Astérisque

LAWRENCE BREEN

Appendice B. Ensembles croisés et algèbre simpliciale

Astérisque, tome 257 (1999), p. 135-161

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__257__135_0>

APPENDICE B

ENSEMBLES CROISÉS ET ALGÈBRE SIMPLICIALE

L. Breen

Introduction

Dans l'article principal [**28**] de ce volume, Jean-Pierre Labesse introduit des ensembles de cohomologie non-abélienne à valeurs dans des coefficients quelque peu compliqués, qu'il appelle des ensembles croisés. Nous indiquons ici quelle est la relation entre cette cohomologie et divers autres ensembles de cohomologie abélienne et non-abélienne. L'intérêt de cette démarche est qu'elle insère des calculs cohomologiques parfois compliqués dans un contexte topologique qui permet d'en étendre le champ d'application. Si ce contexte topologique, fourni par l'algèbre simpliciale, peut de prime abord sembler assez lourd, il se révèle en définitive très adapté à l'étude de questions de nature cohomologique.

Le modèle sur lequel est calqué la discussion qui suit est fourni par le théorème de Dold-Kan (on dit aussi Dold-Puppe, [**23**] I théorème 1.3.1). Celui-ci établit une équivalence entre la catégorie des complexes de groupes abéliens et celle des groupes abéliens simpliciaux. Il suit que l'(hyper)-cohomologie d'un espace, ou d'un schéma, X à valeurs dans un complexe de groupes abéliens C peut être calculée comme limite de groupes des classes d'homotopie d'applications du nerf d'un (hyper)-recouvrement de X, à valeurs dans le groupe abélien simplicial associé. Il existe des versions non abéliennes de ce théorème, notamment celle de P. Carrasco et A.M. Cegarra [**17**] où est démontrée une équivalence entre la catégorie des groupes simpliciaux et celle des complexes de groupes munies de structures additionnelles. Il en résulte une définition de la cohomologie à valeurs dans les complexes de groupes en question qui coincide, dans le cas de la cohomologie à valeurs dans un module croisé, avec la définition classique. On se placera ici dans un contexte où l'on dispose d'encore moins de structure, puisqu'il s'agit de définir un théorème de Dold-Kan ensembliste, qui fait correspondre des ensembles simpliciaux à certains complexes d'ensembles pointés. Le cas traité ici est celui des complexes de longueur 2, c'est-à-dire les ensembles croisés de [**28**].

Plutôt que de partir d'un ensemble croisé quelconque

$$[B \longrightarrow A \times X \longrightarrow X]$$

on considérera principalement le cas où le fibré en groupes B est trivial sur X, c'est-à-dire de la forme $D \times X$, pour un groupe donné D. Nous dirons qu'un ensemble croisé de ce type, noté

$$[D \underset{X}{\longrightarrow} A \Longrightarrow X]$$

est un ensemble croisé à fibres constantes (e.c.f.c.). Le passage à la situation générale ne présente pas de difficulté autre que notationelle. Dans la première partie, nous expliquons plus en détail ce que sont les ensembles croisés et les e.c.f.c. (avec une notation légèrement différente de celle de [**28**]), puis nous construisons les ensemble simpliciaux associés, enfin nous passons en revue les différentes situations dans lesquelles cette construction était déja connue.

La seconde section est consacrée à la traduction des constructions simpliciales mentionnées dans un langage catégorique (ou plutôt 2-catégorique). Ceci rend beaucoup plus claire la signification de formules cohomologiques dont le niveau de complication croît en proportion de la taille des complexes considérés. Les conventions choisies ici ne sont pas tout à fait les mêmes que dans [**11**], où sont examinées des structures catégoriques analogues, mais il nous a paru important de nous plier aux conventions de [**28**] afin faciliter le passage de notre point de vue à celui qui y est développé. Dans la troisième partie, on donne la définition des ensembles de cohomologie considérés, dans la situation très générale d'objets d'un topos, en étendant ce qui avait été fait dans [**9**] pour la cohomologie à valeurs dans un module croisé. Le cadre dans lequel on se place est celui de la catégorie dérivée des objets simpliciaux d'un topos, tel qu'il a été développé par L. Illusie dans [**23**], et indépendamment, dans le contexte de catégories de faisceaux sur un espace topologique, par K. Brown [**13**]. Nous passons rapidement au cas particulier du topos des faisceaux étales sur un schéma Spec(k) associé à un corps k. On sait que la cohomologie correspondante n'est autre que la cohomologie galoisienne de k, et on se trouve donc alors dans le contexte considéré dans [**28**]. La traduction entre les 0ième ensembles de cohomologie de [**28**] et ceux étudiés ici est le principal résultat de ce texte.

La dernière partie de ce travail est consacrée à différentes généralisations actuelles (ou futures) de la notion d'ensemble croisé et de ses analogues catégoriques. Divers ensembles et groupes de cohomologie plus ou moins abélienne, à valeurs dans les structures en question, y sont également décrits. Il s'agit là d'un sujet que nous avons déja abordé à diverses reprises, notamment dans **[9]**, **[10]** et **[11]**, mais il nous a paru utile d'en rassembler ici pour la commodité du lecteur divers éléments, car ceci nous permet de replacer les notions abordées au §B.3 dans un contexte plus large.

Je remercie Jean-Pierre Labesse, et le referee, pour leurs commentaires concernant une version préliminaire de ce texte.

B.1. Ensembles croisés et ensembles simpliciaux

Commençons par rappeler quelle est la définition d'un ensemble croisé, mais avec des notations légèrement différentes de celles de **[28]** I.1.1.

Définition B.1.1. — On appelle ensemble croisé la donnée d'un ensemble X, d'un groupe A et d'un ensemble B, munis de trois flèches

$$B \xrightarrow{\rho} A \times X \qquad A \times X \xrightarrow{\lambda} X \qquad A \times B \xrightarrow{\mu} B$$

telles que

i) $A \times X \longrightarrow X$ définit une action $(a, x) \mapsto ax$ de A sur X. On note A_x le stabilisteur de x dans A.

ii) Les fibres de l'application composée

$$B \xrightarrow{\rho} A \times X \longrightarrow X$$

sont des groupes B_x.

iii) La flèche ρ induit dans chaque fibre au dessus de $x \in X$ un homomorphisme

$$\rho_x : B_x \longrightarrow A_x \subset A$$

iv) $A \times B \xrightarrow{\mu} B$ définit une action

$$(a, b) \longmapsto {}^a b$$

de A sur B compatible à la structure de groupe sur chaque B_x : $\mu(a)$ définit un isomorphisme de B_x sur B_{ax}. En particulier, la restriction de μ à A_x détermine, pour tout $x \in X$, un homomorphisme

$$\mu_x : A_x \longrightarrow \mathrm{Aut}(B_x)$$

satisfaisant aux compatibilités suivantes :
v) pour tout b et β dans B_x, ${}^{\rho_x(\beta)}b = \beta b \beta^{-1}$.

vi) $\rho_{\alpha x}({}^\alpha b) = \alpha \rho_x(b) \alpha^{-1}$.

On désigne par

$$[B \xrightarrow{\rho} A \times X \xrightarrow{\lambda} X] \tag{1.1}$$

l'ensemble croisé en question.

Une variante plus restrictive de la notion d'ensemble croisé est obtenue en convenant que les groupes B_x et les actions $\mu_x : A_x \longrightarrow \mathrm{Aut}(B_x)$ de *loc. cit.* I.1 ne dépendent pas de l'élément $x \in X$. Si l'on pose $D = B_x$ pour tout $x \in X$, l'ensemble croisé (1.1) prend alors la forme

$$D \times X \xrightarrow{(\rho_x, 1)} A \times X \longrightarrow X \ .$$

Dans ce cas on le notera alors plutôt

$$[D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X] \tag{1.2}$$

et l'on dira, comme dans **[28]**, que le diagramme (1.2) est un ensemble croisé à fibres constantes (e.c.f.c.). Ici la double flèche de droite rappelle que A agit sur X, tandis que la notation adoptée pour la flèche de gauche signifie qu'elle désigne une famille de flèches de D vers A indexées par les éléments de l'ensemble X. Un élément de D sera généralement noté b, ou β, en conformité avec **[28]**, où c'est l'ensemble $B = D \times X$, et non le facteur D, qui est mis en avant.

Nous allons maintenant associer à un e.c.f.c. (1.2) un ensemble simplicial tronqué en degré 3, noté $\mathcal{X}_{\leq 3}$, dont les composantes sont définies de la manière suivante :

$$\mathcal{X}_k = \begin{cases} X & k = 0 \\ X \times A & k = 1 \\ X \times D \times A^2 & k = 2 \\ X \times D^3 \times A^3 & k = 3 \end{cases} \tag{1.3}$$

Ainsi, $\mathcal{X}_{\leq 3}$ est de la forme suivante[(1)]

$$X \times D^3 \times A^3 \mathrel{\substack{\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow}} X \times D \times A^2 \mathrel{\substack{\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow\\[-0.6ex]\textstyle\rightarrow}} X \times A \rightrightarrows X \tag{1.4}$$

(1)Les opérateurs de dégénérescence seront toujours omis dans la représentation des objets simpliciaux.

