,0}^{\alpha}.$$

De ce fait,

$$|\operatorname{ad}(\Gamma_n(\cdot))\cdot A_n - A_n|_s \leq c_{10}M^n\eta_{n,0}^{\alpha}.$$

Posons

$$S_n(x) = \widetilde{G}_n(x)\Gamma_n(x)^{-1}; \tag{56}$$

alors,

$$\begin{aligned} S_n(x+k) - S_n(x) &= \widetilde{G}_n(x+k)\Gamma_n(x+k)^{-1} - \widetilde{G}_n(x)\Gamma_n(x)^{-1} \\ &= (\widetilde{G}_n(x+k) - \widetilde{G}_n(x)\Gamma_n(x)^{-1}\Gamma_n(x+k))\Gamma_n(x+k)^{-1} \\ &= \widetilde{G}_n(x)(C_{n,k}(x) - \Gamma_n(k))\Gamma_n(x+k)^{-1}; \end{aligned}$$

donc, si $k \in \chi_G\mathbf{Z}^d$,

$$S_n(x+k) - S_n(x) = \widetilde{G}_n(x)(C_{n,k}(x) - C_{n,k}(0))\Gamma_n(x+k)^{-1}.$$

Il vient donc toujours pour $k \in \chi_G\mathbf{Z}^d$,

$$\begin{aligned} |S_n(\cdot+k) - S_n(\cdot)|_s \leq\ & c_s(|\widetilde{G}_n|_s|C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_0|\Gamma_n(\cdot+k)^{-1}|_0 \\ & +|\widetilde{G}_n|_0|C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_s|\Gamma_n(\cdot+k)^{-1}|_0 \\ & +|\widetilde{G}_n|_0|C_{n,k}(\cdot) - C_{n,k}(0)|_0|\Gamma_n(\cdot+k)^{-1}|_s), \end{aligned}$$

soit

$$|S_n(\cdot+k) - S_n(\cdot)|_s \leq c_s(N_{n,p_n}^s\eta_{n,0} + \eta_{n,s}).$$

Ainsi, S_n est presque $\chi_G\mathbf{Z}^d$-périodique. En outre, $S_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/c_G\chi_G P_{n+1}\mathbf{Z}^d, G)$ et

$$|S_n|_s \leq c_s N_{n,p_n}^s.$$

Appliquons alors la proposition 5.7.4 : il existe $Q_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, G)$ telle que

$$|Q_n^{-1}S_n - \mathrm{Id}\,|_s \leq c_s d^{1/2} c_G P_{n+1}(1 + |S_n|_{s+d})(N_{n,p_n}^s \eta_{n,0} + \eta_{n,s}),$$

soit

$$\begin{aligned} |Q_n^{-1}S_n - \mathrm{Id}\,|_s &\leq c_{s,d} \cdot P_{n+1} N_{n,p_n}^{2s+d} \eta_{n,s} \\ &\leq O(N_n^{-\infty}). \end{aligned}$$

Ecrivons, en utilisant (56),

$$\begin{aligned} A_1 + F_1 &= L_{\omega/2\pi}\widetilde{G}_n \cdot \widetilde{G}_n^{-1} + \mathrm{Ad}(\widetilde{G}_n) \cdot (\widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n) \\ &= L_{\omega/2\pi}(S_n\Gamma_n^{-1})(S_n\Gamma_n^{-1})^{-1} + \mathrm{Ad}(S_n\Gamma_n^{-1}) \cdot (\widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n) \\ &= L_{\omega/2\pi}S_nS_n^{-1} - S_n\Gamma_n^{-1}L_{\omega/2\pi}\Gamma_nS_n^{-1} \\ &\qquad + \mathrm{Ad}(S_n) \cdot (\mathrm{Ad}(\Gamma_n)^{-1} \cdot \widetilde{A}_n + \mathrm{Ad}(\Gamma_n^{-1}) \cdot \widetilde{F}_n). \end{aligned}$$

Remarquons que $-\Gamma_n^{-1}L_{\omega/2\pi}\Gamma_n$ est une constante dans g, que nous noterons $\widehat{\Gamma}_n$. Posons alors,

$$A_{n,1} = \widehat{\Gamma}_n + \widetilde{A}_n,$$

et

$$F_{n,1} = \mathrm{Ad}(\Gamma_n^{-1}) \cdot (\widetilde{A}_n) - \widetilde{A}_n + \mathrm{Ad}(\Gamma_n^{-1}) \cdot \widetilde{F}_n.$$

Les relations suivantes sont alors vérifiées,

$$F_{n,1} \in C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, g),$$

$$|F_{n,1}|_s \leq c_{10}M^n\eta_{n,0}^\alpha + c_s\widetilde{\varepsilon}_{n,s}$$

$$|A_{n,1}| \leq c|\widetilde{A}_n| \leq cM^n,$$

$$(\omega/2\pi, A_1 + F_1)\ \ \mathcal{R}(S_n)\ \ (\omega/2\pi, A_{n,1} + F_{n,1}).$$

Enfin, écrivons

$$\begin{aligned} A_1 + F_1 &= L_{\omega/2\pi}S_nS_n^{-1} + \mathrm{Ad}(S_n) \cdot (A_{n,1} + F_{n,1}) \\ &= L_{\omega/2\pi}[Q_n(Q_n^{-1}S_n)][Q_n(Q_n^{-1}S_n)]^{-1} \\ &\qquad + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (\mathrm{Ad}(Q_n^{-1}S_n) \cdot (A_{n,1} + F_{n,1})) \\ &= L_{\omega/2\pi}Q_nQ_n^{-1} + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (L_{\omega/2\pi}(Q_n^{-1}S_n)(Q_n^{-1}S_n)^{-1} \\ &\qquad + \mathrm{Ad}(Q_n^{-1}S_n) \cdot (A_{n,1} + F_{n,1})) \\ &= L_{\omega/2\pi}Q_nQ_n^{-1} + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (A_{n,1} + F_{n,2}), \end{aligned}$$

avec

$$F_{n,2} = L_{\omega/2\pi}(Q_n^{-1}S_n)(Q_n^{-1}S_n)^{-1} + \mathrm{Ad}(Q_n^{-1}S_n) \cdot F_{n,1} + \mathrm{Ad}(Q_n^{-1}S_n - \mathrm{Id}) \cdot A_{n,1}.$$

Vu que

$$\begin{aligned}|L_{\omega/2\pi}(Q_n^{-1}S_n)(Q_n^{-1}S_n)^{-1}|_s &\leq |Q_n^{-1}S_n - \mathrm{Id}\,|_{s+d}(1+|Q_n^{-1}S_n - \mathrm{Id}\,|_0)\\ &\leq c_{s,d}N_{n,p_n}^{2s}\eta_{n,s+d},\end{aligned}$$

on a

$$|F_{n,2}|_s \leq c_{s,d}(N_{n,p_n}^{2s}\eta_{n,s+d} + N_{n,p_n}^{2s}\eta_{n,s} + N_{n,p_n}^{2s}\eta_{n,s}M^n).$$

Finalement,

$$A_1 + F_1\ \mathcal{R}(\omega/2\pi, Q_n)\ A_{n,1} + F_{n,2}, \tag{57}$$

avec

$$|F_{n,2}|_s = O(N_n^{-\infty}),$$

et

$$F_{n,2} \in C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, g),$$

tandis que, du fait de

$$|Q_n|_s \leq |Q_n - S_n|_s + |S_n|_s,$$

il vient

$$|Q_n|_s = O(N_{n,p_n}^s), \tag{58}$$

et

$$Q_n \in C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G\mathbf{Z}^d, g).$$

Ceci termine la démonstration du théorème 5.7.5. □

5.8. Conclusion

Nous sommes enfin en mesure d'achever la preuve du théorème 5.1.1. Choisissons H un élément du tore maximal passant par $A_{n,1}$ tel que pour λ réel et toute racine α,

$$\partial_\lambda(\alpha(\lambda H + A_{n,1})) \geq \mu > 0.$$

L'identité (57) se récrit,

$$A_1 + F_1 + \mathrm{Ad}(Q_n)\cdot(\lambda H) = L_{\omega/2\pi}Q_nQ_n^{-1} + \mathrm{Ad}(Q_n)\cdot(A_{n,1} + \lambda H + F_{n,2}). \tag{59}$$

Remarquons que $\mathrm{Ad}(Q_n)\cdot(\lambda H)$ est une fonction $\chi_G\mathbf{Z}^d$ périodique (puisque H est constant), alors que $A_{n,1} + F_{n,2} + \lambda H$ est dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, g)$.

Enonçons une conséquence du théorème 3.1.1 du chapitre 3 :

Lemme 5.8.1. — *Il existe un réel $\lambda_n > 0$, tel que*

$$|\lambda_n| \leq cP^{\alpha_{20}n}|F_{n,2}|_{s_1}^\beta,$$

pour lequel le système $A_{n,1} + \lambda_n H + F_{n,2}$ est réductible et conjugué à un élément générique de g (au sens du chapitre 2).

Ceci montre donc que $A_1 + F_1 + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (\lambda_n H)$, qui est dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G \mathbf{Z}^d, G)$, est conjugué à un $A_{n,2}$ générique ceci dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/P_{n+1}\mathbf{Z}^d, G)$. Le théorème 2.2.3 du chapitre 2 montre alors que la réduction a en fait lieu dans $C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G \mathbf{Z}^d, G)$.

Enfin remarquons que

$$|\,\mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (\lambda_n H)|_s \leq |Q_n|_s |\lambda_n|,$$

et que l'estimée du lemme 5.8.1 et (58) montrent que

$$|\,\mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (\lambda_n H)|_s = O(N_n^{-\infty})$$

Ceci achève de prouver le théorème 5.1.1 puisque $A_1 + F_1 + \mathrm{Ad}(Q_n) \cdot (\lambda_n H)$ est conjugué à une constante modulo un élément de $C^\infty(\mathbf{R}^d/\chi_G \mathbf{Z}^d, G)$.

CHAPITRE 6

RÉDUCTIBILITÉ PRESQUE PARTOUT DANS LE CAS $SO(3, \mathbf{R})$

6.1. Préliminaires

Après avoir montré au chapitre 3 que, pour toute perturbation suffisamment petite d'une famille à un paramètre réel de systèmes constants dans $sw(\mathbf{T}^d, g)$ (g étant une algèbre de Lie compacte semi-simple), la réductibilité avait lieu pour un ensemble de mesure positive de paramètres et exposé au chapitre 5 des théorèmes de densité au voisinage des systèmes constants, nous donnons dans ce chapitre une réponse positive à la question de la réductibilité pour *presque toute* valeur du paramètre dans le cas où g est l'algèbre $so(3, \mathbf{R})$ du groupe $SO(3, \mathbf{R})$. Ceci répond à une conjecture de L.H. Eliasson **[10]**. Pour cela, nous serons amenés, à la différence des chapitres 3 et 5, à travailler en classe analytique. Remarquons que le résultat que nous obtenons est en un certain sens optimal puisqu'Eliasson a prouvé dans **[10]** que *si $\omega \in \mathbf{R}^d$ est diophantien fixé, l'ensemble des $F : \mathbf{T}^d \to so(3, \mathbf{R})$ analytiques pour lesquels le flot associé à $(\omega/2\pi, F)$ sur $\mathbf{T}^d \times SO(3, \mathbf{R})$ est uniquement ergodique (donc non-réductible) est un G_δ-dense au voisinage de 0.*

Nous travaillerons donc dans la suite avec le groupe $SO(3, \mathbf{R})$ dont l'algèbre $so(3, \mathbf{R})$ est constituée des matrices 3×3 anti-symétriques réelles de trace nulle. Si nous notons J_1, J_2, J_3,

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(J_1, J_2, J_3) est une base de $so(3, \mathbf{R})$ et on a la relation de commutation suivante :

$$[J_1, J_2] = J_3.$$

ainsi que celles obtenues par permutations circulaires des indices 1,2,3. L'adjoint $\mathrm{ad}(A) \in gl(so(3, \mathbf{R}))$ de tout élément $A \in so(3, \mathbf{R})$ est semi-simple et ses valeurs propres sont $\alpha\sqrt{-1}$, $-\alpha\sqrt{-1}$, 0, où α est un réel. Par ailleurs en reprenant la terminologie du chapitre 2, les tores maximaux de $so(3, \mathbf{R})$ sont de la forme $\mathbf{R}A$ ($A \in so(3, \mathbf{R})$

non nul) et deux tores sont toujours conjugués par un élément de $SO(3,\mathbf{R})$. La forme de Cartan-Killing κ sur $so(3,\mathbf{R})$ (*cf.* chap. 2),

$$\kappa(A,B) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}(A)\,\mathrm{ad}(B))$$

définie pour $A, B \in so(3,\mathbf{R})$, est invariante par l'action Ad, définie négative et permet de définir la norme suivante sur $so(3,\mathbf{R})$,

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\kappa(A,A))^{1/2},$$

qui est égale à $|\alpha|$ si $\pm\sqrt{-1}\alpha$ sont les valeurs propres non-nulles de $\mathrm{ad}(A)$ (les racines de A).

Notons à présent $\wedge$ le produit vectoriel usuel entre deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et ρ l'application linéaire,

$$\rho : (so(3), [\ \ ]) \longrightarrow (\mathbf{R}^3, \wedge)$$

qui identifie respectivement J_1, J_2, J_3 dans $so(3)$ à $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ dans $\mathbf{R}^3$; alors, pour tous $X, Y \in g$,

$$\rho([X,Y]) = \rho(X) \wedge \rho(Y),$$

et

$$\rho \circ \mathrm{Ad}(e^X) \circ \rho^{-1} = \mathrm{Rot}(\rho(X)),$$

où $\mathrm{Rot}(v)$ est la rotation d'axe $v/|v|$ et d'angle $|v|$ (modulo 2π) si $v \neq 0$ et l'identité sinon. La remarque précédente fournit l'interprétation géométrique suivante : tout point de $so(3,\mathbf{R})$ peut être vu comme un point de $\mathbf{R}^3$ dont la norme est égale à $|\alpha|$ et pour tout $u = e^X$ dans $SO(3,\mathbf{R})$, $\rho(\mathrm{Ad}(u)\cdot A) = \mathrm{Rot}(\rho(X))\cdot\rho(A)$; le crochet de Lie correspond au produit vectoriel usuel de $\mathbf{R}^3$ et les ensembles constitués des élements de $so(3,\mathbf{R})$ pour lesquels $\alpha(A) = \mathrm{cste}$ correspondent à des sphères de $\mathbf{R}^3$.

6.2. Le théorème fondamental

Nous reprendrons les notations du chapitre 1.

Théorème 6.2.1. — *Pour $\gamma > 0$, $\sigma > d$, fixons $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$ et soient A un élément non-nul de $so(3,\mathbf{R})$, $h, \delta > 0$ et $\Lambda \subset \mathbf{R}$ un intervalle non-trivial borné. Il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel ce qui suit est vrai : si $F(x,\lambda) \in C^\omega_{h,\delta}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ est une famille à un paramètre réel analytique vérifiant*

$$\sup_{|\,\mathrm{Im}\, z| \le h, |\,\mathrm{Im}\,\lambda| \le \delta} |F(x,\lambda)| < \varepsilon_0$$

alors pour presque tout $\lambda \in \Lambda$, le système $(\omega/2\pi, \lambda A + F_\lambda(\cdot))$ est réductible c'est-à-dire que, pour presque tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $B_\lambda \in C^\omega(\mathbf{T}^d, SO(3,\mathbf{R}))$, telle que

$$L_{\omega/2\pi}B_\lambda(x)B_\lambda^{-1}(x) + \mathrm{Ad}(B_\lambda(x))\cdot(\lambda A + F(x,\lambda)),$$

est une constante (dépendant de λ).

6.3. Description de la preuve

Les resultats que nous avons obtenus aux chapitres 3 (théorème en mesure positive) et 5 (théorèmes de densité) dans un cadre C^∞ admettent, comme nous le verrons dans la suite, une version en classe analytique :

Si $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$, $h_1 = h > 0$ sont fixés et si on se donne donne $A_1 \in so(3, \mathbf{R})$ et $F_1 \in C^\omega_{h_1}(\mathbf{T}^d, so(3, \mathbf{R}))$ tels que

$$|F_1|_{h_1} < \varepsilon_1,$$

où $\varepsilon_1 > 0$ est suffisamment petit (nous notons comme d'habitude $|f|_h$ le sup d'une extension holomorphe de f à une bande complexe de largeur h de la forme $\mathbf{R}^d \oplus \sqrt{-1}(-h, h)^d$), alors il existe des suites $N_n = \text{cste} \cdot 2^{2n}$, $K_n = \text{cste} \cdot N_n^\nu$, A_n, $\widetilde{A}_n \in so(3, \mathbf{R})$, F_n, $\widetilde{F}_n, \widetilde{Y}_n \in C^\omega_{h_n}(\mathbf{R}^d/\mathbf{Z}^d, so(3, \mathbf{R})$ telles que :

(i) si $A_n \in DS^\tau(N_n, K_n)$, c'est-à-dire si

$$\forall\, 0 < |k| \leq N_n,\ \ ||A_n| - (k, \omega)| \geq \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau},$$

alors $(\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1})$ est conjugué à $(\omega/2\pi, A_n + F_n)$ par une conjugaison $e^{\widetilde{Y}_n}$ proche de l'identité, F_{n+1} est beaucoup plus petite que F_n et

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{F}_n(0);$$

(ii) sinon (élimination des résonances *cf.* section 5.3.b du chapitre 5), $\alpha_n = |A_n|$ est proche d'un (k_0, ω), $0 < |k_0| \leq N_n$ et on peut conjuguer (loin de l'identité) $(\omega/2\pi, A_n + F_n)$ à $(\omega/2\pi, \widetilde{A}_n + \widetilde{F}_n)$ par $B_n(\theta) = e^{-2\pi(k_0,\theta)A_n/|A_n|}$ avec $\widetilde{F}_n$ du même ordre de grandeur que F_n et

$$\widetilde{A}_n = A_n - (k_0, \omega)\frac{A_n}{|A_n|};$$

on a alors, $\widetilde{A}_n \in DS^\tau(N_n, K_n)$ et

$$A_{n+1} = \widetilde{A}_n + \widehat{\widetilde{F}}_n(0).$$

Si nous définissons h_n,

$$h_n = \frac{1}{2^{n-1}}h,$$

on a les estimées

$$|F_n|_{h_n},\ |\widetilde{F}_n|_{h_n} \leq \varepsilon_n,$$

où $\varepsilon_n \approx \varepsilon_{n-1}^{1+\beta} = O(e^{-(1+\beta)^n})$ $(\beta > 0)$. Ainsi, $(\omega/2\pi, A + F)$ est toujours conjugué à $(\omega/2\pi, A_n + F_n)$ avec F_n extrêmement petite par une conjugaison,

$$G_n(\theta) = e^{\widetilde{Y}_{n-1}(\theta)}B_{n-1}(\theta) \cdots e^{\widetilde{Y}_1(\theta)}B_1(\theta). \tag{1}$$

Le produit précédent peut alors ne pas être convergent puisque les $B_n(\theta)$ sont toujours loin de l'identité.

L.H. Eliasson a utilisé la méthode précédente pour obtenir des solutions de Floquet pour l'équation de Schrödinger quasi-périodique 1-D (*cf.* [**9**]),

$$-y'' + q(t\omega_1/2\pi, \ldots, t\omega_d/2\pi)y = \lambda y,$$

pour *presque toute* valeur de λ suffisamment grande (ce qui revient à étudier le cas où q est petit) pourvu que le potentiel q soit analytique et $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$ soit diophantien. Dans le langage du chapitre 1 ceci correspond à l'étude de la réductibilité dans $sw(\mathbf{T}^d, SL(2,\mathbf{R}))$ d'une famille $(\omega/2\pi, (\sqrt{\lambda})J + F_{\lambda,q}(\cdot))$ (avec F petit et où J est la matrice qui correspond à la multiplication par $\sqrt{-1}$). Sa démonstration repose sur les faits suivants :

- on peut associer à tout élément de $sw(\mathbf{T}^d, SL(2,\mathbf{R}))$ un *nombre de rotation*;
- un élément (analytique) de la forme $(\omega/2\pi, (\sqrt{\lambda})J + F(\cdot))$ avec $F(\cdot)$ sufisamment petit est réductible si ce nombre de rotation ρ est dans le demi-module des fréquences $\frac{1}{2}(\mathbf{Z}^d, \omega)$ ou s'il est diophantien par rapport à ce demi-module, c'est-à-dire vérifie (pour un $K > 0$),

$$|\rho - \frac{1}{2}(k,\omega)| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau},$$

  pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$. L. H. Eliasson démontre ceci en constatant, que sous cette hypothèse, le cas (ii) dans l'alternative précédente ne se présente qu'un nombre fini de fois. Le produit (1) est alors convergent.
- dans le cas de l'équation de Schrödinger, ce nombre de rotation $\rho(\lambda)$ a des liens très étroits avec le spectre de l'opérateur de Schrödinger associé et on peut contrôler la façon dont il varie avec λ (*cf.* [**17**], [**4**]).

Dans le cas qui nous intéresse il n'est pas *a priori* possible de définir un tel nombre de rotation.

Plongeons donc $A_1 + F_1$ dans une famille à un paramètre $A_1(\lambda) + F_1(\cdot, \lambda)$, auquel cas les $A_n, F_n, \widetilde{A}_n, \widetilde{F}_n$ dépendront de λ. Comme F_n est extrêmement petite, l'idée naturelle pour obtenir un résultat de réductibilité en mesure totale sur λ est d'essayer d'appliquer le théorème en mesure positive du chapitre 3 au système $(\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\cdot, \lambda))$. Cependant ceci requiert une minoration raisonnable de $|\partial_\lambda \alpha(A_n(\lambda))|$ comme celle donnée dans le théorème 3.1.1.

Décrivons la difficulté du problème. Supposons par exemple que, pour $\lambda \in (-\delta_0, \delta_0)$, $A_1(\lambda)$ soit résonnant et qu'après élimination de la résonance $\widetilde{A}_1(\lambda)$ soit de la forme $\widetilde{A}_1(\lambda) = \lambda v$ avec $v \in so(3,\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^3$ de norme 1 ; supposons également que $\widetilde{F}_1(\lambda)$ soit une constante $w \in so(3,\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^3$ que l'on choisit par exemple orthogonale à v et de norme η petite. On a donc $|\widetilde{A}_1(\lambda)| = \lambda$, c'est-à-dire que la dépendance de $|\widetilde{A}_1(\lambda)|$ en fonction de λ est bonne. Par contre,

$$\begin{aligned} |A_2(\lambda)| &= |\widetilde{A}_1(\lambda) + \widetilde{\widetilde{F}}_1(0,\lambda)|, \\ &= |\lambda v + w|, \\ &= \sqrt{\lambda^2 + \eta^2} \\ &= \eta + \frac{\lambda^2}{2\eta} + o\left(\frac{\lambda^2}{2\eta}\right). \end{aligned}$$

En d'autres termes, la dérivée en λ de $|A_2(\lambda)|$ s'annule au premier ordre. De la même façon on voit que, si lors de la construction de A_{n+1} il faut enlever n résonances, il se peut que la dérivée en λ de $|A_{n+1}(\lambda)|$ s'annule à l'ordre $2^n - 1$: la dépendance en λ peut donc devenir très mauvaise.

Géométriquement, ceci signifie que $A_{n+1}(\lambda)$ peut être tangent à l'ordre $2^n - 1$ aux sphères de rayon constant dans $so(3, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^3$ (c'est-à-dire aux hypersurfaces $\alpha =$ cste).

Pour surmonter cette difficulté, nous introduisons en suivant Pyartli **[22]** une notion de transversalité, l'idée étant que l'information que l'on perd sur les dérivées d'ordre $j \leq r$, peut être récupérée en regardant les dérivées jusqu'à l'ordre $2r$. Plus précisément, nous dirons qu'une fonction analytique $f : \mathbf{R} \supset (a,b) \to \mathbf{R}$ est r-transverse sur l'intervalle (a,b) si au moins une de ses j-ième dérivées $(1 \leq j \leq r)$ n'est pas trop petite et si toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $r+1$ sont bornées. Comme en fait nous travaillons avec des ordres de transversalité pouvant tendre vers l'infini, il faut aussi faire des hypothèse du type analyticité sur f (des estimées Gevrey feraient tout aussi bien l'affaire). Ainsi, le passage par une résonance multiplie l'ordre de transversalité par 2 : c'est ce que nous nommerons la *perte de transversalité*. Remarquons que si l'on est dans le cas (i) il n'y a en fait pas de perte de transversalité. Les estimées de transversalité dépendant fortement de r il faut, pour que celles-ci soient utilisables, pouvoir montrer que r_n (l'ordre de transversalité de $|A_n(\lambda)|$ à la n-ième étape) croît très lentement, c'est-à-dire que l'ordre de transversalité double peu souvent. Pour ceci l'argument est *grosso modo* que si une résonance apparaît à l'étape n, la suivante n'apparaîtra qu'à l'ordre $n + s_n$ où s_n croît très vite avec n. L'entier s_n est en fait le temps qu'il faut attendre lors de la procédure de récurrence pour qu'il soit judicieux de récupérer des informations de transversalité. On a ainsi $r_{n+s_n} \leq 2r_n$, c'est-à-dire que r_n croît extrêmement lentement. Pour être un peu plus précis, nous définirons à chaque étape de la procédure de récurrence une partition Π_n de l'intervalle Λ des paramètres en sous-intervalles Λ_n. Sur chacun d'entre eux, le système $(\omega/2\pi, A_1(\lambda) + F_1(\lambda, \cdot))$ est conjugué à $(\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\lambda, \cdot))$ où F_n est très petit. L'ensemble Π_n se décompose alors en deux ensembles Π_n^t (t pour transverse) et Π_n^0. Sur les intervalles $\Lambda_{n,j}^t \in \Pi_n^t$, on dispose d'une information *exploitable* sur la transversalité de la fonction $\lambda \mapsto \alpha_n(\lambda)$– elle sera r_n-transverse– tandis que les intervalles $\Lambda_{n,j}^0 \in \Pi_n^0$ sont en quelque sorte des intervalles d'attente. Il est en outre possible de montrer que presque tout $\lambda \in \Lambda$ (pour la mesure de Lebesgue) appartient à un Λ_n^t pour un $n \geq 1$.

