PIERRE COLMEZ

Intégration sur les variétés p-adiques

Astérisque, tome 248 (1998)

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1998__248__R1_0>

ASTÉRISQUE 248

INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS p-ADIQUES

Pierre Colmez

Société Mathématique de France 1998

Pierre Colmez

Département de mathématiques et informatique, École Normale Supérieure,
45 rue d'Ulm, 750005 Paris, France.

Équipe d'arithmétique, Institut de mathématiques,
Tour 46-56 -5ème étage- Boite 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France.

***Classification mathématique par sujets* (1991).** — 115, 14H, 14K, 14L, 30F, 30G, 32J.

***Mots clefs*.** — Intégrale abélienne, période complexe, période p-adique, extension universelle, variété abélienne, jacobienne, fonction de Green, fonctions thêta, hauteurs de Néron-Tate.

INTÉGRATION SUR LES VARIÉTÉS p-ADIQUES

Pierre Colmez

Résumé. — Dans ce volume, nous montrons qu'il y a essentiellement une seule manière d'intégrer une 1-forme différentielle fermée sur une variété algébrique lisse définie sur un corps p-adique. Cette théorie de l'intégration p-adique, contrairement à celle développée par Coleman, ne suppose pas d'hypothèses de bonne réduction des variétés que l'on considère et permet d'étendre au cas général un certain nombre de théorèmes démontrés par Coleman dans le cas de bonne réduction ; en particulier, la construction des périodes p-adiques des variétés abéliennes et la loi de réciprocité pour les formes différentielles de troisième espèce sur les courbes. L'intérêt d'avoir une théorie qui marche pour tous les nombres premiers est de pouvoir adéliser certaines constructions. Par exemple, si X est une courbe algébrique définie sur un corps de nombres, nous contruisons de manière purement analytique un accouplement sur les diviseurs de degré 0 de X en utilisant des fonctions de Green adéliques et à partir duquel, on peut retrouver la hauteur de Néron-Tate et les hauteurs p-adiques construites par Gross et Coleman dans le cas de bonne réduction. Ce volume ne contient donc pas à proprement parler d'énoncé nouveau, mais essaie de faire la synthèse entre plusieurs points de vue ; en particulier, la construction adélique des hauteurs peut être vue comme une synthèse entre le point de vue de Néron et celui de Gross et Coleman.

***Abstract* (Integration on p-adic varieties)**. — We show that there is a unique "reasonable" way of integrating closed 1-forms on smooth algebraic varieties defined over a p-adic field. In contrast with the theory developed by Coleman, this p-adic integration does not require that the varieties under consideration have good reduction and can be used to extend to the general case several results obtained by Coleman in the case of good reduction ; in particular the construction of p-adic periods of abelian varieties and the reciprocity law for differentials of the third kind. Having a theory which works for all primes can be used to adelize certain constructions. For example, if X is a smooth and proper algebraic curve defined over a number field, we define, in a purely analytic way, a pairing between divisors of degree 0 using adelic Green functions and from which one can recover the Néron-Tate height pairing and p-adic analogues considered by Gross and Coleman in the case of good reduction.

Table des matières

INTRODUCTION

1. Intégration p-adique sur les variétés p-adiques

Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Le principal problème de l'intégration p-adique est que la topologie p-adique est totalement discontinue et donc que l'équation différentielle $df = 0$ a beaucoup trop de solutions. Ce problème apparait déjà quand on veut définir le logarithme p-adique ; en effet, imposer la condition $d \operatorname{Log} t = \frac{dt}{t}$ ne définit Log qu'à addition d'une fonction localement constante près sur K^* ; rajouter la condition $\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$ détermine complètement Log sur $\mathscr{O}_K^*$, mais il nous reste la liberté de fixer arbitrairement la valeur de $\operatorname{Log} p$. Le choix naturel est de poser $\operatorname{Log} p = 0$, ce qui nous donne le logarithme d'Iwasawa que nous noterons $\log_p$, mais du simple point de vue de l'intégration p-adique, aucun choix ne semble vraiment meilleur qu'un autre. Nous allons donc considérer tous les choix possibles de logarithme simultanément en considérant $\operatorname{Log} p$ comme une variable et l'application Log comme une fonction localement analytique de K^* dans $K_{\mathrm{st}} = K[\operatorname{Log} p]$. Remarquons que si on note $\mathscr{L}(K^*)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K \oplus \mathbf{Q} \operatorname{Log} p$ de K_{st}, alors Log est à valeurs dans $\mathscr{L}(K^*)$.

Le miracle est que le fait de fixer la valeur de $\operatorname{Log} p$ suffit à assurer l'existence et l'unicité d'une intégration naturelle sur les variétés algébriques lisses définies sur un corps p-adique (toutes nos variétés sont par convention géométriquement connexes) et ce, bien que la topologie p-adique soit totalement discontinue. Plus précisément, on a le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Il existe une et une seule manière de définir l'intégration des 1-formes différentielles fermées sur les variétés algébriques lisses définies sur K de telle sorte que :*

(i) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K, ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et $a \in X(K)$, alors $F(x) = \int_a^x \omega$ est une fonction localement analytique de $x \in X(K)$ à valeurs dans K_{st} vérifiant $dF = \omega$.*

(ii) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K, ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et a, b, c sont 3 éléments de $X(K)$, alors $\int_a^c \omega = \int_a^b \omega + \int_b^c \omega$ (relation de Chasles).*

(iii) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K, ω_1, ω_2 sont deux 1-formes différentielles fermées sur X et $a, b \in X(K)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, alors*

$$\int_a^b (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int_a^b \omega_1 + \lambda_2 \int_a^b \omega_2.$$

(iv) *Si X est une variété algébrique lisse définie sur K, f est une fonction rationnelle sur X, alors*

$$\int_a^b df = f(b) - f(a) \quad et \quad \int_a^b \frac{df}{f} = \mathrm{Log}\,\frac{f(b)}{f(a)}.$$

(v) *Si $F : X \to Y$ est un morphisme de variétés lisses définies sur K, ω est une 1-forme différentielle fermée sur Y et a et b sont des points de $X(K)$, alors*

$$\int_a^b F^*\omega = \int_{F(a)}^{F(b)} \omega.$$

Remarque 2

(i) La démonstration du théorème utilise les morphismes d'Albanese pour se ramener aux variétés abéliennes et le théorème du cube. Des techniques similaires ont été proposées par Cristante [**19**], Zarhin [**49, 50**] etc.

(ii) Coleman [**13**] a montré un résultat analogue pour les variétés rigides (et donc en particulier pour les variétés algébriques) ayant bonne réduction modulo p pour lequel la propriété (v) est vérifiée pour tout morphisme rigide. Sa construction utilise d'ailleurs de manière essentielle l'existence des morphismes de Frobenius. On peut vérifier que si on part d'une variété X ayant bonne réduction modulo p, les variétés auxiliaires dont nous avons besoin pour intégrer sur X ont aussi bonne réduction, ce qui permet de montrer que l'intégration de Coleman et la notre coïncident dans le cas de bonne réduction.

(iii) On ne peut par contre pas étendre, sans modification, l'intégration aux variétés rigides quelconques comme le montre l'exemple de la courbe de Tate. En effet, si $q \in \mathbf{C}_p^*$ a une valuation non nulle, $E_q = \mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$ est la courbe de Tate associée à q et $\pi : \mathbf{G}_m \to E_q$ est le morphisme naturel en géométrie rigide, l'image inverse $\pi^*\omega$ d'une différentielle holomorphe ω sur E_q est proportionnelle à $\dfrac{dt}{t}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{C}_p^*$ tel que l'on ait $\pi^*\omega = \lambda\dfrac{dt}{t}$ si t est le paramètre de $\mathbf{G}_m$, mais $\pi^* \int \omega - \lambda\,\mathrm{Log}$ n'est pas globalement constante sur $\mathbf{C}_p^*$ car $\pi^* \int \omega$ est invariante par le changement de variable $t \to qt$, ce qui n'est pas le cas de Log. Ceci est une manifestation de l'existence du π_1 rigide.

(iv) Supposons le théorème démontré pour $K = \mathbf{C}_p$. Le groupe des automorphismes continus de $\mathbf{C}_p$ est égal à $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ et on étend son action à $\mathbf{C}_p[\mathrm{Log}\,p]$ en laissant fixe $\mathrm{Log}\,p$. Le théorème d'Ax-Sen-Tate implique que si K est un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$ et $\mathscr{G}_K$ est le sous-groupe de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le laissant fixe, alors $\big(\mathbf{C}_p[\mathrm{Log}\,p]\big)^{\mathscr{G}_K} = K_{\mathrm{st}}$. D'autre part, l'unicité de l'intégration p-adique sur $\mathbf{C}_p$ implique que, si σ est un automorphisme continu de $\mathbf{C}_p$, si X est une variété lisse sur $\mathbf{C}_p$, si ω est une 1-forme fermée sur X et $a, b \in X(\mathbf{C}_p)$, alors $\sigma^{-1}\big(\int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} \omega^\sigma\big) = \int_a^b \omega$, ce qui permet de montrer que si a, b et ω sont définis sur K, alors $\int_a^b \omega \in K_{\mathrm{st}}$. Cela n'implique pas complètement le théorème pour K, mais montre quand même qu'il y a une et une seule théorie de l'intégration «raisonnable» sur K (*i.e.* qui coïncide avec celle définie sur $\mathbf{C}_p$).

(v) L'image inverse d'une primitive de forme différentielle rationnelle par un morphisme algébrique est du même type par construction mais on obtient de nouvelles fonctions par image directe. Par exemple, si X est une courbe elliptique, ω une forme différentielle invariante sur X et λ_ω la primitive de ω s'annulant en 0, on a $\lambda_\omega(x)^2 = \lambda_\omega(-x)^2$, ce qui fait que λ_ω^2 est l'image inverse d'une fonction non identiquement nulle si $\omega \neq 0$ et localement analytique sur $\mathbb{P}^1$ tout entier. Il est probable que quand la courbe elliptique varie, ces fonctions n'ont pas beaucoup de rapport entre elles, ce qui nous fournit une algèbre gigantesque constituée de fonctions localement analytiques sur $\mathbb{P}^1$.

(vi) La raison pour laquelle les choses se passent si bien en p-adique réside dans le théorème suivant qui permet d'étendre une primitive définie localement au voisinage d'un point à toute la variété abélienne.

Théorème 3. — *Si X est une variété abélienne définie sur K, les sous-groupes ouverts de $X(K)$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine et de plus, si V est un sous-groupe ouvert de $X(K)$, alors $X(K)/V$ est un groupe de torsion.*

La théorie de l'intégration développée par Coleman a le gros avantage sur celle exposée ci-dessus de ne pas utiliser de variétés auxiliaires pour calculer les intégrales (alors que la notre utilise de manière essentielle la variété d'Albanese) et de permettre de définir des intégrales itérées. En particulier, elle permet de définir des polylogarithmes **[11]**, des régulateurs p-adiques **[16]** etc. On peut se demander ce que l'on peut obtenir par une extension du théorème 1. Le gros problème est d'exhiber des équations fonctionnelles venant de la géométrie pour les nouvelles fonctions que l'on construit à chaque intégration. Il est probable que l'existence d'équations fonctionnelles pour le dilogarithme et le trilogarithme permettent de définir de cette manière leurs analogues p-adiques, mais nous ne l'avons pas vérifié. La proposition suivante permet de construire les fonctions de Green p-adiques des diviseurs sur les variétés abéliennes par une double intégration grâce au théorème du cube.

Soient X une variété abélienne définie sur K et $\oplus$ la loi d'addition sur X. Si ω est une 1-forme différentielle holomorphe sur X, la primitive F_ω de ω s'annulant à l'origine vérifie $F_\omega(x \oplus y) = F_\omega(x) + F_\omega(y)$. Nous appellerons une telle fonction un logarithme de X.

Proposition 4. — *Soit D un diviseur de X défini sur K. Il existe une fonction G_D définie sur $X(K) - D(K)$, appelée fonction de Green du diviseur D, à valeurs dans $\mathscr{L}(K^*) \subset K_{\mathrm{st}}$, unique à addition près d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en* *les logarithmes de X, localement analytique en dehors de D et ayant une singularité logarithmique le long de D telle que*

$$G_D(x \oplus y \oplus z) - G_D(x \oplus y) - G_D(x \oplus z) - G_D(y \oplus z) + G_D(x) + G_D(y) + G_D(z)$$

soit égale au logarithme d'une fonction rationnelle sur X^3. De plus, si ∂ est une dérivation d'ordre 1 invariante sur X, alors $d(\partial G_D)$ est une forme différentielle de seconde espèce sur X.

2. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce sur les courbes

Soient X une courbe algébrique de genre $g \geq 1$ et $J = \mathrm{Pic}^0(X)$ sa jacobienne. Rappelons qu'une forme différentielle de troisième espèce sur X est une forme différentielle rationnelle sur X ayant au plus des pôles simples et telle que les résidus en ces pôles soient des entiers. Si ω est une forme différentielle de troisième espèce, nous noterons $\mathrm{Div}(\omega)$ le diviseur $\sum_P n_P P$ où P parcourt X et n_P est le résidu de ω en P. C'est un diviseur de degré 0. Dans le cas particulier où $\omega = \dfrac{df}{f}$ et f est une fonction rationnelle sur X, on a $\mathrm{Div}(\omega) = \mathrm{Div}(f)$.

Théorème 5. — *Si ω est une forme différentielle de troisième espèce sur X, il existe un unique élément $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}\omega$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ tel que si η est une forme différentielle de seconde espèce dont la classe dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}\omega$, alors $\int(\omega - \eta)$ peut s'approximer uniformément sur le complémentaire de tout voisinage des pôles de ω et η par des logarithmes de fonctions rationnelles.*

L'unicité utilise la non dégénérescence de l'application « périodes p-adiques » et en particulier le théorème 16. On construit $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}\omega$ à partir d'une fonction de Green du diviseur Θ de J. D'autre part la notation $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}$ vient du fait suivant. Si $\widetilde{J}$ désigne l'extension universelle de J par un groupe additif, les points de $\widetilde{J}$ représentent les formes différentielles de troisième espèce modulo les différentielles logarithmiques de fonctions rationnelles, l'algèbre de Lie de $\widetilde{J}$ est isomorphe à $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}$ est l'application logarithme de $\widetilde{J}$ à valeurs dans son algèbre de Lie.

Notons $\cup$ le cup-produit sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ à valeurs dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X) \cong K$. Si ω et η sont deux formes de seconde espèce sur X et F_ω est une primitive de ω, le cup-produit $\omega \cup \eta$ est égal à la somme des résidus de la forme différentielle $F_\omega \eta$. L'analogue p-adique de la classique loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce (propositions I.2.5 et I.7.13) est le théorème suivant.

Théorème 6. — *Si α_1 et α_2 sont deux formes différentielles de troisième espèce dont les diviseurs sont étrangers, alors*

$$\int_{\mathrm{Div}(\alpha_1)} \alpha_2 - \int_{\mathrm{Div}(\alpha_2)} \alpha_1 = \mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\alpha_1) \cup \mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\alpha_2).$$

La démonstration utilise de manière systématique une fonction de Green associée au diviseur Θ de J pour donner des formules explicites pour tous les termes apparaissant dans la formule. Elle utilise aussi la caractérisation des formes différentielles exactes donnée dans le théorème 16 ci-après, caractérisation qui repose sur la théorie des périodes p-adiques (théorèmes 11 et 15). Une démonstration assez différente a été donnée par Coleman [**15**] dans le cas de bonne réduction.

3. Hauteurs adéliques sur les courbes algébriques

Si K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, posons $\mathscr{L}(K^*) = \mathbf{R}$ et notons Log l'application de K^* dans $\mathscr{L}(K^*)$ définie par $\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}_\infty |x|$, où Log_∞ est le logarithme usuel sur $\mathbf{R}_+^*$ et $|x|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{C}$ donnée par la formule $|a+ib|^2 = a^2+b^2$ si a et b sont réels. Si K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathscr{L}(K^*)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K \oplus \mathbf{Q}\,\mathrm{Log}\, p$ de K_{st}.

Si K est un corps de nombres, notons $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ le sous-ensemble du produit des $\mathscr{L}(K_v^*)$, v décrivant les places de K, des éléments $(\dots, x_v, \dots)$ vérifiant $x_v \in K_v$ pour presque tout v. Nous disposons d'une application Log de $\mathbf{A}_K^*$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ [définie composante par composante] et nous noterons $\mathscr{L}(K^*)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ engendré par l'image de K^* par l'application Log. Le quotient de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ par $\mathscr{L}(K^*)$ sera noté $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$. L'application qui à $(x_\infty, \dots, x_p^{(0)} + x_p^{(1)}\,\mathrm{Log}\, p, \dots) \in \mathscr{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*)$ associe

$$(x_\infty - \sum_{l<\infty} x_l^{(1)}\,\mathrm{Log}_\infty l, \dots, x_p^{(0)} - \sum_{l<\infty,\ l\neq p} x_l^{(1)}\,\mathrm{Log}_p l, \dots)$$

s'annule sur $\mathscr{L}(\mathbf{Q}^*)$ et induit un isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*/\mathbf{Q}^*)$ et $\prod_{p\leq\infty} \mathbf{Q}_p$ (où l'on a posé $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$).

Si L est une extension finie de K, on dispose d'une application $\mathbf{Q}$-linéaire naturelle $\mathrm{Tr}_{L/K}$ de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_L^*/L^*)$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$. D'autre part, $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$ s'identifie de manière naturelle à un sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_L^*/L^*)$ et on a comme d'habitude $\mathrm{Tr}_{L/K}(x) = [L:K]x$ si $x \in \mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$.

Soit maintenant X une courbe de genre $g \geq 1$ définie sur un corps de nombre K. Choisissons pour chaque place finie v de K un supplémentaire de $H^0(X, \Omega_X^1)$ dans $K_v \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ totalement isotrope pour le cup-produit. Si X a réduction semi-stable sur une extension non-ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, il y a un choix meilleur que les autres donné par le scindage de Wintenberger [**47**], mais il ne semble pas forcément intéressant de s'y restreindre (en particulier du point de vue des fonctions-L p-adiques). Notons $\mathrm{Is}_K(X)$ l'ensemble de ces choix; un élément de $\mathrm{Is}_K(X)$ sera noté W et on notera W_v sa composante en v. Remarquons que si L est un corps de nombres contenant K, alors $\mathrm{Is}_K(X)$ s'identifie naturellement à un sous-ensemble de $\mathrm{Is}_L(X)$.

Fixons un élément W de $\mathrm{Is}_K(X)$. Si v est archimédienne, une forme différentielle de troisième espèce est dite de type (1,1) si toutes ses périodes sont purement imaginaires. Si v est finie, ω est dite de type $(1,1)$ relativement à W si $\mathrm{Log}_{\mathcal{J}}\omega \in W_v$. Si D est un diviseur sur X de degré 0 défini sur K, il existe pour toute place v de K une unique forme différentielle de troisième espèce $\omega_{D,W,v}$ définie sur K_v qui soit de type (1,1) [relativement à W_v si v finie]. Nous appellerons fonction de Green (relativement à W) associée au diviseur D, la fonction $G_{D,W}$ (définie à addition d'une constante près) de $\prod_v X(K_v)$ à valeurs dans $\prod_v \mathscr{L}(K_v^*)$ donnée par la formule

$$G_{D,W}((\ldots,x_v,\ldots)) = (\ldots, G_{D,W,v}(x_v),\ldots),$$

où $G_{D,W,v}$ est une primitive de $\omega_{D,W,v}$ si v est une place finie et la partie réelle d'une primitive de $\omega_{D,W,v}$, si v est une place archimédienne.

Théorème 7. — *Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs de degré 0 définis sur K qui sont étrangers, alors*

(i) $G_{D_1,W}(D_2) \in \mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$

(ii) *L'image de* $-\dfrac{1}{[K:\mathbf{Q}]}\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}\, G_{D_1,W}(D_2)$ *dans* $\mathscr{L}(\mathbf{A}_\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^*)$ *ne dépend que des images x et y de D_1 et D_2 dans $J(\overline{\mathbf{Q}})$ et pas des choix de D_1, D_2 ou de K.*

(iii) *L'accouplement $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ de $J(\overline{\mathbf{Q}})\times J(\overline{\mathbf{Q}})$ à valeurs dans $\prod_{p\leq\infty}\mathbf{Q}_p$ ainsi construit est bilinéaire et symétrique. D'autre part, la projection $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W,p}$ de $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ dans $\mathbf{Q}_p$ coïncide avec l'accouplement de Néron-Tate quand $p=\infty$ et avec l'accouplement construit par Gross et Coleman* **[16]** *dans le cas où X a bonne réduction en p.*

Remarquons que ce théorème nous fournit une construction des hauteurs purement en caractéristique 0 sans faire appel à la théorie de l'intersection sur les schémas. Ce phénomène est dû au fait que si $v|p$, la contribution locale en v fournie par la théorie de l'intersection peut se lire sur la composante de $G_{D_1,W,v}(D_2)$ sur $\mathrm{Log}\, p$ (voir la formule permettant d'identifier $\mathscr{L}(\mathbf{A}_\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^*)$ et $\prod_{p\leq\infty}\mathbf{Q}_v$). La symétrie est, quant à elle, une conséquence de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce. On pourra consulter **[34]** et **[49, 50]** pour des points de vue un peu différents.

4. Ensembles bornés

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau des périodes p-adiques construit par Fontaine ; c'est un anneau topologique muni d'un morphisme continu $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\ker\theta$ et de corps résiduel $\mathbf{C}_p$. Choisissons un plongement de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (il n'en n'existe pas de raisonnable (continu ou Galois-équivariant), mais ce n'est pas très important pour ce que nous allons en faire). Cela nous permet de considérer une variété définie sur un sous-corps de $\mathbf{C}_p$ comme un schéma séparé sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et nous fournit un isomorphisme d'anneaux entre $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbf{C}_p[\![t_p]\!]$, où t_p est l'analogue p-adique de $2i\pi$ qui est un générateur de $\ker\theta$ et est l'image d'un générateur de $T_p(\mathbf{G}_m)$ par l'application qui à $\varepsilon \in T_p(\mathbf{G}_m)$ associe $-\mathrm{Log}([\varepsilon])$.

Si X est une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$, on note encore $\theta : X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to X(\mathbf{C}_p)$ l'application induite par le morphisme $\theta : \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$.

La notion d'ensemble borné est l'analogue p-adique de la notion d'ensemble relativement compact en topologie classique et les propriétés des ensembles bornés sont en général sans surprise compte-tenu de cette analogie. Certaines des propriétés qui suivent se trouvent déjà dans le livre [**3**]. Certaines d'entre elles comme **B1**, **B4**, **B5** et **B6** sont immédiates ; d'autres, comme **B10**, le sont moins.

Définition 8. — Un sous-ensemble E de $\mathbf{C}_p$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$] est dit borné si pour toute suite x_n d'éléments de E et toute suite a_n d'éléments de $\mathbf{C}_p$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$] tendant vers 0, la suite $a_n x_n$ tend vers 0.

Remarque 9. — Dans le cas de $\mathbf{C}_p$, cette définition est équivalente à l'existence de $k \in \mathbf{N}$ tel que E soit inclus dans $p^{-k}\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$.

B1. Si E et F sont deux ensembles bornés de $\mathbf{C}_p$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$], alors les ensembles $E \bigcup F$, $E + F = \{x + y \mid x \in E,\ y \in F\}$ et $E \cdot F = \{xy \mid x \in E,\ y \in F\}$ sont bornés dans $\mathbf{C}_p$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$].
B2. Soit E un sous-ensemble de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^*$ tel que les ensembles E et E^{-1} soient bornés dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Alors l'intersection du sous-groupe $\langle E \rangle$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^*$ engendré par E avec le sous-groupe $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{**}$ des éléments x de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^*$ vérifiant $v_p(\theta(x)) = 0$ est borné dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (proposition A.4.10).
B3. Soit $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in T_p(\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_p)) \subset \mathscr{R}$ et soit x_n une suite bornée d'éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vérifiant $\theta(x_n) = \varepsilon^{(n)}$, alors la suite de terme général $p^n \operatorname{Log} x_n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers $\operatorname{Log}[\varepsilon]$ (proposition B.1.7).

Définition 10. — Si X est une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$, on dit qu'un sous-ensemble E de $X(\mathbf{C}_p)$ [resp. $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$] est borné si pour tout recouvrement fini $\mathscr{U}$ par des ouverts, on peut trouver une décomposition de E sous la forme $E = \cup_{U \in \mathscr{U}} E_U$ telle que si $U \in \mathscr{U}$ et f est une fonction holomorphe sur U, alors l'image de E_U par f est bornée dans $\mathbf{C}_p$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$].

B4. Si X est une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$ et E et F sont bornés dans $X(\mathbf{C}_p)$ [resp. $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$], alors $E \bigcup F$ est borné dans $X(\mathbf{C}_p)$ [resp. $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$].
B5. Si X et Y sont des variétés algébriques définies sur $\mathbf{C}_p$ et E et F sont des sous-ensembles bornés de $X(\mathbf{C}_p)$ et $Y(\mathbf{C}_p)$ [resp. $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et $Y(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$] respectivement, alors $E \times F$ est un sous-ensemble borné de $X \times Y$.
B6. Si X est une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$ et E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ borné dans X, alors $\theta(E)$ est borné dans $X(\mathbf{C}_p)$.
B7. Si X est une variété algébrique lisse définie sur $\mathbf{C}_p$ si E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{C}_p)$ borné dans X, alors il existe un sous-ensemble $\widetilde{E}$ de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ borné dans X tel que l'application $\theta : \widetilde{E} \to X(\mathbf{C}_p)$ soit une surjection de $\widetilde{E}$ sur E (proposition A.5.10).
B8. Soient X une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$, U un ouvert de X et E un sous-ensemble de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ borné dans X et contenu dans U. Alors E est borné dans U si et seulement si $\theta(E)$ est borné dans U (corollaire A.5.8).

B9. Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés algébriques défini sur $\mathbf{C}_p$ et E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{C}_p)$ [resp. $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$] borné dans X, alors $f(E)$ est borné dans Y (propositions A.2.6 et A.5.4).
B10. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés définies sur $\mathbf{C}_p$. Soient U un ouvert de Y, $V = f^{-1}(U)$ et E un sous-ensemble de $V(\mathbf{C}_p)$ [resp. $V(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$] borné dans X ; alors E est borné dans V si et seulement si $f(E)$ est borné dans U (corollaires A.2.16 et A.5.9).
B11. Si X est une variété propre sur $\mathbf{C}_p$, alors $X(\mathbf{C}_p)$ est borné (proposition A.2.8).
B12. Soient X une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$, E un sous-ensemble de $X(\mathbf{C}_p)$ borné dans X et $x \in X(\mathbf{C}_p)$. Alors E est borné dans $X - \{x\}$ si et seulement si x n'appartient pas à l'adhérence (pour la topologie p-adique) de E (corollaire A.2.12).
B13. Soient X une variété algébrique définie sur $\mathbf{C}_p$, $\omega \in \Omega_X^1$ une 1-forme différentielle fermée et E un sous-ensemble de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ borné dans X. Soit

$$F = \{(x,y) \in E \times E \mid \theta(x) = \theta(y)\}.$$

Alors l'image de F par l'application qui à (x,y) associe $\int_x^y \omega$ est bornée dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (corollaire A.5.12).

5. Périodes p-adiques des variétés abéliennes

Théorème 11. — *Soit X une variété abélienne définie sur un sous-corps fermé K de $\mathbf{C}_p$. Soient ω une forme différentielle de seconde espèce, U un ouvert sur lequel ω est holomorphe et $u = (0, \dots, u_n, \dots)$ un élément du module de Tate $T_p(X(\mathbf{C}_p))$.*

(i) *Il existe des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ bornées dans U telles que, si $n \in \mathbf{N}$, alors $\theta(x_n \ominus y_n) = u_n$.*

(ii) *Si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont de telles suites, alors la suite $p^n \int_{x_n}^{y_n} \omega$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément $\int_u \omega$ qui ne dépend que de u et de la classe de ω dans $H_{\mathrm{dR}}^1(X)$ (et du plongement de K dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$).*

(iii) *L'application «périodes p-adiques» de $H_{\mathrm{dR}}^1(X) \times T_p(X)$ à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ainsi définie est bilinéaire, commute à l'action de Galois et respecte les filtrations.*

L'idée derrière cette construction des périodes p-adiques des variétés abéliennes, inspirée par celles de Fontaine **[22, 24]** et Coleman **[12]** est que, si ω est une forme différentielle de seconde espèce sur une variété abélienne X et F_ω est une de ses primitives, alors la fonction $F_\omega([p]x) - pF_\omega(x)$ est rationnelle sur X donc «presque» bornée (cf. **B9**). Comme malheureusement, ω peut avoir des pôles, il faut prendre quelques précautions pour que la construction marche. En particulier, il faut se débrouiller pour ne pas s'approcher trop des pôles de ω, d'où les restrictions mises sur les couples (x_n, y_n) que l'on considère. Le théorème ci-dessus est plus précis que le théorème correspondant dans **[18]** dont la rédaction laissait un peu à désirer (avec le peu de précautions prises dans **[18]**, il n'est pas sûr du tout que l'on puisse trouver les a_n dont on a besoin pour la construction sauf dans le cas de bonne réduction).

6. Extension universelle et revêtement universel

Il existe une construction alternative des périodes utilisant l'extension universelle de la variété abélienne. Cette construction est un petit peu plus agréable car une forme différentielle de seconde espèce se représente comme une forme différentielle invariante (et donc régulière) sur l'extension universelle et on n'a donc plus le problème d'avoir à éviter ses pôles (l'extension universelle n'étant pas propre, on a quand même le problème de ne pas s'approcher trop de l'infini). Convenablement adaptée, elle permet de plus de construire les périodes des formes différentielles de troisième espèce (cf. B.2, §2). Cette construction est d'ailleurs la construction originelle de Fontaine et Messing (non publiée) et a été reprise par Wintenberger **[48]**; c'est une extension de la construction des périodes de Hodge-Tate proposée par Coleman (dans le cas de bonne réduction) dans **[12]**, note ajoutée sur épreuves, p.379.

Soient donc X une variété abélienne et $\widetilde{X}$ son extension universelle par un espace vectoriel.

Lemme 12. — *Soit $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $[p]x_{n+1} = x_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$.*

(i) *Il existe une suite $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{X}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ bornée dans $\widetilde{X}$ telle que, si $n \in \mathbf{N}$, alors $\theta \circ \pi(\widetilde{x}_n) = x_n$.*

(ii) *Si $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une telle suite, alors la suite $[p^n]\widetilde{x}_n$ converge dans $\widetilde{X}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ vers une limite qui ne dépend que de x.*

(iii) *L'application ι de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ dans $\widetilde{X}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ ainsi définie est un morphisme de groupes et son image $\widehat{X}(\mathbf{C}_p)$ est un sous-groupe p-divisible et borné de $\widetilde{X}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ tel que l'application $\theta \circ \pi : \widehat{X}(\mathbf{C}_p) \to X(\mathbf{C}_p)$ soit surjective.*

Si $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, soit λ_ω le logarithme de $\widetilde{X}$ dont la différentielle $d\lambda_\omega$ est la forme différentielle invariante sur $\widetilde{X}$ correspondant à ω via l'isomorphisme auquel il a été fait allusion ci-dessus.

Proposition 13. — *L'application qui au couple $(\omega, u) \in H^1_{\mathrm{dR}}(X) \times T_p(X)$ associe $-\lambda_\omega(\iota(u))$ est bilinéaire, Galois équivariante, respecte les filtrations et coïncide avec l'application «périodes p-adiques» définie au théorème 11.*

Remarque 14. — On déduit de la non dégénérescence de l'accouplement «périodes p-adiques», l'injectivité de la restriction de ι à $T_p(X)$ qui implique que ι est un isomorphisme de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ sur $\widehat{X}(\mathbf{C}_p)$ et donc que la suite

$$0 \longrightarrow T_p(X) \longrightarrow \widehat{X}(\mathbf{C}_p) \longrightarrow X(\mathbf{C}_p) \longrightarrow 0$$

est exacte. Cette situation n'est pas sans évoquer ce qui se passe sur les nombres complexes et permet de voir le sous-groupe $\widehat{X}(\mathbf{C}_p)$ de $\widetilde{X}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ comme le revêtement universel p-adique de $X(\mathbf{C}_p)$.

7. Relations de Riemann p-adiques

Soient K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, X une variété abélienne définie sur K, $\omega_1, \dots, \omega_d$ une base des formes différentielles holomorphes sur X, $\partial_1, \dots, \partial_d$ la base de l'espace des dérivations d'ordre 1 invariantes sur X duale de la base $\omega_1, \dots, \omega_d$. Soient D un diviseur de X défini sur K et G_D une fonction de Green associée à D. Soient $\omega_{1,D}, \dots, \omega_{d,D}$ les formes différentielles de seconde espèce définies par $\omega_{i,D} = d(\partial_i G_D)$. Finalement, soit ε_D l'accouplement de Weil de $T_p(X) \times T_p(X)$ à valeurs dans $T_p(\mathbf{G}_m)$ associé à D. Définissons la forme de Riemann p-adique $E_{D,p}$ associée à D par la formule $E_D(u,v) = -\operatorname{Log}([\varepsilon_D(u,v)])$, ce qui fait de $E_{D,p}$ une forme bilinéaire antisymétrique sur $T_p(X)$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p t_p$. L'analogue p-adique des relations de Riemann est l'énoncé suivant.

Théorème 15. — *Si u et v sont deux éléments de $T_p(X)$, alors*

$$E_{D,p}(u,v) = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_u \omega_{i,D} \int_v \omega_i - \int_v \omega_{i,D} \int_u \omega_i \Big).$$

On déduit de ce théorème et de la non dégénérescence de l'accouplement de Weil (si D est non dégénéré), la non dégénérescence de l'application « périodes p-adiques ». Comme corollaire, on en déduit la caractérisation suivante des formes différentielles exactes qui généralise le corollaire 12d de [**12**].

Théorème 16. — *Soit X une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}_p$. Soient ω une forme différentielle de seconde espèce et U un ouvert de Zariski de X sur lequel ω est holomorphe. Alors ω est exacte si et seulement si une (et donc toute) primitive de ω est bornée sur tout sous-ensemble borné de $U(\mathbf{C}_p)$.*

8. Plan du volume

Les résultats mentionnés dans l'introduction sont pour la plupart des analogues p-adiques de résultats bien connus sur les complexes et nous avons consacré un chapitre au rappel de ces résultats (à vrai dire, ce chapitre s'est retrouvé animé d'une vie propre et a atteint une taille non prévue à l'origine). La plupart des résultats techniques de base concernant l'analyse p-adique sur les variétés comme la notion d'ensemble borné, le théorème des fonctions implicites etc ... ont, quant à eux, été rassemblés dans un (long) appendice pour ne pas trop perturber l'exposition du chapitre II qui est consacré à l'exposé de la théorie p-adique résumée dans cette introduction.

Les résultats présentés dans ce texte datent en grande partie de 92 et leur rédaction a bénéficié de séjours au Newton Institute en mai 93 et mai 98 et à Harvard en 93-94. Je voudrais remercier tout particulièrement V. Cristante et M. Candilera pour l'opportunité qu'ils m'ont offerte de donner un cours sur ce sujet à Padoue en février 95, cours qui m'a grandement aidé à mettre mes idées au clair. Finalement, je voudrais remercier le comité de rédaction d'Astérisque pour sa patience et J.-B. Bost pour ses (nombreuses) remarques sur le chapitre I.

CHAPITRE I

INTÉGRALES ABÉLIENNES COMPLEXES

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, ce chapitre ne contient que des résultats bien connus sur les intégrales abéliennes complexes. Il a bénéficié de la lecture d'un certain nombre d'ouvrages, au premier rang desquels [**4, 38, 42, 43**] et aussi [**31, 39, 36, 37, 44**]. Nous avons presque systématiquement utilisé des techniques d'analyse complexe (surtout la formule des résidus) pour les démonstrations de résultats purement algébriques sur $\mathbf{C}$; le principe de Lefschetz permet d'étendre ces résultats à tout corps algébriquement clos de caractéristique 0, ce qui, compte-tenu du (iv) de la remarque 2 de l'introduction, est suffisant pour l'intégration p-adique. Nous avons essayé de démontrer le plus de résultats possibles mais avons renoncé à reproduire la démonstration de certains d'entre eux (principalement les théorèmes d'Appell-Humbert et Lefschetz et celui de Riemann concernant la fonction thêta) quand celle-ci était un peu trop longue et pouvait se trouver dans [**4, 38**] ou [**39**]. D'autre part, la théorie des intégrales abéliennes est intimement liée à celle des groupes algébriques commutatifs [**21, 46**] mais nous n'avons abordé cette dernière que de manière très superficielle. Elle est aussi très liée à celle des 1-motifs mais nous n'en dirons rien.

I.1. Formes différentielles et périodes

Ce paragraphe contient des rappels très succincts sur la cohomologie des variétés algébriques définies sur $\mathbf{C}$. On trouvera plus de détails au début de [**20**] ou dans les chapitres 0 et 3 de [**26**] ou encore dans les articles [**1**] et [**28**]. De toute façon, nous ne nous intéresserons par la suite qu'à H^1 et, de manière plus épisodique, à la partie de H^2 engendrée par les classes de diviseurs. Rappelons que, sauf mention explicite du contraire, une variété algébrique est supposée géométriquement irréductible.

1. La formule de Legendre. — Soient $a, b \in \mathbf{C}$ et X la courbe elliptique d'équation projective $zy^2 = 4x^3 + axz^2 + bz^3$. Soit $\omega = \dfrac{dx}{y}$; c'est une base de l'espace $\Omega^1(X)$ des formes différentielles holomorphes sur X. Soit Λ le réseau des périodes de ω (*i.e.*

l'image de $H_1(X,\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^2$ par l'application $u \to \int_u \omega$). La série

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{u\in\Lambda-\{0\}} \Big(\frac{1}{(z-u)^2} - \frac{1}{u^2}\Big)$$

converge absolument sur tout compact de $\mathbf{C}-\Lambda$ et y définit une fonction méromorphe périodique de période Λ. L'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui à z associe $(\wp(z), \wp'(z), 1)$ induit un isomorphisme ι de groupes de Lie complexes compacts de $\mathbf{C}/\Lambda$ sur X et on a $\iota^*\omega = dz$.

Proposition I.1.1. — *Si $\eta = x\dfrac{dx}{y}$ et si u, v forment une base orientée de $H_1(X,\mathbf{Z})$, alors*

$$\int_u \omega \int_v \eta - \int_v \omega \int_u \eta = 2i\pi.$$

Démonstration. — Posons $\omega_1 = \int_u \omega$ et $\omega_2 = \int_v \omega$, ce qui fait de ω_1, ω_2 une base orientée de Λ sur $\mathbf{Z}$. Posons de même $\eta_1 = \int_u \eta$ et $\eta_2 = \int_v \eta$. Soit $F(z)$ une primitive méromorphe de $\wp$ sur $\mathbf{C}$. Comme $\iota^*\eta = \wp(z)dz$, on a $F(z+\omega_1) = F(z) + \eta_1$ et $F(z+\omega_2) = F(z) + \eta_2$ quel que soit $z \in \mathbf{C} - \Lambda$. Soit $a = -\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}$ et considérons l'intégrale I de $F(z)dz$ sur le parallélogramme de sommets a, $a+\omega_1$, $a+\omega_1+\omega_2$ et $a+\omega_2$. Comme $F(z)dz$ a un unique pôle en $z=0$ de résidu -1 à l'intérieur du parallélogramme, la formule des résidus montre que l'on a $I = -2i\pi$. On peut d'autre part écrire I sous la forme

$$I = \int_a^{a+\omega_1} \Big(F(z) - F(z+\omega_2)\Big) - \int_a^{a+\omega_2} \Big(F(z) - F(z+\omega_1)\Big) = -\omega_1\eta_2 + \omega_2\eta_1,$$

ce qui permet de conclure.

Remarque I.1.2. — La plupart des résultats que l'on peut trouver dans ce volume sont des variations sur le thème évoqué ci-dessus. Parmi les généralisations directes de la formule de Legendre, on trouve en particulier la proposition I.2.1 qui est à la base de l'étude analytique de la jacobienne d'une courbe algébrique, les relations de Riemann (proposition I.3.12) et l'accouplement de Weil sur les courbes (proposition I.4.12) et sur les variétés abéliennes (proposition I.3.20).

2. Rappels sur la cohomologie d'une variété algébrique. — Si X est une variété algébrique définie sur K lisse de dimension d, on peut aussi voir X comme une variété analytique complexe (compacte si X est propre) de dimension d ou comme une variété différentiable réelle de dimension $2d$. La dernière description nous permet en considérant le complexe des chaines $\mathscr{C}^\infty$ d'attacher à X des groupes d'homologie singulière $H_n(X,\mathbf{Z})$, pour $0 \le n \le 2d$. Elle permet aussi de lui attacher, pour $0 \le n \le 2d$, le groupe $H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ de cohomologie de de Rham, quotient de l'espace des formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ fermées sur X et de degré n par celui des différentielles des formes de degré $n-1$. Si X est compacte, on obtient une autre description de $H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ en utilisant les courants au lieu des formes $\mathscr{C}^\infty$. La formule de Stokes nous fournit de plus un accouplement « périodes » $H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X) \times H_n(X,\mathbf{Z}) \to \mathbf{C}$ obtenu par intégration $\int_u \omega$ d'une forme différentielle ω de degré n sur une chaine u de dimension n et donc une application naturelle $H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ dans $\mathrm{Hom}(H_n(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$.

Si $\mathscr{F}$ est un faisceau de groupes additifs sur X (pour la topologie usuelle ou celle de Zariski), si $\mathscr{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X pour la topologie adéquate et si $n \in \mathbf{N}$, soit

$$\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F}) = \prod_{i_0,\ldots,i_n \in I} \mathscr{F}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_n}}.$$

Si $\mathbf{f} = (f_{i_0,\ldots,i_n})_{i_0,\ldots,i_n\in I}$ est un élément de $\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F})$, on définit sa différentielle de Čech $\mathbf{g} = d_{\text{Čech}}\mathbf{f}$ comme l'élément de $\Gamma^{n+1}(\mathscr{U},\mathscr{F})$ dont la composante $g_{i_0,\ldots,i_{n+1}}$ sur $\mathscr{F}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{n+1}}}$ est donnée par la formule

$$g_{i_0,\ldots,i_{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j f_{i_0,\ldots,\widehat{i_j},\ldots,i_{n+1}}.$$

On note $Z^n(\mathscr{U},\mathscr{F})$ le groupe des n-cocycles sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathscr{F}$, c'est-à-dire le sous-groupe de $\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F})$ tué par $d_{\text{Čech}}$ et on pose

$$H^n(\mathscr{U},\mathscr{F}) = Z^n(\mathscr{U},\mathscr{F})/d_{\text{Čech}}\big(\Gamma^{n-1}(\mathscr{U},\mathscr{F})\big).$$

Finalement, on définit $H^n(X,\mathscr{F})$ comme la limite inductive des $H^n(\mathscr{U},\mathscr{F})$ pour la relation de raffinement des recouvrements. Ce qui précède s'applique en particulier aux faisceaux constants $\mathbf{Z}$, $2i\pi\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{C}$ ... sur X considéré comme variété différentiable ou analytique, ce qui permet de définir les groupes de cohomologie $H^n(X,\mathbf{Z})$, $H^n(X,2i\pi\mathbf{Z})$, $H^n(X,\mathbf{C})$ ...