Les opérateurs face et dégénérescence issus de la composante $\mathcal{X}_k$ de degré k de $\mathcal{X}$ sont définis par les formules suivantes :

$$
(1.5)\quad
\begin{cases}
k=0: & s_0(x) = (x,1) \\[2ex]
k=1: & d_i(x,a) = \begin{cases} a^{-1}x & i=0 \\ x & i=1 \end{cases} \\[2ex]
 & s_i(x,a) = \begin{cases} (x,1,1,a) & i=0 \\ (x,1,a,1) & i=1 \end{cases} \\[2ex]
k=2: & d_i(x,b,a_0,a_1) = \begin{cases} (a_0^{-1}x, a_1) & i=0 \\ (x, \rho_x(b)^{-1}a_0\,a_1) & i=1 \\ (x,a_0) & i=2 \end{cases} \\[2ex]
 & s_i(x,b,a_0,a_1) = \begin{cases} (x,1,b,b,1,a_0,a_1) & i=0 \\ (x,1,b,1,a_0,1,a_1) & i=1 \\ (x,b,1,1,a_0,a_1,1) & i=2. \end{cases}
\end{cases}
$$

Enfin, les opérateurs face issus de la composante de degré 3 de $\mathcal{X}$ sont définis par les formules suivantes :

(1.6)

$$
d_i(x,b_0,b_2,b_3,a_0,a_1,a_2) = \begin{cases}
(a_0^{-1}x, b_3, a_1, a_2) & i=0 \\[2ex]
(x,\ b_2,\ \rho_x(b_0)^{-1}a_0\,a_1, a_2) & i=1 \\[2ex]
(x,\ ({}^{a_0}b_3)^{-1}b_0\,b_2,\ a_0,\ \rho_{a_0^{-1}x}(b_3)^{-1}a_1a_2) & i=2 \\[2ex]
(x,b_0,a_0,a_1) & i=3\ .
\end{cases}
$$

Ces opérateurs face et dégénérescence satisfont aux identités simpliciales ([**29**] définition 1.1) comme on le vérifie en faisant appel aux axiomes *(i)-(vi)* de la définition B.1.1. La construction dite du cosquelette ([**1**] §1) associe à l'ensemble simplicial tronqué $\mathcal{X}_{\leq 3}$ un ensemble simplicial $\mathcal{X} := cosq_3\,(\mathcal{X}_{\leq 3})$ qui satisfait à la condition de Kan ([**29**] définition 1.3). Dans ce cas, une formule simple ([**23**] I (2.1.1.1)) détermine les groupes d'homotopie $\pi_i(\mathcal{X},x)$ relatifs à un point base $x \in X$. On vérifie que ceux-ci coincident, pour $i \leq 2$, avec les groupes d'homotopie du complexe croisé correspondant ([**28**] I.1). Ils sont nuls pour $i > 2$ puisque $\mathcal{X}$ est identifié à son cosquelette $cosq_3\,(\mathcal{X}_{\leq 3})$, ce qui démontre la proposition suivante :

Proposition B.1.2. — *La construction précédente associe fonctoriellement à un e.c.f.c. (1.2) un ensemble simplicial $\mathcal{X}$, dont les groupes d'homotopie $\pi_i(\mathcal{X},x)$ coincident pour $i \leq 2$ avec les groupes d'homotopie correspondant de l'ensemble croisé, et sont nuls pour $i \geq 3$.*

Variantes

i) La situation la plus élémentaire est celle où $A = D = 1$. Dans ce cas, $\mathcal{X}$ est l'objet simplicial constant, dont la composante en chaque degré est l'ensemble X, les opérateurs d_i et s_i étant les applications identité.

ii) Si l'on suppose simplement que $D = 1$, alors $\mathcal{X}$ est le nerf de la catégorie (en fait du groupoïde) $[X, A]$, définie par l'action à droite du groupe A sur l'ensemble X déduite de l'action à gauche donnée. L'ensemble des objets de cette catégorie est l'ensemble X lui-même, une flèche

$$x \xrightarrow{(x,a)} a^{-1}x \tag{1.7}$$

de source x et de but $a^{-1}x$ étant déterminée par un élément $(x, a) \in X \times A$. La composée

$$x \xrightarrow{(x,a)} a^{-1}x \xrightarrow{(a^{-1}x,a')} a'^{-1}a^{-1}x \tag{1.8}$$

de deux telles flèches composables est notée (x, aa') tandis que $(x, 1)$ désigne le morphisme identité de l'objet x. Pour alléger la notation, une flèche (x, a) (1.7) sera simplement représentée par

$$x \xrightarrow{a} a^{-1}x \ .$$

Le nerf du groupoïde $[X, A]$ est l'ensemble simplicial $\mathcal{X}$ dont la composante de degré 0 est X, tandis que celles de degré i sont définies pour tout $i \geq 1$, par la formule

$$\mathcal{X}_i = X \times A^i \ .$$

Un groupoïde $\mathcal{C}$ est de ce type dès que l'on suppose que l'ensemble $\mathcal{C}_x = \mathrm{Fl}_{\mathcal{C}}(x, -)$ de ses flèches de source $x \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}$ est indépendant du choix de l'objet x en question. Dans ce cas, la composition des flèches définit sur l'ensemble $A = \mathcal{C}_x$ une structure de groupe, et $\mathcal{C}$ s'identifie à $[X, A]$. Lorsque l'ensemble X est réduit à un point, et que le groupe D est également trivial, la catégorie $[*, A]$ a pour nerf l'espace classifiant du groupe A, généralement noté BA.

iii) Supposons que l'ensemble X est réduit à un point, c'est-à-dire que l'on considère un ensemble croisé

$$[D \xrightarrow{\rho} A \Longrightarrow \{*\}] \tag{1.9}$$

déterminé par un module croisé $\rho : D \longrightarrow A$, placé en degrés 1 et 2. Une première manière d'associer un objet simplicial à ce module croisé ρ est de considérer ce dernier comme étant au contraire concentré en degrés 0 et 1. Il en résulte alors, par oubli de structure, une action à gauche via ρ du groupe D sur l'ensemble sous-jacent à A.

L'action à droite induite détermine un ensemble simplicial[2] $[A, D]$. La structure oubliée de module croisé détermine sur cet ensemble une structure de groupe simplicial, notée $\mathcal{G}$.

Cette construction préliminaire étant effectuée, l'ensemble simplicial associé au complexe croisé (1.9) peut être défini comme l'espace classifiant $B\mathcal{G}$ du groupe simplicial $\mathcal{G}$. Le foncteur « classifiant » B correspond en effet, au niveau des ensembles simpliciaux, à l'opération souhaitée au niveau des complexes, qui translate d'un cran vers la gauche le complexe $D \longrightarrow A$ de longueur 1. Il s'applique terme à terme à chacune des composantes $\mathcal{G}_k$ de $\mathcal{G}$ et produit donc un ensemble bisimplicial. L'ensemble simplicial diagonal associé $\Delta B\mathcal{G}$ (**[8]** appendix B), est une variante de l'ensemble simplicial tronqué

$$D^3 \times A^3 \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; D \times A^2 \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; A \;\substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow}\; \{*\} \tag{1.10}$$

déduit de (1.3) en supposant que l'ensemble X est réduit à un point. Pour une autre variante de cette construction, voir **[9]** 3.11.

iv) Si l'on suppose dans la situation précédente que le terme A du module croisé considéré est trivial, alors le groupe D est automatiquement commutatif, et cette construction associe un groupe abélien simplicial au complexe constitué par le groupe D placé en degré 2. Celui-ci est un groupe abélien simplicial d'Eilenberg-Mac Lane $K(D, 2)$. Il peut s'obtenir directement par la construction de Dold-Kan (**[23]** I 1.3), qui asssocie un groupe abélien simplicial à n'importe quel complexe de groupes abéliens.

v) Soit

$$D \xrightarrow{\rho} A \xrightarrow{\sigma} G$$

un module croisé généralisé de longueur 2 au sens de **[18]**. Celui-ci consiste en la donnée d'un complexe de groupes de longueur 2 pour lequel les flèches ρ et σ sont équivariantes relativement à des actions données de G sur D et A (G agissant sur lui-même par conjugaison). On se donne également une application

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & D \\ (a_0, a_1) & \longmapsto & \{a_0, a_1\} \end{array} \tag{1.11}$$

satisfaisant à des conditions appropriées **[18]** (2.10). Une construction de type Dold-Kan dans un cadre non abélien fait correspondre à ce module croisé généralisé de longueur 2 un groupe simplicial $\mathcal{K}$. Le module croisé généralisé de longueur 2 détermine par oubli de structure un e.c.f.c

$$[D \underset{G}{\longrightarrow} A \Longrightarrow G]$$

[2] On identifie désormais une catégorie à son nerf.