Nous pouvons ainsi à chaque étape n définir quatre bifurcations possibles $0, t \to 0, t$ suivant que $\lambda \in \Lambda_{n,j}^{0,t} \in \Pi_n^{0,t}$ et $\lambda \in \Lambda_{n+1,j}^{0,t} \in \Pi_{n+1}^{0,t}$. La seule bifurcation où r (l'ordre de transversalité) peut doubler est alors $0 \to t$. Il faudra donc estimer la fréquence de cette dernière. Les estimées de transversalité sur chaque Λ_n^t et le fait que F_n soit très petit permettent d'appliquer l'analogue en classe analytique du résultat en mesure positive du chapitre 3 à la n-ième étape sur chaque intervalle $\Lambda_n^t \in \Pi_n^t$. Ainsi l'ensemble des $\lambda \in \Lambda_n^t$ pour lesquels le système $(\omega/2\pi, A_1(\lambda) + F_1(\lambda, \cdot))$ n'est pas réductible est de mesure de Lebesgue très petite, de l'ordre d'une puissance de $|F_n|_{h_n}$. Comme par ailleurs le nombre de $\Lambda_n^t \in \Pi_n^t$ est beaucoup plus petit que $|F_n|_{h_n}^{-1}$, et comme presque tout λ appartient à un Λ_n^t, on peut alors montrer que pour presque tout $\lambda \in \Lambda$ le système initial $(\omega/2\pi, A_1(\lambda) + F_1(\lambda, \cdot))$ est réductible ce qui est la conclusion recherchée.

Plan. — Décrivons à présent les diverses sections de ce chapitre.

La section 6.4 est consacrée à la notion de transversalité et à ses propriétés. Nous rappelons dans la section 6.4 quelques résultats dus à Pyartli **[22]** et nous donnons notre définition de la transversalité (*cf.* définition 6.4.7). Le principal outil technique est le lemme 6.4.8 qui dit que si f est r-transverse alors $f^2 = f \cdot f$ est $2r$-transverse. Le résultat principal de cette section est la proposition 6.4.11 qui traite des perturbations de fonctions transverses.

La section 6.5 est due essentiellement à Eliasson.

La section 6.6 présente quelques estimées standards sur l'équation linéarisée (proposition 6.6.3)

Dans la section 6.7 nous traitons le cas où la racine est résonnante (*i.e.* proche d'une résonance) et le lemme 6.7.3 est un lemme d'élimination des résonances qui permet de nous ramener au cas non-résonnant (lemme 6.7.2).

La section la plus importante est la section 6.8 où nous décrivons la procédure de récurrence ainsi que les quatre bifurcations possibles $0, t \to 0, t$, la pire étant la bifurcation $0 \to t$ car c'est à ce moment que r (l'ordre de transversalité) peut doubler. En 6.8.e nous étudions la fréquence de cette transition.

La section 6.10 est consacrée à la preuve (rapide) d'un théorème en mesure positive dans le cas analytique.

La conclusion de la démonstration du théorème 6.2.1 est finalement donnée dans la section 6.11.

6.4. Transversalité

Nous définissons dans cette section la notion de transversalité dont nous avons besoin qui est une généralisation de celle introduite par Pyartli dans **[22]**. Rappelons quelques résultats prouvés par Pyartli.

Définition 6.4.1. — Soit f une fonction à valeurs réelles de classe C^{r+1} définie sur un intervalle (a,b). Nous dirons que f est (C,c,r)-Pyartli si les inégalités suivantes ont lieu pour tout $t \in (a,b)$:

$$\max_{1\leq i\leq r+1} |\partial_t^i f(t)| \leq C, \qquad \max_{1\leq i\leq r} |\partial_t^i f(t)| > c > 0.$$

Les propriétés fondamentales des fonctions (C,c,r)-Pyartli sont alors données par les lemmes suivants dont on trouvera la preuve dans **[22]**.

Lemme 6.4.2. — *Soit $f : (a,b) \to \mathbf{R}$ une fonction (C,c,r)-Pyartli.*

(i) *Le nombre de zéros de f sur un segment de longueur $l < c/C$, est inférieur ou égal à r.*

(ii) *Ainsi, si I est un intervalle, le nombre de composantes connexes de $f^{-1}(I)\cap[a,b]$ est plus petit que $2+2r\left(E\left(\frac{(b-a)C}{c}\right)+1\right)$, où E représente la partie entière.*

Démonstration. — Nous donnons seulement la preuve de (ii), renvoyant à **[22]** pour celle de (i).

Supposons pour simplifier que f soit définie sur un intervalle $[a,b]$ et que $I=[c,d]$. Supposons également que

$$f^{-1}(I)\cap[a,b] = [x_1,y_1]\cup\cdots\cup[x_n,y_n],$$

avec

$$a \leq x_1 \leq y_1 < x_2 \leq y_2 < \cdots < x_n \leq y_n \leq b.$$

Nous affirmons maintenant que si $a < x_i < b$, alors $f(x_i) \in \{c,d\}$. En effet, $c \leq f(x_i) \leq d$, d'après la définition de x_i. Ainsi, si nous avons $c < f(x_i) < d$, d'après la continuité de f, $c < f(x_i-\varepsilon) < d$ $(\varepsilon > 0)$, ce qui contredirait la maximalité de $[x_i,y_i]$. L'affirmation est donc prouvée et pour conclure la preuve de (ii) il suffit de remarquer que

$$\max(\#f^{-1}(c),\#f^{-1}(d)) \geq \frac{n-2}{2},$$

car sinon, $\#f^{-1}(c)+\#f^{-1}(d) < n-2$. Le point (i) montre alors que

$$[E(l_0C/c)+1]r \geq \frac{n-2}{2},$$

ce qui donne la conclusion. □

Lemme 6.4.3. — *Soit f une fonction (C,c,r)-Pyartli définie sur $[a,b]$. Notons C_1, ε_0 les nombres suivants :*

$$C_1 = (2^{r-1}-1)\cdot 2\cdot (2/c)^{1/r} \quad \textit{et} \quad \varepsilon_0 = \min((c/CC_1)^r, c/2).$$

Alors, si $\alpha > 0$ est plus petit que ε_0, sur chaque segment de longueur au moins $C_1\alpha^{1/r}$ il y a un point t pour lequel $|f(t)| > \alpha$.

Comme corollaire des lemmes 6.4.2, 6.4.3, nous pouvons énoncer :

Corollaire 6.4.4. — *Si f est une fonction (C,c,r)-Pyartli sur (a,b), alors pour tout intervalle $I \subset \mathbf{R}$ de longueur $l < \min((c/CC_1)^r, c/2)$, où $C_1 = (2^r-1)\cdot 2\cdot (1/c)^{1/r}$, l'intersection $f^{-1}(I)\cap(a,b)$ a au plus $2(r+1)\cdot([(b-a)C/c]+1)$ composantes connexes, chacune de longueur inférieure à $C_1\cdot l^{1/r}$. Ainsi, la mesure de Lebesgue de $f^{-1}(I)\cap(a,b)$ est plus petite que $2(r+1)([b-a)C/c]+1)\cdot 2^{r+2}(l/c)^{1/r}$.*

Maintenant, si f est (C,c,r)-Pyartli sur (a,b), sa dérivée f' est $(C,c,r-1)$-Pyartli sur les intervalles où $|f'|$ est plus petite que $c/2$ (tout nombre $< c$ conviendrait). Plus précisément nous pouvons prouver,

Proposition 6.4.5. — *Si f est une fonction (C,c,r)-Pyartli sur (a,b), avec $r \geq 2$, alors l'ensemble $(a,b) - \{\lambda,\ |f'(\lambda)| = \chi\}$, où $\chi \leq c/2$, a au plus $2r([\frac{(b-a)C}{c}]+1)$ composantes connexes; si J est l'une d'entre elles, alors, soit $|f'_{|J}| \geq \chi > 0$, soit $f'_{|J}$ est $(C,c,r-1)$-Pyartli.*

Démonstration. — La seconde conclusion de la proposition étant claire, montrons la première conclusion en estimant le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = \pm\chi$. Supposons que $J \subset [a,b]$ soit un intervalle de longueur $|J| < c/C$. Alors, il y a au plus $r-1$ points de I où $f'(x) = \chi$. En effet, supposons par l'absurde qu'il y ait r points $x_{1,1},\ldots,x_{1,r}$ où f' égale χ. Le théorème des accroissements finis (appliqué plusieurs fois) montre que, pour tout $k \geq 2$, il existe des points $x_{k,1},\ldots,x_{k,r-k+1}$ où $f^{(k)}$ (la dérivée k-ième de f) s'annule. Remarquons à présent que, pour $x_{1,1} \in J$, $f'(x_{1,1}) = \chi$, et que, puisque par définition $\max_{1\leq k\leq r}|f^{(k)}(x_{1,1})| \geq c$, il existe $k \geq 2$ pour lequel $|f^{(k)}(x_{1,1})| \geq c$. Le théorème des acroissements finis, et le fait que $\max_{1\leq k\leq r+1}|f^{(k)}(x)| \leq C$, montre alors que

$$0 < c \leq |f^{(k)}(x_{1,1}) - f^{(k)}(x_{k,1})| \leq C|x_{1,1}-x_{k,1}| \leq C\cdot|J|,$$

ce qui contredit $|J| < c/C$.

La même démonstration permet de majorer le nombre de solutions de $f' = -\chi$.

Enfin, $[a,b]$ est recouvert par $[\frac{(b-a)C}{c}]+1$ intervalles de longueur $< c/C$; le nombre de composantes connexes que l'on cherche à majorer est donc inférieur à

$$2(r-1)([\frac{(b-a)C}{c}]+1)+1 \leq 2r[\frac{(b-a)C}{c}]+1),$$

ce qui prouve la première conclusion de la proposition. □

Nous prouvons à présent en utilisant la propositions 6.4.5 et le corollaire 6.4.4, minorer la valeur absolue de la dérivée d'une fonction (C,c,r)-Pyartli.

Corollaire 6.4.6. — *Si f est une fonction (C,c,r)-Pyartli sur (a,b), et si*

$$0<\chi\leq\min\left(c/2,\frac{c^{r+1}}{(2^{r+2}C)^r}\right),$$

alors $\{\lambda\in(a,b),\ |f'(\lambda)|\geq\chi\}$ a au plus $(2r([\frac{(b-a)C}{c}]+1))$ composantes connexes et la mesure de $\{\lambda\in(a,b),\ |f'(\lambda)|<\chi\}$ est plus petite que $(2r([\frac{(b-a)C}{c}]+1))2^{r+1}(\chi/c)^{1/r}$.

Nous aurons besoin dans la suite d'une définition un peu plus forte que celle donnée en 6.4.1.

Définition 6.4.7. — Soit f une fonction analytique réelle définie sur l'intervalle (a,b). Nous dirons que f est (M,δ,c,r)-transverse si :

(i) f admet une extension analytique sur une bande complexe de largeur δ, $B_\delta=(a-\delta,b+\delta)+\sqrt{-1}(-\delta,\delta)$ et vérifie

$$\sup_{z\in B_\delta}|f(z)|\leq M,$$

(ii) pour tout $t\in(a-\delta/2,b+\delta/2)\subset\mathbf{R}$:

$$\max_{1\leq j\leq r}|\partial_t^j f(t)|>c>0.$$

Remarquons que d'après les inégalités de Cauchy, une fonction (M,δ,c,r)-transverse sur (a,b) est $(M(\delta/2)^{-(r+1)},c,r)$-Pyartli sur $(a-\delta/2,b+\delta/2)$.

Nous prouvons à présent quelques lemmes qui permettent de contrôler la transversalité après certaines opérations algébriques simples comme la prise de carré (lemme 6.4.8) ou de racines carrées (lemme 6.4.10). Ces lemmes sont importants pour la preuve de la proposition 6.4.11.

Lemme 6.4.8. — *Soit $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ une fonction (M,δ,c,r)-transverse. Alors f^2 est $(M^2,\delta/2,c',2r)$-transverse, (ici $f^2=f\cdot f$), où :*

$$c'=v_r\cdot M^{-4r+2}\delta^{4r^2+1}c^{4r},$$

avec

$$v_r=v^{-r^3},$$

v étant une constante positive. En outre, si sur (a,b) on a $|f|>rc$, alors f^2 est (M^2,δ,c,r) -transverse.

Démonstration. — La fonction f étant (M,δ,c,r)-transverse sur (a,b) admet une extension analytique sur une bande complexe, $B_\delta=(a-\delta,b+\delta)+\sqrt{-1}(-\delta,\delta)$ et

$$\sup_{z\in B_\delta}|f(z)|\leq M.$$

Il en découle

$$\sup_{z\in B_\delta} |f^2(z)| \leq M^2.$$

Nous voulons montrer que, pour tout $t_0 \in (a-\delta/2, b+\delta/2)$, il existe un $1 \leq i \leq 2r$ pour lequel,

$$|\partial_t^i(f^2)(t_0)| > c' > 0.$$

Supposons par l'absurde que l'hypothèse (A) suivante soit vraie :

Hypothèse (A). — *Pour un $t_0 \in (a-\delta/2, b+\delta/2)$, et tout $1 \leq i \leq 2r$, on a*

$$|\partial_t^i(f^2)(t_0)| \leq c'.$$

L'analyticité de f^2 sur $(a-\delta, b+\delta) + \sqrt{-1}(-\delta,\delta)$ montre que, pour tout point $t_0 \in (a-\delta/2, b+\delta/2)$, le développement en série suivant a lieu dans un disque (complexe) de centre t_0 et de rayon plus grand que $\delta/2$ (par exemple),

$$f^2(t) - f^2(t_0) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t-t_0)^i.$$

Les inégalités de Cauchy montrent que, pour tout $i \geq 0$,

$$|b_i| = \frac{1}{i!}|\partial^i f(t_0)| \leq \frac{M^2}{(\delta/2)^i}.$$

En outre, l'hypothèse (A) montre que, pour tout $1 \leq i \leq 2r$,

$$|b_i| \leq \frac{1}{i!}c' \leq c'.$$

Nous avons alors, pour tout $|t-t_0| < \delta/2$,

$$\begin{aligned} |f(t)^2 - f(t_0)^2| &\leq \sum_{i=1}^{2r} c'|t-t_0|^i + \sum_{i=2r+1}^{\infty} \frac{M^2}{(\delta/2)^i}|t-t_0|^i \\ &\leq c'\frac{|t-t_0|}{1-|t-t_0|} + M^2\left|\frac{t-t_0}{\delta/2}\right|^{2r+1} \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{t-t_0}{\delta/2}\right|} \end{aligned} \tag{2}$$

En vue de l'application du lemme 6.4.3, nous posons

$$C = M(\delta/2)^{-r-1}, \tag{3}$$

$$C_1 = (2^{r-1}-1)\cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{c}\right)^{1/r},$$

et

$$\varepsilon_0 = \min\left(\left(\frac{c}{M(\delta/2)^{-(1+r)}C_1}\right)^r, \frac{c}{2}\right).$$

Avec les notations précédentes nous avons le lemme suivant :

Lemme 6.4.9. — *Pour tout* $0 < \alpha < \varepsilon_0$, *il existe un point* t_α *tel que* $|t_\alpha - t_0| < C_1\alpha^{1/r}$ *et pour lequel,*

$$|f(t_\alpha)^2 - f(t_0)^2| > \frac{1}{16}\alpha^2.$$

Démonstration. — Nous poserons $\Delta(t) = f(t) - f(t_0)$. On a

$$\begin{aligned} f(t)^2 - f(t_0)^2 &= (f(t) - f(t_0))(f(t) + f(t_0)) \\ &= \Delta(t) \cdot (\Delta(t) + 2f(t_0)). \end{aligned} \tag{4}$$

Soit $0 < \alpha < \varepsilon_0$; nous avons l'alternative suivante :

(i) soit $|f(t_0)| < \alpha/4$ auquel cas, $2|f(t_0)| < \alpha/2$; mais nous savons d'après le lemme 6.4.3 qu'il existe un point t_α,

$$|t_\alpha - t_0| < C_1\alpha^{1/r},$$

tel que

$$|\Delta(t_\alpha)| > \alpha.$$

Finalement,

$$|\Delta(t_\alpha) + 2f(t_0)| > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

et d'après (4),

$$|f(t_\alpha)^2 - f(t_0)^2| > \frac{1}{2}\alpha^2.$$

(ii) soit $|f(t_0)| \geq \alpha/4$; d'après le lemme 6.4.3 nous savons qu'il existe $t'_{\alpha/4}$ avec $|t'_{\alpha/4} - t_0| < C_1\alpha^{1/r}$ tel que $|\Delta(t'_{\alpha/4})| > \alpha/4$, et comme $\Delta(t_0) = 0$, ceci montre qu'il existe $t_{\alpha/4} \in (t_0, t'_{\alpha/4})$, tel que $\Delta(t_{\alpha/4}) = \frac{1}{4}\alpha$. Remarquons à présent que

$$|2f(t_0) + \Delta(t_{\alpha/4})| > 2|f(t_0)| - |\Delta(t_{\alpha/4})| > \alpha/4,$$

et

$$|f(t_\alpha)^2 - f(t_0)^2| > \frac{1}{16}\alpha^2.$$

La conclusion du lemme est donc toujours valide. □

Posons maintenant,

$$0 < \alpha < \alpha_0 = \min\left((\frac{\min(\delta, 1)}{4C_1})^r, \varepsilon_0 \right);$$

nous avons alors

$$|t_\alpha - t_0| < \min\left(\frac{\delta}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

et, par conséquent, d'après la formule (2),

$$|f(t_\alpha)^2 - f(t_0)^2| \leq 2c'|t_\alpha - t_0| + 2\frac{M^2}{(\delta/2)^{2r+1}}|t_\alpha - t_0|^{2r+1}. \tag{5}$$

Le lemme 6.4.9 et la formule (5) montrent que

$$\begin{aligned}\frac{1}{16}\alpha^2 &\leq 2c'C_1\alpha^{1/r} + 2M^2\delta^{-(2r+1)}2^{2r+1}(C_1\alpha^{1/r})^{(2r+1)} \\ &\leq 2c'C_1\alpha^{1/r} + 2^{2r+2}M^2\delta^{-(2r+1)}C_1^{2r+1}\alpha^{2+1/r},\end{aligned}$$

$$\frac{1}{32} \leq c'C_1\alpha^{1/r-2} + 2^{2r+1}M^2\delta^{-(2r+1)}C_1^{2r+1}\alpha^{1/r}.$$

Introduisons

$$A = c'C_1, \qquad B = 2^{2r+1}M^2\delta^{-(2r+1)}C_1^{2r+1},$$

ainsi que la fonction

$$\begin{aligned} w : (0,\infty) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto Ax^{(1/r)-2} + Bx^{1/r}.\end{aligned}$$

Cette fonction admet un unique minimum au point $x = x_0$ où

$$\partial_x w(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{r} - 2\right) Ax_0^{(1/r)-3} + \frac{B}{r}x_0^{(1/r)-1} = 0$$

ou

$$\left(\frac{1}{r} - 2\right) Ax_0^{-2} + \frac{B}{r} = 0,$$

ou encore,

$$x_0 = \left[\frac{(2r-1)A}{B}\right]^{1/2}.$$

En ce point on a

$$\begin{aligned} w(x_0) &= A\left[\frac{(2r-1)A}{B}\right]^{(1/2r)-1} + B\left[\frac{(2r-1)A}{B}\right]^{1/2r} \\ &= 2B\left[\frac{(2r-1)A}{B}\right]^{1/2r}.\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$0 < w(x_0) < \frac{1}{32},$$

si et seulement si

$$2(2r-1)^{1/2r}B^{1-1/2r}A^{1/2r} < \frac{1}{32},$$

$$A < \left(\frac{1}{64(2r-1)^{1/2r}}\right)^{2r} B^{-(2r-1)}.$$

Remplaçant A, B par leurs valeurs,

$$(c'C_1) < \frac{64^{-2r}}{2r-1} \cdot (2^{2r+1}M^2\delta^{-(2r+1)}C_1^{2r+1})^{-(2r-1)},$$

c'est-à-dire

$$c' < [64^{2r}(2r-1)2^{4r^2-1}]^{-1} \cdot M^{-2(2r-1)}\delta^{4r^2-1}C_1^{-4r^2},$$

et comme $C_1 = (2^{r-1}-1)2^{1+1/r}c^{-1/r}$, nous obtenons que $0 < w(x_0) < 1/32$ si et seulement si,

$$c' < v_r \cdot M^{-4r+2}\delta^{4r^2-1}c^{4r}, \tag{6}$$

avec

$$\begin{aligned} v_r &= 64^{-2r}(2r-1)^{-1}2^{-(4r^2-1)}[(2^{r-1}-1)2^{1+1/r}]^{-4r^2} \\ &\geq v^{-r^3}, \end{aligned}$$

où $v > 0$ est une constante.

De plus, $0 < x_0 \leq \alpha_0$ si et seulement si

$$\left[\frac{(2r-1)A}{B}\right]^{1/2} \leq \min\left((\frac{\min(\delta,1)}{4C_1})^r, \varepsilon_0\right).$$

Afin de simplifier les calculs, nous supposerons que $0 < \delta < 1$, $M > 1$, $0 < c < 1$ auquel cas,

$$\alpha_0 = \min\left((\frac{\delta}{4C_1})^r, [\frac{c}{M(\delta/2)^{-r-1}C_1}]^r\right) > 4^{-r}\left[\frac{c}{M\delta^{-r}C_1}\right]^r.$$

Ainsi, $0 < x_0 \leq \alpha_0$ si et seulement si

$$\frac{(2r-1)c'C_1}{2^{2r+1}M^2\delta^{-(2r+1)}C_1^{2r+1}} \leq 4^{-r}c^{2r}M^{-2r}\delta^{2r^2r}C_1^{-2r}$$

i.e.,

$$c' \leq \frac{2}{2r-1}M^{2-2r}\delta^{2r^2+2r+1}c^{2r}. \tag{7}$$

Finalement, si les deux conditions (6) et (7) sont vérifiées, ce qui est le cas quand par exemple

$$c' < v_r \cdot M^{-4r+2}\delta^{4r^2+1}c^{4r},$$

avec

$$v_r = v^{-r^3},$$

nous obtenons une contradiction. La première conclusion du lemme est alors démontrée.

Pour établir la dernière conclusion du lemme, il suffit de remarquer que

$$f(t) = f(t_0) + (f(t) - f(t_0)),$$

et

$$f(t)^2 = f(t_0)^2 + 2(f(t) - f(t_0))f(t_0) + (f(t) - f(t_0))^2.$$

Soit alors j le plus petit indice pour lequel, $|\partial_t^j f(t_0)| > c$; alors d'après la formule de Leibniz,

$$|\partial_t^j f^2(t_0)| \leq \left| \sum_{k+l=j} (\partial_t^k f(t_0))(\partial_t^l f(t_0)) \right| \leq c^2 r.$$

Donc, si $Ac > rc^2$, la conclusion est vérifiée. □

Lemme 6.4.10. — *Si f est (M,δ,c,r)-transverse sur (a,b) et si pour $\zeta > 0$, $s \in (a,b)$, $f(s) > \zeta > 0$ alors $\sqrt{f}$ est $(\sqrt{M},\delta',c',r)$-transverse sur (a,b) avec*

$$\delta' = \min(\delta/2, \zeta\delta(8M)^{-1}) \tag{8}$$

$$c' = (c/2^r)^{1/2}$$

Démonstration. — La fonction f est analytique sur $B_\delta = (a-\delta, b+\delta)+\sqrt{-1}(-\delta,\delta)$; la formule de Cauchy montre alors que, pour tout $z \in (a-\delta/2, b+\delta/2)+\sqrt{-1}(-\delta/2,\delta/2)$,

$$|\partial_z f(z)| \leq M(\delta/2)^{-1}. \tag{9}$$

Soit alors $z' \in (a-\delta', b+\delta') + \sqrt{-1}(-\delta',\delta')$ avec δ' comme en (8) ; il existe un point $x \in (a,b)$ pour lequel

$$|z'-x| < \sqrt{2}\delta' < 2\delta', \tag{10}$$

et l'inégalité des accroissements finis ainsi que les formules (9), (10) montrent que

$$|f(z') - f(x)| \leq M(\delta/2)^{-1} 2\delta'.$$

Comme $f(x) > \zeta > 0$, pour $x \in (a,b)$, il en découle que

$$\mathrm{Re}(f(z')) > \zeta - 2M(\delta/2)^{-1}\delta' > \zeta/2,$$

car $\zeta > 8M\delta^{-1}\delta'$. Finalement, f est analytique sur $(a-\delta', b+\delta') + \sqrt{-1}(-\delta',\delta')$ où elle vérifie

$$\mathrm{Re}((f(z)) > \zeta/2.$$

Ceci montre que $\sqrt{f}$ admet une extension analytique sur $B_{\delta'} = (a-\delta', b+\delta') + \sqrt{-1}(-\delta',\delta')$ et

$$\sup_{z\in B_{\delta'}} |\sqrt{f}(z)| \leq \sqrt{M}.$$

Supposons à présent par l'absurde que $c' < \sqrt{c/2^r}$ on $(a-\delta'/2, b+\delta'/2)$, pour $n \leq r$. Nous appliquons alors la formule de Leibniz à $f = \sqrt{f}\cdot\sqrt{f}$ pour obtenir

$$\partial_t^n f(t) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \partial^j(\sqrt{f})(t)\partial^{n-j}(\sqrt{f})(t),$$

et

$$|\partial_t^n f(t)| \leq 2^n c'^2 < c,$$

ce qui est une contradiction. Ceci termine la preuve du lemme 6.4.10 □

Nous notons u^+ la partie positive de u, $u^+ = (1/2)(u + |u|)$.

