JEAN-PIERRE LABESSE
LAURENT CLOZEL

Appendice A. Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groupes unitaires

Astérisque, tome 257 (1999), p. 119-133
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1999__257__119_0>

APPENDICE A

CHANGEMENT DE BASE POUR LES REPRÉSENTATIONS COHOMOLOGIQUES DE CERTAINS GROUPES UNITAIRES

L. Clozel et J.-P. Labesse

Présentation

Le but de cette note est de démontrer un théorème utilisé, mais non prouvé, dans [Clo4] [(1)]. Nous serons aussi amenés à préciser et à prouver des énoncés dont la preuve est incomplète dans [Clo3]. On prendra garde que les notations utilisées ici ne sont pas nécessairement celles de l'article principal de ce volume. La bibliographie utilise les mêmes conventions que celle de l'article principal.

Nous allons prouver, pour certains groupes unitaires, un théorème qui affirme l'existence de relèvement par changement de base de représentations à cohomologie. Contrairement au cas traité dans l'article principal de ce volume [Lab4], le théorème de relèvement s'applique ici à des groupes non quasi-déployés. Mais les arguments sont similaires et utilisent diverses techniques développées dans l'article principal : stabilisation de tous les termes elliptiques de la formule des traces et transfert des intégrales orbitales de fonctions à support compact arbitraire. La preuve de l'existence du changement de base suppose un résultat de non nullité aux places archimédiennes ; cette non annulation est prouvée ici en observant que les représentations qui nous intéressent interviennent dans la cohomologie de certaines variétés de Shimura en des degrés de même parité ; ceci se déduit de résultats dus à Kottwitz [Ko7].

A.1. Fonctions de Lefschetz et d'Euler-Poincaré archimédiennes

Soit I un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$. On dispose sur $I(\mathbb{R})$ de fonctions d'Euler-Poincaré (cf. [CD2] ou [Lab2]). Soit

$$\mathfrak{i} = \operatorname{Lie} I(\mathbb{R})$$

---

(1) cf. l'abusive footnote (^{7}), p.778 de [Clo4]

son algèbre de Lie et soit $K_{I,\infty}$ un sous groupe compact maximal ; une fonction d'Euler-Poincaré est une fonction f^I_{ep} lisse et à support compact telle que

$$\operatorname{tr}\pi(f^I_{ep}) = \operatorname{ep}(\mathfrak{i}, K_{I,\infty}; \pi) := \sum(-1)^i \dim \mathbf{H}^i(\mathfrak{i}, K_{I,\infty}; \pi)$$

pour toute représentation admissible π de $I(\mathbb{R})$. La fonction f^I_{ep} dépend, entre autre, du choix d'une mesure de Haar di ; mais la mesure produit de cette mesure de Haar par la valeur en 1 de cette fonction est une mesure invariante indépendante des choix : c'est la mesure d'Euler-Poincaré de $I(\mathbb{R})$:

$$di_{ep} = f^I_{ep}(1)\, di\,.$$

Cette mesure est nulle si $I(\mathbb{R})$ n'admet pas de séries discrètes.

Supposons que $I(\mathbb{R})$ admette des séries discrètes. On dispose alors sur $I(\mathbb{R})$ d'une mesure de Haar canonique : celle pour laquelle la dimension formelle $d(\pi)$ vaut 1 pour les représentations des séries discrètes dont le caractère infinitésimal est celui de la représentation triviale. Nous ferons ce choix désormais. Avec un tel choix

$$f^I_{ep}(1) = e(I(\mathbb{R}))\, d(I(\mathbb{R}))$$

où

$$e(I(\mathbb{R})) = (-1)^{q(I)}$$

est le signe de Kottwitz et

$$d(I(\mathbb{R})) = \#\mathfrak{D}(T, I\,;\, \mathbb{R}) = \#\ker[\mathbf{H}^1(\mathbb{R}, T) \to \mathbf{H}^1(\mathbb{R}, I)]$$

où T est un tore maximal $\mathbb{R}$-anisotrope. Nous disposons d'une autre expression pour ce nombre : c'est le nombre de représentations dans un L-paquet de séries discrètes. Si on note $W_{\mathbb{C}}(T, I)$ le groupe de Weyl 'complexe' et $W_{\mathbb{R}}(T, I)$ le groupe de Weyl réel, on a

$$d(I(\mathbb{R})) = \frac{\#W_{\mathbb{C}}(T, I)}{\#W_{\mathbb{R}}(T, I)}\,.$$

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{R}$ et soit θ un automorphisme d'ordre fini. D'après [Lab2] (voir aussi [Clo3, section 3.2]), il existe des fonctions de Lefschetz $\phi^{G,\theta}_{ep}$ pour θ sur $G(\mathbb{R})$. Si

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G(\mathbb{R})$$

et si K_∞ est un sous-groupe compact maximal θ-stable, une telle fonction vérifie, pour toute représentation θ-stable admissible Π de $G(\mathbb{R})$, munie d'un opérateur d'entrelacement I_θ :

$$\operatorname{trace}(\Pi(\phi^{G,\theta}_{ep}) I_\theta) = \operatorname{ep}(\theta; \mathfrak{g}, K_\infty; \Pi) := \sum(-1)^i \operatorname{trace}\,(\theta \mid \mathbf{H}^i(\mathfrak{g}, K_\infty; \Pi))\,.$$

Soit T un tore de G tel que $T(\mathbb{R})$ soit un tore maximal (au sens des groupes de Lie compacts) dans K_∞. On pose

$$d(G(\mathbb{R})) = \#\mathfrak{D}(T, G\,;\, \mathbb{R}) = \#\ker[\mathbf{H}^1(\mathbb{R}, T) \to \mathbf{H}^1(\mathbb{R}, G)]\,.$$

Nous supposerons que les θ-centralisateurs stables sont connexes.

