RÉGIS DE LA BRETÈCHE

Sur le nombre de points de hauteur bornée d'une certaine surface cubique singulière

Astérisque, tome 251 (1998), p. 51-77
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__251__51_0>

Astérisque **251**, 1998, p. 51–77

SUR LE NOMBRE DE POINTS DE HAUTEUR BORNÉE D'UNE CERTAINE SURFACE CUBIQUE SINGULIÈRE

par

Régis de la Bretèche

Résumé. — En développant des méthodes d'intégration complexe, nous établissons une formule asymptotique très précise sur le nombre de points de hauteur inférieure à X d'une certaine variété torique. Nous estimons le cardinal

$$V(X) := \operatorname{card}\{(x,y,z,t) \in (\mathbb{N} \cap [1,X])^4 \;:\; (x,y,z,t) = 1,\; xyz = t^3\}.$$

Soit $N(X) := (\log X)^{3/5}(\log_2 X)^{-1/5}$. Alors il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour X tendant vers l'infini, l'estimation

$$V(X) = XQ(\log X) + O\big(X^{1-1/8}\exp\{-cN(X)\}\big)$$

De plus, le coefficient dominant de Q est égal à

$$\frac{1}{4 \times 6!}\prod_p \Big\{\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^7\Big(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)\Big\}.$$

1. Introduction

1.1. Énoncé des résultats. — Soit l'ensemble

$$E_\infty := \big\{(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3 \;:\; (x,y,z) = 1,\; \exists t \in \mathbb{N} \quad xyz = t^3\big\}.$$

L'objet de ce travail est d'évaluer asymptotiquement $V(X)$ le cardinal de l'ensemble des éléments de E_∞ de coordonnées toutes inférieures à X lorsque X tend vers l'infini. Nous avons le résultat suivant

Théorème 1.1. — *Il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une constante $c > 0$ tels que l'on ait, pour X tendant vers l'infini, l'estimation*

$$V(X) = XQ(\log X) + O\big(X^{7/8}\exp\{-cN(X)\}\big) \tag{1}$$

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — Primaire 14M25; secondaire 11M41.

Mots clefs. — Variété torique, Conjecture de Manin, Fonction zêta des hauteurs, Fonction de compte.

où l'on a noté $N(X) := (\log X)^{3/5}(\log_2 X)^{-1/5}$. *De plus, le coefficient dominant de* Q *est égal à*

$$C = \frac{1}{4\times 6!}\prod_p \Big\{\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^7\Big(1+\frac{7}{p}+\frac{1}{p^2}\Big)\Big\}. \tag{2}$$

On en déduit un prolongement de la fonction zêta des hauteurs associée. Soit $c(m) := \mathrm{card}\{(x,y,z)\in E_\infty : \max\{x,y,z\} = m\}$ et

$$Z(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c(m)}{m^s}.$$

Théorème 1.2. — *La fonction* $s \to (s-1)^7 Z(s)$ *admet un prolongement holomorphe au demi plan* $\Re e\, s > \frac{7}{8}$ *et prend la valeur* $6!C$ *en* 1.

Commençons par exposer les motivations de ce problème. Nous montrerons au paragraphe 1.3. que le cardinal considéré est directement lié au dénombrement des points d'une variété torique non lisse de hauteur inférieure à X.

1.2. Origine du problème en géométrie algébrique. — Les variétés toriques sont un sujet d'étude privilégié en géométrie algébrique qui fournit de nombreux exemples pour tester des théories plus générales et plus abstraites. C'est aussi le cas pour l'évaluation asymptotique du nombre de points de hauteur bornée par X. Cette question de dénombrement, qui est clairement naturelle, permet, comme nous le verrons, de faire apparaître des invariants géométriques très intéressants.

Soit k un corps de nombres et une variété V de Fano sur k à laquelle on associe une fonction $\mathbf{h}$ des hauteurs anticanoniquement. Manin a conjecturé que, pour U un ouvert de V convenablement choisi, on a

$$N_U(X) := \big|\{P\in U : \mathbf{h}(P) \leqslant X\}\big| \sim CX(\log X)^{r-1} \tag{3}$$

où r est le rang du groupe de Picard de V et C est une constante non nulle. La restriction à un ouvert U permet d'éviter les sous-variétés accumulatrices. Par exemple, dans le cas de variétés cubiques, on exclut les points des droites contenues dans V. Dans [BT96-1], Batyrev et Tschinkel ont montré qu'en fait cette conjecture n'est pas pertinente pour certaines variétés de Fano. Cependant, elle a été vérifiée pour plusieurs classes d'exemples.

Dans [P93], Peyre raffine cette conjecture en donnant une expression de C en fonction de la mesure de Tamagawa. Il vérifie sur certains exemples la valeur de C conjecturée. Dans [BT96-2], [BT98-1] & [BT98-2], Batyrev et Tschinkel établissent cette formule pour toutes les variétés toriques sur un corps quelconque. Ils utilisent une série de Dirichlet associée à ce comptage exprimée dans un langage adélique. Dans le cas de $k = \mathbb{Q}$, Salberger [S98] retrouve ce résultat pour toute variété torique définie par un éventail régulier et complet. De plus, il donne un terme d'erreur. Il utilise une méthode différente de celle de Batyrev et Tschinkel initiée par Schanuel [S79] et Peyre [P93]. Fouvry [F98] obtient aussi (3) dans le même cas particulier que l'auteur. Pour ce faire, par une étude arithmétique fine, il réussit à se ramener au dénombrement des triplets $(x, y, z) \in E_\infty$ mais satisfaisant aux conditions supplémentaires de coprimalité $(x, y) = (x, z) = (y, z) = 1$. Cela lui permet alors d'avoir une représentation paramétrique des solutions en $(x, y, z) = (u^3, v^3, w^3)$ avec $(u, v) = (u, w) = (v, w) = 1$ ce qui facilite grandement le dénombrement.

Nous nous proposons ici d'examiner le cas d'une variété torique particulière et de montrer sur cet exemple que l'on obtient une estimation bien plus précise que tous les résultats connus précédemment.

1.3. Énoncé du problème en terme de variété torique. — Une variété torique peut être construite, par une méthode de type combinatoire, à partir de la donnée d'un réseau N et un éventail Δ.

Définition 1.3. — Un éventail est un ensemble fini de cônes strictement convexes polyhédraux rationnels dans $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R}$ satisfaisant à :

(i) Chaque cône de Δ contient l'origine,

(ii) Chaque face d'un cône de Δ est aussi un cône de Δ,

(iii) L'intersection de deux cônes de Δ est une face de chacun des deux cônes.

De plus,

(iv) Δ est dit complet si $N_{\mathbb{R}}$ est la réunion des cônes de Δ,

(v) Δ est dit régulier si chaque cône de Δ est engendré par une partie d'une $\mathbb{Z}$-base de N.

Lorsque Δ n'est pas régulier, il est possible de construire un *raffinement* Δ' de Δ (*i.e.* chaque cône de Δ est une réunion de cônes de Δ') tel que Δ' soit régulier et tel que l'application induite entre Δ' et Δ soit propre et birationnelle (voir le livre de Oda [O88], paragraphe 1.5). L'objectif d'une telle manipulation est de pouvoir se ramener à une variété torique $V_{\Delta'}$ non singulière.

On appelle rayon les cônes de dimension 1 et on note $\Delta(1)$ leur cardinal. Lorsque l'éventail est régulier et complet, cette construction permet aisément de calculer le rang du groupe de Picard $\mathrm{Pic}(V_\Delta)$:

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Pic}(V_\Delta)) = \mathrm{card}\,\Delta(1) - \dim \Delta. \tag{4}$$

L'intérêt des variétés toriques est que leurs propriétés géométriques se traduisent en termes de donnée combinatoire qu'est l'éventail.

Expliquons brièvement la construction d'une variété torique à partir de son éventail Δ. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur intéressé au livre de Fulton [Fu93]. Soit $\sigma \in \Delta$. Le cône dual détermine un semi-groupe S_σ. Celui-ci est engendré de manière finie, donc on peut lui associer une $\mathbb{Q}$-algèbre de groupe $\mathbb{Q}[S_\sigma]$. À une telle algèbre correspond une variété affine $U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{Q}[S_\sigma])$. Si τ est une face de σ, alors S_σ est contenue dans S_τ et donc $\mathbb{Q}[S_\sigma]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}[S_\tau]$ ce qui fournit une application $U_\sigma \mapsto U_\tau$. Avec cette identification, ces variétés affines recollées forment une variété algébrique V_Δ.

Construisons maintenant *notre* variété. Soient le réseau $N = \mathbb{Z}^2$ et trois points de ce réseau $n_1 := (-1,2)$, $n_2 := (-1,-1)$, $n_3 := (2,-1)$. On définit Δ l'éventail composé de trois rayons τ_i engendrés par les n_i et des trois cônes σ_i de dimension deux engendrés par n_{i+1}, n_{i+2}. Notons tout de suite que Δ n'est pas régulier donc la variété considérée n'est pas lisse.

Soit (e_1, e_2) la base du réseau N et (e_1^*, e_2^*) la base duale dans $\mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$. Le semi-groupe S_{σ_1} est engendré par $e_1^* + 2e_2^*$, $2e_1^* + e_2^*$, $e_1^* + e_2^*$. On lui associe $\mathbb{Q}[S_{\sigma_1}]$ l'algèbre de groupe $\mathbb{Q}[XY^2, X^2Y, XY]$. On obtient ainsi

$$U_{\sigma_1} = \{(y,z,t) \in \mathbb{Q}^3 \ \text{ tel que } \ yz = t^3\}.$$

On fait la même chose pour les autres cônes de Δ. Les trois variétés affines U_{σ_i} obtenues correspondent en fait aux points de V_Δ tels que respectivement $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Dans la géométrie algébrique moderne, une variété algébrique est vue comme un cas particulier de schéma. Ici on définit la variété V_Δ de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{Q}}$ comme l'ensemble des zéros dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ du polynôme homogène de degré trois $XYZ - T^3$. Le plongement dans $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ définit la hauteur $h : h(P) = \max\{|x|, |y|, |z|, |t|\}$ lorsque le point P de $\mathbb{P}_3(\mathbb{Q})$ est représenté par (x,y,z,t) et $\mathrm{pgcd}(x,y,z,t) = 1$.