Si $\mathscr{F}^\cdot = \mathscr{F}^0 \xrightarrow{d} \mathscr{F}^1 \xrightarrow{d} \mathscr{F}^2 \xrightarrow{d} \ldots$ est un complexe de faisceaux de groupes abéliens (pour la topologie usuelle ou la topologie de Zariski) sur X, si $\mathscr{U} = \{U_i,\ i \in I\}$ est un recouvrement ouvert de X pour la topologie adéquate et si $n \in \mathbf{N}$, soit

$$\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot) = \prod_{\substack{0\le k\le n,\\ i_0,\ldots,i_k\in I}} \mathscr{F}^{n-k}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}}.$$

Si $\mathbf{f} = (f^{(n-k)}_{i_0,\ldots,i_k})_{0\le k\le n, i_0,\ldots,i_k\in I}$ est un élément de $\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$, on définit sa différentielle totale $\mathbf{g} = d_{\text{tot}}\mathbf{f}$ comme l'élément de $\Gamma^{n+1}(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$ dont la composante $g^{(n-k)}_{i_0,\ldots,i_{k+1}}$ sur $\mathscr{F}_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{k+1}}}$ est donnée par la formule

$$g^{(n-k)}_{i_0,\ldots,i_{k+1}} = df^{(n-k-1)}_{i_0,\ldots,i_{k+1}} + (-1)^{n-k}\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j f^{(n-k)}_{i_0,\ldots,\widehat{i_j}\ldots,i_{k+1}}.$$

On définit alors le groupe $Z^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$ des n-cocycles sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans $\mathscr{F}^\cdot$ comme l'ensemble des éléments de $\Gamma^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$ tués par d_{tot} et $H^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$ comme le quotient de $Z^n(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)$ par $d_{\text{tot}}\big(\Gamma^{n-1}(\mathscr{U},\mathscr{F}^\cdot)\big)$. Finalement, on définit le groupe

$H^n(X, \mathscr{F}^\cdot)$ d'hypercohomologie de X à valeurs dans $\mathscr{F}^\cdot$ comme la limite inductive des $H^n(\mathscr{U}, \mathscr{F}^\cdot)$.

Si X est une variété algébrique lisse, on peut appliquer ce qui précède aux complexes $\Omega^\cdot_X$, $\Omega^\cdot_{X,\mathrm{an}}$ ou $\Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty}$ des formes différentielles algébriques, analytiques ou $\mathscr{C}^\infty$. On note $H^n_{\mathrm{dR}}(X)$ (resp. $H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$) le n-ième groupe d'hypercohomologie du complexe $\Omega^\cdot_X$ (resp. $\Omega^\cdot_{X,\mathrm{an}}$) pour la topologie de Zariski (resp. usuelle). Une forme différentielle rationnelle étant aussi analytique et un ouvert de Zariski étant aussi un ouvert pour la topologie usuelle, on a une application naturelle de $H^n_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$ et une forme analytique étant aussi $\mathscr{C}^\infty$, on a une application naturelle de $H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$ dans $H^n(X, \Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty})$. Finalement, si ω est une n-forme différentielle fermée sur X, on peut associer à ω l'élément de $Z^n(\{X\}, \Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty})$ dont la composante de degré n est ω et toutes les autres sont nulles, d'où une application naturelle de $H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ dans $H^n(X, \Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty})$.

La proposition suivante est le résultat du travail d'un nombre conséquent de mathématiciens parmi lesquels on trouve Poincaré, de Rham, Weil, Serre, Hodge, Hironaka, Grothendieck...

Proposition I.1.3. — *Si X est une variété algébrique lisse de dimension d et $0 \leq n \leq 2d$, toutes les flèches du diagramme*

$$\begin{tikzcd}
 & & H^n_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(H_n(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C}) \\
H^n(X,\mathbf{C}) \arrow[r] & H^n_{\mathrm{dR,an}}(X) \arrow[r] & H^n(X,\Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty}) & \\
 & H^n_{\mathrm{dR}}(X) \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

sont des isomorphismes. En particulier, le groupe $H^n(X, \mathbf{C})$ s'identifie naturellement, via l'application «périodes», à $\mathrm{Hom}(H_n(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})$.

Remarque I.1.4

(i) On dispose d'une autre application naturelle

$$H^n(X, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_n(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})$$

en résolvant le faisceau constant $\mathbf{C}$ au moyen des cochaines simpliciales et il n'est pas sûr que cette application coïncide avec celle de la proposition ; il y a probablement une différence de signe dépendant de n (cf. **[20]** p.14).

(ii) La proposition fournit une définition purement algébrique des groupes de cohomologie de de Rham d'une variété algébrique qui garde un sens si le corps de définition n'est pas le corps des nombres complexes. Si K est un sous-corps de $\mathbf{C}$ et X est une variété algébrique lisse définie sur K, le groupe $H^n_{\mathrm{dR}}(X/K)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie et $H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbf{C}) = \mathbf{C} \otimes H^n_{\mathrm{dR}}(X/K)$.

(iii) Le fait que les applications naturelles de $H^n(X,\mathbf{C})$ dans $H^n(X,\Omega^{\cdot}_{X,\mathrm{an}})$ et $H^n(X,\Omega^{\cdot}_{X,\mathscr{C}^\infty})$ soient des isomorphismes se déduit des lemmes de Poincaré analytique et $\mathscr{C}^\infty$ qui permettent de décrire explicitement les applications inverses. Si $\mathscr{U} = \{U_i,\ i\in I\}$ est un recouvrement ouvert de X, un élément de $Z^n(\mathscr{U},\Omega^{\cdot}_{X,\mathscr{C}^\infty})$ est une collection d'éléments $(\omega^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k})_{0\le k\le n, i_0,\dots,i_k\in I}$ tels que l'on ait $\omega^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k}\in\Omega^{n-k}_{U_{i_0}\cap\cdots U_{i_k},\mathscr{C}^\infty}$ et

$$d\omega^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k} + (-1)^{n-k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\omega^{(n-k+1)}_{i_0,\dots,\widehat{i_j}\dots,i_k} = 0 \tag{I.1.5}$$

quels que soient $0\le k\le n$ et $i_0,\dots,i_k\in I$ (où l'on a utilisé la convention $\Omega^0_{X,\mathscr{C}^\infty} = \mathscr{O}_{X,\mathscr{C}^\infty}$). Maintenant, si on suppose que $\mathscr{U}$ est un recouvrement de X tel que $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}$ soit contractible quels que soient $k\in\mathbf{N}$ et $i_0,\dots,i_k\in I$ et si ℓ est le plus grand entier tel qu'il existe $i_0,\dots,i_\ell\in I$ tels que l'on ait $\omega^{(n-\ell)}_{i_0,\dots,i_\ell}\neq 0$, la relation I.1.5 implique que $d\omega^{(n-\ell)}_{i_0,\dots,i_\ell}=0$ et le lemme de Poincaré $\mathscr{C}^\infty$ nous fournit une primitive $\eta^{(n-\ell-1)}_{i_0,\dots,i_\ell}$ de $\omega^{(n-\ell)}_{i_0,\dots,i_\ell}$ sur $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_\ell}$. Soit η l'élément de $\Gamma^{n-1}(\mathscr{U},\Omega^{\cdot}_{X,\mathscr{C}^\infty})$ défini par $\eta^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k}=\eta^{(n-\ell-1)}_{i_0,\dots,i_\ell}$ si $k=\ell-1$ et $\eta^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_\ell}=0$ sinon. Le cocycle $\alpha=\omega-d_{\mathrm{tot}}\eta$ est tel que $\alpha^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k}=0$ quels que soient $0\le k\le\ell$ et $i_0,\dots,i_k\in I$. Réitérant ce procédé, on obtient un cocycle β cohomologue à ω tel que l'on ait $\beta^{(n-k)}_{i_0,\dots,i_k}=0$ quels que soient $0\le k\le n-1$ et $i_0,\dots,i_k\in I$, c'est-à-dire soit élément de $Z^n(X,\mathbf{C})$, ce qui nous fournit une application naturelle de $H^n(X,\Omega^{\cdot}_{X,\mathscr{C}^\infty})$ dans $H^n(X,\mathbf{C})$ qui est l'inverse de celle de $H^n(X,\mathbf{C})$ dans $H^n(X,\Omega^{\cdot}_{X,\mathscr{C}^\infty})$. La même construction en remplaçant le lemme de Poincaré $\mathscr{C}^\infty$ par le lemme de Poincaré holomorphe nous fournit une application naturelle de $H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$ dans $H^n(X,\mathbf{C})$ inverse de celle de $H^n(X,\mathbf{C})$ dans $H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$.

Si X est supposée propre, la théorie de Hodge permet de munir $H^n(X,\mathbf{C})\cong H^n_{\mathrm{dR,an}}(X)$ de la décomposition de Hodge $H^n(X,\mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^q(X,\Omega^p_X)$. Dans le cas $n=1$, si on note $\Omega^1(X)=H^0(X,\Omega^1_X)$ l'espace des formes différentielles holomorphes sur X, cette décomposition et la non dégénérescence de l'application «périodes» se traduisent de la manière suivante

Proposition I.1.6

(i) *L'application naturelle de* $\Omega^1(X)\oplus\overline{\Omega^1(X)}$ *dans* $H^1_{\mathrm{dR}}(X,\mathbf{C})$ *est un isomorphisme et* $\overline{\Omega^1(X)}$ *est canoniquement isomorphe à* $H^1(X,\mathscr{O}_X)$.

(ii) *L'application qui à u associe la forme linéaire* $u\to\int_u\omega$ *établit un isomorphisme entre* $H_1(X,\mathbf{Z})$ *modulo torsion et un réseau de* $\Omega^1(X)^*$.

(iii) *Si* ℓ *est une forme linéaire de* $H_1(X,\mathbf{Z})$ *dans* $\mathbf{R}$, *il existe un unique élément de* $\Omega^1(X)$ *tel que l'on ait* $\ell(u)=\mathrm{Re}\big(\int_u\omega\big)$ *quel que soit* $u\in H_1(X,\mathbf{Z})$.

Sur la cohomologie de de Rham algébrique, la décomposition de Hodge laisse la place à la filtration de Hodge : si $p+q=n$, on définit $F^pH^n_{\mathrm{dR}}(X)$ comme l'image du q-ème groupe d'hypercohomologie du complexe tronqué $\Omega^p_X \longrightarrow \Omega^{p+1}_X \longrightarrow \cdots$. Dans le cas $n=1$, la filtration de Hodge de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ se résume à $F^1H^1_{\mathrm{dR}}(X) = \Omega^1(X)$, $F^2H^1_{\mathrm{dR}}(X)=0$ et donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(X) \longrightarrow H^1(X,\mathscr{O}_X) \longrightarrow 0. \tag{I.1.7}$$

3. Classes de cohomologie d'un diviseur. — Soit X une variété algébrique propre et lisse. Notons $\mathrm{Div}(X)$ le groupe des diviseurs de X. Si $D \in \mathrm{Div}(X)$, l'accouplement d'intersection $u \to D\# u$ permet d'associer à D une forme linéaire à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sur $H_2(X,\mathbf{Z})$ et donc une classe

$$[D]_{\mathrm{an}} \in \mathrm{Hom}(H^2(X,\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) \subset \mathrm{Hom}(H^2(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C}) = H^2(X,\mathbf{C}).$$

Cette classe est aussi l'image du courant δ_D d'intégration le long de D.

D'autre part, on peut trouver un recouvrement ouvert de X pour la topologie de Zariski par des ouverts affines tel que si $U \in \mathscr{U}$, alors D est le diviseur d'une fonction f_U sur U. Si $U,V \in \mathscr{U}$, posons $f_{U,V} = \dfrac{f_U}{f_V}$, ce qui fait de $f_{U,V}$ un élément de $\mathscr{O}^*_{U\cap V}$ et les $(f_{U,V})_{U,V\in\mathscr{U}}$ définissent un élément de $Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*_X)$ dont on note $[D]_{\mathrm{alg}}$ l'image dans $H^1(X,\mathscr{O}^*_X)$, groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites. Si on pose alors $\omega_{U,V} = d\log f_{U,V}$, on a $\omega_{U,V}+\omega_{V,W}+\omega_{W,U}=0$ si $U,V,W \in \mathscr{U}$ et $d\omega_{U,V}=0$, ce qui permet d'associer à D une classe de cohomologie de de Rham algébrique $[D]_{\mathrm{dR}} \in H^2_{\mathrm{dR}}(X)$. La différentielle (au sens des courants) de $\dfrac{df_U}{f_U}$ étant égale à $2i\pi\delta_{D\cap U}$ d'après la formule de Poincaré-Lelong, $2i\pi\delta_D$ et $(\omega_{U,V})_{U,V\in\mathscr{U}}$ ont même image dans $H^2_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ et donc dans $H^2(X,\mathbf{C})$, ce qui se traduit par la formule $[D]_{\mathrm{dR}} = 2i\pi[D]_{\mathrm{an}}$.

Si on passe à la suite de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}^*_X \longrightarrow 0,$$

l'application de $\mathscr{O}_X$ dans $\mathscr{O}^*_X$ étant celle qui à f associe $e^{2i\pi f}$, on en déduit une application $\delta_{\mathrm{an}} : H^1(X,\mathscr{O}^*_X) \to H^2(X,\mathbf{Z})$. C'est l'application qui, à un fibré en droites, associe sa classe de Chern. D'un point de vue algébrique, il vaut mieux considérer la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow 2i\pi\mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}^*_X \longrightarrow 0,$$

l'application de $\mathscr{O}_X$ dans $\mathscr{O}^*_X$ étant celle qui à f associe e^f. On obtient de cette manière une application $\delta_{\mathrm{dR}} : H^1(X,\mathscr{O}^*_X) \to H^2(X,2i\pi\mathbf{Z})$.

Lemme I.1.8

(i) *Les images de* $\delta_{\mathrm{an}}([D]_{\mathrm{alg}})$ *et* $[D]_{\mathrm{an}}$ *dans* $H^2(X,\mathbf{C})$ *sont opposées.*

(ii) *Les images de* $\delta_{\mathrm{dR}}([D]_{\mathrm{alg}})$ *et* $[D]_{\mathrm{dR}}$ *dans* $H^2(X,\mathbf{C})$ *sont opposées.*

Démonstration. — Compte-tenu de la relation $[D]_{\mathrm{dR}} = 2i\pi[D]_{\mathrm{an}}$, il suffit de prouver le (ii). Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert (pour la topologie usuelle) suffisamment fin pour que $U \cap V$ soit contractible si $U, V \in \mathscr{U}$ et, si $U \in \mathscr{U}$, il existe une fonction holomorphe f_U sur U dont $D \cap U$ est le diviseur de U. Si $U, V \in \mathscr{U}$, soit $f_{U,V} = \dfrac{f_U}{f_V}$. Par définition, la classe dans $H^1(X, \mathscr{O}^*_{X,\mathrm{an}})$ du cocycle qu'ils définissent est l'image de $[D]_{\mathrm{alg}}$. L'image de $[D]_{\mathrm{dR}}$ dans $H^2_{\mathrm{dR,an}}(X)$ est quant à elle, celle du cocycle ω construit à partir des formes $\omega_{U,V} = \dfrac{df_U}{f_U} - \dfrac{df_V}{f_V}$. D'autre part, si $g_{U,V}$ est une primitive holomorphe de $\omega_{U,V}$ sur $U \cap V$ et α est l'élément de $\Gamma^1(\mathscr{U}, \Omega^{\cdot}_{X,\mathrm{an}})$ dont les composantes de degré 1 sont les $\omega_{U,V}$ et celles de degré 0 sont nulles, l'image de $[D]_{\mathrm{dR}}$ dans $H^2(X, \mathbf{C})$ est aussi celle de $\omega - d_{\mathrm{tot}}\alpha$, c'est-à-dire celle du 2-cocycle $(g_{U,V,W})_{U,V,W \in \mathscr{U}}$, où $g_{U,V,W} = -g_{U,V} - g_{V,W} - g_{W,U}$. Comme de plus, $g_{U,V}$ est une détermination de $\log f_{U,V}$, le cocycle $(g_{U,V,W})_{U,V,W \in \mathscr{U}}$ est en fait élément de $Z^2(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ et est aussi l'image du cocycle $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}} \in Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}^*_{X,\mathrm{an}})$ dans $Z^2(\mathscr{U}, 2i\pi\mathbf{Z})$ par l'application de connexion, ce qui prouve que son image dans $H^2(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ n'est autre que $\delta_{\mathrm{dR}}([D]_{\mathrm{alg}})$ et permet de conclure.

Définition I.1.9. — On dit que D est cohomologiquement trivial si l'image de $[D]_{\mathrm{alg}}$ dans $H^2(X, \mathbf{Z})$ est nulle .

On dit que D est cohomologiquement de torsion si l'image de $[D]_{\mathrm{alg}}$ dans $H^2(X, \mathbf{Z})$ est de torsion, ce qui équivaut à $[D]_{\mathrm{dR}} = 0$ ou $[D]_{\mathrm{an}} = 0$.

On note $\mathrm{Div}^0(X)$ (resp. $\mathrm{Div}^\tau(X)$) le sous-groupe de $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs cohomologiquement triviaux (resp. de torsion).

Remarque I.1.10

(i) Si $H^2(X, \mathbf{Z})$ est sans torsion, $\mathrm{Div}^\tau(X) = \mathrm{Div}^0(X)$. C'est en particulier le cas si X est une courbe ou si X est une variété abélienne.

(ii) Si X est une courbe, $\mathrm{Div}(X)$ est le groupe libre engendré par les points de X, $H^2(X, \mathbf{C})$ est de dimension 1 engendré par la classe (analytique ou de de Rham) d'un point et $H_2(X, \mathbf{Z})$ est de rang 1 sur $\mathbf{Z}$ engendré par la classe de X. On note deg l'isomorphisme de $H^2(X, \mathbf{C})$ sur $\mathbf{C}$ vérifiant $\deg[P]_{\mathrm{dR}} = 1$ si P est un point et on a $\deg \omega = \dfrac{1}{2i\pi} \int_X \omega$ si $\omega \in H^2_{\mathrm{dR}}(X)$. D'autre part, un diviseur est cohomologiquement trivial si et seulement si il est de degré 0 ; autrement dit $D = \sum n_P P \in \mathrm{Div}^0(X)$ si et seulement si $\sum n_P = 0$.

4. Formes différentielles et résidus.

Lemme I.1.11. — *Si X est une variété analytique lisse, si ω est une 1-forme méromorphe fermée sur X holomorphe sur le complémentaire d'un diviseur D et si ω a une primitive g monovaluée sur $X - D$, alors g se prolonge en une fonction méromorphe sur X.*

Démonstration. — Soient $D_1, \ldots, D_r$ les composantes irréductibles de D. La propriété à démontrer étant locale, on peut supposer que chacune des D_i est le diviseur d'une fonction f_i holomorphe sur X. Il existe alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $(f_1 \ldots f_r)^n \omega$ soit holomorphe sur X. D'autre part, si a est un point lisse de D et $z_1, \ldots, z_d$ est un système de coordonnées locales au voisinage de a tel que $z_1 = 0$ soit l'équation locale de D, on peut écrire ω au voisinage de a sous la forme $z_1^{-n} \sum_{i=1}^{d} F_i(z) dz_i$ avec F_i holomorphe dans un voisinage de 0. La fonction g vérifie alors l'équation différentielle $\dfrac{\partial g}{\partial z_1} = z_1^{-n} F_1(z)$ et donc est de la forme $z_1^{1-n} G(z_1, \ldots, z_d) + H(z_2, \ldots, z_d) \log z_1$ avec G, H holomorphes dans un voisinage de 0. Comme d'autre part, g est monovaluée, la fonction $H(z_2, \ldots, z_d)$ doit être identiquement nulle et g est méromorphe au voisinage de a. La fonction $(f_1 \ldots f_r)^n g$ se prolonge donc en une fonction holomorphe sur X privé des points singuliers de D. Comme ceux-ci sont de codimension complexe 2, la fonction $(f_1 \ldots f_r)^n g$ est holomorphe sur X tout entier et g est méromorphe sur X tout entier, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme I.1.12. — *Si ω est une 1-forme différentielle rationnelle fermée sur une variété algébrique lisse X, il existe un recouvrement $\mathcal{U}$ de X pour la topologie usuelle tel que si $U \in \mathcal{U}$, il existe des fonctions méromorphes g_U et $f_{U,j}$ pour $j \in I_U$ ensemble fini et des constantes $\lambda_{U,j}$ telles que l'on puisse écrire ω sous la forme $dg_U + \sum_{j \in I_U} \lambda_{U,j} \dfrac{df_{U,j}}{f_{U,j}}$ sur U. De plus, il existe un unique élément $\mathrm{Div}(\omega)$ de $\mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}(X)$ appelé résidu de ω tel que, quel que soit $U \in \mathcal{U}$, on ait $\mathrm{Div}(\omega) = \sum_{j \in I_U} \lambda_{U,j} \mathrm{Div}(f_{U,j})$ sur U.*

Soit D un diviseur de X contenant les pôles de ω. Prenons pour $\mathcal{U}$ un recouvrement par des ouverts analytiquement isomorphes à des boules de $\mathbf{C}^d$. Si $U \in \mathcal{U}$, soient $D_{U,j}$ pour $j \in I_U$, les composantes irréductibles de $D \cap U$ et, si $j \in I_U$, soient $f_{U,j}$ une fonction holomorphe sur U dont le diviseur est $D_{U,j}$ et γ_j un petit lacet autour de $D_{U,j}$ de telle sorte que $H_1(U - D)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par les γ_j et soit $\lambda_{U,j} = \dfrac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \omega$. La forme différentielle $\omega - \sum_{j \in I_U} \lambda_{U,j} \dfrac{df_{U,j}}{f_{U,j}}$ n'a pas de périodes et est donc la différentielle d'une fonction g_U monovaluée et holomorphe sur $U - D$. D'après le lemme I.1.11, on peut prolonger g_U en une fonction méromorphe sur U tout entier, ce qui permet d'écrire ω sous la forme $dg_U + \sum_{j \in I_U} \lambda_{U,j} \dfrac{df_{U,j}}{f_{U,j}}$. Pour terminer la démonstration du lemme, constatons que cette décomposition n'est pas unique mais que

$$\sum_{j \in I_U} \lambda_{U,j} \mathrm{Div}(f_{U,j}) = \sum_{j \in I_U} \Big(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_j} \omega \Big) D_{U,j}$$

est un élément bien défini de $\mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}(U)$, ce qui montre que ces diviseurs se recollent en un élément de $\mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}(X)$.

Définition I.1.13. — Si X est une variété algébrique lisse, une 1-forme différentielle fermée rationnelle sur X est dite

(i) de première espèce si elle est holomorphe sur X,

(ii) de seconde espèce si son résidu est nul,

(iii) de troisième espèce si elle n'a que des pôles simples et son résidu appartient à $\mathrm{Div}(X)$ (c'est à dire si ses résidus le long des pôles sont entiers).

On notera $\mathrm{DF}(X)$, $\mathrm{DSE}(X)$ et $\mathrm{DTE}(X)$ respectivement, les espaces des 1-formes différentielles fermées, de seconde espèce et de troisième espèce.

Proposition I.1.14. — *Soit X une variété algébrique lisse.*

(i) *Si ω est une 1-forme différentielle fermée sur X, l'image de $\mathrm{Div}(\omega)$ dans $H^2(X, \mathbf{C})$ est nulle.*

(ii) *Réciproquement, si X est de plus supposée propre et si $D \in \mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}(X)$ a une classe nulle dans $H^2(X, \mathbf{C})$, alors il existe une 1-forme rationnelle fermée ω dont tous les pôles sont simples et dont le résidu est D.*

(iii) *Dans le cas général, toute 1-forme différentielle rationnelle fermée peut s'écrire comme la somme d'une forme de seconde espèce et d'une forme dont tous les pôles sont simples.*

Démonstration. — (i) D'après le lemme I.1.12, on peut trouver un recouvrement $\mathscr{U}$ de X pour la topologie usuelle tel que si $U \in \mathscr{U}$, il existe des fonctions $g_U, f_{U,1}, \ldots, f_{U,r_U}$ méromorphes sur U et des constantes $\lambda_{U,1}, \ldots, \lambda_{U,r_U}$ telles que l'on ait $\omega = dg_U + \eta_U$ avec $\eta_U = \sum_{i=1}^{r_U} \lambda_{U,i} \dfrac{df_{U,i}}{f_{U,i}}$. Quitte à raffiner $\mathscr{U}$, on peut de plus supposer que si $U, V \in \mathscr{U}$, alors $U \cap V$ est contractile. Si $U, V \in \mathscr{U}$, la forme différentielle $\eta_{U,V} = \eta_U - \eta_V$ est holomorphe sur $U \cap V$ et $U \cap V$ étant contractile, est la différentielle d'une fonction $h_{U,V}$ holomorphe sur $U \cap V$. Si $U, V, W \in \mathscr{U}$, la fonction $h_{U,V,W} = h_{U,V} + h_{V,W} + h_{W,U}$ est alors constante sur $U \cap V \cap W$ et les $(h_{U,V,W})_{U,V,W \in \mathscr{U}}$ nous définissent un élément de $Z^2(\mathscr{U}, \mathbf{C})$ dont l'image dans $H^2(X, \mathbf{C})$ est l'opposée de la classe de $\mathrm{Div}(\omega)$ (cf. démonstration du lemme I.1.8). D'autre part, quitte à changer les constantes d'intégration, ce qui change le cocycle $(h_{U,V,W})_{U,V,W \in \mathscr{U}}$ par un cobord, on peut s'arranger pour que l'on ait $h_{U,V} = g_V - g_U$ quels que soient $U, V \in \mathscr{U}$, ce qui implique que le cocycle $(h_{U,V,W})_{U,V,W \in \mathscr{U}}$ est identiquement nul et démontre le (i).

Passons au (ii). Nous supposons donc que X est propre. Soit $D \in \mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}(X)$ et $\mathscr{U}$ un recouvrement affine de X tel que $D \cap U$ soit de la forme $\sum_{i=1}^{r_U} \lambda_{U,i} \mathrm{Div}(f_{U,i})$, où les $f_{U,i}$ sont des fonctions rationnelles sur U. Soit $\omega_U = \sum_{i=1}^{r_U} \lambda_{U,i} \dfrac{df_{U,i}}{f_{U,i}}$. Si $U, V \in \mathscr{U}$, la forme $\omega_{U,V} = \omega_U - \omega_V$ est holomorphe sur $U \cap V$ et on a $d\omega_{U,V} = 0$ et $\omega_{U,V} + \omega_{V,W} + \omega_{W,U} = 0$, ce qui fait que les $\omega_{U,V}$ représentent un élément de $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$ qui n'est autre que la classe de D dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$. En particulier, cette classe est nulle si et seulement si il existe des formes différentielles fermées $\eta_U \in \Omega^1_U$ pour $U \in \mathscr{U}$ et des fonctions $f_{U,V}$ holomorphes sur $U \cap V$ telles que l'on ait $\omega_{U,V} = \eta_V - \eta_U + df_{U,V}$ sur $U \cap V$ et $f_{U,V} + f_{V,W} + f_{W,U} = 0$ sur $U \cap V \cap W$. Comme on a supposé X propre, l'application naturelle de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ est surjective et, quitte à raffiner $\mathscr{U}$, on peut trouver un cocycle élément de $Z^1(\mathscr{U}, \Omega^{\cdot}_X)$ dont la composante de degré 0 est égale à $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$. Ceci permet, en soustrayant ce cocycle de supposer que les $f_{U,V}$ sont toutes nulles et donc que l'on a $\omega_{U,V} = \eta_V - \eta_U$ sur $U \cap V$ et donc que $\omega_U + \eta_U$ se prolonge en une forme différentielle fermée dont tous les pôles sont simples et dont le résidu est D, ce qui démontre le (ii).

Démontrons finalement le (iii). Dans le cas où X est propre, l'existence d'une telle décomposition est une conséquence des points (i) et (ii). Dans le cas général, on peut compactifier X en une variété lisse $\overline{X}$ grâce au théorème de résolution des singularités d'Hironaka. Si ω une 1-forme différentielle rationnelle fermée sur X, on peut prolonger ω en une forme différentielle rationnelle sur $\overline{X}$ et cette forme est toujours fermée. Elle admet donc une décomposition sur $\overline{X}$ comme somme d'une forme de seconde espèce et d'une forme n'ayant que des pôles simples et il suffit de restreindre chacun des termes à X pour obtenir une décomposition de ω sous la forme voulue.

Remarque I.1.15

(i) Si on se restreint au cas où les $\lambda_{U,i}$ appartiennent à $\mathbf{Z}$ dans les démonstrations des points (i) et (ii), on montre que si X est une variété propre et lisse, alors un diviseur D est cohomologiquement de torsion si et seulement si il existe une forme différentielle de troisième espèce dont c'est le diviseur des résidus.

(ii) Dans la démonstration du (ii), on a utilisé un recouvrement pour la topologie de Zariski et des fonctions rationnelles ce qui permet de montrer qu'une forme différentielle de troisième espèce (resp. rationnelle fermée) est localement, pour la topologie de Zariski, de la forme $\dfrac{df}{f} + \eta$ (resp. $\sum \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i} + \eta$), où f est une fonction rationnelle (resp. les f_i sont des fonctions rationnelles) et η est holomorphe (resp. de seconde espèce).

Corollaire I.1.16. — *Si X est une variété propre et lisse, alors l'application qui, à une forme différentielle fermée, associe son résidu, donne naissance aux suites exactes*

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \mathrm{DTE}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}^{\tau}(X) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{DSE}(X) \longrightarrow \mathrm{DF}(X) \longrightarrow \mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Le fait que l'application résidu envoie $\mathrm{DTE}(X)$ et $\mathrm{DF}(X)$ dans $\mathrm{Div}^{\tau}(X)$ et $\mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}^0(X) = \mathbf{C} \otimes \mathrm{Div}^{\tau}(X)$ respectivement ainsi que la surjectivité de cette application résidu sont des réécritures de la proposition I.1.14 et du (i) de la remarque I.1.15. Finalement, une forme de troisième espèce (resp. fermée) a un résidu nul si et seulement si elle est holomorphe (resp. de seconde espèce), ce qui permet de conclure.

5. Formes de seconde espèce. — Soit ω une forme de seconde espèce sur X et D un diviseur de X contenant les pôles de ω. Le noyau de l'application naturelle de $H_1(X-D,\mathbf{Z})$ dans $H_1(X,\mathbf{Z})$ est engendré par des petits cercles autour des composantes irréductibles de D et l'hypothèse selon laquelle le résidu de ω est nul implique que l'intégrale de ω sur un chemin de ce type est nulle. On en déduit le fait que si γ est un chemin fermé sur X évitant les pôles de ω, la valeur de $\int_\gamma \omega$ ne dépend que de la classe de γ dans $H_1(X,\mathbf{Z})$, d'où une application naturelle de $\mathrm{DSE}(X)$ dans $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$ qui se factorise à travers $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df \mid f\in\mathbf{C}(X)\}}$.

D'autre part, si ω est une forme de seconde espèce, il existe un recouvrement $\mathscr{U}$ de X pour la toplogie usuelle tel que si $U\in\mathscr{U}$, alors $\omega = dg_U+\omega_U$, où g_U est méromorphe sur U et ω_U est holomorphe (on peut même, quitte à raffiner $\mathscr{U}$, imposer $\omega_U=0$). Ceci nous permet d'associer à ω l'élément $\big((g_U-g_V)_{U,V\in\mathscr{U}},(\omega_U)_{U\in\mathscr{U}}\big)$ de $Z^1(\mathscr{U},\Omega^\cdot_X)$ dont la classe dans $H^1_{\mathrm{dR,an}}(X)$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a fait. D'autre part, si $\omega=df$, on peut prendre $\mathscr{U}=\{X\}$, ce qui montre que l'application naturelle $\mathrm{DSE}(X)$ dans $H^1_{\mathrm{dR,an}}(X)$ que nous venons de construire se factorise en une application de $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f\in\mathbf{C}(X)\}}$ dans $H^1_{\mathrm{dR,an}}(X)$.

Finalement, soit $\omega\in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert affine de X suffisamment fin pour que l'on puisse trouver $\omega_U\in\Omega^1_U$ et $f_{U,V}\in\mathscr{O}_{U\cap V}$ représentant ω dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. Cela signifie en particulier que ω_U est fermée et $\omega_U-\omega_V=df_{U,V}$ sur $U\cap V$. Si $U\in\mathscr{U}$, la forme différentielle ω_U se prolonge de manière unique en une forme différentielle rationnelle sur X et la relation $\omega_U-\omega_V=df_{U,V}$ montre que cette forme est de seconde espèce et que son image modulo $\{df, f\in\mathbf{C}(X)\}$ est indépendante du choix de U. On a donc construit de cette manière une application naturelle de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f\in\mathbf{C}(X)\}}$.

Proposition I.1.17. — *Le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
H^1_{\mathrm{dR}}(X) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1_{\mathrm{dR,an}}(X) \arrow[r] & H^1(X,\Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty}) & H^1_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X) \arrow[l] \arrow[dl] \\
& \dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f\in\mathbf{C}(X)\}} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C}) &
\end{tikzcd}$$

est commutatif et toutes les flèches en présence sont des isomorphismes.

Démonstration. — La commutativité du triangle faisant intervenir $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, $H^1_{\mathrm{dR,an}}(X)$ et $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f\in\mathbf{C}(X)\}}$ est à peu près immédiate et pour démontrer la commutativité du reste, il suffit prouver que si ω est une forme de seconde espèce et η est une 1-forme $\mathscr{C}^\infty$ sur X ayant même image dans $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$, alors elles ont même image dans $H^1_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$. Sous l'hypothèse précédente, la forme $\omega-\eta$ n'a pas de périodes et est donc la différentielle d'une fonction h qui est localement somme d'une fonction méromorphe et d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert tel que si $U \in \mathscr{U}$, on peut décomposer ω sous la forme $\omega = dg_U + \omega_U$ avec g_U méromorphe et ω_U holomorphe, alors l'image de $\omega - \eta$ dans $H^1_{\mathrm{dR},\mathscr{C}^\infty}(X)$ est représentée par le cocycle $\big((g_U - g_V)_{U,V\in\mathscr{U}}, (\omega_U - \eta)_{U\in\mathscr{U}}\big)$ et est la différentielle totale de l'élément $(h - g_U)_{U\in\mathscr{U}}$ de $\Gamma^0(\mathscr{U}, \Omega^\cdot_{X,\mathscr{C}^\infty})$, ce qui prouve que cette image est nulle et termine la démonstration de la commutativité du diagramme.

On sait déjà que toutes les flèches allant de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ vers $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$ en passant par le haut sont des isomorphismes et donc, en particulier, sont surjectives. La commutativité du diagramme implique donc que l'application de $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f \in \mathbf{C}(X)\}}$ dans $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$ est surjective. Maintenant, si ω est une forme de seconde espèce ayant pour image 0 dans $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$, cela signifie que si D est un diviseur de X contenant les pôles de ω, alors ω possède une primitive monovaluée g sur $X - D$. On peut d'autre part compactifier X en une variété lisse $\overline{X}$ et étendre ω en une forme rationnelle fermée sur $\overline{X}$ et le lemme I.1.11 montre que g s'étend en une fonction méromorphe sur $\overline{X}$ qui est compact par construction, ce qui implique, d'après GAGA [**41**], que g est une fonction rationnelle sur $\overline{X}$ et donc aussi sur X. On en déduit l'injectivité de l'application de $\dfrac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f \in \mathbf{C}(X)\}}$ dans $\mathrm{Hom}(H_1(X,\mathbf{Z}),\mathbf{C})$ et donc sa bijectivité. Les autres flèches en présence sont alors des composées d'isomorphismes, ce qui permet de conclure.

Remarque I.1.18

(i) On déduit de la surjectivité de l'application naturelle
$$H^1_{\mathrm{dR}}(X) \longrightarrow \frac{\mathrm{DSE}(X)}{\{df,\ f \in \mathbf{C}(X)\}}$$
le fait qu'une forme ω de seconde espèce peut s'écrire localement pour la topologie de Zariski sous la forme $df + \eta$, où f est une fonction rationnelle et η est holomorphe.

(ii) Si on réunit cette remarque avec le (iii) de la proposition I.1.14 et le (ii) de la remarque I.1.15, on en déduit le fait qu'une forme différentielle rationnelle fermée peut s'écrire localement pour la topologie de Zariski sous la forme $dg + \sum_i \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i} + \eta$, où g et les f_i sont des fonctions rationnelles et η est holomorphe, ce qui permet de renforcer le lemme I.1.12.

I.2. Intégrales abéliennes sur les courbes algébriques

1. Intégrales de première et seconde espèces. — Si X est une courbe propre et lisse de genre g, on peut aussi voir X comme une surface de Riemann compacte de genre g et donc topologiquement homéomorphe à un tore à g trous. D'autre part, X est muni d'une orientation naturelle donnée par la structure complexe ce qui nous fournit un accouplement d'intersection qui permet de munir $H_1(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^g$ d'une forme alternée à valeurs dans $\mathbf{Z}$ et cette forme est non dégénérée. Si $u, v \in H_1(X, \mathbf{Z})$, nous noterons $u\#v$ le nombre d'intersection des cycles u et v.

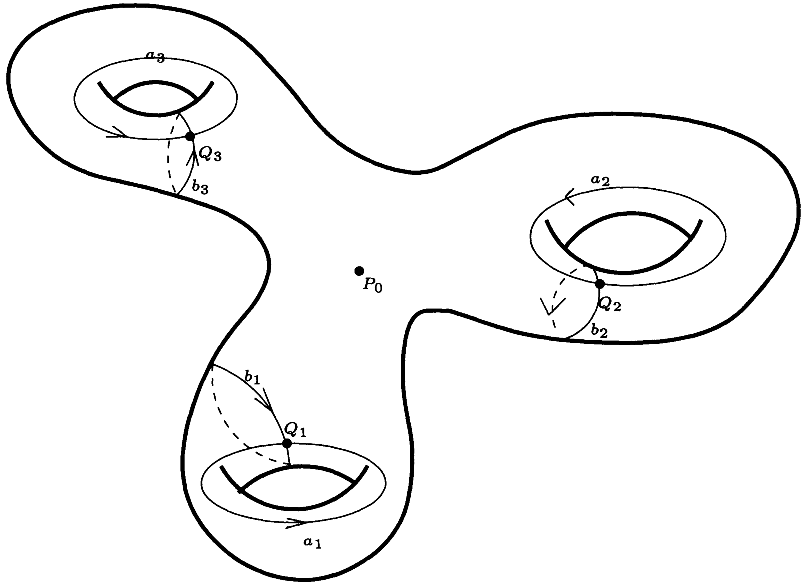

FIGURE 1. une base symplectique de $H_1(X, \mathbf{Z})$ en genre 3

Si $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ est une base symplectique de $H_1(X, \mathbf{Z})$ et P_0, $R_1, \ldots, R_r$ sont des points de X, on peut choisir des chemins $a_1(t), \ldots, a_g(t), b_1(t), \ldots, b_g(t)$ sur X représentant les éléments de cette base, évitant $R_1, \ldots, R_r$, passant tous par P_0 et ne se rencontrant qu'en P_0 tels que si on découpe le long de ces chemins, on obtient quelque chose homéomorphe à un disque, ce qui permet de représenter X comme le quotient d'un polygône Y à $4g$ cotés, les cotés étant identifiés 2 par 2 comme indiqué dans la figure 2 ci-dessous (pour $g = 3$). Pour passer des chemins représentés sur la figure 1 à des chemins passant par P_0, supposer mentalement que les chemins a_i et b_i sont en fer (et donc rigides) en dehors d'un voisinage de Q_i et élastiques dans ce voisinage de Q_i, puis tirer sur Q_i pour l'amener en P_0.

On trouvera dans [4] une figure expliquant de manière convaincante pourquoi on obtient bien une surface de genre g quand on identifie les cotés du polygône.

Plus précisément, si $\pi : Y \to X$ est l'application permettant de décrire cette identification, on peut écrire le bord ∂Y de Y comme le composé

$$A_1 B_1 C_1^{-1} D_1^{-1} \cdots A_g B_g C_g^{-1} D_g^{-1},$$

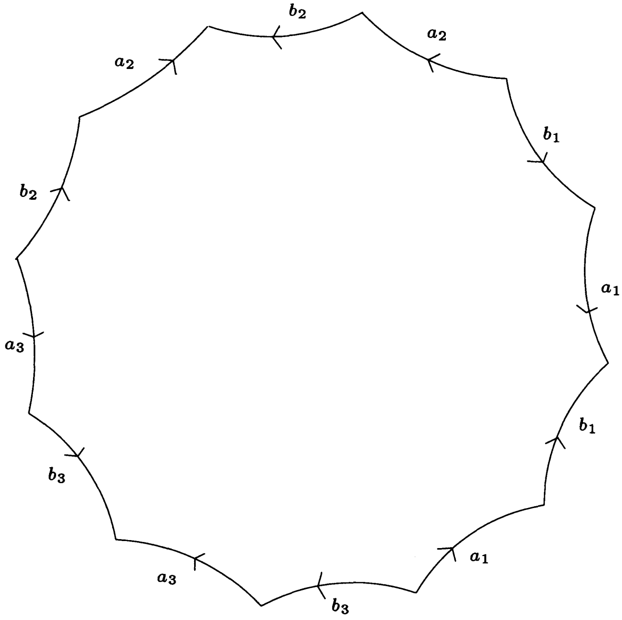

FIGURE 2

où, si $i \in \mathbf{Z}/g\mathbf{Z}$, alors A_i, B_i, C_i, D_i sont des applications $\mathscr{C}^1$ par morceaux de $[0,1]$ dans Y (et même dans ∂Y) vérifiant les conditions suivantes

$$A_i(1) = B_i(0),\ B_i(1) = C_i(1),\ C_i(0) = D_i(1) \text{ et } D_i(0) = A_{i+1}(1)$$
$$\pi \circ A_i = \pi \circ C_i = a_i \text{ et } \pi \circ B_i = \pi \circ D_i = b_i,$$

la première ligne de conditions traduisant le fait que les chemins A_i, B_i, C_i^{-1}, D_i^{-1} et A_{i+1} se suivent et la seconde le fait que pour obtenir X à partir de Y, on identifie A_i et C_i ainsi que B_i et D_i.

Proposition I.2.1. — *Si ω et η sont deux formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ fermées sur X, alors*

$$\int_X \omega \wedge \eta = \sum_{i=1}^{g} \Big(\int_{a_i} \omega \int_{b_i} \eta - \int_{a_i} \eta \int_{b_i} \omega \Big).$$

Démonstration. — Y étant simplement connexe, $\pi^*\omega$ est exacte sur Y ; soit F une de ses primitives. Comme ∂Y est de mesure nulle, on a $\int_X \omega \wedge \eta = \int_Y \pi^*\omega \wedge \pi^*\eta$ et la formule de Stokes montre que cette dernière intégrale est aussi égale à

$$\int_{\partial Y} F\pi^*\eta = \sum_{i=1}^{g} \int_{A_i B_i C_i^{-1} D_i^{-1}} F\pi^*\eta,$$

c'est-à-dire à

$$\sum_{i=1}^{g} \int_0^1 \Big((F \circ A_i)\, A_i^* \pi^* \eta - (F \circ C_i)\, C_i^* \pi^* \eta + (F \circ B_i)\, B_i^* \pi^* \eta - (F \circ D_i)\, D_i^* \pi^* \eta \Big).$$

D'autre part, on a $A_i^* \pi^* \eta = a_i^* \eta = C_i^* \pi^* \eta$ et $\pi^\eta \omega$ étant exacte sur Y, on a $F \circ C_i(t) - F \circ A_i(t) = \int_{A_i(t)}^{C_i(t)} \pi^* \eta$, l'intégrale étant calculée en utilisant n'importe quel chemin inclus dans Y reliant $A_i(t)$ à $C_i(t)$. On peut donc faire le calcul en allant de $A_i(t)$ à $A_i(1)$ le long de A_i puis de $A_i(1) = B_i(0)$ à $C_i(1) = B_i(1)$ le long de B_i et finalement de $C_i(1)$ à $C_i(t)$ le long de C_i, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} F \circ C_i(t) - F \circ A_i(t) &= \int_t^1 A_i^* \pi^* \omega + \int_0^1 B_i^* \pi^* \omega + \int_1^t C_i^* \pi^* \omega \\ &= \int_t^1 a_i^* \omega + \int_0^1 b_i^* \omega + \int_1^t a_i^* \omega = \int_{b_i} \omega, \end{aligned}$$

si $t \in [0,1]$. Le même genre d'arguments nous permet de montrer que l'on a $F \circ D_i(t) - B \circ C_i(t) = -\int_{a_i} \omega$, si $t \in [0,1]$, d'où l'on tire la formule

$$\begin{aligned} \int_X \omega \wedge \eta &= \sum_{i=1}^{g} \Big(\int_0^1 (F \circ A_i - F \circ C_i)\, a_i^* \eta + \int_0^1 (F \circ B_i - F \circ D_i)\, b_i^* \eta \Big) \\ &= \sum_{i=1}^{g} \Big(-\int_{b_i} \omega \int_{a_i} \eta + \int_{a_i} \omega \int_{b_i} \eta \Big), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I.2.2. — Cette proposition est aussi une conséquence simple de la comparaison entre accouplement d'intersection et dualité de Poincaré (cf. [**26**], chap. 0, par exemple). Si X est une variété différentielle de dimension d orientable et compacte et si $u \in H_n(X, \mathbf{Z})$, il existe, grâce à la dualité de Poincaré et la non dégénérescence de l'application « périodes », un unique élément $\eta_u \in H^{d-n}_{\mathrm{dR}, \mathscr{C}^\infty}(X)$ tel que l'on ait $\int_v \eta_u = u \# v$ quel que soit $v \in H_{d-n}(X, \mathbf{Z})$. De plus, si $u \in H_n(X, \mathbf{Z})$ et $v \in H_{d-n}(X, \mathbf{Z})$, alors $\int_X \eta_u \wedge \eta_v = u \# v$.