Proposition 6.4.11. — *Soit t un tore maximal (c'est-à-dire une droite passant par 0) de $so(3, \mathbf{R})$ et soit $\gamma : (a,b) \to t$, une fonction (M, δ, c, r)-transverse sur (a,b) ; soit aussi $\eta(\cdot) \in C^{\omega}_{\delta_\eta}([a,b], so(3,\mathbf{R}))$, $(0 < \delta_\eta \leq \delta)$ telle que*

$$\max_{z \in W_{\delta_\eta}} |\eta(z)| \leq m.$$

Notons

$$\mu(k) = \min\left(1, \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{w \in W_{\delta_\eta/2}} |\partial_w^j \eta(w)|\right),$$

$(\mu(k) \leq m(\delta/2)^{-k})$, et introduisons $1 > \zeta > 0$. Nous supposons que $r \geq 1$, $M \geq 1$, $0 < c < 1$, $0 < \delta < 1$. Alors :

(i) *si I est un intervalle sur lequel $|\gamma(s) + \eta(s)| > \zeta > 0$ $(s \in I)$ pour un $\zeta > 0$, alors $|\gamma(s) + \eta(s)|$ est une fonction $(M', \delta', c', 2r)$-transverse sur I avec*

$$M' = M + 3m,$$

$$\delta' = \frac{\zeta \delta_\eta}{16(M + 3m)^2}$$

$$c' = 2^{-r}\sqrt{((vM^{-1}\delta)^{5r^3}c^{4r} - (6M\delta^{-1})^{2r}\mu(2r))^+};$$

(ii) *si $m < (1/11)\zeta$, et si I est un intervalle sur lequel $\gamma(s) > \zeta > 0$ $(s \in I)$, alors $|\gamma + \eta|$ est une fonction (M', δ', c', r)-transverse sur I avec*

$$M' = M + 3m,$$

$$\delta' = \min(\frac{\zeta\delta}{8M}, \delta_\eta),$$

$$c' = [c - (2M\zeta^{-1}\delta_\eta^{-1})^{5r}m]^+.$$

Démonstration

(i) Nous notons (η_1, η_2, η_3) les coordonnées de η dans la base (J_1, J_2, J_3) et supposons, sans que cela nuise à la généralité, que celles de $\gamma(s)$ dans la même base sont $(\gamma(s), 0, 0)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\gamma(s) + \eta(s)| &= \sqrt{(\gamma(s) + \eta_1(s))^2 + \eta_2(s)^2 + \eta_3(s)^2} \\ &= \sqrt{\gamma(s)^2 + 2\gamma(s)\eta_1(s) + \eta_1(s)^2 + \eta_2(s)^2 + \eta_3(s)^2}. \end{aligned}$$

Comme $\gamma(\cdot)$ est (M, δ, c, r)-transverse sur (a,b), le lemme 6.4.8 nous dit que $\gamma^2(\cdot)$ est est $(M^2, \delta/2, c_1, 2r)$-transverse sur (a,b) avec

$$c_1 = v_r M^{-4r+2}\delta^{4r^2+1}c^{4r}.$$

En outre, la formule de Leibniz

$$\partial_z^k(\gamma\eta_1) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\partial_z^j \gamma)(\partial_z^{k-j}\eta_1),$$

montre que, pour tout $s \in (a - \delta_\eta/2, b + \delta_\eta/2)$,

$$|\partial_t^k(\gamma\eta_1)(s)| \leq 2^k \cdot M(\delta/2)^{-k} \cdot \mu(k),$$

puisque, si $\gamma(\cdot)$ est (M, δ, c, r)-transverse sur (a, b), les inégalités de Cauchy montrent que

$$\sup_{w \in W_{\delta/2}} |\partial_z^k \gamma(w)| \leq M(\delta/2)^{-k},$$

et donc la même inégalité vaut sur $(a - \delta_\eta/2, b + \delta_\eta/2)$. De la même façon,

$$|\partial_t^k \eta_i^2| \leq 2^k \mu(k)^2.$$

Finalement, pour tout $s \in (a - \delta_\eta/2, b + \delta_\eta/2)$,

$$\max_{1 \leq j \leq 2r} |\partial_s^j(\gamma + \eta)^2| \geq c_1 - 2^{2r} M(\delta/2)^{-2r} \mu(2r) - 3 \cdot 2^{2r} \mu(2r)^2.$$

Ceci montre que $(\gamma + \eta)^2(\cdot)$ est $((M + 3m)^2, \delta_\eta, c_2, 2r)$-transverse sur (a, b) avec

$$c_2 = (v_r M^{-4r+2} \delta^{4r^2+1} c^{4r} - 2^{2r} M(\delta/2)^{-2r} \mu(2r) - 2^{2r+2} \mu(2r)^2)^+.$$

Le lemme 6.4.10 établit donc que $|\gamma + \eta|$, qui est égal à $\sqrt{(\gamma + \eta)^2}$, est $(M', \delta', c', 2r)$-transverse avec

$$M' = M + 3m,$$
$$\delta' = \frac{\zeta \delta_\eta / 2}{8(M + 3m)^2},$$
$$c' = \sqrt{2^{-2r}(v_r M^{-4r+2} \delta^{4r^2+1} c^{4r} - 2^{2r} M(\delta/2)^{-2r} \mu(2r) - 2^{2r+2} \mu(2r)^2)^+},$$
$$r' = 2r.$$

Clairement, ceci achève la démonstration de la partie (i) du lemme puisque $r \geq 1$, $M \geq 1$, $0 < \delta \leq 1$, $0 < \mu \leq 1$.

(ii) L'hypothèse $\gamma(s) > \zeta > 0$ pour tout $s \in I$, et la même preuve que celle faite pour établir le lemme 6.4.10, montrent que, pour tout $z \in W_{\delta'}(a, b)$,

$$\mathrm{Re}(\gamma(z)) > \zeta/2 > 0,$$

puisque

$$\delta' = \frac{\zeta \delta}{8M}.$$

Ecrivons maintenant que, pour $s \in I$,

$$\begin{aligned} |\gamma(s) + \eta(s)| &= \gamma(s) \cdot \sqrt{(1 + \frac{\eta_1(s)}{\gamma(s)})^2 + (\frac{\eta_2(s)}{\gamma(s)})^2 + (\frac{\eta_3(s)}{\gamma(s)})^2} \\ &= \gamma(s) \cdot \sqrt{1 + h(s)}. \end{aligned}$$

Remarquons aussi que $h \in C^{\omega}_{\delta'}(I)$ et que pour $z \in W_{\delta'}(I)$,

$$\left|\frac{\eta_i(z)}{\gamma(z)}\right| \leq \frac{2}{\zeta} m.$$

Ainsi, comme

$$h(z) = 2\frac{\eta_1(z)}{\gamma(z)} + \frac{\sum_{i=1}^3 \eta_i^2(z)}{\gamma(z)^2},$$

nous avons pour tout $z \in W_{\delta'}(I)$,

$$|h(z)| \leq \frac{4m}{\zeta} + 3\frac{m^2.4}{\zeta^2},$$

c'est-à-dire si $m < (1/11)\zeta$,

$$|h(z)| \leq \frac{1}{2}.$$

Finalement, on peut définir pour $z \in W_{\delta'}(I)$ la fonction, $1 + g(z) = \sqrt{1 + h(z)}$ et comme, pour $w \in \mathbf{C}$, $|w| < 1$,

$$|\sqrt{1+w}| \leq 1 + |w|/2,$$

nous obtenons

$$\sup_{z \in W_{\delta'}(I)} |\sqrt{1 + h(z)} - 1| \leq 3\frac{m}{\zeta}.$$

Ceci implique que

$$\sup_{z \in W_{\delta'}(I)} |\gamma(z) \cdot (\sqrt{1 + h(z)} - 1)| \leq 3M\frac{m}{\zeta}.$$

et

$$\sup_{z \in W_{\delta'/2}(I)} |\partial_z^k(\gamma.g)(z)| \leq 3Mm\zeta^{-1}(\delta'/2)^{-k}.$$

Comme

$$|\gamma(s) + \eta(s)| = \gamma(s) + \gamma(s) \cdot g(s),$$

il vient que, pour $k \leq r$,

$$\partial_s^k(|\gamma(s) + \eta(s)|) \geq c - 3Mm\zeta^{-1}(\delta'/2)^{-r},$$

ce qui donne la conclusion du (ii) et termine la preuve de la proposition 6.4.11. □

Remarquons que dans le (i) de la proposition précédente, seulement δ intervient dans l'expression de c' et non pas δ_η (*cf.* 6.8.b).

En outre, en raisonnant comme dans la preuve de (i) et en introduisant $\mu(k)$, on peut dans l'expression de c' obtenue en (ii) remplacer δ_η par δ.

La proposition précédente admet le corollaire suivant :

Corollaire 6.4.12. — *Supposons que $\gamma(\cdot), \eta(\cdot)$ vérifient les hypothèses de la proposition 6.4.11 ; alors pour tout $\zeta > 0$, l'équation*

$$|\gamma(\lambda) + \eta(\lambda)| = \zeta, \tag{11}$$

a un nombre de solutions inférieur à

$$4r \cdot (1 + |\Lambda|) \cdot \left(\frac{M^2 (\delta_\eta/2)^{-(2r+1)}}{c'^2} + 1 \right).$$

Démonstration. — Les calculs que nous avons effectués précédemment montrent que la fonction $(\gamma + \eta)^2$ est $(M + 3m)^2, \delta_\eta, c_2, 2r)$-transverse avec $c_2 = 2^{2r}(c')^2 \geq c'^2$ (remarquer que puisque l'on n'extrait pas de racine carrée ζ n'intervient pas dans la transversalité). Par conséquent d'après le lemme 6.4.2, le nombre de solutions de

$$|(\gamma + \eta)^2(\lambda_0)| = \zeta^2,$$

sur Λ est inférieur à

$$4r \cdot (1 + |\Lambda|) \cdot \left(\frac{M^2 (\delta_\eta/2)^{-(2r+1)}}{c'^2} + 1 \right).$$

□

6.5. Résonances

Nous reprenons dans cette section certains résultats de la section 5.3 du chapitre 5. Rappelons que si $\gamma > 0$ et $\sigma > d - 1$ nous notons $CD(\gamma, \sigma)$ l'ensemble des $\omega \in \mathbf{R}^d$ tels que, pour tout $k \in \mathbf{Z}^d - \{0\}$,

$$|(k, \omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma}. \tag{12}$$

Pour tout entier positif N et tous réels $K, \tau > 0$ nous définissons $DS^\tau(N, K) = DS^\tau_\omega(N, K)$ comme étant l'ensemble des réels α diophantiens jusqu'à l'ordre N c'est-à-dire vérifiant pour tout entier $0 < |k| \leq N$,

$$|\alpha - (k, \omega)| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau}. \tag{13}$$

Nous noterons $D\dot{S}^\tau(N, K)$ le même ensemble 0 étant exclu et $RS^\tau(N, K)$ (R pour résonnant) le complémentaire de ce dernier ensemble. Nous pouvons alors reformuler le lemme 5.3.1 de la section 5.3 du chapitre 5.

Lemme 6.5.1. — *Soient $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$, $N \in \mathbf{N}$, $K > 0$ et $\tau > \sigma > 0$ tels que*

$$K > 2^{1+\sigma}\gamma \cdot N^{\mu\sigma}. \tag{14}$$

Alors

(i) *pour tout* $\alpha \in \mathbf{R}$, *il existe au plus un entier* $k_0 \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k_0| \leq N$ *tel que pour tout* $k \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k| \leq N$, $k \neq k_0$, *on ait*

$$|\alpha - (k,\omega)| \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau};$$

(ii) *si ce* k_0 *existe et si on pose* $\widetilde{\alpha} = \alpha - (k_0,\omega)$ *alors* $\widetilde{\alpha} \in DS^\tau(N^\mu, K)$.

Démonstration. — Elle est similaire à celle de du lemme 5.3.1 du chapitre 5

(i) Supposons par l'absurde qu'il existe deux entiers $k_i \in \mathbf{Z}^d$, $i = 1,2$ tels que

$$|\alpha - (k_i,\omega)| < \frac{K^{-1}}{|k_i|^\tau};$$

en soustrayant les deux inégalités précédentes pour $i = 1,2$ il vient

$$|(k_1 - k_2,\omega)| \leq \frac{K^{-1}}{|k_1|^\tau} + \frac{K^{-1}}{|k_2|^\tau} \leq 2K^{-1}.$$

Par ailleurs, puisque $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$ on a d'après (12)

$$|(k_1 - k_2,\omega)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{|k_1 - k_2|^\sigma} \geq \frac{\gamma^{-1}}{(2N)^\sigma}.$$

Finalement on obtient

$$\frac{\gamma^{-1}}{(2N)^\sigma} < 2K^{-1},$$

ce qui contredit l'hypothèse (14) du lemme.

(ii) Pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k| \leq N^\mu$ on a

$$\begin{array}{rcl} |\widetilde{\alpha} - (k,\omega)| & = & |\alpha - (k,\omega) - (k_0,\omega)| \\ & > & |(k,\omega)| - |\alpha - (k_0,\omega)| \\ & > & \dfrac{\gamma^{-1}}{|k|^\sigma} - \dfrac{K^{-1}}{|k_0|^\tau} \\ & > & \gamma^{-1}N^{-\mu\sigma} - K^{-1}. \end{array}$$

Mais comme

$$2^{1+\sigma}\gamma N^{\mu\sigma} < K,$$

on a

$$\gamma^{-1}N^{-\mu\sigma} > 2K^{-1},$$

c'est-à-dire

$$|\widetilde{\alpha} - (k,\omega)| > K^{-1} \geq \frac{K^{-1}}{|k|^\tau},$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

6.6. Estimées

Nous noterons $M(m,\mathbf{K})$, ($\mathbf{K}=\mathbf{R},\mathbf{C}$) l'ensemble des matrices $m\times m$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ et nous le munirons d'une norme multiplicative, c'est-à-dire vérifiant pour tous $U,V\in M(m,\mathbf{K})$,

$$|UV|\leq |U|\cdot|V|.$$

Si $f(z)=\sum_{k\geq 0}a_kz^k$ est une fonction entière alors pour tout $U\in M(m,\mathbf{K})$, on peut définir

$$f(U)=\sum_{k\geq 0}a_kU^k,$$

et si les coefficients de f sont réels positifs,

$$|f(U)|\leq f(|U|).$$

Nous poserons dans la suite, $u(z)=z^{-1}(e^z-1)-1$.

Nous avons alors la proposition évidente suivante :

Proposition 6.6.1. — *Soit $U\in C_h^{\omega}(\mathbf{T}^d,M(m,\mathbf{K}))$ telle que $|U|_h\leq 1$ $(h>0)$; alors pour tout $n\geq 0$,*

(a) $$|U^n|_h\leq |U|_h^n,$$

(b) $$|e^U-(\mathrm{Id}+U)|_h\leq |U|_h^2,$$

(c) $$|e^U-\mathrm{Id}\,|_h\leq 2|U|_h.$$

(d) $$|u(U)|_h\leq |U|_h.$$

Nous donnons à présent quelques estimées classiques. Dans ce qui suit $0<h_1\leq 1$.

Proposition 6.6.2

Il existe une constante $C>0$ telle que, pour tout $F\in C_{h_1}^{\omega}(\mathbf{T}^d,so(3,\mathbf{R}))$ et tout $0<h<h_1$ les inégalités suivantes sont vérifiées :

(i) $$|T_NF|_h\leq \frac{C}{(h_1-h)^d}|F|_{h_1},$$

(ii) $$|R_NF|_h\leq C\frac{e^{-2\pi(N+1)(h_1-h)}}{(h_1-h)^d}|F|_{h_1},$$

(iii) $$|e^{2\pi\sqrt{-1}(m,x)}F(x)|_h\leq e^{2\pi|m|h}|F|_h,$$

(iv) $$|R_N(e^{2\pi\sqrt{-1}(m,x)}F(x))|_h\leq C\frac{e^{-2\pi(N+1)(h_1-h)}}{(h_1-h)^d}e^{2\pi|m|h_1}|F|_{h_1}.$$

Démonstration

(i) On a

$$T_N F(z) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{F}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,z)},$$

si bien que, pour tout $|\operatorname{Im}(z)| \leq h$,

$$|T_N F|_h \leq \sum_{|k| \leq N} |\widehat{F}(k)| e^{2\pi|k|h},$$

et d'après la proposition 1.1.2 du chapitre 1,

$$|\widehat{F}(k)| \leq C |F|_{h_1} e^{-2\pi|k|h_1},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
|T_N F|_h &\leq C |F|_{h_1} \sum_{|k| \leq N} e^{-2\pi(h_1-h)|k|} \\
&\leq C \left(\sum_{l=0}^{N} e^{-2\pi l(h_1-h)} \right)^d |F|_{h_1} \\
&\leq C \left(\frac{1}{1 - e^{-2\pi(h_1-h)}} \right)^d |F|_{h_1} \\
&\leq \frac{C}{(h_1-h)^d} |F|_{h_1}
\end{aligned}$$

(ii) Ecrivons

$$R_N F(z) = \sum_{|k| > N} \widehat{F}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,z)};$$

on a

$$|R_N F|_h \leq \sum_{|k| > N} |\widehat{F}(k)| e^{2\pi|k|h},$$

et d'après l'équation (5) de la proposition 1.1.2,

$$\begin{aligned}
|R_N F|_h &\leq |F|_{h_1} \sum_{|k| > N} e^{-2\pi(h_1-h)|k|} \\
&\leq C_d \frac{e^{-2\pi(N+1)(h_1-h)}}{(h_1-h)^d} |F|_{h_1}.
\end{aligned}$$

(iii) est évident.

(iv) Nous avons pour $x \in \mathbf{R}^d$,

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} \widehat{F}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)},$$

si bien que

$$\begin{aligned} F(x)e^{2\pi\sqrt{-1}(m,x)} &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \widehat{F}(k)e^{2\pi\sqrt{-1}(k+m,x)} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}^d} \widehat{F}(k-m)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)}. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$R_N\left(e^{2\pi\sqrt{-1}(m,x)}F(x)\right)(z) = \sum_{|k|>N} e^{2\pi\sqrt{-1}(k,z)}\widehat{F}(k-m),$$

et

$$\begin{aligned} \left|R_N\left(e^{2\pi\sqrt{-1}(m,x)}F(x)\right)\right|_h &\leq \sum_{|k|>N} e^{2\pi\sqrt{-1}|k|h}|\widehat{F}(k-m)| \\ &\leq |F|_{h_1}\sum_{|k|>N} e^{2\pi|k|h}e^{-2\pi|k-m|h_1} \\ &\leq Ce^{2\pi|m|h_1}|F|_{h_1}\sum_{|k|>N} e^{-2\pi|k|(h_1-h)}, \end{aligned}$$

puisque $|k-m|\geq|k|-|m|$. Finalement la proposition 1.1.2 du chapitre 1 permet de conclure la preuve de (iv). □

Rappelons que nous notons $\dot{T}_N F$ la troncature dans la série de Fourier de F, le terme constant étant exclu.

Proposition 6.6.3. — *Soient $\Lambda\subset\mathbf{R}$ un intervalle, $A(\cdot)\in C^\omega_\delta(\Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ une famille à un paramètre d'éléments constants et $F\in C^\omega_{h_1,\delta}(\mathbf{T}^d\times\Lambda, so(3,\mathbf{R}))$. Nous supposons que $\omega\in CD(\gamma,\sigma)$ ainsi que :*

(a) $M := \max(1, \sup_{w\in W_\delta(\Lambda)}|A(w)|)$,

(b) *pour tout* $\lambda\in\Lambda$, $|A|\in DS^\tau(N,K)$.

Alors il existe $Y\in C^\omega_{h_1,\delta'}(\mathbf{T}^d\times\Lambda, so(3))$, avec

$$\delta'\geq\widetilde{c}_6K^{-2}(MN)^{-a_6}\delta,$$

où

$$a_6 = 9+\sigma+2\tau+d,$$

tel que

(i) *pour tout $(x,\lambda)\in\mathbf{R}^d\times\Lambda$, $Y(x,\lambda)$ est à valeurs dans l'algèbre $so(3,\mathbf{R})$ et résout*

$$L_{\omega/2\pi}Y(x,\lambda)+[A(\lambda),Y(x,\lambda)] = \dot{T}_N F(x,\lambda),$$

(ii) *pour tout* $0<h<h_1$,

$$|Y|_{h,\delta'}\leq\widetilde{c}_6\gamma K^2(MN)^{a_6}\frac{|F|_{h_1,\delta'}}{(h_1-h)^d}, \tag{15}$$

où $\widetilde{c}_6$ est une constante positive.

Démonstration. — Adaptons la démonstration du lemme 3.3.1 du chapitre 3 au cas où $g = so(3, \mathbf{R})$; nous avons montré que pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\begin{aligned} |[\sqrt{-1}(k,\omega)\operatorname{Id} + \operatorname{ad}(A(\lambda))]^{-1}| &\leq \widetilde{c}_2 |k|^{\sigma+2\tau} \gamma K^2 (M+N)^8 \\ &\leq \widetilde{c}_2 |k|^{\sigma+2\tau} K^2 (MN)^8, \end{aligned}$$

où $\widetilde{c}_2 = \text{cste} \cdot (2+|\omega|)^8 \cdot \gamma$. Nous prouvons à présent le lemme suivant :

Lemme 6.6.4. — *Pour tout $k \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k| \leq N$, et tout $w \in W_{\delta'}(\Lambda)$, l'endomorphisme $\sqrt{-1}(k,\omega)\operatorname{Id} + \operatorname{ad}(A(w)) \in gl(so(3,\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C})$ est inversible et la norme de son inverse vérifie*

$$|[\sqrt{-1}(k,\omega)\operatorname{Id} + \operatorname{ad}(A(w))]^{-1}| \leq C|k|^{\sigma+2\tau} \gamma K^2 (MN)^8,$$

où $C > 0$ est une constante.

Démonstration. — Rappelons tout d'abord le résulat élémentaire suivant :

Lemme 6.6.5. — *Soient $B, H \in M(m, \mathbf{R})$ telles que B soit inversible et supposons que $|H| < \frac{1}{2}|B^{-1}|^{-1}$; alors $B + H$ est inversible et la norme de son inverse vérifie*

$$|(B+H)^{-1}| \leq 2|B^{-1}|^{-1}.$$

Démonstration. — En effet

$$(B+H) = B(I + B^{-1}H);$$

comme

$$|B^{-1}H| \leq |B^{-1}| \cdot |H| \leq \frac{1}{2},$$

il découle que $B + H$ est inversible et

$$|(B+H)^{-1}| = |(I + B^{-1}H)^{-1}| \cdot |B^{-1}| \leq \frac{1}{1-(1/2)} |B^{-1}|,$$

ce qui est la conclusion. □

A présent, si $w \in W_{\delta/2}(\Lambda)$, nous savons d'après les formules de Cauchy que

$$|\partial_w A(w)| \leq M(\delta/2)^{-1}.$$

Par ailleurs, si $w \in W_{\delta'}$, il existe toujours un $\lambda \in \Lambda$ pour lequel $|w - \lambda| \leq 2\delta'$. L'inégalité des accroissements finis montre alors que, pour $\delta' \leq \delta/2$,

$$|A(w) - A(\lambda)| \leq M(\delta/2)^{-1}\delta',$$

c'est-à-dire

$$|\operatorname{ad}(A(w)) - \operatorname{ad}(A(\lambda))| \leq CM(\delta/2)^{-1}\delta'.$$

L'application du lemme précédent au cas où $B = \sqrt{-1}(k,\omega)\operatorname{Id} + \operatorname{ad}(A(\lambda))$ et $H = \operatorname{ad}(A(w)) - \operatorname{ad}(A(\lambda))$, montre que, si

$$CM(\delta/2)^{-1}\delta' \leq \frac{1}{2} |[\sqrt{-1}(k,\omega) + \operatorname{ad}(A(\lambda))]^{-1}|^{-1},$$

alors $\mathrm{ad}(A(w)) + \sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id}$ est inversible et

$$\begin{aligned}|[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A(w))]^{-1}| &\le 2|[\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A(\lambda))]^{-1}| \\ &\le C|k|^{\sigma+2\tau}K^2(MN)^8.\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir

$$\delta' \ge \max_{|k|\le N} C|k|^{-(\sigma+2\tau)}K^{-2}(MN)^{-8}M^{-1}\delta,$$

ou par exemple,

$$\delta' \ge CN^{-(\sigma+2\tau)}K^{-2}(MN)^{-8}M^{-1}\delta.$$

Ceci termine la preuve du lemme vu le choix fait pour l'exposant a_6. □

Pour terminer la preuve de la proposition, posons pour tout $0 < |k| \le N$ et $w \in W_{\delta'}(\Lambda)$,

$$\widehat{Z}(k,w) = [(\sqrt{-1}(k,\omega)\,\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(A(w))]^{-1} \cdot \widehat{F}(k,w),$$

où $\widehat{F}(k,w)$ représente le k-ième coefficient de Fourier de $F(\cdot,w)$,

$$\widehat{F}(k,w) = \int_{[0,1]^d} F(x,w)e^{-2\pi\sqrt{-1}(k,x)}dx.$$

Remarquons que $\widehat{F}(k,w) \in so(3,\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$, et $\widehat{F}(k,\lambda) \in so(3,\mathbf{R})$ quand $\lambda \in \Lambda$.