Soit U le sous-ensemble de V_Δ composé des quadruplets (x,y,z,t) tels que $xyz \neq 0$. On note que U est bien un ouvert pour la topologie de Zariski. De plus, U évite les sous-variétés accumulatrices de V_Δ. On peut donc affirmer la formule

$$V(X) = \tfrac{1}{4} N_U(X). \tag{5}$$

Cette transformation du problème en un dénombrement de points entiers positifs est faite d'une manière générale dans [S98].

Pour utiliser la formule (4), il faut que l'éventail soit régulier. Nous contruisons un raffinement de Δ qui le sera. On pose $n_4 := (1,0)$ $n_5 := (0,1)$, $n_6 := (-1,1)$ $n_7 := (-1,0)$, $n_8 := (0,-1)$ et $n_9 := (1,-1)$. L'éventail Δ' défini à partir des points n_i avec $i \in \{1, \dots, 9\}$ est un raffinement de Δ qui est lui régulier et complet. On a alors

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Pic}(V_{\Delta'})) = \mathrm{card}\,\Delta'(1) - \dim \Delta' = 9 - 2 = 7.$$

L'application induite de $V_{\Delta'}$ dans V_Δ, qui est un isomorphisme sur l'ouvert U, permet de se ramener à un compte sur une variété lisse. La hauteur donnée par le maximum des valeurs absolues des coordonnées correspond à une hauteur sur $V_{\Delta'}$ associée à un faisceau anticanonique. Le degré 6 du polynôme Q de la formule (1) est donc attendu. On remarque aussi que $4C$ est la constante conjecturée par Peyre [P93], obtenue par Batyrev et Tschinkel [BT98-2] et par Salberger [S98].

1.4. Présentation arithmétique du problème. — Notons Φ la fonction qui a un entier générique n associe $\Phi(n)$ le plus petit entier tel que $n\Phi(n)$ soit un cube. Cette fonction est multiplicative (*i.e.* $\Phi(mn) = \Phi(m)\Phi(n)$ pour tout entier m, n tels que $(m,n) = 1$) et peut être aussi définie par

$$\Phi(p) = p^2, \quad \Phi(p^2) = p, \quad \Phi(p^{\nu+3\mu}) = \Phi(p^\nu)$$

pour tout entier ν, μ et p premier.

Pour (x, y) fixé, il existe un entier z tel que $(x, y, z) \in E_\infty$ si et seulement si $(d, \Phi(xy)) = 1$ où l'on note $d = (x, y)$.

L'assertion $(x, y, z) \in E_\infty$ équivaut à

$$(6) \qquad (d, \Phi(xy)) = 1, \quad \Phi(xy) \mid z, \quad \frac{z}{\Phi(xy)} \text{ est un cube,} \quad \Big(d, \frac{z}{\Phi(xy)}\Big) = 1.$$

On en déduit que $(x, y, z) \in E_\infty$ équivaut à

$$(7) \qquad \begin{cases} v_p(x) + v_p(y) + v_p(z) \equiv 0 \pmod 3, \\ v_p(x)v_p(y)v_p(z) = 0 \end{cases} \quad \text{pour tout } p \text{ premier.}$$

Grâce à cette remarque, nous allons estimer

$$V(X) = \sum_{x \leqslant X} \sum_{y \leqslant X} \sum_{\substack{z \leqslant X \\ (x,y,z) \in E_\infty}} 1.$$

La démonstration du Théorème 1.1 consiste à appliquer de manière attentive des méthodes d'intégration complexe classiques en théorie des nombres. Cependant, nous cherchons à évaluer une somme triple. Quelques lemmes techniques d'intérêt intrinsèque sont alors nécessaires.

C'est un devoir et un plaisir d'exprimer ma gratitude à E. Fouvry, E. Peyre, P. Salberger, J.-L. Colliot-Thélène pour leurs conseils, leurs suggestions et leurs encouragements. Qu'ils soient ici remerciés !

2. Démonstration des résultats

2.1. Préliminaires. — Pour estimer $V(X)$, nous aurons besoin de la formule de Perron énoncée sous la forme suivante (voir le livre de Tenenbaum [T95], théorème II.2.3) :

***Lemme 2.1* (Une formule de Perron).** — *Soit $\mathcal{A}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ la série de Dirichlet associée à la suite $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'abscisse de convergence σ_c. Sous les conditions $\kappa > \max\{0, \sigma_c\}$ et $X \geqslant 1$, on a*

$$(8) \qquad \int_1^X \sum_{n \leqslant x} a_n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - i\infty}^{\kappa + i\infty} \mathcal{A}(s) \frac{X^{s+1}}{s(s+1)} \, \mathrm{d}s.$$

Le passage de l'évaluation de $\int_1^X \sum_{n\leqslant x} a_n \,\mathrm{d}x$ à celle de $\sum_{n\leqslant X} a_n$ est classique (voir le chapitre II.5 sur la méthode de Selberg–Delange du livre de Tenenbaum [T95]). En considérant la moyenne de la somme, on fait apparaître une intégrale absolument convergente dans la formule de Perron.

Posons

$$S(X_1,X_2,X_3) := \sum_{x\leqslant X_1}\sum_{y\leqslant X_2}\sum_{\substack{z\leqslant X_3\\(x,y,z)\in E_\infty}} 1$$

de sorte que $V(X)=S(X,X,X)$. Pour évaluer $S(X,X,X)$, nous considérons tout d'abord

$$M = M(X_1,X_2,X_3) := \int_1^{X_1}\int_1^{X_2}\int_1^{X_3} S(U,V,W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}U \tag{9}$$

lorsque $X_1 \asymp X_2 \asymp X_3$ i. e. lorsqu'il existe des constantes absolues $c_1>0$ et $c_2>0$ telles que $c_1X_1 \leqslant X_2, X_3 \leqslant c_2X_1$.

Pour passer d'une évaluation de M à S, nous introduisons un opérateur $\mathcal{T}$ défini de l'ensemble des fonctions à trois variables $\mathcal{E}_3$ dans l'ensemble des fonctions à deux variables $\mathcal{E}_2$:

$$(\mathcal{T}f) : \quad \begin{aligned}(\mathcal{T}f)(X,Y) := {} & f(Y,Y,Y) - f(X,Y,Y)\\ & - f(Y,X,Y) - f(Y,Y,X)\\ & + f(Y,X,X) + f(X,Y,X)\\ & + f(X,X,Y) - f(X,X,X).\end{aligned}$$

L'introduction de cet outil permet de minimiser le terme d'erreur dans S. Nous avons rassemblé dans le lemme suivant les propriétés de $\mathcal{T}$ dont nous aurons besoin.

Lemme 2.2. — (i) *Soit une fonction $f\in\mathcal{E}_3$ de classe C^3. On a*

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(X,Y) &= \int_X^Y\int_X^Y\int_X^Y \frac{\partial^3 f}{\partial X_1\partial X_2\partial X_3}(X_1,X_2,X_3)\,\mathrm{d}X_1\,\mathrm{d}X_2\,\mathrm{d}X_2\\ &\ll |Y-X|^3 \sup_{\substack{X_1\in[X,Y]\\X_2,X_3\in[X,Y]}}\Big|\frac{\partial^3 f}{\partial X_1\partial X_2\partial X_3}(X_1,X_2,X_3)\Big|.\end{aligned}$$

(ii) *Soit une fonction $f\in\mathcal{E}_3$ de classe C^4. On a*

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}f)(X,Y) &= (Y-X)^3\frac{\partial^3 f}{\partial X_1\partial X_2\partial X_3}(X,X,X)\\ &\quad + O\Big(|Y-X|^4\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}\sup_{\substack{X_1\in[X,Y]\\X_2,X_3\in[X,Y]}}\Big|\frac{\partial^4 f}{\partial X_i^2\partial X_j\partial X_k}(X_1,X_2,X_2)\Big|\Big).\end{aligned}$$

(iii) *Soient f_1, f_2, f_3 des fonctions d'une seule variable et $f \in \mathcal{E}_3$ définie par $f(X_1, X_2, X_3) = f_1(X_1)f_2(X_2)f_3(X_3)$. On a*

$$(\mathfrak{T}f)(X,Y) = (f_1(Y) - f_1(X))(f_2(Y) - f_2(X))(f_3(Y) - f_3(X)).$$

(iv) *Pour $H \leqslant X$, on a*

$$(\mathfrak{T}M)(X-H,X) \leqslant H^3 S(X,X,X) \leqslant (\mathfrak{T}M)(X,X+H).$$

Démonstration. — Les trois premiers points reposent sur des notions de base de calcul différentiel. Le quatrième se déduit de la croissance de $S(X_1, X_2, X_3)$ par rapport à chaque variable et de la formule

$$(\mathfrak{T}M)(X,X+H) = \int_X^{X+H} \int_X^{X+H} \int_X^{X+H} S(U,V,W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}U.$$

□

Proposition 2.3. — *Pour $i = 1,2,3$, soient $X_i \in [1,\infty[$. Soit*

$$H := \max_i \{|X_i - X|\}.$$

Il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ de degré total égal à 6, une constante $c > 0$ et une fonction $R \in \mathcal{E}_3$ tels que l'on ait l'estimation

$$M(X_1,X_2,X_3) = X_1^{4/3}X_2^{4/3}X_3^{4/3}P(\log X_1, \log X_2, \log X_3) + R(X_1,X_2,X_3) \tag{10}$$

avec pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $1 \leqslant H \leqslant \frac{1}{2}X$

(11)
$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{T}R)(X,X+H)\\ (\mathfrak{T}R)(X-H,X)\end{array}\right\} \ll X^{4-1/2-\varepsilon} + H^4(\log X)^7 + H^3X^{7/8}\exp\{-cN(X)\}.$$

De plus, la somme des coefficients des monômes de P de degré total égale à 6 est égale à $\left(\frac{3}{4}\right)^3 C$ où C est la constante définie dans l'énoncé du Théorème 1.1.