Théorème A.1.1. — *Soit $\phi_{ep}^{G,\theta}$ une fonction de Lefschetz sur $G(\mathbb{R})$. Si δ est θ-semi-simple, de θ-centralisateur stable I, on a*

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta, \phi_{ep}^{G,\theta}) = f_{ep}^{I}(1)\,.$$

En particulier

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta, \phi_{ep}^{G,\theta}) = 0$$

si $I(\mathbb{R})$ n'admet pas de séries discrètes. Les intégrales orbitales stables, des éléments dont le θ-centralisateur stable admet des séries discrètes, ne dépendent que de G :

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}^{1}(\delta, \phi_{ep}^{G,\theta}) = d(G(\mathbb{R}))\,.$$

Si de plus

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{R}, G_{SC}) = 1\,,$$

la fonction $\phi_{ep}^{G,\theta}$ est stabilisante (cf. [Lab4, 3.8.2]).

Démonstration. — Les fonctions de Lefschetz peuvent être définies au moyen de régularisées, via des multiplicateurs d'Arthur, d'une mesure μ portée par un sous-groupe compact maximal K_∞ supposé θ-stable [Lab2]. La valeur des intégrales orbitales est indépendante du choix du multiplicateur. On observe tout d'abord que les fonctions de Lefschetz sont cuspidales : une orbite par θ-conjugaison d'élément θ-semi-simple, dont le θ-centralisateur stable n'admet pas de séries discrètes, est un fermé qui ne rencontre pas K_∞. Dans le cas d'éléments dont le θ-centralisateur stable est un tore $\mathbb{R}$-anisotrope, l'intersection entre l'orbite par θ-conjugaison et le compact maximal est non triviale, mais les fronts d'onde des deux distributions sont transverses et on peut calculer l'intégrale orbitale tordue de la mesure. La mesure μ est le produit de la mesure de Haar normalisée sur K_∞ par la trace de la représentation virtuelle de K_∞, tordue par θ, définie par la somme alternée des puissances extérieures du supplémentaire $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K_∞ dans $\mathfrak{g}$ (proposition 12 de [Lab2]). Il résulte de la proposition 1 de [Lab2] que cette trace peut se calculer au moyen d'un déterminant de Weyl :

$$d\mu(k) = \sum (-1)^i \text{ trace } \left(k \rtimes \theta \mid \wedge^i \mathfrak{p}\right)\, dk = \det(1 - k \rtimes \theta \mid \mathfrak{g}/\mathfrak{k})\, dk\,.$$

On observe que le changement de variable

$$(x, k) \mapsto x^{-1}\, k\, \theta(x)\,,$$

admet comme jacobien ce déterminant et que les conjugués tordus sous le groupe qui appartiennent à K_∞ sont des conjugués tordus sous K_∞. Il en résulte que les intégrales orbitales tordues des éléments dont le θ-centralisateur stable est un tore $\mathbb{R}$-anisotrope, valent 1, les tores compacts étant munis de la mesure de Haar normalisée :

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta, \phi_{ep}^{G,\theta}) = \int_{T\backslash G(\mathbb{R})} d\dot{\mu}(x^{-1}\,\delta\,\theta(x)) = \int_{T\backslash K_\infty} d\dot{k} = \text{ vol } (T\backslash K_\infty) = 1\,.$$

On dispose bien entendu de résultats analogues dans le cas non tordu pour les fonctions d'Euler-Poincaré sur un groupe $I(\mathbb{R})$. Dans le cas général, où δ est θ-semi-simple, de centralisateur tordu stable I, on veut montrer que

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi_{ep}^{G,\theta}) = f_{ep}^I(1)\,.$$

Par descente au centralisateur, il suffit d'observer qu'au voisinage de δ sur $G(\mathbb{R})$ et au voisinage de 1 sur $I(\mathbb{R})$ une fonction de Lefschetz sur $G(\mathbb{R})$ et une fonction d'Euler-Poincaré sur $I(\mathbb{R})$ ont les mêmes intégrales orbitales pour les éléments θ-semi-simples réguliers ; en effet on vient de voir que

$$\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta\, t,\phi_{ep}^{G,\theta}) = \Phi_{I(\mathbb{R})}(t,f_{ep}^I)$$

pour $t\in I(\mathbb{R})$ semi-simple régulier voisin de 1. On a ainsi prouvé la première assertion. Par définition, si I est le θ-centralisateur stable de $\delta\in G(\mathbb{R})$ et I_x celui de δ_x on a

$$\Phi^\kappa_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi_{ep}^{G,\theta}) = \sum_{[x]\in\mathfrak{D}(I,G\,;\,\mathbb{R})} \langle\kappa,\dot{x}\rangle\, e(I_x(\mathbb{R}))\,\Phi_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta_x,\phi_{ep}^{G,\theta})$$

et donc, si le θ-centralisateur stable de δ admet des séries discrètes

$$\Phi^\kappa_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi_{ep}^{G,\theta}) = \sum_{[x]\in\mathfrak{D}(I,G\,;\,\mathbb{R})} \langle\kappa,\dot{x}\rangle d(I_x(\mathbb{R}))\,.$$