dans lequel l'application (1.11) n'intervient plus, la structure de groupe de G ne servant qu'à définir l'action par translation de A sur G. Ceci est un ensemble croisé en groupes au sens de **[28]** I.1, pour lequel l'action de A sur G est définie via l'homomorphisme de A vers G par translation à gauche. L'ensemble simplicial (1.3) associé à cet ensemble croisé n'est autre que l'ensemble simplicial sous-jacent au groupe simplicial $\mathcal{K}$. La correspondance de type Dold-Kan non abélienne entre les modules croisés généralisés de longueur 2 et les groupes simpliciaux $\mathcal{K}$ pour lesquels les groupes d'homotopie $\pi_k(\mathcal{K})$ sont nuls lorsque $k \geq 3$ a été étendue dans **[17]** en une correspondance entre les groupes simpliciaux et des complexes de groupes de longueur quelconque, munis de structures supplémentaires analogues aux applications (1.11).

vi) Indiquons brièvement la manière dont cette construction d'un ensemble simplicial à partir d'un e.c.f.c. se prolonge au cas général d'un ensemble croisé (1.1). Les deux premières composantes de l'ensemble simplicial correspondant $\mathcal{X}$ (1.3) sont inchangées, tandis que la composante $\mathcal{X}_2$ est maintenant définie par

$$\mathcal{X}_2 = B \times A^2$$

Enfin, la composante $\mathcal{X}_3$ est constituée de sextuplets $(b_0, b_2, b_3, a_0, a_1, a_2)$ où b_0 et b_2 vivent dans la fibre B_x de la projection $B \longrightarrow X \times A \longrightarrow X$ au dessus de $x \in X$, tandis que b_3 est un élément de $B_{a_0^{-1}x}$. Les formules définissant les opérateurs face et dégénérescence sont essentiellement inchangées, pourvu que l'on considère qu'une expression (x, b, a_0, a_1) (1.5) (*resp.* $(x, b_0, b_2, b_3, a_0, a_1, a_2)$ (1.6)) désigne un terme (b, a_0, a_1) avec $b \in B_x$ (*resp.* un sextuplet du type mentionné plus haut). A titre d'exemple l'opérateur face d_2 (1.6) devient

$$d_2(b_0, b_2, b_3, a_0, a_1, a_2) = \left(({}^{a_0}b_3)^{-1} b_0\, b_2,\ a_0,\ \rho_{a_0^{-1}x}(b_3)^{-1} a_1 a_2 \right) .$$

La proposition B.1.2 reste valable dans cette situation. Cependant, nous n'expliciterons pas dans ce qui suit les groupes variables B_x dans lesquels vivent les élément b_i considérés, c'est-à-dire que nous considérerons principalement le cas des e.c.f.c.

B.2. Ensembles croisés et 2-catégories

Les formules algébriques définissant l'ensemble simplicial associé à l'e.c.f.c. (1.2) sont peu lisibles, et le seraient encore moins si l'on s'intéressait à des complexes de longueur supérieure. Il est donc préférable d'associer à un tel ensemble croisé un objet de nature catégorique, qui peut donc être représenté par des objets et des flèches, et dont le nerf sera l'objet simplicial $\mathcal{X}$ en question. C'est ce qui a été fait plus haut lorsque l'on a associé à l'ensemble croisé $[1 \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X]$ la catégorie $[X, A]$ dont les flèches sont décrites comme en (1.7), munies de la loi de composition (1.8). La structure catégorique correspondant à un e.c.f.c. (1.2) est celle d'une 2-catégorie[3] $\mathcal{C}$,

[3] On renvoie à **[27]** pour la définition et les propriétés élémentaires des 2-catégories.

dont le nerf (au sens de **[31]** §2) est l'ensemble simplicial $\mathcal{X}$ (1.3). La 2-catégorie $\mathcal{C}$ considérée ici est constituée d'un ensemble d'objets X, de 1-flèches entre les objets définies comme en (1.7), et composées de la même manière. Enfin, tout quadruplet (x, b, a_0, a_1), élément de la composante $\mathcal{X}_2 = X \times D \times A^2$ de degré 2 de $\mathcal{X}$ (1.3) détermine, comme il résulte des formules (1.5), une 2-flèche[4]

(2.1)
$$\begin{tikzcd}
 & a_0^{-1}x \arrow[dr, "a_1"] & \\
x \arrow[ur, "a_0"] \arrow[rr, "\rho_x(b)^{-1}a_0a_1"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "b\Uparrow"] & & a_1^{-1}a_0^{-1}x\ .
\end{tikzcd}$$

On dira qu'un tel quadruplet est trivial lorsque $b = 1$. Si l'on convient que toute 2-flèche de $\mathcal{C}$ est inversible (en rajoutant formellement des inverses aux 2-flèches précédentes) et que l'on néglige les 2-flèches dégénérées de type $(x, 1, 1, a)$, correspondant aux 2-flèches triviales

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "a"] & \\
x \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "a"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "1\Uparrow"] & & a^{-1}x
\end{tikzcd}$$

on trouve qu'une 2-flèche

(2.2)
$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & a^{-1}x
\end{tikzcd}$$

entre deux paires de 1-flèches (x, a), (x, a') de mêmes objets source et but est décrite par un quadruplet de type $(x, b, 1, a')$, sa source (x, a) étant déterminée par l'équation

(2.3)
$$\rho_x(b)a = a'\ .$$

Par l'axiome (*iii*) de la définition B.1.1, les deux flèches (x, a) et (x, a') ont bien le même but. On dira simplement dans ce cas que la 2-flèche (2.2) est décrite par le triplet (x, b, a').

De fait, les 2-catégories obtenues ici sont d'un type particulier, dans la mesure où toutes les 1- et 2-flèches sont inversibles. En ce qui concerne les 2-flèches, c'est le cas par construction. Quant à l'invertibilité des 1-flèches, elle est assurée par la paire de quadruplets triviaux $(x, 1, a, a^{-1})$ et $(a^{-1}x, 1, a^{-1}, a)$, qui font respectivement de la flèche $(a^{-1}x, a^{-1})$ un inverse à droite et à gauche de (x, a), à une 2-flèche triviale près. Les 2-catégories possédant de telles propriétés d'invertibilité pour les 1- et 2-flèches

[4] Dans le cas plus général d'un ensemble croisé (1.1), le groupe D_x dans lequel vit l'élément b est déterminé par l'objet source x du diagramme (2.1).

sont appelées des 2-groupoïdes. Si on néglige les 2-flèches décrites par les quadruplets triviaux, alors les 1-flèches deviennent strictement inversibles (et non plus simplement à une 2-flèche près). On est dans ce cas en présence d'un 2-groupoïde au sens le plus usuel (voir par exemple [**31**]).

Les axiomes [**27**] auxquels sont astreintes les 2-catégories sont bien satisfaits par la 2-catégorie $\mathcal{C}$ ainsi construite. En particulier, les compositions dites « verticales » et « horizontale » de 2-flèches sont aisément décrites. La composée « verticale » de la paire de flèches verticalement composables (x, b', a'') et (x, b, a')

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=50, "a"] \arrow[rr, "a'" near start] \arrow[rr, bend right=50, "a''"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow b"] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow b'"] & & a^{-1}x \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

est la 2-flèche

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=30, "a"] \arrow[rr, bend right=30, "a''"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow b'b"] & & a^{-1}x \end{tikzcd}$$

déterminée par le triplet $(x, b'\,b, a'')$. De même, la composée « horizontale » de la paire de flèches horizontalement composables

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=30, "a_1"] \arrow[rr, bend right=30, "a_1'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow b"] & & a_1^{-1}x \arrow[rr, bend left=30, "a_2"] \arrow[rr, bend right=30, "a_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow b'"] & & a_2^{-1}a_1^{-1}x \end{tikzcd}$$

est la flèche

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left=20, "a_1a_2"] \arrow[rr, bend right=20, "a_1'a_2'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow ({}^{a_1'}b')b"] & & (a_1a_2)^{-1}x \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

décrite par $(x,\ {}^{a_1'}b'\,b,\ a_1'a_2')$. L'axiome *(vi)* de la définition B.1.1 est utilisé pour démontrer que la formule

$$\rho_x({}^{a_1'}b'\,b)\,a_1a_2 = a_1'a_2'$$

est satisfaite, comme l'exige l'équation (2.3).