Remarque 2.4. — On peut montrer, sans avoir recours à l'opérateur $\mathfrak{T}$, que

$$R(X_1,X_2,X_3) \ll X^{7/8}\exp\{-cN(X)\}$$

lorsque $X_1 \asymp X_2 \asymp X_3 \asymp X$. Mais cela ne donnerait qu'une forme affaiblie du Théorème 1 avec un exposant $\frac{31}{32}$ au lieu de $\frac{7}{8}$. Cela justifie l'utilisation de l'opérateur $\mathfrak{T}$.

En utilisant le Lemme 2.2 nous montrons qu'il suffit d'établir la Proposition 2.3 pour démontrer le Théorème 1.1.

Lemme 2.5. — *La Proposition 2.3 implique le Théorème 1.1 avec Q défini par la relation*

(12)
$$XQ(\log X) = \frac{\partial^3}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} \big(X_1^{4/3} X_2^{4/3} X_3^{4/3} P(\log X_1, \log X_2, \log X_3) \big)_{X_\ell = X}.$$

De plus, on vérifie que le coefficient dominant de Q est égal à C où C est la constante définie dans l'énoncé du Théorème.

Démonstration du Lemme 2.5. — En utilisant le Lemme 2.2 et la Proposition 2.3, on obtient

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}M)(X, X+H) \\ &= H^3 \frac{\partial^3}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3} \big(X_1^{4/3} X_2^{4/3} X_3^{4/3} P(\log X_1, \log X_2, \log X_3) \big)_{X_\ell = X} \\ &\quad + (\mathfrak{T}R)(X, X+H) + O(H^4 (\log X)^6).\end{aligned}$$

Au vu de (12) et (11), on a pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit

$$\begin{aligned}\frac{(\mathfrak{T}M)(X, X+H)}{H^3} - XQ(\log X) \\ &= O\Big(H(\log X)^7 + (X/H)^3 X^{1-1/2-\varepsilon} + X^{7/8} \exp\{-cN(X)\} \Big).\end{aligned}$$

On a la même estimation pour $(\mathfrak{T}M)(X-H, X)/H^3$. Le point (iv) du Lemme 2.2 fournit alors

$$\begin{aligned}S(X, X, X) - XQ(\log X) \ll H(\log X)^7 + (X/H)^3 X^{1-1/2-\varepsilon} \\ + X^{7/8} \exp\{-cN(X)\}.\end{aligned}$$

On conclut la démonstration en prenant

$$H = \frac{X^{7/8}}{(\log X)^7} \exp\{-cN(X)\}. \quad \square$$

2.2. Application de la formule de Perron. — Nous commençons l'évaluation de M en appliquant successivement trois fois la formule de Perron.

Lemme 2.6. — *Lorsque* $\frac{1}{2}X \leqslant X_i \leqslant \frac{3}{2}X$, $T_i \geqslant 1$ *et* $\kappa_i - \frac{1}{3} \geqslant 1/\log X$, *on a*

(13)
$$\begin{aligned}M = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{\kappa_1 - iT_1}^{\kappa_1 + iT_1} \int_{\kappa_2 - iT_2}^{\kappa_2 + iT_2} \int_{\kappa_3 - iT_3}^{\kappa_3 + iT_3} F(s_1, s_2, s_3) \frac{X_1^{s_1+1} X_2^{s_2+1} X_3^{s_3+1} \, \mathrm{d}s_3 \, \mathrm{d}s_2 \, \mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1) s_2(s_2+1) s_3(s_3+1)} \\ + O\Big(X^4 \frac{(\log X)^9}{\min_i T_i} \Big)\end{aligned}$$

avec

$$F(s_1,s_2,s_3)=\zeta(3s_1)\zeta(3s_2)\zeta(3s_3)\times\prod_p\Big(1+\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}(1-p^{-3s_k})p^{-2s_i-s_j}-p^{-3s_1-3s_2-3s_3}\Big). \tag{14}$$

Remarque 2.7. — Le terme d'erreur de (13) sera englobé dans celui de la Proposition 2.3 dès que $T\geqslant X^{1/2+\varepsilon}$.

La fonction F est étudiée à la sous-section 3.2.

Démonstration du Lemme 2.6. — Nous calculons tout d'abord

$$F(s_1,s_2,s_3)=\sum_{(x,y,z)\in E_\infty}\frac{1}{x^{s_1}y^{s_2}z^{s_3}}$$

pour $\Re e\, s_i>1/3$ où $i=1,2,3$. On remarque que cette somme est absolument convergente lorsque $\Re e\, s_i\geqslant\kappa>1/3$. En effet, on a

$$\sum_{(x,y,z)\in E_\infty}\left|\frac{1}{x^{s_1}y^{s_2}z^{s_3}}\right|\leqslant\sum_{t=1}^{\infty}\frac{d_3(t^3)}{t^{3\kappa}}\ll_\kappa 1$$

où l'on a utilisé la notation classique $d_3(t):=\operatorname{card}\{(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ t_1t_2t_3=t\}$.

L'équivalence (7) permet d'écrire F sous la forme d'un produit eulérien. Notant

$$J:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_1+n_2+n_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,3),\qquad n_1n_2n_3=0\big\},$$

on a

$$F(s_1,s_2,s_3)=\prod_p\Big(\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J}p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3}\Big).$$

Pour calculer la somme sur J, on scinde cet ensemble en une partition de dix ensembles. Nous posons

$$\begin{aligned}
J_{i,j,k}&:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_i\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,3),\ n_j\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,3),\ n_k=0\big\},\\
J'_0&:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_3\in 3\mathbb{N},\ n_1=0,\ n_2=0\big\},\\
J'_1&:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_1\in 3\mathbb{N}^*,\ n_3\in 3\mathbb{N},\ n_2=0\big\},\\
J'_2&:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_2\in 3\mathbb{N}^*,\ n_3\in 3\mathbb{N},\ n_1=0\big\},\\
J'_3&:=\big\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3\ :\ n_1\in 3\mathbb{N}^*,\ n_2\in 3\mathbb{N}^*,\ n_3=0\big\}.
\end{aligned}$$

Un simple calcul fournit

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J_{i,j,k}} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3} = \frac{p^{-2s_i-s_j}}{(1-p^{-3s_i})(1-p^{-3s_j})},$$

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J'_0} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3} = \frac{1}{(1-p^{-3s_3})},$$

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J'_1} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3} = \frac{p^{-3s_1}}{(1-p^{-3s_1})(1-p^{-3s_3})},$$

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J'_2} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3} = \frac{p^{-3s_2}}{(1-p^{-3s_2})(1-p^{-3s_3})},$$

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J'_3} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3} = \frac{p^{-3s_1-3s_2}}{(1-p^{-3s_1})(1-p^{-3s_2})}.$$

En faisant la somme de ces quantités, nous obtenons

$$\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in J} p^{-n_1s_1-n_2s_2-n_3s_3}$$
$$= \frac{1+\sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}}(1-p^{-3s_k})p^{-2s_i-s_j} - p^{-3s_1-3s_2-3s_3}}{(1-p^{-3s_1})(1-p^{-3s_2})(1-p^{-3s_3})},$$

ce qui fournit l'expression voulue de $F(s_1,s_2,s_3)$.

Pour $\Re e\, s_i = \kappa_i$, $(i \in \{1,2,3\})$ vérifiant les hypothèses du lemme, on a la majoration

$$|F(s_1,s_2,s_3)| \ll (\log X)^9. \tag{15}$$

En appliquant trois fois la formule de Perron, nous obtenons

$$M = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\kappa_1-i\infty}^{\kappa_1+i\infty}\int_{\kappa_2-i\infty}^{\kappa_2+i\infty}\int_{\kappa_3-i\infty}^{\kappa_3+i\infty} F(s_1,s_2,s_3)\frac{X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}X_3^{s_3+1}\,\mathrm{d}s_3\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)s_3(s_3+1)}.$$

On déduit de (15) l'estimation du Lemme 2.6. □

Nous appliquons le Lemme 2.6 en prenant

$$\begin{gathered}\kappa_1 = \tfrac13 + 25/\log X, \quad \kappa_2 = \tfrac13 + 5/\log X, \quad \kappa_3 = \tfrac13 + 1/\log X,\\ T_1 = T, \quad T_2 = 3T, \quad T_3 = 9T, \quad \tfrac12 X \leq X_i \leqslant \tfrac32 X.\end{gathered} \tag{16}$$

Dans toute la suite de ce travail, nous utilisons un paramètre $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'il est nécessaire. On note $\delta := \frac14 - \varepsilon \in]0, \frac14[$. Nous utiliserons aussi la notation classique

$$\sigma_i = \Re e\, s_i, \quad \tau_i = \Im m\, s_i.$$

Pour estimer l'intégrale triple du Lemme 2.6, nous décalons successivement vers la gauche les droites d'intégration en appliquant le théorème des résidus. Nous avons à faire face à deux sortes de problèmes. L'un est de calculer les résidus des pôles rencontrés ; l'autre est de montrer que la contribution de certains contours peut être englobée par le terme d'erreur (11).

3. Application du théorème des résidus

3.1. Préliminaires. — Nous aurons besoin d'une majoration de la fonction ζ de Riemann dans la bande $\Re e\, s \in [0,1]$.

Lemme 3.1. — (i) *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* $\sigma \in [\frac{1}{2}, +\infty[$ *et* $|\sigma + i\tau - 1| \geqslant 1/\log X$, *on a*

$$|\zeta(\sigma + i\tau)| \ll_\varepsilon (\log X)(1 + |\tau|)^{\max\{(1-\sigma)/3+\varepsilon,0\}}. \tag{17}$$

Pour $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$, *on a*

$$|\zeta(\sigma + i\tau)| \ll_\varepsilon (1 + |\tau|)^{\frac{(3-4\sigma)}{6}+\varepsilon}. \tag{18}$$

(ii) *Il existe une constante* $c_0 > 0$ *telle que la fonction* ζ *n'admette pas de zéro dans la région définie par*

$$\sigma \geqslant 1 - c_0(\log(|\tau| + 3))^{-2/3}(\log_2(|\tau| + 3))^{-1/3}.$$

Dans cette région, on a

$$1/\zeta(s) \ll (\log(|\tau| + 3))^{2/3}(\log_2(|\tau| + 3))^{1/3}.$$

Pour une démonstration du Lemme 3.1(i), nous renvoyons le lecteur au livre de Tenenbaum [T95], théorème II.3.6. On peut trouver une démonstration détaillée de la majoration de Korobov et Vinogradov énoncée au point (ii) dans le chapitre 6 du livre d'Ivić [I85].