Par définition, $d(I_x(\mathbb{R}))$ est le nombre d'éléments dans

$$\mathfrak{D}(T_x,I_x\,;\,\mathbb{R}) = \ker[\mathbf{H}^1(\mathbb{R},T_x)\to\mathbf{H}^1(\mathbb{R},I_x)]$$

où T_x est un tore maximal $\mathbb{R}$-anisotrope dans I_x. On dispose de bijections naturelles

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{R},I)\to\mathbf{H}^1(\mathbb{R},I_x)$$

mais on prendra garde que ces bijections ne respectent pas les points base. De fait, si on note φ l'application de $\mathbf{H}^1(\mathbb{R},T)$ dans $\mathbf{H}^1(\mathbb{R},I)$, on a naturellement une bijection

$$\varphi^{-1}([x])\to\mathfrak{D}(T_x,I_x\,;\,\mathbb{R})$$

où $\varphi^{-1}([x])$ est l'image réciproque, dans $\mathbf{H}^1(\mathbb{R},T)$, de $[x]\in\mathbf{H}^1(\mathbb{R},I)$. Ceci montre que

$$\Phi^\kappa_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi_{ep}^{G,\theta}) = \sum_{[x]\in\mathfrak{D}(I,G\,;\,\mathbb{R})} \langle\kappa,\dot{x}\rangle d(I_x(\mathbb{R})) = \sum_{\tau\in\mathfrak{D}(T,G\,;\,\mathbb{R})} \langle\kappa,\varphi(\tau)\rangle\,.$$

On en déduit que, si le θ-centralisateur stable de δ admet des séries discrètes, on a

$$\Phi^1_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi_{ep}^{G,\theta}) = d(G(\mathbb{R}))\,.$$

Nous devons maintenant montrer que $\phi_{ep}^{G,\theta}$ est stabilisante si $\mathbf{H}^1(\mathbb{R},G_{SC})=1$. Mais, sous cette hypothèse,

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{R},G) = \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{R},G)$$

est un groupe abélien et, pour un tore maximal T

$$\mathfrak{D}(T,G\,;\,\mathbb{R}) = \mathfrak{E}(T,G\,;\,\mathbb{R})\,.$$

On observe que, d'après [Lab4, 1.6.5], si T est elliptique dans I

$$\mathbf{H}^1(\mathbb{R},T) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{R},I)$$

est surjectif ; donc l'homomorphisme

$$\mathfrak{E}(T,G\,;\,\mathbb{R}) \to \mathfrak{E}(I,G\,;\,\mathbb{R})$$

est surjectif. On en conclut que

$$\Phi^{\kappa}_{\theta,G(\mathbb{R})}(\delta,\phi^{G,\theta}_{ep}) = \sum_{\tau\in\mathfrak{E}(T,G\,;\,\mathbb{R})} \langle\kappa,\varphi(\tau)\rangle = 0$$

si δ est θ-semi-simple et si κ est un caractère non trivial de $\mathfrak{E}(I,G\,;\,\mathbb{R})$. □

Le lecteur observera que ce théorème est l'analogue, pour les corps archimédiens, du théorème 2 de [Ko6].

Supposons maintenant que G est obtenu par extension puis restriction des scalaires pour $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, à partir d'un groupe réductif connexe G_0, et que θ est l'automorphisme induit par l'élément non trivial du groupe de Galois. On dira que deux fonctions ϕ et f sur $G(\mathbb{R})$ et $G_0(\mathbb{R})$ sont associées si elles sont associées à une même fonction f^H sur $H(\mathbb{R})$ où H est la forme intérieure quasi-déployée de G_0.

Corollaire A.1.2. — *Soit $f^{G_0}_{ep}$ une fonction d'Euler-Poincaré sur $G_0(\mathbb{R})$. La fonction $\phi^{G,\theta}_{ep}$ est associée à $c\,f^{G_0}_{ep}$, où c est une constante positive, et $\phi^{G,\theta}_{ep}$ est stabilisante (cf. [Lab4, 3.8.2]).*

Démonstration. — Il résulte immédiatement de A.1.1 que les fonctions sont associées. Il reste à observer que comme G est obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe complexe $\mathbf{H}^1(\mathbb{R},G_{SC}) = 1$ et donc $\phi^{G,\theta}_{ep}$ est stabilisante. □

Remarque. — Cette dernière assertion résulte, dans le cas particulier où G_0 est un groupe unitaire, d'un calcul élémentaire : on se ramène au cas ou la norme de δ est l'élement neutre et dans ce cas I est un groupe unitaire à n-variables ; sa 1-cohomologie classifie les formes hermitiennes non dégénérées et les classes d'isomorphismes de ces formes sont indexées par leur signature $(n-p,p)$ avec $0 \leq p \leq n$, donc

$$d(I_p(\mathbb{R})) = \binom{n}{p}.$$

On suppose que $(n-p_I,p_I)$ est la signature de la forme hermitienne définissant I. Si κ est non trivial on a

$$\langle\kappa,\dot{x}\rangle = (-1)^{p-p_I}$$

et on conclut en invoquant l'identité du binôme.

A.2. Sur certains groupes unitaires

Soient F un corps totalement réel de degré d, F_c une extension CM de F et D une algèbre à division de dimension n^2 sur F_c munie d'une involution de seconde espèce notée $*$. On désignera par v, w des places de F, F_c respectivement.