Définissons également sur $W_{h_1,\delta'}(\mathbf{R}^d \times \Lambda)$,

$$Z(z,w) = \sum_{0<|k|\le N} \widehat{Z}(k,w)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,z)},$$

qui est une fonction de $C^\omega_{h_1,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R})\otimes\mathbf{C})$. Les estimées précédentes montrent que

$$|\widehat{Z}(k,w)| \le C|\widehat{F}(k,w)| \cdot |k|^{(\sigma+2\tau)}K^2(MN)^8,$$

et

$$\begin{aligned}|\widehat{Z}(k,w)e^{2\pi\sqrt{-1}(k,z)}|_h &\le C|\widehat{F}(k,w)| \cdot e^{2\pi|k|h}|k|^{(\sigma+2\tau)}K^2(MN)^8 \\ &\le C|F|_{h_1}e^{2\pi|k|(h-h_1)}|k|^{(\sigma+2\tau)}K^2(MN)^8.\end{aligned}$$

Mais la somme

$$S_N = \sum_{0<|k|\le N} |k|^{\sigma+2\tau}e^{-2\pi|k|(h_1-h)},$$

vérifie

$$\begin{aligned}S_N &\le \frac{N^{d+\sigma+2\tau}}{(1-e^{(h_1-h)})^d} \\ &\le C\frac{N^{d+\sigma+2\tau}}{(h_1-h)^d}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$|Z(\cdot,w)|_h \leq CK^2(MN)^8 N^{d+\sigma+2\tau}\frac{|F(\cdot,w)|_{h_1}}{(h_1-h)^d}.$$

On posera $\widetilde{c}_6 = C$. Posons à présent pour $(z,w) \in W_{h_1,\delta'}(\mathbf{R}^d \times \Lambda)$,

$$Y(z,w) = \frac{1}{2}(Z(z,w) + \overline{Z(\overline{z},\overline{w})});$$

c'est une fonction dans $C^{\omega}_{h_1,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\rho \otimes \mathbf{C})$ qui vérifie

$$\begin{aligned} |Y|_{h,\delta'} &\leq CK^2(MN)^8 N^{d+\sigma+2\tau}\frac{|F|_{h_1,\delta'}}{(h_1-h)^d} \\ &\leq CK^2(MN)^{a_6}\frac{|F|_{h_1,\delta'}}{(h_1-h)^d}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $w = \lambda \in \Lambda$, $Z(\cdot,\lambda)$ résout l'équation sur $\mathbf{T}^d$,

$$L_{\omega/2\pi}Z(x,\lambda) + \mathrm{ad}(A(\lambda)) \cdot Z(x,\lambda) = \dot{T}_N F(x).$$

Prenant l'équation complexe conjuguée, on voit qu'il en est de même de $\overline{Z}(x,\lambda)$ et, par conséquent,

$$L_{\omega/2\pi}Y(x,\lambda) + \mathrm{ad}(A(\lambda)) \cdot Y(x,\lambda) = \dot{T}_N F(x).$$

Mais à présent $Y(x,\lambda)$ est à valeurs dans $so(3,\mathbf{R})$ pour $(x,\lambda) \in \mathbf{R}^d \times \Lambda$ (et non plus seulement dans $so(3,\mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$)). Ceci termine la preuve de la proposition. □

Nous introduisons maintenant et évaluons quelques expressions qui nous seront utiles par la suite.

Rappelons que la différentielle de l'exponentielle vérifie

$$e^{-X} \cdot D(\exp)(X) \cdot H = \frac{\mathrm{Id} - e^{-\mathrm{ad}(X)}}{\mathrm{ad}(X)} \cdot H.$$

Pour $Y \in C^{\omega}(\mathbf{T}^d, so(3,\mathbf{R}))$ évaluons $L_{\omega/2\pi}e^Y e^{-Y}$. On posera $B = e^Y$. On obtient

$$\begin{aligned} L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1} &= -e^Y L_{\omega/2\pi}e^{-Y} \\ &= -e^Y \cdot D(e^{-Y}) \cdot (-L_{\omega/2\pi}Y) \\ &= -\frac{\mathrm{Id} - e^{-\mathrm{ad}(-Y)}}{\mathrm{ad}(-Y)} \cdot (-L_{\omega/2\pi}Y) \\ &= \frac{e^{\mathrm{ad}(Y)} - \mathrm{Id}}{\mathrm{ad}(Y)} \cdot L_{\omega/2\pi}Y. \end{aligned}$$

Dans la suite, $L(X)$ est l'endomorphisme de $gl(so(3,\mathbf{R}))$

$$L(X) = \mathrm{Ad}(e^X) - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(X) = e^{\mathrm{ad}(X)} - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(X),$$

et $S(X)$ l'endomorphisme

$$S(X) = \frac{e^{\mathrm{ad}(X)} - \mathrm{Id}}{\mathrm{ad}(X)} - \mathrm{Id},$$

Le quotient précédent se comprenant comme

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\mathrm{ad}^k(X)}{(k+1)!}.$$

Utilisons le fait que

$$|\,\mathrm{ad}(X)|\leq 2|X|,$$

et remplaçons X par $\mathrm{ad}(X)$ dans les inégalités précédentes. Ainsi, si X est dans $C_h^\omega(\mathbf{T}^d, so(3,\mathbf{R}))$, on a, pourvu que $|X|_h$ soit plus petit que $1/2$,

$$|L(X)|_h\leq C|X|_h^2,$$

$$\begin{aligned}|L(X)\cdot Z|_h &\leq |L(X)|_h|Z|_h\\ &\leq C|X|_h^2|Z|_h,\end{aligned}$$

$$|S(X)|_h\leq |X|_h,$$

$$|S(X)\cdot Z|_h\leq C|X|_h|Z|_h.$$

Nous supposons donnés A, F, Y comme dans la proposition 6.6.3, c'est-à-dire que

$$L_{\omega/2\pi}Y+[A,Y]=\dot{T}_N F,$$

et faisons l'hypothèse supplémentaire

$$2\widetilde{c}_6K^2(MN)^{a_6}|F|_{h_1,\delta}\leq 1, \tag{16}$$

qui assure $|Y|_{h,\delta'}, |F|_{h,\delta}\leq 1/2$. Les inégalité précédentes montrent que

$$\begin{aligned}|S(Y)\cdot L_{\omega/2\pi}Y|_h &\leq |Y|_h|L_{\omega/2\pi}Y|_h\\ &\leq C|Y|_h(|[A,Y]|_h+|\dot{T}_NF|_h)\\ &\leq CMK^2(MN)^{a_6}\frac{|F|_{h_1,\delta}}{(h_1-h)^d}\\ &\qquad\cdot\left(K^2(MN)^{a_6}\frac{|F|_{h_1,\delta}}{(h_1-h)^d}+N^d\frac{|F|_{h_1,\delta}}{(h_1-h)^d}\right)\\ &\leq CK^4(MN)^{2a_6+d+1}\frac{|F|_{h_1,\delta}}{(h_1-h)^{2d}}.\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}|[Y,F]|_h &\leq 2|Y|_h|F|_h\\ &\leq CK^2(MN)^{a_6}\frac{|F|_{h_1,\delta}^2}{(h_1-h)^d}.\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
|L(Y)\cdot(A+F)|_h &\le C|Y|_h^2|A+F|_h \\
&\le C|Y|_h^2(1+|A|)(1+|F|_h) \\
&\le CMK^4(MN)^{2a_6}\frac{|F|_{h_1}^2}{(h_1-h)^d}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

6.7. Lemmes de conjugaison

Si A_0 est dans $so(3,\mathbf{R})$ définissons,

$$V_s(A_0)=\{A\in g,\ |A-A_0|<s\}.$$

Rappelons que nous avons noté, $W_h(V_s(A_0))\subset so(3,\mathbf{R})\otimes\mathbf{C}$, l'ensemble des $A+\sqrt{-1}B$ avec $B\in so(3,\mathbf{R})$ de norme inférieure à $h>0$ et $A\in V_s(A_0)$. On a alors :

Lemme 6.7.1. — *Soit $\rho>0$, $A_0\in so(3,\mathbf{R})$ tel que $|A_0|\ge\rho>0$ et $t_{A_0}=\mathbf{R}A_0$ (l'algèbre maximale passant par A_0). Il existe alors une constante positive κ indépendante de ρ et une application analytique ψ telles que*

(i)
$$\psi\in C^{\omega}_{\rho\kappa}(V_{\rho\kappa}(A_0),so(3,\mathbf{R})),$$

(ii)
$$\sup_{\widetilde{A}\in W_{\rho\kappa}(A_0)}|\psi(\widetilde{A})|\le\frac{3}{2},$$

(iii) pour tout $A\in V_{\rho\kappa}$,

$$\mathrm{Ad}(e^{\psi(A)})\cdot A=e^{\mathrm{ad}(\psi(A))}\in t_{A_0}.$$

(iv) Si $A_1\in t_{A_0}$ est de norme 1, alors

$$\mathrm{Ad}(e^{\psi(A)})\cdot A=|A|\cdot A_1.$$

Démonstration. — Supposons tout d'abord que $|A_0|=1$ et notons k un supplémentaire de $t_{A_0}=\mathbf{R}A_0$ dans $so(3,\mathbf{R})$ (par exemple le plan orthogonal à A_0), $so(3,\mathbf{R})=k\oplus t_{A_0}$. L'application Ψ définie par

$$\begin{aligned}
\Psi: k\times t_{A_0} &\longrightarrow so(3,\mathbf{R}) \\
(X,Y) &\longmapsto \mathrm{Ad}(e^X)\cdot(A_0+Y)
\end{aligned}$$

a pour différentielle au point $(0,0)$:

$$D\Psi(0,0)\cdot(X,Y)=[X,A_0]+Y,$$

qui est clairement inversible. Le théorème des fonctions implicites montre alors que Ψ est un difféomorphisme analytique d'un voisinage de $(0,0)$ sur $V_{2\kappa}(A_0)$. Si

$$p_1:(X,Y)\longmapsto X,$$

définissons $\psi = p_1 \circ \Psi^{-1}$. L'affirmation (iii) est alors claire. En outre, ψ est analytique sur $V_\kappa(A_0)$ et il existe donc $\delta_0 > 0$ tel que ψ est dans $C^\omega_{\delta_0}(V_\kappa(A_0), so(3,\mathbf{R}))$. Par ailleurs, quitte à choisir κ plus petit ($\kappa < \delta_0$), on peut supposer que

$$\sup_{\widetilde{A} \in W_\kappa(A_0)} |\psi(\widetilde{A})| \leq \frac{3}{2},$$

et nous obtenons (ii) pour $\rho = 1$. La conclusion du lemme s'obtient alors par homogénéité (sur ρ). □

Nous poserons,

(20) $$\phi(A) = e^{\psi(A)}.$$

Nous aurons besoin dans la procédure de récurrence des deux lemmes suivants de conjugaisons. Nous supposons toujours dans ce qui suit que $\omega \in CD(\gamma, \sigma)$ est fixé.

Lemme 6.7.2. — *Il existe une constante $\overline{C}_1 > 0$ pour laquelle ce qui suit est vrai. Soient $\Lambda \in \mathbf{R}$ un intervalle, $A \in C^\omega_\delta(\Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ une famille à un paramètre d'éléments constants $F^\omega_{h,\delta}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$. Supposons*

(a) $M := \max\left(1, \sup_{w \in W_\delta(\Lambda)} |A(w)|\right)$,

(b) *pour tout* $\lambda \in \Lambda$, $|A| \in DS^\tau(N,K)$,

(c) *et (*cf. *formule (15))* $\overline{C}_1 K^2 (MN)^{a_6} \dfrac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d} < 1$,

il existe alors $\delta' > 0$,

$$Y \in C^\omega_{h',\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$$

et

$$A' \in C^\omega_{\delta'}(\Lambda, so(3,\mathbf{R})),$$
$$F' \in C^\omega_{h,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R})),$$

tels que

(i) $\delta' = \overline{C}_1 K^{-2}(MN)^{-a_6}\delta$,

(ii) $(\omega/2\pi, A'+F')\ \mathcal{R}(e^Y)\ (\omega/2\pi, A+F)$,

(iii) $A' = A + \widehat{F}(0,\cdot)$,

(iv) *et pour tout* $0 < h' < h$,

$$|F'|_{h',\delta'} \leq \overline{C}_1 K^4 (MN)^{2a_6+d+1} \frac{|F|^2_{h,\delta}}{(h-h')^{2d}} + \overline{C}_1 e^{-2\pi N(h-h')} \frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d}.$$

$$|Y|_{h',\delta'} \leq \widetilde{c}_6 \gamma K^2 (MN)^{a_6} \frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d};$$

(v) $M' := \max(1, |A'|_{\delta'}) \leq M + |F|_{h,\delta}$.

Démonstration. — La proposition 6.6.3 nous fournit un $Y \in C^{\omega}_{h,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ tel que

$$L_{\omega/2\pi}Y + [Y,A] + \dot{T}_N F = 0; \tag{21}$$

posons

$$A' = A + \widehat{F}(0,\lambda),$$

et

$$F' = (L_{\omega/2\pi}e^Y)\cdot e^{-Y} + \mathrm{Ad}(e^Y)\cdot(A+F) - A'.$$

Les points (ii), (iii) sont alors automatiquement satisfaits et il nous faut seulement vérifier le point (iv) ainsi que $F \in C^{\omega}_{h,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$. Calculons :

$$\begin{aligned}
F' &= (L_{\omega/2\pi}e^Y)\cdot e^{-Y} + \mathrm{Ad}(e^Y)\cdot(A+F) - A' \\
&= (D(e^Y)\cdot L_{\omega/2\pi}Y)e^{-Y} + (\mathrm{Ad}(e^Y) - \mathrm{Id} - \mathrm{ad}(Y))\cdot(A+F) \\
&\qquad\qquad + (\mathrm{Id} + \mathrm{ad}(Y))\cdot(A+F) - A', \\
&= (S(Y) + \mathrm{Id})\cdot L_{\omega/2\pi}Y + L(Y)\cdot(A+F) + A + F + [Y,A] + [Y,F] - A'.
\end{aligned}$$

Utilisant le fait que

$$L_{\omega/2\pi}Y + [Y,A] + \dot{T}_N F = 0,$$

nous obtenons

$$F' = S(Y)\cdot L_{\omega/2\pi}Y + L(Y)\cdot(A+F) + [Y,F] + R_N F,$$

ce qui montre que $F \in C^{\omega}_{h,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$. Enfin, quitte à choisir $\overline{C}_1 > 0$ suffisamment grand, les estimations (17), (18), (19) et le (ii) de la proposition 6.6.2 donnent l'estimée voulue sur $|F'|_{h',\delta'}$.

Ceci conclut la preuve du lemme. □

Dans le cas où il y a une résonance, le lemme précédent ne s'applique pas directement et nous devons au préalable éliminer cette résonance.

Lemme 6.7.3. — *Il existe une constante $\overline{C}_2$ pour laquelle ce qui suit est vrai. Soient $\Lambda \in \mathbf{R}$ un intervalle, $A \in C^{\omega}_{\delta}(\Lambda, so(3,\mathbf{R}))$, $F \in C^{\omega}_{h,\delta}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$, $K = N^{\nu}$ et $k_0 \in \mathbf{Z}^d$, $0 < |k_0| \leq N$ tels que*

(a) *pour tout $\lambda \in \Lambda$,*

$$|A(\lambda)| \in \left((k_0,\omega) - \frac{K^{-1}}{|k_0|^{\tau}}, (k_0,\omega) + \frac{K^{-1}}{|k_0|^{\tau}}\right),$$

et en particulier $|A(\lambda)| \geq \dfrac{\gamma^{-1}}{N^{\sigma}} - K^{-1} \geq \dfrac{\gamma^{-1}}{2N^{\sigma}}$.

(b) *il existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda$,*

$$|A(\lambda) - A(\lambda_0)| \leq \kappa |A(\lambda_0)|,$$

κ étant la constante du lemme 6.7.1 ;

(c) $\sup_{w\in W_\delta(\Lambda)}|A(w)|\le M$.
(d) $\overline{C}_2K^2(MN)^{\mu a_6}e^{2\pi Nh}|F|_{h,\delta}(h-h')^{-d}\le 1$.

Alors il existe $\delta'>0$, $A',\widetilde{A}\in C^\omega_{\delta'}(\Lambda,so(3,\mathbf{R}))$, $F',\widetilde{F}\in C^\omega_{h',\delta'}(\mathbf{T}^d\times\Lambda,so(3,\mathbf{R}))$ *tels que*

(i) *pour tout* $\lambda\in\Lambda$,

$$(\omega/2\pi,A'+F')\ \mathcal{R}\ (\omega/2\pi,\widetilde{A}+\widetilde{F})\ \mathcal{R}\ (\omega/2\pi,A+F),$$

(ii) *pour tout* $\lambda\in\Lambda$, $\widetilde{A}(\lambda)$ *est sur le tore maximal* $t_{A(\lambda_0)}=\mathbf{R}A(\lambda_0)$ *et*

$$|\widetilde{A}(\lambda)|=|A(\lambda)|-(k_0,\omega),$$

c'est-à-dire $|\widetilde{A}(\lambda)|\in(-K^{-1}/|k|^\tau,K^{-1}/|k|^\tau)\subset DS^\tau(N^\mu,K)$;

(iii)

$$|\widetilde{F}|_{h',\delta'}\le\overline{C}_2e^{2\pi h'|k_0|}|F|_{h,\delta},$$

(iv)

$$A'(\lambda)=A(\lambda)+\widehat{\widetilde{F}}(0,\lambda),$$

et

$$|F'|_{h',\delta'}\le\overline{C}_2(MN)^{a_7}e^{4\pi Nh}\frac{|F|^2_{h,\delta}}{(h-h')^{2d}}+\overline{C}_2e^{-2\pi N^\mu(h-h')+2\pi Nh}\frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d}.$$

$$\delta'=\overline{C}_2K^{-2}(MN)^{-(\mu a_6+\sigma)}\delta,$$

$$(\mu=\tau/\sigma),a_7=\mu(2a_6+d+1)+4\nu$$

(v)

$$\widetilde{M}\le 3M,$$

$$M'\le 3M+\overline{C}_2|\widetilde{F}|_{h',\delta'}.$$

Démonstration. — Soient

$$\delta^o=\frac{\kappa}{8}\gamma^{-1}N^{-\sigma}M^{-1}\delta\quad\text{et}\quad\rho_0=(2\gamma)^{-1}N^{-\sigma};$$

on a alors pour tout $\lambda\in\Lambda$, $|A(\lambda_0)|\ge\rho_0$. Pour tout $w\in W_{\delta^o}(\Lambda)$ il existe $\lambda_0\in\Lambda$ tel que $|w-\lambda_0|\le\delta^o$, et d'après les formules de Cauchy,

$$|A(w)-A(\lambda)|\le\delta^oM(\delta/2)^{-1}\le 2\delta^oM\delta^{-1}\le\frac{\kappa}{2}\rho_0.$$

Comme

$$|A(\lambda)-A(\lambda_0)|\le\kappa|A(\lambda_0)|,$$

le lemme 6.7.1 nous dit qu'il existe $\psi\in C^\omega_{W_\kappa(A(\lambda_0))}(\{A(\lambda_0)\})$, tel que

$$A^o(\lambda)=e^{\mathrm{ad}(\psi(A(\lambda)))}\cdot A(\lambda)\in t_{A(\lambda_0)}.$$

Ceci implique que $\psi\circ A\in C^\omega_{\delta^o}(\Lambda,so(3,\mathbf{R}))$, et

$$|\psi\circ A|_{\delta^o}\le\frac{3}{2}.$$

Finalement si nous définissons,

$$F^o = e^{\mathrm{ad}(\psi(A(\lambda)))} \cdot F,$$

nous obtenons

$$(\omega/2\pi, A^o + F^o) \ \mathcal{R} \ (\omega/2\pi, A + F)$$

$$|A^o|_{\delta^o} \leq \frac{3}{2}|A|_{\delta^o} \quad \text{et} \quad |F^o|_{h,\delta^o} \leq \frac{3}{2}|F|_{h_1,\delta^o}.$$

Posons alors en notant $H = A(\lambda_0)/|A(\lambda_0)|$,

$$B(x) = e^{-2\pi(k_0,x)H},$$

qui est bien définie sur $\mathbf{T}^d$. Nous avons

$$L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1} + \mathrm{Ad}(B) \cdot (A^o + F^o) = -(k_0,\omega)H + \mathrm{Ad}(B) \cdot A^o + \mathrm{Ad}(B) \cdot F^o.$$

Mais $\mathrm{Ad}(B) \cdot A^o = A^o$ car A^o et H commutent. Par conséquent,

$$L_{\omega/2\pi}B \cdot B^{-1} + \mathrm{Ad}(B) \cdot (A^o + F^o) = A^o - (k_0,\omega)H + \mathrm{Ad}(B) \cdot F^o.$$

Nous définissons

$$\widetilde{A} = A^o - (k_0,\omega)H \in C^\omega_{\delta^o}(\Lambda, so(3,\mathbf{R})),$$

$$\widetilde{F} = \mathrm{Ad}(B) \cdot F^o \in C^\omega_{h,\delta^o}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R})),$$

$$\widetilde{M} = \max(1, |\widetilde{A}|_{\delta^o}).$$

Remarquons que comme d'après le (a),

$$|(k_0,\omega)| \leq |A|_\delta + K^{-1} \leq M + K^{-1},$$

on a

$$\widetilde{M} \leq \frac{3}{2}M + M + K^{-1} \leq 3M,$$

$(M \geq 1 \geq 1/2 \geq K^{-1})$.

Par ailleurs, comme A^o et H commutent,

$$|\widetilde{A}| = |A^o| - (k_0,\omega) = |A| - (k_0,\omega),$$

car A et A^o sont conjugués. Nous obtenons ainsi la conclusion (ii). A présent le lemme 6.5.1 montre que $|\widetilde{A}| \in DS(N^\mu, K, \tau)$. Comme $\overline{C}_2 > \overline{C}_1$,

$$\begin{aligned}
\overline{C}_1 K^2(\widetilde{M}N^\mu)^{a_6}|\widetilde{F}|_{h,\delta^o} &\leq \overline{C}_1 K^2(3MN^\mu)^{a_6} e^{2\pi k_0 h}|F|_{h,\delta} \\
&\leq \overline{C}_2 K^2(MN)^{\mu a_6} e^{2\pi N h}|F|_{h,\delta} \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

le lemme 6.7.2 nous fournit un $\widetilde{Y} \in C^\omega_{h,\delta'}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ avec

$$\begin{aligned}
\delta' &\geq CK^{-2}(\widetilde{M}N^\mu)^{-a_6}\delta^o \\
&\geq CK^{-2}(3MN^\mu)^{-a_6}N^{-\sigma}M^{-1}\delta \\
&\geq CK^{-2}(3MN)^{-(\mu a_6+\sigma)}\delta,
\end{aligned}$$

tel que

$$(\omega/2\pi, A' + F') \ \mathcal{R}(e^{\widetilde{Y}}) \ (\omega/2\pi, \widetilde{A} + \widetilde{F}),$$

$$A' = A + \widehat{\widetilde{F}}(0, \cdot),$$

et

$$F' = S(\widetilde{Y}) \cdot L_{\omega/2\pi}\widetilde{Y} + [\widetilde{Y}, \widetilde{F}] + L(\widetilde{Y}) \cdot (\widetilde{A} + \widetilde{F}) + R_{N^\mu}(\widetilde{F}); \tag{22}$$

la somme des trois premiers termes du membre de droite de (22) a une norme $| \quad |_{h'\delta'}$ plus petite que

$$CK^4(\widetilde{M}N^\mu)^{2a_6+d+1}\frac{|\widetilde{F}|^2_{h,\delta^o}}{(h-h')^{2d}},$$

et en utilisant l'équation ((iv)) de la proposition 6.6.2, le reste vérifie

$$|R_{N^\mu}(\widetilde{F})| \leq C \cdot \frac{e^{-2\pi N^\mu(h-h')}}{(h-h')^d} e^{2\pi N h}|F|_{h,\delta}.$$

Finalement, comme $K = N^\nu$ $(\nu > \mu\sigma)$ et

$$|\widetilde{F}|_{h',\delta'} \leq C|F|_{h,\delta} \cdot e^{2\pi\cdot|k_0|h'},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
|F'|_{h',\delta'} &\leq CK^4(3MN)^{\mu(2a_6+d+1)}e^{4\pi N h}\frac{|F|^2_{h,\delta}}{(h-h')^{2d}} + Ce^{2\pi N h - 2\pi N^\mu(h-h')}\frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d} \\
&\leq \overline{C}_2(MN)^{a_7}e^{4\pi N h}\frac{|F|^2_{h,\delta}}{(h-h')^{2d}} + \overline{C}_2 e^{2\pi N h - 2\pi N^\mu(h-h')}\frac{|F|_{h,\delta}}{(h-h')^d},
\end{aligned}$$

où on a posé,

$$a_7 = \mu(2a_6 + d + 1) + 4\nu.$$

Enfin,

$$M' \leq \max(1, |\widetilde{A}|_{\delta^o}) + |\widehat{\widetilde{F}}(0,\cdot)|_{\delta'} \leq 3M + |\widehat{\widetilde{F}}(0,\cdot)|_{\delta'}.$$

Ceci conclut la preuve du lemme 6.7.3 □

6.8. La récurrence

6.8.a. Définition des constantes. — Nous définissons dans cette section des quantités qui interviendront dans la récurrence. Celles-ci seront définies au moyen de constantes « universelles » introduites dans la suite dans les propositions et les lemmes de la section 6.8.b. Le lecteur pourra vérifier qu'il n'y a pas de cercle vicieux dans cette façon de procéder.