Nous énonçons, sous la forme d'un lemme, un résultat de nature purement technique afin de pouvoir s'y référer ultérieurement

Lemme 3.2. — (i) *Soit* $\beta \in [0,1]$ *et* $\varepsilon > 0$. *On a pour* $1 \leqslant H \leqslant X$ *et* $\sigma \in [0,2]$ *la majoration*

$$\left|(X + H)^{\sigma+i\tau+1} - X^{\sigma+i\tau+1}\right| \ll X^{\sigma+1}\Big((|\tau| + 1)\frac{H}{X}\Big)^{\beta}. \tag{19}$$

(ii) *Soient* $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ *tels que* $\frac{1}{4}a + 2b > 1$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tel que pour chaque* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ *on ait uniformément pour* $1 \leqslant H \leqslant X$ *la majoration*

$$\Big(\frac{H}{X}\Big)^a X^{-b} \ll \Big(\frac{H}{X}\Big)^4 + X^{-1/2-\varepsilon}. \tag{20}$$

Démonstration. — La partie à majorer est inférieure à la fois à $X^{\sigma+1}$ et à

$$X^{\sigma+1}(|\tau| + 1)(H/X).$$

En prenant le produit du premier majorant pris à la puissance $1 - \beta$ et du second pris à la puissance β, on obtient le majorant annoncé.

La majoration (20) peut se démontrer en distinguant le cas $X^{-1/2} \leqslant (H/X)^4$ et le cas $(H/X)^4 \leqslant X^{-1/2}$. $\square$

3.2. Étude de $F(s_1, s_2, s_3)$. — Soit G la fonction définie implicitement par

$$\begin{aligned} F(s_1, s_2, s_3) = \zeta(3s_3)\zeta(s_3 + 2s_2)\zeta(2s_3 + s_2)\zeta(s_3 + 2s_1)\zeta(2s_3 + s_1) \\ \times \zeta(3s_2)\zeta(3s_1)\zeta(s_2 + 2s_1)\zeta(2s_2 + s_1)G(s_1, s_2, s_3). \end{aligned} \tag{21}$$

On peut écrire

$$G(s_1, s_2, s_3) = \prod_p \left(1 + \Delta(p^{-s_1}, p^{-s_2}, p^{-s_3})\right) \tag{22}$$

où Δ est un polynôme en trois variables qui est une somme de monômes qui sont chacun de degré total supérieur à 6. À partir d'une expression de Δ, on affirme que la fonction G est une fonction holomorphe en s_3 pour $\Re e\, s_3 > \frac{1}{12}$ pour s_1 et s_2 fixés tels que $\Re e\, s_1 = \kappa_1$, $\Re e\, s_2 = \kappa_2$. La fonction $s_3 \mapsto F(s_1, s_2, s_3)$ est donc méromorphe sur le demi-plan $\Re e\, s_3 > \frac{1}{12}$ et admet cinq pôles :

$$\begin{aligned} u_1(s_1, s_2) := \tfrac{1}{3},\ u_2(s_1, s_2) := \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_2,\ u_3(s_1, s_2) := \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}s_1, \\ u_4(s_1, s_2) := 1 - 2s_2,\ u_5(s_1, s_2) := 1 - 2s_1, \end{aligned} \tag{23}$$

d'ordre de multiplicité égal à 1. Nos hypothèses sur κ_2 et κ_1 permettent d'affirmer que tous les pôles u_i sont distincts. Il est aussi intéressant de noter que

$$F(s_1, s_2, s_3) = F(s_i, s_j, s_k)$$

lorsque $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. La constante

$$G(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \prod_p \left\{ \left(1 - \frac{1}{p}\right)^7 \left(1 + \frac{7}{p} + \frac{1}{p^2}\right) \right\} \tag{24}$$

est le produit eulérien apparaissant dans la définition de la constante C du Théorème 1.1.

On aura également besoin d'une bonne majoration de $F(s_1, s_2, s_3)$ sur les lignes verticales. Le Lemme 3.1 fournit lorsque

$$\sigma_1 = \kappa_1, \quad \sigma_2 = \kappa_2, \quad \sigma_3 \in [\tfrac{1}{3} - \delta, \kappa_3], \quad |s_3 - u_i(s_1, s_2)| \geqslant 1/\log X,$$

la majoration

$$|F(s_1, s_2, s_3)| \ll (\log X)^9 (1 + |\tau_3|)^{\frac{1}{3}} (1 + |\tau_3| + |\tau_1|)^{\frac{1}{4}} (1 + |\tau_3| + |\tau_2|)^{\frac{1}{4}}. \tag{25}$$

3.3. Première application du théorème des résidus. — Nous appliquons une première fois le théorème des résidus pour estimer la quantité $M(X_1,X_2,X_3)$.

Lemme 3.3. — *Nous nous plaçons sous les hypothèses* (16). *Il existe une fonction* $R_0\in\mathcal{E}_3$ *vérifiant*

$$\left.\begin{aligned}(\mathcal{T}R_0)(X,X+H)\\(\mathcal{T}R_0)(X-H,X)\end{aligned}\right\}\ll X^{4-1/2-\varepsilon}+H^4. \tag{26}$$

telle que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT}\int_{\kappa_3-9iT}^{\kappa_3+9iT}F(s_1,s_2,s_3)\frac{X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}X_3^{s_3+1}\,\mathrm{d}s_3\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)s_3(s_3+1)}\\&\qquad=\sum_{i=1}^{5}M_i(X_1,X_2,X_3)+R_0(X_1,X_2,X_3)+O\Big(X^4\frac{(\log X)^9}{T^{1/6}}\Big),\end{aligned} \tag{27}$$

avec

$$\begin{cases}F_1(s_1,s_2) &:= \frac13\zeta(\frac13+2s_2)\zeta(\frac23+s_2)\zeta(3s_2)\zeta(\frac13+2s_1)\zeta(\frac23+s_1)\zeta(3s_1)\\ &\qquad\times\zeta(s_2+2s_1)\zeta(2s_2+s_1)G(s_1,s_2,\frac13),\\ F_2(s_1,s_2) &:= \frac12\zeta(-\frac32s_2+\frac32)\zeta(s_1-s_2+1)\zeta(\frac32s_2+\frac12)\zeta(2s_1-\frac12s_2+\frac12)\\ &\qquad\times\zeta(3s_2)\zeta(3s_1)\zeta(s_2+2s_1)\zeta(2s_2+s_1)G(s_1,s_2,\frac12-\frac12s_2),\\ F_3(s_1,s_2) &:= F_2(s_2,s_1),\\ F_4(s_1,s_2) &:= 2F_2(s_1,1-2s_2),\\ F_5(s_1,s_2) &:= F_4(s_2,s_1)=2F_2(s_2,1-2s_1),\end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}&M_i(X_1,X_2,X_3)\\&\quad:=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT}\frac{F_i(s_1,s_2)X_3^{u_i(s_1,s_2)+1}X_2^{s_2+1}X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{u_i(s_1,s_2)(u_i(s_1,s_2)+1)s_2(s_2+1)s_1(s_1+1)}.\end{aligned}$$

Remarque 3.4. — Par commodité, nous ne préciserons pas dans la démonstration la dépendance en X_1,X_2,X_3 des $M_i(X_1,X_2,X_3)$.

Démonstration. — Nous décalons la droite d'intégration de l'abscisse κ_3 jusqu'à l'abscisse $\frac13-\delta$. Nous appliquons le théorème des résidus au contour $C_0(\kappa_3)$ joignant les points d'affixe

$$\kappa_3-9iT,\ \kappa_3+9iT,\ \tfrac13-\delta+9iT,\ \tfrac13-\delta-9iT,\ \kappa_3-9iT.$$

Pour majorer la contribution sur les droites horizontales, on utilise la formule issue de (25)

$$|F(s_1,s_2,s_3)|\ll(\log X)^9(1+T)^{\frac56}$$

valable lorsque

$$\sigma_1 = \kappa_1,\ \sigma_2 = \kappa_2,\ \sigma_3 \in [\tfrac{1}{3} - \delta, \kappa_3],\ |\tau_3| \leqslant 9T,\ |\tau_2| \leqslant 3T,\ |\tau_1| \leqslant T.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\kappa_1 - iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT}\int_{\kappa_3-9iT}^{\kappa_3+9iT} F(s_1,s_2,s_3)\frac{X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}X_3^{s_3+1}\,\mathrm{d}s_3\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)s_3(s_3+1)}\\ = \sum_{i=1}^{5} M_i(X_1,X_2,X_3) + R_0(X_1,X_2,X_3) + O\Big(X^4\frac{(\log X)^9}{T^{1/6}}\Big),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}&R_0(X_1,X_2,X_3)\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT}\int_{\frac13-\delta-9iT}^{\frac13-\delta+9iT} F(s_1,s_2,s_3)\frac{X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}X_3^{s_3+1}\,\mathrm{d}s_3\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)s_3(s_3+1)}.\end{aligned}$$

Il reste à établir (26). Le Lemme 2.2(ii) implique

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{T}R_0)(X,X+H)\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT}\int_{\frac13-\delta-9iT}^{\frac13-\delta+9iT} F(s_1,s_2,s_3)\frac{r_{X,X+H}(s_1,s_2,s_3)\,\mathrm{d}s_3\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)s_3(s_3+1)}\end{aligned}$$

avec

$$r_{X,X+H}(s_1,s_2,s_3) := \prod_{i\in\{1,2,3\}}((X+H)^{s_i+1} - X^{s_i+1}).$$

La majoration (25) de F peut s'écrire sous la forme

$$F(s_1,s_2,s_3) \ll (\log X)^9 \sum_j \prod_{i=1,2,3} (|\tau_i|+1)^{\alpha_{i,j}}$$

où les coefficients $\alpha_{i,j}$ vérifient

$$\alpha_{i,j} \in [0,1[, \qquad \max_j\Big\{\sum_i \alpha_{i,j}\Big\} = \tfrac{5}{6}.$$