On associe à D un groupe unitaire U sur F, et trois groupes G_0 et G_1 et G sur $\mathbb{Q}$. Nous ne donnons que les points rationnels :

$$G_0(\mathbb{Q}) = U(F) = \{x \in D^\times \mid xx^* = 1\}$$

(de sorte que G_0 est obtenu par restriction des scalaires à partir de U/F)

$$G_1(\mathbb{Q}) = \{x \in D^\times \mid xx^* = \lambda \in \mathbb{Q}^\times\}$$

et

$$G(\mathbb{Q}) = D^\times .$$

On remarquera que

$$G_0(\mathbb{R}) = U(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) = \prod_{v|\infty} U(F_v)$$

où

$$U(F_v) \cong U(p_v, q_v) .$$

Si $GU(p_v, q_v)$ est le groupe de similitudes unitaires associé à $U(p_v, q_v)$, alors $G_1(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de

$$\prod_v GU(p_v, q_v)$$

défini par l'égalité des rapports de similitude. Notons encore $K_{0,\infty}$ un sous-groupe compact maximal de $G_0(\mathbb{R}) \subset G_1(\mathbb{R})$. (C'est un compact maximal dans $G_1(\mathbb{R})$, sauf si n est pair et $p_v = q_v = n/2$ pour tout v, auquel cas $G_1(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes).

Soit

$$\theta : g \mapsto (g^*)^{-1}$$

la conjugaison galoisienne de $D^\times = U(F_c)$ par rapport à $U(F)$. Soit $\delta \in G(\mathbb{Q}) = D^\times$ on note I le θ-centralisateur de δ :

$$I = \{g \in D^\times \ : g\,\delta\,{}^\theta g^{-1} = \delta\} .$$

Soit D_γ le centralisateur dans D de $\gamma = \delta\,{}^\theta\delta$. C'est une algèbre à division de centre un corps E_c et D_γ est munie d'une involution de seconde espèce :

$$*' : x \mapsto \delta x^* \delta^{-1} .$$

Soit E le corps des points fixes de $*'$ dans E_c ; alors I est le groupe unitaire sur E défini par D_γ et cette involution.

On notera H la forme quasi-déployée de G_0. On a introduit en [Lab4, 1.9.5] la notion d'ensemble (G, H)-essentiel. On note $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{Q}$.

Lemme A.2.1. — *L'ensemble $\{\infty\}$ est un ensemble de places (G, H)-essentiel.*

Démonstration. — On considère les groupes $\mathfrak{E}$ introduits au chapitre I. Nous devons vérifier que l'application

$$(*) \qquad \mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{R}) \to \mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{A}/\mathbb{Q})$$

est surjective. On remarque tout d'abord que

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{R}, G^*) = \{1\}, \qquad \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, G^*) = \{1\} \qquad \text{et} \qquad \ker^1(\mathbb{Q}, G^*) = 1$$

ce qui résulte par exemple de ce que G est obtenu par restriction des scalaires d'une forme intérieure $D^\times$ de $GL(n)$. Donc

$$\mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{R}) = \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{R}, H) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{A}/\mathbb{Q}) \cong H^1_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, H)\,.$$

Par ailleurs, on sait que si le groupe dérivé est simplement connexe, la cohomologie abélianisée n'est autre que la cohomologie du co-centre. Pour un groupe unitaire la cohomologie abélianisée est donc celle du tore $U(1)$ des éléments de norme 1 dans l'extension quadratique attachée à ce groupe unitaire. Dans l'extension quadratique F_c/F attachée à notre groupe unitaire, le corps F_c est une extension quadratique totalement imaginaire du corps totalement réel F. Il en résulte que

$$\mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{R}) = H^1_{ab}(\mathbb{R}, H) = \mathbf{H}^1(F \otimes \mathbb{R}, U(1)) \cong \prod_{v|\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$\mathfrak{E}(H, G^*; \mathbb{A}/\mathbb{Q}) = H^1_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, H) = \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, U(1)) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

La surjectivité de

$$\mathbf{H}^1(F \otimes \mathbb{R}, U(1)) \to \mathbf{H}^1(\mathbb{A}_F/F, U(1))$$

équivaut à la surjectivité de (*). On a ainsi prouvé que $\{\infty\}$ est un ensemble de places (G, H)-essentiel. □

Rappelons un résultat de Kottwitz [Ko7]

Lemme A.2.2. — *Soit $\gamma \in G_0(\mathbb{Q})$, et soit I son centralisateur. Alors*

$$\mathfrak{E}(I, G_0; \mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1\,.$$

Démonstration. — On observe que G_0 et I sont obtenus par restriction des scalaires à partir de groupes unitaires sur des corps F et E, les remarques ci-dessus montrent que

$$\mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, I) \to \mathbf{H}^1_{ab}(\mathbb{A}/\mathbb{Q}, G_0)$$

est un isomorphisme et, comme les tores $U(1)$ vérifient le principe de Hasse pour $\mathbf{H}^1$, il résulte de [Lab4, 1.8.4] que

$$\mathfrak{E}(I, G_0; \mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1\,.$$

□

On a un résultat analogue sur un corps local F_v :