Remarques

i) Les 2-groupoïdes obtenus ici sont d'un type quelque peu particulier, dans la mesure où l'ensemble des 2-flèches (x, b, a') de but une 1-flèche donnée (x, a') est en bijection avec l'ensemble sous-jacent au groupe D, et ne dépend donc pas de la 1-flèche en question. La composition verticale de 2-flèches de but la 1-flèche identité détermine sur cet ensemble une structure de groupe, en associant à la paire de 2-flèches de but 1_x

$$(2.6)\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\rho_x(b)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\rho_x(b')^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b'"] & x \end{tikzcd}$$

la 2-flèche suivante, obtenue par composition verticale des triplets $(x, b', 1)$ et $(x, b, \rho_x(b')^{-1})$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "\rho_x(b'b)^{-1}"] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60, "1"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow b"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow b'"] & x \end{tikzcd} .$$

Puisque cette 2-flèche est de la forme $(x, b' * b, 1)$, elle détermine bien une loi de composition $*$ sur D qui ne dépend essentiellement pas du choix de l'objet x et qui coincide avec la loi de groupe de D lorsque celle-ci a été antérieurement donnée. Les ensembles croisés de **[28]** correspondent à une situation un peu plus générale, dans laquelle l'ensemble B_x de 2-flèches (2.6) de but 1_x dépend de l'objet x considéré, tandis que l'ensemble des 1-flèches de source x en est indépendant.

ii) Dans la situation examinée ici, l'action μ du groupe A sur le groupe D peut également être interprétée en termes catégoriques. Soit b un élément du groupe D, auquel correspond une 2-flèche (2.6) de but l'application identité 1_x. Pour tout $a \in A$, la 2-flèche

$$(2.7)\qquad \begin{tikzcd} a^{-1}x \arrow[r, "a"] & x \arrow[r, bend left, "\rho_x(b)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & x \arrow[r, "a^{-1}"] & a^{-1}x \end{tikzcd}$$

obtenue en composant la première 2-flèche (2.6) à gauche et à droite avec des 2-flèches identité, a pour but l'application identité $1_{a^{-1}x}$. Elle est donc définie par un triplet $(a^{-1}x,\ {}^{a}b, 1)$, pour un élément ${}^{a}b$ de D. Le diagramme (2.7) montre que la source de cette 2-flèche est bien $(a^{-1}x, {}^{a}\rho_x(b)^{-1})$, comme le requiert l'axiome *(vi)* de la proposition B.1.1. De la même manière, l'axiome *(v)* affirme que la 2-flèche composée

$$(2.8)\qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\rho_x(\beta)"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta^{-1}"] & x \arrow[r, bend left, "\rho_x(b)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & x \arrow[r, bend left, "\rho_x(\beta)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & x \end{tikzcd}$$

coincide avec la 2-flèche de type (2.7)

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\rho_x(\beta)"] & x \arrow[r, bend left, "\rho_x(b)^{-1}"] \arrow[r, bend right, "1_x"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b"] & x \arrow[r, "\rho_x(\beta)^{-1}"] & x
\end{tikzcd}
\tag{2.9}
$$

Ceci se démontre de manière catégorique en composant verticalement le diagramme (2.8) avec la 2-flèche

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "\rho_x(\beta)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & x \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1"] & x \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[r, bend right, "\rho_x(\beta)^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta^{-1}"] & x
\end{tikzcd}
\tag{2.10}
$$

(cette dernière est d'ailleurs triviale puisque la composition horizontale annule la paire de 2-cellules opposées β, β^{-1}). On obtient alors un diagramme

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
x \arrow[r, bend left=50, "\rho_x(\beta)"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=50, "\rho_x(\beta)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta^{-1}"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & x \arrow[r, bend left=50, "\rho_x(b)^{-1}"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=50, "\rho_x(b)^{-1}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow b"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow 1"] & x \arrow[r, bend left=50, "\rho_x(\beta)^{-1}"] \arrow[r, "1"] \arrow[r, bend right=50, "\rho_x(\beta)^{-1}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta^{-1}"] & x
\end{tikzcd}
\tag{2.11}
$$

En effectuant les compositions verticales[5], on retrouve bien la 2-flèche composée (2.9).

B.3. Cohomologie galoisienne des ensembles croisés

Soient T un topos et $D(T)$ la catégorie dérivée des objets simpliciaux de T (**[23]** I, ch. 1, déf. 2.3.5). Dans le cas du topos ponctuel (Ens) cette catégorie dérivée est simplement la catégorie homotopique, obtenue à partir de la catégorie des ensembles simpliciaux, en inversant formellement les équivalences d'homotopie faibles, c'est-à-dire les morphismes qui induisent des isomorphismes au niveau des groupes d'homotopie. Dans le cas des objets simpliciaux d'un topos quelconque T, la définition est la même, à ceci près qu'elle prend en compte la définition des faisceaux d'homotopie d'un faisceau simplicial, plus subtile dans le cas général que dans le cas ensembliste.

Une manière très générale de définir la cohomologie à valeurs dans un objet simplicial $\mathcal{X}$ de T est de poser

$$H^0(e, \mathcal{X}) = Hom_{D(T)}(e, \mathcal{X}) \tag{3.1}$$

[5] Dans un diagramme tel que (2.11) d'une 2-catégorie, l'axiome dit de l'interchange permet d'effectuer les compositions horizontales de 2-flèches avant ou après les compositions verticales, sans que le résultat final en soit affecté.

où l'on a identifié à droite $\mathcal{X}$ avec l'objet qu'il détermine dans $D(T)$, et où e est l'objet final de T, vu comme objet simplicial constant. On définit les groupes de cohomologie en tout degré i négatif en posant

$$H^{-i}(e,\mathcal{X}) = H^0(e,\Omega^i\mathcal{X}) \tag{3.2}$$

où Ω est le foncteur «espaces de lacets». Cette définition, qui couvre tous les cas envisageables, se ramène notamment dans les situations mentionnées au §1 à diverses définitions de la cohomologie abélienne ou non abélienne. Lorsque l'objet simplicial $\mathcal{X}$ provient, par le procédé décrit au §1, d'un e.c.f.c.

$$[D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X]$$

(1.2) de T, on posera, pour tout $i \geq 0$,

$$H^{-i}(e,\, D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X) = H^{-i}(e,\mathcal{X}) \ . \tag{3.3}$$

De même, cette expression sera notée

$$H^{-i}(e,\, B \longrightarrow A \times X \Rightarrow X) \tag{3.4}$$

lorsque l'on part d'un ensemble croisé quelconque (1.1). Il n'est pas en général possible de définir des ensembles de cohomologie de degré positifs à valeurs dans un tel ensemble croisé.

Le terme de droite de (3.1) s'exprime concrètement comme la limite inductive, lorsque e' parcourt les hyper-recouvrements de e

$$H^0(\mathcal{X}) = \operatorname{colim}\ [e',\mathcal{X}] \tag{3.5}$$

des classes d'homotopie d'applications du nerf de e' à valeurs dans l'objet simplicial $\mathcal{X}$. Le cas qui nous intéresse dorénavant est celui où $T = \operatorname{Spec}(k)_{ét}$ est le topos des faisceaux pour la topologie étale au-dessus du schéma $\operatorname{Spec}(k)$ associé à un corps k de clôture séparable k_s. On sait ([**30**] II théorème 1.9) qu'il existe une équivalence

$$\mathrm{Fais}_k \simeq (\Gamma - \mathrm{ens}) \tag{3.6}$$

entre la catégorie des faisceaux sur le petit site étale de $\operatorname{Spec}(k)$ et la catégorie $(\Gamma - \mathrm{ens})$ des ensembles munis de la topologie discrete, et sur lesquels le groupe de Galois profini $\Gamma = \operatorname{Gal}(k_s/k)$ agit à gauche de manière continue. Cette équivalence fait correspondre à un faisceau F le Γ-ensemble $F(k_s)$ de ses sections sur $\operatorname{Spec}(k_s)$. Par le biais de cette correspondance, un e.c.f.c. (1.2) de T s'identifie à un e.c.f.c.

$$[\ D(k_s) \underset{X(k_s)}{\longrightarrow} A(k_s) \Longrightarrow X(k_s)\ ]$$

de $(\Gamma - \mathrm{ens})$, c'est-à-dire un ensemble croisé du type étudié dans [**28**].