On en déduit

$$(\mathfrak{T}R_0)(X,X+H) \ll (\log X)^9 \times \sum_j \int_{-T}^{T}\int_{-3T}^{3T}\int_{-9T}^{9T} \frac{\left|r_{X,X+H}(\kappa_1+i\tau_1,\kappa_2+i\tau_2,\kappa_3+i\tau_3)\right|}{\prod_{i=1,2,3}\left(|\tau_i|+1\right)^{2-\alpha_{i,j}}}\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2\,\mathrm{d}\tau_3.$$

La majoration

$$\left|r_{X,X+H}(\kappa_1+i\tau_1,\kappa_2+i\tau_2,\kappa_3+i\tau_3)\right| \ll X^{4-\delta}\prod_{i=1,2,3}\left((|\tau_i|+1)(H/X)\right)^{1-\alpha_{i,j}}$$

issue du Lemme 3.2(i) implique alors

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}R_0)(X,X+H) &\ll X^{4-\delta}(\log X)^9(\log T)^3(H/X)^{3-\max_j\{\sum_i\alpha_{i,j}\}}\\ &\ll X^{4-1/4+2\varepsilon}(H/X)^{\frac{13}{6}}.\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 3.2(ii), il vient

$$(\mathfrak{T}R_0)(X,X+H) \ll X^{4-\frac{1}{2}-\varepsilon}+H^4$$

puisque pour ε suffisamment petit $\frac{1}{4}(\frac{13}{6})+2(\frac{1}{4}-2\varepsilon)>1$. Ceci achève la démonstration du Lemme 3.3. □

Il reste à évaluer les quantités $M_i = M_i(X,X_2,X_3)$.

3.4. Estimation de $M_1(X_1,X_2,X_3)$. — Notons

$$G_1(s_1,s_2) := G(s_1,s_2,\tfrac{1}{3}) \quad \text{et} \quad H_1(s_1) := \zeta(\tfrac{1}{3}+2s_1)\zeta(\tfrac{2}{3}+s_1)\zeta(3s_1)$$

de sorte que

$$F_1(s_1,s_2) = \frac{1}{3}H_1(s_1)H_1(s_2)\zeta(s_2+2s_1)\zeta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2).$$

La fonction $s_2 \to G_1(s_1,s_2)$ est une fonction holomorphe dans le demi plan $\Re e\, s_2 > \frac{1}{12}$ lorsque $\Re e\, s_1 \geqslant \frac{1}{3}$ et uniformément bornée lorsque $\Re e\, s_2 \geqslant \frac{1}{3}-\delta$. La fonction $s_2 \mapsto F_1(s_1,s_2)$ est donc méromorphe sur le demi-plan $\Re e\, s_2 > \frac{1}{12}$ lorsque $\Re e\, s_1 > \frac{1}{3}$ et admet trois pôles : $1-2s_1$, $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1$ d'ordre de multiplicité égal à 1, et $\frac{1}{3}$ d'ordre de multiplicité égal à 3. Il est aussi intéressant de noter que $F_1(s_1,s_2) = F_1(s_2,s_1)$.

Des deux premières majorations du Lemme 3.1, on déduit la majoration

$$|F_1(s_1,s_2)| \ll (\log X)^8 (1+|\tau_2|)^{\frac{7}{12}} (1+|\tau_2|+|\tau_1|)^{\frac{1}{4}} \tag{28}$$

valable lorsque

$$\begin{aligned} &\Re e\, s_1 = \kappa_1,\ \Re e\, s_2 \in [\tfrac{1}{3}-\delta, \kappa_2], \\ &\min\{|s_2-(1-2s_1)|, |s_2-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s_1)|, |s_2-\tfrac{1}{3}|\} \geqslant 1/\log X. \end{aligned} \tag{29}$$

Décalons la droite d'intégration d'abscisse κ_2 jusqu'à l'abscisse $\frac{1}{3}-\delta$. Le théorème des résidus et la majoration (28) fournissent

$$M_1 = \tfrac{9}{4}\sum_{i=1}^{3} M_{1i}(X_1,X_2,X_3) + \tfrac{9}{4}R_{10}(X_1,X_2,X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^9}{T^{1/6}}\Big) \tag{30}$$

avec

$$R_{10}(X_1,X_2,X_3) := \frac{X_3^{4/3}}{(2\pi i)^2}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\int_{\frac{1}{3}-\delta-i3T}^{\frac{1}{3}-\delta+i3T} F_1(s_1,s_2)\frac{X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_2(s_2+1)s_1(s_1+1)}$$

et

$$\begin{cases} M_{11}(X_1,X_2,X_3), \\ \quad = \dfrac{X_3^{4/3}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \operatorname*{Res}_{s_2=1-2s_1}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big)\frac{X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)}, \\ M_{12}(X_1,X_2,X_3), \\ \quad = \dfrac{X_3^{4/3}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \operatorname*{Res}_{s_2=1/2-s_1/2}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big)\frac{X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)}, \\ M_{13}(X_1,X_2,X_3) \\ \quad = \dfrac{X_3^{4/3}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big)\frac{X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)}. \end{cases} \tag{31}$$

Nous majorons $\mathfrak{T}R_{10}(X,X+H)$ grâce à la majoration (28). D'après le Lemme 2.2 et le Lemme 3.2, on a

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}R_{10})(X,X+H) &\ll X^{4-\delta}(\log X)^9(\log T)^2(H/X)^{13/6} \\ &\ll X^4X^{-1/4+2\varepsilon}(H/X)^{13/6}.\end{aligned}$$

La deuxième partie du Lemme 3.2 permet d'affirmer que

$$(\mathfrak{T}R_{10})(X,X+H) \ll X^4\Big(X^{-1/4-\varepsilon}+(H/X)^4\Big)$$

puisque, pour ε suffisamment petit, on a l'inégalité $\frac{1}{4}\big(\frac{13}{6}\big)+2\big(\frac{1}{4}-2\varepsilon\big) > 1$. Donc $(\mathfrak{T}R_{10})(X,X+H)$ (ainsi que $(\mathfrak{T}R_{10})(X-H,X)$) peut être englobé dans le terme d'erreur (11) de la Proposition 2.3.

Calculons maintenant les résidus apparaissant dans (31).

Lemme 3.5. — *Notant*

$$F_{12}(s_1) := \frac{1}{3}H_1(s_1)H_1(1-2s_1)\zeta(2-3s_1)G_1(s_1,1-2s_1)$$

on a

$$\operatorname*{Res}_{s_2=1-2s_1}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big) = \frac{F_{12}(s_1)}{(2-2s_1)(1-2s_1)}X_2^{2-2s_1},$$

$$\operatorname*{Res}_{s_2=1/2-s_1/2}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big) = \frac{1}{2}\frac{F_{12}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1)}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s_1)}X_2^{3/2-s_1/2}.$$

Il existe trois fonctions g_1, g_2, g_3 holomorphes dans le demi-plan $\Re e\, s_1 > \frac{1}{12}$ telles que

$$\begin{aligned}(32)\qquad &\operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big)\\ &\qquad = X_2^{4/3}\Big(\frac{g_1(s_1)(\log X_2)^2}{(s_1-\frac{1}{3})^5} + \frac{g_2(s_1)\log X_2}{(s_1-\frac{1}{3})^6} + \frac{g_3(s_1)}{(s_1-\frac{1}{3})^7}\Big),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} g_1(\frac{1}{3}) = \dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{48}\times\dfrac{1}{4}, \\ g_2(\frac{1}{3}) = \dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{48}\times\dfrac{-5}{4}, \\ g_3(\frac{1}{3}) = \dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{48}\times\dfrac{21}{8}. \end{cases}$$

De plus, lorsque $\Re e\, s_1 \in [\frac{1}{3}-\delta,\kappa_1]$, $|s_1-\frac{1}{3}| \geqslant 1/\log X$, on a

$$(33)\qquad \begin{aligned} |g_1(s_1)| &\ll (1+|\tau_1|)^{5+5/6}(\log X)^6,\\ |g_2(s_1)| &\ll (1+|\tau_1|)^{6+5/6}(\log X)^7,\\ |g_3(s_1)| &\ll (1+|\tau_1|)^{7+5/6}(\log X)^8.\end{aligned}$$

Démonstration du Lemme 3.5. — Le calcul des résidus en $1-2s_1$ et $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1$ est direct. Nous détaillons maintenant le calcul du résidu en $\frac{1}{3}$ qui n'est pas immédiat.