Définition de quelques constantes. — Posons

$$\beta = \frac{1}{7}, \qquad \beta' = \frac{1}{3};$$

on a alors $\beta < (1-\beta)/5$ et

$$\beta < \frac{\beta'}{2} < \frac{1-\beta}{5},$$

et les inégalités

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2}\beta' - \beta \\ 0 &< (1-\beta) - 2\beta'. \end{aligned} \tag{23}$$

Notons $\overline{C}$ le maximum des constantes numériques C intervenant dans les énoncés des propositions et des lemmes de la section 6.8.b qui suit ; nous supposerons en outre $\overline{C} \geq v^{-1}$ (la constante du lemme 6.4.8) et posons

$$a_8 = 10(2\nu + 2 + a_7), \tag{24}$$

$$\rho_1 = (2^{2d+4}(1+\beta))^{a_8}; \tag{25}$$

Anticipant sur le lemme 6.8.18, notons $C^* > 0$ une constante dépendant seulement de $\beta = 1/7$ (et dont le lecteur vérifiera facilement le caractère « universel ») telle que

$$20 a_8 2^{2b_n^2} r_n^4 \leq C^* n, \tag{26}$$

et soit C_3 une constante qu'on peut supposer plus grande que 10 (par exemple) telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\rho_1^n \leq C_3 u_n^{-1}, \tag{27}$$

où nous avons posé

$$u_n = e^{-(1+\beta)^2 \sqrt{n \operatorname{Log} \rho_1}}. \tag{28}$$

Enfin définissons

$$a_9 = 2 a_8 C^*, \tag{29}$$

et

$$C_4 = \max_{n \geq 1} [u_n^{-2a_9 n^2} e^{-\frac{1}{50}(1+\beta)^n}]. \tag{30}$$

Quantités dépendant de β''. — Pour $\beta'' > 0$ nous introduisons les suites suivantes définies pour $n \geq 1$,

$$h_n = \frac{1}{2^{n-1}} h_1,$$

$$N_n = N_n(\beta'') = \frac{\beta'(1+\beta)^n + \beta''}{2\pi h_n},$$

$$K_n = K_n(\beta'') = N_n^\nu.$$

$$T(\beta'') = (\frac{\overline{C}M_1\beta''}{2\pi h_1})^{a_8}, \tag{31}$$

$$\zeta_n = \zeta_n(\beta'') = (C_3T(\beta''))^{-1}u_n; \tag{32}$$

on a

$$\zeta_n(\beta'') \leq K_n(\beta'')^{-1}N_n^{-\tau}, \tag{33}$$

car

$$K_n^{-1}N_n^{-\tau} \geq T(\beta'')^{-1}\rho_1^{-n}.$$

Nous avons alors le lemme suivant :

Lemme 6.8.1. — *Il existe une constante positive C_6 telle que, si*

$$\beta'' \geq \frac{C_6M_1}{h_1\delta_1c_1},$$

alors,

$$e^{-\beta''/2}\max_{n\geq 1}\left[\left(C_4(\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1c_1}\right)^{2a_9n^2}e^{-(1+\beta)^n/6}\right] \leq \frac{1}{20}. \tag{34}$$

Démonstration. — Estimons déjà le max intervenant dans l'expression (34). Pour cela nous pouvons utiliser le lemme suivant :

Lemme 6.8.2. — *Si $p \geq 1$, $\lambda > 1$ et a, C_1, C_2 sont des constantes positives,*

$$\max_{n\geq 1}\left(a^{C_1n^p}e^{-C_2\lambda^n}\right) \leq \widetilde{C}e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2 a},$$

où $\widetilde{C} > 0$ est une constante ne dépendant pas de a.

Démonstration. — En effet

$$e^{-C_2\lambda^n} \leq Ce^{-C_1^2n^{2p}},$$

et le maximum de $\exp(C_1n^p\operatorname{Log} a - C_1^2n^{2p})$ est atteint pour $C_1n^p = \frac{1}{2}\operatorname{Log} a$. □

Nous obtenons donc en développant $T(\beta'')$,

$$\max_{n\geq 1}\left[\left(C_4(\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1c_1}\right)^{2a_9n^2}e^{-(1+\beta)^n/6}\right] \leq \max_{n\geq 1}\left[\left(\frac{2C_4C_3\overline{C}\beta''}{2\pi h_1\delta_1c_1}\right)^{2a_9a_8n^2}e^{-(1+\beta)^n/6}\right]$$
$$\leq C_5e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}^2(A\beta'')},$$

où on a noté,

$$A = \frac{2C_4C_3\overline{C}}{2\pi h_1\delta_1c_1} \quad (A \geq 1),$$

et où $C_5 > 0$ est une constante. Notons $w > 0$ une constante telle que, pour tout $x \geq 1$,

$$\operatorname{Log}^2 x \leq w\sqrt{x};$$

si $\beta'' \geq 1$, on a également $\beta'' A \geq 1$ et si $\beta'' \geq 4w^2 A$,

$$\mathrm{Log}^2(\beta'' A) \leq w\sqrt{\beta'' A} \leq \frac{1}{2}\beta''.$$

Ainsi, pourvu que

$$\beta'' \geq 4w^2 A,$$

on a

$$C_5 e^{-\beta''/2} e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}^2(A\beta'')} \leq C_5 e^{-\beta''/4},$$

et il suffit que

$$\beta'' \geq 4\,\mathrm{Log}(20C_5),$$

pour que l'inégalité (34) soit satisfaite. Il suffit donc de choisir

$$\beta'' \geq C_6 A,$$

avec

$$C_6 = 16w^2\,\mathrm{Log}(20C_5),$$

pour obtenir la conclusion du lemme 6.8.1. □

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 6.8.3. — *Soient $\omega \in \mathbf{R}^d$ dans $CD(\gamma, \sigma)$, $h > 0$ et $A \neq 0$ dans $so(3, \mathbf{R})$; alors, pour tout $F(x, \lambda) \in C_h^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3, \mathbf{R}))$ vérifiant*

$$|F|_{h_1, \delta_1} \leq \frac{1}{10} e^{-3\beta''},$$

et tout entier $n \geq 1$, il existe une partition Π_n de Λ en q_n intervalles $\Lambda_{n,j}$, $1 \leq j \leq q_n$, et des nombres réels $\widetilde{m}_n$, m_n, M_n, δ_n, c_n, r_n, pour lesquels ce qui suit est vérifié :

(i) *Les intervalles $(\Lambda_{n,j})_{1 \leq j \leq q_n}$ définissent une partition de Π_n en ensembles Π_n^t, Π_n^0, (t pour « transverse » et 0 pour « attente »).*

(ii) *Pour $\Lambda_{n,j} \in \Pi_n$, et $\lambda \in \Lambda_{n,j}$,*

$$(\omega/2\pi, \lambda A + F(\cdot, \lambda)) \;\mathcal{R}\; (\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\cdot, \lambda)).$$

$$A_n \in C_{\delta_n}^\omega(\Lambda_n, so(3)),$$

$$F_n \in C_{h_n, \delta_n}^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda_n, so(3)),$$

$$\max(1, |A_n|_{\delta_n}) \leq M_n,$$

$$|F_n|_{h_n, \delta_n} \leq m_n,$$

et

$$\overline{C}(M_n N_n)^{a_7} e^{2\pi N_n h_n}(h_n - h_{n+1})^{-d} m_n \leq 1.$$

(iii) *Pour tout* $\Lambda^t_{n,j} \in \Pi^t_n$,

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^t_{n,j} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \lambda & \longmapsto & |A_n(\lambda)| \end{array}$$

est $(M_n, \delta_n, c_n, r_n)$*-transverse.*

(iv) *Pour* $\Lambda^0_{n,j} \in \Pi^0_n$, *il existe un entier non-négatif* $p_{n,j} = p(\Lambda^0_{n,j})$ *que nous noterons* p_n, *ainsi que des applications*

$$\widetilde{A}_{p_n} \in C^\omega_{\delta_{p_n}}(\Lambda^0_{n,j}, so(3,\mathbf{R})),$$

et

$$\widetilde{F}_{p_n} \in C^\omega_{h_{p_n},\delta_{p_n}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^0_{n,j}, so(3)),$$

telles que

(a) $|\widetilde{F}_{p_n}|_{h_{p_n},\delta_{p_n}} \leq \widetilde{m}_{p_n}$,

(b) *l'application*

$$\lambda \longmapsto |\widetilde{A}_{p_n}(\lambda)|$$

est $(M_{p_n}, \delta_{p_n}, c_{p_n}, r_{p_n})$*-transverse sur* $\Lambda^0_{n,j}$.

(c) *pour tout* $\lambda \in \Lambda^0_{n,j}$ *on a*

$$A_n(\lambda) = \widetilde{A}_{p_n}(\lambda) + \widehat{\widetilde{F}}_{p_n}(\lambda, 0) + \widehat{F}_{p_n+1}(\lambda, 0) + \cdots + \widehat{F}_{n-1}(\lambda, 0),$$

(d) *pour tout* $\lambda \in \Lambda^0_{n,j}$ *on a*

$$|\widetilde{A}_{p_n}(\lambda)| < \zeta_{p_n},$$

(e) *pour tout* $\lambda \in \Lambda^0_{n,j}$ *on a*

$$|A_n(\lambda)| < K_n^{-1}.$$

(f) *Si* $\Lambda^0_n \cap \Lambda^0_{n+1} \neq \varnothing$ *alors* $\Lambda^0_{n+1} \subset \Lambda^0_n$ *et pour* $\lambda \in \Lambda^0_n \cap \Lambda^0_{n+1}$ *on a*

$$\begin{aligned} A_n(\lambda) &= \widetilde{A}_{p_n}(\lambda) + \widehat{\widetilde{F}}_{p_n}(\lambda, 0) + \widehat{F}_{p_n+1}(\lambda, 0) + \cdots + \widehat{F}_{n-1}(\lambda, 0) \\ A_{n+1}(\lambda) &= \widetilde{A}_{p_n}(\lambda) + \widehat{\widetilde{F}}_{p_n}(\lambda, 0) + \widehat{F}_{p_n+1}(\lambda, 0) + \cdots + \widehat{F}_{n}(\lambda, 0) \end{aligned}$$

i.e.

$$p_n = p_{n+1}, \quad \widetilde{A}_{p_n} = \widetilde{A}_{p_{n+1}}.$$

(v) *Il existe* $q > 0$ *tel que*

(35)
$$q_n \leq \left[\left(\frac{2C_3 T(\beta'')}{\delta_1 c_1} \right)^{-a_9 n^3} u_n^{a_9 n^3} \right]^{-1}.$$

(vi) *Pour tout entier* $s \geq 1$ *il existe une constante ne dépendant que de* s *(mais pas de* $\beta'', c_1, h_1, \delta_1, M_1$*) telle que, pour tout* $n \geq 1$,

(36)
$$r_n \leq (\mathrm{cste})_s \ln_{(s)} n,$$

où $\ln_{(s)} n$ *représente l'itéré* s*-ième du* ln *quand il existe.*

(vii) *On a*

$$M_n \leq 4^{n-1} M_1, \tag{37}$$

$$m_n \leq e^{-3\beta''} e^{-(1+\beta)^n}, \tag{38}$$

$$\widetilde{m}_n \leq e^{-2\beta''} e^{-\frac{2}{3}(1+\beta)^n}, \tag{39}$$

$$m_n \leq \widetilde{m}_n \leq \frac{1}{11}\zeta_n \leq K_n^{-1}, \tag{40}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{m}_k \leq 20 e^{-2\beta''} e^{-\frac{2}{3}(1+\beta)^n}, \tag{41}$$

$$\delta_n \geq (C_3 T(\beta''))^{-2na_8} u_n^{2na_8} \delta_1,, \tag{42}$$

$$c_n > (\frac{2C_3 T(\beta'')}{\delta_1 c_1})^{-a_9 n^2} u_n^{a_9 u_n^2}. \tag{43}$$

$$m_n < c_n < \delta_n < \zeta_n < K_n^{-1} < N_n^{-1} < M_n^{-1}. \tag{44}$$

Nous prouverons le résultat précédent par récurrence sur n dans les sections 6.8.b et 6.9. Nous supposerons donc tout au long de ces sections que les conclusions du théorème 6.8.3 sont vraies jusqu'à l'ordre n.

6.8.b. Le schéma de bifurcation. — Nous poserons $\mu = \tau/\sigma = 2$.

Supposons que pour tous les entiers $1 \leq l \leq n$ les conclusions du théorème 6.8.3 soient vérifiées ; il existe alors des intervalles $\Lambda_{n,j}^*$, $* = t, 0$, pour lesquels les points (i) à (viii) sont vérifiés.

La preuve de l'hypothèse de récurrence à l'étape $n+1$ rend nécessaire l'étude de deux cas, suivant que $* = t$ ou $* = 0$. Dans chacun de ces cas, nous définissons une partition de Λ_n^* ($* \in \{t, 0\}$) en intervalles $\Lambda_{n+1}^{*,t}$ ou $\Lambda_{n+1}^{*,0}$, et sur chacun d'eux nous étudions le comportement des racines. La définition de $\Lambda_{n+1}^{t,*}$, $* \in \{0, t\}$ est permise par les lemmes 6.8.6 et 6.8.4 et celle de $\Lambda_{n+1}^{0,*}$, $* \in \{0, t\}$ par le lemme 6.8.10 Nous aurons donc quatre bifurcations à étudier, bifurcations que nous noterons :

1) 1.1)$t \to t$, (proposition 6.8.7),
   1.2)$t \to 0$, (proposition 6.8.8),
2) 2.1) $0 \to t$, (proposition 6.8.11),
   2.2) $0 \to 0$, (proposition 6.8.12).

Nous supposons qu'il existe une transformation $B_n(x, \lambda) \in C^\omega(\mathbf{T}^d \times \Lambda_n^t, SO(3, \mathbf{R}))$ qui conjugue $A_1 + F_1$ à $A_n + F_n$:

$$(A_n + F_n) = L_{\omega/2\pi} B_n \cdot B_n^{-1} + \mathrm{Ad}(B_n) \cdot (A_1 + F_1).$$

Notons $I_{n,k}$ et $I_{n,k}^0$, $0 < |k| \leq N_n$, les intervalles suivants :

$$I_{n,k} = \left((k,\omega) - \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau}, (k,\omega) + \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau}\right),$$

$$I_{n,k}^0 = ((k,\omega) - \zeta_n, (k,\omega) + \zeta_n),$$

$$I_{n,0}^0 = [0, \zeta_n),$$

($\zeta_n \leq K_n^{-1} N_n^{-\tau}$). Nous noterons $(I_{n,l}^d)_{l>0}$ (d pour « diophantien »)) les différentes composantes connexes du complémentaire dans $[0,\infty)$ de

$$\bigcup_{0<|k|\leq N_n} I_{n,k},$$

ne contenant pas 0 et $I_{n,0}$ l'unique composantes connexe contenant 0.

Pour $k \neq 0$, nous définissons les ensembles (r pour « résonnant », 0 pour « très résonnant »),

$$I_{n,k}^r = I_{n,k} - I_{n,k}^0,$$

et pour $k = 0$

$$I_{n,0}^r = I_{n,0} - I_{n,0}^0.$$

Les bifurcations $\mathbf{t} \to \mathbf{t}, \mathbf{0}$. — Enonçons tout d'abord :

Lemme 6.8.4. — *Pour tout $\Lambda_n^t \in \Pi_n^t$, et tout l, les ensembles,*

$$\alpha_n^{-1}(I_{n,l}^*) \cap \Lambda_{n,j}^t,$$

où $* = d, 0, r$ et $0 \leq |l| \leq N_n$, ont au plus $C \cdot c_n^{-1} M_n (1 + |\Lambda_n^t|) \delta_n{}^{-(r_n+1)}$ composantes connexes.

Démonstration. — En effet $\alpha_n = |A_n|$ est $(M_n \delta_n^{-(r_n+1)}, c_n, r_n)$-Pyartli sur Λ_n^tet il nous suffit d'appliquer le lemme 6.4.2 pour obtenir la conclusion du lemme 6.8.4. □

Pour $* \in \{0, r, d\}$, divisons chaque composante connexe de $\alpha_n^{-1}(I_{n,l}) \cap \Lambda_n^t$ en,

$$\frac{2M_n(1 + |\Lambda_n^t|)}{\kappa \zeta_n \delta_n},$$

intervalles d'égale longueur et notons $\Pi_{n+1}^{t,*}$ l'ensemble des intervalles ainsi obtenus quand $|l|$ varie dans $\{0, \ldots, N_n\}$. Chacun des éléments de $\Pi_{n+1}^{t,*}$ est de longueur inférieure à

$$\left(\frac{2M_n}{\kappa \zeta_n \delta_n}\right)^{-1}.$$

L'intérêt de diviser ainsi les intervalles réside dans le lemme suivant :

Lemme 6.8.5. — *Si $\Lambda_{n+1}^{t,*} \in \Pi_{n+1}^{t,*}$ ($* \in \{0,r,d\}$) est tel que $\alpha_n(\Lambda_{n+1}^{t,*}) \cap I_{n,0}^0 = \varnothing$, alors pour tout λ, $\lambda_0 \in \Lambda_n^{t,*}$ on a*

$$|A_n(\lambda) - A_n(\lambda_0)| \le \kappa |A_n(\lambda_0)|.$$

Démonstration. — En effet, comme chaque éléments de $\Pi_{n+1}^{t,*}$ est de longueur inférieure à

$$\left(\frac{2M_n}{\kappa\zeta_n\delta_n}\right)^{-1},$$

on a $|\lambda - \lambda_0| \le \delta_n/2$ et l'inégalité des accroissements finis et les inégalités de Cauchy montrent que

$$\begin{aligned}
|A_n(\lambda) - A_n(\lambda_0)| &\le |\lambda - \lambda_0| \sup_{w \in W_{\delta_n/2}(\Lambda)} |\partial_w A_n(w)| \\
&\le \left(\frac{2M_n}{\kappa\zeta_n\delta_n}\right)^{-1} M_n(\delta_n/2)^{-1} \\
&\le \kappa\zeta_n \\
&\le \kappa|A_n(\lambda_0)|,
\end{aligned}$$

puisque sur $\Lambda_{n+1}^{t,*} \in \Pi_{n+1}^{t,*}$,

$$|A_n(\lambda_0)| \ge \zeta_n.$$

Ceci conclut la preuve du lemme 6.8.5. □

Nous noterons,

$$\Pi_{n+1}^{t,t} = \Pi_{n+1}^{t,r} \cup \Pi_{n+1}^{t,d}.$$

On a ainsi prouvé (en majorant $|\Lambda_n|$ par une constante) :

Lemme 6.8.6. — *Pour $n \ge 1$ et $* \in \{0,t\}$,*

$$\#\Pi_{n+1}^{t,*} \le \left(\frac{CM_n}{c_n\delta_n\zeta_n}\right)^{2r_n} \#\Pi_n^t \tag{45}$$

Démonstration. — En effet

$$\begin{aligned}
\#\Pi_{n+1}^{t,*} &\le Cc_n^{-1}M_n\delta_n^{-(r_n+1)}\left(\frac{\kappa\zeta_n\delta_n}{2M_n}\right)^{-1} \cdot \#\Pi_n^t \\
&\le \left(\frac{CM_n}{c_n\delta_n\zeta_n}\right)^{r+2_n} \#\Pi_n^t,
\end{aligned}$$

quitte à changer la constante C. □

Nous donnons à présent deux propositions correspondant aux transitions $t \to t$ et $t \to 0$.

Proposition 6.8.7 **(t → t).** — *Soit $\Lambda^{t,t}_{n+1,j} \in \Pi^{t,t}_{n+1}$; alors il existe*

$$A_{n+1} \in C^{\omega}_{\delta_{n+1}}(\Lambda^{t,t}_{n+1,j}, so(3,\mathbf{R}))$$

et

$$F_{n+1} \in C^{\omega}_{h_n,\delta_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^{t,t}_{n+1,j}, so(3,\mathbf{R})),$$

tels que, pour tout $\lambda \in \Lambda^{t,t}_{n+1,j}$,

$$(\omega/2\pi, A_{n+1}(\lambda) + F_{n+1}(\cdot,\lambda)) \ \mathcal{R} \ (\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\cdot,\lambda)),$$

et $|A_{n+1}|_{|\Lambda^{t,t}_{n+1,j}}$ est $(M_{n+1}, \delta_{n+1}, c_{n+1}, r_{n+1})$-transverse, avec

$$M_{n+1} = 3(M_n + m_n),$$

$$m_{n+1} \leq C\,\frac{(N_nM_n)^{a_7}e^{4\pi N_n h_n}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} m_n^2 + C\,\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})} + e^{-2\pi N_n^{\mu}(h_n-h_{n+1})+2\pi N_n h_n}}{(h_n - h_{n+1})^d} m_n, \tag{46}$$

$$\delta_{n+1} = (CM_nN_n\zeta_n^{-1})^{-a_8}\delta_n, \tag{47}$$

$$c_{n+1} = [c_n - (CN_nM_n\delta_n^{-1}\zeta_n^{-1})^{a_8 r_n}\widetilde{m}_n]^+, \tag{48}$$

$$r_{n+1} = r_n, \tag{49}$$

$$\widetilde{m}_n \leq Ce^{2\pi N_n h_n} m_n. \tag{50}$$

Démonstration. — Puisque $\Lambda^t_{n+1} \in \Pi^{t,t}_{n+1}$, deux cas peuvent se produire :

(i) Si $\Lambda^{t,t}_{n+1} \in \Pi^{t,d}_{n+1}$, alors par définition pour tout $\lambda \in \Lambda^{t,t}_{n+1}$ on a $A_n(\lambda) \in DS^{\tau}(N_n, K_n)$. Les hypothèses du lemme 6.7.2 sont alors satisfaites, ce qui implique qu'il existe $A_{n+1} \in C^{\omega}_{\delta'_{n+1}}(\Lambda^{t,d}_{n+1}, so(3,\mathbf{R}))$ et $F_{n+1} \in C^{\omega}_{h_n,\delta'_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^{t,d}_{n+1}, so(3,\mathbf{R}))$, avec

$$\delta'_{n+1} = (CN_nM_n)^{-a_7}\delta_n, \tag{51}$$

tels que

$$(\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1}) \ \mathcal{R} \ (\omega/2\pi, A_n + F_n),$$

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{F}_n(0,\lambda), \tag{52}$$

$$|F_{n+1}|_{h_{n+1},\delta'_{n+1}} \leq C\frac{(M_nN_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}|F_n|^2_{h_n,\delta_n} + C\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d}|F_n|_{h_n,\delta_n}$$

c'est-à-dire

$$m_{n+1} \leq C\frac{(M_nN_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}m_n^2 + C\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d}m_n. \tag{53}$$

Comme pour tout $\lambda \in \Lambda^{t,d}_{n+1}$,

$$|A_n(\lambda)| \geq \frac{\gamma^{-1}}{N_n^\sigma} - K_n^{-1} \geq \frac{\gamma^{-1}}{2N_n^\sigma},$$

on voit en appliquant le lemme 6.7.1 et en adaptant la preuve du lemme 6.7.3 que, quitte à multiplier M_n, m_n par un facteur $3/2$ et δ'_n par un facteur $(2\gamma)^{-1}N_n^{-\sigma}$, on peut supposer que $A_n(\lambda)$ est à valeurs sur un tore maximal de $so(3,\mathbf{R})$ (c'est-à-dire une droite passant par 0) ; la proposition 6.4.11(ii) s'applique donc à l'identité (52) et on obtient que $|A_{n+1}|$ est $(M_{n+1}, \delta_{n+1}, c_{n+1}, r_{n+1})$-transverse sur $\Lambda^{t,t}_{n+1}$, avec

$$M_{n+1} = \frac{3}{2}M_n + 3m_n \leq 3(M_n + m_n),$$

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{(2\gamma)^{-1}N_n^{-\sigma}\delta'_n}{8(3/2)M_n} \\ &= \frac{\gamma^{-1}}{24}M_n^{-1}N_n^{-\sigma}\delta'_n,\end{aligned}$$

$$c_{n+1} = (c_n - (4M_nN_n^\sigma\gamma^{-1}\delta_n^{-1})^{5r_n}m_n)^+, \tag{54}$$

$$r_{n+1} = r_n.$$

Finalement les choix faits en (47)–(50) conviennent puisque $a_8 \geq \max(a_7 + \sigma + 1, 5)$.

(ii) Si $\Lambda^{t,t}_{n+1} \in \Pi^{t,r}_{n+1}$,

(a) Soit $|A_n(\lambda)| \in I_{n,0} - I^0_{n,0}$ et nous pouvons appliquer comme précédemment le lemme 6.7.2 : il existe

$$A_{n+1} \in C^\omega_{\delta'_{n+1}}(\Lambda^{t,t}_{n+1}, so(3,\mathbf{R})) \quad \text{et} \quad F_{n+1} \in C^\omega_{h_n,\delta'_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^{t,t}_{n+1}, so(3,\mathbf{R}))$$

avec

$$\delta'_{n+1} = (CM_nN_n)^{-a_7}\delta_n,$$

tels que

$$(\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1}) \ \mathcal{R}\ (\omega/2\pi, A_n + F_n),$$

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{F}_n(0,\lambda), \tag{55}$$

$$|F_{n+1}|_{h_{n+1},\delta'_{n+1}} \leq C\frac{(M_nN_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}|F_n|^2_{h_n,\delta_n} + C\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d}|F_n|_{h_n,\delta_n},$$

c'est-à-dire

$$m_{n+1} \leq C\frac{(M_nN_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}m_n^2 + C\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d}m_n. \tag{56}$$

En outre, comme sur $\Lambda^{t,t}_{n+1}$, $|A_n| \geq \zeta_n$ et $m_n \leq \zeta_n/11$, nous pouvons comme précedemment supposer que A_n est à valeurs sur une droite passant par 0 et appliquer la proposition 6.4.11(ii) à (55) pour obtenir que $|A_{n+1}|$ est $(M_{n+1}, \delta''_{n+1}, c_{n+1}, r_{n+1})$-transverse avec

$$M_{n+1} = 3(M_n + m_n),$$

$$\delta''_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{\zeta_n}{4}(\frac{3}{2}M_n)^{-1}\delta'_n,$$

$$c_{n+1} \geq [c_n - (8M_n\zeta_n^{-1}\delta_n^{-1})^{5r_n}m_n]^+ \tag{57}$$

$$r_{n+1} = r_n,$$

et nous pouvons choisir

$$\delta_{n+1} = (CM_nN_n\zeta_n^{-1})^{-a_8}\delta_n,$$

et

$$c_{n+1} = (c_n - (CM_nN_n\delta_n^{-1}\zeta_n^{-1})^{a_8r_n})^+,$$

puisque $a_8 \geq 2\nu + 1 + a_7$.