Lemme A.2.3. — *Supposons que U_v est obtenu à partir d'une algèbre à division D_v. Soit $\gamma_v \in U(F_v)$, et soit I_v son centralisateur. Alors*

$$\mathfrak{E}(I_v, U_v; F_v) = 1\,.$$

Démonstration. — Comme U_v est obtenu à partir d'une algèbre à division, le centralisateur I_v est un groupe unitaire. Les remarques ci-dessus montrent que la flèche

$$\mathbf{H}^1_{ab}(F_v, I_v) \to \mathbf{H}^1_{ab}(F_v, U_v)$$

est un isomorphisme ; son noyau est donc trivial. □

Corollaire A.2.4. — *Soit $\gamma^* \in H(\mathbb{Q})$ qui est localement partout une norme de $\gamma \in G_0(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ et supposons qu'en une place finie v de F le groupe U_v soit obtenu à partir d'une algèbre à division. Si on note I^* le centralisateur stable de γ^* on a*

$$\mathfrak{E}(I^*, H; \mathbb{A}/\mathbb{Q}) = 1\,.$$

Démonstration. — Le groupe H est obtenu par restriction des scalaires à partir d'un groupe untaire U^*, notons I_0^* le centralisateur de γ^* vu comme élément de U^*. Comme I_v est elliptique dans U_v

$$\mathfrak{E}(I_v, U_v; F_v) \to \mathfrak{E}(I_0^*, U^*; \mathbb{A}_F/F)$$

est surjective d'après [Lab4, 1.9.6]. Comme

$$\mathfrak{E}(I_0^*, U^*; \mathbb{A}_F/F) = \mathfrak{E}(I^*, H; \mathbb{A}/\mathbb{Q})$$

l'assertion est alors une conséquence immédiate de A.2.3. □

A.3. Comparaison des formules de traces

On dit qu'une fonction f lisse et à support compact sur $G_0(\mathbb{A})$ et ϕ lisse et à support compact sur $G(\mathbb{A})$ sont associées s'il existe une fonction f^H lisse et à support compact sur $H(\mathbb{A})$ associée à f et ϕ. (On laissera au lecteur le soin de formuler une définition directe ne faisant pas usage de f^H).

Soit r la représentation régulière droite de $G_0(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A}_F)$ dans l'espace des formes automorphes sur

$$G_0(\mathbb{Q})\backslash G_0(\mathbb{A}) = U(F)\backslash U(\mathbb{A}_F)$$

et soit R la représentation analogue de $G(\mathbb{A})$. On dispose d'un opérateur d'entrelacement naturel I_θ sur l'espace de R. Soit par ailleurs ϕ^∞ et f^∞ des fonctions sur les groupes sur les adèles finis $G(\mathbb{A}_f)$ et $G_0(\mathbb{A}_f)$, lisses et à support compact.

Théorème A.3.1. — *On suppose que $f = f_{ep}^{G_0} \otimes f^\infty$ et $\phi = \phi_{ep}^{G,\theta} \otimes \phi^\infty$ sont associées et que $\phi_{ep}^{G,\theta}$ est une fonction de Lefschetz pour θ sur $G(\mathbb{R})$. On suppose de plus que l'une des deux conditions ci-dessous est satisfaite :*
(a) *en une place finie v de F la fonction f_v est une fonction d'Euler-Poincaré sur $U(F_v)$*

(b) *en une place v de F le groupe U_v est obtenu à partir d'une algèbre à division.*
Sous ces conditions on a une identité de formules des traces :

$$\operatorname{tr}(R(\phi)I_\theta) = \operatorname{tr}(r(f)) .$$

Démonstration. — Comme $D^\times$ est une algèbre à division les formules des traces pour G_0 et G ne comportent que des termes elliptiques. On remarque ensuite que $\phi_{ep}^{G,\theta}$ est stabilisante (A.1.2) et on a établi en A.2.1 que $\{\infty\}$ est (G^*, H)-essentiel. Soit f^H une fonction sur $H(\mathbb{A})$ associée à f et ϕ. Le théorème [Lab4, 4.3.4] montre que si on note ST_e^H la partie elliptique de la formule des traces stable pour H on a

$$\operatorname{tr}(R(\phi)I_\theta) = a(G,\theta,H)\, ST_e^H(f^H) .$$

De même, dans le cas (a), on sait qu'en une place finie une fonction d'Euler-Poincaré est stabilisante et tout ensemble non vide de places est (H,H)-essentiel on peut donc invoquer [Lab4, 4.3.4]. Dans le cas (b) seuls les caractères endocopiques triviaux contribuent d'après A.2.4 et on invoque [Lab4, 4.3.3]. Dans ces deux cas on a donc

$$\operatorname{tr}(r(f)) = a(G_0,1,H)\, ST_e^H(f^H) .$$

Comme il est observé dans [Lab4, 4.3.2], les constantes $a(G,\theta,H)$ ne dépendent que des co-centres si les groupes dérivés sont simplement connexes. Il suffit donc de traiter le cas $D^\times = GL(1)$ et on voit alors facilement que

$$a(G,\theta,H) = a(G_0,1,H) = 1 .$$

On obtient donc

$$\operatorname{tr}(R(\phi)I_\theta) = \operatorname{tr}(r(f)) .$$

□

Remarque. — Le théorème ci-dessus donne une preuve d'une variante du lemme 4.6 de [Clo3]. Nous ne faisons plus l'hypothèse que les fonctions sont a support régulier en une place. Par ailleurs on observera que la constante 1/2 qui figure dans [Clo3, Lemme 4.6] est incorrecte ; l'erreur vient de ce que le jacobien $J_Z(\theta)$ en numérateur de $a(G,\theta,H)$ a été omis : ce facteur, qui dans notre cas vaut 2, compense exactement le nombre de Tamagawa de H en dénominateur. Dans la preuve du lemme 4.6 de [Clo3] Clozel procéde directement sans utiliser la partie elliptique de la formule des traces stable pour H et sans utiliser d'hypothèse en une place auxilliaire v ; toutefois sa preuve est incomplète car il a omis de tenir compte de ce que l'on ne dispose pas pour G_0 de l'analogue du théorème de Kottwitz sur l'existence des normes. Il n'est pas clair que l'enoncé plus général soit correct.