On a

$$(34)\qquad F_1(s_1,s_2) = \tfrac{1}{3}H_1(s_1)H_1(s_2)\frac{\Theta(s_2+2s_1)\Theta(2s_2+s_1)}{(s_2+2s_1-1)(2s_2+s_1-1)}G_1(s_1,s_2)$$

où la fonction Θ, définie par $\Theta(z) = \zeta(z)(z-1)$, est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Utilisant la notation $v = (s_2 - 1/3)/(s_1 - 1/3)$, nous obtenons la formule exacte

$$\begin{aligned}(35)\quad &\frac{1}{(s_2+2s_1-1)(2s_2+s_1-1)}\\ &\qquad = \frac{1}{2(s_1-\frac{1}{3})^2}\Big\{1 - \tfrac{5}{2}v + \tfrac{21}{4}v^2 + v^3\Big(\frac{19-30v-12v^2}{2(2+v)(1+2v)}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Pour alléger l'écriture des calculs, nous utilisons dans la suite la notation

$$\mathrm{Res}_{1/3} = \operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(\frac{F_1(s_1,s_2)X_2^{s_2+1}}{s_2(s_2+1)}\Big).$$

La conjonction de (34) et (35) fournit

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{1/3} = \frac{X_2H_1(s_1)}{6(s_1-\frac{1}{3})^2}\operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(&\frac{H_1(s_2)X_2^{s_2}}{s_2(s_2+1)}\Theta(s_2+2s_1)\\ &\times\Theta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2)\Big\{1-\tfrac{5}{2}v+\tfrac{21}{4}v^2\Big\}\Big).\end{aligned}$$

Un développement de Taylor fournit l'existence des fonctions h_1, h_2, h_3 et h_4 telles que

$$\begin{aligned}&\frac{(s_2-1/3)^3H_1(s_2)}{s_2(s_2+1)}\Theta(s_2+2s_1)\Theta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2)\\ &\qquad = h_1(s_1)+h_2(s_1)(s_2-\tfrac{1}{3})+h_3(s_1)(s_2-\tfrac{1}{3})^2+(s_2-\tfrac{1}{3})^3h_4(s_1,s_2).\end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, la fonction h_i est holomorphe dans le demi-plan $\Re e\, s_1 > \frac{1}{12}$. Pour $\Re e\, s_1 = \kappa_1$, la fonction $s_2 \to h_4(s_1,s_2)$ est holomorphe au voisinage de $s_2 = \frac{1}{3}$. De plus, $h_1(\frac{1}{3}) = \frac{3}{8}G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Ces notations étant introduites, nous obtenons

(36)

$$
\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(X_2^{s_2-1/3}\frac{H_1(s_2)}{s_2(s_2+1)}\Theta(s_2+2s_1)\Theta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2)\Big)\\
&\qquad= \tfrac12 h_1(s_1)(\log X_2)^2+h_2(s_1)\log X_2+h_3(s_1),\\
&-\frac52\operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(\frac{s_2-\frac13}{s_1-\frac13}X_2^{s_2-1/3}\frac{H_1(s_2)}{s_2(s_2+1)}\Theta(s_2+2s_1)\Theta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2)\Big)\\
&\qquad= -\frac{5}{2(s_1-\frac13)}\big(h_1(s_1)\log X_2+h_2(s_1)\big),\\
&\frac{21}{4}\operatorname*{Res}_{s_2=1/3}\Big(\frac{(s_2-\frac13)^2}{(s_1-\frac13)^2}X_2^{s_2-1/3}\frac{H_1(s_2)}{s_2(s_2+1)}\Theta(s_2+2s_1)\Theta(2s_2+s_1)G_1(s_1,s_2)\Big)\\
&\qquad= \frac{21}{4(s_1-\frac13)^2}h_1(s_1).
\end{aligned}
$$

On obtient alors la relation (32) en posant

$$
\begin{cases}
g_1(s_1)=\frac{1}{12}(s_1-\frac13)^3H_1(s_1)h_1(s_1),\\
g_2(s_1)=(s_1-\frac13)^3H_1(s_1)\big(-\frac{5}{12}h_1(s_1)+\frac16(s_1-\frac13)h_2(s_1)\big),\\
g_3(s_1)=(s_1-\frac13)^3H_1(s_1)\\
\qquad\times\big(\frac{21}{24}h_1(s_1)-\frac{5}{12}(s_1-\frac13)h_2(s_1)+\frac16(s_1-\frac13)^2h_3(s_1)\big).
\end{cases}
$$

La valeur de $g_i(\frac13)$ est obtenue à partir de celle de $h_1(\frac13)=\frac38G_1(\frac13,\frac13)$ et de l'équivalent

$$(s_1-\tfrac13)^3H_1(s_1)\underset{(s_1\sim1/3)}{\sim}\tfrac16.$$

Pour terminer la démonstration du Lemme 3.5, nous vérifions les majorations annoncées de g_i qui découlent de la majoration de h_i suivante

$$
\begin{aligned}
|h_i(s_1)| &\ll \sum_{0\leqslant j+k\leqslant i}|\Theta^{(j)}(s_1+\tfrac23)|\cdot|\Theta^{(k)}(2s_1+\tfrac13)|\\
&\ll (\log X)^6(\log(2+|\tau_1|))^i(1+|\tau_1|)^{2-\Re e\, s_1}
\end{aligned}
$$

pour $\Re e\, s_1\in]\frac13-\delta,\frac13+25/\log X]$, $|s_1-\frac13|\geqslant 1/\log X$, $|\tau_1|\leqslant T$. □

Pour achever l'estimation de M_1, nous évaluons maintenant successivement les quantités M_{1i} grâce au Lemme 3.5.

Commençons par étudier M_{11} et M_{12} les quantités faisant intervenir la fonction F_{12}. Pour ce faire, nous étudions plus précisément la fonction G_2 définie par

$$G_2(s_1):=G_1(s_1,1-2s_1)=G(s_1,1-2s_1,\tfrac13).$$

La définition (22) de Δ permet d'affirmer que G_2 s'écrit sous la forme d'un produit eulérien

$$G_2(s_1) = \prod_p \big(1 + \Delta(p^{-s_1}, p^{-1+2s_1}, p^{-1/3})\big).$$

Cherchons un développement de $\Delta(Z_1, Z_2, Z_3)$ uniforme dans le domaine

$$\mathcal{D} = \{(Z_1, Z_2, Z_3) \in \mathbb{C}^3 \ : \ |Z_1| \leqslant 1,\ |Z_2| \leqslant 1,\ |Z_3| \leqslant 1\}$$

en négligeant les termes majorés par

$$\begin{aligned}&\Delta_1(Z_1, Z_2, Z_3)\\ &\qquad := \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} \big(|Z_i|^3|Z_j|^2|Z_k| + |Z_i|^4|Z_j||Z_k|\big) + |Z_1|^2|Z_2|^2|Z_3|^2.\end{aligned}$$

La formule (14) implique

$$\begin{aligned}&1 + \Delta(Z_1, Z_2, Z_3)\\ &\quad = \prod_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}} (1 - Z_i^2 Z_j)\\ &\qquad\quad \times \Bigg(1 + \sum_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}} Z_i^2 Z_j - \sum_{\{i,j,k\}=\{1,2,3\}} Z_i^3 Z_j^2 Z_k - Z_1^3 Z_3^3 Z_3^3\Bigg)\\ &\quad = \prod_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}} (1 - Z_i^2 Z_j)\Big(1 + \sum_{\substack{\ell,k\in\{1,2,3\}\\ \ell\neq k}} Z_\ell^2 Z_k\Big) + O(\Delta_1(Z_1, Z_2, Z_3)).\end{aligned}$$

La majoration $|Z_i^2 Z_j Z_\ell^2 Z_k| \leqslant \Delta_1(Z_1, Z_2, Z_3)$ est vérifiée dans $\mathcal{D}$ sauf pour $(i, j) = (\ell, k)$. On en déduit que

$$\Delta(Z_1, Z_2, Z_3) = -\sum_{\substack{\ell,k\in\{1,2,3\}\\ \ell\neq k}} Z_\ell^4 Z_k^2 + O(\Delta_1(Z_1, Z_2, Z_3)).$$

En contrôlant les termes apparaissant dans l'écriture de $\Delta_1(p^{-s_1}, p^{-1+2s_1}, p^{-1/3})$, on obtient l'existence d'une fonction G_3 holomorphe dans une bande $\Re e\, s \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{15}{112}[$ telle que

$$G_2(s_1) = G_1(s_1, 1 - 2s_1) = \zeta^{-1}\big(2 - 8(s_1 - \tfrac{1}{3})\big)G_3(s_1)$$

(On note que $\frac{15}{112} = \frac{1}{2}(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}) \in]\frac{1}{8}, \frac{1}{7}[$) et $|G_3(s_1)| \ll 1$ dans ce domaine.

Notant $\sigma(\tau) := c_0(\log(|\tau| + 3))^{-2/3}(\log_2(|\tau| + 3))^{-1/3}$, on déduit du lemme 3.1 la majoration

$$\begin{aligned}F_{12}(s_1) &\ll (\log X)^7(1 + |\tau_1|)^{5(\sigma_1 - 1/3)+\varepsilon}\\ &\ll (\log X)^7(1 + |\tau_1|)^{3/4} \qquad (\varepsilon = 1/32)\end{aligned}$$

valable lorsque

$$\sigma_1 \in [\kappa_1, \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+\sigma(\tau_1)], \qquad |s_1 - \tfrac{1}{3}| \geqslant 1/\log X.$$

Le lemme 3.5 et la définition permettent d'écrire

$$M_{11} := \frac{(X_1X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\frac{F_{12}(s_1)(X_1/X_2^2)^{s_1-1/3}}{s_1(s_1+1)(1-2s_1)(2-2s_1)}\,\mathrm{d}s_1.$$

On applique le théorème des résidus pour majorer la quantité $(\mathfrak{T}M_{11})(X, X+H)$. On choisit le contour $C_1(\kappa_1)$ joignant les points d'affixe

$$\kappa_1 - iT,\ \kappa_1+iT,\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+iT,\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+iT',\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}+iT'-\sigma(T'),$$
$$\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}-iT'-\sigma(T'),\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}-iT',\ \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}-iT,\ \kappa_1-iT,$$

où T' est un paramètre. En utilisant la méthode utilisée pour majorer $\mathfrak{T}R_0$, il vient

$$(\mathfrak{T}M_{11})(X,X+H) \ll X^{7/8}H^3\Big(\exp\Big\{-\frac{\log X}{\sigma(T')}\Big\}+T'^{-1/4}\Big)+X^4T^{-1/4}$$

On montre que ce terme est englobé par le membre de droite de (11) en choisissant $\log T' = (\log X)^{3/5}(\log_2 X)^{1/5}$ et en prenant $T \geqslant X^9$.