(b) Soit il existe $0 < |k_0| \leq N_n$, tel que, pour tout $\lambda \in \Lambda^{t,t}_{n+1}$, on ait

$$|A_n(\lambda)| - (k_0, \omega) \in DS^\tau(N_n^\mu, K_n),$$

et d'après le lemme 6.8.5 vérifiant

$$|A_n(\lambda) - A_n(\lambda_0)| \leq \kappa|A_n(\lambda_0)|.$$

On peut alors utiliser le lemme 6.7.3 ; il existe $A_{n+1}, \widetilde{A}_n \in C^\omega_{\delta'_{n+1}}(\Lambda^{t,r}_{n,j}, so(3,\mathbf{R}))$ et $F_{n+1}, \widetilde{F}_n \in C^\omega_{h_n,\delta'_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^{t,r}_{n+1,j}, so(3,\mathbf{R}))$, tels que

$$(\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1}) \ \mathcal{R}\ (\omega/2\pi, A_n + F_n),$$

$$A_{n+1} = \widetilde{A}_n + \widehat{\widetilde{F}}_n(0,\lambda), \tag{58}$$

et pour tout $\lambda \in \Lambda^{t,r}_{n+1}$,

$$\widetilde{A}_n(\lambda) \in t_{A(\lambda_0)},$$

$$|\widetilde{A}_n(\lambda)| = |A_n(\lambda)| - (k_0, \omega),$$

où $t_{A(\lambda_0)} = \mathbf{R}A(\lambda_0)$ (l'algèbre maximale passant par $A(\lambda_0)$). On peut aussi dire que

$$m_{n+1} \leq C\frac{(M_nN_n)^{a_7}e^{4\pi N_nh_n}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}m_n^2 + C\frac{e^{-2\pi(N_n^\mu)(h_n-h_{n+1})}e^{2\pi N_nh_n}}{(h_n - h_{n+1})^d}m_n, \tag{59}$$

D'autre part,

$$\delta'_{n+1} = (CM_nN_n)^{-a_7}\delta_n.$$

Comme, sur $\Lambda^{t,r}_{n+1}$,

$$|\widetilde{A}_n(\lambda)| \geq \zeta_n,$$

et

$$\widetilde{m}_n \leq \frac{1}{11}\zeta_n,$$

la proposition 6.4.11(ii) appliqué à (58) montre que $|A_{n+1}|$ est $(M_{n+1}, \delta''_{n+1}, c_{n+1}, r_{n+1})$-transverse sur $\Lambda^{t,r}_{n+1}$ avec

$$M_{n+1} = \widetilde{M}_n + 3\widetilde{m}_n \leq 3(M_n + \widetilde{m}_n),$$

$$\delta''_{n+1} = \frac{1}{8}\zeta_n \widetilde{M}_n^{-1}\delta'_{n+1} \geq C(M_n\zeta_n^{-1})\delta_n,$$

$$\begin{aligned} c_{n+1} \quad &\geq \quad [c_n - (8\widetilde{M}_n\zeta_n^{-1}{\delta'}_n^{-1})^{5r_n}\widetilde{m}_n]^+, \\ &\geq \quad [c_n - (CM_nN_n\zeta_n^{-1}\delta_n^{-1})^{a_8 r_n}\widetilde{m}_n]^+ \end{aligned}$$

$$r_{n+1} = r_n.$$

On prend finalement $\delta_{n+1} = \min(\delta'_{n+1}, \delta''_{n+1})$, c'est-à-dire une expression de la forme

(60) $$\delta_{n+1} = (CN_nM_n\zeta_n^{-1})^{-a_8}\delta_n,$$

puisque $a_8 \geq 5(2\nu + 1 + a_7)$.

La preuve de la proposition 6.8.7 est complète. □

***Proposition 6.8.8* (t → 0).** — *Soit $\Lambda^{t,0}_{n+1,j} \in \Pi^{t,0}_{n+1}$; il existe alors $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{F}_n$, A_{n+1}, F_{n+1} avec*

$$\widetilde{A}_n, A_{n+1} \in C^{\omega}_{\delta_{n+1}}(\Lambda^{t,0}_{n+1,j}, so(3,\mathbf{R})),$$

et

$$\widetilde{F}_n, F_{n+1} \in C^{\omega}_{h_n,\delta_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^{t,0}_{n+1,j}, so(3,\mathbf{R})).$$

tels que

(61) $$\delta_{n+1} = C(N_nM_n)^{-a_7}\delta_n,$$

$$A_{n+1} = \widetilde{A}_n + \widehat{\widetilde{F}}_n(0),$$

$$|\widetilde{A}_n| \leq \zeta_n,$$

$|\widetilde{A}_n|$ est $(M_n, \delta_n, c_n, r_n)$-transverse et sur un tore maximal. En outre,

$$|A_{n+1}| \leq K^{-1}_{n+1},$$

$$\begin{aligned} m_{n+1} \leq C\,\frac{(M_nN_n)^{a_7}e^{4\pi N_nh_n}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}\,m_n^2 & \\ + C\,\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})} + e^{-2\pi N_n^{\mu}(h_n-h_{n+1})+2\pi N_nh_n}}{(h_n-h_{n+1})^d}\,m_n. \end{aligned}$$

$$\widetilde{m}_n \leq Ce^{2\pi N_nh_n}m_n.$$

Démonstration. — Si $\lambda \in \Lambda^{t,0}_{n+1}$ alors,

– soit

$$|A_n(\lambda)| \leq \zeta_n,$$

– soit il existe $0<|k_0|\le N_n$ (qui dépend seulement de $\Lambda^{t,0}_{n+1}$) tel que

$$||A_n(\lambda)|-(k_0,\omega)|\le \zeta_n.$$

(i) Dans le premier cas c'est-à-dire quand pour tout $\lambda\in\Lambda^{t,0}_{n+1}$,

$$|A_n(\lambda)|\le\zeta_n,$$

nous pouvons appliquer le lemme 6.7.2 et il existe donc A_{n+1}, F_{n+1} respectivement dans $C^\omega_{\delta_{n+1}}(\Lambda^{t,0}_{n+1},so(3,\mathbf{R}))$ et $C^\omega_{h_n,\delta_{n+1}}(\mathbf{T}^d\times\Lambda^{t,0}_{n+1},so(3,\mathbf{R}))$ satisfaisant,

$$\delta_{n+1}=C(M_nN_n)^{-a_7}\delta_n,$$

$$(\omega/2\pi,A_{n+1}+F_{n+1})\ \mathcal{R}\ (\omega/2\pi,A_n+F_n),$$

$$A_{n+1}=A_n+\widehat{F}_n(0).$$

Puisque

$$|A_n(\lambda)|\le\zeta_n,$$

nous obtenons (*cf.* (40)),

$$|A_{n+1}|\le\zeta_n+m_n\le K^{-1}_{n+1}.$$

La proposition est donc démontrée dans ce cas en posant $\widetilde{A}_n=A_n$.

(ii) Dans le second cas c'est-à-dire quand pour tout $0<|k|\le N_n$ ($k_0\ne0$),

$$||A_n(\lambda)|-(k_0,\omega)|\le\zeta_n,$$

on peut faire usage de le lemme 6.7.3 et donc il existe $\widetilde{A}_n, A_{n+1}, \widetilde{F}_n, F_{n+1}$ satisfaisant (58) avec

$$\delta_{n+1}=C(M_nN_n)^{-a_7}\delta_n,$$

et

$$A_{n+1}=\widetilde{A}_n+\widehat{\widetilde{F}}_n(0),$$

$$|A_{n+1}|\le\zeta_n+m_ne^{2\pi h_nN_n}\le K^{-1}_{n+1}.$$

En comparant (i) et (ii) nous obtenons la conclusion de la proposition 6.8.8 □

Les bifurcations $\mathbf{0}\to\mathbf{t},\mathbf{0}$. — Considérons $\Lambda^0_{n,j}\in\Pi^0_n$. Par hypothèse il existe,

$$\widetilde{A}_{p_n}\in C^\omega_{\delta_{p_n}}(\Lambda^0_n,so(3,\mathbf{R})),$$

et

$$\widetilde{F}_{p_n},F_{p_n+1},\dots,F_n\in C^\omega_{h_n,\delta_n}(\mathbf{T}^d\times\Lambda^0_n,so(3,\mathbf{R}))$$

tels que

$$A_n=\widetilde{A}_{p_n}+\widehat{\widetilde{F}}_{p_n}(0)+\widehat{F}_{p_n+1}(0)+\cdots+\widehat{F}_{n-1}(0),$$

$$|\widetilde{A}_{p_n}|<\zeta_n,\quad\text{et}\quad |A_n|<K^{-1}_n.$$

Ceci entraîne que $|A_n(\lambda)| \in DS^\tau(N_n, K_n)$ $(K_n^{-1} \leq \gamma^{-1} N_n^{-\sigma})$ et, par conséquent, d'après le lemme 6.7.2 nous en déduisons qu'il existe $A_{n+1} \in C^\omega_{\delta'_{n+1}}(\Lambda^0_{n,j}, so(3,\mathbf{R}))$ et $F_{n+1} \in C^\omega_{h_n,\delta'_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda^0_{n,j}, so(3,\mathbf{R}))$ avec

$$\delta'_{n+1} = C(M_n N_n)^{-a_7}\delta_n,$$

et tels que

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{F}_n(0),$$

$$m_{n+1} \leq C\,\frac{(M_n N_n)^{a_7} e^{4\pi N_n h_n}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}\,m_n^2 + C\,\frac{e^{-2\pi N_n(h_n - h_{n+1})} + e^{-2\pi(N_n^\mu(h_n-h_{n+1}) - N_n h_n)}}{(h_n - h_{n+1})^d}\,m_n.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \widetilde{A}_{p_n} + \widehat{\widetilde{F}}_{p_n}(0) + \widehat{F}_{p_n+1}(0) + \cdots + \widehat{F}_n(0) \\ &= \widetilde{A}_{p_n} + G_n. \end{aligned} \tag{62}$$

Remarquons que d'après (41),

$$|G_n|_{\delta_n} \leq 20\widetilde{m}_{p_n}.$$

Nous pouvons plus précisément affirmer que :

Lemme 6.8.9. — *La fonction G_n définie en (62) appartient à $C^\omega_{h_n,\delta_n}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R}))$ et si on note*

$$\mu_n(k) = \max_{0\leq j\leq k}\ \sup_{w\in W_{\delta_n/2}(\Lambda)} |\partial_z^j G_n|, \tag{63}$$

on a

$$\mu_n(k) \leq \widetilde{m}_{p_n}\delta_{p_n}^{-k} + \sum_{i=p_n+1}^{n} m_i(\delta_i/2)^{-k}.$$

Démonstration. — C'est une application directe des inégalités de Cauchy. □

Nous poserons $\alpha_{p_n} = |A_{p_n}|$, et $\alpha_{n+1} = |A_{n+1}|$. Comme α_{p_n} est $(M_{p_n}, \delta_{p_n}, c_{p_n}, r_{p_n})$-transverse, le corollaire 6.4.12 montre que le nombre de composantes connexes de

$$\alpha_{n+1}^{-1}(K_{n+1}^{-1}, \infty), \quad \text{et de} \quad \alpha_{n+1}^{-1}(0, K_{n+1}^{-1})$$

est majoré par

$$2r_n(1 + |\Lambda_n^t|)(M_{p_n} + 3m_{p_n})^2 \left(\frac{\delta_{p_n}}{2}\right)^{-(2r_{p_n}+1)} c'^{-2}_{p_n},$$

qui est plus petit que

$$(CM_{p_n}\delta_{p_n}^{-1})^{3r_{p_n}} c'^{-1}_{p_n},$$

où c'_{p_n} vaut,

$$c'^2_{p_n} = \left[(vM_{p_n}^{-1}\delta_{p_n})^{5r^3_{p_n}} c_{p_n}^{4r_{p_n}} - (6M_{p_n}\delta_{p_n}^{-1})^{2r_{p_n}}\mu(2r_{p_n})\right]^+.$$

Nous notons $\Pi^{0,t}_{n+1}$ l'ensemble des composantes connexes de $\alpha_{n+1}^{-1}(K_{n+1}^{-1},\infty)\cap\Lambda^0_{n,j}$ et $\Pi^{0,0}_{n+1}$ celle de $\alpha_{n+1}^{-1}(0,K_{n+1}^{-1})\cap\Lambda^0_{n,j}$. Nous avons donc prouvé,

Lemme 6.8.10. — *Pour $n\geq 1$ et $*\in\{0,t\}$,*

$$\#\Pi^{0,*}_{n+1}\leq (CM_n\delta_n^{-1})^{a_8}(c'_{p_n})^{-1}\#\Pi^0_n.$$

Passons au cas $0\to t$:

***Proposition 6.8.11* (0 → t)**. — *Soit $\Lambda^{0,t}_{n+1}\in\Pi^{0,t}_{n+1}$ et posons $p_n = p(\Lambda^0_n)$.*

(i) *On a*

$$(1+\beta)^{\sqrt{p_n\rho_1}}\leq\sqrt{(n+1)\rho_1} \tag{64}$$

(ii) *En outre, $|A_{n+1}|$ est $(M_{n+1},\delta_{n+1},c_{n+1},r_{n+1})$-transverse sur $\Lambda^{0,t}_{n+1}$ avec*

$$M_{n+1} = 3(M_n+\widetilde{m}_{p_n}),$$

$$\delta_{n+1}\geq(\overline{C}M_nN_n\zeta_n^{-1})^{-a_8}\delta_n, \tag{65}$$

$$c_{n+1}\geq 2^{-r_{p_n}}\sqrt{((vM_{p_n}^{-1}\delta_{p_n})^{5r^3_{p_n}}c_{p_n}^{4r_{p_n}} - (6M_{p_n}\delta_{p_n}^{-1})^{2r_{p_n}}\mu(2r_{p_n}))^+},$$

$$r_{n+1} = 2r_{p_n}.$$

(iii) *On a*

$$m_{n+1}\leq C(M_nN_n)^{a_7}\frac{e^{4\pi N_nh_n}}{(h_n-h_{n+1})^{2d}}m_n^2 + C\,\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})}+e^{-2\pi[N_n^{\mu}(h_n-h_{n+1})+N_nh_n]}}{(h_n-h_{n+1})^d}\,m_n. \tag{66}$$

Démonstration

(i) Rappelons que

$$|A_{n+1}| = |\widetilde{A}_{p_n}+\widehat{\widehat{F}}_{p_n}(0)+\widehat{F}_{p_n+1}(0)+\cdots+\widehat{F}_n(0)|,$$

et puisque (*cf.* (41)),

$$|\widehat{\widehat{F}}_{p_n}(0)+\widehat{F}_{p_n+1}(0)+\cdots+\widehat{F}_n(0)|\leq\sum_{k=p_n}^{\infty}\widetilde{m}_k\leq 20\widetilde{m}_{p_n},$$

on a

$$|A_{n+1}|\leq\zeta_{p_n}+20\widetilde{m}_{p_n}\leq 2\zeta_{p_n};$$

ainsi,

$$K_{n+1}^{-1}\leq 2\zeta_{p_n},$$

c'est-à-dire (*cf.* (33)),

$$T(\beta'')^{-1}e^{-(n+1)\operatorname{Log}\rho_1} \le 2(C_3T(\beta''))^{-1}e^{-(1+\beta)^{2\sqrt{p_n\operatorname{Log}\rho_1}}},$$

ou encore ($C_3 \ge 2$),

$$(n+1)\operatorname{Log}\rho_1 \ge (1+\beta)^{2\sqrt{p_n\operatorname{Log}\rho_1}};$$

si dans cette dernière inégalité on passe aux racines carrées on obtient le (i).

(ii) Comme $\widetilde{A}_{p_n}$ est $(M_{p_n}, \delta_{p_n}, c_{p_n}, r_{p_n})$-transverse, que $|A_{n+1}| \ge K_{n+1}^{-1}$ et puisque que G_n satisfait (63), la proposition 6.4.11(i) nous dit que

$$|A_{n+1}| \text{ est } (M_{n+1}, \delta_{n+1}, c_{n+1}, r_{n+1})\text{-transverse}$$

avec

$$M_{n+1} = 3M_n + 3\widetilde{m}_{p_n},$$

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{32}\frac{\delta_{F_n}K_{n+1}^{-1}}{(3M_n + 3\widetilde{m}_{p_n})^2} \ge (CM_nN_n)^{-a_8}\delta_n,$$

$$c_{n+1} = 2^{-r_{p_n}}\sqrt{\left((vM_{p_n}^{-1}\delta_{p_n})^{5r_{p_n}^3}c_{p_n}^{4r_{p_n}} - (6M_{p_n}\delta_{p_n}^{-1})^{2r_{p_n}}\mu(2r_{p_n})\right)^+},$$

$$r_{n+1} = 2r_{p_n}.$$

(iii) Enfin l'estimation (66) ne pose quant à elle aucun problème et découle du lemme 6.7.3.

Ceci termine la preuve de la proposition 6.8.11 □

Nous examinons maintenant le dernier cas.

***Proposition 6.8.12* (0 → 0).** — *Si $\Lambda_{n+1}^{0,0} \in \Pi_{n+1}^{0,0}$, alors,*

$$p(\Lambda_{n+1}^{0,0}) = p(\Lambda_n^{0,0}),$$

et

$$A_{n+1} = \widetilde{A}_{p_n} + \widehat{\widehat{F}}_{p_n}(0) + \cdots + \widehat{F}_n(0), \quad |A_{n+1}| \le K_{n+1}^{-1}, \quad |\widetilde{A}_{p_n}| \le \zeta_{p_n};$$

$$m_{n+1} \le C\frac{(M_nN_n)^{a_7}e^{4\pi N_nh_n}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}}m_n^2 + C\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})} + e^{-2\pi N_n^{\mu}(h_n-h_{n+1})+2\pi N_nh_n}}{(h_n-h_{n+1})^d}m_n.$$

Démonstration. — Il n'y a rien à prouver. □

Nous pouvons enfin définir Π_{n+1}^t et Π_{n+1}^0 :

$$\begin{aligned}\Pi_{n+1}^t &= \Pi_{n+1}^{t,t} \cup \Pi_{n+1}^{0,t}\\ \Pi_{n+1}^0 &= \Pi_{n+1}^{t,0} \cup \Pi_{n+1}^{0,0},\end{aligned}$$

et énoncer (*cf.* les lemmes 6.8.10 et 6.8.6) vu que $a_8 \ge 3$,

Lemme 6.8.13. — *Pour $n \geq 1$ et $* \in \{0, t\}$,*

$$\#\Pi_{n+1}^{*} \leq \left(\frac{CM_nN_n}{\delta_n\zeta_n c_n}\right)^{a_8 r_n} \#\Pi_n.$$

6.8.c. Estimées sur $m_n, \widetilde{m}_n, M_n$. — Rappelons que nous avons posé $\beta = 1/7$, $\beta' = 1/3$,

$$h_n = \frac{h_1}{2^{n-1}},$$

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{(\beta'(1+\beta)^n + \beta'')2^{n-1}}{2\pi h_1} \\ &\leq \frac{\beta''}{2\pi h_1}[2(1+\beta)]^n, \end{aligned}$$

de façon que

$$2\pi N_n h_n = \beta'(1+\beta)^n + \beta''.$$

Lemme 6.8.14. — *Si $m_1 \leq (1/10)e^{-3\beta''}$ alors,*

$$m_n \leq e^{-3\beta''}e^{-(1+\beta)^n}, \tag{67}$$

$$M_n \leq 4^{n-1}M_1 \tag{68}$$

Démonstration. — La preuve se fait par récurrence sur n. Elle est déjà vraie pour $n = 1$ puisque $1/10 \leq e^{-(1+1/7)}$. Supposant (67) et (68) vérifiées, nous voulons montrer que

$$m_{n+1} \leq e^{-3\beta''}e^{-(1+\beta)^{n+1}}, \tag{69}$$

$$M_{n+1} \leq 4^n M_1. \tag{70}$$

Rappelons que nous avons prouvé précédemment dans la section 6.8.b que dans tous les cas

$$\begin{aligned} m_{n+1} \leq \overline{C}\,&\frac{(M_nN_n)^{a_7}}{(h-n-h_{n+1})^{2d}}e^{4\pi N_n h_n}\,m_n^2 \\ &+\overline{C}\,\frac{e^{-2\pi N_n(h_n-h_{n+1})} + e^{-2\pi N_n^{\mu}(h_n-h_{n+1})+2\pi N_n h_n}}{(h_n-h_{n+1})^d}\,m_n, \end{aligned} \tag{71}$$

et

$$M_{n+1} \leq 3M_n + \overline{C}m_n e^{2\pi N_n h_n}.$$

L'inégalité (70) est alors claire car,

$$\begin{aligned} M_{n+1} &\leq 3M_n + \overline{C} e^{-3\beta'' - (1+\beta)^n} e^{\beta'(1+\beta)^n + \beta''} \\ &\leq 3M_n + \overline{C} e^{-2\beta''} e^{-(1-\beta')(1+\beta)^n} \\ &\leq 3M_n + 1 \\ &\leq 4M_n, \end{aligned}$$

vu le choix que l'on a fait pour β''.

Prouvons à présent l'inégalité (69). Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} -N_n^\mu (h_n - h_{n+1}) + N_n h_n &= -N_n^\mu \cdot \frac{h_n}{2} + N_n h_n \\ &= -\frac{N_n h_n}{2} (N_n^{\mu-1} - 2). \end{aligned}$$

Puisque nous avons supposé $\mu = 2$ et $N_1 > 4$, nous avons

$$-N_n^\mu (h_n - h_{n+1}) + N_n h_n < -\frac{N_n h_n}{2} = -N_n (h_n - h_{n+1}).$$

Ainsi l'équation (71) devient

$$m_{n+1} \leq \overline{C} \, \frac{(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} \, e^{4\pi N_n h_n} m_n^2 + 2\overline{C} \, \frac{e^{-2\pi N_n (h_n - h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d} \, m_n. \tag{72}$$

Notons

$$U_n = \overline{C} \frac{(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} e^{4\pi N_n h_n} m_n^2,$$

et

$$V_n = 2\overline{C} \frac{e^{-2\pi N_n (h_n - h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d} m_n.$$

Comme $\beta'' \geq 1$, $M_n \leq 4^{n-1} M_1$ on a

$$(N_n M_n)^{a_7} \leq \left(\frac{M_1 \beta''}{2\pi h_1} \right)^{a_7} [8(1+\beta)]^{a_7 n}, \tag{73}$$

c'est-à-dire avec les notations introduites dans la section 6.8.a,

$$\overline{C} \frac{(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} \leq \rho_1^n T(\beta''). \tag{74}$$

Nous avons donc

$$U_n \leq T(\beta'') \rho_1^n e^{2\beta'(1+\beta)^n + 2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n - 6\beta''},$$

et

$$V_n \leq T(\beta'') \rho_1^n e^{-\frac{1}{2}\beta'(1+\beta)^n - \frac{1}{2}\beta''} e^{-(1+\beta)^n - 3\beta''}.$$

L'inégalité (69) est impliquée par

$$U_n \leq \frac{1}{2} e^{-(1+\beta)^{n+1} - 3\beta''}, \tag{75}$$

$$V_n \leq \frac{1}{2} e^{-(1+\beta)^{n+1} - 3\beta''}. \tag{76}$$

Il suffit donc de vérifier que

$$T(\beta'')e^{-\beta''}(\rho_1^n e^{(2\beta'-(1-\beta))(1+\beta)^n}) \leq \frac{1}{2},$$

et

$$T(\beta'')\rho_1^n e^{(\beta-\beta'/2)(1+\beta)^n} e^{-\beta''/2} \leq \frac{1}{2}, \tag{77}$$

ou encore puisque $\min(-2\beta' + (1-\beta), \frac{1}{2}\beta' - \beta) \geq 1/50$,

$$T(\beta'')e^{-\beta''/2} \max_{n\geq 1}(\rho_1^n e^{-(1+\beta)^n/50}) \leq \frac{1}{2},$$

ce qui est bien le cas vu le choix fait pour β'' dans le lemme 6.8.1.