Dans le cas qui nous intéresse, il suffit d'écrire ω et η respectivement sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} \Big(\Big(\int_{b_i} \omega \Big) \eta_{a_i} - \Big(\int_{a_i} \omega \Big) \eta_{b_i} \Big) \quad \text{et} \quad \eta = \sum_{i=1}^{d} \Big(\Big(\int_{b_i} \eta \Big) \eta_{a_i} - \Big(\int_{a_i} \eta \Big) \eta_{b_i} \Big)$$

pour en déduire la proposition.

Soient ω et η deux formes différentielles de seconde espèce sur X et P un point de X. Si F_P est une primitive formelle de ω en P (*i.e.*, si z est un paramètre local au voisinage de P, F_P est l'élément de $K((z))$ défini à addition d'une constante près par la formule $dF_P = \omega$), le résidu de $F_P \eta$ en P ne dépend pas du choix de F_P (puisque F_P est défini à constante près et le résidu de η en P est nul) ; il sera noté $\operatorname{Res}_P(\eta \int \omega)$.

D'autre part, ce résidu est nul si P n'est ni un pôle de ω ni un pôle de η et donc est nul pour presque tout P.

Corollaire I.2.3. — *Si ω et η sont deux formes différentielles de seconde espèce, alors* $\deg(\omega \cup \eta) = \sum_{P\in X} \mathrm{Res}_P(\eta \int \omega)$*, où $\cup$ désigne le cup-produit de $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \times H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$.*

Démonstration. — Choisissons les chemins $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ utilisés pour découper X de telle sorte qu'ils ne passent par aucun pôle de ω ou η. Soient $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}$ respectivement des représentants $\mathscr{C}^\infty$ des classes de ω et η dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, ce qui équivaut (cf. proposition I.1.17) à ce que l'on ait

$$\int_u \omega = \int_u \widetilde{\omega} \quad \text{et} \quad \int_u \eta = \int_u \widetilde{\eta}$$

quel que soit $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$. Compte-tenu de la relation entre cup-produit et produit extérieur des formes différentielles, on a

$$\begin{aligned} \deg(\omega \cup \eta) &= \frac{1}{2i\pi}\int_X \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\eta} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g}\Big(\int_{a_i}\widetilde{\omega}\int_{b_i}\widetilde{\eta} - \int_{a_i}\widetilde{\eta}\int_{b_i}\widetilde{\omega}\Big) \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g}\Big(\int_{a_i}\omega\int_{b_i}\eta - \int_{a_i}\eta\int_{b_i}\omega\Big) \end{aligned} \tag{I.2.4}$$

et le calcul effectué lors de la démonstration du lemme précédent montre que si F est une primitive méromorphe de ω sur Y, cette dernière quantité est aussi égale à $\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial Y} F\eta$, ce qui permet d'utiliser la formule des résidus pour conclure, étant donné que l'on peut utiliser F comme primitive de ω en tout point P de l'intérieur de Y.

2. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce. — Si ω est une forme de troisième espèce sur X et a, b sont deux points de l'intérieur de Y qui ne sont ni l'un ni l'autre des pôles de ω, alors la valeur de $\int_\gamma \omega$ modulo $2i\pi\mathbf{Z}$ ne dépend pas du chemin γ choisi pour relier a à b à l'intérieur Y. On notera cette valeur $\int_a^b \omega_Y$ car elle dépend du choix de Y ; en effet, si on change Y, les périodes de ω le long des éléments de $H_1(X, \mathbf{Z})$ vont intervenir. Si D est un diviseur de degré 0 de X dont le support est contenu dans l'intérieur du polygône et ne rencontre pas $\mathrm{Div}(\omega)$, on définit $\int_D \omega_Y$ à $2i\pi\mathbf{Z}$ près de la manière évidente.

Proposition I.2.5. — *Si ω_1, ω_2 sont deux formes de troisième espèce dont les diviseurs sont étrangers et contenus dans l'intérieur de Y, alors*

$$\int_{\mathrm{Div}(\omega_2)} \omega_{1,Y} - \int_{\mathrm{Div}(\omega_1)} \omega_{2,Y} = \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^{g}\Big(\int_{a_i}\omega_1\int_{b_i}\omega_2 - \int_{a_i}\omega_2\int_{b_i}\omega_1\Big) \mod. \mathbf{Z}$$

Remarque I.2.6. — Cette formule est un peu perturbante car le membre de gauche dépend du choix de Y comme nous l'avons expliqué et le membre de droite ne semble pas en dépendre. Ce paradoxe apparent s'explique par le fait que Y est construit à partir de la base symplectique $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$.

Démonstration. — Choisissons un point P_0 n'appartenant ni au support du diviseur de ω_1 ni à celui de ω_2. Écrivons le diviseur de ω_1 sous la forme $\sum_{j=1}^{r} n_j P_j$. Si $1 \leq j \leq r$, choisissons un chemin γ_j de P_0 à P_j à l'intérieur de Y, ne passant par aucun des points de $\mathrm{Div}(\omega_2)$ et tel que si $i \neq j$, alors γ_i et γ_j ne se coupent pas (en dehors de P_0 bien sûr). Soit Γ la réunion des γ_j pour $1 \leq j \leq r$. La somme des résidus de ω_1 étant nulle, $\omega_{1,Y}$ est exacte sur $Y - \Gamma$; soit F_Y une primitive holomorphe de $\omega_{1,Y}$ sur $Y - \Gamma$ (bien définie à addition d'une constante près).

La fonction F_Y est « bivaluée » sur Γ : on peut approcher un point de γ_j par « en-dessous » ou par « au-dessus » et pour passer de la limite par « en-dessous » à la limite par « au-dessus », il faut faire le tour de P_j dans le sens positif et comme ω_1 a comme résidu n_j en P_j, la différence entre les deux limites est $2i\pi n_j$. Pour remédier à cette difficulté, introduisons la surface de Riemann compacte Z obtenue en « dédoublant » Γ. De manière précise, on dispose d'un morphisme de surfaces de Riemann à bord $f : Z \to Y$ et, si $j \in \{1, \dots, r\}$, de chemins α_j et β_j de $[0,1]$ dans Z tels que

(i) $f \circ \alpha_j = f \circ \beta_j = \gamma_j$ si $1 \leq j \leq r$,

(ii) $\alpha_j(1) = \beta_j(1)$ si $1 \leq j \leq r$ et $\beta_j(0) = \alpha_{j+1}(0)$ si $1 \leq j \leq r-1$ et $\beta_r(0) = \alpha_1(0)$,

(iii) le bord ∂Z de Z est composé d'un bord « extérieur » ∂Z^+ et d'un bord intérieur ∂Z^- et f induit un isomorphisme de $Z - \partial Z^-$ sur $Y - \Gamma$ envoyant ∂Z^+ sur ∂Y et ∂Z^- est, si on le parcourt dans le sens positif, le composé

$$\alpha_1 \beta_1^{-1} \cdots \alpha_r \beta_r^{-1}.$$

Il résulte de la propriété (ii) que, si $1 \leq j \leq r$, l'image réciproque de P_j est constituée d'un seul point que nous noterons encore P_j. La forme différentielle $f^*\omega_{1,Y} = \omega_{1,Z}$ a une primitive F_Z holomorphe et monovaluée sur $Z - \{P_1, \dots, P_r\}$, a une singularité logarithmique en chacun des P_j et, quitte à ajouter une constante, on peut imposer que l'on ait $F_Z = F_Y \circ f$ sur $Z - \partial Z^-$. La discussion précédente sur la « bivaluation » de F_Y se traduit par la formule

$$\text{(I.2.7)} \qquad F_Z \circ \beta_j(t) - F_Z \circ \alpha_j(t) = 2i\pi n_j \quad \text{si } t \in [0,1[\text{ et } 1 \leq j \leq r.$$

Soit $\omega_{2,Z} = f^*\omega_{2,Y}$. On déduit de la formule des résidus, en passant à la limite sur des contours bien choisis (voir ci-dessous), la formule

$$\text{(I.2.8)} \qquad \int_{\partial Z^+} F_Z\, \omega_{2,Z} - \int_{\partial Z^-} F_Z\, \omega_{2,Z} = 2i\pi \sum_{P \in Z - \partial Z} \mathrm{Res}_P(F_Z \omega_{2,Z}).$$

Il faut faire un petit peu attention car F_Z n'étant pas holomorphe en les P_j, on ne peut pas appliquer la formule des résidus directement, mais on a recours à l'astuce habituelle qui consiste à remplacer ∂Z^- par un contour ∂Z^-_ε obtenu à partir de ∂Z^- en évitant les P_j par des petits cercles de rayon ε. Comme F_Z a une singularité logarithmique en chacun des P_j, l'intégrale de $F_Z\,\omega_{2,Z}$ le long d'un de ces petits cercles tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Maintenant, le même calcul que celui effectué à la proposition I.2.1 montre que

$$\int_{\partial Z+} F_Z\,\omega_{2,Z} = \int_{\partial Y} F_Y\,\omega_{2,Y} = \sum_{i=1}^{g}\Big(\int_{a_i}\omega_1\int_{b_i}\omega_2 - \int_{a_i}\omega_2\int_{b_i}\omega_1\Big). \tag{I.2.9}$$

D'autre part, la formule I.2.7 et l'égalité $\alpha_i^*\omega_{2,Z} = \beta_i^*\omega_{2,Z} = \gamma_i^*\omega_{2,Y}$ nous donnent

$$\begin{aligned}\int_{\partial Z-} F_Z\,\omega_{2,Z} &= \sum_{j=1}^{r}\int_0^1 \big((F_Z\circ\alpha_j)\,\alpha_j^*\omega_{2,Z} - (F_Z\circ\beta_j)\,\beta_j^*\omega_{2,Z}\big)\\ &= -2i\pi\sum_{j=1}^{r} n_j\int_0^1 \gamma_j^*\omega_{2,Y}\\ &= -2i\pi\sum_{j=1}^{r} n_j\int_{P_0}^{P_j}\omega_{2,Y} = -2i\pi\int_{\mathrm{Div}(\omega_1)}\omega_{2,Y}.\end{aligned} \tag{I.2.10}$$

Finalement, comme ω_2 n'a que des pôles simples, le résidu en un point P de $F_Y\omega_{2,Y}$ est $F_Y(P)\mathrm{Res}_P(\omega_{2,Y})$ et donc

$$\begin{aligned}\sum_{P\in Z-\partial Z}\mathrm{Res}_P(F_Z\,\omega_{2,Z}) &= \sum_{P\in Y-\Gamma}\mathrm{Res}_P(F_Y\,\omega_{2,Y}) = \sum_P \mathrm{Res}_P(\omega_{2,Y})F_Y(P)\\ &= F_Y(\mathrm{Div}(\omega_2)) = \int_{\mathrm{Div}(\omega_2)}\omega_{1,Y}\end{aligned} \tag{I.2.11}$$

et il n'y a qu'à injecter les formules I.2.9, I.2.10 et I.2.11 dans la formule I.2.8 pour démontrer le résultat cherché.

3. Fonction de Green d'un diviseur de degré 0

Proposition I.2.12. — *Si $D = \sum n_P P$ est un diviseur de degré 0, il existe, à addition d'une constante près, une unique fonction G_D harmonique sur le complémentaire du support de D telle que si P est un point du support de D et z un paramètre local au voisinage de P, alors $G_D - \log|z|$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de P.*

Démonstration. — L'unicité est une conséquence du fait que la différence de deux telles fonctions serait harmonique sur X tout entier et donc constante. Pour montrer l'existence, remarquons que D étant cohomologiquement trivial, il existe une forme différentielle de troisième espèce de résidu D. Les parties réelles des périodes de ω_D sont alors bien définies et d'après le (iii) de la proposition I.1.6, on peut trouver une (unique) forme de première espèce ω dont les parties réelles des périodes coïncident avec celles de ω_D ; autrement dit, quitte à remplacer ω_D par $\omega_D - \omega$, on peut normaliser ω_D de manière unique de telle sorte que toutes les périodes de ω_D soient purement imaginaires. La fonction $\mathrm{Re}\big(\int_{x_0}^{x}\omega_D\big)$ est alors monovaluée sur X et vérifie les propriétés demandées.

Proposition I.2.13. — *Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs de degré* 0 *dont les supports sont étrangers, alors $G_{D_1}(D_2) = G_{D_2}(D_1)$.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce et de la formule explicite exprimant G_D en termes d'intégrales de troisième espèce (cf. démonstration de la proposition précédente).

Remarque I.2.14. — La proposition I.2.13 peut aussi se démontrer directement (en utilisant uniquement les propriétés de G_D énoncées dans sa définition et pas la formule explicite pour G_D) via la formule de Green-Stokes. D'autre part, on peut aussi utiliser la fonction θ de Riemann (cf. I.4, §2) pour démontrer les propositions I.2.12 et I.2.13 ; c'est cette seconde approche que nous utiliserons en p-adique.

I.3. Tores complexes et variétés abéliennes

1. Le théorème de Lefschetz

Définition I.3.1

(i) On appelle tore complexe, le quotient d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension fini par un réseau ; un tore complexe est donc naturellement muni d'une structure de groupe de Lie analytique compact et réciproquement, tout groupe de Lie analytique compact commutatif est un tore complexe.

(ii) On appelle variété abélienne toute variété algébrique propre et lisse munie d'une loi de groupe algébrique.

En tant que variété analytique complexe, une variété abélienne est isomorphe à un tore complexe. De manière plus précise, si X est une variété abélienne de dimension d et si $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ est une base du K espace vectoriel $\Omega^1(X)$, l'image de $H_1(X, \mathbf{Z})$ par l'application $u \to \int_u \vec{\omega} = (\int_u \omega_1, \dots, \int_u \omega_d)$ est un réseau de $\mathbf{C}^d$ et l'application qui à $x \in X$ associe $\int_0^x \vec{\omega} \in \mathbf{C}^d$ induit un isomorphisme de groupes de Lie compacts de X sur $\mathbf{C}^d/\Lambda$.

On dit qu'un tore complexe est algébrisable s'il est isomorphe en tant que variété analytique complexe à une variété abélienne. On dispose du résultat (pas du tout évident) suivant.

Théorème I.3.2. — *Si V est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et Λ est un réseau de $\mathbf{C}$, le tore complexe V/Λ est algébrisable si et seulement si il existe une forme hermitienne H sur V définie positive (i.e. $H(v, v) > 0$ si $v \in V - \{0\}$) telle que la restriction de $E = \operatorname{Im} H$ à Λ soit à valeurs entières (i.e. $E(u, v) \in \mathbf{Z}$ si $u, v \in \Lambda$).*

Démonstration. — On trouvera la démonstration de ce résultat dans **[4]**, **[38]** ou **[45]**. Signalons que la démonstration fournit un plongement d'un tore complexe muni d'une forme hermitienne comme ci-dessus dans l'espace projectif d'où l'on déduit le fait qu'une variété abélienne est une variété projective.

Remarque I.3.3. — Il est souvent commode de raisonner « à isogénie près », c'est-à-dire de remplacer Λ par le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel L de V engendré par Λ. Le théorème I.3.2 peut alors se réécrire sous la forme : $X = V/\Lambda$ est algébrisable si et seulement si il existe une forme hermitienne H définie positive sur V telle que la restriction de $E = \operatorname{Im} H$ à L soit à valeurs dans $\mathbf{Q}$.

2. Morphismes de tores complexes

Lemme I.3.4. — *Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $F : V \to \mathbf{C}$ est une fonction méromomorphe telle que la fonction $\delta F : V^2 \to \mathbf{C}$ définie par $\delta F(x,y) = F(x+y) - F(x) - F(y)$ est constante, alors F est une forme affine sur V.*

Démonstration. — En différentiant $\delta F(x,y)$ par rapport à x, on montre que si δF est constante, alors dF est constante, ce qui permet de conclure.

Proposition I.3.5. — *Si Y est un tore complexe, les deux conditions suivantes sont équivalentes,*

(i) *Y est algébrisable,*

(ii) *il existe un tore complexe algébrisable X et un morphisme de variétés analytiques complexes surjectif $\pi : X \to Y$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est immédiate (on peut prendre $X = Y$ et $\pi = \mathrm{id}$) ; prouvons la réciproque. Soit donc X un tore complexe et $\pi : X \to Y$ un morphisme surjectif de variétés analytiques complexes. Quitte à composer π par une translation sur Y, on peut supposer $\pi(0) = 0$, ce que nous ferons. Écrivons X et Y respectivement sous la forme $\widehat{X}/\Lambda_X$ et $\widehat{Y}/\Lambda_Y$, où $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie et Λ_X et Λ_Y en sont des réseaux. Comme $\widehat{X}$ est simplement connexe, π se relève de manière unique en une application continue (et même holomorphe) $\widehat{\pi}$ de $\widehat{X}$ dans $\widehat{Y}$. Si $u \in \Lambda_X$, la fonction $x \to \widehat{\pi}(x+u) - \widehat{\pi}(x)$ est continue sur $\widehat{X}$ à valeurs dans Λ_Y qui est discret et donc est constante. On en déduit le fait que l'application qui à (x_1, x_2) associe $\widehat{\pi}(x_1+x_2) - \widehat{\pi}(x_1) - \widehat{\pi}(x_2)$ est périodique de période $\Lambda_X \times \Lambda_X$ et donc que son image est bornée dans $\widehat{Y}$. Comme cette application est de plus holomorphe, cela implique qu'elle est constante et donc, d'après le lemme I.3.4, que $\widehat{\pi}$ est $\mathbf{C}$-linéaire puisque l'on a supposé $\widehat{\pi}(0) = 0$ et donc que π est un morphisme de groupes.

Soient $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les quotients respectifs de X et Y par leurs groupes de torsion. L'application composée de X dans $\overline{Y}$ se factorise à travers $\overline{X}$ et, si on note L_X et L_Y respectivement les $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels engendrés par Λ_X et Λ_Y, $\widehat{W}$ le noyau de $\widehat{\pi}$ et

$L_W = L_X \cap \widehat{W}$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L_W \arrow[d] & \widehat{W} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & L_X \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\pi}"] & \widehat{X} \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\pi}"] & \overline{X} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\pi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_Y \arrow[r] & \widehat{Y} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{Y} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Une base de L_X sur $\mathbf{Q}$ étant aussi une base de $\widehat{X}$ sur $\mathbf{R}$, on a $\dim_{\mathbf{Q}} L_W \leq \dim_{\mathbf{R}} \widehat{W}$. Comme de plus

$$\begin{array}{rr} \dim_{\mathbf{Q}} L_X = \dim_{\mathbf{R}} \widehat{X}, & \dim_{\mathbf{Q}} L_Y = \dim_{\mathbf{R}} \widehat{Y} \\ \dim_{\mathbf{R}} \widehat{X} = \dim_{\mathbf{R}} \widehat{W} + \dim_{\mathbf{R}} \widehat{Y} & \dim_{\mathbf{Q}} L_X \leq \dim_{\mathbf{Q}} L_W + \dim_{\mathbf{Q}} L_Y \end{array}$$

les inégalités ci-dessus sont des égalités. En particulier, cela implique que L_W engendre $\widehat{W}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que l'application de L_X dans L_Y est surjective.

Maintenant, comme on a supposé X algébrisable, il existe une forme hermitienne H définie positive sur $\widehat{X}$ telle que la restriction de $E = \operatorname{Im} H$ à L_X soit à valeurs dans $\mathbf{Q}$. Soit $\widehat{W}^{\perp}$ l'orthogonal de $\widehat{W}$ pour H et $L_W^{\perp}$ l'orthogonal de L_W pour E. Comme L_W engendre $\widehat{W}$ en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel, $L_W^{\perp}$ est égal à $L_X \cap \widehat{W}^{\perp}$. On en déduit le fait que $\widehat{\pi}$ induit une bijection de $\widehat{W}^{\perp}$ sur $\widehat{Y}$ et $L_W^{\perp}$ sur L_Y ; on peut donc munir $\widehat{Y}$ de la forme hermitienne H_Y obtenue en restreignant H à $\widehat{W}^{\perp}$ et la restriction de $E_Y = \operatorname{Im} H_Y$ à L_Y est à valeurs dans $\mathbf{Q}$, ce qui, compte-tenu de la remarque I.3.3, permet de conclure.

Remarque I.3.6

(i) On a démontré en passant que si X et Y sont des tores complexes et $\pi : X \to Y$ est un morphisme de variétés analytiques, alors π est le composé d'un morphisme de groupes avec une translation et donc, en particulier, que si $\pi(0) = 0$, alors π est un morphisme de groupes.

(ii) La même méthode permet de montrer que si $Y \subset X$ sont deux variétés abéliennes, il existe une variété abélienne $Z \subset X$ telle que $Y \times Z$ et X soient isogènes.

3. Le tore dual. — Soit $X = V/\Lambda$ un tore complexe et soit L le sous-$\mathbf{Q}$- espace vectoriel de V engendré par Λ. Soit $\overline{V}^*$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des formes antilinéaires de V

dans $\mathbf{C}$. L'application qui à λ associe $\mathrm{Re}\lambda$ induit un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\overline{V}^*$ sur $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{R})$ et on note Λ^* et L^* les images respectives de $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Z})$ et $\mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbf{Q})$ dans $\overline{V}^*$ par l'isomorphisme inverse. Comme Λ est un réseau de V, Λ^* est un réseau de $\overline{V}^*$ et le tore complexe $X^* = \overline{V}^*/\Lambda^*$ est appelé le tore dual de X. Le tore dual de X^* n'est autre que X.

Proposition I.3.7. — *Si X est algébrisable, alors X^* est algébrisable.*

Démonstration. — D'après le théorème I.3.2, si X est algébrisable, il existe une forme hermitienne H définie positive sur V telle que la restriction de $E = \mathrm{Im}\, H$ à L soit à valeurs dans $\mathbf{Q}$. D'autre part, H étant définie positive, l'application qui à $v \in V$ associe la forme antilinéaire λ_v définie par $\lambda_v(z) = -iH(z, v)$, si $z \in V$, induit un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels ι de V sur $\overline{V}^*$. Maintenant, si $v \in L$, la formule

$$\mathrm{Re}\lambda_v(z) = \mathrm{Im}\, H(z, v) = E(z, v)$$

permet de montrer que l'image de L par ι est incluse dans L^* et donc, comme L et L^* ont même dimension sur $\mathbf{Q}$, que ι induit un isomorphisme de L sur L^*. On en déduit le fait que la forme hermitienne $H^* = H \circ \iota^{-1}$ qui est définie positive sur $\overline{V}^*$ est telle que la restriction de $E^* = \mathrm{Im}\, H^* = E \circ \iota^{-1}$ à L^* est à valeurs dans $\mathbf{Q}$, ce qui, en vertu de la remarque I.3.3, permet de conclure.

Remarque I.3.8. — Si X est une variété abélienne, le tore dual X^* a une construction purement algébrique ; il paramètre les diviseurs cohomologiquement triviaux modulo les diviseurs de fonctions rationnelles (cf. I.5 §3).

4. Le théorème d'Appell-Humbert. — Soit de nouveau X une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}$ et $\vec{\omega}$ une base de $\Omega^1(X)$. On définit Λ et l'isomorphisme de X dans $\mathbf{C}^d/\Lambda$ comme dans la section 1 et on note $\mathrm{pr}_X : \mathbf{C}^d \to X$ l'application obtenue en composant la projection naturelle de $\mathbf{C}^d$ sur $\mathbf{C}^d/\Lambda$ avec l'inverse de l'isomorphisme de X dans $\mathbf{C}^d/\Lambda$.

Si D est un diviseur de X, sa classe dans $H^2(X, \mathbf{Z})$ peut être vue comme une forme linéaire à valeurs dans $\mathbf{Z}$ sur $H_2(X, \mathbf{Z}) = \wedge^2 H_1(X, \mathbf{Z})$ et donc comme une forme bilinéaire alternée E_D sur $\Lambda \cong H_1(X, \mathbf{Z})$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$. De manière explicite, $E_D(u, v)$ est le nombre d'intersection de D avec le sous-tore réel $\mathbf{R}u \oplus \mathbf{R}v/\mathbf{Z}u \oplus \mathbf{Z}v$ de X orienté en prenant (u, v) comme base directe (si u et v ne sont pas colinéaires ; sinon de toute façon le nombre d'intersection est nul). D'autre part, on montre en utilisant la décomposition de Hodge de $H^2(X, \mathbf{C})$ et la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de faisceaux $0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0$ (cf. chapitre I de **[38]** par exemple) que E_D est la restriction à Λ de la partie imaginaire d'une (unique) forme hermitienne H_D.

Définition I.3.9. — La forme E_D s'appelle la forme de Riemann du diviseur D.

Théorème I.3.10. — *Sous les hypothèses et les notations introduites ci-dessus, il existe une paire θ_D, α_D, où*
(a) α_D est une application de Λ dans $\{z \in \mathbf{C}^*,\ |z| = 1\}$ uniquement déterminée et telle que l'on ait

$$\alpha_D(u+v) = e^{i\pi E_D(u,v)}\alpha_D(u)\alpha_D(v) \quad \text{si} \quad u, v \in \Lambda,$$

(b) θ_D est une fonction méromorphe (unique à multiplication près par une constante non nulle) sur $\mathbf{C}^d$ de diviseur $\mathrm{pr}_X^* D$ vérifiant l'équation fonctionnelle

$$\theta_D(z+u) = \alpha_D(u)e^{\pi H_D(u,z)+\frac{\pi}{2}H_D(u,u)}\theta_D(z) \quad \text{si} \quad u \in \Lambda,\ z \in V.$$

Réciproquement, si H, E sont comme ci-dessus et $\alpha : \Lambda \to \{z \in \mathbf{C}^*,\ |z| = 1\}$ vérifie la propriété (a) relativement à E, il existe un diviseur D, unique à addition près du diviseur d'une fonction rationnelle, tel que l'on ait $H = H_D$, $E = E_D$ et $\alpha = \alpha_D$.

Voir le chapitre I de [**38**] pour la démonstration de ce théorème. La fonction θ_D qui n'est définie qu'à multiplication près par une constante non nulle, sera appelée la fonction thêta normalisée associée à D. On appelle plus généralement fonction thêta associée à D toute fonction θ holomorphe sur V de diviseur $\mathrm{pr}_X^* D$ telle que si $u \in \Lambda$, il existe une fonction affine ℓ_u de z telle que l'on ait $\theta(z+u) = \exp(\ell_u(z))\theta(z)$ quel que soit $z \in V$. Toutes les fonctions θ associées à D s'obtiennent en multipliant θ_D par une fonction de la forme $\exp P(z)$, où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en z. Ceci implique en particulier que l'on peut retrouver la forme de Riemann E_D à partir de n'importe quelle fonction θ associée à D, en utilisant la formule suivante qui est valable quel que soit $z \in \mathbf{C}^d$

$$E_D(u,v) = \frac{1}{2i\pi}\Big(\ell_u(z+v) - \ell_u(z) + \ell_v(z) - \ell_v(z+u)\Big). \tag{I.3.11}$$

5. Relations de Riemann. — Ecrivons $d\theta_D/\theta_D = \sum_{i=1}^d g_{D,i}dz_i$. Alors $dg_{D,i}$ est périodique de période Λ et est l'image inverse d'une forme différentielle $\omega_{D,i}$ sur X qui est de seconde espèce puisque $g_{D,i}$ est méromorphe.

Proposition I.3.12. — *Si u et v sont deux éléments de $H_1(X, \mathbf{Z})$, alors*

$$E_D(u,v) = \frac{1}{2i\pi}\sum_{i=1}^d \Big(\int_u \omega_{D,i}\int_v \omega_i - \int_v \omega_{D,i}\int_u \omega_i\Big).$$

Démonstration. — Soient $\widetilde{u} = \int_u \vec{\omega}$ et $\widetilde{v} = \int_v \vec{\omega}$ et soit $a \in \mathbf{C}^d$ tel que les chemins $\gamma_u, \gamma_v : [0,1] \to \mathbf{C}^d$ définis par $\gamma_u(t) = a + t\widetilde{u}$ et $\gamma_v(t) = a + t\widetilde{v}$ ne rencontrent pas le support de $\mathrm{pr}_X^* D$. On peut calculer l'intégrale curviligne

$$I = \Big(\int_{\gamma_u} + \int_{\widetilde{u}+\gamma_v} - \int_{\widetilde{v}+\gamma_u} - \int_{\gamma_v}\Big)\, d\theta_D/\theta_D$$

de deux manières. Si on revient à l'expression $d\theta_D/\theta_D = \sum_{i=1}^d g_{D,i}dz_i$ et que l'on utilise le fait que

$$g_{D,i}(z+\widetilde{u}) = g_i(z) + \int_u \omega_{D,i} \quad \text{et} \quad g_{D,i}(z+\widetilde{v}) = g_i(z) + \int_v \omega_{D,i},$$

on obtient

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\gamma_u} \sum_{i=1}^d \Big(\int_v \omega_{D,i}\Big) dz_i + \int_{\gamma_v} \sum_{i=1}^d \Big(\int_u \omega_{D,i}\Big) dz_i \\ &= \sum_{i=1}^d \Big(\int_u \omega_{D,i} \int_v \omega_i - \int_v \omega_{D,i} \int_u \omega_i\Big) \end{aligned}$$

D'autre part, la formule de Stokes permet de montrer que $\frac{1}{2i\pi} I$ est aussi égal à la somme des résidus de $d\theta_D/\theta_D$ compris à l'intérieur du chemin et comme $d\theta_D/\theta_D$ a un pôle simple de résidu $\mathrm{pr}_X^* D$, $\frac{1}{2i\pi} I$ est aussi égal au nombre d'intersection de $\mathrm{pr}_X^* D$ avec la surface $S_{u,v} = [0,1]u \times [0,1]v$ (le signe étant déterminé par le sens de parcours du bord et donc par l'orientation de $S_{u,v}$). Passant au quotient modulo Λ, on retombe sur la définition de $E_D(u,v)$, ce qui permet de conclure.

Remarque I.3.13. — Compte-tenu de la relation $[D]_{\mathrm{dR}} = 2i\pi[D]_{\mathrm{an}}$ et de ce que E_D représente la classe de D dans $H^2(X, \mathbf{Z})$, la formule de la proposition I.3.12 peut se réécrire sous la forme $[D]_{\mathrm{dR}} = -\sum_{i=1}^d \omega_i \cup \omega_{D,i}$

6. Théorèmes du carré et du cube. — On note $\oplus$ la loi d'addition sur X. Si n est un entier ≥ 1 et I est une partie de $\{1, \ldots, n\}$, notons $m_I : X^{n+1} \to X$ l'application qui à $(x, h_1, \ldots, h_n)$ associe $x \oplus (\oplus_{i \in I} h_i)$. Si α est une forme différentielle, une fonction ou un diviseur sur X, posons $\Delta^{[n]}\alpha = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|I|} m_I^* \alpha$. De même, soient m, pr_1 et pr_2 les applications de X^2 dans X données respectivement par l'addition, la projection sur le premier facteur et la projection sur le second facteur et, si α est une forme différentielle, une fonction ou un diviseur sur X, posons $\delta\alpha = m^*\alpha - \mathrm{pr}_1^*\alpha - \mathrm{pr}_2^*\alpha$.

Proposition I.3.14. — *Si ω est une forme différentielle de seconde espèce sur X, il existe*

(i) *une fonction méromorphe f_η sur X^2 telle que l'on ait $df_\eta = \delta\eta$,*

(ii) *une fonction méromorphe $f_\eta^{(3)}$ sur X^3 telle que l'on ait $df_\eta^{(3)} = \Delta^{[2]}\omega$.*

De plus, la fonction f_η vérifie génériquement l'identité $f_\eta(x,y) = f_\eta(y,x)$ et la relation de cocycle

$$f(y,z) - f(x \oplus y, z) + f(x, y \oplus z) - f(x,y) = 0.$$

Démonstration. — Soit $\widetilde{F}$ une primitive méromorphe de $\mathrm{pr}_X^*\omega$ sur $\mathbf{C}^d$. Comme on a $F(z+\widetilde{u}) = F(z) + \int_u \omega$ si $\widetilde{u} = \int_u \vec{\omega} \in \Lambda$, la fonction δF est périodique sur $\mathbf{C}^d \times \mathbf{C}^d$ de période $\Lambda \times \Lambda$ et donc est l'image inverse d'une fonction f_η sur X^2 qui est celle que l'on cherche pour démontrer le (i). Le (ii) se démontre de la même manière en descendant à X la fonction $\Delta^{[2]}F$. Le reste de la proposition est immédiat sur la construction de f_η.

Proposition I.3.15. — *Si ω est une forme de troisième espèce sur X, alors il existe*

(i) *une fonction f_ω méromorphe sur X^2 telle que l'on ait $\delta\omega = \dfrac{df_\omega}{f_\omega}$,*

(ii) *une fonction méromorphe $f_\omega^{(3)}$ sur X^3 telle que l'on ait $\Delta^{[2]}\omega = \dfrac{df_\omega^{(3)}}{f_\omega^{(3)}}$. De plus, la fonction f_ω vérifie génériquement l'identité $f_\omega(x,y) = f_\omega(y,x)$ et la relation de cocycle*

$$\frac{f(y,z)f(x,y\oplus z)}{f(x\oplus y,z)f(x,y)} = 1.$$

Démonstration. — Soit D le diviseur des résidus de ω. D'après le lemme I.1.14, D est cohomologiquement trivial et donc E_D et H_D sont nulles. Soit alors θ_D la fonction thêta normalisée associée à D. La nullité de H_D et l'équation fonctionnelle de θ_D montrent que la forme différentielle $d\theta_D/\theta_D$ est périodique de période Λ et donc est l'image réciproque d'une forme différentielle ω_D sur X qui est de troisième espèce et de résidu D. On en déduit le fait que $\omega - \omega_D$ est holomorphe donc invariante et donc que $\delta\omega = \delta\omega_D$. D'autre part, la nullité de H_D montre aussi que la fonction

$$F_D(x,y) = \frac{\theta_D(x+y)}{\theta_D(x)\theta_D(y)}$$

est périodique de période Λ^2 et donc induit une fonction méromorphe f_D sur X^2 et comme on a $df_D/f_D = \delta\omega_D$, on peut prendre $f_\omega = f_D$. Le (ii) se démontre de la même manière en utilisant la fonction $\dfrac{\theta_D(z_0+z_1+z_2)\theta_D(z_0)}{\theta_D(z_0+z_1)\theta_D(z_0+z_2)}$ et le reste de la proposition découle de la construction de f_ω.

Remarque I.3.16. — On tire de la démonstration le résultat suivant. Si ω est une forme différentielle de troisième espèce sur X de résidu D, il existe une fonction thêta θ associée à D telle que l'on ait $\mathrm{pr}_X^*\omega = \dfrac{d\theta}{\theta}$. En effet, si g est une primitive de $\mathrm{pr}_X^*(\omega - \omega_D)$, alors g est une fonction affine sur $\widehat{X}$ et donc $\theta = \theta_D \exp g$ est encore une fonction thêta associée à D.

Corollaire I.3.17. — *Si ω est une 1-forme différentielle rationnelle fermée sur X, il existe des fonctions rationnelles $g, f_1, \dots, f_n$ sur X^3 et des constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ telles que l'on ait $\Delta^{[2]}\omega = dg + \sum_{i=1}^n \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i}$.*

Démonstration. — Le corollaire I.1.16 permet d'écrire ω sous la forme $\eta + \sum_{i=1}^n \lambda_i\omega_i$, où η est de seconde espèce et les ω_i de troisième espèce, ce qui permet d'utiliser les deux propositions précédentes pour conclure.

Proposition I.3.18. — *Si D est un diviseur de X, alors $\Delta^{[3]}D$ est principal.*

Démonstration. — Soit θ_D la fonction thêta normalisée associée à D. La fonction

$$F_D^{(4)}(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{\theta_D(z_0 + z_1 + z_2 + z_3)\theta_D(z_0 + z_1)\theta_D(z_0 + z_2)\theta_D(z_0 + z_3)}{\theta_D(z_0 + z_1 + z_2)\theta_D(z_0 + z_1 + z_3)\theta_D(z_0 + z_2 + z_3)\theta_D(z_0)}$$

est périodique de période Λ^4 et induit par passage au quotient une fonction rationnelle $f_D^{(4)}$ sur X^4 de diviseur $\Delta^{[3]}D$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.3.19. — On aurait pu remplacer θ_D par n'importe quelle fonction thêta associée à D pour définir la fonction $f_D^{(4)}$ qui peut aussi se caractériser comme étant l'unique fonction rationnelle sur X^4 telle que l'on ait $f_D^{(4)}(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$ si x_1, x_2 ou $x_3 = 0$ et dont le diviseur est $\Delta^{[3]}D$.

7. Accouplement de Weil sur les variétés abéliennes. — Il existe une version algébrique (l'accouplement de Weil) de E_D. Si $\alpha \in X$, soit T_α la translation par α, c'est-à-dire l'application $x \to x \oplus \alpha$.

Proposition I.3.20

(i) *Si α est un point de m-torsion de X, il existe, à multiplication par une constante non-nulle près, une seule fonction rationnelle $f_{D,\alpha}$ de diviseur $m(T_\alpha^* D - D)$.*

(ii) *Si α et β sont des points de m-torsion de X, la fonction*

$$\frac{f_{D,\beta}(x \oplus \alpha) f_{D,\alpha}(x)}{f_{D,\beta}(x) f_{D,\alpha}(x \oplus \beta)}$$

est constante égale à une racine m-ième de l'unité qui sera notée $e_{D,m}(\alpha, \beta)$. Si de plus, a et b sont des éléments de Λ vérifiant $\alpha = \mathrm{pr}_X(a/m)$ et $\beta = \mathrm{pr}_X(b/m)$, alors

$$e_{D,m}(\alpha, \beta) = e^{\frac{2i\pi}{m} E_D(a,b)}. \tag{I.3.21}$$

Démonstration. — Une fonction étant déterminée, à multiplication par une constante non-nulle près, par son diviseur, l'unicité de $f_{D,\alpha}$ [si elle existe] est claire. Si $a \in \Lambda$ vérifie $\mathrm{pr}_X(a/m) = \alpha$, la fonction

$$g_{a,D}(z) = \frac{\theta_D(z + a/m)^m}{\theta_D(z)^{m-1}\theta_D(z + a)} \tag{I.3.22}$$

est périodique de période Λ et induit par passage au quotient une fonction rationnelle sur X de diviseur $m(T_\alpha^* D - D)$, ce qui permet de démontrer le (i). D'autre part, le diviseur de la fonction $\dfrac{f_{D,\beta}(x \oplus \alpha) f_{D,\alpha}(x)}{f_{D,\beta}(x) f_{D,\alpha}(x \oplus \beta)}$ est nul ; cette fonction est donc constante et pour démontrer le (ii), il suffit de démontrer la formule I.3.21 car celle-ci implique le reste étant donné que $E_D(a, b) \in \mathbf{Z}$. Or, si on revient à la formule analytique donnant $f_{D,\alpha}(x)$, on voit que l'on a

$$e_{D,m}(\alpha, \beta) = \frac{\theta_D(z + b)\theta_D(z + a/m)\theta_D(z + a + b/m)}{\theta_D(z + b + a/m)\theta_D(z + b/m)\theta_D(z + a)}$$

pour n'importe quel $z \in \mathbf{C}^d$ pour lequel l'expression est bien définie. D'autre part, si on utilise le fait que a et b sont des éléments de Λ et l'équation fonctionnelle de θ_D, on obtient

$$\begin{aligned} e_{D,m}(\alpha,\beta) &= e^{\pi H_D(b,z)-\pi H_D(a,z)+\pi H_D(a,z+b/m)-\pi H_D(b,z+a/m)} \\ &= e^{\frac{\pi}{m}(-H_D(b,a)+H_D(a,b))} = e^{\frac{2i\pi}{m}\operatorname{Im}(H_D(a,b))}, \end{aligned}$$

ce qui, étant donnée la relation entre H_D et E_D, permet de conclure.

Remarque I.3.23. — Soit $\partial_1, \dots, \partial_d$ la base de l'espace Der_X des dérivations d'ordre 1 invariantes sur X duale de $\vec{\omega}$. On déduit de la formule I.3.22, la relation

$$d(\partial_i f_{D,\alpha}/f_{D,\alpha}) = m(T_\alpha^* \omega_{D,i} - \omega_{D,i}),$$

quel que soient $m \in \mathbf{N}$ et α d'ordre m. Comme les points de torsion sont denses (pour la topologie classique) dans X, cette relation caractérise $\omega_{D,i}$ à addition près d'un élément de $\Omega^1(X)$ (comparer avec [**12**], Th.10)

8. La fonction de Green d'un diviseur

Proposition I.3.24. — *Si D est un diviseur sur X, il existe une unique fonction G_D sur $X - D$ vérifiant les conditions suivantes :*

(a) G_D est $\mathscr{C}^\infty$ en dehors de D et a une singularité logarithmique le long de D (si D est défini par l'équation $f(z) = 0$ dans un ouvert U, alors $G_D - \log|f(z)|$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur U)

(b) $\overline{\partial}\partial G_D = i\pi\eta_D$ en dehors de D.

(c) $\int_X G_D d\mu = 0$, où μ est la forme volume invariante sur X normalisée de telle sorte que $\int_X \mu = 1$.

Démonstration. — Si on a deux fonctions vérifiant les conditions ci-dessus, leur différence se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur X annulée par $\overline{\partial}\partial$ et donc constante puisque X est compact ; finalement cette constante est nulle à cause de la condition (c). Ceci prouve l'unicité. Pour prouver l'existence, il suffit de constater que si θ_D est la fonction thêta normalisée associée à D, alors $\log|\theta_D| - \frac{\pi}{2} H_D$ est périodique de période Λ sur V et donc définit une fonction sur X qui vérifie les propriétés (a) et (b) car $\overline{\partial}\partial \log|\theta_D| = 0$ puisque θ_D est holomorphe et $\overline{\partial}\partial H_D = 2i\eta_D$ par définition de η_D. Il n'y a plus qu'à rajouter une constante pour remplir la condition (c).

Remarque I.3.25. — On a construit la fonction de Green d'un diviseur à partir d'une fonction thêta, mais on peut aller dans l'autre sens et construire la fonction de Green par convolution à partir de la fonction de Green d'un point, puis en déduire l'existence d'une fonction thêta. C'est l'approche originelle de Poincaré (cf. [**5**], remarque 3.4).