La contribution du résidu en $s_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1$ est estimée à l'aide de la même méthode. Le lemme 3.5 et (31), puis un changement de variable, fournissent

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{(X_1X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\frac{1}{2}\frac{F_{12}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1)\,(X_1/\sqrt{X_2})^{s_1-1/3}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_1)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s_1)s_1(s_1+1)}\,\mathrm{d}s_1 \\ &= \frac{(X_1X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\kappa_1-iT/2}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\kappa_1+iT/2}\frac{F_{12}(s_1)\,(X_2/X_1^2)^{s_1-1/3}}{s_1(s_1+1)(1-2s_1)(2-2s_1)}\,\mathrm{d}s_1.\end{aligned}$$

La seule différence avec le calcul précédent est que le pôle $s_1 = \frac{1}{3}$ est à l'intérieur du contour $C(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\kappa_1)$. Il existe donc un polynôme P_{11} de degré égal à 6 et d'une fonction $R_{12} \in \mathcal{E}_3$ vérifiant

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{T}R_{12})(X,X+H)\\ (\mathfrak{T}R_{12})(X-H,X)\end{aligned}\right\} \ll X^{7/8}H^3\exp\{-cN(X)\}+X^{4-1/2-\varepsilon}$$

tels que

$$M_{12} = (X_1X_2X_3)^{4/3}P_{11}(\log(X_1^2/X_2)) + R_{12}(X_1,X_2,X_3), \tag{37}$$

De plus, le polynôme P_{11} est de degré 6 et de coefficient dominant

$$\frac{9}{48}\frac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{6!\,4}\times\Big(-\frac{1}{24}\Big). \tag{38}$$

Enfin pour le résidu en $s_2 = \frac{1}{3}$, nous décalons la droite d'intégration de l'abscisse κ_1 jusqu'à $\frac{1}{3} - \delta$. Le théorème des résidus implique l'existence de trois polynômes P_{12}, P_{13}, P_{14} tels que M_{13} soit égal à

$$\begin{aligned}\frac{(X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT}\Big(\frac{g_1(s_1)(\log X_2)^2}{(s_1-\frac{1}{3})^5}+\frac{g_2(s_1)\log X_2}{(s_1-\frac{1}{3})^6}+\frac{g_3(s_1)}{(s_1-\frac{1}{3})^7}\Big)\frac{X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)}\\ = (X_1X_2X_3)^{4/3}\big\{P_{12}(\log X_1)(\log X_2)^2+P_{13}(\log X_1)\log X_2\\ + P_{14}(\log X_1)\big\} + R_{13}(X_1,X_2,X_3) + O\Big(X^4\frac{(\log X)^8}{T^{1/4}}\Big),\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}R_{13}(X_1,X_2,X_3) &:= \frac{(X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\\ &\times\int_{1/3-\delta-iT}^{1/3-\delta+iT}\Big(\frac{g_1(s_1)(\log X_2)^2}{(s_1-\frac{1}{3})^5}+\frac{g_2(s_1)\log X_2}{(s_1-\frac{1}{3})^6}+\frac{g_3(s_1)}{(s_1-\frac{1}{3})^7}\Big)\frac{X_1^{s_1+1}\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)}.\end{aligned}$$

De plus, P_{12} est de degré 4, P_{13} de degré 5, P_{14} de degré 6, et

$$\text{(39)}\qquad \begin{cases}\text{le coefficient dominant de } P_{12} \text{ est } \dfrac{9}{4!\,4}g_1(\tfrac{1}{3}) = \dfrac{9}{48}\dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{6!\,4}\times\dfrac{15}{2},\\ \text{le coefficient dominant de } P_{13} \text{ est } \dfrac{9}{5!\,4}g_2(\tfrac{1}{3}) = \dfrac{9}{48}\dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{6!\,4}\times\dfrac{-15}{2},\\ \text{le coefficient dominant de } P_{14} \text{ est } \dfrac{9}{6!\,4}g_3(\tfrac{1}{3}) = \dfrac{9}{48}\dfrac{G_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3})}{6!\,4}\times\dfrac{21}{8}.\end{cases}$$

On majore $\mathfrak{T}R_{13}$ par la méthode utilisée pour $\mathfrak{T}R_0$. On déduit des majorations (33) que

$$\begin{aligned}(\mathfrak{T}R_{13})(X,X+H)\\ &\ll H^2X^{2/3}(\log X)^8\int_{-T}^{T}\frac{\big|(X+H)^{4/3-\delta+i\tau_1}-X^{4/3-\delta+i\tau_1}\big|}{(\tau_1+1)^{2-5/6}}\,\mathrm{d}\tau_1\\ &\ll X^{4-\delta}(H/X)^{13/6}(\log X)^8(\log T).\end{aligned}$$

Le Lemme 3.2(ii) permet alors d'affirmer que

$$\text{(40)}\qquad (\mathfrak{T}R_{13})(X,X+H) \ll H^4 + X^{4-1/2-\varepsilon}.$$

En sommant les M_{1i}, on en déduit que

$$\text{(41)}\quad \begin{aligned}M_1 = (X_1X_2X_3)^{4/3}P_1(\log X_1,\log X_2)\\ + R_1(X_1,X_2,X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^9}{T^{1/6}}\Big)\end{aligned}$$

avec

$$P_1(X_1,X_2) := \tfrac{9}{4}\big(P_{11}(X_1-\tfrac{1}{2}X_2)+P_{12}(X_1)X_2^2+P_{13}(X_1)X_2+P_{14}(X_1)\big)$$

et

$$R_1 := \tfrac{9}{4}R_{10}+\tfrac{9}{4}M_{11}+\tfrac{9}{4}R_{12}+\tfrac{9}{4}R_{13}.$$

La fonction R_1 satisfait bien à (11). La somme des coefficients des monômes apparaissant dans l'écriture de P_1 de degré total égal à 6 se déduit alors facilement de (38), (39) et (24). Elle est égale à

$$\frac{31}{12}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3 C.$$

3.5. Estimation de $M_2(X_1,X_2,X_3)$. — Notons

$$H_2(s_2) := \zeta(3s_2)\zeta(-\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{3}{2})\zeta(\tfrac{3}{2}s_2+\tfrac{1}{2})$$

de sorte que

$$\begin{aligned}F_2(s_1,s_2) \;&:= \tfrac{1}{2}H_2(s_2)\zeta(s_1-s_2+1)\zeta(2s_1-\tfrac{1}{2}s_2+\tfrac{1}{2})\\ &\quad\times\zeta(3s_1)\zeta(s_2+2s_1)\zeta(2s_2+s_1)G(s_1,s_2,\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s_2).\end{aligned}$$

Nous intégrons d'abord par rapport à la variable s_1 ce qui fournit des résidus uniquement d'ordre de multiplicité égal à 1. La fonction $s_1 \to G(s_1,s_2,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_2)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Re e\, s_1 > \frac{1}{12}$ pour s_2 fixé tel que $\Re e\, s_2 = \kappa_2$. La fonction $s_1 \mapsto F_2(s_1,s_2)$ est donc méromorphe sur le demi-plan $\Re e\, s_1 > \frac{1}{12}$ et admet cinq pôles :

$$\begin{aligned}&v_1(s_2) := \tfrac{1}{3}, && v_2(s_2) := \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}s_2, && v_3(s_2) := 1-2s_2,\\ &v_4(s_2) := s_2, && v_5(s_2) := \tfrac{1}{4}s_2+\tfrac{1}{4}\end{aligned}$$

d'ordre de multiplicité égal à 1. Les pôles sont tous distincts d'après la taille relative de κ_1 et κ_2.

On déduit de (17) une majoration de $F_2(s_1,s_2)$. Lorsque

$$\Re e\, s_2=\kappa_2,\ \Re e\, s_1 \in [\tfrac{1}{3}-\delta,\kappa_1],\ |\tau_1| \leqslant T,\ \min_i\{|s_1-v_i(s_2)|\} \geqslant 1/\log X,$$

on a

$$|F_2(s_1,s_2)| \ll (\log X)^9(1+|\tau_1|+|\tau_2|)^{1/2}(1+|\tau_1|)^{1/3}. \tag{42}$$

On applique le théorème des résidus au contour $C_2(\kappa_1)$ joignant les points d'affixe

$$\kappa_1+iT,\ \kappa_1+9iT,\ \tfrac{1}{3}-\delta+9iT,\ \tfrac{1}{3}-\delta-9iT,\ \kappa_1-9iT,\ \kappa_1-iT,\ \kappa_1+iT.$$

Grâce à (42), on obtient

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT} \int_{\kappa_1-iT}^{\kappa_1+iT} \frac{F_2(s_1,s_2)\, X_1^{s_1+1} X_2^{s_2+1} X_3^{3/2-s_2/2}}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)(\frac12-\frac12 s_2)(\frac32-\frac12 s_2)} \,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1 \\ &= \sum_{i=1}^{5} M_{2i}(X_1,X_2,X_3) + R_{20}(X_1,X_2,X_3) + O\Big((\log X)^9 \frac{X^4}{T^{1/6}}\Big), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} F_{21}(s_2) := \frac32 F_{12}(\frac12-\frac12 s_1), \\ F_{22}(s_2) := \frac12 \zeta(3s_2)\zeta(-\frac32 s_2+\frac32)^4 \zeta(\frac32 s_2+\frac12)^2 G(\frac12-\frac12 s_2, s_2, \frac12-\frac12 s_2), \\ F_{23}(s_2) := \frac12 H_2(s_2)\zeta(3-6s_2)\zeta(-3s_2+2)^2 \\ \qquad\qquad \times\, \zeta(-\frac92 s_2+\frac52) G(1-2s_2, s_2, \frac12-\frac12 s_2), \\ F_{24}(s_2) := \frac12 \zeta(3s_2)^4 \zeta(\frac32 s_2+\frac12)^2 \zeta(-\frac32 s_2+\frac32) G(s_2,s_2,\frac12-\frac12 s_2), \\ F_{25}(s_2) := F_{23}(\frac12-\frac12 s_2), \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &M_{2i}(X_1,X_2,X_3) \\ &\quad := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT} \frac{F_{2i}(s_2)\, X_1^{v_i(s_2)+1} X_2^{s_2+1} X_3^{3/2-s_2/2}\,\mathrm{d}s_2}{v_i(s_2)(v_i(s_2)+1)s_2(s_2+1)(\frac12-\frac12 s_2)(\frac32-\frac12 s_2)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &R_{20}(X_1,X_2,X_3) \\ &\quad := \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT} \int_{1/3-\delta-iT}^{1/3-\delta+iT} \frac{F_2(s_1,s_2)\, X_1^{s_1+1} X_2^{s_2+1} X_3^{3/2-s_2/2}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_1(s_1+1)s_2(s_2+1)(\frac12-\frac12 s_2)(\frac32-\frac12 s_2)}. \end{aligned}$$

On majore $\mathfrak{T}R_{20}$ par la méthode utilisée pour $\mathfrak{T}R_0$. On déduit des majorations (42) et du lemme 3.2(ii) que

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{T}R_{20})(X,X+H) \\ &\qquad \ll H^2 X^{2/3} (\log X)^9 \int_{-T}^{T} \frac{\big|(X+H)^{4/3-\delta+i\tau_1} - X^{4/3-\delta+i\tau_1}\big|}{(\tau_1+1)^{2-5/6}} \,\mathrm{d}\tau_1 \\ &\qquad \ll X^{4-\delta}(H/X)^{13/6}(\log X)^9(\log T) \\ &\qquad \ll H^4 + X^{4-1/2-\varepsilon}. \end{aligned} \tag{43}$$

Pour terminer le calcul lié à $u_2(s_1,s_2)$, il reste à estimer les $M_{2i}(X_1,X_2,X_3)$. Comme pour les étapes précédentes, cela se fait en appliquant le théorème des résidus grâce aux majorations connues sur les valeurs de la fonction ζ. Pour estimer M_{21}, on peut se reporter à l'estimation de F_{12}.