A.4. Un théorème de Kottwitz

Un *système de coefficients* pour G_0 est une représentation complexe, irréductible, de dimension finie, de

$$G_0(\mathbb{C}) = U(F \otimes \mathbb{C}).$$

Soit $\mathfrak{g}_0 = \operatorname{Lie} G_0(\mathbb{R})$, et $K_{0,\infty} \subset G_0(\mathbb{R})$ un compact maximal. On déduit de ξ un système de coefficients ξ_c pour G [Clo4, section 2.4].

Soit $\pi = \otimes_v \pi_v$ une représentation automorphe de $G_0(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A}_F)$. On dit que π a de la cohomologie à coefficients dans ξ si

$$\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{g}_0, K_{0,\infty}; \pi_\infty \otimes \xi) \neq 0.$$

Des notions analogues s'appliquent à une représentation Π de $G(\mathbb{A})$ et à un système de coefficients ξ_c.

Pour simplifier les notations, nous supposons dorénavant que les systèmes de coefficients sont triviaux.

Commençons par rappeler un théorème de Kottwitz. Soit τ une représentation automorphe de $G_1(\mathbb{A})$ et supposons τ cohomologique (pour le système de coefficients trivial).

Soit $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Lie} G_1(\mathbb{R})$. Le calcul de $\mathbf{H}^\bullet(\mathfrak{g}_1, K_{0,\infty}; \tau_\infty)$ se ramène facilement au calcul de la cohomologie des groupes unitaires, et l'on déduit des résultats de Vogan-Zuckerman [VZ] l'assertion suivante :

Lemme A.4.1. — *Soit τ_∞ une représentation unitaire irréductible de $G_1(\mathbb{R})$ à cohomologie. Les degrés i tels que*

$$\mathbf{H}^i(\mathfrak{g}_1, K_{0,\infty}; \tau_\infty) \neq 0$$

ont la même parité.

On associe donc à τ_∞ un élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sa *parité*.

***Théorème A.4.2* (Kottwitz)**. — *Soit S en ensemble fini de places de $\mathbb{Q}$ (contenant ∞) et τ_0^S une représentation irréductible de*

$$G_1(\mathbb{A}^S) = \prod_{p \notin S}{}' G_1(\mathbb{Q}_p).$$

Il existe alors $\varepsilon(\tau_0^S) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que, si τ est une représentation automorphe cohomologique de $G_1(\mathbb{A})$ telle que $\tau^S \cong \tau_0^S$, la parité de τ_∞ est égale à $\varepsilon(\tau_0^S)$.

Ceci résulte de [Ko7, Theorem 1].

Proposition A.4.3. — *L'analogue du Théorème A.4.2 est vrai pour G_0.*

Démonstration. — Soit A la composante déployée du centre de G_1 (sur $\mathbb{Q}$), de sorte que $A \cong \mathbb{G}_m/\mathbb{Q}$ et que $A \cap G_0 \cong \mu_2$ (cf. [Clo3, section 5.23]). Soient π une représentation automorphe irréductible de $G_0(\mathbb{A})$ et $\eta : \mu_2(\mathbb{A}) \to \{\pm 1\}$ la restriction de son caractère central à $(A \cap G_0)(\mathbb{A})$. Si χ est un caractère de

$$A(\mathbb{A})/A(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times$$

trivial sur $\mathbb{R}^\times$ et coïncidant avec η sur $\mu_2(\mathbb{A})$, il existe (loc. cit.) une représentation automorphe irréductible τ de $G_1(\mathbb{A})$, de caractère central χ sur $A(\mathbb{Q})$, dont la restriction à $G_0(\mathbb{A})$ est discrète et contient π. En particulier π_∞ est contenue dans $\tau_\infty|_{G_0(\mathbb{R})}$. Si π est cohomologique, il en résulte que τ est cohomologique, la cohomologie apparaissant dans les mêmes degrés.

Soit alors S un ensemble fini de places et soient π_1, π_2 deux représentations cohomologiques de $G_0(\mathbb{A})$ coïncidant en dehors de S. Étendons-les en des représentations τ_1, τ_2 de $G_1(\mathbb{A})$. Soit p un nombre premier tel que toutes les données sont non ramifiées, et décomposé dans le corps F_c. Notons v_i les places de F divisant p, $\{w_i, w_i'\}$ les places correspondantes de F_c. Alors, avec $d = [F : \mathbb{Q}]$:

$$G_1(\mathbb{Q}_p) = \{(g_i, g_i', z) : g_i{}^t g_i' = z\}$$

où g_i, $g_i' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ et $z \in \mathbb{Q}_p^\times$, le sous-groupe G_0 étant donné par

$$G_0(\mathbb{Q}_p) = \{(g_i, g_i', z) : z = 1\} \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)^d .$$

On a donc dualement, sur $\mathbb{Q}_p$:

$$\widehat{G_1} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^d \times \mathbb{C}^\times \qquad \text{et} \qquad \widehat{G}_0 = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^d .$$

Les représentations π_1, π_2 sont non ramifiées en p et définissent des matrices diagonales $t_1, t_2 \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})^d$; de même τ_1, τ_2 définissent des couples

$$T_j = (t_j, z_j) \qquad \text{pour} \qquad j = 1, 2$$

avec $z_j \in \mathbb{C}^\times$ et t_j la matrice de Hecke de π_j. Noter que le caractère central χ_j est essentiellement donné par (z_j^2) (2).