I.4. La jacobienne d'une courbe algébrique

1. Algébricité de la jacobienne. — Soit X une courbe algébrique propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$. On peut associer à $u \in H_1(X,\mathbf{Z})$ la forme linéaire $\omega \to \int_u \omega$, ce qui permet de voir $H_1(X,\mathbf{Z})$ comme un réseau de $\Omega^1(X)^*$ et d'associer à X le tore complexe $J(X) = \Omega^1(X)^*/H_1(X,\mathbf{Z})$ appelé jacobienne de X. Le but de ce paragraphe est de montrer que $J(X)$ est algébrisable. Nous aurons besoin de la proposition suivante qui repose de manière essentielle sur la proposition I.2.1.

Proposition I.4.1

(i) *Si $u \in H_1(X,\mathbf{Z})$, il existe une unique forme $\eta_u \in \overline{\Omega^1(X)}$ telle que l'on ait $\int_u \omega = \int_X \omega \wedge \eta_u$ quel que soit $\omega \in \Omega^1(X)$.*

(ii) *De plus, si $v \in H_1(X,\mathbf{Z})$, alors $u\#v = \int_v (\eta_u + \overline{\eta}_u)$.*

Démonstration. — La forme $\omega \to \int_u \omega$ est linéaire sur $\Omega^1(X)$ et le (i) est donc une conséquence du fait que l'application qui à η associe la forme linéaire $\omega \to \int_X \omega \wedge \eta$ est un isomorphisme de $\overline{\Omega^1(X)}$ sur $\Omega^1(X)^*$, ce qui se déduit de ce que la forme hermitienne sur $\Omega^1(X)$ qui à (ω,η) associe $\dfrac{1}{2i\pi}\int_X \omega \wedge \overline{\eta}$ est définie positive. Maintenant, si $\omega \in \Omega^1(X)$ et $u \in H_1(X,\mathbf{Z})$, on a $\omega \wedge \overline{\eta}_u = 0$ et donc, si $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g$ est une base symplectique de $H_1(X,\mathbf{Z})$,

$$\int_u \omega = \int_X \omega \wedge (\eta_u + \overline{\eta}_u) = \sum_{j=1}^{g} \int_{a_j} \omega \int_{b_j} (\eta_u + \overline{\eta}_u) - \int_{b_j} \omega \int_{a_j} (\eta_u + \overline{\eta}_u).$$

D'autre part, comme $u = \sum_{j=1}^{g} (u\#b_j)a_j - (u\#a_j)b_j$, on a aussi

$$\int_u \omega = \sum_{j=1}^{g} (u\#b_j) \int_{a_j} \omega - (u\#b_j) \int_{a_j} \omega.$$

Si on met ensemble les deux expressions obtenues pour $\int_u \omega$ et que l'on utilise l'appartenance à $\mathbf{R}$ de $u\#a_j, u\#b_j, \int_{a_j} \eta_u + \overline{\eta}_u$ et $\int_{b_j} \eta_u + \overline{\eta}_u$ pour $1 \leq j \leq g$, ainsi que le fait que $H_1(X,\mathbf{Z})$ est un réseau de $\Omega^1(X)^*$ et donc que $a_1,\dots,a_g, b_1,\dots,b_g$ est une base de $\Omega^1(X)^*$ sur $\mathbf{R}$, on en déduit l'égalité $u\#v = \int_v (\eta_u + \overline{\eta}_u)$ si $v \in \{a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_g\}$, ce qui permet de conclure par linéarité, ces éléments formant une base de $H_1(X,\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$.

Corollaire I.4.2. — *$J(X)$ est algébrisable et la forme de Riemann naturelle induit l'accouplement d'intersection sur $H_1(X,\mathbf{Z})$.*

Démonstration. — Il résulte du (i) de la proposition précédente et de sa démonstration que l'application qui à η associe la forme linéaire $\omega \to \int_X \omega \wedge \eta$ induit un isomorphisme ι de $\overline{\Omega^1(X)}$ sur $\Omega^1(X)^*$ et que par construction, si $u \in H_1(X,\mathbf{Z})$, alors $\iota(u) = \eta_u$. D'autre part, la forme hermitienne H qui à $\omega, \eta \in \overline{\Omega^1(X)}$ associe $2i \int_X \overline{\omega} \wedge \eta$ est définie positive et la formule

$$\operatorname{Im}\Big(2i\int_X \overline{\eta}_u \wedge \eta_v\Big) = 2\operatorname{Re}\Big(\int_X \overline{\eta}_u \wedge \eta_v\Big) = 2\operatorname{Re}\Big(\int_v \overline{\eta}_u\Big) = \int_v \eta_u + \overline{\eta}_u = u\#v,$$

montre que la restriction de $E = \operatorname{Im} H$ à $H_1(X, \mathbf{Z})$ coïncide avec l'accouplement d'intersection et est donc à valeurs entières, ce qui, en vertu du théorème I.3.2, permet de conclure.

Remarque I.4.3

(i) L'accouplement d'intersection est unimodulaire (on a exhibé une base symplectique), ce qui montre que $J(X)$ admet une polarisation principale et est isomorphe à sa duale (cf. proposition I.5.14).

(ii) On peut montrer que si X est définie sur un sous-corps K de $\mathbf{C}$, alors $J(X)$ est aussi définie sur K (cf. **[44]** par exemple).

2. La fonction thêta de Riemann et le diviseur Θ. — Soit $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ une base symplectique de $H_1(X, \mathbf{Z})$ et $\omega_1, \ldots, \omega_g$ les éléments de $\Omega^1(X)$ définis par $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{i,j}$. Posons $\int_{b_j} \omega_i = \tau_{i,j}$ et soit $\Omega = (\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq g}$.

Lemme I.4.4. — *La matrice Ω est symétrique et sa partie imaginaire est définie positive.*

Démonstration. — La proposition I.2.1 utilisée pour $\omega = \omega_i$ et $\eta = \omega_j$ nous fournit l'égalité $\tau_{i,j} = \tau_{j,i}$ car $\omega_i \wedge \omega_j = 0$. Si $x = (x_1, \ldots, x_g)$ et $\alpha = \sum_{i=1}^g x_i \omega_i$, la proposition I.2.1, utilisée cette fois pour $\omega = \alpha$ et $\eta = \overline{\alpha}$, nous fournit la formule

$$\frac{1}{2i}\int_X \overline{\alpha} \wedge \alpha = \operatorname{Im}({}^t\overline{x}\Omega x)$$

qui permet de conclure puisque la forme hermitienne $\alpha \to \frac{1}{2i}\int_X \overline{\alpha} \wedge \alpha$ est définie positive sur $\Omega^1(X)$.

On note $\Lambda = \mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g$ le réseau de $\mathbf{C}^g$ image de $H_1(X, \mathbf{Z})$ par l'application qui à u associe $\iota(u) = \int_u \vec{\omega} = (\int_u \omega_i)_{1 \leq i \leq g}$. Le tore $\mathbf{C}^g/\Lambda$ est alors naturellement isomorphe à J et on note pr_J la projection de $\mathbf{C}^g$ sur J qui en découle. Si $P_0 \in X$ et $P \in X$, le vecteur $\int_{P_0}^P \vec{\omega}$ de coordonnées $(\int_{P_0}^P \omega_i)_{1 \leq i \leq g}$ est un élément de $\mathbf{C}^g$ bien défini modulo Λ et on note ι_{P_0} l'application de X dans J ainsi obtenue. La matrice $\operatorname{Im}(\Omega)$ étant définie positive, la série

$$\theta(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}^g} e^{i\pi {}^t n \Omega n + 2i\pi {}^t n z}$$

converge normalement sur $\mathbf{C}^g$ et donc y définit une fonction holomorphe de z. D'autre part, un calcul immédiat montre que si $u \in \mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g$, alors

(I.4.5) $$\theta(z+u) = e^{\ell_u(z)}\theta(z) \text{ avec } \ell_u(z) = -i\pi {}^t b\Omega b - 2i\pi {}^t b z,$$

si $u = a + \Omega b$.

Remarquons que l'hypersurface des zéros de θ est invariante par translation par un élément de Λ et donc est l'image inverse d'un diviseur Θ_0 de J et l'équation fonctionnelle satisfaite par θ montre que θ est une fonction thêta associée à Θ_0. De même, la fonction $P \to \theta(z + \int_{P_0}^{P} \vec{\omega})$ est multivaluée sur X, mais l'ordre du zéro de cette fonction en un point P ne dépend pas de la branche choisie et donc le diviseur de ses zéros est un élément bien déterminé de $\mathrm{Div}(X)$.

Théorème I.4.6. — *Il existe $w_0 \in \mathbf{C}^g$ unique à addition près d'un élément de Λ et un ouvert de Zariski U de J tel que si $z \in \mathrm{pr}_J^{-1}(U)$, alors la fonction $P \to \theta(z + \int_{P_0}^{P} \vec{\omega})$ a pour diviseur $Q_1 + \cdots + Q_g$, où les Q_i sont déterminés à permutation près par l'identité $\sum_{i=1}^{g-1} \int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega} = w_0 - z$ modulo Λ.*

Démonstration. — [4] ou [**39**].

Ce théorème et la formule $\theta(-z) = \theta(z)$ se traduisent algébriquement de la manière suivante :

Corollaire I.4.7

(i) *L'application qui, à $(P_1, \ldots, P_g) \in X^g$, associe $\oplus_{i=1}^{g} \iota_{P_0}(P_i) \in J$, induit un morphisme birationnel de* $\mathrm{Sym}^g(X) = X^g/S_g$ *sur J, où S_g est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, g\}$.*

(ii) *Si Θ désigne l'image de X^{g-1} par l'application qui à $(P_1, \ldots, P_{g-1})$ associe $\oplus_{i=1}^{g-1} \iota_{P_0}(P_i)$, alors $\Theta_0 = \Theta \oplus \mathrm{pr}_J(w_0)$*

(iii) *Le diviseur Θ est symétrique : il existe un unique élément w de J tel que l'on ait $w \ominus \Theta = \Theta$.*

Lemme I.4.8. — *Soit E_Θ la forme de Riemann du diviseur Θ. Si u, v sont deux éléments de $H_1(X, \mathbf{Z})$, alors $E_\Theta(\int_u \vec{\omega}, \int_v \vec{\omega}) = u \# v$.*

Démonstration. — Les diviseurs Θ et Θ_0 étant translatés l'un de l'autre, ils ont même forme de Riemann et comme θ est une fonction thêta associée à Θ_0, on peut calculer E_Θ en utilisant la formule I.3.11 et la formule I.4.5, ce qui nous donne, si $\int_u \vec{\omega} = a + \Omega b$ et $\int_v \vec{\omega} = c + \Omega d$,

$$\begin{aligned} E_\Theta\Big(\int_u \vec{\omega}, \int_v \vec{\omega}\Big) &= \frac{1}{2i\pi}\Big(\ell_{a+\Omega b}(c + \Omega d) - \ell_{a+\Omega b}(0) + \ell_{c+\Omega d}(0) - \ell_{c+\Omega d}(a + \Omega b)\Big) \\ &= {}^t da - {}^t bc \end{aligned}$$

et permet de conclure.

3. Le théorème d'Abel

Théorème I.4.9. — *Si $D = \sum_{i \in I} n_i P_i$ est un diviseur de degré 0 sur X, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est le diviseur d'une fonction méromorphe sur X.*

(ii) *$\sum_{i \in I} n_i \int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega} \equiv 0$ modulo Λ.*

Démonstration. — Si $D = \sum_{i \in I} n_i P_i$ est le diviseur d'une fonction méromorphe f, on peut utiliser la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce pour obtenir la formule

$$\int_D \vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi} \sum_{i=1}^{g} \Big(\int_{a_i} \vec{\omega} \int_{b_i} \frac{df}{f} - \int_{a_i} \frac{df}{f} \int_{b_i} \vec{\omega} \Big),$$

ce qui, compte-tenu du fait que $\int_u \dfrac{df}{f} \in 2i\pi\mathbf{Z}$ si $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$, permet de prouver que $\int_D \vec{\omega} = \sum_{n_i} \int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega}$ appartient à Λ. On en déduit l'implication (ii)$\Rightarrow$(i). L'implication réciproque peut aussi se déduire de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce, mais l'utilisation de la fonction θ en donne une démonstration plus constructive : le lemme suivant donne une construction explicite de la fonction méromorphe.

Lemme I.4.10. — *Soit $D = \sum_{i \in I} n_i P_i$ un diviseur de degré 0 sur X vérifiant la condition* (ii) *du théorème d'Abel. Soient $Q_1, \ldots, Q_{g-1} \in X$ tels que les images de $w_0 - \Big(\int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega} + \sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{Q_j} \vec{\omega}\Big)$ modulo Λ appartiennent à U pour tout $i \in I$. Soient t (resp. x_i pour $i \in I$) un élément de $\mathbf{C}^g$ dans la classe de $w_0 - \sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{Q_j} \vec{\omega}$ (resp. $\int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega}$) modulo Λ et soit y l'élément de Λ définit par $y = \sum_{i \in I} n_i x_i$. La fonction $F(z) = \prod_{i \in I} \theta(z + t - x_i)^{n_i} \dfrac{\theta(z+t+y)}{\theta(z+t)}$ est périodique de période Λ et $f = \iota_{P_0}^* F$ est une fonction méroromorphe sur X de diviseur D.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que si J est un ensemble fini, si les m_j pour $j \in J$ sont des entiers vérifiant $\sum_{j \in J} m_j = 0$ et les z_j pour $j \in J$ sont des points de $\mathbf{C}^g$ vérifiant $\sum_{j \in J} m_j z_j = 0$, alors quel que soit $t \in \mathbf{C}^g$, la fonction $z \to \prod_{j \in J} \theta_\Theta(z + t - z_j)^{m_j}$ est périodique de période Λ. En effet, si $u \in \Lambda$, on a $F(z + u) = \Big(\prod_{j \in J} e^{m_j(\ell_u(z+t-z_j))}\Big) F(z)$ et les hypothèses mises sur les m_j et les z_j ainsi que le fait que ℓ_u est une forme affine impliquent que l'on a $\sum_{j \in J} m_j \ell_u(z + t - z_j) = 0$, ce qui permet de montrer l'invariance de F par translation par un élément de Λ.

D'après la discussion précédente appliquée au cas où $J = I \cup \{0, y\}$, $m_i = n_i$ si $i \in I$, $n_0 = -1$, $n_y = 1$, $z_i = x_i$ si $i \in I$, $z_y = y$ et $z_0 = 0$, la fonction

$$F(z) = \prod_{i \in I} \theta(z + t - x_i)^{n_i} \frac{\theta(z+t+y)}{\theta(z+t)}$$

est périodique de période Λ et donc induit une fonction méromorphe $f = \iota_{P_0}^* F$ sur X. De plus, comme $y \in \Lambda$, la fonction $\dfrac{\theta(z+t+y)}{\theta(z+t)}$ est égale à $e^{\ell_y(x+t)}$ et donc ne s'annule pas, ce qui fait que le diviseur de f est aussi le diviseur de $P \to \prod_{i \in I} \theta(t - x_i + \int_{P_0}^{P})^{n_i}$. Comme par construction, $t - x_i$ est dans la classe de $w_0 - \Big(\int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega} + \sum_{j=1}^{g-1} \int_{P_0}^{Q_j} \vec{\omega}\Big)$

modulo Λ, on peut utiliser le théorème I.4.6 pour calculer ce diviseur et on obtient

$$\mathrm{Div}(f) = \sum_{i\in I} n_i(P_i + Q_1 + \cdots + Q_{g-1}) = \sum_{i\in I} n_i P_i,$$

la dernière égalité étant une conséquence de l'identité $\sum_{i\in I} n_i = 0$. Ceci termine la démonstration du lemme I.4.10 et donc du théorème d'Abel.

Corollaire I.4.11. — *L'application qui à un diviseur $\sum_{i\in I} n_i P_i$ de degré 0 sur X associe $\sum_{i\in I} \int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega}$ modulo Λ induit un isomorphisme de groupes de $\mathrm{Div}^0(X)/\{\mathrm{Div}(f),\ f \in \mathbf{C}(X)^*\}$ sur J.*

Démonstration. — C'est une simple reformulation du théorème d'Abel.

4. Accouplement de Weil sur une courbe algébrique. — Si f est une fonction rationnelle sur X et $D = \sum_P n_P P$ est un diviseur de X étranger au diviseur de f, on pose $f(D) = \prod_P f(P)^{n_P} \in \mathbf{C}^*$. Soient α, β deux points de n-torsion de J, D_α et D_β des diviseurs étrangers de degré 0 sur X dont les images par ι_{P_0} sont respectivement α et β et f_α, f_β des fonctions rationnelles sur X de diviseurs respectifs nD_α et nD_β et $a, b \in \mathbf{C}^g$ d'images respectives α et β dans $\mathbf{C}^g/\Lambda$.

Proposition I.4.12. — *$\dfrac{f_\alpha(D_\beta)}{f_\beta(D_\alpha)}$ ne dépend que de α et β et pas des choix de D_α, D_β, f_α et f_β et on a*

$$\frac{f_\alpha(D_\beta)}{f_\beta(D_\alpha)} = e^{\frac{2i\pi}{n} E_\Theta(na,nb)} = e_{\Theta,n}(\alpha,\beta).$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que D_α et D_β étant de degré 0 et f_α, f_β étant bien définies à multiplication près par une constante non nulle, $\dfrac{f_\alpha(D_\beta)}{f_\beta(D_\alpha)}$ ne dépend pas du choix de f_α et f_β. D'autre part, pour démontrer la proposition, il suffit bien évidemment de démontrer la formule puisque $e_{\Theta,n}(\alpha,\beta)$ ne dépend pas des choix de D_α et D_β et comme la seconde égalité est un cas particulier de la formule I.3.21, il n'y a en fait que la première égalité à prouver. Écrivons D_α et D_β sous la forme $D_\alpha = \sum a_i P_i$ et $D_\beta = \sum b_j Q_j$.

Si $i \in I$ (resp. $j \in J$), soit $x_i \in \mathbf{C}^g$ (resp. $y_j \in \mathbf{C}^g$) dans la classe de $\int_{P_0}^{P_i} \vec{\omega}$ (resp. $\int_{P_0}^{Q_j} \vec{\omega}$) modulo Λ. Soit $a = \sum_{i\in I} a_i x_i$ et $b = \sum_{j\in J} b_j y_j$. Comme a et b ont pour images respectives α et β dans J, on a $na \in \Lambda$ et $nb \in \Lambda$. Choisissons t vérifiant $\theta(t) = 0$ suffisamment général pour que $t - x_i \in \mathrm{pr}_J^{-1}(U)$ si $i \in I$ et $-t - y_j \in \mathrm{pr}_J^{-1}(U)$ si $j \in J$. D'après le lemme I.4.10, les fonctions

$$F_\alpha(z) = \prod_{i\in I} \theta(t + z - x_i)^{na_i} \frac{\theta(t + z + na)}{\theta(t + z)}$$

$$F_\beta(z) = \prod_{j\in J} \theta(-t + z - y_j)^{nb_j} \frac{\theta(-t + z + nb)}{\theta(-t + z)}$$

sont périodiques de période Λ et donc définissent des fonctions rationnelles sur J que nous noterons encore F_α et F_β et les fonctions $\iota_{P_0}^* F_\alpha$ et $\iota_{P_0}^* F_\beta$ sont des fonctions rationnelles sur X de diviseurs respectifs nD_α et nD_β, ce qui fait que l'on peut faire le calcul avec $f_\alpha = \iota_{P_0}^* F_\alpha$ et $f_\beta = \iota_{P_0}^* F_\beta$. On a d'autre part

$$\frac{\theta(t+z+na)}{\theta(t+z)} = e^{\ell_{na}(u+z)} \quad \text{et} \quad \frac{\theta(-t+z+nb)}{\theta(-t+z)} = e^{\ell_{nb}(-t+z)},$$

ce qui nous donne la formule

$$\frac{f_\alpha(D_\beta)}{f_\beta(D_\alpha)} = \frac{\prod_{i,j} \theta(t+y_j-x_i)^{na_ib_j}}{\prod_{i,j} \theta(-t+x_i-y_j)^{na_ib_j}} \frac{\prod_{j\in J} e^{b_j\ell_{na}(t+y_j)}}{\prod_{i\in I} e^{a_i\ell_{nb}(-t+x_i)}}.$$

Comme θ vérifie l'équation fonctionnelle $\theta(-z) = \theta(z)$, le premier terme est égal à 1. Finalement, comme ℓ_{na} et ℓ_{nb} sont affines et comme $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} b_j = 0$, on a

$$\sum_{j\in J} b_j\ell_{na}(t+y_j) = \ell_{na}(\sum_{j\in J} b_jy_j) - \ell_{na}(0) = \ell_{na}(b) - \ell_{na}(0)$$
$$\sum_{i\in I} a_i\ell_{nb}(-t+x_i) = \ell_{nb}(\sum_{i\in I} a_ix_i) - \ell_{nb}(0) = \ell_{nb}(a) - \ell_{nb}(0),$$

ce qui, compte-tenu de la formule I.3.11, nous donne

$$\begin{aligned}\ell_{na}(b) - \ell_{na}(0) + \ell_{nb}(0) - \ell_{nb}(a) &= \frac{1}{n}\Big(\ell_{na}(nb) - \ell_{na}(0) + \ell_{nb}(0) - \ell_{nb}(na)\Big)\\ &= \frac{1}{n}E_{\Theta_0}(na, nb)\end{aligned}$$

et permet de conclure.

Remarque I.4.13. — Le lemme I.4.8 et la proposition I.4.12 permettent de relier l'accouplement de Weil à la forme d'intersection.

I.5. Variétés d'Albanese et de Picard

1. Variété d'Albanese. — Soient Y une variété algébrique lisse et V un sous-espace vectoriel de dimension finie de l'espace des formes de première espèce sur Y. L'application qui à $u \in H_1(Y, \mathbf{Z})$ associe la forme linéaire $\omega \to \int_u \omega$ définit un morphisme ι_V de $H_1(Y, \mathbf{Z})$ dans le dual V^* de V. On note Λ l'image de $H_1(Y, \mathbf{Z})$ par ι_V et on suppose que Λ est un sous-groupe discret de V^*. Ceci nous permet de considérer le groupe de Lie $G = V/\Lambda$. L'espace $\Omega^1_{\mathrm{inv}}(G)$ des 1-formes différentielles invariantes sur G est le dual de l'espace tangent à l'origine de G, espace tangent qui est par construction V^*, d'où un isomorphisme naturel $\eta \to \omega_\eta$ de V sur $\Omega^1_{\mathrm{inv}}(G)$. De manière explicite, si $\eta \in V$ et ℓ_η est la forme linéaire sur V^* définie par $\ell_\eta(\lambda) = \lambda(\eta)$, la forme différentielle $d\ell_\eta$ est invariante sur V^*. Elle est donc l'image inverse d'une forme ω_η invariante sur G.

Si $x, y \in Y$ et γ est un chemin reliant x à y, la forme linéaire $\omega \to \int_x^y \omega$ est un élément de V^* dont l'image $f(x, y)$ modulo Λ ne dépend que de x et y. Ceci nous permet, si $a \in Y$ de définir une application holomorphe $f_a : Y \to G$ grâce à la formule $f_a(x) = f(a,x)$.

Lemme I.5.1. — *Si $a \in Y$, l'application f_a^* induit un isomorphisme de $\Omega^1_{\mathrm{inv}}(G)$ sur V qui est l'inverse de l'isomorphisme $\eta \to \omega_\eta$ décrit ci-dessus ; en particulier, il ne dépend pas du choix de $a \in Y$.*

Démonstration. — Soit $\gamma : [0,1] \to Y$ un chemin de classe $\mathscr{C}^1$ et γ_a un relèvement continu de $f_a \circ \gamma$ dans V^*. Si on explicite toutes les applications ci-dessus, on obtient

$$\int_{f_a\circ\gamma} \omega_\eta = [\ell_\eta \circ \gamma_a(t)]_0^1 = [\gamma_a(t)(\eta)]_0^1 = [\int_a^{\gamma(t)} \eta]_0^1 = \int_\gamma \eta,$$

ce qui permet de conclure.

Tout ce qui précède s'applique en particulier au cas où X est propre et $V = \Omega^1(X)$. Dans ce cas, nous commettrons l'abus de noter encore $H_1(X,\mathbf{Z})$ l'image de $H_1(X,\mathbf{Z})$ dans $\Omega^1(X)^*$ bien que l'application naturelle de $H_1(X,\mathbf{Z})$ dans $\Omega^1(X)^*$ tue la torsion et donc ne permette d'identifier $H_1(X,\mathbf{Z})$ à un $\mathbf{Z}$-réseau du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\Omega^1(X)^*$ que modulo torsion. Ceci nous permet d'associer à X le tore complexe $\mathrm{Alb}(X) = \Omega^1(X)^*/H_1(X,\mathbf{Z})$ appelé variété d'Albanese de X. Si $a \in X$, on dispose d'après ce qui précède d'un morphisme $f_a : X \to \mathrm{Alb}(X)$. Deux tels morphismes se déduisent l'un de l'autre en composant par une translation. Plus généralement, un morphisme de X dans $\mathrm{Alb}(X)$ obtenu en composant un morphisme du type ci-dessus avec une translation sera appelé un morphisme d'Albanese.

Remarque I.5.2

(i) Si X est une courbe, sa variété d'Albanese n'est rien d'autre que sa jacobienne.

(ii) Si X est une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}$, alors tout morphisme d'Albanese de X dans $\mathrm{Alb}(X)$ est un isomorphisme.

Proposition I.5.3. — *Si X est propre et lisse et a_X est un morphisme d'Albanese de X dans $\mathrm{Alb}(X)$, alors a_X^* induit des isomorphismes*

$$\begin{aligned}&\Omega^1(\mathrm{Alb}(X)) \cong \Omega^1(X),\\ &H^1(\mathrm{Alb}(X), \mathscr{O}_{\mathrm{Alb}(X)}) \cong H^1(X, \mathscr{O}_X),\\ &H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Alb}(X)) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X).\end{aligned}$$

qui sont indépendants du choix de a_X.

Démonstration. — Le premier de ces isomorphismes est un cas particulier du lemme I.5.1 ainsi que l'indépendance par rapport au choix de a_X. Le reste s'en déduit grâce à la décomposition de Hodge.

Définition I.5.4. — Si G est un groupe commutatif, X est un ensemble et a une application de X dans G, on appelle sous-groupe de G engendré par a, le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $a(x) - a(y)$ pour $x, y \in X$ et on dit que

a engendre G si ce sous-groupe est égal à G. Si $a(X)$ contient 0, alors le sous-groupe de G engendré par a coïncide avec celui engendré par $a(X)$.

Proposition I.5.5. — *Si a_X est un morphisme d'Albanese de X dans* $\mathrm{Alb}(X)$*, alors a_X engendre* $\mathrm{Alb}(X)$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme I.5.6. — *Si U est un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ contenant 0 et $f : U \to \mathbf{C}^n$ est une application holomorphe vérifiant $f(0) = 0$, alors le sous-groupe G de $\mathbf{C}^n$ engendré par $f(U)$ est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n. Dans le cas $n = 1$, si f est identiquement nulle, le résultat est évident et dans le cas contraire, $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0 ; il contient donc une boule $B(0, r)$ de centre 0 et de rayon $r > 0$, ce qui fait que G contient $\cup_{k\in\mathbf{N}} B(0, kr) = \mathbf{C}$, d'où le résultat.

Si $n \geq 2$, remarquons qu'il suffit de prouver que G contient un sous-espace vectoriel E non nul de $\mathbf{C}^n$ car dans ce cas, on peut tout projeter modulo E et utiliser l'hypothèse de récurrence. S'il existe une forme affine L telle que $L \circ f$ soit identiquement nulle sur U, alors L est linéaire car $f(0) = 0$ et $f(U)$ est contenu dans un sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{C}^n$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence. On supposera donc dans la suite qu'il n'existe pas de forme affine L telle que $L \circ f$ soit identiquement nulle sur U. En particulier, si on note $f_1, \ldots, f_n$ les coordonnées de f, alors f_n n'est pas constante et il existe $a \in U$ avec $f_n'(a) \neq 0$. Soit $U_a = \{x - a \mid x \in U\}$ et $g : U_a \to \mathbf{C}^n$ définie par $g(z) = f(a + z) - f(a)$. Comme $g_n'(0) = f_n'(a)$ n'est pas nul, il existe V voisinage de 0 tel que g_n admette un inverse holomorphe $h : V \to U_a$ et il existe $W \subset V$ ouvert contenant 0 tel que si $|r| < 1$ et $z \in W$, alors $rf_n(z) \in V$. Soient $0 < a < b$ deux entiers et $u_{a,b} : W \to \mathbf{C}^n$ l'application définie par $u_{a,b}(z) = bg(h(\frac{a}{b} f_n(z))) - ag(z)$. On s'est débrouillé pour que l'image de W par $u_{a,b}$ soit contenue dans $\mathbf{C}^{n-1}$, ce qui permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer que le sous-groupe $H_{a,b}$ de $\mathbf{C}^{n-1}$ qu'elle engendre est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{n-1}$. Fixons $\alpha \in W$ tel que $\beta = g_n(\alpha) \neq 0$. Si $u_{a,b}$ est identiquement nulle sur W quels que soient les choix d'entiers $0 < a < b$, la fonction $r \to \beta g_{n-1}(h(r\beta)) - f_{n-1}(\alpha) g_n(h(r\beta))$ est nulle dès que $r \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$ et comme elle est holomorphe, elle est identiquement nulle sur le disque $|z| < 1$, ce qui implique que la fonction $z \to \beta g_{n-1}(z) - f_{n-1}(\alpha) g_n(z)$ est identiquement nulle sur U_a et donc qu'il existe une forme affine L telle que $L \circ f$ soit identiquement nulle sur U, ce que l'on avait exclu. Il existe donc a, b tels que $u_{a,b}$ ne soit pas identiquement nulle et donc tels que $H_{a,b}$ ne soit pas réduit à 0, ce qui permet de conclure puisque $H_{a,b}$ est un sous-groupe de G.

Remarque I.5.7. — Dans le même ordre d'idées, on peut montrer (cf. [**8**], chapitre III, §8, exercice 4) qu'un sous-groupe de $\mathbf{R}^n$ connexe par arcs est un sous-$\mathbf{R}$-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$. Par contre, il existe (cf. [7], chapitre VI, §9, exercice 2) des sous-corps connexes de $\mathbf{C}$ qui ne sont pas des sous-$\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $\mathbf{C} = \mathbf{R} \oplus i\mathbf{R}$.

Revenons à la démonstration de la proposition I.5.5. Comme deux morphismes d'Albanese diffèrent par une constante, les sous-groupes qu'ils engendrent sont les mêmes et on peut supposer qu'il existe $a \in X$ tel que $a_X = f_a$. Soit $\omega_1, \ldots, \omega_g$ une base de $\Omega^1(X)$ et U un voisinage de a dans X sur lequel les fonctions $x \to \int_a^x \omega_i$ sont analytiques. Quitte à remplacer U par un voisinage plus petit, on peut supposer que U est isomorphe (analytiquement) à la boule $B(0,r)^d$ de $\mathbf{C}^d$. Si $\alpha \in B(0,r)$, le sous-groupe G_α de $\Omega^1(X)^*$ engendré par $a_X(\{z\alpha \mid z \in \mathbf{C},\ |z| < 1\})$ est un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\Omega^1(X)^*$ d'après le lemme précédent. Le sous-groupe de $\Omega^1(X)^*$ engendré par $a_X(U)$ est la somme des G_α et est donc aussi un sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel de $\Omega^1(X)^*$. S'il est distinct de $\Omega^1(X)^*$, c'est qu'il existe $\omega \in \Omega^1(X)$ tel que l'on ait $\int_a^x \omega = 0$ quel que soit $x \in U$, ce qui implique $\omega = 0$ puisque U contient un ouvert non vide de X. On aboutit donc à une contradiction, ce qui prouve que le sous-groupe $\Omega^1(X)^*$ engendré par $a_X(U)$ est égal à $\Omega^1(X)^*$ et donc, a fortiori, que le sous-groupe de $\mathrm{Alb}(X) = \Omega^1(X)^*/H_1(X,\mathbf{C})$ engendré par $a_X(X)$ est égal à $\mathrm{Alb}(X)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I.5.8. — La démonstration a montré que si $U \subset X$ contient un ouvert non vide (et donc en particulier si U est un ouvert de Zariski non vide de X), alors la restriction de a_X à U engendre $\mathrm{Alb}(X)$.

2. Propriété universelle de la variété d'Albanese. — Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés propres et lisses, alors f (resp. f^*) induit un homomorphisme de $H_1(X,\mathbf{Z})$ dans $H_1(Y,\mathbf{Z})$ (resp. de $\Omega^1(Y)$ dans $\Omega^1(X)$). On obtient donc, par dualité, un morphisme de tores complexes

$$\mathrm{Alb}(f) : \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(Y).$$

Proposition I.5.9. — *Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés propres et lisses définies sur $\mathbf{C}$, si $a_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ et $a_Y : Y \to \mathrm{Alb}(Y)$ sont des morphismes d'Albanese, alors il existe un unique morphisme $g : \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(Y)$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Alb}(X) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Alb}(Y) \\ X \arrow[u, "a_X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "a_Y"'] \end{tikzcd}$$

commute. De plus, il existe un unique élément z de $\mathrm{Alb}(Y)$ tel que, si t_z est la translation par z, alors $g = t_z \circ \mathrm{Alb}(f)$.

Démonstration. — Si on remplace a_X par $a'_X = t_x \circ a_X$, a_Y par $a'_Y = t_y \circ a'_X$ et g par $g' = t_u \circ g$ avec $u = y \ominus g(x) \oplus g(0)$, alors on a $g \circ a_X = a_Y \circ f$ si et seulement si

$g' \circ a'_X = a'_Y \circ f$ (on a utilisé le fait (cf. remarque I.3.6) qu'un morphisme entre deux tores complexes est le translaté d'un morphisme de groupes). On peut donc, quitte à remplacer a_X et a_Y par des translatés, supposer $a_X(a) = 0$ et $a_Y(f(a)) = 0$ et il s'agit de vérifier que $\mathrm{Alb}(f)$ est l'unique morphisme g (de groupes puisque on doit avoir $g(0) = 0$) tel que l'on ait $g \circ a_X = a_Y \circ f$

L'unicité d'un tel morphisme vient du fait que la commutativité du diagramme impose la valeur de g sur $a_X(X)$ et que cet ensemble engendre $\mathrm{Alb}(X)$ d'après la proposition I.5.5. Le fait que $\mathrm{Alb}(f)$ convient est une traduction de la formule $\int_{f(a)}^{f(b)} \omega = \int_a^b f^*\omega$

Corollaire I.5.10. — *Si X est une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$ et $f : X \to A$ est un morphisme de X dans une variété abélienne A et si $a_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est un morphisme d'Albanese, alors il existe un unique morphisme $g : \mathrm{Alb}(X) \to A$ tel que l'on ait $f = g \circ a_X$.*

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme précédent et du fait que la variété d'Albanese d'une variété abélienne est la variété abélienne elle-même.

Remarque I.5.11

(i) Le corollaire I.5.10 exprime le fait que $\mathrm{Alb}(X)$ est la solution d'un problème universel concernant les morphismes de X dans les variétés abéliennes. On aurait d'ailleurs pu remplacer les variétés abéliennes par les tores complexes et les morphismes de variétés algébriques par les morphismes de variétés analytiques dans la formulation et la démonstration de ce corollaire.

(ii) Cette propriété universelle est à la base de la définition algébrique de la variété d'Albanese (cf. **[42]** ou **[30]**) d'une variété lisse connexe mais pas forcément propre. D'autre part, si $\overline{X}$ est une compactification lisse de X et $\iota : X \to \overline{X}$ est l'injection, l'application $\mathrm{Alb}(\iota)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Alb}(X)$ sur $\mathrm{Alb}(\overline{X})$, ce qui permet de se ramener au cas propre (la remarque I.5.8 permet de prouver la surjectivité et l'injectivité est une conséquence du fait qu'un morphisme rationnel d'une variété algébrique dans une variété abélienne est partout défini).

Proposition I.5.12. — *Si X est une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$, le tore complexe $\mathrm{Alb}(X)$ est algébrisable.*

Démonstration. — Soit $a \in X$ et soit a_X la morphisme d'Albanese défini par $a_X(x) = (x) - (0)$. D'après la proposition I.5.5, $a_X(X)$ engendre $\mathrm{Alb}(X)$ et on peut donc trouver un ensemble fini d'éléments $x_i, i \in I$ de X tels que le sous-groupe de $\mathrm{Alb}(X)$ engendré par les $a_X(x_i)$ soit dense dans $\mathrm{Alb}(X)$ pour la topologie usuelle. Si $i \in I$, soit C_i une courbe algébrique irréductible incluse dans X et passant par a et x_i. Soit $\widetilde{C}_i$ la désingularisée de C_i. Composant le morphisme naturel de $\widetilde{C}_i$ sur C_i avec a_X, on obtient un morphisme $f_i : \widetilde{C}_i \to \mathrm{Alb}(X)$, ce qui nous fournit, grâce à la proposition I.5.9, un morphisme $\mathrm{Alb}(f_i) : J(\widetilde{C}_i) \to \mathrm{Alb}(X)$. Par construction, l'image de $\mathrm{Alb}(f_i)$ contient celle de f_i et donc contient les points $a_X(a) = 0$ et $a_X(x_i)$. Soit alors $\pi : \prod_{i\in I} J(\widetilde{C}_i) \to \mathrm{Alb}(X)$, l'application qui à $(y_i)_{i\in I}$ associe $\sum_{i\in I} \mathrm{Alb}(f_i)(y_i)$. L'image de π est un sous-groupe de $\mathrm{Alb}(X)$ qui contient les $a_X(x_i)$ et donc est dense dans $\mathrm{Alb}(X)$; comme d'autre part, $\prod_{i\in I} J(\widetilde{C}_i)$ est compact, son image est fermée, ce qui permet de prouver que π est surjective. Il n'y a plus alors qu'à utiliser le fait que $\prod_{i\in I} J(\widetilde{C}_i)$ est algébrisable (corollaire I.4.2) et la proposition I.3.5 pour conclure.

Remarque I.5.13. — On peut montrer que $\mathrm{Alb}(X)$ est définissable sur le corps de définition de X (cf. [**42, 30**]).

3. Variété de Picard. — On sait associer à X un second tore complexe $\mathrm{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathscr{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z})$ appelé variété de Picard de X. Comme $H^1(X, \mathscr{O}_X) = \overline{\Omega^1(X)}$ et $H^1(X, \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$, ce tore est le dual de $\mathrm{Alb}(X)$ et donc est algébrisable. Si on utilise la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X^* \longrightarrow 0$$

et que l'on passe à la suite exacte longue de cohomologie associée, on voit que $\mathrm{Pic}^0(X) = H^1(X, \mathscr{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z})$ s'identifie au noyau de

$$\delta_{\mathrm{an}} : H^1(X, \mathscr{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z}),$$

ce qui permet de voir $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme l'ensemble des diviseurs cohomologiquement équivalent à 0 modulo les diviseurs des fonctions rationnelles ou comme l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites dont la première classe de Chern est nulle. En plus de ces deux descriptions algébriques, on peut aussi (cf. proposition I.6.16) décrire $\mathrm{Pic}^0(X)$ comme le groupe des extensions de $\mathrm{Alb}(X)$ par $\mathbf{G}_m$.

Proposition I.5.14. — *Si X est une courbe algébrique propre et lisse, alors les variétés abéliennes* $\mathrm{Alb}(X)$ *et* $\mathrm{Pic}^0(X)$ *sont toutes les deux naturellement isomorphes à la jacobienne J de X.*

Démonstration. — On a déjà remarqué que J était la variété d'Albanese de X. Si $P_0 \in X$, on peut considérer l'application qui à $P \in X$ associe l'image de $P - P_0 \in \mathrm{Div}^0(X)$ dans $\mathrm{Pic}^0(X)$. Cette application est holomorphe et d'après la propriété universelle de la variété d'Albanese, cette application se factorise à travers la jacobienne J de X et il existe une unique application $f : J \to \mathrm{Pic}^0(X)$ telle que, si $P \in X$, alors $f(\int_{P_0}^P \vec{\omega}) = P - P_0$. Le théorème d'Abel ou, plus exactement, le corollaire I.4.11 se traduit par le fait que f est un isomorphisme.

Proposition I.5.15. — *Si A est la variété d'Albanese de X et $a : X \to A$ est un morphisme d'Albanese, alors a^* induit un isomorphisme canonique de* $\mathrm{Pic}^0(A)$ *sur* $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration. — a^* induit des isomorphismes canoniques

$$\overline{\Omega^1(A)} \cong \overline{\Omega^1(X)} \quad \text{et} \quad H^1(A, \mathbf{Z}) \cong H^1(X, \mathbf{Z}),$$

ce qui permet de conclure.

Remarque I.5.16. — Supposons que X est une variété abélienne, ce qui fait que $\mathrm{Pic}^0(X)$ est la variété X^* duale de X. Par construction, l'espace tangent à l'origine de $\mathrm{Pic}^0(X)$ est $H^1(X, \mathscr{O}_X) = \overline{\Omega^1(X)}$ et donc $\Omega^1(X^*)$ qui est le dual de cet espace tangent est aussi le dual de $H^1(X, \mathscr{O}_X)$. De même,

$$H^1(X^*, \mathbf{C}) = \Omega^1(X^*) \oplus \overline{\Omega^1(X^*)} = \overline{\Omega^1(X)^*} \oplus \Omega^1(X)^*$$

est le dual de $H^1(X, \mathbf{C})$, d'où l'existence d'isomorphismes naturels

$$H^1_{\mathrm{dR}}(X^*) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*, \; H^1_{\mathrm{dR}}(X) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)^* \text{ et } \Omega^1(X) \cong H^1(X^*, \mathscr{O}_{X^*})^*,$$

que nous noterons tous ι_{an} car ils sont tous obtenus de manière analytique en utilisant la décomposition de Hodge. Nous verrons dans le paragraphe 5 comment algébriser la situation.

4. Questions de compatibilité. — Soit X une variété abélienne et soit, comme d'habitude, $\widehat{X}$ le revêtement universel de X. Comme $H_1(X, \mathbf{Z})$ est un réseau du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\widehat{X}$, on peut identifier $H^1(X, \mathbf{R})$ à l'espace des formes $\mathbf{R}$-linéaires de $\widehat{X}$ dans $\mathbf{R}$ et $H^1(X, \mathbf{C})$ à l'espace des applications $\mathbf{R}$-linéaires de $\widehat{X}$ dans $\mathbf{C}$. Maintenant, si ℓ est une application $\mathbf{R}$-linéaire de $\widehat{X}$ dans $\mathbf{C}$, la forme différentielle $d\ell$ est invariante sur $\widehat{X}$ (et en particulier invariante par translation par un élément de $H_1(X, \mathbf{Z})$) et donc est l'image inverse d'une forme invariante sur X que nous noterons encore $d\ell$. L'application qui, à ℓ associe $d\ell$ est un isomorphisme de $H^1(X, \mathbf{C})$ sur l'espace des formes $\mathscr{C}^\infty$ invariantes sur X, l'image réciproque d'une forme invariante ω étant la forme linéaire dont la restriction à $H_1(X, \mathbf{Z})$ est la forme $u \to \int_u \omega$. Nous noterons $\beta(\ell)$ la partie de type $(0,1)$ de $d\ell$; c'est un élément de $\overline{\Omega^1(X)}$ et on a $\mathrm{pr}_X^* \beta(\ell) = \overline{\partial}\ell$.

Proposition I.5.17

(i) *L'application $\beta : H^1(X, \mathbf{C}) \to \overline{\Omega^1(X)}$ ainsi définie coïncide avec l'application naturelle de $H^1(X, \mathbf{C})$ dans $H^1(X, \mathscr{O}_X) \cong \overline{\Omega^1(X)}$.*

(ii) *Par restriction, β induit un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de $H^1(X, \mathbf{R})$ sur $\overline{\Omega^1(X)}$; l'isomorphisme inverse étant, modulo l'identification*

$$H^1(X, \mathbf{R}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{R}),$$

celui qui, à une forme ω, associe la forme linéaire $u \to \int_u (\omega + \overline{\omega})$.