Pour M_{23}, on décale la droite d'intégration à droite jusquà $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\delta$ et on utilise la majoration

$$F_{23}(s_2) \ll (\log X)^7(1+|\tau_2|)^{1/2}$$

valable lorsque $\sigma_2 \in [\kappa_2, \frac{1}{3}+\frac{1}{2}\delta]$.

Pour M_{24}, on décale la droite d'intégration à droite jusquà $\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\delta$ et on utilise la majoration

$$F_{23}(s_2) \ll (\log X)^7(1+|\tau_2|)^{5/6}$$

valable lorsque $\sigma_2 \in [\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\delta, \kappa_2]$.

L'estimation de M_{25} est traitée comme celle de M_{23}.

Nous ne détaillons que l'évaluation de M_{22}. Posant $\xi := \log X_2 - \frac{1}{2}\log X_1 - \frac{1}{2}\log X_3$, on peut écrire

$$M_{22} = \frac{(X_1X_2X_3)^{4/3}}{2\pi i}\int_{\kappa_2-3iT}^{\kappa_2+3iT} \frac{F_{22}(s_2)\,\mathrm{e}^{\xi(s_2-1/3)}}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_2)^2(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s_2)^2 s_2(s_2+1)}\,\mathrm{d}s_2.$$

L'estimation

$$|F_{22}(s_2)| \ll (\log X)^7, \qquad (\Re e\, s_2 = \kappa_2),$$

et le développement

$$\mathrm{e}^{\xi(s_2-1/3)} = 1 + \xi(s_2-\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{2}\xi^2(s_2-\tfrac{1}{3})^2 + \tfrac{1}{6}\xi^3(s_2-\tfrac{1}{3})^3 + O(|\xi|^4|s_2-\tfrac{1}{3}|^4)$$

(uniforme puisque $\mathrm{e}^{\xi(\Re e\, s_2-1/3)} \ll 1$), fournissent

$$M_{22} = (X_1X_2X_3)^{4/3}\sum_{j=0}^{3} C_j\xi^j + R_{22}(X_1,X_2,X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^7}{T^5}\Big),$$

avec

$$C_j := \frac{1}{j!}\frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_2-i\infty}^{\kappa_2+i\infty} \frac{F_{22}(s_2)\,(s_2-1/3)^j}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_2)^2(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s_2)^2 s_2(s_2+1)}\,\mathrm{d}s_2,$$

et $R_{22}(X_1,X_2,X_3) \ll X^4(\log X)^7|\xi|^4$. Les quantités C_j sont des constantes ne dépendant pas de κ_2. Nous remarquons que $\mathfrak{T}R_{22}(X, X+H)$ est une combinaison linéaire finie de valeurs de $R_{22}(X,X_2,X_3)$ pour lesquelles $\xi \ll H/X$.

Il existe donc un polynôme P_2 de $\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$ de degré total 6 et une fonction $R_2 \in \mathcal{E}_3$ satisfaisant à la majoration (11) tels que l'on ait l'estimation

$$M_2 = (X_1X_2X_3)^{4/3}P_2(\log X_1, \log X_2, \log X_3) + R_2(X_1,X_2,X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^{10}}{T^{1/6}}\Big).$$

De plus, la somme des coefficients des monômes de degré 6 de P_2 est

$$-\frac{23}{12}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3 C.$$

3.6. Estimation de $M_3(X_1, X_2, X_3)$. — La contribution M_3 s'étudie de la même manière que M_2 puisque $F_3(s_1, s_2) = F_2(s_2, s_1)$. Cependant, du fait de la taille relative de κ_1 et κ_2, le terme principal dans le résultat final est différent (*i.e.* il ne suffit de changer X_1 en X_2). Seuls trois pôles de $s_2 \to F_3(s_1, s_2)$ sont contenus dans la bande $\Re e\, s_2 \in [\frac{1}{3} - \delta, \kappa_2]$. Il existe donc un polynôme P_3 de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une fonction $R_3 \in \mathcal{E}_3$ satisfaisant à la majoration (11) tels que l'on ait l'estimation

$$\begin{aligned} M_3 = (X_1X_2X_3)^{4/3}P_3(\log X_1, \log X_2, \log X_3)& \\ + R_3(X_1, X_2, X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^{10}}{T^{1/6}}\Big)&. \end{aligned}$$

De plus, la somme des coefficients des monômes de degré 6 de P_3 est

$$-\frac{1}{24}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3 C.$$

3.7. Estimation de $M_4(X_1, X_2, X_3)$. — La formule

$$F_4(s_1, s_2) = 2F_1(s_1, 1 - 2s_2)$$

et un changement de variable en s_2 impliquent

$$\begin{aligned} M_4 &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\kappa_1 - iT}^{\kappa_1 + iT}\int_{\kappa_2 - 3iT}^{\kappa_2 + 3iT} \frac{F_4(s_1, s_2)X_1^{s_1+1}X_2^{s_2+1}X_3^{2-2s_2}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{s_2(s_2+1)(1-2s_2)(2-2s_2)s_1(s_1+1)} \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\kappa_1 - iT}^{\kappa_1 + iT}\int_{1-2\kappa_2 - i6T}^{1-2\kappa_2 + 6iT} \frac{F_2(s_1, s_2)X_1^{s_1+1}X_2^{3/2-s_2/2}X_3^{s_2+1}\,\mathrm{d}s_2\,\mathrm{d}s_1}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s_2)(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}s_2)s_2(s_2+1)s_1(s_1+1)} \end{aligned}$$

La contribution de F_4 s'estime donc de la même manière que celle de F_2. Cependant, le terme principal diffère puisque l'abscisse $1 - 2\kappa_2$ est à inférieure à $\frac{1}{3}$. Il existe donc un polynôme P_4 de $\mathbb{R}[X]$ de degré 6 et une fonction $R_4 \in \mathcal{E}_3$ satisfaisant à la majoration (11) tels que l'on ait l'estimation

$$\begin{aligned} M_4 = (X_1X_2X_3)^{4/3}P_4(\log X_1, \log X_2, \log X_3)& \\ + R_4(X_1, X_2, X_3) + O\Big(\frac{X^4(\log X)^{10}}{T^{1/6}}\Big)&. \end{aligned}$$

De plus, la somme des coefficients des monômes de degré 6 de P_4 est

$$\frac{3}{8}\Big(\frac{3}{4}\Big)^3 C.$$

3.8. Estimation de $M_5(X_1, X_2, X_3)$. — La relation $F_5(s_1, s_2) = F_4(s_2, s_1)$ permet de nous reporter à l'estimation du paragraphe précédent. Ici, étant donné les tailles relatives de κ_1 et κ_2, aucun des pôles de la fonction $s_1 \to F_5(s_1, s_2)$ est dans la bande comprise entre les deux droites d'intégration. Sous la condition $T^{1/6} \geqslant X^{1/2+\varepsilon}$, on a donc l'estimation

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{T}M_5)(X, X+H)\\(\mathfrak{T}M_5)(X-H, X)\end{array}\right\} \ll X^{4-1/2-\varepsilon} + H^4(\log X)^7 + H^3X^{7/8}\exp\{-cN(X)\}.$$

En sommant les M_i et en prenant $T = X^9$, nous achevons la démonstration de la Proposition 2.3.

Références

[BT96-1] V.V. Batyrev & Y. Tschinkel, « Rational points on some Fano cubic variety », *C. R. Acad. Sci.*, Paris, **323**, ser. I (1996), 41-46.

[BT96-2] ———, « Height Zeta functions of Toric Varieties », *Journal Math. Sciences*, **82** n°1 (1996), 3220-3229.

[BT98-1] ———, « Manin's Conjecture for Torics Varieties », *J. of Algebraic Geometry* à paraître.

[BT98-2] ———, « Saturated Varieties », ce volume.

[F98] E. Fouvry, « Sur la hauteur des points d'une certaine surface cubique singulière », ce volume.

[Fu93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annal. of Math. Studies 131, Priceton University Press 1993.

[I85] A. Ivić, *The Riemann zeta-function,* John Wiley, New-York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapour, (1985).

[O88] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer (1988).

[P95] E. Peyre, « Hauteurs et nombres de Tamagawa sur les variétés de Fano », *Duke Math. J.* **79** (1995), 101-217.

[S79] S.H. Schanuel, « Heights in number field », Bull. Soc. Math. France **107** (1979), 433-449.

[S98] P. Salberger, « Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties », ce volume.

[T95] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* 2ème édition, Cours Spécialisés, no. 1, Société Mathématique de France (1995).

Reçu le 2 avril 1997

RÉGIS DE LA BRETÈCHE, Département de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris XI-Orsay, 91405 Orsay cedex, France • *E-mail :* `breteche@geo.math.u-psud.fr`