Ceci termine la preuve du lemme 6.8.14. □

Remarquons à présent que

$$\widetilde{m}_n \leq e^{2\pi N_n h_n} m_n \leq e^{-3\beta''} e^{\beta'(1+\beta)^n - (1+\beta)^n},$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{m}_n \leq e^{-3\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{m}_k &\leq e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(1+\beta)^n((1+\beta)^k-1)/3} \\
&\leq e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2(1+\beta)^n\beta k/3} \\
&\leq e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3} \left(1 - e^{-2\beta(1+\beta)/3}\right)^{-1} \\
&\leq 20 e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs d'après le lemme 6.8.1,

$$\begin{aligned}
\overline{C}(M_n N_n)^{a_7} e^{2\pi N_n h_n} (h_n - h_{n+1})^{-d} m_n &\leq T(\beta'')\rho_1^n e^{\beta'(1+\beta)^n + \beta''} e^{-3\beta''} e^{-(1+\beta)^n} \\
&\leq T(\beta'') e^{-2\beta''} \max_{n\geq 1}\left[\rho_1^n e^{-2(1+\beta)^n/3}\right] \\
&\leq 1,
\end{aligned}$$

vu le choix que l'on a fait pour β''. En conclusion,

Lemme 6.8.15. — *Pour $n \geq 1$,*

$$\widetilde{m}_n \leq e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3},$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{m}_k \leq 20 e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3},$$

et

$$\overline{C}(M_n N_n)^{a_7} e^{2\pi N_n h_n} (h_n - h_{n+1})^{-d} m_n \leq 1.$$

6.8.d. Estimées pour δ_n

Lemme 6.8.16. — *Pour tout* $n \geq 1$,

$$\delta_n \geq (C_3 T(\beta'')\delta_1^{-1})^{-2na_8} u_n^{2na_8}. \tag{78}$$

Démonstration. — Les estimées relatives à δ_n dans les propositions 6.8.7, 6.8.8, 6.8.11 montrent que

$$\delta_{n+1} \geq (\overline{C} M_n N_n \zeta_n^{-1})^{-a_8}\delta_n,$$

et comme

$$(\overline{C} M_n N_n) \leq T(\beta'')\rho_1^n,$$

on a

$$\delta_{n+1} \geq \zeta_n^{2a_8}\delta_n,$$

c'est-à-dire d'après la définition de ζ_n (*cf.* (32)),

$$\begin{aligned} \delta_n &\geq \zeta_n^{2na_8}\delta_1 \\ &\geq (C_3 T(\beta'')\delta_1^{-1})^{-2na_8} u_n^{2na_8}, \end{aligned}$$

ce qui est la conclusion du lemme. □

6.8.e. Estimées pour r_n. — Soient $\Lambda \in \Pi_n$; alors pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe un unique $\Lambda_k \in \Pi_k$ tel que

$$\Lambda \subset \Lambda_k \in \Pi_k.$$

Définissons pour tout $\Lambda \in \Pi_n$ et tout $1 \leq k \leq n$ l'élément $\chi_k(\Lambda)$ de $\{0, t\}$ pour lequel $\Lambda_k \in \Pi_k^{\chi_k(\Lambda)}$. Remarquons alors que

(i) Si $\Lambda \in \Pi_k^t$, alors $|A_k|$ est $(M_k, \delta_k, c_k, r_k)$-transverse sur Λ et nous posons

$$r_k(\Lambda) = r_k, \quad \pi_k(\Lambda) = k.$$

(ii) Si $\Lambda \in \Pi_k^0$, alors A_k est de la forme

$$A_k = \widetilde{A}_{p_k} + G_k,$$

et $\lambda \mapsto |\widetilde{A}_{p_k}(\lambda)|$ est $(M_{p_k}, \delta_{p_k}, c_{p_k}, r_{p_k})$-transverse sur Λ. Nous posons alors,

$$r_k(\Lambda) = r_{p_k}, \quad \pi_k(\Lambda) = p_k.$$

On peut récrire les résultats de la section 6.8.b de la façon suivante :

Lemme 6.8.17. — *Nous supposons* $\Lambda_n \in \Pi_n$ *et* $k < n$.

(i) *Si* $\chi_k(\Lambda_n) = \chi_{k+1}(\Lambda_n) = 0$ *alors,*

$$\pi_k(\Lambda_n) = \pi_{k+1}(\Lambda_n) \quad \textit{et} \quad r_{k+1}(\Lambda_n) = r_k(\Lambda_n).$$

(ii) *Si* $\chi_k(\Lambda_n) = 0$, $\chi_{k+1}(\Lambda_n) = t$ *alors,*

$$r_{k+1} = 2r_k.$$

(iii) *Dans tous les autres cas,*

$$r_{k+1}(\Lambda_n) = r_k(\Lambda_n).$$

Soit $\Lambda_n \in \Pi_n$, et définissons $f_0 = 1$,

$$i_1 = \min\{j,\ n \geq j \geq 1 \text{ et } \chi_j(\Lambda_n) = 0\},$$

et pour $s \geq 1$,

$$f_s = \min\{j,\ n \geq j \geq i_s \text{ et } \chi_j(\Lambda_n) = t\},$$

$$i_s = \min\{j,\ n \geq j \geq f_{s-1} \text{ et } \chi_j(\Lambda_n) = 0\}.$$

Remarquons que $1 \leq i_1 < f_1 < i_2 < f_2 < \cdots$ et que χ_k est constant égal à 0 pour k dans les intervalles de la forme $[i_s, f_s[$ et constant égal à t pour k dans les intervalles $[f_s, i_{s+1}[$.

De plus, $k \to r_k(\Lambda_n)$ est constant sur $[i_s, f_s[$ et $[f_s, f_{s+1}[$. Enfin, $k \to \pi_k(\Lambda_n)$ est constant sur $[i_s, f_s[$.

D'après le lemme précédent, si $b_n = \#\{s,\ f_s \leq n\}$, on a $r_n = 2^{b_n}$.

Nous noterons,

$$\begin{aligned} X_f &= \{-1 + f_q, q \in \mathbf{N}\}, \\ X_0 &= \bigcup_{q \in \mathbf{N}} ([i_q, -1 + f_q[\cap \mathbf{N}), \\ X_b &= \bigcup_{q \in \mathbf{N}} ([f_q, i_{q+1}[\cap \mathbf{N}); \end{aligned}$$

on aura alors, $\mathbf{N} = X_f \cup X_0 \cup X_b$.

Remarquons que les expressions c_n, r_n, M_n, δ_n dépendent de l'intervalle $\Lambda_n \in \Pi_n$ et ne sont définies que quand $n \in X_b \cup X_f$. Pour simplifier nous poserons pour $n \in X_0$,

$$c_n = c_{\pi(\Lambda_n)} = c_{p_n}.$$

Montrons :

Lemme 6.8.18. — *Pour tout entier $l > 0$ il existe une constante ne dépendant que de l telle que, pour tout $n \geq 1$,*

$$r_n \leq (\text{cste})_l \cdot \operatorname{Log}_{(l)} n,$$

où $\operatorname{Log}_{(l)}$ *représente l'itéré l-ième du* Log *quand il est défini.*

Démonstration. — Rappelons que nous avons montré dans la proposition 6.8.11,

$$(1+\beta)^{\sqrt{i_s \operatorname{Log} \rho_1}} \leq \sqrt{f_s \operatorname{Log} \rho_1},$$

ce qui prouve que

$$b_n := \max\{s,\ f_s \leq n\} \leq (\text{cste})_l \cdot \operatorname{Log}_{(l)} n,$$

et comme $r_n = 2^{b_n}$, le même type d'estimée vaut pour r_n. □

6.8.f. Estimées sur $\mu_n(2r_{p_n})$

Lemme 6.8.19. — *On a*

$$\mu_n(2r_{p_n}) \leq e^{-\beta''} e^{-(1+\beta)^{p_n}/3}. \tag{79}$$

Démonstration. — Rappelons que

$$\mu_n(2r_{p_n}) \leq \widetilde{m}_{p_n} \delta_{p_n}^{-2r_{p_n}} + \sum_{j=p_n+1}^{n} m_j \delta_j^{-2r_{p_n}},$$

et que d'après (26) $2r_{p_n} \leq C^* p_n$. Or d'après (47), (50),

$$\widetilde{m}_{p_n} \delta_{p_n}^{-2r_{p_n}} \leq e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3} (C_3 T(\beta'')\delta_1^{-1})^{C^* p_n^2} u_n^{-C^* p_n^2};$$

mais nous avons justement choisi β'' de façon que cette expression soit plus petite que $1/2$.

On obtient de la même façon,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=p_n+1}^{n} m_j \delta_j^{-2r_{p_n}} &\leq \sum_{j=p_n+1}^{n} m_j \delta_j^{-2r_j} \\
&\leq \max_{j\geq 1} \left[e^{-(1+\beta)^j/3} e^{-\beta''} (C_3 T(\beta'')\delta_1^{-1})^{C^* j^2} \right] \sum_{j=p_n+1}^{\infty} e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^j/3} \\
&\leq \frac{1}{20} \cdot 20 e^{-\beta''} e^{-2(1+\beta)^{p_n}/3} \\
&\leq e^{-\beta''} e^{-2(1+\beta)^{p_n}/3},
\end{aligned}$$

vu le choix fait pour β''.

On obtient au total la conclusion du lemme. □

6.8.g. Estimées sur c_n. — Résumons ce que nous avons dit dans la section 6.8.b :

Lemme 6.8.20

– *Si $n \in X_b$ alors,*

$$c_{n+1} \geq \left(c_n - (\overline{C} N_n M_n \delta_n^{-1} \zeta_n^{-1})^{a_8 r_n} \widetilde{m}_n\right)^+, \tag{80}$$

– *si $n \in X_f$ alors,*

$$c_{n+1} \geq 2^{-r_n} \sqrt{\left((vM_n^{-1}\delta_n)^{5r_n^3} c_n^{4r} - (6M_n\delta_n^{-1})^{2r_n} \mu(2r_n)\right)^+},$$

(rappelons que si $n+1 = f_q$ alors M_n, δ_n, c_n, r_n égalent $M_{i_q}, \delta_{i_q}, c_{i_q}, r_{i_q}$) ;

– *si $n \in X_0$,*

$$c_{n+1} = c_n.$$

Nous prouvons à présent par récurrence le résultat suivant :

Proposition 6.8.21. — *On a*

$$c_n \geq \left(\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1 c_1}\right)^{-a_9 n^2} u_n^{a_9 n^2}. \tag{81}$$

Démonstration. — Le résultat étant vrai pour $n = 1$, supposons le résultat prouvé pour $k \leq n$ et montrons qu'il est vrai pour $k = n+1$.

A cet effet nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.8.22

(i) *Si* $n \in X_b$,

$$c_{n+1} \geq \frac{1}{2} c_n;$$

(ii) *si* $n \in X_f$,

$$c_{n+1} \geq \sqrt{\frac{1}{2}} 2^{-r_n} (vM_n^{-1}\delta_n)^{3r_n^3} c_n^{2r_n};$$

(iii) *si* $n \in X_0$,

$$c_{n+1} = c_n.$$

Démonstration

(i) Il suffit de montrer que

$$(\overline{C}M_n N_n \zeta_n^{-1}\delta_n^{-1})^{a_8 r_n} \widetilde{m}_n \leq \frac{1}{2} c_n,$$

c'est-à-dire, puisque

$$(\overline{C}M_n N_n) \leq T(\beta'')\rho_1^n \leq \zeta_n^{-1} \leq \delta_n^{-1}$$

et que

$$\delta_n^{-1} \leq (C_3 T(\beta'')\delta_1^{-1})^{2na_8} u_n^{-2na_8},$$

l'inégalité

$$2(C_3T(\beta'')\delta_1^{-1})^{6na_8 r_n} e^{-2\beta''} e^{-2(1+\beta)^n/3} (\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1 c_1})^{a_9 n^2} u_n^{-a_9 n^2} u_n^{-2na_8} \leq 1,$$

ou encore, puisque $a_9 > a_8$,

$$\left(\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1 c_1}\right)^{2a_9 n^2} e^{-2\beta''} \max_{n\geq 1} \left[e^{-2(1+\beta)^n/3} u_n^{-2a_9 n^2}\right] \leq 1,$$

ce qui est la cas d'après le choix fait pour β''. Ceci prouve (i).

(ii) Dans ce cas il suffit de montrer que

$$(6M_n\delta_n^{-1})^{2r_n} \mu(2r_n) \leq \frac{1}{2} (vM_n^{-1}\delta_n)^{5r_n^3},$$

c'est-à-dire, vu que

$$\begin{aligned} (vM_n^{-1}\delta_n) &\geq \delta_n^2 \\ (6M_n\delta_n^{-1}) &\leq \delta_n^{-2}, \end{aligned}$$

l'inégalité

$$2\delta_n^{-20r_n^3}\mu(2r_n) \leq 1;$$

comme C^* a été choisi pour que

$$20a_8 r_n^3 \leq C^* n,$$

il suffit de vérifier que

$$2(C_3 T(\beta''))^{C^* r_n} e^{-\beta''} \max_{n\geq 1}[u_n^{-C^* r_n} e^{-(1+\beta)^n}] \leq 1,$$

ce qui est bien le cas vu le choix fait pour β''. Le point (ii) est prouvé.

(iii) est évident.

Le lemme 6.8.22 est donc prouvé. □

Ceci étant, si nous posons

$$z_n = -\operatorname{Log} c_n,$$

le lemme précédent montre que l'on a toujours,

$$z_{n+1} \leq u_n z_n + v_n, \tag{82}$$

avec

- si $n \in X_b$,

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \\ v_n &= \operatorname{Log} 2, \end{aligned}$$

- si $n \in X_f$,

$$\begin{aligned} u_n &= 2r_n \\ v_n &= 6r_n^3 \operatorname{Log}(\delta_n^{-1}), \end{aligned}$$

- si $n \in X_0$,

$$\begin{aligned} u_n &= 1 \\ v_n &= 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\leq (u_n \cdots u_1)z_1 + u_n \cdots u_2 v_1 + \cdots v_n \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^n u_i\right)\left[z_1 + \sum_{i=1}^n v_i\right]. \end{aligned}$$

Mais

$$\prod_{i=1}^n u_i = 2^{b_n} \prod_{k\in X_{f,n}} r_k \leq 2^{b_n} \cdot r_n^{b_n} \leq 2^{2b_n^2},$$

car $r_n = 2^{b_n}$ où b_n est le cardinal des $k \in X_f$ avec $1 \leq k \leq n+1$ (ensemble que nous noterons $X_{f,n}$).

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sum_{i=k}^{n} v_k &= \sum_{k\in X_{b,n}} v_k + \sum_{k\in X_{f,n}} v_k\\ &\leq n\operatorname{Log} 2 + \sum_{k\in X_{f,n}} 6r_k^3 \operatorname{Log}(\delta_k^{-1})\\ &\leq n\operatorname{Log} 2 + 6r_n^3 b_n \operatorname{Log}(\delta_n^{-1}).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}z_n &\leq 2^{2b_n^2}[\operatorname{Log}(c_1^{-1}) + n\operatorname{Log} 2 + 6r_n^3 b_n \operatorname{Log}(\delta_n^{-1})]\\ &\leq 2^{2b_n^2}\cdot n.6r_n^3 b_n \operatorname{Log}(2\delta_n^{-1}c_1^{-1}).\end{aligned}$$

Mais comme

$$2^{2b_n^2}\cdot n.6r_n^3 b_n \leq C^* n,$$

et d'après l'estimée obtenue pour δ_n, il vient

$$c_n \geq \left(\frac{2C_3T(\beta'')}{c_1\delta_1}\right)^{-2C^*a_8n^2} u_n^{2C^*a_8n^2},$$

ce qui est la conclusion de la proposition 6.8.21. □

6.9. Estimées sur q_n

Nous sommes à présent en mesure de donner des estimées sur q_n.

Lemme 6.9.1. — *Il existe une constante $q > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$, le nombre q_n déléments de Π_n vérifie*

$$q_n \leq \left[\left(\frac{2C_3T(\beta'')}{\delta_1 c_1}\right)^{-a_9n^3} u_n^{a_9n^3}\right]^{-1}.$$

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le lemme 6.8.13 et les estimées obtenues précédemment. □

6.10. Résultat en mesure positive

Nous prouvons dans cette section un résultat de réductibilité en mesure positive en classe analytique dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 6.10.1. — *Soient $(a,b) \in \mathbf{R}$ un intervalle, $h_1, \delta_1, c_1 > 0$, $M_1 \geq 1$, $\omega \in CD(\gamma,\sigma)$ et $A \in C^{\omega}_{\delta_1}((a,b), so(3,\mathbf{R}))$ qui soit $(M_1,\delta_1,c_1,1)$-transverse sur (a,b). Alors il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(M_1,\delta_1,c_1) > 0$ avec*

$$\varepsilon_0(M_1,\delta_1,c_1) = \frac{1}{10}\left(\frac{C_7M_1}{h_1c_1}\right)^{-a_8(a_8+1)},$$

où $C_7 > 0$ est une constante (indépendante de M_1, c_1, h_1) tel que, pour tout $F \in C^{\omega}_{h_1,\delta_1}(\mathbf{T}^d \times (a,b), so(3,\mathbf{R}))$ vérifiant

$$m_1 = |F|_{h_1,\delta_1} \leq \varepsilon_0,$$

l'ensemble des $\lambda \in (a,b)$ pour lesquels $(\omega/2\pi, A(\lambda) + F(\cdot,\lambda))$ n'est pas réductible est de mesure de Lebesgue inférieure à

$$\frac{4}{c_1}(10m_1)^{\nu/(a_8+1)}.$$

On pourrait en fait montrer comme au chapitre 3 un résultat semblable en supposant seulement que la dépendance en λ de A, F est de classe C^2 (F étant analytique en $\theta \in \mathbf{T}^d$) et que, pour tout $\lambda \in (a,b)$,

$$0 < c_1 < \partial_\lambda |A(\lambda)|,$$

$$\max_{i=0,1,2} |\partial_\lambda^i A_n| \leq M_1,$$

$$\max_{i=0,1,2} |\partial_\lambda^i F(x,\lambda)|_{h_1} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. — La preuve de ce théorème suit les lignes de celles du théorème 6.8.3 mais est plus simple car, en ne considérant à chaque étape que les λ correspondant à une « situation diophantienne », on garde un bon contrôle de transversalité sur les racines. Aussi serons nous plus rapide dans la démonstration. Redéfinissons tout d'abord,

$$h_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) h_1,$$

$$N_n = \frac{\beta'(1+\beta)^n + \beta''}{2\pi(h_n - h_{n+1})},$$

de façon que

$$2\pi N_n(h_n - h_{n+1}) = \beta'(1+\beta)^n + \beta'',$$

et posons

$$K_n = N_n^{\nu}.$$

Supposons que nous ayons défini à la n-ième étape

- des ensembles Θ_n de g_n sous-intervalles *disjoints* de (a,b), $(\overline{\Lambda}_{n,l})_{1\leq l\leq g_n}$,
- des $A_n \in C^{\omega}_{\delta_n}(\overline{\Lambda}_{n,l}, so(3,\mathbf{R}))$, tels que $\alpha_n(\cdot) = |A_n(\cdot)|$ soit $(M_n, \delta_n, c_n, 1)$-transverse avec

$$M_n \leq 4^{n-1} M_1,$$

$$\delta_n \geq (T(\beta'')\rho_1)^{-n^2}\delta_1,$$

$$c_n \geq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) c_1,$$

et vérifie pour tout $\lambda \in \overline{\Lambda}_{n,j}$,

(83) $$|A_n(\lambda)| \geq K_n^{-1},$$

– des $F_n \in C^{\omega}_{h_n,\delta_n}(\mathbf{T}^d \times \overline{\Lambda}_{n,j}, so(3,\mathbf{R}))$, tels que

(84) $$|F_n|_{h_n,\delta_n} = m_n \leq (\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^n}.$$

Supposons en outre que, pour tout $n \leq p$, α_n soit (e_n, c_n)-injective relativement à Θ_n avec

$$e_n \geq K_n^{-2},$$

c'est-à-dire que

– pour tous $\overline{\Lambda}_{n,j}, \overline{\Lambda}_{n,j'} \in \Theta_n$ distincts,

$$\mathrm{dist}(\alpha_n(\overline{\Lambda}_{n,j}), \alpha_n(\overline{\Lambda}_{n,j'})) \geq e_n,$$

– pour tout $\overline{\Lambda}_{n,j} \in \Theta_n$ et tout $\lambda \in \overline{\Lambda}_{n,j}$,

$$|\partial_\lambda \alpha_n(\lambda)| \geq c_n.$$

En particulier, α_n restreinte à E_n est injective où E_n est la réunion,

$$E_n = \bigcup_{\overline{\Lambda}_n \in \Theta_n} \overline{\Lambda}_n.$$

Construisons les à la $(n+1)$-ième étape. Pour chaque $\overline{\Lambda}_{n,j} \in \Theta_n$, considérons les composantes connexes du complémentaire dans $\overline{\Lambda}_{n,j}$ de

$$\left\{ \lambda \in \overline{\Lambda}_{n,j},\ \alpha_n(\lambda) \in [0, K_n^{-1}) \cup \bigcup_{0<|k|\leq N_n} \left(-\frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau} + (k,\omega), \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau} + (k,\omega) \right) \right\};$$

et notons Θ_{n+1} l'ensemble de ces composantes connexes quand $\overline{\Lambda}_{n,j}$ varie dans Θ_n.

Si $\overline{\Lambda}_{n+1,j} \in \Theta_{n+1}$, alors pour tout $\lambda \in \overline{\Lambda}_{n+1,j}$ on a $|A_n(\lambda)| \geq K_n^{-1}$.

On peut alors appliquer le lemme 6.7.2 ou mieux la preuve de la proposition 6.8.7 (i) pour obtenir l'existence de A_{n+1}, F_{n+1}, Y_n, tels que

$$A_{n+1} \in C^{\omega}_{\delta_{n+1}}(\Lambda, so(3,\mathbf{R}))$$

$$Y_n, F_{n+1} \in C^{\omega}_{h_{n+1},\delta_{n+1}}(\mathbf{T}^d \times \Lambda, so(3,\mathbf{R})),$$

$$A_{n+1} = A_n + \widehat{F}_n(0),$$

$$(\omega/2\pi, A_{n+1} + F_{n+1})\ \mathcal{R}(e^{Y_n})\ (\omega/2\pi, A_n + F_n),$$

$$m_{n+1} = \frac{\overline{C}(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} m_n^2 + \overline{C} \frac{e^{-2\pi N_n (h_n - h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d} m_n,$$

$$M_{n+1} \leq 3(M_n + m_n),$$

$$\delta_{n+1} \geq \overline{C}(M_n N_n)^{-a_8} \delta_n,$$

(85) $$c_{n+1} \geq c_n - \overline{C}(M_n N_n)^{a_8} m_n,$$

$$r_{n+1} = r_n = 1.$$

Remarquons que ces estimations impliquent comme dans les sections 6.8.c, 6.8.d,

$$M_{n+1} \leq 4^n M_1,$$

et

$$\delta_{n+1} \geq (T(\beta'')\rho_1)^{-(n+1)^2},$$

puisque

$$(\overline{C} M_n N_n) \leq T(\beta'')\rho_1^n.$$

Montrons à présent le lemme suivant,

Lemme 6.10.2. — *Si β'' vérifie l'hypothèse du lemme 6.8.1 et si $m_1 \leq \frac{1}{10}(\beta'')^{-(a_8+1)}$, alors pour tout n,*

$$m_n \leq (\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^n}.$$

Démonstration. — Notons

$$P_n = \overline{C} \frac{(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} m_n^2,$$

et

$$Q_n = \overline{C} \frac{e^{-2\pi N_n (h_n - h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d} m_n;$$

il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} P_n &\leq \frac{1}{2}(\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^{n+1}} \\ Q_n &\leq \frac{1}{2}(\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^{n+1}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque

$$\begin{aligned} \overline{C} \frac{(M_n N_n)^{a_7}}{(h_n - h_{n+1})^{2d}} &\leq T(\beta'')\rho_1^n \\ \overline{C} \frac{e^{-2\pi N_n (h_n - h_{n+1})}}{(h_n - h_{n+1})^d} &\leq T(\beta'')\rho_1^n, \end{aligned}$$

qu'il s'agit de voir que

$$T(\beta'')(\beta'')^{-2(a_8+1)} e^{-2(1+\beta)^n} \leq \frac{1}{2}(\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^{n+1}},$$

et

$$T(\beta'')\rho_1^n (\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-\beta'(1+\beta)^n - \beta''} \leq \frac{1}{2}(\beta'')^{-(a_8+1)} e^{-(1+\beta)^{n+1}}.$$

Comme

$$T(\beta'') = \left(\frac{\overline{C} M_1 \beta''}{2\pi h_1}\right)^{a_8},$$

ceci revient à vérifier que

$$\left(\frac{\overline{C} M_1}{2\pi h_1}\right)^{a_8} (\beta'')^{-1} \rho_1^n e^{-(1-\beta)(1+\beta)^n} \leq \frac{1}{2},$$

et

$$\left(\frac{\overline{C}M_1}{2\pi h_1}\right)^{a_8} e^{-\beta''} \rho_1^n e^{-(\beta'-\beta)(1+\beta)^n} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme pour $x \geq 1$, $x \leq e^x$, il suffit donc de choisir

$$\beta'' \geq C_7 \left(\frac{M_1}{h_1}\right)^{a_8},$$

où

$$C_7 = 2 \cdot \left(\frac{\overline{C}}{2\pi}\right)^{a_8} \max_{k\geq 1} \left[\rho_1^n e^{-(1+\beta)^n/6}\right].$$

□

Prouvons à présent :

$$c_{n+1} \geq c_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Pour cela il suffit de montrer d'après (85) que

$$\overline{C}(M_n N_n)^{a_8} m_n \leq \frac{1}{2} c_n,$$

c'est-à-dire d'après l'hypothèse de récurrence,

$$c_1^{-1} 2^{n+1} \overline{C}(M_n N_n)^{a_8} m_n \leq 1.$$

Mais on vérifie facilement que

$$2^{n+1}\overline{C}(M_n N_n)^{a_8} \leq \rho_1^n T(\beta''),$$

et il suffit donc, vue l'expression de $T(\beta'')$, que

$$\left(\frac{\overline{C}M_1}{2\pi h_1}\right)^{a_8} c_1^{-1}(\beta'')^{-1} \max_{k\geq 1} \left[\rho_1^n e^{-(1+\beta)^n}\right] \leq 1,$$

ce qui est le cas puisque l'on a choisi,

$$\beta'' \geq C_7 \left(\frac{M_1}{h_1}\right)^{a_8} c_1^{-1}.$$

On a donc bien l'estimation sur c_{n+1}.