Démonstration. — L'application qui, à une forme différentielle $\mathscr{C}^\infty$ associe sa partie de type $(0,1)$, induit le diagramme commutatif de faisceaux

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{X,\mathscr{C}^\infty} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \ker(d : \Omega^1_{X,\mathscr{C}^\infty} \to \Omega^2_{X,\mathscr{C}^\infty}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{X,\mathrm{an}} \arrow[r, "\overline{\partial}"] & \mathscr{O}_{X,\mathscr{C}^\infty} \arrow[r] & \ker(\overline{\partial} : \Omega^{0,1}_{X,\mathscr{C}^\infty} \to \Omega^{0,2}_{X,\mathscr{C}^\infty}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et, en passant aux suites exactes de cohomologie, l'application naturelle de $H^1(X, \mathbf{C})$ dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. On en déduit le (i). Le (ii) quant à lui, vient de ce que, si α est une forme harmonique réelle, sa partie de type $(1,0)$ est la conjuguée complexe de celle de type $(0,1)$.

Soit D un diviseur cohomologiquement équivalent à 0 et soit θ_D la fonction thêta normalisée asociée à D. Comme D est supposé cohomologiquement trivial, on a $E_D = 0$ et l'application α_D fournie par le théorème I.3.10 est un morphisme de $H_1(X, \mathbf{Z})$ dans $\mathbf{C}^*$. Il existe alors $\ell_D \in \operatorname{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})$ bien défini à un élément de $H^1(X, \mathbf{Z})$ près tel que l'on ait $\alpha_D(u) = e^{2i\pi \ell_D(u)}$ quel que soit $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$. La proposition I.5.17 permet de montrer le résultat suivant.

Proposition I.5.18. — *L'image de ℓ_D par l'application β représente la classe de D dans* $\operatorname{Pic}^0(X) \cong \overline{\Omega^1(X)}/\beta(H^1(X, \mathbf{Z}))$.

5. Le fibré de Poincaré. — Soit $\langle\ ,\ \rangle : H^1(X, \mathbf{Z}) \times H_1(X, \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$ l'accouplement canonique et soit E_P la forme bilinéaire alternée sur $\Lambda = H^1(X, \mathbf{Z}) \oplus H_1(X, \mathbf{Z})$ donnée par la formule

$$E_P((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \langle u_1, v_2 \rangle - \langle u_2, v_1 \rangle.$$

On peut aussi voir $u \in H^1(X, \mathbf{Z})$ comme un élément de $\operatorname{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{R})$ et $v \in H_1(X, \mathbf{Z})$ comme l'élément de $\Omega^1(X)^*$ qui à ω associe $\int_v \omega$. Tout ceci permet, en utilisant l'application β définie ci-dessus, d'écrire $\langle u, v \rangle$ sous la forme $v(\overline{\beta(u)}) + \overline{v(\overline{\beta(u)})}$. On en déduit le fait que, si $V = \overline{\Omega^1(X)} \oplus \Omega^1(X)^*$, alors E_P est la restriction à Λ de la partie imaginaire de la forme hermitienne H_P définie par

$$H_P((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = 2i(\overline{y_1(\overline{x_2})} - y_2(\overline{x}_1)).$$

Posons de plus $\alpha_P(u, v) = e^{i\pi \langle u, v \rangle}$. Comme $\langle u_1, v_2 \rangle \in \mathbf{Z}$, on a

$$\alpha_P(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = e^{2i\pi E_P((u_1, v_1), (u_2, v_2))} \alpha_P(u_1, v_1) \alpha_P(u_2, v_2)$$

et au couple (E_P, α_P) est associé, via le théorème d'Appell-Humbert, un fibré en droites P sur $V/\Lambda = X^* \times X$ appelé fibré de Poincaré.

Proposition I.5.19

(i) *La restriction de P à $X^* \times \{0\}$ est triviale.*

(ii) *Si $\alpha \in X^*$, la restriction de P à $\{\alpha\} \times X$ est cohomologiquement triviale et sa classe dans* $\operatorname{Pic}^0(X) = X^*$ *est α.*

Démonstration. — Soit θ_P une fonction thêta normalisée associée à P et $\omega \in \overline{\Omega^1(X)}$ dont l'image modulo $\beta(H^1(X, \mathbf{Z}))$ est égale à α. La restriction de θ_P à $\{\omega\} \times \Omega^1(X)^*$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\theta_P((\omega, y) + (0, v)) = e^{2i\pi \overline{v(\overline{\omega})}} \theta_P((\omega, y)), \quad \text{si} \quad v \in H_1(X, \mathbf{Z}).$$

On en déduit le fait que la restriction P_α de P à $\alpha \times X$ est cohomologiquement triviale et, comme $\overline{v(\overline{\omega})} = \overline{\int_v \overline{\omega}} = \int_v \omega$, la classe de P_α dans $\overline{\Omega^1(X)}/\beta(H^1(X, \mathbf{Z}))$ n'est autre, d'après la proposition I.5.18, que l'image de ω modulo $\beta(H^1(X,\mathbf{Z}))$ c'est-à-dire α. On montre de la même manière que la restriction de P à $X^* \times \{0\}$ est triviale, ce qui permet de conclure.

Remarque I.5.20. — Un peu plus d'effort permettrait de montrer que les conditions de la proposition I.5.19 caractérisent P.

Soit $\omega_, \dots, \omega_d$ une base de $\Omega^1(X)$ et $\omega_1^*, \dots, \omega_d^*$ la base de $\Omega^1(X)^*$ duale de $\omega_1, \dots, \omega_d$. Si $1 \leq i \leq d$, on pose de plus $\omega_{X,i} = \omega_i$ et $\omega_{X^*,i} = \overline{\omega_i^*}$, ce qui fait que, si $Y \in \{X, X^*\}$, alors les $\omega_{Y,i}$ forment une base de $\Omega^1(Y)$. Si $Y \in \{X, X^*\}$, soit $\partial_{Y,1}, \dots, \partial_{Y,d}$ la base des dérivations invariantes sur Y duale de la base $\omega_{Y,1}, \dots, \omega_{Y,d}$. On considère aussi les $\partial_{Y,i}$ comme des dérivations invariantes sur le revêtement universel $\widehat{Y}$ de Y.

Soit θ_P une fonction thêta normalisée associée à P. Si $1 \leq j \leq d$, soient $F_{Y,j} = \partial_{Y,j} \log \theta_P$. La forme différentielle $dF_{Y,j}$ est l'image inverse sur $\widehat{X}^* \times \widehat{X}$ d'une forme différentielle $\eta_{X,j}$ de seconde espèce sur $X^* \times X$ et on a, d'après la remarque I.3.13,

$$[P]_{\mathrm{dR}} = -\sum_{j=1}^{d} \omega_{X,j} \cup \eta_{X,j} - \sum_{j=1}^{d} \omega_{X^*,j} \cup \eta_{X^*,j}. \tag{I.5.21}$$

L'équation fonctionnelle de θ_P et la forme particulière de H_P font que, si $Y \in \{X, X^*\}$, si $1 \leq j \leq d$ et si $u \in H_1(Y,\mathbf{Z}) \subset H_1(X \times X^*, \mathbf{Z})$, alors $F_{Y,j}$ est invariante par translation par u et donc son image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X \times X^*)$ atterrit dans $H^1_{\mathrm{dR}}(Y^*)$. On en déduit en particulier le fait que $[P]_{\mathrm{dR}}$ appartient au sous-espace $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)$ de $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$ et donc nous fournit un morphisme de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ sur le dual de $H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)$ qui est un isomorphisme car H_P est non dégénérée. Cet isomorphisme sera noté ι_{dR} et la formule I.5.21 se traduit par le fait que ι_{dR} envoie la base $-\omega_{X,1}, \dots, -\omega_{X,d}, \eta_{X^*,1}, \dots, \eta_{X^*,d}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ sur la base de $H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)^*$ duale de la base $\eta_{X,1}, \dots, \eta_{X,d}, \omega_{X^*,1}, \dots, \omega_{X^*,d}$. La restriction de ι_{dR} à $\Omega^1(X)$ permet d'identifier $\Omega^1(X)$ au dual de $H^1(X^*, \mathscr{O}_{X^*})$ et, par définition ou presque, $-\sum_{j=1}^d \eta_{X,j} \otimes \omega_{X,j}$ est, modulo cette identification, l'identité de $H^1(X^*, \mathscr{O}_{X^*})^*$.

I.6. Extensions de variétés abéliennes

1. Fibrés en groupes algébriques. — Si X est une variété algébrique, on note $\mathscr{O}_X$ le faisceau structural de X et $\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}$ le faisceau structural de X considéré comme une variété analytique. Si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique commutatif, on note $\mathbf{G}(\mathscr{O}_X)$ (resp. $\mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}})$) le faisceau qui, à un ouvert U de X pour la topologie de Zariski (resp. la topologie usuelle), associe le groupe des applications holomorphes de U dans $\mathbf{G}$.

Définition I.6.1. — Si X est une variété algébrique et $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique commutatif, un morphisme $Y \xrightarrow{\pi} X$ de variétés algébriques (resp. analytiques) est dit être un $\mathbf{G}$-fibré algébrique (resp. analytique) au-dessus de X si

(i) Y est muni d'une action de $\mathbf{G}$, ce qui signifie que l'on a un morphisme $Y \times \mathbf{G} \to Y$ de variétés algébriques (resp. analytiques), associant au couple $(y, g) \in Y \times \mathbf{G}$ l'élément $y +_{\mathbf{G}} g$ de Y, vérifiant les conditions suivantes

(a) $\pi(y +_{\mathbf{G}} g) = \pi(y)$, quels que soient $y \in Y$ et $g \in \mathbf{G}$,

(b) $y +_{\mathbf{G}} 0_{\mathbf{G}} = y$ quel que soit $y \in Y$,

(c) $y +_{\mathbf{G}} (g +_{\mathbf{G}} g') = (y +_{\mathbf{G}} g) +_{\mathbf{G}} g'$ quels que soient $y \in Y$ et $g, g' \in \mathbf{G}$.

(ii) Si $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x pour la topologie de Zariski (resp. la topologie usuelle) et une section holomorphe $s_U : U \to Y$ de π tels que l'application qui, à $(x, g) \in U \times \mathbf{G}$ associe $s_U(x) +_{\mathbf{G}} g$ soit un isomorphisme de $U \times \mathbf{G}$ sur $\pi^{-1}(U)$.

Si $Y \xrightarrow{\pi} X$ est un $\mathbf{G}$-fibré algébrique (resp. analytique) au-dessus de X, on peut donc trouver un recouvrement ouvert $\mathscr{U}$ pour la topologie Zariski (resp. usuelle) tel que pour tout $U \in \mathscr{U}$, le morphisme π admette une section holomorphe $s_U : U \to Y$. D'autre part, si $x \in X$ et $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(a)$, il existe un unique élément g de $\mathbf{G}$ tel que l'on ait $y_2 = y_1 +_{\mathbf{G}} g$, autrement dit, la fibre au-dessus de a est un espace homogène principal sous l'action de $\mathbf{G}$. Cela implique que, si U et V sont deux éléments de $\mathscr{U}$, il existe une (unique) fonction holomorphe $f_{U,V}$ sur $U \cap V$ à valeurs dans $\mathbf{G}$ telle que si $x \in U \cap V$, alors $s_U(x) = s_V(x) +_{\mathbf{G}} f_{U,V}(x)$. Les $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$ forment un cocycle de Čech à valeurs dans $\mathbf{G}(\mathscr{O}_X)$ (resp. $\mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}})$) pour le recouvrement $\mathscr{U}$ et si on change les s_U, ce cocycle est modifié par un cobord, ce qui permet d'associer au fibré $Y \xrightarrow{\pi} X$ une classe bien définie dans $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_X))$ (resp. $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}))$) ne dépendant que de la classe d'isomorphisme du fibré.

Réciproquement, à partir d'un tel cocycle, on construit un $\mathbf{G}$-fibré au-dessus de X en recollant les $(U \times \mathbf{G})_{U \in \mathscr{U}}$ en identifiant les éléments (x, g) de $U \times \mathbf{G}$ et $(x, g +_{\mathbf{G}} f_{U,V}(x))$ de $V \times \mathbf{G}$ si $x \in U \cap V$, ce qui nous donne le résultat suivant.

Proposition I.6.2. — *Si X est une variété algébrique et $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique commutatif, l'application qui, à une classe d'isomorphismes de fibrés algébriques (resp. analytiques) en $\mathbf{G}$ au-dessus de X, associe sa classe dans $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_X))$, (resp. $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}))$) est une bijection.*

Un fibré algébrique au-dessus de X donne naissance de manière évidente à un fibré analytique et cette application induit en passant aux classes de fibrés l'application naturelle de $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_X))$ dans $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}))$. Si on suppose de plus que X est compacte et $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$, cette application est un isomorphisme d'après GAGA. En effet, dans le cas $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$, le faisceau $\mathbf{G}(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X$ est cohérent et l'isomorphisme en question est un cas particulier du principe GAGA général ([**41**],proposition 17 pour le cas projectif et [**29**] pour le cas général), et dans le cas $\mathbf{G}_m$, on a $\mathbf{G}_m(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X^*$ et $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ (resp. $H^1(X, \mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}^*)$) classifie les fibrés en droites algébriques (resp. analytiques) au-dessus de X et comme un tel fibré est donné par un faisceau localement libre de rang 1 et donc cohérent, on peut de nouveau utiliser le principe GAGA (cf. [**41**], prop. 18, pour les détails). L'isomorphisme ci-dessus se traduit de la manière suivante.

Proposition I.6.3. — *Si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$, si X est une variété algébrique propre et lisse et si $Y \xrightarrow{\pi} X$ est un $\mathbf{G}$-fibré analytique en $\mathbf{G}$ au-dessus de X, il existe une unique structure de variété algébrique sur Y telle que π soit un morphisme de variétés algébriques et $Y \xrightarrow{\pi} X$ est alors un $\mathbf{G}$-fibré algébrique au-dessus de X.*

Remarque I.6.4. — La proposition précédente ne signifie pas qu'il existe une unique structure de variété algébrique sur Y (cf. remarque I.7.6)

2. Formes différentielles et fibrés en groupes. — Dans tout ce paragraphe, on suppose que X est une variété algébrique propre et lisse et la proposition I.6.3 nous permet d'identifier fibrés algébriques et fibrés analytiques en $\mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}_m$ au-dessus de X ; nous passerons donc librement d'une notion à l'autre sans plus de commentaire. Notre but est de décrire ces fibrés en termes d'intégrales de seconde et troisième espèces.

Pour traiter simultanément les formes différentielles de seconde et troisième espèce, nous allons d'une part associer à une telle forme η un groupe algébrique $\mathbf{G}_\eta$ qui sera le groupe $\mathbf{G}_a$ (resp. $\mathbf{G}_m$) si η est de seconde (resp. troisième) espèce et d'autre part identifier $\mathbf{G}_m$ à $\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ via l'application logarithme, ce qui nous amène à introduire la définition suivante.

Définition I.6.5. — Si X est une variété algébrique et U est un ouvert de Zariski de X, une fonction $f : U \to \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ est dite rationnelle si la fonction $\exp f : U \to \mathbf{C}^*$ est une fonction rationnelle.

Il faut faire attention au fait qu'avec ces conventions, la différentielle d'une fonction à valeurs dans $\mathbf{G}_m = \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ correspond à la différentielle logarithmique de la fonction à valeurs dans $\mathbf{C}^*$. Le lecteur qui ne se sent pas à l'aise avec ces conventions pourra remplacer $\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ par $\mathbf{C}^*$ et les intégrales de troisième espèce par leurs exponentielles dans tout ce qui suit. Un exemple typique de ce que cette convention permet de faire est la réunion des propositions I.3.14 et I.3.15 et de leurs démonstrations en l'énoncé suivant.

Proposition I.6.6. — *Soit X une variété abélienne. Si η est une forme différentielle de seconde ou troisième espèce sur X, il existe une fonction rationnelle f_η sur $X \times X$ à valeurs dans $\mathbf{G}_\eta$, unique à addition d'une constante près, telle que l'on ait $df_\eta = \delta\eta$. De plus, cette fonction vérifie génériquement la relation $f_\eta(x,y) = f_\eta(y,x)$ et la relation de cocycle*

$$f_\eta(x,y) -_{\mathbf{G}_\eta} f_\eta(x +_X y, z) +_{\mathbf{G}_\eta} f_\eta(x, y +_X z) -_{\mathbf{G}_\eta} f_\eta(x,y) = 0_{\mathbf{G}_\eta}$$

et est obtenue en descendant à $X \times X$ la fonction sur $\widehat{X} \times \widehat{X}$ définie par la formule $\int_a^{x+y} \mathrm{pr}_X^* \eta -_{\mathbf{G}_\eta} \int_a^x \mathrm{pr}_X^* \eta -_{\mathbf{G}_\eta} \mathrm{pr}_X^* \eta$, où a est n'importe quel point de $\widehat{X}$ en lequel $\mathrm{pr}_X^* \eta$ est définie.

Revenons au cas général. Si η est une forme de seconde ou troisième espèce sur X, on peut lui associer une classe dans $H^1(X, \mathbf{G}_\eta(\mathscr{O}_X))$: si η est de seconde espèce, on utilise la proposition I.1.17 et la projection de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ sur $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ et si η est de troisième espèce, on lui associe l'élément $[\mathrm{Div}(\eta)]_{\mathrm{alg}}$ de $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. D'autre part, on appelle présentation de η la donnée $(\mathscr{U}, (\eta_U)_{U \in \mathscr{U}})$, où $\mathscr{U}$ est un recouvrement ouvert fini de X pour la topologie de Zariski ne contenant pas l'ensemble vide et, si $U \in \mathscr{U}$, η_U est une forme différentielle holomorphe sur U telle que $\eta_U - \eta$ soit la différentielle d'une fonction rationnelle à valeurs dans $\mathbf{G}_\eta$.

Soit $\widehat{X}$ le revêtement universel de X. Nous noterons pr_X la projection naturelle de $\widehat{X}$ sur X. Soient η une forme différentielle de seconde ou troisième espèce sur X, U_0 un ouvert de Zariski de X sur lequel η est holomorphe, $a \in U_0$ et $\widetilde{a} \in \mathrm{pr}_X^{-1}(\{a\})$. on fait agir $u \in \pi_1(X, a)$ sur $\mathbf{G}_\eta$ par translation par $\int_u \eta$. Le quotient X_η de $\widehat{X} \times \mathbf{G}_\eta$ par l'action diagonale de $\pi_1(X, a)$ est muni d'une projection naturelle π sur X qui fait de $X_\eta \xrightarrow{\pi} X$ un fibré en $\mathbf{G}_\eta$ au-dessus de X. D'autre part, l'application qui à $x \in \mathrm{pr}_X^{-1}(U_0)$ associe l'image du couple $(x, \int_{\widetilde{a}}^x \mathrm{pr}_X^* \eta) \in \widehat{X} \times \mathbf{G}_\eta$ dans X_η ne dépend que de $\mathrm{pr}_X(x)$ et donc nous définit une section holomorphe $s_\eta : U_0 \to X_\eta$.

Proposition I.6.7

Sous les hypothèses précédentes, la classe de X_η dans $H^1(X, \mathbf{G}_\eta(\mathscr{O}_X))$ est l'image de η et s_η est une section rationnelle de π.

Démonstration. — Soit $(\mathscr{U}, (\eta_U)_{U \in \mathscr{U}})$ une présentation de η. Soit $a \in \cap_{U \in \mathscr{U}} U$. Si $U, V \in \mathscr{U}$, la fonction $f_{U,V}(x) = \int_a^x (\eta_U - \eta_V)$ est une fonction à valeurs dans $\mathbf{G}_\eta$, rationnelle sur X, holomorphe sur $U \cap V$ et les $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$ forment un cocyle de Čech repésentant la classe de η dans $H^1(X, \mathbf{G}_\eta(\mathscr{O}_X))$. D'autre part, si $x \in U \cap V$, on a $s_{U,\eta_U}(x) = s_{V,\eta_V}(x) +_{\mathbf{G}_\eta} f_{U,V}(x)$, ce qui prouve que les $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$ représentent aussi la classe de X_η dans $H^1(X, \mathbf{G}_\eta(\mathscr{O}_X))$.

Quitte à raffiner $\mathscr{U}$, on peut supposer que si $U \in \mathscr{U}$, il existe une section rationnelle $s'_U : U \to Y_\eta$ de π. On a alors $s'_U = s'_V +_{\mathbf{G}_\eta} g_{U,V}$ sur $U \cap V$, où les $(g_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$ forment un cocyle de Čech représentant la classe de X_η dans $H^1(X, \mathbf{G}_\eta(\mathscr{O}_X))$. On en déduit l'existence de fonctions rationnelles $(h_U)_{U \in \mathscr{U}}$ avec h_U holomorphe sur U telles que l'on ait $f_{U,V} -_{\mathbf{G}_\eta} g_{U,V} = h_U -_{\mathbf{G}_\eta} h_V$ sur $U \cap V$. On a alors $s_U = s'_U +_{\mathbf{G}_\eta} h_U +_{\mathbf{G}_\eta} c_U$, où c_U est la restriction à U d'une fonction holomorphe c de X dans $\mathbf{C}$. Comme X est compacte, cette fonction est constante, ce qui montre que s_U est une section rationnelle. Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que l'on peut imposer $U_0 \in \mathscr{U}$ et $\eta_{U_0} = \eta$.

Remarque I.6.8. — Dans le cas où X est une variété abélienne, $\widehat{X}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel et donc un groupe de Lie complexe et X_η acquiert une structure de groupe de Lie commutatif, ce qui fait de la suite

$$0 \longrightarrow \mathbf{G}_\eta \longrightarrow X_\eta \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes de Lie commutatifs complexes.

Remarque I.6.9. — Comme l'application qui à $u \in \pi_1(X,a)$ associe $\int_u \eta$ se factorise à travers $H_1(X,\mathbf{Z})/\text{tors}$, on peut prendre pour $\widehat{X}$ le le revêtement abélien de X de groupe de Galois $H_1(X,\mathbf{Z})/\text{tors}$ au lieu du revêtement universel pour faire la construction de X_η.

3. Extensions de variétés abéliennes. — Soient X une variété abélienne et $\mathbf{G}$ un groupe algébrique commutatif, que l'on peut aussi voir comme un groupe de Lie commutatif complexe.

Définition I.6.10. — On appelle extension de X par $\mathbf{G}$ une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow Y \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

de groupes de Lie commutatifs complexes. On commettra souvent l'abus de noter $Y \xrightarrow{\pi} X$ ou même tout simplement Y cette extension.

Si Y et Y' sont deux extensions de X par $\mathbf{G}$, on en fabrique une troisième en prenant pour Y" le quotient de

$$\{(x,x') \in Y \times Y' \mid \pi(x) = \pi'(x')\} \times \mathbf{G}$$

par

$$\{(y,y',y") \in \mathbf{G}^3 \mid y" = y + y'\}.$$

L'ensemble $\operatorname{Ext}(X,\mathbf{G})$ des classes d'isomorphismes d'extension de X par $\mathbf{G}$ muni de la loi de composition ci-dessus est un groupe dont l'élément neutre est l'extension triviale $X \times \mathbf{G}$.

Remarque I.6.11. — Si $Y \xrightarrow{\pi} X$ est une extension de X par un groupe algébrique $\mathbf{G}$, on peut on peut aussi voir $Y \xrightarrow{\pi} X$ comme un $\mathbf{G}$-fibré au-dessus de X, ce qui permet de lui associer une classe dans $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\text{an}}))$.

Si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$, on note fib l'application de $\operatorname{Ext}(X,\mathbf{G})$ dans $H^1(X,\mathbf{G}(\mathscr{O}_X))$ l'application ainsi définie. Cette application sera étudiée en détail au §5.

4. Systèmes de facteurs. — Soient X une variété abélienne et $\mathbf{G}$ un groupe algébrique commutatif. On appelle $\mathbf{G}$-système de facteurs rationnel et symétrique sur X toute fonction rationnelle $f : X \times X \to \mathbf{G}$ telle que l'on ait génériquement $f(x,y) = f(y,x)$ et qui vérifie l'identité générique

$$f(y,z) -_{\mathbf{G}} f(x +_X y, z) +_{\mathbf{G}} f(x, y +_X z) -_{\mathbf{G}} f(x,y) = 0_{\mathbf{G}}. \tag{I.6.12}$$

L'ensemble des $\mathbf{G}$-systèmes de facteurs rationnels et symétriques sera noté $\mathrm{SF}(X, \mathbf{G})$. Si g est une fonction méromorphe sur X, la fonction $\delta g : X \times X \to \mathbf{G}$ définie par $\delta g(x,y) = g(x +_X y) -_{\mathbf{G}} g(x) -_{\mathbf{G}} g(y)$ est un $\mathbf{G}$-système de facteurs rationnel et symétrique sur X ; un tel système sera dit trivial. En particulier, une fonction constante est un système de facteurs trivial. On note $H^2(X, \mathbf{G})$ le groupe des classes de systèmes de facteurs additifs rationnels et symétriques modulo les systèmes de facteurs triviaux.

D'après la proposition I.6.6, si η est une forme différentielle de seconde ou troisième espèce sur X, il existe un $\mathbf{G}_\eta$-système de facteurs rationnel et symétrique f_η tel que l'on ait $df_\eta = \delta\eta$ et f_η est bien déterminé à addition d'une constante près. On note sf les applications de $\mathrm{DSE}(X)$ et $\mathrm{DTE}(X)$ dans $\mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_a)/\mathbf{C}$ et $\mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_m)/(\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z})$ ainsi définies.

Proposition I.6.13. — *Les suites*

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \mathrm{DSE}(X) \xrightarrow{\mathrm{sf}} \mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_a)/\mathbf{C} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \mathrm{DTE}(X) \xrightarrow{\mathrm{sf}} \mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_m)/(\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

sont exactes.

Démonstration. — La seule chose non évidente est la surjectivité des applications sf. Soit $\omega_1, \dots, \omega_d$ une base de $\Omega^1(X)$ et $\partial_1, \dots, \partial_d$ la base de l'espace des dérivations d'ordre 1 invariante sur X duale de $\omega_1, \dots, \omega_d$. On considère les ∂_i aussi comme des dérivations invariantes sur $\widehat{X}$. Si $n \in \mathbf{N}$, on définit pour $1 \le m \le n$ et $1 \le i \le d$ l'opérateur $\partial_{m,i}$ sur X^n et la forme différentielle $\omega_{m,i}$ comme les images inverses de ∂_i et ω_i par la projection de X^n sur le m-ième facteur.

Soit f un $\mathbf{G}$-système de facteurs rationnel et symétrique sur X. Si on applique $\partial_{3,i}$ puis $\partial_{2,j}$ à l'identité I.6.12, on obtient les deux identités

$$\partial_{2,i} f(y,z) - \partial_{2,i} f(x +_X y, z) + \partial_{2,i} f(x, y +_X z) = 0 \tag{I.6.14}$$

$$\partial_{1,j}\partial_{2,i} f(y,z) - \partial_{1,j}\partial_{2,i} f(x +_X y, z) + \partial_{2,j}\partial_{2,i} f(x, y +_X z) = 0, \tag{I.6.15}$$

d'où l'on déduit, en échangeant les rôles de i et j et en utilisant le fait que l'opérateur $\partial_{2,j}\partial_{2,i} - \partial_{2,i}\partial_{2,j}$ est identiquement nul, l'identité

$$(\partial_{1,j}\partial_{2,i} - \partial_{1,i}\partial_{2,j}) f(x +_X y, z) = (\partial_{1,j}\partial_{2,i} - \partial_{1,i}\partial_{2,j}) f(y,z)$$

qui implique que $(\partial_{1,j}\partial_{2,i} - \partial_{1,i}\partial_{2,j}) f(x + y, z)$ ne dépend pas de x et comme elle s'annule en $x = z - y$ grâce à la symétrie de f, elle est identiquement nulle.

Soit alors D un diviseur de $X \times X$ contenant les pôles de f et $a \in X$ tel que D ne contienne pas $X \times \{a\}$. On déduit de ce qui précède le fait que la forme différentielle $\eta_a = \sum_{i=1}^d \partial_{2,i} f(x -_X a, a)\omega_i$ est une forme différentielle fermée. Si $\eta = \sum_{i=1}^d f_i \omega_i$ est une forme différentielle sur X, alors $\delta\eta$ est donné par la formule

$$\delta\eta = \sum_{i=1}^d \Big(\big(f_i(x +_X y) - f_i(x)\big)\omega_{1,i} + \big(f_i(x +_X y) - f_i(y)\big)\omega_{2,i} \Big).$$

On en déduit la formule

$$\begin{aligned} \delta\eta_a - df = \sum_{i=1}^d \Big(\partial_{2,i} f(x +_X y -_X a, a) - \partial_{2,i} f(x -_X a, a) - \partial_{1,i} f(x, y) \Big)\omega_{1,i} \\ + \sum_{i=1}^d \Big(\partial_{2,i} f(x +_X y -_X a, a) - \partial_{2,i} f(y -_X a, a) - \partial_{2,i} f(x, y) \Big)\omega_{2,i} \end{aligned}$$

et l'identité I.6.15 utilisée pour le triplet $(x -_X a, y, a)$ au lieu de (x, y, z) montre que, si $1 \le i \le d$, la composante de $\delta\eta_a - df$ sur $\omega_{2,i}$ est identiquement nulle et comme la forme différentielle $\delta\eta_a - df$ est symétrique en les deux facteurs, cela implique qu'elle est nulle et donc $df = \delta\eta_a$.

Cette identité montre que η_a a des singularités du même type que df ; en particulier, η_a est de seconde (resp. troisième) espèce si et seulement si df est de seconde (resp. troisième) espèce, c'est-à-dire si et seulement si $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ (resp. $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$). Finalement, l'identité $df = \delta\eta_a$ implique $f = \mathrm{sf}(\eta_a)$, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Les diagrammes

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \mathbf{C}(X)/\mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "d"] & \mathbf{C}(X)/\mathbf{C} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] & \mathrm{DSE}(X) \arrow[r, "\mathrm{sf}"] & \mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_a)/\mathbf{C} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \mathbf{C}(X)^*/\mathbf{C}^* \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "d\log"] & \mathbf{C}(X)^*/\mathbf{C}^* \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] & \mathrm{DTE}(X) \arrow[r, "\mathrm{sf}"] & \mathrm{SF}(X, \mathbf{G}_m)/\mathbf{C}^* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

sont commutatifs. On en déduit, en utilisant la suite exacte I.1.7, le corollaire I.1.16 et le fait que $H^2(X, \mathbf{Z})$ n'a pas de torsion et donc que $\mathrm{Div}^\tau(X) = \mathrm{Div}^0(X)$, des isomorphismes (encore notés sf)

$$\frac{\mathrm{DTE}(X)}{\Omega^1(X)+\{df, f\in\mathbf{C}(X)\}} \cong H^1(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{sf}} H^2(X,\mathbf{G}_a),$$

$$\frac{\mathrm{DSE}(X)}{\Omega^1(X)+\{\frac{df}{f},\ f\in\mathbf{C}(X)^*\}} \cong \frac{\mathrm{Div}^0(X)}{\{\mathrm{Div}(f),\ f\in\mathbf{C}(X)^*\}} = \mathrm{Pic}^0(X) \xrightarrow{\mathrm{sf}} H^2(X,\mathbf{G}_m).$$

5. Extensions et systèmes de facteurs. — Soit $\mathbf{G}=\mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G}=\mathbf{G}_m$. Soit $Y\xrightarrow{\pi}X$ une extension de X par $\mathbf{G}$ et soit $s : X\to Y$ une section rationnelle de π (l'existence d'une telle section est une conséquence de la proposition I.6.3). L'application qui à $(x,y)\in X\times X$ associe $\delta s(x,y)=s(x+_X y)-_Y s(x)-_Y s(y)$ est un système de facteurs rationnel et symétrique sur X. D'autre part, si $s' : X\to Y$ est une autre section rationnelle de π, alors $g=s'-_Y s$ est une fonction rationnelle de X dans $\mathbf{G}$ et $\delta s'=\delta s+_{\mathbf{G}}\delta g$, ce qui nous permet d'associer à une extension de X par $\mathbf{G}$ un élément bien défini de $H^2(X,\mathbf{G})$ et l'application δ de $\mathrm{Ext}(X,\mathbf{G})$ dans $H^2(X,\mathbf{G})$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

Proposition I.6.16. — *L'image de* $\mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_m)$ *dans* $H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$ *par* fib *est incluse dans* $\mathrm{Pic}^0(X)$. *De plus, les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_a) \arrow[rr, "\mathrm{fib}"] \arrow[dr, "\delta"'] & & H^1(X,\mathcal{O}_X) \arrow[dl, "\mathrm{sf}"] \\ & H^2(X,\mathbf{G}_m) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_m) \arrow[rr, "\mathrm{fib}"] \arrow[dr, "\delta"'] & & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[dl, "\mathrm{sf}"] \\ & H^2(X,\mathbf{G}_m) & \end{tikzcd}$$

sont commutatifs et tous les morphismes qui les composent sont des isomorphismes

Démonstration. — La démonstration nécessite plusieurs résultats préliminaires.

Lemme I.6.17

(i) *Les applications*

$$\mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_a)\xrightarrow{\mathrm{fib}} H^1(X,\mathcal{O}_X) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_m)\xrightarrow{\mathrm{fib}} H^1(X,\mathcal{O}_X^*)$$

sont des morphismes de groupes injectifs.

(ii) *Les applications*

$$\mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_a)\xrightarrow{\delta} H^2(X,\mathbf{G}_a) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ext}(X,\mathbf{G}_m)\xrightarrow{\delta} H^2(X,\mathbf{G}_m)$$

sont des morphismes de groupes injectifs.

Le fait que ces applications soient des morphismes de groupes est plus ou moins immédiat sur la définition de la loi de groupe sur $\mathrm{Ext}(X, \mathbf{G})$. D'autre part, si $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique, une extension Y de X par $\mathbf{G}$ a pour image 0 dans $H^1(X, \mathbf{G}(\mathscr{O}_{X,\mathrm{an}}))$ si et seulement si il existe une section holomorphe s de X dans Y. Quitte à composer cette section avec la translation par $-_Y s(0_X)$, on peut de plus supposer que $s(0_X) = 0_Y$. L'application de $X \times X$ dans Y qui à (x, y) associe $s(x+_X y) -_Y s(x) -_Y s(y)$ est holomorphe et à valeurs dans $\mathbf{G}$ et dans le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$, comme X est compacte, cette application est constante et donc identiquement nulle puisque nulle en $(0_X, 0_X)$. Ceci implique que s est un morphisme de groupes et donc que $Y = X \times \mathbf{G}$. On en déduit l'injectivité des applications fib.

Passons à celle des applications δ. Si l'image d'une extension $Y \xrightarrow{\pi} X$ dans $H^2(X, \mathbf{G})$ est nulle c'est que l'on peut trouver une section rationnelle $s : X \to Y$ de π telle que l'on ait génériquement $s(x+_X y) = s(x)+_Y s(y)$. Cette dernière formule permet de prolonger s en un morphisme partout défini de X dans Y (il suffit, si U est un ouvert de Zariski non vide sur lequel s est définie de prendre $y \in U \cap (U -_Y x)$ et de poser $s(x) = s(x+_X y) -_Y s(y)$) et le morphisme obtenu ainsi est un morphisme de groupes, ce qui prouve comme ci-dessus que l'extension est triviale et termine la démonstration du lemme.

Lemme I.6.18. — *Si η est une forme différentielle de seconde ou troisième espèce, si X_η est l'extension de X par $\mathbf{G}_\eta$ de la remarque I.6.8 et si $s_\eta : X \to X_\eta$ est la section rationnelle de la proposition I.6.7, alors $\delta s_\eta = \mathrm{sf}(\eta)$.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de Zariski de X sur lequel η est holomorphe. Si on revient à la définition de s_η, et si $\widetilde{x}$ et $\widetilde{x}'$ sont des relèvements de x et x' dans $\widehat{X}$, on obtient

$$s_\eta(x+_X x') -_{X_\eta} s_\eta(x) -_{X_\eta} s_\eta(x') = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{x}+\widetilde{x}'} \mathrm{pr}_X^* \eta -_{\mathbf{G}_\eta} \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{x}} \mathrm{pr}_X^* \eta -_{\mathbf{G}_\eta} \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{x}'} \mathrm{pr}_X^* \eta$$

et la proposition I.6.6 permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition I.6.16. Dans le cas de $\mathbf{G}_a$. La surjectivité de l'application fib sur $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ est une conséquence de l'existence de l'extension X_η. On en déduit le fait que fib est un isomorphisme (l'application qui à η associe X_η permet d'ailleurs d'expliciter son inverse) et la commutativité du diagramme qui résulte du lemme I.6.18 implique, compte-tenu de ce que sf est un isomorphisme, que δ en est un aussi. Ceci permet de conclure dans le cas de $\mathbf{G}_a$.

Le cas de $\mathbf{G}_m$ est un peu plus délicat car fib n'est pas une surjection sur $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$, mais l'existence de l'extension X_η si η est une forme de troisième espèce montre que l'image de fib contient $\mathrm{Pic}^0(X)$. Notons (provisoirement) $\mathrm{Ext}(X, \mathbf{G}_m)^0$ l'image inverse de $\mathrm{Pic}^0(X)$ par l'application fib. La commutativité du diagramme obtenu en remplaçant $\mathrm{Ext}(X, \mathbf{G}_m)$ par $\mathrm{Ext}(X, \mathbf{G}_m)^0$ résulte comme précédemment du lemme I.6.18 et combinée avec le fait que sf est surjectif, elle implique que la restriction de

δ à $\mathrm{Ext}(X, \mathbf{G}_m)^0$ est surjective. On termine la démonstration en utilisant l'injectivité de δ.

Proposition I.6.19. — *Si X est une variété abélienne, $\mathbf{G} \in \{\mathbf{G}_a, \mathbf{G}_m\}$ et si*

$$0 \longrightarrow \mathbf{G} \longrightarrow Y \xrightarrow{\pi} X \longrightarrow 0$$

est une extension de X par $\mathbf{G}$, il existe une unique structure de variété algébrique sur Y faisant de π un morphisme de variétés algébriques. De plus, si on munit Y de cette structure de variété algébrique, alors l'addition devient un morphisme de variétés algébriques de $Y \times Y$ sur Y et la suite exacte ci-dessus devient une suite exacte de groupes algébriques commutatifs.

Démonstration. — L'unicité d'une structure de variété algébrique faisant de π un morphisme de variétés algébriques est un cas particulier de la proposition I.6.3. On peut supposer pour démontrer le reste de la proposition que Y est l'extension X_η de la remarque I.6.8, où η est une forme de seconde ou troisième espèce suivant que $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a$ ou $\mathbf{G} = \mathbf{G}_m$. Soit U un ouvert de Zariski de X sur lequel η est holomorphe. On dispose alors d'une section rationnelle $s_\eta : U \to X_\eta$ de l'application π et l'application qui à (x, g) associe $x +_{\mathbf{G}_\eta} g = x +_{X_\eta} g$ est un isomorphisme de varietés algébriques de $U \times \mathbf{G}_\eta$ sur $\pi^{-1}(U)$. Si on regarde ce que devient la loi d'addition sur X_η sur $U \times \mathbf{G}_\eta$, on obtient

$$\begin{aligned}(x, g) +_{X_\eta} (x', g') &= (s_\eta(x) +_{X_\eta} g) +_{X_\eta} (s_\eta(x'), g') \\ &= s_\eta(x +_X x') +_{X_\eta} \big(s_\eta(x) +_{X_\eta} s_\eta(x') -_{X_\eta} s_\eta(x +_X x') +_{X_\eta} g +_{X_\eta} g'\big) \\ &= \big(x +_X x', g +_{\mathbf{G}_\eta} g' -_{\mathbf{G}_\eta} \delta s_\eta(x, x')\big)\end{aligned}$$

Ceci implique que l'addition sur X_η est génériquement donnée par un morphisme algébrique et comme elle est partout holomorphe, c'est un morphisme de variétés algébriques. Ceci permet de conclure.

Remarque I.6.20

(i) On pourrait vérifier que la loi d'addition sur X_η est partout définie par des formules algébriques en partant d'une présentation $(\mathscr{U}, (\eta_U)_{U \in \mathscr{U}})$ de η et en écrivant explicitement les formules d'addition

$$(U \times \mathbf{G}_\eta) \times (V \times \mathbf{G}_\eta) \longrightarrow W \times \mathbf{G}_\eta$$

pour $U, V, W \in \mathscr{U}$.

(ii) Si $f \in \mathrm{SF}(X, \mathbf{G})$, on peut définir une loi de « groupe birationnel » sur $X \times \mathbf{G}$ par la formule

$$(x, z) \oplus (x', z') = (x +_X x', z +_{\mathbf{G}} z' -_{\mathbf{G}} f(x, x')).$$

La proposition précédente permet de définir un vrai groupe algébrique birationnellement équivalent à ce groupe birationnel ; il s'agit là d'un cas particulier d'un théorème de Weil (cf. [**44**], chap.V, §5).

(iii) Il ne faut pas conclure de la proposition précédente qu'il existe une unique structure de groupe algébrique sur Y (cf. remarque I.7.6).

6. Formes différentielles et groupes algébriques

Proposition I.6.21. — *Si X est une variété algébrique propre et lisse, si η est une forme différentielle de seconde ou troisième espèce sur X et si U est un ouvert sur lequel η est holomorphe, il existe un morphisme f de variétés algébriques de U dans un groupe algébrique commutatif Y et une forme différentielle algébrique ω invariante sur Y tels que l'on ait $\eta = f^*\omega$.*

Démonstration. — Soient $a \in X$ et a_X le morphisme d'Albanese de X dans $\mathrm{Alb}(X)$ associé à a. Soit Y_η l'extension de $\mathrm{Alb}(X)$ par $\mathbf{G}_\eta$ définie par $Y_\eta = (\Omega^1(X)^* \times X)/\iota_\eta(H_1(X,\mathbf{Z}))$, où $\iota_\eta(u) = (a_X(u), \int_u \eta)$ et $a_X(u)$ est la forme linéaire $\omega \to \int_u \omega$ sur $\Omega^1(X)$. La forme différentielle dz sur $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ peut se voir aussi comme une forme différentielle sur $\Omega^1(X)^* \times \mathbf{G}_\eta$ invariante par translation et est donc l'image inverse d'une forme différentielle ω invariante sur X_η.

Soient $\widehat{X}$ le revêtement abélien de X de groupe de Galois $H_1(X,\mathbf{Z})/\mathrm{tors}$ et pr_X la projection naturelle de $\widehat{X}$ sur X. Si on choisit un point $\widetilde{a}$ de $\widehat{X}$ au-dessus de a, l'application a_X se relève de manière unique en une application de $\widehat{X}$ dans $\Omega^1(X)^*$ (cette application n'est autre que celle qui à x associe la forme linéaire $\omega \to \int_{\widetilde{a}}^x \omega$) et $\widehat{X}$ est le produit fibré de $\Omega^1(X)^*$ et de X au-dessus de $\mathrm{Alb}(X)$. Si on fait alors agir $u \in H_1(X,\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{G}_\eta$ par translation par $\int_u \eta$, ce qui nous donne une action de $H_1(X,\mathbf{Z})$ sur $\widehat{X} \times \mathbf{C}$, le composé de

$$\widehat{X} \times \mathbf{C} \xrightarrow{\widetilde{a}_X \times \mathrm{id}} \Omega^1(X)^* \times \mathbf{C} \longrightarrow Y_\eta$$

se factorise en une application $\widetilde{a}_X$ de $X_\eta = (\widehat{X} \times \mathbf{C})/H_1(X,\mathbf{Z})$ dans Y_η qui fait de X_η le produit fibré de X et Y_η au-dessus de $\mathrm{Alb}(X)$. Comme X_η est le $\mathbf{G}_\eta$-fibré au-dessus de X dont la classe dans $H^1(X,\mathscr{O}_X)$ est celle de η (cf. proposition I.6.7), cela fait de $\widetilde{a}_X$ un morphisme de variétés algébriques. Maintenant, d'après la proposition I.6.7, l'application qui à $x \in \mathrm{pr}_X^{-1}(U)$ associe l'image de $(x, \int_{\widetilde{a}}^x \mathrm{pr}_X^* \eta) \in \widehat{X} \times \mathbf{G}_\eta$ dans X_η se factorise en un morphisme algébrique de U dans X_η et un petit calcul montre que l'on a $\eta = s_\eta^* \widetilde{a}_X^* \omega$, ce qui permet de conclure.