Comme il est bien connu, l'équivalence de catégories (3.6) implique que la cohomologie d'un objet F de la catégorie Fais_k s'identifie à la cohomologie galoisienne du Γ-objet associé $F(k_s)$. Pour le démontrer, on commence par observer qu'il est inutile, dans le contexte présent, d'avoir recours aux hyper-recouvrements. Le nerf du recouvrement $\mathcal{U}$ à un seul élément(6)

$$\operatorname{Spec}(k_s) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k) \tag{3.7}$$

de l'objet final $e = \operatorname{Spec}(k)$ de T s'identifie à l'objet simplicial $E\Gamma$ de $(\Gamma - \text{ens})$

$$\Gamma^4 \mathrel{\substack{\longrightarrow\\[-1ex]\longrightarrow\\[-1ex]\longrightarrow\\[-1ex]\longrightarrow}} \Gamma^3 \mathrel{\substack{\longrightarrow\\[-1ex]\longrightarrow\\[-1ex]\longrightarrow}} \Gamma^2 \rightrightarrows \Gamma$$

muni de l'action diagonale à gauche par translation de Γ. Les opérateurs face sont définis par la règle

$$d_i(\gamma_0, \dots, \gamma_r) = (\gamma_0, \dots, \widehat{\gamma_i}, \dots, \gamma_r)$$

tandis que l'opérateur de dégénérescence $s_i(\gamma_0, \dots, \gamma_r)$ répète la variable γ_i. La formule (3.5) affirme que pour tout objet simplicial $\mathcal{X}$ de Fais_k, l'ensemble $H^0_{et}(\operatorname{Spec}(k), \mathcal{X})$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopies d'applications simpliciales continues Γ-équivariantes

$$E\Gamma \longrightarrow \mathcal{X}(k_s) \tag{3.8}$$

Le cas usuel est celui où l'ensemble simplicial de départ X est le groupe abélien simplicial d'Eilenberg-Mac Lane $K(A, n)$ associé à un groupe abélien A de Fais_k. On retrouve alors l'assertion bien connue **[30]** III §2 suivant laquelle la cohomologie étale de $\operatorname{Spec}(k)$ à valeurs dans le faisceau abélien A s'identifie à celle du complexe de cochaines équivariantes continues $\operatorname{Hom}_\Gamma(E\Gamma, A(k_s))$. Puisqu'une telle cochaine $f(\gamma_0, \dots, \gamma_r)$ est déterminée par l'application associée $\tilde{f}$ définie par la formule

$$\tilde{f}(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = f(1, \gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \dots, \gamma_1 \cdots \gamma_r)\,, \tag{3.9}$$

ce complexe s'identifie au complexe des cochaines inhomogènes continues de Γ à valeurs dans le Γ-module $A(k_s)$ (**[30]** III example 2.6, **[32]** VII §3). On obtient ainsi l'identification souhaitée

$$H^0_{ét}(\operatorname{Spec}(k), K(A, n)) = H^n_{ét}(\operatorname{Spec}(k), A) = H^n(\Gamma, A(k_s)).$$

Le cas qui nous intéresse ici est celui où $\mathcal{X}$ est l'ensemble simplicial de Fais_k associé à un e.c.f.c. L'ensemble $H^0_{ét}(\operatorname{Spec}(k), \mathcal{X})$ s'identifie alors à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications (3.8) Γ-équivariantes. La proposition suivante, énoncée pour les e.c.f.c., demeure valable pour les ensembles croisés quelconques.

Proposition B.3.1. — *Soit*

$$[D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X]$$

(6)En fait, il convient plutôt de raisonner sur les recouvrements $\operatorname{Spec}(K) \longrightarrow \operatorname{Spec}(k)$, où K/k est une extension de corps finie, et de passer à la limite.

un e.c.f.c. (1.2) de la catégorie Fais_k *des faisceaux sur un corps k pour la topologie étale. Alors il existe une bijection*

$$H^0_{\acute{e}t}(\mathrm{Spec}(k), D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X) \longrightarrow \mathbf{H}^0(\Gamma;\ D(k_s) \underset{X(k_s)}{\longrightarrow} A(k_s) \Longrightarrow X(k_s)\ )$$

le second terme désignant l'ensemble des classes de cohomologie (au sens de **[28]***) du* $X(k_s)$*-ensemble*

$$[\ D(k_s) \underset{X(k_s)}{\longrightarrow} A(k_s) \Longrightarrow X(k_s)\ ]\ .$$

Démonstration. — Pour définir cette application au niveau des 0-cocycles il convient de partir, compte tenu de la discussion précédente, d'une application simpliciale Γ-équivariante

$$f : E\Gamma \longrightarrow \mathcal{X}(k_s) \tag{3.10}$$

à valeurs dans l'ensemble simplicial associé en (1.3) à l'ensemble croisé

$$[\ D(k_s) \underset{X(k_s)}{\longrightarrow} A(k_s) \Longrightarrow X(k_s)\ ].$$

La compatibilité de f aux opérateurs face implique que sa composante de degré 2 est de la forme

$$f_2(1,\, \sigma,\, \sigma\tau) \quad = \quad (x,\, b_{\sigma,\tau},\, a_\sigma,\, \sigma(a_\tau))$$

où $(x, a_\sigma, b_{\sigma,\tau})$ est un 0-cocycle, au sens de **[28]**, à valeurs dans l'e.c.f.c.

$$[\ D(k_s) \underset{X(k_s)}{\longrightarrow} A(k_s) \Longrightarrow X(k_s)\ ]$$

La compatibilité aux opérateurs de dégenérescence implique par ailleurs que les termes a_σ, $b_{\sigma,\tau}$ qui le constituent sont normalisés, c'est-à-dire que a_σ (*resp.* $b_{\sigma,\tau}$) est trivial dès que σ où τ l'est.

Supposons donnée une homotopie simpliciale $g \simeq f$ entre une paire d'applications simpliciales (3.10) définies respectivement par les 0-cocycles $(x',\, a'_\sigma,\, b'_{\sigma,\tau})$ et $(x,\, a_\sigma,\, b_{\sigma,\tau})$. Celle-ci est constituée pour tout q d'une famille d'applications équivariantes $h_i : (E\Gamma)_q \longrightarrow (\mathcal{X}(k_s))_{q+1}$ $(0 \leq i \leq q)$ satisfaisant à des identités appropriées **[29]** déf. 5.1. On définit un élément $\alpha \in A$ par l'équation

$$h_0(1) = (x, \alpha^{-1})\ . \tag{3.11}$$

Les identités en question impliquent que les applications h_0, $h_1 : (E\Gamma)_1 \longrightarrow (\mathcal{X}(k_s))_2$ sont de la forme

$$\begin{aligned} h_0(1,\sigma) &= (x,\, \beta_\sigma,\, \alpha^{-1},\, a'_\sigma) \\ h_1(1,\sigma) &= (x, \beta'_\sigma,\, a_\sigma,\, \sigma(\alpha)^{-1})\ . \end{aligned}$$

L'élément $\alpha \in A$ et la 1-cochaine $\tilde{b}_\sigma$ à valeurs dans D, où l'on a posé

$$\tilde{\beta}_\sigma = \beta_\sigma\, (\beta'_\sigma)^{-1}\ ,$$

expriment le fait que les 0-cocycles $(x,\, a_\sigma,\, b_{\sigma,\tau})$ et $(x',\, a'_\sigma,\, b'_{\sigma,\tau})$ sont cohomologues, une fois démontrée la relation

$$b'_{\sigma,\tau} = {}^{\alpha}(\tilde{\beta}_\sigma{}^{a_\sigma}\sigma(\tilde{\beta}_\tau)\, b_{\sigma,\tau}\, \tilde{\beta}_{\sigma\tau}^{-1})$$

[28] 1.2 entre $b_{\sigma,\tau}$ et $b'_{\sigma,\tau}$. Nous en omettrons la vérification, qui s'effectue en considérant les applications $h_0,\, h_1,\, h_2 : (E\Gamma)_2 \longrightarrow (\mathcal{X}(k_s))_3$ et en explicitant les identités simpliciales qui leur correspondent.

Inversément, soit $(x,\, a_\sigma,\, b_{\sigma,\tau})$ un 0-cocycle normalisé. Par la propriété qui définit le cosquelette, une application simpliciale Γ-équivariante associée $f : E\Gamma \longrightarrow \mathcal{X}(k_s)$ est entièrement déterminée par la donnée de ses composantes de degré ≤ 3. On sait que la composante f_r de degré r de l'application f est caractérisée par ses valeurs sur les éléments $(1, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) \in (E\Gamma)_r$. On pose

$$\begin{aligned}
f_0(1) &= x \\
f_1(1,\, \sigma) &= (x,\, a_\sigma) \\
f_2(1,\, \sigma,\, \sigma\tau) &= (x,\, b_{\sigma,\tau},\, a_\sigma,\, \sigma(a_\tau)) \\
f_3(1,\, \sigma,\, \sigma\tau,\, \sigma\tau\nu) &= (x,\, b_{\sigma,\tau},\, b_{\sigma\tau,\nu},\, \sigma(b_{\tau,\nu}),\, a_\sigma,\, \sigma(a_\tau),\, \sigma\tau(a_\nu))
\end{aligned}$$

et l'on vérifie que l'application ainsi définie est compatible aux opérateurs face et dégénérescence. Ceci nécessite notamment, vu la définition donnée plus haut de l'opérateur $d_1 : \mathcal{X}_3 \longrightarrow \mathcal{X}_2$, que la condition de cocycle

$$ {}^{a_\sigma}\sigma(b_{\tau,\nu})\, b_{\sigma,\tau\nu} = b_{\sigma,\tau}\, b_{\sigma\tau,\nu} \tag{3.12}$$

de [28] 1.2 soit satisfaite.