La démonstration du Théorème A.4.2 [Ko7, section 5] montre que la parité de $\tau_{j,\infty}$ est déterminée de la façon suivante. Soit ρ la représentation de $\widehat{G_1}$ associée à une donnée définissant une variété de Shimura pour G_1 ([Ko7, section 1]). Alors

$$N = \sum_{v|\infty} p_v q_v$$

est la dimension complexe des variétés de Shimura pour G_1, et

$$p^{N/2} \cdot \rho(T_j) ,$$

(2) La normalisation de la correspondance de Langlands est ici la normalisation unitaire.

est une matrice dont les valeurs propres sont des nombres de Weil (pour p) de valeurs absolues complexes $p^{i/2}$ où i est congru à $\varepsilon(\tau_{j,f})$ (mod 2) ; les degrés de la cohomologie de $\tau_{j,\infty}$ sont les poids i associés aux valeurs propres.

Le caractère χ_j étant un caractère d'Artin, on voit que z_j est une racine de l'unité. Il en résulte que les poids ne dépendent que de t_j. □

A.5. Le théorème principal

Soit π une représentation cohomologique de $U(\mathbb{A}_F)$. Ecrivons

$$\pi = \pi_\infty \otimes \pi_S \otimes \pi^{\infty,s}$$

où S est un ensemble fini de places finies contenant toutes les places de ramification (pour toutes les données, y compris π). Fixons un sous-groupe compact ouvert K_S de $U(\mathbb{A}_{F,S})$ tel que $\pi_S^{K_S} \neq 0$. Soit f_S la fonction caractéristique de K_S ; $f^{\infty,S}$ sera une fonction dans l'algèbre de Hecke (non ramifiée en toutes les places).

Soit enfin $f = f_{ep}^{G_0} \otimes f_S \otimes f^{\infty,S}$, où $f_{ep}^{G_0}$ est une fonction d'Euler-Poincaré. Ecrivons

$$\operatorname{tr} r(f) = \sum_\rho \operatorname{tr} \rho(f)$$

où ρ décrit les représentations automorphes (avec multiplicité) de $U(\mathbb{A}_F)$. Si f est du type que nous avons défini ($f^{\infty,S}$ étant variable, mais dans l'algèbre de Hecke), cette somme est finie. Notons

$$\mathfrak{H}^S = \bigotimes_{v \notin \{S \cup \infty\}} \mathfrak{H}_v$$

l'algèbre de Hecke, et soit $\mathfrak{H}_c^S$ l'algèbre de Hecke (en dehors de S) pour le groupe G.

Le changement de base local aux places non ramifiées est bien défini. On dira que Π est un changement de base faible de π si localement presque partout Π_v est le changement de base de π_v. On dispose de l'homomorphisme de changement de base

$$b : \mathfrak{H}_c^S \to \mathfrak{H}^S .$$

Nous aurons besoin de l'amplification suivante de la proposition A.4.3 :

Lemme A.5.1. — *Soient S un ensemble fini de places de F contenant les places de ramification de U, et π, π' deux représentations automorphes cohomologiques de $U(\mathbb{A}_F)$ non ramifiées en dehors de S. Soient $\chi, \chi' : \mathfrak{H}^S \to \mathbb{C}$ les caractères associées. Si $\chi \circ b = \chi' \circ b$, la parité de π_∞ est égale à celle de π'_∞.*

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de la démonstration de la proposition A.4.3 : si la place p est décomposée,

$$G_0(\mathbb{Q}_p) = U(F \otimes \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)^d$$

et

$$G(\mathbb{Q}_p) = U(F_c \otimes \mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)^{2d} ,$$

l'application b étant donnée, pour toute place $v|p$ (de sorte que v est divisée par deux places w, w') par $(\phi_w, \phi_{w'}) \mapsto \phi_w * \phi_{w'}$. L'hypothèse sur les caractères implique alors que $\pi_p \cong \pi'_p$, ce qui implique l'identité des parités de π_∞ et π'_∞. □

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant.

Théorème A.5.2. — *Soit π une représentation automorphe de $G_0(\mathbb{A}) = U(\mathbb{A}_F)$, et supposons que π a de la cohomologie à coefficients dans un système ξ. On suppose de plus qu'une des deux conditions ci-dessous est satisfaite :*
(a) *en une place finie v de F la représentation π_v est de Steinberg.*
(b) *en une place v de F le groupe U_v est obtenu à partir d'une algèbre à division.*
Alors il existe une représentation automorphe Π de

$$G(\mathbb{A}) = (D \otimes \mathbb{A})^\times$$

telle que
(i) Π *est un changement de base faible de π.*
(ii) Π *a de la cohomologie à coefficients dans ξ_c.*

Remarque. — L'hypothèse (b) est faite explicitement dans [Clo3, section 3.1] et reprise dans [Clo4, section 3].