Remarque I.6.22. — La démonstration permet de préciser l'énoncé précédent. Si η est une forme de seconde espèce, on peut prendre pour Y une extension de $\mathrm{Alb}(X)$ par $\mathbf{G}_a$ et imposer que si ι désigne l'injection de $\mathbf{G}_a$ dans Y, alors $\iota^*\omega = dz$ et si η est une forme de troisième espèce, on peut prendre pour Y une extension de $\mathrm{Alb}(X)$ par $\mathbf{G}_m$ et imposer que si ι désigne l'injection de $\mathbf{G}_m$ dans Y, alors $\iota^*\omega = \dfrac{dt}{t}$.

Finalement, si X est une variété abélienne, on a $\mathrm{Alb}(X) = X$ et on peut de plus imposer à f d'être une section de la projection de Y sur X.

Proposition I.6.23. — *Si X est une variété algébrique lisse et η est une 1-forme différentielle fermée holomorphe sur X, il existe un groupe algébrique commutatif Y, un morphisme algébrique $f : X \to Y$ et une 1-forme différentielle ω invariante sur Y tels que l'on ait $\eta = f^*\omega$.*

Démonstration. — D'après le théorème de résolution des singularités, on peut compactifier X en une variété lisse $\overline{X}$. La forme différentielle η s'étend en une forme différentielle rationnelle sur $\overline{X}$ que l'on peut, utilisant le corollaire I.1.16, écrire sous la forme $\eta_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i$, où η_0 est de seconde espèce sur $\overline{X}$ et les η_i, pour $1 \leq i \leq n$, sont de troisième espèce sur $\overline{X}$ et on peut se débrouiller pour que les η_i soient toutes holomorphes sur X. D'après la proposition I.6.21, si $0 \leq i \leq n$, il existe un groupe algébrique Y_i, un morphisme algébrique $f_i : X \to Y_i$ et une forme différentielle ω_i invariante sur Y_i tels que l'on ait $\eta_i = f_i^* \omega_i$. Il suffit alors de prendre pour Y le produit des Y_i, pour f le produit des f_i et de poser $\omega = \omega_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i \in \Omega^1(Y) = \oplus_{i=0}^n \Omega^1(Y_i)$,

I.7. Extension universelle et formes de troisième espèce

1. L'extension universelle d'une variété abélienne. — Dans tout ce chapitre, nous nous intéressons aux extensions d'une variété abélienne par des espaces vectoriels (*i.e.* des groupes algébriques commutatifs s'écrivant comme une somme directe de $\mathbf{G}_a$). Si $f : E \to E'$ est un morphisme d'espaces vectoriels et $Y \xrightarrow{\pi} X$ est une extension de X par E, on peut utiliser f pour pousser cette extension en une extension fY de X par E' de la manière suivante. On pose $Y' = (Y \times E')/\{(-e, f(e)) \mid e \in E\}$ et on a un diagramme commutatif d'extensions

$$\begin{array}{lccccccccc}
(G) & 0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{\pi} & X & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \big\downarrow f & & \big\downarrow \widetilde{f} & & \big\downarrow \mathrm{id} & & \\
(fG) & 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\pi'} & X & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

les morphismes $\widetilde{f}$ et π' étant les morphismes évidents. Ceci nous fournit un morphisme de groupes $f_* : \mathrm{Ext}(X, E) \to \mathrm{Ext}(X, E')$.

Si I est un ensemble fini et si on dispose pour $i \in I$ d'une extension $0 \to E_i \to Y_i \xrightarrow{\pi_i} X \to 0$ de X par un groupe de Lie commutatif E_i, on définit la somme directe $Y = \oplus_{i \in I} Y_i$ de ces extensions comme le produit fibré des Y_i au-dessus de X. De manière explicite,

$$Y = \{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i \mid \pi_i(x_i) = \pi_j(x_j) \text{ si } i, j \in I\}.$$

Ceci fait de Y une extension de X par $E = \oplus_{i \in I} E_i$. On obtient donc de cette manière une application de $\oplus_{i \in I} \mathrm{Ext}(X, E_i)$ dans $\mathrm{Ext}(X, \oplus_{i \in I} E_i)$ qui est un isomorphisme, son inverse étant l'application $\oplus_{i \in I} (p_i)_*$, où p_i désigne la projection de E sur E_i de noyau $\oplus_{j\neq i}E_j$. On peut utiliser ce qui précède pour ramener l'étude des extensions de X par un espace vectoriel à celui des extensions de X par $\mathbf{G}_a$. En particulier, on déduit de la proposition I.6.17 le résultat suivant.

Proposition I.7.1. — *Si X est une variété abélienne et E est un espace vectoriel, l'application qui, à une extension de X par E associe sa classe en tant que E-fibré au-dessus de X, induit un isomorphisme de* $\mathrm{Ext}(X,E)$ *sur* $H^1(X,\mathcal{O}_X)\otimes E = \mathrm{Hom}(H^1(X,\mathcal{O}_X)^*,E)$

Définition I.7.2. — On appelle extension universelle de X, l'extension $\widetilde{X}$ de X par $H^1(X,\mathcal{O}_X)^*$ dont la classe dans $\mathrm{End}(H^1(X,\mathcal{O}_X)^*)$ est l'identité.

Remarque I.7.3. — D'après ce qui précède, si E est un espace vectoriel, si $0\to E\to Y\to X\to 0$ est une extension de X par E et si $\alpha_Y\in\mathrm{Hom}(H^1(X,\mathcal{O}_X)^*,E)$ est la classe de Y, il existe un unique morphisme $\widetilde{\alpha}_Y$ de groupes algébriques de $\widetilde{X}$ dans Y rendant commutatif le diagramme suivant d'extensions

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{O}_X)^* \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_Y"] & \widetilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}_Y"] & X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & Y \arrow[r] & X \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Proposition I.7.4. — *Si η est une forme différentielle de seconde espèce sur X, il existe une unique forme différentielle ω invariante sur $\widetilde{X}$ et une fonction rationnelle F sur $\widetilde{X}$ unique à addition d'une constante près telles que l'on ait $\pi^*\eta-\omega=dF$.*

Démonstration. — D'après la remarque I.6.22, il existe une extension $Y\xrightarrow{\pi_\eta}X$ de X par $\mathbf{G}_a$, une forme différentielle ω_η invariante sur Y et une section rationnelle $s_\eta : X\to Y$ de π_η telles que l'on ait $\eta=s_\eta^*\omega_\eta$. D'autre part, $f=s_\eta\circ\pi_\eta-_Y\mathrm{id}$ est à valeurs dans $\ker\pi_\eta=\mathbf{C}$ et est donc une fonction rationnelle sur X, ce qui nous donne $\pi_\eta^*\eta=\omega_\eta+df$. Finalement, d'après la propriété universelle de $\widetilde{X}$, il existe un morphisme $\alpha:\widetilde{X}\longrightarrow Y$ de groupes algébriques tel que l'on ait $\pi=\pi_\eta\circ\alpha$, ce qui nous donne $\pi^*\eta=\alpha^*(\pi_\eta^*\eta)=\alpha^*\omega+df\circ\alpha$. On en déduit l'existence d'une décomposition avec $\omega=\alpha^*\omega_\eta$ et $F=f\circ\alpha$.

Pour démontrer l'unicité, il suffit de montrer qu'une fonction rationnelle f sur $\widetilde{X}$ dont la différentielle est invariante est une fonction constante. Comme df est invariante, la fonction $f(x\oplus y)-f(x)-f(y)$ est constante. En composant avec la projection de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ sur $\widetilde{X}$, on obtient une fonction méromorphe $\widetilde{f}$ sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ telle que la fonction $\widetilde{f}(x+y)-\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(y)$ est constante, ce qui, d'après le lemme I.3.4, implique que $\widetilde{f}$ est une fonction affine et quitte à retrancher $\widetilde{f}(0)$, on peut supposer que $\widetilde{f}$ est $\mathbf{C}$-linéaire. D'autre part, $\widetilde{f}$ est périodique de période $H_1(X,\mathbf{Z})$ et donc vérifie $\widetilde{f}(u)=\widetilde{f}(0)=0$ quel que soit $u\in H_1(X,\mathbf{Z})$, ce qui, compte-tenu du fait que $H_1(X,\mathbf{Z})$ engendre $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$, implique $\widetilde{f}=0$ et permet de conclure.

2. L'extension universelle de la variété d'Albanese. — Soit X une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$. L'application qui à $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$ associe la forme linéaire $\int_u \omega$ permet de considérer $H_1(X, \mathbf{Z})$ modulo torsion comme un sous-groupe de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$.

Proposition I.7.5. — *Si X est une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$, alors la suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)^* \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*/H_1(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\pi} \Omega^1(X)^*/H_1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow 0,$$

obtenue en dualisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow 0$$

et en passant au quotient par $H_1(X, \mathbf{Z})$, est l'extension universelle de $\mathrm{Alb}(X)$.

Démonstration. — Comme un morphisme d'Albanese induit des isomorphismes de tous les objets apparaissant dans la suite exacte ci-dessus sur ceux apparaissant dans la suite exacte obtenue en remplaçant X par $\mathrm{Alb}(X)$, on peut supposer que $X = \mathrm{Alb}(X)$, c'est-à-dire que X est une variété abélienne.

Notons Y l'extension ci-dessus. Identifions $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ au sous-$\mathbf{C}$-espace vectoriel $\overline{\Omega^1(X)}$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, ce qui permet d'écrire $H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*$ sous la forme $\overline{\Omega^1(X)}^* \oplus \Omega^1(X)^* = \overline{\Omega^1(X)}^* \oplus \widehat{X}$, où, comme d'habitude, $\widehat{X}$ désigne le revêtement universel de X. Soient $\eta_1, \dots, \eta_d$ une base de $\overline{\Omega^1(X)}$ et $\eta_1^*, \dots, \eta_d^*$ la base de $\overline{\Omega^1(X)}^*$ duale de $\eta_1, \dots, \eta_d$. Si $1 \leq i \leq d$, soit $f_i : \overline{\Omega^1(X)}^* \to \mathbf{C}$ l'application qui à x associe sa i-ème coordonnée dans la base $\eta_1^*, \dots, \eta_d^*$. Par définition ou presque, si $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$ et $1 \leq i \leq d$, alors $f_i(u) = \int_u \eta_i$, ce qui fait que l'extension $f_i Y$, s'identifie naturellement à l'extension X_{η_i} de X par $\mathbf{G}_a$ de la remarque I.6.8 ; en particulier, sa classe dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ n'est autre que η_i. Finalement, comme $\sum_{i=1}^d f_i \otimes \eta_i^*$ est l'identité de $\overline{\Omega^1(X)}^*$, la classe de l'extension Y est égale à $\sum_{i=1}^d \eta_i \otimes \eta_i^*$, c'est-à-dire à l'identité de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque I.7.6. — Si X est une variété abélienne, le choix d'une base de $H_1(X, \mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}$ nous fournit un isomorphisme analytique de $(\mathbf{C}/\mathbf{Z})^{2d}$ sur $\widetilde{X} = H^1_{\mathrm{dR}}(X)^*/H_1(X, \mathbf{Z})$, ce qui fait que l'on a un isomorphisme analytique entre $\widetilde{X}$ et $\mathbf{G}_m^{2d}$, mais tout morphisme algébrique de $\mathbf{G}_m$ sur une variété abélienne est identiquement nul. Cela prouve que l'on peut munir le groupe de Lie complexe $\mathbf{G}_m^{2d}$ d'une infinité de structures de groupes algébriques deux à deux non isomorphes (une par variété abélienne de dimension d).

3. Extension universelle de $\mathrm{Pic}^0(X)$ **et formes de troisième espèce.** — Soient X une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$, A sa variété d'Albanese, $a : X \to A$ un morphisme d'Albanese et $A^* = \mathrm{Pic}^0(A)$ la variété duale de A. Si on utilise la proposition I.7.5, les isomorphismes naturels induits par a^* et ι_{an}

$$\begin{aligned}
&H^1_{\mathrm{dR}}(X) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(A) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(A^*)^*,\\
&\Omega^1(X) \cong \Omega^1(A) \cong H^1(A^*, \mathcal{O}_{A^*})^*,\\
&H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(A, \mathcal{O}_A) \cong \Omega^1(A^*)^*,\\
&H^1(X, \mathbf{Z}) \cong H^1(A, \mathbf{Z}) \cong H_1(A^*, \mathbf{Z}),
\end{aligned}$$

on obtient le résultat suivant :

Proposition I.7.7. — *Si X est une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}$, alors*

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(X)/H^1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

est l'extension universelle de $\mathrm{Pic}^0(X)$ *identifié à* $H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z})$.

Remarque I.7.8. — D'un point de vue algébrique, il vaut mieux considérer les isomorphismes $H^1_{\mathrm{dR}}(A) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(A^*)^*$ et $\Omega^1(X) \cong H^1(A^*, \mathcal{O}_{A^*})$ fournis par la classe de P en cohomologie de de Rham algébrique, auquel cas on doit tout multiplier par $2i\pi$ et c'est $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X) = H^1_{\mathrm{dR}}(X)/H^1(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ qui est l'extension universelle de $\mathrm{Pic}^0(X)$ identifié à $H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ (cf. proposition I.7.12).

Supposons à partir de maintenant que X est une variété abélienne. Le groupe $H^2(X, \mathbf{Z})$ est alors sans torsion et donc $\mathrm{Div}^\tau(X) = \mathrm{Div}^0(X)$, ce qui fait que l'application qui, à une forme différentielle de troisième espèce, associe son résidu, donne naissance à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \frac{\mathrm{DTE}(X)}{\{\frac{df}{f},\ f \in \mathbf{C}(X)^*\}} \longrightarrow \frac{\mathrm{Div}^0(X)}{\{\mathrm{Div}(f),\ f \in \mathbf{C}(X)^*\}} \longrightarrow 0.$$

Si ω est une forme différentielle de troisième espèce et $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$, l'intégrale $\int_u \omega$ est bien définie à un élément de $2i\pi\mathbf{Z}$ près correspondant au fait de tourner autour du diviseur de ω, ce qui nous fournit une application de l'espace des formes de troisième espèce dans $\mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z})$. Comme X est une variété abélienne, $H_1(X, \mathbf{Z})$ est sans torsion et $\mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z})$ s'identifie à

$$\mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), \mathbf{C})/\mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbf{Z}), 2i\pi\mathbf{Z}) \cong \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$$

et comme d'autre part, si $\omega = \dfrac{df}{f}$, alors $\int_u \omega \in 2i\pi\mathbf{Z}$, l'application de $\mathrm{DTE}(X)$ dans $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ ainsi définie se factorise à travers $\mathrm{DTE}(X)/\{\frac{df}{f},\ f \in \mathbf{C}(X)^*\}$.

Proposition I.7.9. — *L'application définie ci-dessus est un isomorphisme*

$$\mathrm{DTE}(X)/\{\frac{df}{f},\ f \in \mathbf{C}(X)^*\} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{DTE}(X)/\{\frac{df}{f}\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}^0(X)/\{(f)\} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] & \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

est commutatif et est un isomorphisme d'extensions.

Démonstration. — Grâce au lemme des 5, la seule chose à vérifier est la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{DTE}(X)/\{\frac{df}{f}\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Div}^0(X)/\{(f)\} \arrow[d] \\ \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \end{tikzcd}$$

Il s'agit donc de vérifier que si ω est une forme différentielle de troisième espèce sur X, alors ses deux images dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ coïncident. Soit D le résidu de ω. D'après la remarque I.3.16, Il existe une fonction thêta associée à D telle que l'on ait $\dfrac{d\theta}{\theta} = \mathrm{pr}_X^*\omega$. Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert (pour la topologie usuelle) de X tel que

(a) si $U \in X$, alors $\mathrm{pr}_X^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des translatés d'un ouvert $\widehat{U}$ par les éléments de $H_1(X, \mathbf{Z})$,

(b) si $U, V \in \mathscr{U}$, alors $U \cap V$ est simplement connexe.

La première condition implique que pr_X induit une bijection (bianalytique) de $\widehat{U}$ sur U et on notera ι_U la bijection analytique inverse. Le diviseur D admet alors $f_U = \theta \circ \iota_U$ comme équation sur U, ce qui fait que si l'on pose $f_{U,V} = \dfrac{f_V}{f_U}$ sur $U \cap V$, les $(f_{U,V})_{U,V \in \mathscr{U}}$ forment un cocycle sur $\mathscr{U}$ représentant la classe de D dans $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$. Comme on a supposé $U \cap V$ simplement connexe, il existe $g_{U,V}$ holomorphe sur $U \cap V$ et bien définie à un élément de $2i\pi\mathbf{Z}$ près telle que l'on ait $f_{U,V} = e^{g_{U,V}}$ et $g_{U,V,W} = g_{U,V} + g_{V,W} + g_{W,U}$ est un 2-cocycle sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$ dont la classe dans $H^2(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ est celle de D. Comme D est le résidu d'une forme de troisième espèce et $H^2(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ est sans torsion, cette classe est nulle et on peut modifier les $g_{U,V}$ par des fonctions constantes à valeur dans $2i\pi\mathbf{Z}$ de telle sorte que l'on ait $g_{U,V} + g_{V,W} + g_{W,U} = 0$ sur $U \cap V \cap W$ quels que soient $U, V, W \in \mathscr{U}$. Ceci nous fabrique donc un élément de $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ qui est bien défini modulo $H^1(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ et représente la classe de D dans $\mathrm{Pic}^0(X)$.

D'autre part, on a $f_{U,V}(z) = \dfrac{\theta(\iota_V(z))}{\theta(\iota_U(z))}$ et comme $\iota_U(z) - \iota_V(z)$ est une fonction holomorphe sur $U \cap V$ à valeurs dans $H_1(X, \mathbf{Z})$ elle est constante et il existe $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$ tel que l'on ait $\iota_V(z) = \iota_U(z) + u$ quel que soit $z \in U \cap V$. Comme de plus,

$\frac{d\theta}{\theta}$ est périodique de période $H_1(X, \mathbf{Z})$, la fonction $\frac{\theta(z+u)}{\theta(z)}$ est constante, ce qui montre que le cocyle formé par les $g_{U,V}$ est en fait à valeurs dans $\mathbf{C}$ et nous fournit un élément de $H^1(X, \mathbf{C})$ qui, compte-tenu de la relation entre ω et θ, n'est autre que l'image modulo $H^1(X, 2i\pi\mathbf{Z})$ de ω dans $H^1(X, \mathbf{C}) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. Ceci permet de conclure.

Remarque I.7.10. — La proposition I.7.9 nous fournit une description algébrique de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$. On peut aussi (cf. [**37**]) donner une description de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ en termes d'extensions rigidifiées de $\mathrm{Alb}(X)$ par $\mathbf{G}_m$ (l'application de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ correspondant à oublier la rigidification) ou de fibrés en droites sur X munis d'une connexion intégrable (l'application de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ dans $\mathrm{Pic}^0(X)$ correspondant alors à oublier la connexion).

Remarque I.7.11. — Si on veut étendre les résultats précédents à une variété algébrique propre et lisse, on se heurte à la torsion dans les groupes $H_1(X, \mathbf{Z})$ et $H^2(X, \mathbf{Z})$. Pour y remédier, on introduit le groupe

$$\mathrm{Pic}^\tau(X) = \mathrm{Div}^\tau(X)/\{(f) \mid f \in \mathbf{C}(X)^*\}$$

que l'on peut aussi voir comme le sous-groupe des éléments de $H^1(X, \mathscr{O}_X^*)$ dont l'image dans $H^2(X, \mathbf{Z})$ est de torsion et le sous-groupe $\mathrm{DTE}^0(X)$ des formes différentielles de troisième espèce sur X dont le résidu est cohomologiquement trivial (*i.e.* appartient à $\mathrm{Div}^0(X)$). Le lemme des 5 permet alors de montrer que, si A est la variété d'Albanese de X et $a : X \to A$ est un morphisme d'Albanese, le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1(A) \arrow[r] \arrow[d, "a^*"] & \mathrm{DTE}(A)/\{\frac{df}{f} \mid f \in \mathbf{C}(A)^*\} \arrow[r] \arrow[d, "a^*"] & \mathrm{Pic}^0(A) \arrow[r] \arrow[d, "a^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1(X) \arrow[r] & \mathrm{DTE}^0(X)/\{\frac{df}{f} \mid f \in \mathbf{C}(X)^*\} \arrow[r] & \mathrm{Pic}^0(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

est un isomorphisme d'extensions. On en déduit une description de l'extension universelle de $\mathrm{Pic}^0(X)$ en termes du sous-groupe $\mathrm{DTE}^0(X)$ du groupe des formes différentielles de troisième espèce sur X.

D'autre part, le sous-groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ est d'indice fini dans $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ ce qui fait de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ un groupe algébrique commutatif non connexe dont la composante connexe de l'élément neutre est $\mathrm{Pic}^0(X)$ et l'application résidu induit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \mathrm{DTE}(X)/\{\frac{df}{f} \mid f \in \mathbf{C}(X)^*\} \longrightarrow \mathrm{Pic}^\tau(X) \longrightarrow 0,$$

ce qui permet de paramétrer les classe de formes de troisième espèce par un groupe algébrique non connexe extension de $\mathrm{Pic}^\tau(X)$ par $\Omega^1(X)$.

4. Formes de troisième espèce et fibré de Poincaré

Proposition I.7.12. — *Si X est une variété abélienne et si on identifie $\Omega^1(X)$ à $H^1(\mathrm{Pic}^0(X), \mathcal{O}_{\mathrm{Pic}^0(X)})^*$ via ι_{dR}, alors*

$$0 \longrightarrow \Omega^1(X) \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}^0(X) \longrightarrow 0$$

est l'extension universelle de $\mathrm{Pic}^0(X)$.

Démonstration. — La démonstration utilise le fibré de Poincaré (comme le fait la définition de ι_{dR} d'ailleurs) et, ayant identifié $\mathrm{Pic}^0(X)$ à la variété duale X^* de X, nous reprendrons les notations du paragraphe consacré à ce fibré. En particulier, θ_P, $F_{X,j}$, $\omega_{X,j}$ et $\eta_{X,j}$ désignent les mêmes objets que dans le paragraphe en question.

Fixons $x_0 \in X$ tel que $X^* \times \{x_0\}$ ne soit pas inclus dans le support du diviseur de θ_P. Soient $\alpha \in X^*$ et $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{pr}_{X^*}^{-1}(\alpha)$. Notons $\theta_{P,\widetilde{\alpha}}$ la restriction de θ_P à $\widetilde{\alpha} \times \widehat{X}$. La forme différentielle $d\log\theta_{P,\widetilde{\alpha}}$ est invariante par translation par un élément de $H_1(X, \mathbf{Z})$ et est l'image réciproque d'une forme différentielle de troisième espèce $\omega_{\widetilde{\alpha}}$ sur X. La forme différentielle $\omega_{\widetilde{\alpha}} - \sum_{i=1}^d F_{X,i}(\widetilde{\alpha}, x_0)\omega_{X,i}$ est aussi la différentielle logarithmique (par rapport à h) de la fonction $g_{\widetilde{\alpha},x}(h) = \dfrac{\theta_{P,\widetilde{\alpha}}(x+h)}{\theta_{P,\widetilde{\alpha}}(x_0+h)}$ évaluée en $h = 0$ et comme, si $u \in H_1(X, \mathbf{Z})$, $\dfrac{g_{\widetilde{\alpha},x}(h+u)}{g_{\widetilde{\alpha},x}(h)}$ ne dépend pas de h, cette forme différentielle ne dépend pas du choix de $\widetilde{\alpha}$; on la notera ω_α. Elle ne diffère de $\omega_{\widetilde{\alpha}}$ que par un élément de $\Omega^1(X)$; c'est donc une forme de troisième espèce et comme la restriction de P à $\{\alpha\} \times X$ a pour image α dans $X^* = \mathrm{Pic}^0(X)$, l'application $\alpha \to \omega_\alpha$ est une section de l'application naturelle de $\mathrm{DTE}(X) \to \mathrm{Pic}^0(X)$. D'autre part, la fonction $\dfrac{\theta_{P,\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}}(x)}{\theta_{P,\widetilde{\alpha}}(x)\theta_{P,\widetilde{\beta}}(x)}$ est invariante par translation par un élément de $H_1(X, \mathbf{Z})$; on en déduit le fait que $\omega_{\alpha+\beta} - \omega_\alpha - \omega_\beta$ ne diffère de

$$\sum_{i=1}^{d} \Big(F_{X,i}(\widetilde{\alpha}, x_0) + F_{X,i}(\widetilde{\beta}, x_0) - F_{X,i}(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}, x_0)\Big)\omega_{X,i}$$

que par la dérivée logarithmique d'une fonction rationnelle sur X.

Finalement, si η est une forme différentielle de seconde espèce sur $X^* \times X$, l'image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)$ de la restriction de η à $X^* \times \{x_0\}$ ne dépend pas du choix de x_0 (considérer un représentant harmonique et donc invariant par translation) et cette image n'est autre que la projection de celle de η dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X^* \times X) = H^1_{\mathrm{dR}}(X^*) \oplus H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. On déduit de cette discussion le fait que l'image de $\eta_{i,x_0} = dF_{X,i}(y, x_0)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X^*)$ ne dépend pas de x_0 et est égale à la projection de $\eta_{X,i}$ sur $H^1(X^*, \mathcal{O}_{X^*})$, c'est-à-dire à $\eta_{X,i}$ puisque $\eta_{X,i} \in H^1(X^*, \mathcal{O}_{X^*})$. D'autre part, la fonction

$$f(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = F_{X,i}(\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta}, x_0) - F_{X,i}(\widetilde{\alpha}, x_0) - F_{X,i}(\widetilde{\beta}, x_0)$$

n'est autre que l'image réciproque sur $\widehat{X}^* \times \widehat{X}^*$ du système de facteurs rationnel et symétrique sur X^* associé à η_{i,x_0}, ce qui montre que la classe de $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ est égale à $-\sum_{i=1}^d \eta_{X,i} \otimes \omega_{X,i} \in H^1(X^*, \mathscr{O}_{X^*}) \otimes \Omega^1(X)$, c'est-à-dire à l'identité de $H^1(X^*, \mathscr{O}_{X^*})^*$ d'après la définition de ι_{dR}. Ceci permet de conclure.

5. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce (bis)

Si X est une courbe, $\mathrm{Pic}^0(X)$ est la jacobienne J de X et $\widetilde{\mathrm{Pic}}^0(X)$ est l'extension universelle $\widetilde{J}$ de J. On note $\log_{\widetilde{J}}$ l'application logarithme (multivaluée) de $\widetilde{J}$ dans son espace tangent à l'origine qui n'est autre que $H^1_{\mathrm{dR}}(J) \cong H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. D'après la proposition I.7.9, on peut représenter un élément de $\widetilde{J}$ par une forme différentielle de troisième espèce sur X et, si ω est une telle forme, les éléments η de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ qui sont dans l'image de ω par $\log_{\widetilde{J}}$ sont ceux tels que l'on ait $\int_u \eta - \int_u \omega \in 2i\pi\mathbf{Z}$ quel que soit le chemin fermé u sur X évitant les pôles de ω. Choisissons alors une base symplectique $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ de $H_1(X, \mathbf{C})$ et soit Y un polygone obtenu par une découpe de X associée à cette base. Si on se restreint aux formes différentielles de troisième espèce dont tous les pôles se trouvent à l'intérieur de Y, on peut fixer une branche de $\log_{\widetilde{J}}$ en imposant que l'on ait $\int_u \log_{\widetilde{J}}\omega = \int_u \omega$ quel que soit $u \in \{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$. Si on combine alors la formule I.2.4 et la proposition I.2.5, on obtient la proposition suivante.

Proposition I.7.13. — *Si ω_1, ω_2 sont deux formes différentielles de troisième espèce dont les diviseurs sont étrangers et contenus dans l'intérieur de Y, alors on a*

$$\int_{\mathrm{Div}(\omega_2)} \omega_{1,Y} - \int_{\mathrm{Div}(\omega_1)} \omega_{2,Y} = \deg\big(\log_{\widetilde{J}}(\omega_1) \cup \log_{\widetilde{J}}(\omega_2)\big) \mod 2i\pi\mathbf{Z}$$

Remarque I.7.14. — Cette loi de réciprocité a une version algébrique qui s'exprime via la théorie des bi-extensions (cf. **[17]** par exemple).

CHAPITRE II

INTÉGRALES ABÉLIENNES p-ADIQUES

II.1. Intégration sur les variétés p-adiques

1. Énoncé du problème. — Dans tout ce chapitre, le mot «localement» se rapporte à la topologie p-adique et pas à la topologie rigide (nous n'utiliserons pas cette dernière). On dispose des notions habituelles de «fonctions localement analytiques» et «fonctions localement méromorphes» et on définit une fonction «localement log-méromorphe» comme une fonction qui peut s'écrire localement comme un polynôme à coefficients méromorphes en des logarithmes de fonctions analytiques, l'application logarithme étant celle dont les propriétés sont rappelées ci-dessous.

Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Rappelons que l'on considère $\operatorname{Log} p$ comme une indéterminée et le logarithme comme une application localement analytique sur K^* à valeurs dans $K_{\mathrm{st}} = K[\operatorname{Log} p]$ vérifiant les deux identités $\operatorname{Log}(xy) = \operatorname{Log} x + \operatorname{Log} y$ et $\dfrac{d}{dt} \operatorname{Log} t = t^{-1}$. Plus généralement, si X est une variété lisse géométriquement connexe définie sur K, on note $K(X)$ le corps des fonctions rationnelles sur X et $K(X)_{\mathrm{st}}$ l'anneau des fonctions sur X à valeurs dans K_{st} engendré par $K(X)$ et les $\operatorname{Log} f$ pour $f \in K(X)^*$.

Remarque II.1.1

(i) Un élément f de $K(X)_{\mathrm{st}}$ n'est pas une fonction définie sur X tout entier, mais il existe un ouvert de Zariski U_f non vide sur lequel f est définie et localement analytique pour la topologie p-adique.

(ii) Si on se contente comme dans ce volume de vouloir intégrer une 1-forme différentielle méromorphe, il est inutile de rajouter des polynômes d'ordre quelconque en les $\operatorname{Log} f$; on peut se borner au degré 1. D'un autre côté, si on veut pouvoir un jour définir des intégrales itérées, on sera amené à considérer des polynômes d'ordre quelconque.

Si X est une variété lisse définie sur K et ω est une 1-forme différentielle rationnelle fermée sur X, appelons primitive de ω une fonction de $X(K)$ dans K_{st} définie et localement analytique en dehors des pôles de ω et dont la différentielle est égale à ω. Comme la topologie p-adique est totalement discontinue, toute 1-forme différentielle fermée possède une infinité de primitives différant 2 à 2 d'une fonction localement constante. Notre but est de montrer qu'une de ces primitives (à une constante près) est meilleure que les autres.

Définition II.1.2. — Une 1-forme différentielle rationnelle ω sur X est dite exacte s'il existe $g \in K(X)_{\mathrm{st}}$ tel que $\omega = dg$, ce qui équivaut à l'existence de fonctions rationnelles $f_0, f_1, \ldots, f_n \in K(X)^*$ et de constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ telles que l'on ait $\omega = df_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i}$.

Définition II.1.3. — Une théorie de l'intégration sur les variétés algébriques lisses définies sur K est dite naturelle si elle satisfait les conditions suivantes :

(i) Si ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et $a \in X(K)$, alors $F(x) = \int_a^x \omega$ est une fonction localement analytique de $x \in X(K)$ à valeurs dans $K \oplus K \operatorname{Log} p$ vérifiant $dF = \omega$.

(ii) $\int_a^b (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int_a^b \omega_1 + \lambda_2 \int_a^b \omega_2$ (linéarité de l'intégration).

(iii) $\int_a^c \omega = \int_a^b \omega + \int_b^c \omega$ (relation de Chasles).

(iv) Si $\omega = dg$ (avec $g \in K(X)_{\mathrm{st}}$) est exacte, alors $\int_a^b \omega = g(b) - g(a)$.

(v) Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés lisses défini sur K, ω est une 1-forme différentielle fermée sur Y et a et b sont des points de $X(K)$, alors $\int_a^b f^*\omega = \int_{f(a)}^{f(b)} \omega$.

Théorème II.1.4. — *Il existe une et une seule théorie de l'intégration sur les variétés algébriques lisses définies sur K qui soit naturelle.*

Remarque II.1.5. — On obtient une formulation équivalente pour le caractère naturel de l'intégration p-adique en considérant les primitives des 1-formes différentielles fermées (la relation de Chasles permet de passer d'une formulation à l'autre). Plus précisément, on dit qu'une intégration sur les variétés algébriques lisses géométriquement connexe est naturelle si à toute 1-forme différentielle fermée ω on peut associer une primitive $\int \omega$ localement analytique uniquement déterminée à addition d'une constante près, telle que les conditions suivantes soient vérifiées.

(i)' $d\left(\int \omega\right) = \omega$

(ii)' $\int (\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2) = \lambda_1 \int \omega_1 + \lambda_2 \int \omega_2$.

(iii)' Si $\omega = dg$ (avec $g \in K(X)_{\mathrm{st}}$) est exacte, alors $\int \omega = g$.

(iv)' Si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés lisses défini sur K et ω est une 1-forme différentielle fermée sur Y, alors $\int f^*\omega = f^* \int \omega$.

C'est sous cette forme que nous montrerons le théorème II.1.4. On commence par se restreindre aux variétés abéliennes sur lesquelles on dispose du théorème du carré pour rigidifier la situation (proposition II.1.17) puis on utilise les variétés d'Albanese pour traiter le cas général. Commençons par vérifier que l'on n'a pas introduit de fonctions localement constantes non-constantes en rajoutant les logarithmes des fonctions rationnelles.

Définition II.1.6. — Soit X une variété lisse géométriquement connexe définie sur K. On dit qu'une sous-$K(X)$-algèbre A de l'algèbre des fonctions sur X à valeurs dans K_{st} possède la propriété d'unicité du prolongement si quel que soit l'ouvert non vide U de X (pour la topologie p-adique), l'application qui à $f \in A$ associe sa restriction à U est injective.

Autrement dit, A possède la propriété d'unicité du prolongement si et seulement si une fonction $f \in A$ telle qu'il existe un ouvert U non vide de X sur lequel on a $f = 0$ est identiquement nulle sur X. En particulier, si A possède la propriété de l'unicité du prolongement, les seules fonctions localement constantes appartenant à A sont les fonctions constantes. Remarquons aussi que si A possède la propriété d'unicité du prolongement, alors A est intègre et son corps des fractions la possède aussi.

Lemme II.1.7. — *Soient X une variété lisse de dimension d définie sur K, $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ une base de $\Omega^1_{K(X)/K}$ sur $K(X)$ et $\partial_1, \dots, \partial_d$ les opérateurs différentiels de degré* 1 *définis par $df = \sum_{j=1}^d (\partial_j f)\omega_i$. Soit A une sous-$K(X)$-algèbre de l'algèbre des fonctions localement log-méromorphes sur X possédant la propriété d'unicité du prolongement et qui est stable par $\partial_1, \dots, \partial_d$. Finalement, soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille de fonctions localement log-méromorphe sur X vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) *Si $i \in I$ et $j \in \{1, \dots, d\}$, alors $\partial_j f_i \in A$.*

(ii) *Si $g \in A$ et $(a_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments presque tous nuls de K vérifiant $\sum_{i \in I} a_i df_i + dg = 0$, alors $g = 0$ et $a_i = 0$ quel que soit $i \in I$.*

Alors la sous-algèbre B de l'algèbre des fonctions localement log-méromorphes engrendrée par A et les f_i possède la propriété d'unicité du prolongement.

Démonstration. — Soit $f \in B$. On peut trouver une sous-famille finie des f_i telle que f soit élément de l'algèbre engendrée par A et cette sous-famille, ce qui fait que quitte à renuméroter les éléments, on peut supposer $I = \{1, \dots, n\}$. Si $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, posons $|\mathbf{k}| = k_1 + \cdots + k_n$ et munissons $\mathbf{N}^n$ d'une relation d'ordre total $\preceq$ telle que si $\mathbf{h}$ et $\mathbf{k}$ sont deux éléments de $\mathbf{N}^n$ vérifiant $|\mathbf{h}| < |\mathbf{k}|$, alors $\mathbf{h} \preceq \mathbf{k}$. Nous allons montrer par récurrence sur $\mathbf{k}$ (pour cette relation d'ordre) que si une famille $(a_{\mathbf{h}})_{\mathbf{h} \preceq \mathbf{k}}$ d'éléments du corps des fractions de A est telle qu'il existe un ouvert non vide U de X sur lequel la fonction $f = \sum_{\mathbf{h} \preceq \mathbf{k}} a_{\mathbf{h}} f_1^{l_1} \cdots f_n^{l_n}$ est identiquement nulle, alors $a_{\mathbf{h}} = 0$ quel que soit $\mathbf{h} \preceq \mathbf{k}$.

Si $\mathbf{k} = (0, \dots, 0)$, cela résulte du fait que A possède la propriété d'unicité du prolongement. Si $\mathbf{k} \neq (0, \dots, 0)$, et $a_{\mathbf{k}} = 0$, on peut conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence. Si $a_{\mathbf{k}} \neq 0$, quitte à tout diviser par $a_{\mathbf{k}}$, on peut supposer que $a_{\mathbf{k}} \in K$. Comme $\partial_j f_i \in A$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à chacune des fonctions $\partial_j f$. On en déduit le fait, considérant les termes dont le degré total dans $\partial_j f$ en $f_1, \dots, f_n$ est égal à $|\mathbf{k}|$, que l'on a $da_{\mathbf{h}} = 0$ et donc $a_{\mathbf{h}} \in K$ si $|\mathbf{h}| = |\mathbf{k}|$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $k_i \neq 0$ et soit $\mathbf{h}_0 = (l_1, \dots, l_n)$, où l'on a posé $l_j = k_j$ si $j \neq i$ et $l_i = k_i - 1$. L'hypothèse de récurrence appliquée aux fonctions $\partial_j f$ implique l'égalité

$\sum_{j=1}^{n}(l_j+1)a_{(l_1,\ldots,l_j+1,\ldots,l_n)}df_j + da_{\mathbf{h}_0} = 0$ et donc, d'après la propriété (ii) de la famille $(f_i)_{i\in I}$, que $a_{(l_1,\ldots,l_j+1,\ldots,l_n)} = 0$, quel que soit $j \in \{1,\ldots,n\}$. Pour $j = i$, ceci nous donne $a_{\mathbf{k}} = 0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire II.1.8. — *Si X est une variété lisse géométriquement connexe définie sur K, alors $K(X)_{\mathrm{st}}$ possède la propriété d'unicité du prolongement.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent au cas où $A = K(X)$ et $(f_i = \operatorname{Log} g_i)_{i\in I}$ où $(g_i)_{i\in I}$ est une base d'un supplémentaire des constantes dans le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}\otimes K(X)^*$; la propriété (i) étant alors une évidence et la propriété (ii) se vérifiant en considérant le résidu de la forme différentielle $\sum_{i\in I} a_i df_i + dg = 0$.

2. Le cas des variétés abéliennes. — Dans ce paragraphe, nous supposerons que X est une variété abélienne. La loi d'addition sur X sera notée $\oplus$ et, si $n \in \mathbf{N}$, l'endomorphisme « multiplication par n » sera noté $[n]$. Les résultats et démonstrations se trouvent déjà en grande partie dans **[18]** ; nous les reproduisons ici pour la commodité du lecteur. Il y a quand même une différence sensible de point de vue entre **[18]** et le présent volume : dans **[18]**, on utilisait abondamment des résultats de la théorie des variétés abéliennes sur $\mathbf{C}$ qui sont ici remplacés par le théorème du cube comme dans **[19]**, ce qui rend les choses un peu plus p-adiques mais aussi un peu plus lourdes. La raison pour laquelle tout marche si bien en p-adique est le théorème suivant.

Théorème II.1.9. — *Soit X une variété abélienne définie sur K.*

(i) *Les sous-groupes ouverts de $X(K)$ forment un système fondamental de voisinages de l'origine pour la topologie p-adique.*

(ii) *Si V est un sous-groupe ouvert de $X(K)$, alors $X(K)/V$ est un groupe de torsion.*

Démonstration. — Il s'agit du théorème 4.1 de **[15]**. La démonstration donnée par Coleman utilise le théorème d'uniformisation p-adique de Raynaud **[40]**. La démonstration que nous allons en donner est basée sur des considérations topologiques élémentaires.

Soient d la dimension de X et $\omega_1,\ldots,\omega_d$ une base des formes différentielles holomorphes sur X. Soit λ_i la primitive formelle de ω_i s'annulant en 0. Il existe un voisinage V_0 de 0 sur lequel les λ_i convergent et tel que l'application $x \to \lambda(x) = (\lambda_1(x),\ldots,\lambda_d(x))$ induise un homéomorphisme de V sur un voisinage de l'origine dans K^d. Soit $\delta_0 > 0$ tel que la boule ouverte $B^d(0,\delta_0) \subset K^d$ soit contenue dans $\lambda(V_0)$. D'autre part, les formes holomorphes étant invariantes par translation, on en déduit le fait que si $\delta \in\,]0,\delta_0[$, alors λ^{-1} induit un isomorphisme analytique de groupes de $B^d(0,\delta)$ sur un sous-groupe V_δ de $X(K)$. Comme de plus, λ^{-1} est un homéomorphisme et comme les $B^d(0,\delta)$ forment une base de voisinages de 0 dans K^n, si V est un voisinage de 0 dans $X(K)$, il existe $\delta > 0$ tel que V contienne V_δ, ce qui permet de démontrer le (i).

Pour démontrer le (ii), remarquons que l'on peut se contenter de traiter le cas où $K = \mathbf{C}_p$. En effet, d'après le (i), il existe $\delta > 0$ tel que V contienne $V_\delta = V_\delta(K) = V_\delta(\mathbf{C}_p) \bigcap X(K)$ et $X(K)/V$ est un quotient de $X(K)/V_\delta$ qui est un sous-groupe de $X(\mathbf{C}_p)/V_\delta(\mathbf{C}_p)$ et ce dernier est de torsion si le (ii) est vrai dans le cas où $K = \mathbf{C}_p$.

Supposons donc $K = \mathbf{C}_p$ mais que X est définie sur une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$. Le groupe $X(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ est la réunion de $X(M)$ où M parcourt les extensions finies de L contenues dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$. Si V est un sous-groupe ouvert de $X(K)$, et M est une extension finie de L, alors $V \bigcap X(M)$ est un sous-groupe ouvert de $X(M)$ qui est compact et $X(M)/(V \bigcap X(M))$ est donc un groupe fini. Maintenant $X(\overline{\mathbf{Q}}_p)/(V \bigcap X(\overline{\mathbf{Q}}_p))$ étant la réunion des $X(L)/(V \bigcap X(L))$ est un groupe de torsion et comme $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est dense dans K, on a $X(K)/V \cong X(\overline{\mathbf{Q}}_p)/(V \bigcap X(\overline{\mathbf{Q}}_p))$, ce qui permet de conclure.

Si X n'est pas défini sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$, on prend un plongement projectif de X et on note A la sous-$\overline{\mathbf{Q}}_p$-algèbre de $\mathbf{C}_p$ engendrée par les coefficients des polynômes définissant X et la loi de groupe sur X. Alors X donne naissance à un schéma abélien projectif $\mathscr{X}$ sur $S = \operatorname{Spec} A$ et X correspond à la fibre X_{s_0} de $\mathscr{X}$ en un point s_0 de $S(\mathbf{C}_p)$. D'après le corollaire B.3.3 de l'appendice B, quel que soit le sous-groupe ouvert V de X_{s_0}, il existe une boule contenant s_0 telle que, si s appartient à cette boule, il existe un sous-groupe ouvert V_s de $X_s(\mathbf{C}_p)$ tel que les groupes $X_s(\mathbf{C}_p)/V_s$ et $X_{s_0}(\mathbf{C}_p)/V$ soient isomorphes. Comme $\overline{\mathbf{Q}}_p$ est dense dans $\mathbf{C}_p$, on peut choisir $s \in S(\overline{\mathbf{Q}}_p)$ et se ramener au cas où X est défini sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, ce qui termine la démonstration.