Il reste à montrer qu'une paire d'applications simpliciales f et g déterminées par une paires de cocycles normalisés $(x, a_\sigma, b_{\sigma,\tau})$ et $(x', a'_\sigma, b'_{\sigma,\tau})$ cohomologues sont homotopes, par une homotopie simpliciale equivariante. On suppose que les cocycles en question diffèrent par un cobord (α, β_σ) au sens de [28]. On définit alors l'opérateur sur la composante de degré 0 par la formule (3.11), et les opérateurs h_0 et h_1 sur celle de degré 1 par

$$h_i(1,\, \sigma) = \begin{cases} (x,\, \beta_\sigma,\, \alpha^{-1},\, a'_\sigma) & i = 0 \\ \\ (x,\, 1,\, a_\sigma,\, \sigma(\alpha)^{-1}) & i = 1\ . \end{cases} \tag{3.13}$$

Enfin, sur la composante de degré 2, on pose

$$h_i(1,\, \sigma,\, \tau) = \begin{cases} (x,\, \beta_\sigma,\, \beta_\sigma^{-1}({}^{\alpha^{-1}}b'_{\sigma,\tau})\, \beta_{\sigma\tau},\, b'_{\sigma,\tau},\, \alpha^{-1},\, a'_\sigma,\, \sigma(a'_\tau)) & i = 0 \\ \\ (x, 1, {}^{a_\sigma}\sigma(\beta_\tau) b_{\sigma,\tau},\, \sigma(\beta_\tau),\, a_\sigma,\, \sigma(\alpha)^{-1},\, \sigma(a'_\tau)) & i = 1 \\ \\ (x, \beta_{\sigma,\tau},\, 1,\, 1,\, a_\sigma, \sigma(a_\tau),\, \sigma\tau(\alpha)^{-1}) & i = 2 \end{cases}$$

et l'on vérifie que ces formules satisfont aux identitées simpliciales requises **[29]** déf. 5.1. □

En termes plus imagés, les applications f_1 et f_2 peuvent être respectivement représentées par les 1-simplexes

$$x \xrightarrow{a_\sigma} \sigma(x)$$

et les 2-simplexes

(3.14)
$$\begin{tikzcd}
& \sigma(x) \arrow[dr, "\sigma(a_\tau)"] \arrow[d, phantom, "b_{\sigma,\tau}\Uparrow"] & \\
x \arrow[ur, "a_\sigma"] \arrow[rr, "a_{\sigma\tau}"'] & {} & \sigma\tau(x)
\end{tikzcd}$$

déduits de (2.1), qui matérialisent respectivement les conditions

$$a_\sigma^{-1} x = \sigma(x) \qquad \rho_x(b_{\sigma,\tau}) = a_\sigma\, \sigma(a_\tau)\, a_{\sigma\tau}^{-1}$$

de **[28]**. Enfin la condition de cocycle (3.12) exprime la compatibilité entre elles des quatres faces de type (3.14) du tétraèdre

$$\begin{tikzcd}
& \sigma\tau\nu(x) & \\
\Rightarrow & \sigma(x) \arrow[u, "\sigma(a_{\tau\nu})"'] \arrow[dr, "\sigma(a_\tau)"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & \Rightarrow \\
x \arrow[uur, bend left, "a_{\sigma\tau\nu}"] \arrow[ur, "a_\sigma"] \arrow[rr, "a_{\sigma\tau}"'] & {} & \sigma\tau(x) \arrow[uul, bend right, "\sigma\tau(a_\nu)"']
\end{tikzcd}$$

correspondant respectivement aux éléments $b_{\sigma,\tau}$, $\sigma(b_{\tau,\nu})$, $b_{\sigma,\tau\nu}$ et (pour la face antérieure) $b_{\sigma\tau,\nu}$ du groupe D.

B.4. Complexes de longueur n et n-catégories

Pour étendre ce qui a été dit jusqu'ici à des situations plus générales, il convient de passer du contexte des 2-catégories à celui des n-catégories pour un entier n quelconque. La notion de n-catégorie n'est pas encore stabilisée, mais plusieurs définitions ont récemment été proposées **[3]**, **[5]**, **[34]**, dont on espère qu'elles fourniront des théories équivalentes[7] . On dispose de définitions explicites pour $n = 2$ **[27]** et $n = 3$ **[24]**. Les diagrammes 4-catégoriques de T. Trimble sont également cités, bien qu'ils ne soient pas publiés.

[7]Pour une discussion informelle de ces questions, voir **[4]**.

Même si la définition des n-catégories n'est pas encore entièrement connue, cette notion fournit un cadre conceptuel utile à la compréhension des complexes de groupes de longueur n. On peut s'en convaincre en considérant tout d'abord le cas élémentaire des complexes de longueur 0. Lorsque l'on passe de la notion d'ensemble (= 0-catégorie) à celle de catégorie, puis à celle de 2-catégorie, on voit progressivement se dégager le concept de groupe puis de groupe abélien. Il est en effet bien connu qu'une catégorie à un seul objet équivaut à la donnée du monoide M de ses flèches. La donnée d'une telle catégorie dont toutes les flèches sont inversibles, c'est-à-dire d'un groupoïde à un seul objet, correspond donc[(8)] à celle d'un groupe G. De la même façon, un 2-groupoïde qui ne possède qu'un seul objet $*$, et une seule 1-flèche 1_*, est entièrement décrit par le groupe B de ses 2-flèches $b : 1_* \longrightarrow 1_*$, pour la composition verticale (2.4). La loi de l'interchange (voir la note de bas de page 5) impose alors à la loi de groupe de B d'être abélienne. On peut être tenté d'examiner de la même manière pour tout n la structure révélée par un n-groupoïde ne possédant qu'un seul objet et une seule i-flèche pour chaque entier $i < n$. Dans ce cas, l'ensemble B des n-flèches est en fait à nouveau simplement muni d'une structure de groupe abélien et on n'obtient donc rien de nouveau. En termes topologiques, les constructions évoquées font successivement correspondre à un ensemble X l'ensemble simplicial constant qu'il définit, puis à un groupe G son espace classifiant BG, enfin à un groupe abélien B la famille des espaces d'Eilenberg-Mac Lane $K(B, n)$ pour tout entier $n > 1$, caractérisés comme les espaces dont l'unique groupe d'homotopie non trivial est le groupe abélien B en degré n.

On peut également décrire ces différentes structures en termes de complexes de groupes. A l'ensemble simplicial constant X correspond simplement l'ensemble X lui-même, placé en degré zéro, tandis qu'à l'espace classifiant BG du groupe G correspond le complexe $G \longrightarrow 1$ constitué de G placé en degré (homologique) 1, qui sera noté $G[1]$. Le théorème de Dold-Kan montre que $K(B, n)$ correspond pour $n > 2$ au complexe de groupes abéliens $B[n]$, constitué de B placé en degré n. Puisque X (*resp.* BG) ne sont que des ensembles simpliciaux, dépourvus de toute structure de groupe, il n'est pas possible de leur associer un objet classifiant « BX » (*resp.* « $BBG = K(G, 2)$ »). Il n'est donc pas licite de translater l'ensemble X vers la gauche, ni d'associer à un groupe G un complexe $G[n]$ concentré en degré $n > 1$, à moins que la loi de groupe de G ne soit abélienne.

La discussion précédente concernait les complexes concentrés en un seul degré. Le cadre des catégories permet de l'étendre au cas des complexes de longueur 1, en considérant les catégories munies de lois de groupe. Le cas le moins structuré est celui d'une catégorie $\mathcal{C}$ dépourvue de toute loi de groupe. Son nerf $N\mathcal{C}$ est un ensemble

(8) C'est d'ailleurs là l'origine de cette terminologie [**14**].

simplicial qui satisfait à la condition d'être isomorphe à son 1-cosquelette **[1]**, ce qui exprime en gros le fait qu'on ne dispose ici d'aucune n-flèche dès lors que $n > 1$. Lorsque $\mathcal{C}$ est un groupoïde, son nerf satisfait en outre à la condition d'extension de Kan **[29]**, ce qui nous assure (par une discussion analogue à celle de la proposition B.1.2, mais dans un cadre plus élémentaire) que ses groupes d'homotopie $\pi_n(N\mathcal{C})$ sont non nuls dès que $n > 1$ (voir **[23]** VI, remarque 2.6.2). On est alors en présence, sinon d'un « complexe d'ensembles » de longueur 1, du moins du graphe

$$X_1 \rightrightarrows X_0 \tag{4.15}$$

d'une relation d'équivalence sur l'ensemble X_0. Un exemple simple en a été donné par la catégorie $[X, A]$ (1.8) déterminée par l'action d'un groupe A sur un ensemble X, qui peut être notée

$$A \Longrightarrow X \tag{4.16}$$

afin de lui donner l'aspect d'un complexe de longueur 1.