Démonstration. — Nous ne traiterons que le cas des coefficients constants. Décomposons alors la somme donnant $\operatorname{tr} r(f)$ de la façon suivante. Si ρ est non ramifiée dans S, soit χ_ρ le caractère de $\mathfrak{H}^S$ associé et $\chi_\rho^c = \chi_\rho \circ b$. Alors

$$\operatorname{tr} r(f) = \sum_{\{\rho|\chi_\rho^c = \chi_\pi^c\}} \operatorname{tr} \rho_{\infty,s}(f_{ep}^{G_0} \otimes f_s)\chi_\rho(f^s) + \sum_{\{\rho|\chi_\rho^c \neq \chi_\pi^c\}} \operatorname{tr} \rho_{\infty,s}(f_{ep}^{G_0} \otimes f_s)\chi_\rho(f^s)\,.$$

Si le compact K_S est assez petit il existe une fonction ϕ_S sur $G(\mathbb{A}_S)$ associée à f_S la fonction caractéristique de K_S. En effet, en observant que le centralisateur tordu de 1 dans $D^\times$ n'est autre que U, on voit (comme en [Lab4, 3.3.2]) que l'existence d'une telle fonction est garantie par [Lab4, 3.1.7] pourvu que K_S soit assez petit (l'existence de f_S^H est obtenue par [Lab4, 3.3.1]). Par ailleurs, $\phi^{\infty,S}$ sera une fonction arbitraire dans $\mathfrak{H}_c^S$ et nous posons $f^{\infty,S} = b(\phi^{\infty,S})$. La trace s'écrit alors :

$$\operatorname{tr} r(f) = \chi_\pi^c(\phi^{\infty,S}) \sum_{\{\rho|\chi_\rho^c = \chi_\pi^c\}} \operatorname{ep}(\pi_\infty) \dim \rho_S^{K_S} + \sum_{\{\rho|\chi_\rho^c \neq \chi_\pi^c\}} c_\rho\, \chi_\rho^c(\phi^{\infty,S})\,,$$

les caractères de $\mathfrak{H}_c^S$ figurant dans la seconde somme étant différents de χ_π^c. L'observation essentielle est que le coefficient de χ_π^c

$$\sum_{\{\rho|\chi_\rho^c = \chi_\pi^c\}} \operatorname{ep}(\pi_\infty) \dim \rho_S^{K_S}$$

est non nul d'après le Lemme A.5.1. Par ailleurs, les fonctions $\phi^{\infty,S}$ et $b(\phi^{\infty,S})$ étant associées d'après le Lemme fondamental ([Clo 2, Lab 1] complété en [Lab4, 3.7.2]), cette trace est égale d'après le Théorème A.3.1 à

$$\sum_{\Pi} \operatorname{tr}(\Pi_\infty(\phi_{ep}^{G,\theta})\Pi_S(\phi_S)I_\theta)\ \chi_\Pi(\phi^{\infty,S})$$

où Π décrit les représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$; cette somme est du reste finie, le niveau de ϕ_S étant fixé et Π_∞ étant alors astreinte à avoir de la cohomologie non triviale (cf. avant A.3.1) ce qui détermine son caractère infinitésimal. L'égalité des traces implique alors que le caractère χ_π^c doit apparaître dans la trace tordue, ce qui implique le Théorème A.5.2. □

Noter que le résultat est plus précis : on obtient l'existence d'un relèvement Π de π tel que

$$ep(\theta; \mathfrak{g}, K_\infty; \Pi_\infty) \neq 0\,.$$

Sous l'hypothèse (R) de [Clo4, p.762], les représentations automorphes de $G(\mathbb{A})$ vérifient le théorème de multiplicité 1 fort et Π est alors unique – comme sous-espace de l'espace des formes automorphes sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$.

BIBLIOGRAPHIE

[Clo2] L. Clozel, *The fundamental lemma for stable base change,* Duke Math. J. **61** (1990), p. 255-302.

[Clo3] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$,* Publ. Math. IHES **73** (1991), p. 97-145.

[Clo4] L. Clozel, *On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties,* Duke Math. J. **72** (1993), p. 757-795.

[CD1] L. Clozel, P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs I,* Invent. Math. **77** (1984), p. 427-453.

[CD2] L. Clozel, P. Delorme, *Le théorème de Paley-Wiener invariant pour les groupes de Lie réductifs II,* Ann. Sci. E.N.S. 4^e série **23** (1990), p. 193-228.

[Ko6] R. Kottwitz, *Tamagawa numbers,* Annals of Math. **127** (1988), p. 629-646.

[Ko7] R. Kottwitz, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties,* Invent. Math. **108** (1992), p. 653-665.

[Lab1] J.-P. Labesse, *Le lemme fondamental pour le changement de base stable,* Duke Math. J. **61** (1990), p. 519-530.

[Lab2] J.-P. Labesse, *Pseudo-coefficients très cuspidaux et K-théorie,* Math. Ann. **291** (1991), p. 607-616.

[Lab4] J.-P. Labesse, *Cohomologie, stabilisation et changement de base,* ce volume (1999), p. 1-116.

[VZ] D. Vogan G. Zuckerman, *Unitary representations with non zero cohomology,* Compositio Math. **53** (1984), p. 51-90.