Proposition-Définition II.1.10. — *Soit X une variété abélienne de dimension d définie sur $\mathbf{C}_p$. Soient $\delta_0 > 0$ et V un sous-groupe ouvert de $X(\mathbf{C}_p)$ muni d'un isomorphisme analytique ι de V sur la boule ouvert $B^d(0, \delta_0)$ de $\mathbf{C}_p^g$ muni de la norme $\| \ \|$ du* sup. *Si $d : X(\mathbf{C}_p) \times X(\mathbf{C}_p) \to \mathbf{R}$ est la fonction définie par $d(x, y) = \|\iota(x - y)\|$ si $x - y \in V$ et $d(x, y) = \delta_0$ si $x - y \notin V$, alors d est une distance ultramétrique sur $X(\mathbf{C}_p)$ invariante par translation. On appellera distance admissible sur X une distance sur $X(\mathbf{C}_p)$ obtenue par ce procédé.*

Démonstration. — Appendice A, proposition A.7.1.

Remarque II.1.11

(i) Par construction, si d est une distance admissible sur X et si δ_X désigne le diamètre de $X(\mathbf{C}_p)$, alors la boule ouverte $B(0, \delta_X)$ de $X(\mathbf{C}_p)$ est un sous-groupe muni d'une isométrie analytique sur la boule $B(0, \delta_X)$ de $\mathbf{C}_p^d$.

(ii) La démonstration du (i) du théorème II.1.9 permet de montrer qu'il existe des distances admissibles sur toute variété abélienne.

(iii) Si X a bonne réduction et donc se prolonge en un $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$-schéma en groupes propre et lisse, il y a un choix naturel de distance admissible qui consiste à prendre pour V le noyau de la réduction modulo l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui est isomorphe analytiquement à la boule ouverte de rayon 1. Pour ce choix de distance admissible, deux points de X ont une distance strictement inférieure à 1 si et seulement si ils ont même réduction modulo p.

Définition II.1.12. — Un morphisme de groupes de $X(K)$ dans K qui est localement analytique sera appelé un logarithme de X.

Lemme II.1.13. — *L'application qui à un logarithme λ associe sa différentielle induit un isomorphisme de K-espaces vectoriels de l'ensemble des logarithmes de X sur $H^0(X, \Omega_X^1)$. Si $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$, le logarithme de X associé à ω par cet isomorphisme sera noté λ_ω.*

Démonstration. — Si λ est un logarithme de X, sa différentielle est invariante sur X et nous définit donc un élément de $H^0(X, \Omega_X^1)$. Réciproquement, si $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1)$, soit λ_ω la primitive formelle de ω s'annulant en 0. D'après la démonstration du (i) du théorème II.1.9, il existe un sous-groupe ouvert V de $X(K)$ sur lequel λ_ω converge et λ_ω induit un morphisme de groupes de V dans K. D'après le (ii) du théorème II.1.9, le groupe $X(K)/V$ est de torsion et λ_ω se prolonge de manière unique en un morphisme de groupes de $X(K)$ dans K donné par la formule $\lambda_\omega(x) = \dfrac{1}{n}\lambda_\omega([n]x)$ si $[n]x \in V$. Cette dernière formule permet de montrer que λ_ω est analytique sur X puisqu'elle l'est sur V, ce qui termine la démonstration.

Remarque II.1.14. — Cette technique de prolongement du logarithme apparaît déjà dans [**8**].

Soient G un groupe commutatif et W un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel. Si f est une fonction de G à valeurs dans W, définissons par récurrence une suite de fonctions $f^{[n]} : G^{n+1} \to \mathbf{C}_p$ en posant $f^{[0]} = f$ et en définissant $f^{[n]}$, si $n \geq 1$, par la formule

$$f^{[n]}(x, h_1, \ldots, h_n) = f^{[n-1]}(x + h_n, h_1, \ldots, h_{n-1}) - f^{[n-1]}(x, h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

Remarquons qu'une application de la forme $f^{[n]}(x, h_1, \ldots, h_n)$ est symétrique en $h_1, \ldots, h_n$ et vérifie la relation de cocycle

$$g(x, h_0 + h_1, \ldots, h_n) = g(x + h_0, h_1, \ldots, h_n) + g(x, h_0, h_2, \ldots, h_n). \tag{II.1.15}$$

Théorème II.1.16. — *Soient X une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}_p$ et $g(x, h_1, \ldots, h_n)$ une fonction localement log-méromorphe sur $X(\mathbf{C}_p)^{n+1}$, symétrique en $h_1, \ldots, h_n$ et vérifiant la relation de cocycle II.1.15. Alors il existe une fonction f localement log-méromorphe sur $X(\mathbf{C}_p)$ unique à addition près d'un polynôme de degré $\leq n-1$ en les logarithmes de X, telle que l'on ait $g = f^{[n]}$. De plus, les singularités de f sont du même type que celles de g.*

Avant de faire la démonstration de ce théorème, nous allons en déduire un certain nombre de conséquences. Si n est un entier ≥ 1 et I est une partie de $\{1, \ldots, n\}$, notons $m_I : X^{n+1} \to X$ l'application qui à $(x, h_1, \ldots, h_n)$ associe $x \oplus \left(\oplus_{i \in I} h_i\right)$. Si α est une forme différentielle, une fonction ou un diviseur sur X, posons $\Delta^{[n]}\alpha =$

$\sum_{I\subset\{1,\ldots,n\}}(-1)^{n-|I|}m_I^*\alpha$. En particulier, si f est une fonction sur X, alors $\Delta^{[n]}f = f^{[n]}$. Si ω est une 1-forme différentielle rationnelle fermée sur X, la forme différentielle $\omega^{[2]} = \Delta^{[2]}\omega$ est exacte sur X^3 d'après le théorème du carré (corollaire I.3.17). Comme sa restriction à $X \times \{0\} \times \{0\}$ est nulle, ses primitives (éléments de $K(X^3)_{\mathrm{st}}$) sont constantes sur $X\times\{0\}\times\{0\}$. On note $F_{\omega^{[2]}}$ l'élément de $K(X^3)_{\mathrm{st}}$ vérifiant $dF_{\omega^{[2]}} = \omega^{[2]}$ et $F_{\omega^{[2]}}(x,0,0) = 0$.

Si on veut que l'intégration p-adique soit naturelle, on doit avoir $\left(\int\omega\right)^{[2]} = \int\omega^{[2]}$ à constante près. Comme une fonction de la forme $f^{[2]}(x,h_1,h_2)$ s'annule si $h_1 = h_2 = 0$, on voit que si l'on veut que l'intégration p-adique soit naturelle, on doit avoir $\left(\int\omega\right)^{[2]} = F^{[2]}$. La proposition suivante montre que cela rigidifie suffisamment la situation pour garantir l'unicité de $\int\omega$.

Proposition II.1.17. — *Si ω est une 1-forme rationnelle fermée sur X, il existe une fonction F_ω localement log-méromorphe sur X, unique à addition d'une constante près, vérifiant*

(i) $dF_\omega = \omega$

(ii) $F_\omega^{[2]} = F_{\omega^{[2]}}$.

De plus, si $f \in K(X)_{\mathrm{st}}$ et $\omega = df$, alors $F_\omega = f$ et si $g : X \to Y$ est un morphisme de variétés abéliennes et ω est une 1-forme différentielle fermée sur Y, alors $F_{g^*\omega} = g^*F_\omega$.

Démonstration. — La condition (i) détermine F_ω à addition d'une fonction localement constante près et la condition (ii) à addition d'un polynôme de degré ≤ 1 en les logarithmes de X ; d'où l'unicité à addition d'une constante près. La fin de la proposition étant une conséquence immédiate de l'unicité, il ne reste plus qu'à établir l'existence d'une fonction répondant aux conditions (i) et (ii). Les fonctions $F_{\omega^{[2]}}(x,h_0\oplus h_1,h_2) - F_{\omega^{[2]}}(x\oplus h_0,h_1,h_2) - F_{\omega^{[2]}}(x,h_0,h_2)$ et $F_{\omega^{[2]}}(x,h_1,h_2) - F_{\omega^{[2]}}(x,h_2,h_1)$ s'annulent si $h_1 = h_2 = 0$ et ont une différentielle nulle ; elles sont donc identiquement nulles et on est dans les conditions d'application du théorème II.1.16. On en déduit l'existence d'une fonction F localement log-méromorphe sur X, unique à addition près d'un polynôme de degré ≤ 1 en les logarithmes de X, vérifiant $F^{[2]} = F_{\omega^{[2]}}$. La forme différentielle $\eta = dF - \omega$ vérifie $\eta^{[2]} = 0$ et est donc invariante et la fonction $F_\omega = F - \lambda_\eta$ est une solution de notre problème, ce qui permet de conclure.

Remarque II.1.18. — Si ω est holomorphe, le logarithme λ_ω correspond au choix de F_ω s'annulant en 0.

Soient X une variété abélienne définie sur K et D un diviseur de X. Le théorème du cube (corollaire I.3.18) implique que le diviseur $\Delta^{[3]}D$ de X^4 est principal. Une fonction rationnelle sur X^4 dont le diviseur est égal à $\Delta^{[3]}D$ est constante sur

$$(X^3 \times \{0\}) \cup (X^2 \times \{0\} \times X) \cup (X \times \{0\} \times X^2)$$

et on note $f_D^{(4)}$ la fonction rationnelle sur X^4 dont le diviseur est égal à $\Delta^{[3]}D$ et dont la restriction à

$$(X^3 \times \{0\}) \cup (X^2 \times \{0\} \times X) \cup (X \times \{0\} \times X^2)$$

est égale à 1.

Proposition II.1.19. — *Il existe une fonction G_D appelée fonction de Green du diviseur D qui est unique à addition près d'un polynôme de degré ≤ 2 en les logarithmes de X, localement log-méromorphe sur X et qui vérifie l'équation fonctionnelle $G_D^{[3]} = \operatorname{Log} f_D^{(4)}$. De plus, G_D est localement analytique en dehors de D et a une singularité logarithmique le long de D.*

Démonstration. — La fonction $f_D^{(4)}$ est symétrique en h_1, h_2, h_3 et vérifie la relation de cocycle

$$f_D^{(4)}(x, h_0 \oplus h_1, h_2, h_3) = f_D^{(4)}(x \oplus h_0, h_1, h_2, h_3) f_D^{(4)}(x, h_0, h_2, h_3),$$

comme on le constate en comparant les diviseurs des fonctions en présence et en utilisant le fait que la restriction de $f_D^{(4)}$ à $(X^3 \times \{0\}) \bigcup (X^2 \times \{0\} \times X) \bigcup (X \times \{0\} \times X^2)$ est égale à 1. On est donc dans les conditions d'application du théorème II.1.16 et l'existence de G_D et son unicité à addition près d'un polynôme de degré ≤ 2 en les logarithmes de X en découlent. Le complément concernant les singularités de G_D s'obtient en remarquant que l'on peut lire les singularités de G_D à partir de celles de $G_D^{[3]} = \operatorname{Log} f_D^{(4)}$.

Proposition II.1.20. — *Soient X une variété abélienne définie sur $K \subset \mathbf{C}_p$ et ∂ une dérivation invariante sur X. Si D est un diviseur de X et G_D est une fonction de Green de D, alors la forme différentielle $\omega_{D,\partial} = d(\partial G_D)$ est une forme différentielle de seconde espèce sur X.*

Démonstration. — Soit ∂_{h_3} [resp. d_{h_2}] l'opérateur différentiel ∂ [resp. la différentielle] en la variable h_3 [resp. h_2]. La fonction $(\partial G_D)^{[2]}$ est la restriction à $h_3 = 0$ de la fonction $\partial_{h_3} \operatorname{Log} f_D^{(4)}$; c'est donc une fonction rationnelle sur X^3. On en déduit le fait que ∂G_D est localement méromorphe. De même, la forme différentielle $\omega_{D,\partial}^{[1]}$ est la restriction à $h_2 = h_3 = 0$ de la forme différentielle $d_{h_2}(\partial_{h_3} \operatorname{Log} f_D^{(4)})$; c'est donc une forme différentielle rationnelle sur X^2. D'autre part, si ω est une forme différentielle sur X et si $\iota : X \to X^2$ est l'application qui à x associe $(\ominus x, x)$, alors $\omega = -\iota^* \omega^{[1]}$ à addition près d'une forme différentielle invariante. On en déduit le fait que $\omega_{D,\partial}$ est une forme différentielle rationnelle ; sa primitive étant localement méromorphe, elle est de seconde espèce, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition II.1.21. — *Soient X une variété abélienne définie sur $K \subset \mathbf{C}_p$, D un diviseur de X, G_D une fonction de Green de D et $a, b \in X(K)$.*

(i) *Si F est une fonction rationnelle sur X de diviseur $(D\oplus a\oplus b)-(D\oplus a)-(D\oplus b)+D$, alors la fonction $h(x) = G_D(x\ominus a\ominus b)-G_D(x\ominus a)-G_D(x\ominus b)+G_D(x)-\operatorname{Log} F(x)$ est constante sur X.*

(ii) *Si ω est une forme différentielle de troisième espèce sur X dont le diviseur des résidus est égal à $(D \oplus a) - (D \oplus b)$, alors les fonctions $G_D(x \ominus a) - G_D(x \ominus b)$ et $\int^x \omega$ diffèrent d'un polynôme de degré ≤ 1 en les logarithmes de X.*

Démonstration. — (i) La fonction $G_D^{[3]}(0,x,a,b)$ est le logarithme d'une fonction rationnelle de x, a et b. On en déduit le fait que h est le logarithme d'une fonction rationnelle en x et il suffit de calculer le diviseur de cette fonction pour conclure.

(ii) Soit $f(x) = G_D(x\ominus a) - G_D(x\ominus b) - \int^x \omega$. Par construction, $\Delta^{[2]}f \in K(X^3)_{\mathrm{st}}$. D'autre part, df est holomorphe comme le montre le calcul de son diviseur ; on en déduit le fait que $\Delta^{[2]}f$ est constante et donc nulle car nulle en $(x,0,0)$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration du théorème II.1.16. On tire de la relation de cocycle II.1.15 et de la symétrie de $g(x,h_1,\dots,h_n)$ en les variables $h_1,\dots,h_n$, le fait que si g est localement analytique autour du point $(x_0,\dots,x_n)$, alors il en est de même autour du point $(x_0 \oplus x_i, x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$ et donc que g est localement analytique autour du point $(x_0 \oplus \cdots \oplus x_n, 0,\dots,0)$. Une fonction localement log-méromorphe étant localement analytique autour de presque tout point, l'argument précédent montre qu'il existe $a \in X(\mathbf{C}_p)$ tel que la fonction g_a définie par

$$g_a(x,h_1,\dots,h_n) = g(a \oplus x, h_1,\dots,h_n)$$

soit analytique sur sur un voisinage de $(0,\dots,0)$. La fonction g_a est encore symétrique en les variables $h_1,\dots,h_n$ et vérifie la relation de cocycle II.1.15 et l'application qui à f associe f_a définie par $f_a(x) = f(x \oplus a)$, induit un isomorphisme de l'espace des solutions de l'équation $f^{[n]} = g$ sur celui des solutions de l'équation $f_a^{[n]} = g_a$ et conserve l'espace des polynômes de degré $\leq n-1$ en les logarithmes de X. On peut donc, quitte à remplacer g par g_a, supposer que g est analytique dans un voisinage de $(0,\dots,0)$.

Il existe alors $\delta > 0$ tel que g soit analytique sur V_δ^{n+1} (cf. démonstration du théorème II.1.9 (i) pour la définition de V_δ). Si on veut pouvoir résoudre l'équation $f^{[n]} = g$ sur X^{n+1}, il faut a fortiori être capable de résoudre cette équation sur V_δ^{n+1}. Or, par construction, $V_\delta \subset X(K)$ est analytiquement isomorphe en tant que groupe à la boule $B^d(0,\delta)$ de $\mathbf{C}_p^d$; cet isomorphisme envoyant une base des logarithmes de X sur les applications coordonnées. Nous sommes donc amené à étudier l'équation $f^{[n]} = g$ sur $B^d(0,\delta)^{n+1}$. Nous noterons $x_1,\dots,x_d$ les coordonnées de x et $h_{i,1},\dots,h_{i,d}$, si $i \in \{1,\dots,n\}$, celles de h_i.

Proposition II.1.22. — *Si $g(x,h_1,\dots,h_n)$ est une fonction analytique sur $B^d(0,\delta)^{n+1}$ à valeurs dans K symétrique en $h_1,\dots,h_n$ et vérifiant la relation de cocycle II.1.15,* *alors il existe une fonction analytique $f(x)$ de $B^d(0,\delta)$ dans $\mathbf{C}_p$, unique à addition près d'un polynôme de degré $\leq n-1$ en $x_1,\ldots,x_d$, telle que l'on ait $g = f^{[n]}$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur n. Si $n=0$, il n'y a rien à démontrer. Si $n=1$, les solutions de l'équation $f^{[1]} = g$ sont de la forme $f(x) = -g(x,-x)+C$, d'où le résultat. Si $n \geq 2$ et $i \in \{1,\ldots,d\}$, soit $g_i(x,h_1,\ldots,h_{n-1})$ [resp. $g_{i,j}(x,h_1,\ldots,h_{n-2})$] la valeur en $h_n = 0$ [resp. $h_n = h_{n-1} = 0$] de $\dfrac{\partial}{\partial h_{n,i}} g$ [resp. $\dfrac{\partial}{\partial h_{n,i}} \dfrac{\partial}{\partial h_{n-1,j}} g$]. Si f est une solution de l'équation $f^{[n]} = g$ et si $i \in \{1,\ldots,d\}$, la fonction $f_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i} f$ est solution de l'équation $f_i^{[n-1]} = g_i$. D'autre part, les relations de symétrie et de cocycle satisfaîtes par g se traduisent en des relations analogues pour chacune des fonctions g_i. On déduit donc de l'hypothèse de récurrence l'existence de fonctions analytiques $F_i : B^d(0,\delta) \to \mathbf{C}_p$ telles que l'on ait $g_i = F_i^{[n-1]}$ et qui sont uniques à addition près de polynômes de degré $\leq n-2$ en $x_1,\ldots,x_d$. On déduit de l'identité $F_i^{[n-1]} = g_i$ la formule $F_{i,j}^{[n-2]} = g_{i,j}$ et comme $g_{i,j} = g_{j,i}$, l'hypothèse de récurrence implique que $F_{i,j} - F_{j,i}$ est un polynôme de degré $\leq n-3$ en $x_1,\ldots,x_d$. D'autre part, la forme différentielle $\sum_{i<j}(F_{i,j} - F_{j,i})dx_i \wedge dx_j$ est fermée et à coefficients polynomiaux ; on peut donc trouver des polynômes P_i de degré $\leq n-2$ tels que l'on ait $\sum_{i<j}(F_{i,j} - F_{j,i})dx_i \wedge dx_j = d(\sum_{i=1}^d P_i dx_i)$. Soit $f_i = F_i + P_i$. Comme le degré de P_i est inférieur ou égal à $n-2$, on a $f_i^{[n-1]} = F_i^{[n-1]} = g_i$ et comme la forme différentielle $\sum_{i=1}^d f_i dx_i$ est fermée ; on peut trouver une fonction f analytique sur $B^d(0,\delta)$ vérifiant $df = \sum_{i=1}^d (f_i)dx_i$. Soit $g' = g - f^{[n]}$. Comme le degré des P_i est $\leq n-2$, la valeur en $h_n = 0$ de $\dfrac{\partial}{\partial h_{n,i}} g'$ qui est égale à $g_i - f_i^{[n-1]}$ est identiquement nulle et la fonction g' ne dépend pas de h_n. Comme d'autre part, elle vaut 0 si $h_n = 0$, elle est identiquement nulle et $g = f^{[n]}$. Finalement, pour montrer que les seules solutions de l'équation $f^{[n]} = 0$ sont les polynômes de degré $\leq n-1$, il suffit de reprendre la démonstration précédente en remarquant que l'hypothèse de récurrence implique que les F_i sont des polynômes de degré $\leq n-2$ et comme il en est de même des P_i, l'équation différentielle $df = \sum_{i=1}^d (F_i + P_i)dx_i$ implique que f est un polynôme de degré $\leq n-1$. Réciproquement, ces polynômes sont des solutions évidentes de l'équation $f^{[n]} = 0$.

Proposition II.1.23. — *Soient G un groupe abélien, W un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et $g(x,h_1,\ldots,h_n)$ une application de G^{n+1} dans W vérifiant la relation de cocycle II.1.15 et symétrique en $h_1,\ldots,h_n$. Soient H un sous-groupe de G tel que le groupe G/H soit de torsion et $f : H \to W$ telle que la restriction de g à H^{n+1} soit égale à $f^{[n]}$. Alors f a un unique prolongement $f_G : G \to W$ dont la restriction à H est égale à f et qui vérifie $f_G^{[n]} = g$ sur G^{n+1}. De plus, si $x \in G$ et $l \in \mathbf{N} - \{0\}$ est tel que $[l]x \in H$,* *alors $f_G(x)$ est donné par la formule*

$$f_G(x) = \sum_k b_k g([k]x, x, \ldots, x) - \sum_k a_k f([kl]x), \tag{II.1.24}$$

où les $a_k \in \mathbf{Q}$ ont été choisis de telle sorte que le polynôme $T + \sum_k a_k T^{lk}$ ait un zéro d'ordre au moins n en $T = 1$ et $\sum_k b_k T^k$ est le quotient de $T + \sum_k a_k^{lk}$ par $(T-1)^n$.

Démonstration. — Voir appendice C.

Le théorème II.1.16 se déduit en appliquant cette proposition au cas particulier où $G = X(K)$ et $H = V_\delta$, la proposition II.1.22 permettant d'étudier l'équation $f^{[n]} = g$ sur V_δ^{n+1}. La régularité de f est la même que celle de g comme le montre la formule II.1.24, puisque f est localement analytique sur V_δ. Le même genre d'arguments permet de démontrer la proposition suivante :

Proposition II.1.25. — *Soit $g \in K(X^{n+1})_{\mathrm{st}}$ symétrique en les n dernières variables et vérifiant la relation de cocycle II.1.15 et soit f une fonction localement log-méromorphe sur X solution de l'équation $f^{[n]} = g$. Soient d une distance admissible sur X, $a \in X(K)$ et $\delta > 0$. S'il existe une fonction f_δ log-méromorphe sur $B(a,\delta)$ coïncidant avec f sur un voisinage (pour la topologie p-adique) de a, alors la restriction de f à $B(0,\delta)$ est égale à f_δ.*

Démonstration. — Quitte à remplacer f par la fonction f_a définie par $f_a(x) = f(a \oplus x)$, on peut supposer que $a = 0$, ce que nous ferons. Par hypothèse, il existe $\delta' \in \,]0,\delta[$ tel que l'on ait $f = f_\delta$ sur $B(0,\delta')$. La fonction $g - f_\delta^{[n]}$ est donc identiquement nulle sur $B(0,\delta')^{n+1}$ et log-méromorphe sur $B(0,\delta)^{n+1}$; elle est donc identiquement nulle sur $B(0,\delta)^{n+1}$ (variante du corollaire II.1.8 ; la démonstration du lemme II.1.7 s'étend sans difficulté à ce cas) et l'égalité $f = f_\delta$ sur $B(0,\delta)$ se déduit de la proposition II.1.23 appliquée à $G = B(0,\delta)$ et $H = B(0,\delta')$.

3. Le cas général. — Si Y est une variété lisse définie sur K, soit $\widetilde{H}^1(Y)$ le quotient du K-espace vectoriel des 1-formes différentielles fermées par celui des formes exactes (au sens de la définition II.1.2).

Soient X une variété lisse connexe définie sur K et $\mathrm{Alb}(X)$ sa variété d'Albanese. On suppose $X(K)$ non vide sinon le problème de l'intégration sur $X(K)$ ne se pose pas ; on peut donc trouver un morphisme d'Albanese $a_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ défini sur K.

Lemme II.1.26. — *Si X est une variété lisse et connexe définie sur K et a_X est un morphisme d'Albanese de X dans Alb_X, alors a_X induit un isomorphisme a_X^* de $\widetilde{H}^1(\mathrm{Alb}(X))$ sur $\widetilde{H}^1(X)$.*

Démonstration. — On peut utiliser le théorème de résolution des singularités d'Hironaka pour compactifier X en une variété lisse $\overline{X}$. Une forme différentielle ω rationnelle sur X se prolonge de manière unique en une forme différentielle $\overline{\omega}$ sur $\overline{X}$ et ω est fermée (resp. exacte) si et seulement si $\overline{\omega}$ l'est. Ceci montre que si l'on note ι l'injection de X dans $\overline{X}$, alors ι^* induit un isomorphisme de $\widetilde{H}^1(\overline{X})$ sur $\widetilde{H}^1(X)$. Comme d'autre part, $\mathrm{Alb}(\iota)$ induit un isomorphisme de $\mathrm{Alb}(X)$ sur $\mathrm{Alb}(\overline{X})$ (cf. remarque I.5.11), on peut se ramener au cas où $X = \overline{X}$, c'est-à-dire supposer que X est propre.

Dans ce cas, on déduit du corollaire I.1.16 la suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(X) \longrightarrow \widetilde{H}^1(X) \longrightarrow \overline{K} \otimes \mathrm{Pic}^0(X) \xrightarrow{\mathscr{G}_K} 0,$$

l'application de $\widetilde{H}^1(X)$ dans $\overline{K} \otimes \mathrm{Pic}^0(X)$ étant induite par l'application qui à une forme différentielle fermée associe son résidu. Le lemme est alors une conséquence du fait que a_X^* induit un isomorphisme entre $H^1_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Alb}(X))$ et $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et entre $\mathrm{Pic}^0(\mathrm{Alb}(X))$ et $\mathrm{Pic}^0(X)$ (cf. propositions I.5.3 et I.5.15).

Soit ω une 1-forme différentielle fermée sur X et $a \in X(K)$ n'étant pas un pôle de ω. D'après le lemme précédent, on peut écrire $\omega = a_X^*\eta + df_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \dfrac{df_i}{f_i}$, où η est une 1-forme différentielle fermée sur $\mathrm{Alb}(X)$ bien définie à addition près d'une forme différentielle exacte et les f_i sont des fonctions rationnelles sur X.

Lemme II.1.27. — *La fonction $F_\omega = a_X^* F_\eta + f_0 + \sum_{i=1}^r \lambda_i \operatorname{Log} f_i$, définie pour $x \in X(K)$ n'appartenant pas à un pôle de $a_X^*\eta$, f_0 ou $\dfrac{df_i}{f_i}$ si $1 \leq i \leq r$, se prolonge par continuité sur le complémentaire des pôles de ω en une fonction localement analytique ne dépendant pas du choix de la décomposition de ω et vérifiant l'équation $dF_\omega = \omega$.*

Démonstration. — Soient $\eta' + g_0 + \sum_{i=1}^s \mu_i \dfrac{dg_i}{g_i}$ une autre décomposition de ω et F'_ω la fonction correspondante. Comme a_X^* est un isomorphisme de $\widetilde{H}^1(\mathrm{Alb}(X))$ sur $\widetilde{H}^1(X)$, on en déduit le fait que $\eta - \eta'$ est exacte et donc, d'après la proposition II.1.17, que $a_X^* \int(\eta - \eta') \in K(X)_{\mathrm{st}}$. Mais alors la fonction $F_\omega - F'_\omega$ est un élément de $K(X)_{\mathrm{st}}$ dont la différentielle est nulle ; elle est donc constante. Ceci montre que F_ω ne dépend pas (à constante près) du choix de la décomposition de ω. Pour montrer que $F_{\omega,a}$ s'étend par continuité au complémentaire des pôles de ω, il suffit de montrer que si $x \in X(K)$ n'est pas un pôle de ω, on peut trouver une décomposition de ω dont les pôles apparents ne contiennent pas x ce qui résulte des lemmes de déplacement usuels. Finalement, $dF_\omega = \omega$ par construction et grâce au (i) de la proposition II.1.17.

Si on veut que l'intégration p-adique soit naturelle, on doit poser $\int \omega = F_\omega$, ce qui prouve déjà l'unicité (si elle existe) d'une intégration naturelle. Le lemme précédent et la proposition II.1.17 montrent que l'intégration définie de cette manière satisfait aux propriétés (i)', (ii)' et (iii)'. Il ne nous reste plus qu'à vérifier sa compatibilité aux morphismes. Soit donc $F : X \to Y$ un morphisme de variétés lisses. Choisissons des morphismes d'Albanese $a_X : X \to \mathrm{Alb}(X)$ et $a_Y : Y \to \mathrm{Alb}(Y)$. Par la propriété universelle de la variété d'Albanese, il existe une application $a_F : \mathrm{Alb}(X) \to \mathrm{Alb}(Y)$ telle que l'on ait $a_F \circ a_X = a_Y \circ F$. Soit maintenant ω une 1-forme différentielle fermée sur Y. Il existe η sur $\mathrm{Alb}(X)$ telle que $\omega - a_Y^*\eta$ soit exacte, mais alors $F^*\omega - a_X^* a_F^*\eta$ est aussi exacte et donc, par construction, la fonction $\int F^*\omega - a_X^* \int a_F^*\eta$ appartient à

$K(X)_{\mathrm{st}}$. D'autre part, l'intégration sur les variétés abéliennes étant compatible avec les morphismes entre variétés abéliennes (proposition II.1.17), on a $\int a_F^*\eta = a_F^* \int \eta$ d'où l'on tire $a_X^* \int a_F^*\eta = (a_F \circ a_X)^* \int \eta = (a_Y \circ F)^* \int \eta$ et comme $(a_Y \circ F)^* \int \eta$ diffère de $F^* \int \omega$ par un élément de $K(X)_{\mathrm{st}}$ (par construction de $\int \omega$), on en tire le fait que la fonction $\int F^*\omega - F^* \int \omega$ appartient à $K(X)_{\mathrm{st}}$ et donc est constante car sa différentielle est nulle. Ceci permet de conclure.

Proposition II.1.28. — *Si X est une variété lisse géométriquement connexe définie sur K, alors la sous-$K(X)$-algèbre de l'algèbre des fonctions localement log-méromorphe sur X, engendrée par les intégrales de seconde espèce et les fonctions de Green des diviseurs de X provenant de la variété d'Albanese de X, possède la propriété d'unicité du prolongement*

Démonstration. — On commence par montrer que l'algèbre B engendrée par les intégrales de seconde espèce possède la propriété d'unicité du prolongement en appliquant le lemme II.1.7 à $A = K(X)$ et en prenant pour $(f_i)_{i\in I}$ une base de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. Puis on démontre la proposition en appliquant le lemme II.1.7 à B et en prenant pour I une base sur $\mathbf{Q}$ du sous-$\mathbf{Q}$ espace vectoriel de $\mathbf{Q} \otimes \mathrm{Div}(\mathrm{X})$ engendré par les diviseurs provenant de $\mathrm{Alb}(X)$ et pour f_i, si $i \in I$, une fonction de Green associée au diviseur i. La propriété (i) est alors une conséquence du fait que les dérivées d'une fonction de Green sont des intégrales de seconde espèce (proposition II.1.20) et la propriété (ii) se démontre en considérant le diviseur des résidus de la forme différentielle $\sum_i a_i df_i + dg$ (celui de dg est nul car g est localement méromorphe si $g \in B$).

4. Le point de vue de Zarhin. — D'après un théorème de Chevalley, tout groupe algébrique commutatif est extension d'une variété abélienne par un groupe linéaire. Utilisant ce théorème et un théorème de Coleman (théorème II.1.9 dans ce volume), Zarhin montre [**49, 50**] qu'une fois choisie une branche du logarithme p-adique, il y a une manière canonique d'associer à une 1-forme différentielle invariante ω sur un groupe algébrique commutatif G une primitive λ_ω de ω qui est un logarithme de G (*i.e.* qui vérifie $\lambda_\omega(x \oplus y) = \lambda_\omega(x) + \lambda_\omega(y)$ si $x, y \in G$). Avec le point de vue développé dans ce volume, au lieu de choisir une branche du logarithme p-adique, on peut considérer la fonction Log à valeurs dans K_{st} et la construction de Zarhin permet de retrouver la primitive de ω (telle qu'elle est donnée par le théorème II.1.4 et la remarque II.1.5) s'annulant en l'élément neutre de G. Pour définir la primitive d'une 1-forme différentielle fermée sur une variété lisse quelconque, on peut alors utiliser le fait qu'une telle forme peut toujours s'obtenir comme image inverse d'une 1-forme différentielle invariante sur un groupe algébrique convenable (proposition I.6.23) et pour vérifier que le résultat ne dépend pas des choix que l'on a fait, Zarhin remplace la fonctorialité d'Albanese utilisée dans ce volume par les résultats de [**21**].

II.2. Intégration p-adique sur les courbes

1. Intégrales de première et seconde espèces. — Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. Soient X une courbe algébrique de genre $g \geq 1$ définie sur K et $J = \mathrm{Pic}^0(X)$ sa jacobienne. Choisissons un point P_0 de X et soit $\iota : X \to J$ l'application qui à $P \in X$ associe la classe du diviseur $P - P_0$; cette application nous permet d'identifier X à une sous-variété de J et l'application $\iota^* : H^1_{\mathrm{dR}}(J) \to H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est un isomorphisme, ce qui nous permet d'identifier ces 2 groupes de cohomologie. Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ une base de $H^0(J, \Omega^1_J)$ et $(\partial_1, \dots, \partial_g)$ la base des dérivations invariantes sur J duale de $(\omega_1, \dots, \omega_g)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ les logarithmes de J définis par $d\lambda_i = \omega_i$ et $\lambda_i(0) = 0$. La dualité entre les bases $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ et $(\partial_1, \dots, \partial_g)$ se traduit par les formules $\partial_i \lambda_j = \delta_i^j$ si $1 \leq i, j, \leq g$. Soit $\delta_J > 0$ tel que l'application $x \to \lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_g(x))$ induise un isomorphisme analytique d'un voisinage V_{δ_J} sur la boule ouverte $B(0, \delta_J) \subset \mathbf{C}_p^g$. Soit d_J la distance admissible sur J construite à partir de ces données (cf. II.1.10) et si $x \in X(\mathbf{C}_p)$, posons $\|x\|_J = d_J(x, 0)$.

L'application $m : X^g \to J$ qui à $P_1, \dots, P_g$ associe $\iota(P_1) \oplus \cdots \oplus \iota(P_g)$ est surjective et induit une équivalence birationnelle de X^g / S_g (où S_g est le groupe des permutations de $\{1, \dots, g\}$) sur J. En particulier, il existe un ouvert de Zariski non vide U de J tel que si $u \in U$, alors l'équation $P_1 \oplus \cdots \oplus P_g = u$ a une et une seule solution à permutation des P_i près et les P_i sont tous distincts. Un tel u sera dit général.

Lemme II.2.1. — *Soient ω une forme différentielle de seconde espèce, $m : X^g \to J$ l'application définie ci-dessus et, si $i \in \{1, \dots, g\}$, soit $\pi_i : X^g \to X$ la projection sur le i-ème facteur. Alors il existe une (unique) forme différentielle ω_J de seconde espèce sur J telle que l'on ait $m^* \omega_J = \sum_{i=1}^g \pi_i^* \omega$. De plus, $\iota^* \omega_J$ et ω ont même image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$.*

Démonstration. — Soit η une forme différentielle de seconde espèce sur J telle que $\iota^* \eta$ et ω aient même image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. On peut donc écrire ω sous la forme $\iota^* \eta + df$, où f est une fonction rationnelle sur X et, si F_η et F_ω désignent des primitives de ω et η respectivement, alors $F_\omega = F_\eta \circ \iota + f$ à addition d'une constante près. Comme η est de seconde espèce sur J, la fonction $F_\eta(x \oplus y) - F_\eta(x) - F_\eta(y)$ est une fonction rationnelle de $(x, y) \in J^2$. On en déduit le fait que la fonction $F_\eta(\iota(P_1) \oplus \cdots \oplus \iota(P_g))) - \sum_{i=1}^g F_\eta(\iota(P_i))$ est une fonction rationnelle de $(P_1, \dots, P_g) \in X^g$; il en est donc de même de la fonction $F_\eta(\iota(P_1) \oplus \cdots \oplus \iota(P_g)) - \sum_{i=1}^g F_\omega(\iota(P_i))$ qui est une fonction symétrique en $P_1, \dots, P_g$ et il existe une fonction f_J rationnelle sur J telle que l'on ait $f_J(\iota(P_1) \oplus \cdots \oplus \iota(P_g)) = F_\eta(\iota(P_1) \oplus \cdots \oplus \iota(P_g)) - \sum_{i=1}^g F_\omega(\iota(P_i))$. Il suffit alors de poser $\omega_J = \eta - df_J$ pour conclure.

Pour terminer cette section, nous allons donner une manière de caractériser les formes différentielles exactes parmi celles de seconde espèce grâce à leur primitive. Cette caractérisation utilise la notion d'ensemble borné dont la définition se trouve dans l'introduction et les principales propriétés sont développées dans l'appendice A.

Proposition II.2.2. — *Soient ω une forme différentielle de seconde espèce sur X et U un ouvert de Zariski de X non vide sur lequel ω est holomorphe. Si une (et donc toute) primitive de ω est bornée sur tout sous-ensemble borné de $U(\mathbf{C}_p)$, alors ω est la différentielle d'une fonction rationnelle.*

Démonstration. — Le fait que si ω est de seconde espèce et exacte alors ses primitives sont bornées sur tout borné de $U(\mathbf{C}_p)$ est un cas particulier de la propriété **B9** ; la réciproque est un cas particulier du théorème II.3.16 dont la démonstration utilise la non dégénérescence de l'application « périodes p-adiques ».

2. Le diviseur Θ et ses fonctions de Green. — Soit Θ le diviseur de J image de X^{g-1} par l'application qui à $P_1, \ldots, P_{g-1}$ associe $\ominus P_1 \cdots \ominus P_{g-1}$. Par rapport avec la définition adoptée au chapitre I, cette définition diffère par un signe, mais comme le diviseur Θ est symétrique, on récupère un translaté du diviseur considéré au chapitre I, ce qui n'est pas une différence fondamentale. Si u est général, l'intersection de X avec $u \oplus \Theta$ consiste en les g points (avec multiplicité 1) $P_{1,u}, \ldots, P_{g,u}$ solutions de l'équation $P_{1,u} \oplus \cdots \oplus P_{g,u} = u$ et sera notée X_u.

Lemme II.2.3. — *Si u est général, l'application qui, à une forme différentielle de seconde espèce régulière en dehors de X_u et ayant au plus des pôles d'ordre inférieur ou égal à 2 en les points de X_u, associe son image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, est un isomorphisme.*

Démonstration. — Soient $P \in X$ et κ le diviseur d'une forme différentielle. Si on applique le théorème de Riemann-Roch au diviseur $\kappa + 2P$, on obtient comme conséquence le fait que l'espace des formes différentielles holomorphes en dehors de P et ayant au plus un pôle double en P est de dimension $1 + g = 1 + \dim H^0(X, \Omega^1_X)$. Une telle forme différentielle a un résidu nul en P et est donc de seconde espèce. On en déduit le fait que si Y est un ensemble fini de points de X, l'espace $\Omega(Y)$ des formes différentielles de seconde espèce holomorphes en dehors de Y et ayant au plus des pôles doubles en les points de Y est de dimension $g + \operatorname{card} Y$. Si u est général, il n'existe pas de fonction rationnelle holomorphe en dehors de X_u et ayant des pôles simples en les points de X_u ; on en déduit le fait que l'application naturelle de $\Omega(X_u)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est injective. Comme d'après la discussion précédente, ces deux espaces ont la même dimension, cette application est un isomorphisme, ce qu'il fallait démontrer.

Le diviseur Θ est « symétrique » ; c'est-à-dire qu'il existe $w \in J$ (unique) tel que l'on ait $x \in \Theta \Leftrightarrow w \ominus x \in \Theta$. Si G est une fonction de Green du diviseur Θ, il en est de même de G_w définie par la formule $G_w(x) = G(w \ominus x)$. On dira que G est symétrique si l'on a $G(x) = G(w \ominus x)$ pour tout $x \in J$. Notons que si G est une fonction de Green associée à Θ quelconque, alors $\frac{1}{2}(G + G_w)$ est symétrique.

Proposition II.2.4. — *L'application qui, à une fonction de Green G, associe le sous-espace de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ engendré par $\iota^* d(\partial_1 G), \ldots, \iota^* d(\partial_g G)$ induit une bijection entre* *l'ensemble des fonctions de Green symétriques (définies à addition d'une constante près) associées au diviseur Θ et l'ensemble des supplémentaires de $H^0(X,\Omega^1_X)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ qui sont totalement isotropes pour le cup-produit.*

Démonstration. — Soit G une fonction de Green (pas forcément symétrique) associée à Θ. D'après la proposition II.1.20, les formes différentielles $d(\partial_i G)$ sont de seconde espèce sur J. D'autre part, si u est général, la forme différentielle $\eta_{i,u} = \iota^* d(\partial_i G(x\ominus u))$ est de seconde espèce sur X et son image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est indépendante de u et sera notée η_i. De plus, $\eta_{i,u}$ est l'unique forme différentielle de seconde espèce sur X régulière en dehors de X_u, ayant des pôles d'ordre inférieur ou égal à 2 en les points de X_u et dont l'image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est égale à η_i (cf. lemme II.2.3).

Lemme II.2.5. — *La famille $\omega_1,\dots,\omega_g,\eta_1,\dots,\eta_g$ forme une base de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. De plus, le cup produit sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ à valeurs dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$ identifié canoniquement à K via l'application* deg *est obtenu par bilinéarité à partir des formules*
(i) $\omega_i \cup \omega_j = 0$
(ii) $\omega_i \cup \eta_j = -\delta_i^j$.
(iii) $\eta_i \cup \eta_j = 0$

Démonstration. — Si ω et η sont deux formes différentielles de seconde espèce et si F_ω est une primitive de ω, alors le cup produit de leurs images dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est égal, d'après la proposition I.2.3, à la somme des résidus de la forme différentielle $F_\omega\eta$ (on peut avoir à faire le calcul en remplaçant K par une extension finie). Ceci nous donne déjà la formule pour $\omega_i \cup \omega_j$. Pour démontrer le (ii), remarquons que pour u général, la forme différentielle $\omega_u = \iota^* dG(x\ominus u)$ ayant des pôles simples en $P_{1,u},\dots,P_{g,u}$ avec résidu égal à 1, la somme des résidus de $\lambda_j(x)\omega_u$ est égale à $\sum_{i=1}^g \lambda_j(\iota(P_{i,u})) = \lambda_j(u)$. Si on dérive alors cette égalité par rapport à u et que l'on utilise les formules $\partial_i\omega_u = -\eta_{i,u}$ et $\partial_i\lambda_j(u) = \delta_i^j$, on obtient la formule pour $\omega_j \cup \eta_i$. Les formule (i) et (ii) et le fait que $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est de dimension $2g$ montrent que $\omega_1,\dots,\omega_g,\eta_1,\dots,\eta_g$ en forment une base.