La prochaine étape consiste à examiner ce qu'est une 2-catégorie[(9)] à un seul objet. On est alors, pourvu qu'on impose en outre à la 2-catégorie $\mathcal{C}$ en question d'être un 2-groupoïde, en présence d'un groupoïde monoidal à objets inversibles[(10)] $\mathcal{G}$, dont les objets (*resp.* les morphismes) sont les 1-flèches (*resp.* les 2-flèches) de $\mathcal{C}$. La loi de groupe

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$$

qui définit cette structure monoidale est déterminée par la composition des 1- et 2-flèches dans $\mathcal{C}$. Lorsque la loi de groupe de $\mathcal{G}$ est strictement associative, l'ensemble des objets de $\mathcal{G}$ est un groupe A, et celui des flèches issues de l'élément neutre de A en est un autre, noté D. Le complexe de groupes

$$D \longrightarrow A$$

défini par l'application but est muni d'une structure de module croisé, c'est-à-dire d'une action de A sur D satisfaisant à des conditions appropriées **[11]** (1.2.3). Le nerf de la 2-catégorie $\mathcal{C}$ est alors l'ensemble simplicial (1.10) ou l'une de ses variantes, et le complexe de groupes associé $D \longrightarrow A \longrightarrow 1$ n'est autre que (1.9).

Si l'on veut translater ce dernier complexe vers la gauche, il convient de munir le module croisé qui le définit de structures supplémentaires. Du point de vue catégorique, on doit maintenant considérer une tricatégorie (ou plutôt un trigroupoïde) $\mathcal{D}$ à un seul objet, et à une seule 1-flèche. Ceci correspond à la donnée d'une catégorie monoidale à objets inversibles $\mathcal{G}$, constituée des 2- et 3-flèches de $\mathcal{D}$, mais munie d'une

(9) ou plutôt une bicatégorie, c'est-à-dire que l'on n'impose pas à la loi de composition des 1-flèches d'être strictement associative, mais simplement associative à une 2-flèche près de manière cohérente.

(10) on dit également : une *gr*-catégorie.

structure de commutativité faible pour sa loi de groupe, appelée le tressage, et dont la définition est due à A. Joyal et R. Street [**25**]. En termes de modules croisés, ce tressage correspond à une application (1.11) satisfaisant à certaines conditions ([**18**] corollaire 2.9). On dit alors que le module croisé est tressé. A de tels modules tressés correspondent donc les complexes de groupes

$$D \longrightarrow A \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

concentrés en degré 2 et 3, dont la connaissance détermine celle du nerf de $\mathcal{D}$. Si l'on souhaite encore translater ce complexe d'un cran vers la gauche, on doit renforcer la commutativité de la loi de groupe de la catégorie $\mathcal{G}$ qui le définit. On est alors en présence d'une catégorie monoidale symétrique, appelée également parfois une catégorie de Picard lorsque les objets sont comme ici inversibles[11]. Le module croisé correspondant est alors dit stable [**18**]. Ces structures, qui permettent donc de définir un complexe translaté

$$D \longrightarrow A \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow 1$$

concentré en degré 3 et 4, sont discutées plus en détail dans [**11**] 1.2, 1.8. Un examen des invariants qui les classifient (voir *loc. cit.* 8.3) met en évidence le fait que la condition monoidale symétrique est optimale, et qu'elle permet, sans qu'il soit nécessaire de la renforcer encore, de définir des complexes $D \longrightarrow A$ de longueur 1 concentrés en n'importe quel paire de degrés successifs. Un exemple en est donné par le complexe stable $G^{sc} \longrightarrow G$ associé à un groupe algébrique réductif. La cohomologie à valeurs dans ce complexe est la cohomologie abélianisée du groupe G, due à Borovoi ([**7**], [**11**] ex. 1.9). Ce complexe est en fait un exemple de module croisé super-stable au sens de [**28**]. Une notion encore plus générale que celle de module croisé stable est celle de module croisé strict [**18**]. Ce sont les complexes concentrés en une paire de degrés succesifs qui sont quasi-isomorphes à des complexes de groupes abéliens. La catégorie de Picard qui correspond à un tel complexe est également dite stricte. La cohomologie à valeurs dans un module croisé stable est une theorie cohomologique extraordinaire, au sens des topologues, tandis que celle à valeurs dans un module croisé strict est l'hypercohomologie usuelle à valeurs dans le complexe de groupes abéliens qui correspond au module en question.

Alors qu'une seule condition de commutativité pouvait être imposée, dans le présent contexte, à un groupe abstrait, la discussion précédente a mis en évidence le fait que le passage d'une catégorie monoidale à une catégorie « stable », correspondant à un complexe de longueur 1 pouvant être indéfiniment décalé vers la gauche, s'effectuait en deux étapes. Le nombre de conditions indépendantes à imposer à une

[11] mais on prendra garde que cette terminologie ne coincide pas tout à fait avec celle de Deligne, qui dans [**22**] appelle catégorie de Picard ce que nous désignons par *gr*-catégorie.

n-catégorie $\mathcal{C}$ pour qu'elle devienne stable est $n+1$, chacune des conditions en question permettant de la décaler d'un cran vers la gauche, c'est-à-dire de passer du nerf de la n-catégorie $\mathcal{C}$ à son classifiant $B\mathcal{C}$. Nous achevons cet examen des complexes de groupes en passant en revue les résultats connus dans le cas $n = 2$. Les ensembles simpliciaux (satisfaisant à la condition d'extension de Kan) dont seul les trois premiers groupes d'homotopie sont non nuls correspondent aux 2-groupoïdes. Ils constituent le sujet principal de ce texte, la notion d'ensemble croisé étant comme on l'a vu plus haut un modèle un peu particulier du nerf d'un 2-groupoïde. Si l'on veut pouvoir décaler cet objet d'un cran vers la gauche, il convient de le munir d'une loi de groupe. Or, la notion de n-catégorie monoidale est en fait bien connue pour tout n, puisque les axiomes successifs par lesquels on détermine les conditions de cohérence supérieures pour l'associativité ont été mis en évidence depuis longtemps par J. Stasheff **[33]** sous le nom de structures A_∞. Le complexe de groupes de longueur 2 correspondant à un 2-groupoïde monoidal à objets inversibles pour lequel la loi de groupe est strictement associative a été introduit en **[18]** définition 2.2 sous le vocable de 2-module croisé. Si l'on veut translater d'un cran vers la gauche la 2-catégorie correspondante, il convient de lui rajouter la structure qui la ferait correspondre à une quadricatégorie à un seul objet et une seule 1-flèche. La structure supplémentaire en question a été introduite par Kapranov et Voevodsky **[26]** sous le nom de 2-catégorie tressée(12). Les deux conditions de commutativité encore plus restrictives pouvant successivement être imposées à de telles 2-catégories tressées sont discutées dans **[11]** p. 149-150 sous les noms respectifs de 2-catégories fortement tressées et de 2-catégories de Picard. La terminologie adoptée par J. Baez **[2]** (« 2-catégories monoidales faiblement et fortement involutives ») est sans doute préférable, mais d'autres encore ont été proposées **[20]**, **[19]** (voir également **[12]**). Les conditions de commutativité supplémentaires de type strict, qui imposeraient à un complexe de groupes de longueur n d'être quasi-isomorphe à un complexe de groupes abéliens sont décrites pour $n = 2$ en termes catégoriques dans **[11]** déf. 8.5.

Il reste à exprimer en ces termes la notion de cohomologie à valeurs dans une des structures considérées. La définition (3.1) du H^0 couvre toutes les situations, pourvu que l'on convienne de définir comme en (3.4) la cohomologie à valeurs dans un ensemble croisé, ou un quelconque complexe de groupes, comme étant la cohomologie à valeurs dans l'objet simplicial qui le définit. Cette définition, en termes d'objets de la catégorie dérivée, permet d'éviter d'avoir à effectuer, comme en **[28]** prop. 1.2.2, la vérification de l'indépendance relativement aux quasi-isomorphismes. On définit les groupes de cohomologie en degrés positifs à valeurs dans une m-catégorie $\mathcal{C}$ par la formule

$$H^n(e, \mathcal{C}) = H^0(e, B^n\mathcal{C})$$

(12) Il manque un axiome chez ces auteurs, qui est rétabli dans **[2]** (voir également **[11]** p. 148).

pourvu que l'ensemble classifiant n-fois itéré $B^n\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ existe. Ce dernier n'est pas en général défini pour un entier n quelconque (à moins que $\mathcal{C}$ ne soit stable), mais seulement pour des valeurs de n dépendant du niveau de commutativité de la loi de groupe de $\mathcal{C}$. La translation à droite correspond à l'opération inverse, qui associe à un ensemble simplicial $\mathcal{X}$ l'espace des lacets $\Omega\mathcal{X}$, ce qui permet de définir comme en (3.2) des groupes de cohomologie en degrés négatifs. Puisque l'espace $\Omega\mathcal{X}$ est muni d'une structure de groupe à homotopie près, définie par la composition des lacets, l'ensemble de cohomologie correspondant $H^0(e,\Omega\mathcal{X})$ est muni d'une structure de groupe. Pour $i > 1$, la loi de composition en question sur les espaces de lacets itérés $\Omega^i\mathcal{X}$ est commutative à homotopie près. Les groupes $H^{-i}(e,\mathcal{X}) = H^0(e,\Omega^i\mathcal{X})$ correspondants sont donc tous abéliens.