Enfin α_{n+1} est (e_{n+1}, c_{n+1})-injective relativement à Θ_{n+1} : en effet comme pour $\lambda \in E_n$

$$|\alpha_{n+1}(\lambda) - \alpha_n(\lambda)| \leq m_n,$$

il est clair que, pour tous $\overline{\Lambda}_{n,j}, \overline{\Lambda}_{n,j'} \in \Theta_n$,

$$\operatorname{dist}(\alpha_{n+1}(\overline{\Lambda}_{n,j}), \alpha_{n+1}(\overline{\Lambda}_{n,j'})) \geq e_n - 2m_n.$$

Mais (d'après le théorème des valeurs intermédiaires),

$$\begin{aligned} e_n - e_{n+1} &= K_n^{-2} - K_{n+1}^{-2} \\ &\geq 2\nu(N_{n+1} - N_n) N_{n+1}^{-(2\nu+1)} \\ &\geq N_n^{-a_8} \\ &\geq 2m_n, \end{aligned}$$

(car $N_{n+1} - N_n \geq 1$ et $2\nu + 1 \leq a_8$) la dernière inégalité étant vraie d'après le choix fait pour β'' (*cf.* les estimées précédentes). Par conséquent,

$$\operatorname{dist}(\alpha_{n+1}(\overline{\Lambda}_{n,j}), \alpha_{n+1}(\overline{\Lambda}_{n,j'})) \geq e_{n+1}.$$

D'autre part, par définition de Θ_{n+1}, les images par α_{n+1} des éléments de Θ_{n+1} (qui sont des sous-intervalles des $\overline{\Lambda}_{n,j} \in \Theta_n$) sont distantes d'au moins $N_{n+1}^{-\tau} K_{n+1}^{-1} = K_{n+1}^{-2}$, nombre qui est égal à e_{n+1}. Ainsi α_{n+1} est bien (e_{n+1}, c_{n+1})-injective relativement à Θ_{n+1}.

Mesure de l'ensemble des bons paramètres. — Rappelons que nous notons E_n la réunion

$$E_n = \bigcup_{\Lambda_n \in \Theta_n} \Lambda_n.$$

D'après ce qui précède, puisque α_n est injective sur E_n et vérifie $|\partial_\lambda \alpha_n(\lambda)| \geq c_n$ pour tout $\lambda \in E_n$, on peut écrire $(d + 1 \leq \tau)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(E_n - E_{n+1}) &\leq \frac{1}{c_n}\left(K_n^{-1} + \sum_{0<|k|\leq N_n} \frac{K_n^{-1}}{|k|^\tau}\right) \\ &\leq \frac{1}{c_n}(K_n^{-1} + K_n^{-1} \cdot N_n^{1+d-\tau}) \\ &\leq \frac{1}{c_n} 2K_n^{-1}, \end{aligned}$$

et donc puisque $c_n \geq c_1/2$ et que

$$K_n^{-1} \leq \left(\frac{2^n \beta''}{2\pi h_1}\right)^{-\nu},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}((a,b) - \cup_{n\geq 1} E_n) &\leq \frac{4}{c_1} \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{-1} \\ &\leq \frac{4}{c_1}\left(\frac{\beta''}{2\pi h_1}\right)^{-\nu} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\nu} \\ &\leq \frac{4}{c_1}\left(\frac{\beta''}{2\pi h_1}\right)^{-\nu}. \end{aligned}$$

Résumons les résultats obtenus précédemment : si

$$\beta'' = (10m_1)^{-1/(a_8+1)},$$

est plus grand que

$$C_7\frac{1}{c_1}\left(\frac{M_1}{h_1}\right)^{a_8},$$

c'est-à-dire si (par exemple),

$$m_1 \leq \frac{1}{10}\left(\frac{C_7 M_1}{h_1 c_1}\right)^{-a_8(a_8+1)},$$

alors l'ensemble des $\lambda \in (a,b)$ pour lesquels $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ n'est pas réductible est de mesure inférieure à

$$\frac{4}{c_1}(\beta'')^{-\nu},$$

c'est-à-dire à

$$\frac{4}{c_1}(10m_1)^{\nu/(a_8+1)}.$$

Réductibilité. — Si $\lambda \in \bigcup_{n\geq 1} E_n$ alors pour tout $n \geq 1$ on peut définir A_n, F_n, Y_n, et on a

$$(\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\cdot,\lambda)) \;\mathcal{R}(e^{Y_{n-1}}\cdots e^{Y_1})\; (\omega/2\pi, A_1(\lambda) + F_1(\cdot,\lambda)).$$

Mais il n'est pas difficile de voir que le produit,

$$e^{Y_{n-1}}\cdots e^{Y_1},$$

converge (vues les estimées obtenues pour $|F_n|_{h_n}$ et $|Y_n|_{h_n}$) et comme F_n tend vers 0 pour $n \to \infty$, la preuve du théorème 6.10.1 est terminée. □

6.11. Preuve du théorème 6.2.1

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème 6.2.1 en appliquant le théorème 6.8.3 et le théorème 6.10.1 : Le théorème 6.8.3 nous fournit une partition de l'intervalle des paramètres Λ en au plus q_n intervalles, $\Lambda^t_{n,j} \in \Pi^t_n$ d'une part, sur lesquels on contrôle la transversalité de $|A_n|(\lambda)$ et en intervalles $\Lambda^0_{n,j} \in \Pi^0_n$ d'autre part, de mesures petites. A chaque $\Lambda \in \Pi_n$ on a associé un symbole $\chi_n(\Lambda) = 0, t$ selon que Λ est dans Π^0_n ou dans Π^t_n. En outre, à chaque $\Lambda_N \in \Pi_N$ on peut associer si $n \geq N$, l'ensemble

$$H^*_{N,n}(\Lambda_N) = \{\Lambda_n \in \Pi^*_n, \Lambda_n \subset \Lambda_N\},$$

$(* \in \{0,t\}.)$ Les $H^*_{N,n}(\Lambda_N), \Lambda_N \in \Pi_N$ fournissent une partition de Π^*_n. Appelons comme précédemment,

$$E^*_n = \bigcup_{\Lambda_n \in \Pi^*_n} \Lambda_n.$$

Lemme 6.11.1. — *Le complémentaire dans* (a,b) *de*

$$\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} E_n^t,$$

est constitué de paramètres $\lambda\in(a,b)$ *pour lesquels* $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\lambda,\cdot))$ *est réductible.*

Démonstration. — Remarquons que le complémentaire de cet ensemble est

$$Z=\bigcup_{N\geq 1}\bigcap_{n\geq N}((a,b)\backslash E_n^t),$$

et comme

$$(a,b)\backslash E_n^t = E_n^0,$$

il suffit de montrer que si pour tout $n\geq N$, $\lambda\in E_n^0$ alors $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\lambda,\cdot))$ est réductible. Mais par définition des $\Lambda_{n,j}^0$ (*cf.* le point (v)(f) du théorème 6.8.3) nous savons que, pour tout $\lambda\in\Lambda_{n,j}^0$,

$$|A_n(\lambda)|\leq K_n^{-1},$$

et de ce fait, $A_n(\lambda)$ appartient à $DS(N_n,K_n)$. Le lemme 6.7.2 s'applique directement (il n'y a pas de résonance à éliminer) et il existe $Y_n\in C^{\omega}_{\delta_n,h_n}(\Lambda_{n,j}^0\times\mathbf{T}^d, so(3,\mathbf{R}))$ vérifiant

$$|Y_n|_{h_{n+1}}\leq\frac{\widetilde{c}_6\gamma K_n^2(M_nN_n)^{a_6}|F_n|_{h_n}}{(h_n-h_{n+1})^d},$$

tel que e^{Y_n} conjugue $(\omega/2\pi, A_n(\lambda)+F_n(\lambda,\cdot))$ à $(\omega/2\pi, A_{n+1}(\lambda)+F_{n+1}(\lambda,\cdot))$; le produit $G_{n,N}=e^{Y_{n-1}}\cdots e^{Y_1}$ conjugue donc $(\omega/2\pi, A_N(\lambda)+F_N(\lambda,\cdot))$ à $(\omega/2\pi, A_n(\lambda)+F_n(\lambda,\cdot))$. Mais les estimations (37)-(51) montrent d'une part que ce produit converge quand $n\to\infty$ vers $G_{\infty,N}(\lambda,\cdot)\in C^{\omega}(\mathbf{T}^d, SO(3,\mathbf{R})$ et d'autre part que

$$A_n(\lambda)+F_n(\lambda,\cdot)=(A_N+\sum_{k=N}^{n-1}\widehat{F}_k(\lambda,0))+F_n(\lambda,\cdot),$$

converge vers une constante $A_\infty(\lambda)\in so(3,\mathbf{R})$. Par conséquent, si

$$\lambda\in\bigcap_{n\geq N}E_n^0,$$

$(\omega/2\pi, A_1(\lambda)+F_1(\lambda,\cdot))$, qui est conjugué à $(\omega/2\pi, A_N(\lambda)+F_N(\lambda,\cdot))$, est réductible.

Le lemme est établi. □

Lemme 6.11.2. — *Presque tout* λ *dans,*

$$\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} E_n^t,$$

est tel que $(\omega/2\pi, A(\lambda)+F(\cdot,\lambda))$ *est réductible.*

Démonstration. — Notons R_n^t l'ensemble des $\lambda \in E_n^t$ pour lesquels $A_n(\lambda) + F_n(\lambda)$ est réductible et considérons $\Lambda_n^t \in \Pi_n^t$. D'après le théorème 6.8.3, la fonction $f_n(\lambda) = |A_n(\lambda)|$ est $(M_n, \delta_n, c_n, r_n)$-transverse sur Λ_n^t, c'est-à-dire $(M_n(\delta_n/2)^{-(r_n+1)}, c_n, r_n)$-Pyartli. Notons

$$\chi_n = \min\left(c_n/2, c_n^{r_n+1} \cdot (2^{r_n+2} M_n(\delta_n/2)^{-(r_n+1)})^{r_n}, m_n^{\nu/2(a_8+1)}\right),$$

où $\nu > 0$ est comme dans le théorème 6.10.1) et

$$C_n = M_n(\delta_n/2)^{-(r_n+1)}.$$

Le corollaire 6.4.6 montre qu'en dehors d'un ensemble de mesure inférieure à

$$\left(2r_n(|\Lambda_n|(C_n c_n^{-1} + 1))\right) 2^{r_n+1} \left(\frac{\chi_n}{c_n}\right)^{1/r_n},$$

on a l'inégalité $|f_n'(\lambda)| \geq \chi_n$, et ce sur au plus $2(2r_n[\frac{|\Lambda_n| C_n}{c_n}] + 1))$ composantes connexes. Sur chacune d'entre-elles $|A_n(\cdot)|$ est donc $(M_n, \delta_n, \chi_n, 1)$-transverse. Le théorème 6.10.1 établit alors que, si

$$m_n \leq \frac{1}{10}\left(\frac{\overline{C}_7 M_n}{h_n c_n}\right)^{-a_8(a_8+1)},$$

– ce qui sera vrai pour n assez grand – alors sur chacune de ces composantes connexes, à l'exception de certains λ dans un ensemble de mesure inférieure à

$$(\text{cste}) \cdot \chi_n^{-1} \cdot M_n^{\nu/(a_8+1)},$$

le système $(\omega/2\pi, A_n(\lambda) + F_n(\cdot, \lambda))$ est réductible. Ainsi, la mesure de Lebesgue de $\Lambda_n^t - R_n^t$ vérifie pour n assez grand,

$$\text{(86)} \quad \operatorname{mes}(\Lambda_n^t - R_n^t) \leq (\text{cste}) \cdot \left(2r_n\left[\frac{(1+|\Lambda_n|)M_n(\delta_n/2)^{-(r_n+1)}}{c_n}\right] + 1\right) \cdot \left(2^{r_n+1}\left(\frac{\chi_n}{c_n}\right)^{1/r_n} + \frac{m_n^{\nu/(a_8+1)}}{\chi_n}\right).$$

Les estimations (37-51), ainsi que celles relatives à q_n, r_n et le choix fait pour χ_n montrent que

$$\sum_{n\geq 1} \operatorname{mes}(E_n^t - R_n^t) < \infty;$$

on peut alors appliquer le lemme de Borel-Cantelli et voir que presque tout λ appartient à un nombre fini d'ensembles $E_n^t - R_n^t$. □

Les lemmes 6.11.1 et 6.11.2 permettent clairement de conclure la preuve du théorème 6.2.1. □

ANNEXE
QUELQUES ESTIMÉES

A.1. Estimées concernant la troncature et le reste

Dans ce qui suit nous considérons f une fonction dans $C^\infty(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ qui est $\mathbf{Z}^d$-périodique. Pour tout $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbf{Z}^d$, nous définissons le k-ième coefficient de f,

$$\widehat{f}(k) = \int_{[0,1]^d} f(x) e^{-2\pi\sqrt{-1}(k,x)} dx.$$

Pour N entier positif nous notons comme d'habitude les troncature et reste de la série de Fourier de f à l'ordre N :

$$S_N f(x) = \sum_{|k| \leq N} \widehat{f}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)},$$

et

$$R_N f(x) = \sum_{|k| > N} \widehat{f}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)}.$$

Si f est C^∞ sa série de Fourier converge vers f, et on peut exprimer les coefficients de Fourier de $\partial^\alpha f$ en fonction de ceux de f puisque

$$\widehat{\partial^\alpha f}(k) = (\sqrt{-1}k)^\alpha \widehat{f}(k). \tag{1}$$

Enfin rappelons l'identité de Parseval,

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |\widehat{f}(k)|^2 = \int_{[0,1]^d} |f|^2 dx. \tag{2}$$

Combiné avec (1) ceci donne,

$$\left(\sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |k^\alpha|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq \int_{[0,1]^d} |\partial^\alpha f|^2 dx \leq |\partial^\alpha f|_0. \tag{3}$$

De (1), (2) et (3) on déduit utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour $s \in \mathbf{N}$,

$$|f|_s \leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^d} |k|^s |\widehat{f}(k)| \leq c_d |f|_{s+(d+1)/2}. \tag{4}$$

Mentionnons également pour $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$,

$$|\widehat{f}(k)| \leq \frac{|f|_s}{|k|^s}. \tag{5}$$

Nous pouvons alors énoncer,

Proposition A.1.1. — *Pour N, s entiers,*

$$|S_N F|_s \leq (2\pi)^s N^{(d+1)/2} |f|_s, \tag{6}$$

et pour $s' > s$,

$$|R_N f|_s \leq (2\pi)^s \frac{|f|_{s'}}{|k|^{s'-s-d-1}}. \tag{7}$$

Démonstration. — Pour montrer l'estimée (6), écrivons que, pour tout multi-indice $|\alpha| \leq s$,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha S_N f|_0 &\leq \left| \sum_{|k| \leq N} (2\pi\sqrt{-1}k)^\alpha \widehat{f}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}(k,x)} \right| \\ &\leq (2\pi)^{|\alpha|} \sum_{|k| \leq N} |\widehat{\partial^\alpha f}(k)|, \end{aligned} \tag{8}$$

et par Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha S_N f|_0 &\leq (2\pi)^s N^{(d+1)/2} \sum_{|k| \leq N} |\widehat{\partial^\alpha f}(k)|^2 \\ &\leq (2\pi)^s N^{(d+1)/2} |\partial^\alpha f|_{L^2} \\ &\leq (2\pi)^s N^{(d+1)/2} |f|_s. \end{aligned} \tag{9}$$

Pour l'estimée (7),

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha R_N f|_0 &\leq \sum_{|k| > N} (2\pi)^{|\alpha|} |k|^{|\alpha|} |\widehat{f}(k)| \\ &\leq \sum_{|k| > N} (2\pi)^s |k|^s \frac{|f|_{s'}}{|k|^{s'}} \\ &\leq (2\pi)^s \frac{|f|_{s'}}{|k|^{s'-s-d-1}}. \end{aligned} \tag{10}$$

□

A.2. Estimées pour la composée

A.2.a. Cas des séries entières. — Soit ϕ une série entière, $\phi(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n$, avec $n_0 \geq 1$.

Proposition A.2.1. — *Si $|f|_0 \leq 1$ alors pour tout $s \geq 0$ il existe $c_s > 0$ indépendante de f, telle que*

$$|\phi \circ f|_s \leq c_s |f|_0^{n_0 - 1} |f|_s. \tag{11}$$

Démonstration. — Démontrons tout d'abord le lemme :

Lemme A.2.2. — *Pour tout $s \geq 0$ il existe $b_s > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,*

$$|f^n|_s \leq b_s^n |f|_0^{n-1} |f|_s. \tag{12}$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n puisque de $|f^n|_s = |f^{n-1} \cdot f|_s$ on déduit en utilisant l'inégalité de convexité de la proposition 1.1.1 du chapitre 1,

$$\begin{aligned} |f^n|_s &\leq c_s(|f^{n-1}|_s |f|_0 + |f^{n-1}|_0 |f|_s), \\ &\leq c_s(b_s^{n-1} + 1)|f|_0^{n-1} |f|_s, \end{aligned} \tag{13}$$

et il suffit de choisir b_s tel que $b_s^n \leq c_s(b_s^{n-1} + 1)$. □

Ainsi,

$$\begin{aligned} |\phi \circ f|_s &\leq \sum_{n \geq n_0} |a_n| b_s^n |f|_0^{n-1} |f|_s \\ &\leq \left(\sum_{n \geq n_0} |a_n| b_s^n |f|_0^{n-n_0} \right) |f|_0^{n_0-1} |f|_s, \end{aligned} \tag{14}$$

ce qui donne la conclusion puisque la somme converge. □

A.2.b. Cas C^∞. — Nous montrons :

Proposition A.2.3. — *Si ϕ est C^∞, il existe pour tout $s \geq 0$ une constante $c_s > 0$ telle que, pour tout f, u (C^∞),*

$$|\phi \circ f|_s \leq c_s |\phi|_s (1 + |f|_0)^s (1 + |f|_s), \tag{i}$$

$$|\phi \circ (f + u) - \phi \circ f|_s \leq c_s (1 + |f|_0)^s (1 + |f|_s) |u|_s. \tag{ii}$$

Démonstration. — Nous donnons la démonstration de ces résultat dans le cas où les fonctions vont de **R** dans **R**, ceci afin de simplifier les notations.

Pour (i) : écrivons

$$\partial^s(\phi \circ f) = \sum_{\alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_p i_p = s} \phi^{(i_1 + \cdots + i_p)} \circ f \cdot (\partial^{\alpha_1})^{i_1} \cdots (\partial^{\alpha_p})^{i_p}, \tag{15}$$

si bien que

$$|\partial^s(\phi\circ f)|_0 \leq c_s|\phi|_s \sum_{\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p=s} |(\partial^{\alpha_1} f)^{i_1}\cdots(\partial^{\alpha_p} f)^{i_p}|_0. \tag{16}$$

Or, les inégalités de convexité montrent que

$$|\partial^{\alpha_1} f|_0 \leq c_s|f|_0^{1-\alpha_1/s}|f|_s^{\alpha_1/s}, \tag{17}$$

et donc

$$\begin{aligned}
|\partial^s(\phi\circ f)|_0 &\leq c_s|\phi|_s \sum_{\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p=s} |f|_s^{(\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p)/s}|f|_0^{i_1+\cdots+i_p-(i_1\alpha_1+\cdots+i_p\alpha_p)/s}\\
&\leq c_s|\phi|_s(1+|f|_s)\sum |f|_0^{i_1+\cdots+i_p-1}\\
&\leq c_s|\phi|_s(1+|f|_s)(1+|f|_0)^s. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Ce qui démontre (i).

Pour (ii) : Cette fois-ci,

$$\partial^s(\phi\circ(f+u)-\phi\circ f) = \sum_{\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p=s} \phi^{(i_1+\cdots+i_p)}\left[(\partial^{\alpha_1} f +\partial^{\alpha_1}u)^{i_1}\cdots(\partial^{\alpha_p} f+\partial^{\alpha_p}u)^{i_p} - (\partial^{\alpha_1} f)^{i_1}\cdots(\partial^{\alpha_p} f)^{i_p}\right]. \tag{19}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&|\partial^s(\phi\circ(f+u)-\phi\circ f)|_0\\
&\leq c_s|\phi|_s| \sum_{\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p=s}\left(\sum_{k_1=1}^{i_1}\binom{i_1}{k_1}(\partial^{\alpha_1} f)^{i_1-k_1}(\partial^{\alpha_1}u)^{k_1}\cdots\right.\\
&\qquad\left.\cdot\sum_{k_p=1}^{i_p}\binom{i_p}{k_p}(\partial^{\alpha_p} f)^{i_p-k_p}(\partial^{\alpha_p}u)^{k_p}\right)\\
&\leq c_s|\phi|_s \sum_{\alpha_1 i_1+\alpha_p i_p=s}\left(\sum_{k_1=1}^{i_1}\cdots\sum_{k_p=1}^{i_p}\left|(\partial^{\alpha_1} f)^{i_1-k_1}\cdots(\partial^{\alpha_p} f)^{i_p-k_p}(\partial^{\alpha_1}u)^{k_1}\cdots(\partial^{\alpha_p}u)^{k_p}\right|\right)
\end{aligned}$$

et en utilisant à nouveau les inégalités de convexité, on voit que la somme précédente est inférieure à

$$\begin{aligned}
&c_s|\phi|_s \sum_{\substack{\alpha_1 i_1+\cdots+\alpha_p i_p=s\\ 1\leq k_1\leq i_1\\ \vdots\\ i\leq k_p^i\leq i_p}}\Big(|f|_s^{(\alpha_1/s)(i_1-k_1)+\cdots+(\alpha_p/s)(i_p-k_p)}\,.\\
&\cdot|f|_0^{(i_1-k_1)(1-\alpha_1/s)+\cdots+(i_p-k_p)(1-\alpha_p/s)}|u|_s^{k_1\alpha_1/s+\cdots+k_p\alpha_p/s}|u|_0^{(1-\alpha_1/s)k_1+\cdots+(1-\alpha_p/s)k_p}\Big).
\end{aligned}$$

Or, $\alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_p k_p \leq \alpha_1 i_1 + \cdots + \alpha_p i_p = s$, si bien que l'on peut majorer le membre de droite par $c_s |\phi|_s (1 + |f|_0)^s (1 + |f|_s) |u|_s$. □

A.3. Rappels sur le théorème d'inversion locale avec estimées

On énonce seulement le théorème sans donner la démonstration qui peut se trouver dans [**5**] (on peut également adapter la preuve du théorème de Hamilton avec estimées donnée au chapitre 4).

Nous notons $B(0, r) \subset \mathbf{R}^n$ la boule de rayon r (pour la norme euclidienne) centrée en 0.

Théorème A.3.1. — *Soit $f : B(0,1) \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^2 fixant 0, telle que $|D^2 f| \leq M$ pour $M > 0$, $Df(0)$ soit inversible et vérifie $|Df(0)^{-1}| \leq c\rho^{-1}$ pour $\rho > 0$. Alors il existe une constante $c_1 > 0$ (indépendante de ρ) telle que f est inversible localement sur $B(0, c_1 \rho)$. En outre, pour tout $y \in f(B(0, c_1\rho))$, $|D^j (f^{-1})(y)| \leq c_1 \rho^{-j}$, $j = 0, 1, 2$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Benedetti, J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités mathématiques, Hermann, Paris, (1990).

[2] J.-B. Bost, *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssman, Zenhder, Herman, Pöschel...)*, Astérisque **133-134**, (1984-85), p. 113-157.

[3] H.W. Broer, G.W. Huitema, M.B. Sevryuk, *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems : Order amidst Chaos*, Springer LNM 1645 (1996).

[4] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, ed. Birkhäuser coll. Probability and its Applications, (1990).

[5] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*, Hermann, Paris, (1977).

[6] J. Dieudonné, *Eléments d'analyse*, tome 5, Gauthier-Villars (1975).

[7] E.I. Dinaburg, Y.G. Sinai, *The one dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential*, Funkt. Anal. i. Priloz **9**, (1975), p. 8-21.

[8] L.H.Eliasson, *Perturbations of Stable Invariant Tori for Hamiltonian Systems*, Ann. Sc. Nor. Sup. di Pisa **4**, (1988), p. 115-147.

[9] L.H. Eliasson, *Floquet solutions for the* 1*-Dimensional quasi-periodic Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **146**, (1992), p. 447-482.

[10] L.H. Eliasson, *Ergodic Skew Systems on* $\mathbf{T}^d \times SO(3, \mathbf{R})$, Preprint de l'ETH, (1991).

[11] R. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, preprint Cornell University (1974).

[12] R. Hamilton, *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. **7**, (1982), p. 65-222.

[13] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, Boston, (1978).

[14] M.R. Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. IHES, **49**, p. 5-234 (1979).

[15] M.R. Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques exemples montrant le caractère local d'un théorème d'Arnold et de Moser sur le tore de dimension 2*, Comment. Math. Helv. **58**, (1983), p. 453-502.

[16] M.R. Herman, *Démonstration du théorème des courbes invariantes pour les difféomorphismes de l'anneau*, manuscrit (1980).

[17] R. Johnson, J. Moser, *The rotation number for almost periodic potentials*, Comm. Math. Phys. **84**, (1982), p. 403-438.

[18] A. Jorba, C. Simo, *On the reducibility of linear differential equations with quasi-periodic solutions*, J. Diff. Eq. **98** (1992), p. 111-124.

[19] R. Krikorian, *Réductibilité presque partout des systèmes quasi-périodiques dans le cas SO(3)*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, **321**, (1995), p. 1039-1044.

[20] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Tracts in Math.,**1**, Interscience Publishers, (1966).

[21] J. Moser, J. Pöschel, *An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials*, Comment. Math. Helv. **59**, (1984), p. 39-85.

[22] A.S. Pyartli, *Diophantine approximations on submanifolds of euclidian space*, Funkt. Anal. i. Priloz. **3**, (1969), p. 303-306.

[23] B. Simon, *Almost Periodic Schrödinger Operators : a Review*, Adv. in Appl. Math. **3**, p. 463-490, (1982).

[24] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, (1970).

[25] J.-C. Yoccoz, *Travaux de Herman sur les tores invariants*, Astérisque, **206** (1992), p. 311-344.