Supposons que la m-catégorie $\mathcal{C}$ soit translatable à gauche de n crans au plus. Dans ce cas, l'objet simplicial $\mathcal{X} = B^n\mathcal{C}$ est un ensemble simplicial sans aucune structure de groupe, et $H^n(e,\mathcal{C})$ est simplement un ensemble (pointé). Par ailleurs $H^{n-1}(e,\mathcal{C}) = H^0(e,\Omega\mathcal{X})$ est alors un groupe, tandis que les $H^{n-i}(e,\mathcal{C})$ pour $i > 1$ sont associés aux espaces $\Omega^i\mathcal{X}$, et sont donc des groupes abéliens. Ainsi, dans le cas d'un complexe concentré en un seul degré, on retrouve le fait que l'ensemble $H^0(e,X)$ est défini pour tout ensemble X, puis que l'ensemble $H^1(e,G)$ est défini pour tout groupe G, tandis que $H^0(e,G)$ est un groupe, enfin que pour G abélien, la cohomologie à valeurs dans G est définie en tous degrés positifs, et est toujours un groupe abélien.

De la même manière, l'ensemble de cohomologie $H^0(X)$ à valeurs dans un graphe X (4.15), et notamment à valeurs dans un A-ensemble (4.16), est un ensemble. À un module croisé $D \longrightarrow A$ correspondent un ensemble pointé $H^1(e,D \longrightarrow A)$, un groupe $H^0(e,D \longrightarrow A)$, et un groupe abélien $H^{-1}(e,D \longrightarrow A)$, les groupes de cohomologie de degrés inférieurs étant par ailleurs tous nuls. Lorsque le module croisé en question est tressé, toute la situation est décalée. L'ensemble pointé $H^2(e,D \longrightarrow A)$ est défini, $H^1(e,D \longrightarrow A)$ est muni d'une structure de groupe, et les groupes $H^i(e,D \longrightarrow A)$ sont abéliens dès que $i \leq 0$. Enfin, si le module croisé en question est stable, les groupes abéliens $H^n(e,D \longrightarrow A)$ sont définis pour tout n (voir **[11]**, **[16]**[13] **[15]**, et également, dans le contexte plus restrictif des catégorie de Picard strictement commutatives, **[21]**, **[35]**).

Illustrons une dernière fois ce phénomène sur les complexes de longueur 2. À un ensemble croisé $[B \longrightarrow A \times X \longrightarrow X]$ (1.1) correspond l'ensemble $H^0(e,B \longrightarrow A \times X \longrightarrow X)$ défini dans **[28]**1.2 dans le cas galoisien, et étudié au paragraphe B.3 ci-dessus dans le cadre un peu plus restrictif des e.c.f.c. Lorsque l'e.c.f.c. $[D \underset{X}{\longrightarrow} A \Rightarrow X]$

[13] Ces auteurs désignent par H^n ce que nous tenons à appeler ici, pour des raisons de cohérence interne, la cohomologie en degré $n-1$.

considéré provient d'un 2-module croisé $D \longrightarrow A \longrightarrow G$, alors

$$H^i(e, D \longrightarrow A \longrightarrow G)$$

est défini comme ensemble pour $i = 1$, comme groupe pour $i = 0$, enfin comme groupe abélien pour i négatif. Lorsque la 2-catégorie $\mathcal{C}$ correspondant au 2-module croisé en question est tressée, les

$$H^i(e, \mathcal{C})$$

sont définis, pour $i \leq 2$. Ce sont des groupes dès que $i \leq 1$, et des groupes abéliens pour $i \leq 0$. Dans une situation faiblement involutive, la cohomologie est définie en degrés $i \leq 3$. Le terme de degré le plus élevé est un ensemble pointé, le suivant est un groupe, et tous les autres sont des groupes abéliens. Enfin, la situation fortement involutive est stable : la cohomologie est alors definie en tout degré, et elle est munie en tout degré d'une structure de groupe abélien.

Ajouté sur épreuves. — Pour un examen approfondi de la notion de catégorie tressée, et de ses généralisations, on renvoie à l'article récent de C. Berger, *Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-type of space*, in *Higher homotopy structures in topology and mathematical physics*, J. McCleary éd., Contemporary Math. **227** (1999).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, B. Mazur, *Etale homotopy*, Lecture notes in math. **100**, Springer-Verlag (1969).

[2] J. Baez, M. Neuchl, *Higher dimensional algebra I : Braided monoidal 2-categories*, Advances in Math. **121**, 196-244 (1996).

[3] J. Baez, J. Dolan, *Higher dimensional algebra III : n-categories and the algebra of opetopes*, Advances in Math. **135**, 145-206 (1998).

[4] J. Baez, *An introduction to n-categories*, paru dans *7th Conference on Category theory and Computer science*, (E. Moggi et G. Rosolini eds.) Springer-Verlag (1997).

[5] M. Batanin, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of n-categories*, Advances in Math. **136**, 39-103 (1998).

[6] M. Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72**, 217-239 (1993).

[7] M. Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Memoirs of the A.M.S. **626** (1998).

[8] A. K. Bousfield, E.M. Friedlander, *Homotopy theory of Γ-spaces, spectra and bisimplicial sets*, Lecture notes in math. **658**, Springer-Verlag, 80-150 (1978).

[9] L. Breen, *Bitorseurs et cohomologie non abélienne* dans *The Grothendieck Festschrift I* (P. Cartier *et. al*, eds.), Progress in math. **86**, Birkhaüser (1990).

[10] L. Breen, *Théorie de Schreier supérieure*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **25**, 465-514 (1992).

[11] L. Breen, *Classification of 2-gerbes and 2-stacks*, Astérisque **225**, Société mathématique de France (1994).

[12] L. Breen, *Braided n-categories and Σ-structures*, in *Workshop on higher category theory and physics* (Evanston 1997), E. Getzler et M. Kapranov eds., Contemporary Math. **230** (1998).

[13] K.S. Brown, *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. AMS **186**, 419-458 (1973).

[14] R. Brown, *From groups to groupoids : a brief survey*, Bull. London Math. Soc. **19**, 113-134 (1987).

[15] M. Bullejos, P. Carrasco, A.M. Cegarra, *Cohomology with coefficients on Symmetric Cat-groups. An extension of Eilenberg-Mac Lane's classification theorem*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **114**, 163-189 (1993).

[16] M. Bullejos, A.M. Cegarra, *A 3-dimensional non-abelian cohomology of groups with applications to homotopy classification of continuous maps*, Canad. J. Math **43**, 265-296 (1991).

[17] P. Carrasco, A.M. Cegarra, *Group-theoretic algebraic models for homotopy types*, J. Pure Applied Algebra **75**, 195-235 (1991).

[18] D. Conduché, *Modules croisés généralisés de longueur 2*, J. Pure Applied Algebra **34**, 155-178 (1984).

[19] S. Crans, *Generalized centers of braided and sylleptic monoidal 2-categories* Maquarie mathematics report 97/217 (1997).

[20] B. Day, R. Street, *Monoidal bicategories and Hopf algebroids* Advances in Math. **129**, 99-157 (1997).

[21] P. Deligne, *La formule de dualité globale* exposé XVIII de *Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas vol 3*(SGA 4) Lecture notes in math. **305**, Springer Verlag (1973).

[22] P. Deligne, *Le symbole modéré* Publ. Math. IHES **73**, 147-181 (1991).

[23] L. Illusie, *Complexe cotangent et déformation I, II*, Lecture notes in math. **239, 283**, Springer-Verlag (1971-1972).

[24] R. Gordon, A.J. Power, R. Street, *Coherence for tricategories*, Memoirs of the A.M.S. **558** (1995).

[25] A. Joyal, R. Street, *Braided tensor categories*, Advances in Math. **102**, 20-78 (1993).

[26] M. Kapranov, V. Voevodsky, *2-categories and Zamolodchikov equations*, Proc. Symp. Pure Math. **56** (2), 177-259 (1994).

[27] J.-M. Kelley, R.H. Street, *Review of the elements of 2-categories*, Lecture Notes in Mathematics **420**, Springer-Verlag, 75-103 (1974).

[28] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, ce volume (1999), p. 1-116.

[29] J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand Mathematical Studies **11**, 1957.

[30] J.S. Milne, *Etale cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press (1980).

[31] I. Moerdijk, J.-A. Svensson, *Algebraic classification of equivariant homotopy 2-types I*, J. Pure Applied Algebra **89**, 187-216 (1993).

[32] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Actualités scientifiques et industrielles **1296**, Hermann (1962).

[33] J. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces I*, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 275-292 (1963).

[34] Z. Tamsamani, *Sur les notions de ∞-catégorie et ∞-groupoïde non stricts via des ensembles multisimpliciaux*, preprint alg-geom/9512006.

[35] K. Ulbrich, *Group cohomology for Picard categories* J. Algebra **91**, 464-498 (1984).