Soit $f(u)$ la somme des résidus de la forme différentielle $\partial_i G(\iota(x)\ominus u_0)\omega_u$. On peut calculer $f(u)$ de deux manières différentes. La première est de remarquer que l'on a comme précédemment $\partial_j f(u) = \eta_i \cup \eta_j$ et donc que $df(u) \in H^0(J,\Omega^1_J)$. On peut aussi calculer $f(u)$ brutalement, utilisant la formule $\omega_u = \sum_{i=k}^g \partial_k G(\iota(x)\ominus u)\omega_k$ On obtient alors, notant $\alpha_{j,k}$ le résidu de $\partial_i G(x\ominus u_0)\omega_k$ en P_{j,u_0},

$$f(u) = \sum_{j=1}^g \partial_i G(\iota(P_{j,u})\ominus u_0) + \sum_{j=1}^g\sum_{k=1}^g \alpha_{j,k}\partial_k G(\iota(P_{j,u_0})\ominus u).$$

Maintenant, $\partial_i G(u\ominus u_0) - \sum_{j=1}^g \partial_i G(\iota(P_{j,u})\ominus u_0)$ est une fonction rationnelle de u. On tire de cette remarque le fait que $df(u)$ est une forme différentielle de seconde espèce sur J dont l'image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(J)$ est dans le sous-espace engendré par $\eta_1,\dots,\eta_g$

et comme celui-ci est un supplémentaire de $H^0(J, \Omega^1_J)$, cela implique que $df(u) = 0$ et donc que $\eta_i \cup \eta_j = 0$ et termine la démonstration du lemme.

Notons $\mathscr{G}_\Theta$ l'ensemble des fonctions de Green symétriques (à addition d'une constante près) associées au diviseur Θ et $\mathrm{Is}(X)$ l'ensemble des supplémentaires de $H^0(X, \Omega^1_X)$ qui sont totalement isotropes pour le cup-produit. Fixons un élément G_0 de $\mathscr{G}_\Theta$. Si G en est un autre, il existe une unique matrice symétrique $M_G = (a_{i,j})_{1\leq i\leq g,\ 1\leq j\leq g}$ telle que l'on ait

$$G(x) = G_0(x) + \sum_{i=1}^{g}\sum_{j=1}^{g} a_{i,j}\big(\lambda_i(x) - \frac{1}{2}\lambda_i(w)\big)\big(\lambda_j(x) - \frac{1}{2}\lambda_j(w)\big),$$

à addition d'une constante près. Notons W_0 le sous-espace de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ engendré par les images η_i de $\iota^* d(\partial_i G_0)$ pour $1 \leq i \leq g$. Le lemme précédent nous assure que $W_0 \in \mathrm{Is}(X)$. Si W est un autre supplémentaire de $H^0(X, \Omega^1_X)$, il existe une unique matrice $M_W = (b_{i,j})_{1\leq i\leq g,\ 1\leq j\leq g}$ telle que $\eta_{i,W} = \eta_{i,l_0} + \sum_{j=1}^{g} \omega_j \in W$ si $1 \leq i \leq g$. Comme $\eta_{i,W} \cup \eta_{j,W} = b_{i,j} - b_{j,i}$, W est totalement isotrope si et seulement si M_W est symétrique. On voit donc que les ensembles $\mathscr{G}_\Theta$ et $\mathrm{Is}(X)$ sont en bijection naturelle avec l'ensemble des matrices symétriques. D'autre part, un petit calcul nous donne la formule $d(\partial_i G) = \eta_i + 2\sum_{j=1}^{g} a_{i,j}\omega_j$, ce qui fait que l'application $G \to W$ induit sur les matrices symétriques associées l'application $M_G \to M_W = 2M_G$ qui est évidemment bijective. Ceci termine la démonstration de la proposition.

Fixons dorénavant un élément W de $\mathrm{Is}(X)$ et notons $G_{\Theta,W}$ l'élément de $\mathscr{G}_\Theta$ lui correspondant et posons $F_{i,W} = \partial_i G_{\Theta,W}$. Nous appellerons parfois $G_{\Theta,W}$ la fonction de Green du diviseur Θ définie par W. Nous dirons aussi qu'un élément de W est de type $(0,1)$ et qu'un élément de $H^0(X, \Omega^1_X)$ est de type $(1,0)$. Un élément de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ s'écrit donc de manière unique comme la somme d'un élément de type $(0,1)$ et d'un élément de type $(1,0)$. Le lemme II.2.6 ci-dessous rassemble les propriétés de $G_{\Theta,W}$ que nous aurons à utiliser par la suite. Nous aurons besoin d'une propriété supplémentaire des ensembles bornés particulière aux variétés abéliennes.

B14 : Si J est une variété abélienne, d une distance admissible sur J, Y une sous-variété fermée de J et D une sous-variété de Y, alors un sous-ensemble E de $Y - D$ est borné dans $Y - D$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que E soit inclus dans $E_{D,\varepsilon} = \{x \in Y(K) \mid d(x, D) \geq \varepsilon\}$.

Lemme II.2.6

(i) $G_{\Theta,W}(w \ominus x) = G_{\Theta,W}(x)$.

(ii) *Si les n_i sont des éléments de $\mathbf{Z}$ vérifiant $\sum n_i = 0$ et les u_i sont des éléments de J vérifiant $\oplus_i[n_i]u_i = 0$, alors il existe une fonction F rationnelle sur J telle que l'on ait $\sum_i n_i G_{\Theta,W}(x \ominus u_i) = \mathrm{Log}\, F(x)$. De plus, si les u_i sont généraux, la restriction à X de F est une fonction rationnelle de diviseur $\sum_i n_i X_{u_i}$; en particulier,* *si $\sum_i n_i X_{u_i} = 0$, alors la restriction de $\sum_i n_i G_{\Theta,W}(x \ominus u_i)$ à X est constante (sur son ensemble de définition).*

(iii) *Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que si $d(x,\Theta) \geq \varepsilon$ et $||v||_J < d(x,\Theta)$, alors*

$$\Big|G_{\Theta,W}(x \oplus v) - G_{\Theta,W}(x) - \sum_{i=1}^{g} F_{i,W}(x)\lambda_i(v)\Big| \leq C_\varepsilon R(\frac{||v||}{d(x,\Theta)}),$$

où l'on a posé $R(\delta) = \begin{cases} \delta^2 & \textit{si } \log\delta \leq -1, \\ \Big(e\log\delta\Big)^{-2} & \textit{si } \ -1 \leq \log\delta < 0. \end{cases}$

Démonstration. — Le (i) est vrai par construction. D'après le lemme C.5, la condition $\sum_i n_i = 0$ et $\oplus_i [n_i]u_i = 0$ est equivalente au fait que $\sum_i n_i u_i$ est dans le carré de l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[J(K)]$, ce qui permet d'utiliser le (i) de la proposition II.1.21 pour démontrer le (ii).

Passons à la démonstration du (iii). On peut écrire le développement de Taylor de $G_{\Theta,W}(x \oplus v)$ en le point x et les variables $z_i = \lambda_i(v)$ sous la forme

$$G_{\Theta,W}(x) + \sum_{i=1}^{g} F_{i,W}(x) z_i + \sum_{k_1+\dots+k_g \geq 2} a_{k_1,\dots,k_g}(x) z_1^{k_1} \dots z_g^{k_g}.$$

Les fonctions $f_{i,j}(x) = \partial_i\partial_j G_{\Theta,W}(x)$ sont des fonctions rationnelles sur X holomorphes sur $J - \Theta$; elles sont donc bornées sur l'ensemble $E_{\Theta,\varepsilon} = \{x \in J \mid d(x,\Theta) \geq \varepsilon\}$ puisque celui-ci est borné dans $J - \Theta$ (propriété **B14** appliquée à $Y = J$ et $D = \Theta$). D'autre part, si $x \in E_{\Theta,\varepsilon}$ et $||v|| < d(x,\Theta)$, alors $x \oplus v \in E_{\Theta,\varepsilon}$. On en tire le fait qu'il existe $C'_\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit (i,j), la restriction de $f_{i,j}$ à la boule ouverte de centre x et de rayon $d(x,\Theta)$ est une fonction holomorphe majorée en norme par C'_ε. Ceci nous fournit une majoration des coefficients du développement de Taylor de $f_{i,j}$ en le point x et comme celui-ci se déduit de manière simple du développement de Taylor de $G_{\Theta,W}$, on obtient

$$\begin{cases} |k_i(k_i-1)a_{k_1,\dots,k_g}(x)| \leq C'_\varepsilon d(x,\Theta)^{-(k_1+\dots+k_g)} & \text{si } 1 \leq i \leq g \\ \\ |k_i k_j a_{k_1,\dots,k_g}(x)| \leq C'_\varepsilon d(x,\Theta)^{-(k_1+\dots+k_g)} & \text{si } 1 \leq i,j \leq g \text{ et } i \neq j. \end{cases}$$

On en déduit la majoration $|a_{k_1,\dots,k_g}(x)| \leq C'_\varepsilon (k_1 + \dots + k_g)^2 d(x,\Theta)^{-(k_1+\dots+k_g)}$ si $x \in E_{\Theta,\varepsilon}$ puis le fait que la série de Taylor de $G_{\Theta,W}(x \oplus v)$ converge dans la boule ouverte de centre x et de rayon $d(x,\Theta)$ et donc que $G_{\Theta,W}$ est somme de sa série de Taylor dans cette boule (proposition II.1.25). On peut alors utiliser l'inégalité ultramétrique pour majorer $\Big|\sum_{k_1+\dots+k_g \geq 2} a_{k_1,\dots,k_g}(x) z_1^{k_1} \dots z_g^{k_g}\Big|$ par $\sup_{k\geq 2} k^2(d(x,\Theta)^{-1}||v||)^k$ si $||v|| < d(x,\Theta)$. Le lemme s'en déduit avec $C_\varepsilon = 4C'_\varepsilon$.

Terminons cette section par 2 lemmes techniques qui nous serviront lors de la démonstration du théorème II.2.13.

Lemme II.2.7. — *Soit $y \in X$. Il existe $\varepsilon_y > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_y$ et f est une fonction rationnelle sur X dont le support du diviseur de la restriction à $B(y, \varepsilon_y)$ est inclus dans $B(y, \varepsilon)$ et telle que $v_p(f(x))$ soit constante sur la bande $\varepsilon \leq d(x,y) \leq \varepsilon_y$, alors le degré du diviseur de la restriction de f à $B(y, \varepsilon)$ est nul.*

Démonstration. — L'application $x \to \lambda(x) - \lambda(y)$ induit une isométrie analytique de la boule ouverte $B(y, \delta_J)$ de J sur la boule ouverte $B(0, \delta_J)$ de C_p^g. L'image de $C \cap B(y, \delta_J)$ par cette isométrie est une courbe lisse C_y de $B(0, \delta_J)$ et le théorème des fonctions implicites implique qu'il existe $\varepsilon_y > 0$ et $i \in \{1, \ldots, g\}$ tel que la projection sur la i-ème coordonnée induise une isométrie analytique d'un voisinage de 0 dans C_y sur la boule ouverte $B(0, \varepsilon_y)$ de $\mathbf{C}_p$. Composant les deux isométries précédentes, on en déduit l'existence de $\varepsilon_y > 0$ et $i \in \{1, \ldots, g\}$ tels que l'application $x \to z_y(x) = \lambda_i(x) - \lambda_i(y)$ soit une isométrie analytique de $B(y, \varepsilon_y) \cap C$ sur $B(0, \varepsilon_y)$. Soit f une fonction rationnelle sur X dont le support du diviseur de la restriction à $B(y, \varepsilon_y)$ est inclus dans $B(y, \varepsilon)$. Définissons une fonction F méromorphe sur $B(0, \varepsilon_y)$ par la formule $f(x) = F(z_y(x))$ si $d(x,y) \leq \varepsilon_y$ et soit $D = \sum_i n_i P_i$ le diviseur de la restriction de f à $B(y, \varepsilon_y)$. La fonction $G(z) = F(x) \prod_i (z - z_y(P_i))^{-n_i}$ est analytique sur $B(0, \varepsilon_y)$. Elle a donc un développement du type $G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. D'autre part, $G(z)$ ne s'annule pas sur $B(0, \varepsilon_y)$, ce qui implique, compte-tenu du lien entre la valuation des zéros d'une série entière et son polygône de Newton, que l'on a $|a_n| < |a_0| \varepsilon_y^n$ et donc en particulier que $|G(z)| = |a_0|$ pour tout $z \in B(0, \varepsilon_y)$. Comme $|\frac{z}{z-a}| = 1$ si $|z| > |a|$, et que par hypothèse, on a $|z_y(P_i)| < \varepsilon$, on voit que l'on a $|f(x)| = |a_0| |z_y(x)|^{\mathrm{Deg}(D)}$ si $\varepsilon < |z_y(x)| < \varepsilon_y$ et donc que $v_p(f(x))$ n'est constante pour $x \in \{\varepsilon < d(x,y) < \varepsilon_y\}$ que si $\mathrm{Deg}(D) = 0$.

Lemme II.2.8. — *Soit $u \in J$ général. Il existe $\varepsilon_u > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_u$ et f est une fonction rationnelle sur X vérifiant les deux conditions suivantes*

(i) *le support du diviseur de f est inclus dans $\cup_{i=1}^g B(P_{i,u}, \varepsilon)$;*

(ii) *pour tout $1 \leq i \leq g$, le degré du diviseur de la restriction de f à $B(P_{i,u}, \varepsilon)$ est nul,*

alors la restriction de $\mathrm{Log}\, f$ *à l'ensemble $\{x \in X \mid d(x, \Theta \oplus u) > \varepsilon\}$ est une fonction bornée.*

Démonstration. — Prenons pour ε_u le minimum des ε_y pour $y \in X_u$ et des $d(y_1, y_2)$ où (y_1, y_2) décrit l'ensemble des couples d'éléments distincts de X_u. Par définition de ε_u, on a $B(P_{i,u}, \varepsilon) \cap B(P_{j,u}, \varepsilon) = \varnothing$ si $\varepsilon < \varepsilon_u$ et $i \neq j$. Soit $\varepsilon < \varepsilon_u$ et f vérifiant les conditions du lemme. Soit D_i le diviseur de la restriction de f à $B(P_{i,u}, \varepsilon)$. Le degré de D_i étant égal à 0, on peut écrire D_i sous la forme $\sum_{j=1}^{n_i} P_{i,j} - Q_{i,j}$ et quitte à rajouter des termes du type $P_{i,u} - P_{i,u}$, on peut supposer que les n_i sont tous égaux à un même entier n. Posons alors $u_j = (\oplus_{i=1}^g P_{i,j}) \ominus u$ et $v_j = (\oplus_{i=1}^g Q_{i,j}) \ominus u$. Comme $P_{i,j} \ominus P_{i,u}$ et $Q_{i,j} \ominus P_{i,u}$ appartiennent à $B(0, \varepsilon)$, il en est de même de u_j et v_j. La comparaison de leurs diviseurs montre que les fonctions $\operatorname{Log} f$ et

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(G_\Theta(x\ominus u\ominus u_j)-G_\Theta(x\ominus u\ominus v_j)\Big)$$

ne diffèrent que par une constante que nous noterons C. Utilisant alors le (iii) du lemme II.2.6 et les identités $\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i(u_j)-\lambda_i(v_j))=0$ qui découlent de l'identité $\oplus_{j=1}^{n}(u_j\ominus v_j)=\operatorname{div}(f)=0$, on obtient

$$|\operatorname{Log} f(x)-C|_p\leq C_\varepsilon R\Big(\frac{\varepsilon}{d(x,\Theta\oplus u)}\Big),$$

si $d(x,\Theta\oplus u)>\varepsilon$, ce qui permet de conclure.

3. Intégrales de troisième espèce. — Rappelons qu'une forme différentielle de troisième espèce sur X est une forme différentielle rationnelle sur X ayant au plus des pôles simples et telle que les résidus en ces pôles soient des entiers. Si ω est une forme différentielle de troisième espèce, nous noterons $\operatorname{Div}(\omega)$ le diviseur $\sum_P n_P P$ où P parcourt X et n_P est le résidu de ω en P. C'est un diviseur de degré 0. Dans le cas particulier où $\omega=\dfrac{df}{f}$ et f est une fonction rationnelle sur X, on a $\operatorname{Div}(\omega)=\operatorname{Div}(f)$. D'après le I.6, §3, il existe un groupe algébrique $\widetilde{J}$ extension de J par un groupe additif dont les points représentent les formes différentielles de troisième espèce modulo les différentielles logarithmiques de fonctions rationnelles ($\widetilde{J}$ est d'ailleurs l'extension universelle de J par un groupe additif). L'algèbre de Lie de $\widetilde{J}$ est isomorphe à $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et l'application de $\widetilde{J}$ dans J est induite par celle qui à une forme différentielle de troisième espèce associe son diviseur ; le noyau de cette application est constitué des différentielles holomorphes.

La forme différentielle $\omega_u=\iota^*dG_{\Theta,W}(x\ominus u)$ introduite lors de la démonstration du lemme II.2.6 n'est pas rationnelle car le diviseur de ses résidus est égal à X_u et n'est donc pas de degré 0, mais la fonction $F_{i,W}(x\ominus u)-F_{i,W}(x\ominus v)-F_{i,W}(v\ominus u)$ étant une fonction rationnelle de (x,u,v), ceci implique que si u et v sont deux points généraux de J, alors

$$\omega_u-\omega_v=\iota^*\Big(\sum_{i=1}^{g}\big(F_{i,W}(x\ominus u)-F_{i,W}(x\ominus v)\big)\omega_i\Big)$$

est une forme différentielle rationnelle de troisième espèce sur X dont le diviseur des résidus est X_u-X_v. Nous dirons d'une forme différentielle de troisième espèce sur X est de type $(1,1)$ si elle est dans le $\mathbf{Z}$-module engendré par les $\omega_u-\omega_v$, le couple (u,v) décrivant les couples de points généraux de J. Notons que la notion de type (1,1) comme celle de type (0,1) dépend complètement du choix de W ; il n'y a que celle de type (1,0) qui soit intrinsèque.

Proposition II.2.9

(i) *Une forme différentielle ω de troisième espèce sur X peut s'écrire de manière unique sous la forme $\omega = \omega^{1,0} + \omega^{1,1}$, où $\omega^{1,0}$ est holomorphe (de type $(1,0)$) et $\omega^{(1,1)}$ est de type $(1,1)$.*

(ii) *Si $\omega = \omega^{1,0} + \sum_i n_i \omega_{u_i}$, alors l'image de $\mathrm{Div}(\omega)$ dans J est égale à $\oplus_i [n_i] u_i$*

(iii) *Si $\omega = \dfrac{df}{f}$ où f est une fonction rationnelle sur X, alors ω est de type $(1,1)$.*

(iv) *Si $\omega = \omega^{(1,0)} + \sum_u n_u \omega_u$, alors $\int^x \omega = \int^x \omega^{(1,0)} + \sum_u n_u G_{\Theta,W}(x \ominus u)$.*

Démonstration. — Par linéarité, on se ramène à démontrer l'existence de la décomposition dans le cas où le diviseur des résidus de ω est de la forme $P_1 - P_2$. Soient $Q_1, \dots, Q_{g-1}$ des points de X tels que les points $u = P_1 \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{g-1}$ et $v = P_2 \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{g-1}$ soient généraux; alors la forme différentielle $\omega - \omega_u + \omega_v$ est holomorphe comme le montre le calcul du diviseur de ses résidus, d'où l'existence de la décomposition. De plus le (ii) est clair sur cette décomposition, il ne reste donc que l'unicité à prouver pour terminer la démonstration de (i) et (ii).

Pour ce faire, il suffit de vérifier que, si la forme différentielle $\sum_i n_i \omega_{u_i}$ où les n_i sont des entiers satisfaisant la relation $\sum_i n_i = 0$, est holomorphe, alors elle est nulle. Mais le calcul du diviseur de $\sum_i n_i \omega_{u_i}$ montre que si cette forme est holomorphe, alors $\sum_i n_i X_{u_i} = 0$ et donc que $\sum_i n_i G_{\Theta,W}(x \ominus u_i)$ est constante sur X ((ii) du lemme II.2.6) et sa différentielle est nulle comme annoncé.

Soit f une fonction rationnelle sur X et soit $\sum_i n_i P_i$ son diviseur. Choisissons des points $Q_1, \dots Q_{g-1}$ appartenant à X de telle sorte que chacun des points $u_i = P_i \oplus Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_{g-1}$ soit général. Alors $\oplus_i [n_i] u_i = 0$ et donc $\sum_i n_i G_{\Theta,W}(x \ominus u_i)$ est le logarithme d'une fonction rationnelle F sur J. La restriction de F à X a même diviseur que f et lui est donc proportionnelle; on en tire $\dfrac{df}{f} = \sum_i n_i \omega_{u_i}$, ce qui démontre le (iii).

Finalement, le (iv) est une conséquence du caractère naturel de l'intégration p-adique.

Remarque II.2.10. — On peut aussi caractériser $\int \omega$ comme étant l'unique (à addition d'une constante près) fonction F_ω qui est analytique en dehors du support du diviseur de ω et qui vérifie les 2 conditions suivantes :

(i) $dF_\omega = \omega$,

(ii) pour toute fonction rationnelle f sur X dont le diviseur $\mathrm{Div}(f) = \sum n_P P$ est étranger à $\mathrm{Div}(\omega) = \sum n_Q Q$, on a

$$F_\omega(\mathrm{Div}(f)) = \sum_P n_P F_\omega(P) = \sum_Q m_Q \operatorname{Log} f(Q).$$

L'unicité d'une telle fonction provenant de ce que la différence de deux telles fonctions est localement constante d'après la propriété (i) et, considérée comme une fonction additive sur les diviseurs, s'annule sur les diviseurs principaux d'après la propriété (ii) et donc s'étend en une application additive localement constante de $J(\mathbf{C}_p)$ dans $\mathbf{C}_p \oplus \mathbf{Q}\,\mathrm{Log}\,p$. Ceci implique, d'après le lemme II.1.13 que cette différence est identiquement nulle sur $J(\mathbf{C}_p)$ et donc sur les diviseurs de degré 0. Pour montrer l'existence, il suffit de vérifier que la primitive de ω donnée au (iv) du lemme répond au problème, ce qui constitue un cas particulier de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce (théorème II.2.13).

4. La loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce

Théorème II.2.11. — *Soit ω une forme différentielle de troisième espèce. Il existe alors un unique élément $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega)$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ tel que si u est général et η_u est la forme différentielle de seconde espèce ayant au plus des pôles doubles en les points de X_u et dont l'image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ est égal à $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega)$, alors quel que soit l'ensemble borné E de $X - X_u$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f rationnelle sur X et un entier s tels que, pour tout $x \in E$, l'on ait*

$$\Big|\int_{x_0}^{x} \omega - \int_{x_0}^{x} \eta_u - \frac{1}{s}\,\mathrm{Log}\,\frac{f(x)}{f(x_0)}\Big|_p < \varepsilon.$$

De plus l'application $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}$ est additive et vérifie les formules suivantes

(i) $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega) = \omega$ *si ω est de type* $(1,0)$.

(ii) $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega)$ *est de type* $(0,1)$ *si ω est de type* $(1,1)$.

(iii) $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega) = 0$ *si* $\omega = \dfrac{df}{f}$.

(iv) $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}(\omega) = \omega^{1,0} + \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(\mathrm{Div}(\omega))\eta_i$.

Remarque II.2.12. — L'application $\mathrm{Log}_{\widetilde{J}}$ n'est autre que le logarithme de $\widetilde{J}$ à valeur dans son algèbre de Lie.

Démonstration. — Commençons par prouver l'unicité. Supposons que nous ayons deux éléments η, η' de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ satisfaisant aux conclusions du théorème. Alors, quel que soit le sous-ensemble borné E de $X - X_u$, il existe une fonction rationnelle f et un entier s tels que l'on ait

$$\Big|\int_{x_0}^{x} (\eta_u - \eta'_u) - \frac{1}{s}\,\mathrm{Log}\,\frac{f(x)}{f(x_0)}\Big| < 1, \text{ si } x \notin X - U.$$

En particulier, la fonction $v_p(f(x))$ est constante sur E et donc le support du diviseur de f est inclus dans $X - E$. Choisissons E de telle sorte que $X - E$ soit inclus dans $\{x \mid d(x, X_u) < \varepsilon\}$ avec $\varepsilon < \varepsilon_u$ (c'est possible grâce à la propriété **B14** appliquée à $Y = X$ et $D = X_u$). Comme $\varepsilon < \varepsilon_y$ pour tout $y \in X_u$, cela implique, d'après le lemme II.2.7, que le diviseur de la restriction de f à chacune des boules $B(P_{i,u}, \varepsilon)$ est de degré 0. De plus, comme $\varepsilon < \varepsilon_u$, cela implique, d'après le lemme II.2.7, que $|\,\mathrm{Log}\,\dfrac{f(x)}{f(x_0)}|$ est borné sur l'ensemble $E_{u,\varepsilon} = \{x \in X \mid d(x, \Theta \oplus u) > \varepsilon\}$ il en est donc de même de $\int_{x_0}^{x}(\eta_u - \eta'_u)$. Finalement, si F est borné dans $X - X_u$, alors $\iota(F)$ est borné dans $J - (\Theta \oplus u)$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $F \subset E_{u,\varepsilon}$ ((ii) de la proposition II.3.5). Ceci implique que $\eta_u - \eta'_u$ est une forme différentielle de seconde espèce sur X holomorphe sur $X - X_u$ et dont une primitive est bornée sur tout sous-ensemble borné de $X - X_u$. On en déduit, grâce à la proposition II.2.2, que $\eta_u - \eta'_u$ est exacte et donc que $\eta = \eta'$; d'où l'unicité.

La démonstration de l'existence repose sur la «formule» $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[s]\omega$, où s varie dans les entiers et $[s]$ représente la multiplication par s sur l'extension universelle. D'après la proposition II.2.9, on peut trouver des éléments v de J et des entiers n_v vérifiant $\sum n_v = 0$ de telle sorte que $u \ominus v$ soit général pour tout v et $\omega = \omega^{1,0} + \sum n_v \omega_{u\ominus v}$. Si s est un entier, tel que $u \ominus [s]v$ est général pour tout v tel que $n_v \neq 0$, posons $\omega_s = \omega^{1,0} + \frac{1}{s} \sum n_v \omega_{u\ominus[s]v}$. Par construction, la forme différentielle $s(\omega - \omega_s)$ est une forme différentielle de troisième espèce de type (1,1) dont le diviseur a pour image 0 dans J ; c'est donc la différentielle logarithmique d'une fonction f_s rationnelle sur X et on obtient

$$\int_{x_0}^{x} \omega = \frac{1}{s} \mathrm{Log} \frac{f_s(x)}{f_s(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \omega^{1,0} + \frac{1}{s} \sum n_v G_\Theta(x \ominus u \oplus [s]v).$$

Les points généraux formant un ensemble ouvert pour la topologie de Zariski donc à fortiori pour la topologie p-adique, il existe δ tel que $u \ominus v$ est général si $\|v\| < \delta$. Soit E un sous-ensemble borné de $X - X_u$ et $\varepsilon > 0$ tel que E soit contenu dans $E_{u,\varepsilon}$. Le groupe $J(\mathbf{C}_p)/B(0,\varepsilon)$ étant de torsion, il existe s_0 tel que l'on ait $\|[s_0]v\| < \varepsilon$ pour tout v tel que $n_v \neq 0$. Mais alors, $u \ominus [p^n s_0]v$ est général si $n \in \mathbf{N}$ et $n_v \neq 0$ et

$$\frac{\|[p^n s_0]v\|}{d(x, \Theta \oplus u)} = p^{-n} \frac{\|[s_0]v\|}{d(x, \Theta \oplus u)} < p^{-n} \text{ si } x \in E,$$

et donc, utilisant le lemme II.2.5, on obtient

$$|G_\Theta(x \ominus u \oplus [p^n s_0]v) - G_\Theta(x \ominus u) - p^n s_0 \sum_{i=1}^{g} F_{i,W}(x \ominus u)\lambda_i(v)| \leq C_\varepsilon p^{-2n}, \text{ si } x \in E.$$

Si on utilise alors les formules

$$\sum_v n_v \lambda_i(v) = \lambda_i(\mathrm{Div}(\omega)) \quad \text{et} \quad F_{i,W}(x \ominus u) - F_{i,W}(x_0 \ominus u) = \int_{x_0}^{x} \eta_{i,u},$$

on voit que l'on peut majorer

$$\Big|\int_{x_0}^{x} \omega - \frac{1}{p^n s_0} \mathrm{Log} \frac{f_{p^n s_0}(x)}{f_{p^n s_0}(x_0)} - \int_{x_0}^{x} \omega^{1,0} - \Big(\sum_{i=1}^{g} \lambda_i(\mathrm{Div}(\omega)) \int_{x_0}^{x} \eta_{i,u}\Big)\Big|$$

par $C_\varepsilon p^{-n} |s_0|_p^{-1}$ pour tout $x \in E$; d'où l'existence de $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega)$. En fait, on obtient même une formule explicite pour $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega)$, à savoir

$$\mathrm{Log}_{\tilde{J}}(\omega) = \omega^{1,0} + \sum_{i=1}^{g} \lambda_i(\mathrm{Div}(\omega))\eta_i.$$

On a donc démontré la formule (iv) du théorème ; comme celle-ci implique les autres de manière évidente, cela termine la démonstration du dit théorème.

On peut utiliser la formule explicite ainsi obtenue pour $\mathrm{Log}_{\bar{J}}(\omega)$ pour donner une démonstration de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce rappelée dans le théorème suivant.

Théorème II.2.13. — *Soient α_1 et α_2 deux formes différentielles de troisième espèce dont les diviseurs sont étrangers. Soit P_0 n'appartenant pas à la réunion des supports des diviseurs de α_1 et α_2 et soit $\sum_i n_{i,j}P_{i,j}$ le diviseur de α_j ; alors*

$$\int_{\mathrm{Div}(\alpha_1)} \alpha_2 - \int_{\mathrm{Div}(\alpha_2)} \alpha_1 = \mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_1) \cup \mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_2).$$

Démonstration. — Le cup-produit entre deux éléments de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ se calcule en utilisant le lemme II.2.5. Par bilinéarité et antisymétrie, il suffit de traiter les cas suivants :

(i) α_1 et α_2 holomorphes (*i.e.* de type (1,0)),

(ii) α_1 holomorphe, α_2 de type (1,1) et $\mathrm{Div}(\alpha_2) = P_1 - P_2$,

(iii) α_1 et α_2 de type (1,1) ; $\mathrm{Div}(\alpha_1) = P_1 - P_2$ et $\mathrm{Div}(\alpha_2) = P_3 - P_4$.

Le cas (i) se ramène à la formule $0 = 0$ et le cas (ii) se ramène par linéarité au cas où α_1 est un des éléments ω_i de la base $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ de $H^0(X, \Omega^1_X)$. On a alors

$$\int_{\mathrm{Div}(\alpha_1)} \alpha_2 - \int_{\mathrm{Div}(\alpha_2)} \alpha_1 = 0 - \int_{P_2}^{P_1} \omega_i = \lambda_i(P_2) - \lambda_i(P_1)$$

$$\mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_2) = \sum_{j=1}^{g} (\lambda_j(P_1) - \lambda_j(P_2))\eta_j,$$

d'où l'on tire la formule

$$\mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_1) \cup \mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_2) = \omega_i \cup \Big(\sum_{j=1}^{g} (\lambda_j(P_1) - \lambda_j(P_2))\eta_j\Big) = \lambda_i(P_2) - \lambda_i(P_1)$$

et l'égalité voulue dans ce cas là.

Dans le dernier cas, $\mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_1)$ et $\mathrm{Log}_{\bar{J}}(\alpha_2)$ sont de type (1,0) et leur cup-produit est nul ; il n'y a donc plus qu'à vérifier qu'il en est de même pour $\int_{P_2}^{P_1} \alpha_2 - \int_{P_4}^{P_3} \alpha_1$. Pour cela nous allons utiliser la symétrie du diviseur Θ ; c'est-à-dire l'équation fonctionnelle $G_{\Theta,W}(x) = G_{\Theta,W}(w \ominus x)$. Choisissons $u \in \ominus\Theta$ tel que, si l'on pose $v = \ominus u \ominus w$ (ce qui fait que $v \in \ominus\Theta$), alors les points $u \oplus P_3$, $u \oplus P_4$, $v \oplus P_1$ et $v \oplus P_2$ sont généraux. Remarquons que l'on a $X_{u\oplus P_3} - X_{u\oplus P_4} = P_3 - P_4$ et $X_{v\oplus P_1} - X_{v\oplus P_2} = P_1 - P_2$, d'où l'on tire $\alpha_2 = \omega_{u\oplus P_3} - \omega_{u\oplus P_4}$ et $\alpha_1 = \omega_{v\oplus P_1} - \omega_{v\oplus P_2}$, ce qui, notant $G_{\Theta,W}$ simplement

G, nous donne

$$\begin{aligned}\int_{P_2}^{P_1} \alpha_2 &= G(P_1 \ominus P_3 \ominus u) - G(P_1 \ominus P_4 \ominus u) - G(P_2 \ominus P_3 \ominus u) + G(P_2 \ominus P_4 \ominus u)\\ &= G(P_3 \ominus P_1 \ominus v) - G(P_4 \ominus P_1 \ominus v) - G(P_3 \ominus P_2 \ominus v) + G(P_4 \ominus P_2 \ominus v)\\ &= \int_{P_4}^{P_3} \omega_{v\oplus P_1} - \omega_{v\oplus P_2} = \int_{P_4}^{P_3} \alpha_1\end{aligned}$$

et permet de terminer la démonstration.

Remarque II.2.14. — La formule obtenue ci-dessus diffère de manière inexplicable de celle obtenue sur les complexes (proposition I.7.13) par un signe.

5. Compléments sur la fonction logarithme. — Si p est un nombre premier et K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, notons $\mathscr{L}(K^*)$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K \oplus \mathbf{Q}\,\mathrm{Log}\,p$ et soit Log l'application de K^* dans $\mathscr{L}(K^*)$ qui à x associe $\log_p x + v_p(x)\,\mathrm{Log}\,p$, où $\log_p$ est le logarithme d'Iwasawa normalisé par la convention $\log_p p = 0$ et v_p est la valuation sur K normalisée par la convention $v_p(p) = 1$. Nous écrirons un élément x de $\mathscr{L}(K^*)$ sous la forme $x^{(0)} + x^{(1)}\,\mathrm{Log}\,p$ avec $x^{(0)} \in K$ et $x^{(1)} \in \mathbf{Q}$.

Si K est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, posons $\mathscr{L}(K^*) = \mathbf{R}$ et notons Log l'application de K^* dans $\mathscr{L}(K^*)$ définie par $\mathrm{Log}(x) = \log|x|$, où log est le logarithme usuel sur $\mathbf{R}_+^*$ et $|x|$ est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{C}$ donnée par la formule $|a+ib|^2 = a^2 + b^2$ si a et b sont réels. Si L/K est une extension de corps locaux, nous noterons $\mathrm{Tr}_{L/K}$ l'unique application $\mathbf{Q}$-linéaire de $\mathscr{L}(L^*)$ dans $\mathscr{L}(K^*)$ vérifiant $\mathrm{Tr}_{L/K}(\mathrm{Log}(x)) = \mathrm{Log}(N_{L/K}(x))$ si $x \in L^*$.

Si K est un corps de nombres, notons $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ le sous-ensemble du produit des $\mathscr{L}(K_v^*)$, v décrivant les places de K, des éléments $(\dots, x_v, \dots)$ vérifiant $x_v \in K_v$ pour presque tout v. Nous noterons encore Log l'application évidente de $\mathbf{A}_K^*$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ et nous noterons $\mathscr{L}(K^*)$ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ engendré par l'image de K^* par l'application Log. Le quotient de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ par $\mathscr{L}(K^*)$ sera noté $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$. L'application qui à $(x_\infty, \dots, x_p^{(0)} + x_1^{(1)}\,\mathrm{Log}\,p, \dots) \in \mathscr{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*)$ associe

$$(x_\infty - \sum_{l<\infty} x_l^{(1)} \log l, \dots, x_p^{(0)} - \sum_{l<\infty,\ l\neq p} x_l^{(1)} \log_p l, \dots) \tag{II.2.15}$$

s'annule sur $\mathscr{L}(\mathbf{Q}^*)$ et induit un isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}^*/\mathbf{Q}^*)$ et $\prod_{p\leq\infty} \mathbf{Q}_p$ (où l'on a posé $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$).

Si L est une extension finie de K, l'application $\mathbf{Q}$-linéaire $\mathrm{Tr}_{L/K}$ de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_L^*)$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$ définie par la formule

$$\mathrm{Tr}_{L/K}(\dots, x_w, \dots) = (\dots, y_v, \dots),$$

où $y_v = \sum_{w|v} \mathrm{Tr}_{L_w|K_v}(x_w)$ envoie $\mathscr{L}(L^*)$ dans $\mathscr{L}(K^*)$ et induit par passage au quotient un application $\mathbf{Q}$-linéaire de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_L^*/L^*)$ dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$ que nous noterons encore $\mathrm{Tr}_{L/K}$. En particulier, l'application $\mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}$ peut être vue comme une application $\mathbf{Q}$-linéaire de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$ dans $\prod_{p\leq\infty}\mathbf{Q}_p$. Remarquons pour finir que si $K\subset L$, alors $\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$ s'identifie de manière naturelle à un sous-ensemble de $\mathscr{L}(\mathbf{A}_L^*/L^*)$ et que l'on a comme d'habitude $\mathrm{Tr}_{L/K}(x)=[L:K]x$ si $x\in\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$.

6. Fonctions de Green adéliques et hauteurs adéliques. — Soit maintenant X une courbe de genre $g\geq 1$ définie sur un corps de nombre K. Choisissons pour chaque place finie v de K un supplémentaire de $H^0(X,\Omega_X^1)$ dans $K_v\otimes H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ totalement isotrope pour le cup-produit. Notons $\mathrm{Is}_K(X)$ l'ensemble de ces choix ; un élément de $\mathrm{Is}_K(X)$ sera noté W et on notera W_v sa composante en v. Remarquons que si L est un corps de nombres contenant K, alors $\mathrm{Is}_K(X)$ s'identifie naturellement à un sous-ensemble de $\mathrm{Is}_L(X)$.

Fixons un élément W de $\mathrm{Is}_K(X)$. Rappelons que si v est une place finie, une forme différentielle de troisième espèce est dite de type $(1,1)$ relativement à W_v si son image par $\mathrm{Log}_{\tilde{J}}$ appartient à W_v (cf. théorème II.2.11) et que si v est archimédienne, une forme différentielle de troisième espèce est dite de type (1,1) si toutes ses périodes sont purement imaginaires (cf **[27]** par exemple). Si D est un diviseur sur X de degré 0 défini sur K, il existe pour toute place v de K une unique forme différentielle de troisième espèce ω_{D,W_v} de résidu D, définie sur K_v et qui soit de type (1,1) relativement à W_v. Nous appellerons fonction de Green (relativement à W) associée au diviseur D, la fonction $G_{D,W}$ (définie à addition d'une constante près) de $\prod_v X(K_v)$ à valeurs dans $\prod_v\mathscr{L}(K_v^*)$ donnée par la formule $G_{D,W}((\ldots,x_v,\ldots))=(\ldots,G_{D,W,v}(x_v),\ldots)$, où $G_{D,W,v}$ est une primitive de ω_{D,W_v} si v est une place finie et la partie réelle d'une primitive de ω_{D,W_v}, si v est une place archimédienne (cf. démonstration de la proposition I.2.12).

Lemme II.2.16. — *Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs de degré* 0 *définis sur K qui sont étrangers, alors on a*

(i) $G_{D_1,W}(D_2)=G_{D_2,W}(D_1)$

(ii) $G_{D_1,W}(D_2)\in\mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*)$

(iii) *si D_1 ou D_2 est un diviseur principal, alors* $G_{D_1,W}(D_2)\in\mathscr{L}(K^*)$

(iv) *si L est une extension finie de K et que l'on considère D_1,D_2 et W comme étant définis sur L, alors on a* $\mathrm{Tr}_{L/K}(G_{D_1,W}(D_2))=[L:K]G_{D_1,W}(D_2)$.

Démonstration. — Le (iv) est une évidence ; le (i) se démontre place par place et est une conséquence immédiate de la loi de réciprocité pour les intégrales de troisième espèce (théorème II.2.13) et du fait que W_v est totalement isotrope pour le cup-produit si v est finie ; le cas v archimédien étant bien connu (cf. proposition I.2.13 par exemple).

D'après le (i), D_1 et D_2 jouent le même rôle. On peut donc se contenter de traiter le cas où $D_1=\mathrm{Div(f)}$; mais alors, $G_{D_1,W,v}(x)=\mathrm{Log}(f(x))$ pour toute place v de K et donc $G_{D_1,W}(D_2)=\mathrm{Log}(f(D_2))\in\mathscr{L}(K^*)$. Il nous reste le (iii) à prouver. Il s'agit de vérifier que l'on a $G_{D_1,W}(D_2) \in K_v$ pour presque tout v. Nous allons en fait démontrer que si v est une place de K en laquelle X a bonne réduction et telle que les diviseurs D_1 et D_2 ne se rencontrent pas sur la fibre spéciale, alors, on a $G_{D_1,W}(D_2) \in K_v$. Ceci suffit pour démontrer le (iv) car le nombre de places ne satisfaisant pas ces conditions est fini.

Soit donc $\mathscr{X}$ un modèle de X sur $\mathscr{O}_{K_v}$ ayant bonne réduction en v. Si D est un diviseur sur X défini sur K_v, soit $\mathscr{X}_D$ l'ensemble des points de $\mathscr{X}(\mathscr{O}_{K_v})$ n'ayant pas même réduction qu'un point du support de D. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme II.2.17. — *Soit ω une forme différentielle de troisième espèce sur X. Alors, si F_ω est une primitive de ω, la composante $F_\omega(x)^{(1)}$ est constante sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Div}(\omega)}$.*

Démonstration. — Avant de commencer la démonstration de ce lemme, remarquons qu'il permet de terminer la démonstration du lemme II.2.16 puisque D_2 est de degré 0. Nous allons utiliser le fait que si f est une fonction rationnelle sur X, alors $v_p(f(x))$ est constant sur $\mathscr{X}_{\mathrm{Div}(f)}$. Fixons un point $x_0 \in \mathscr{X}_{\mathrm{Div}(\omega)}$. Il existe un voisinage $U \subset \mathscr{X}_{\mathrm{Div}(\omega)}$ de x_0 sur lequel F_ω est analytique (ce qui implique en particulier que la composante $F_\omega(x)^{(1)}$ est constante sur U). L'image de U^g dans $J(\mathbf{C}_p)$ par l'application qui à $(x_1, \dots, x_g)$ associe l'image du diviseur $x_1 + \cdots + x_g - gx_0$ contient un voisinage V de 0. Soit alors $x \in \mathscr{X}_{\mathrm{Div}(\omega)}$; il existe un entier $n > 0$ tel que l'image du diviseur $n(x - x_0)$ se trouve dans V et donc il existe des points $x_1, \dots, x_g$ de V tels que $nx - (n-g)x_0 - x_1 - \cdots - x_g$ soit le diviseur d'une fonction f. Mais alors

$$nF_\omega(x) - (n-g)F_\omega(x_0) - \sum_{i=1}^{g} F_\omega(x_i) = \mathrm{Log}\, f(\mathrm{Div}(\omega)) \in \mathbf{C}_p$$

car $\mathrm{Div}(\omega)$ est de degré 0 et $\mathrm{Div}(f)$ et $\mathrm{Div}(\omega)$ ne se rencontrent pas modulo p. L'égalité $F_\omega(x_i)^{(1)} = F_\omega(x_0)^{(1)}$ si $1 \leq i \leq g$ implique donc que l'on a $F_\omega(x)^{(1)} = F_\omega(x_0)^{(1)}$ si $x \in \mathscr{X}_{\mathrm{Div}(\omega)}$, ce qui termine la démonstration du lemme II.2.17.

Soit W un élément de $\mathrm{Is}_K(X)$ fixé. Soient x et y deux éléments de $J(\overline{\mathbf{Q}})$ et D_1, D_2 deux diviseurs de degré 0 sur X définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$ dont les classes dans J sont respectivement x et y et dont les supports sont étrangers. Soit L une extension finie de K sur laquelle D_1 et D_2 sont définis. D'après le lemme II.2.16, la quantité $-\dfrac{1}{[L:K]} \mathrm{Tr}_{L/K}(G_{D_1,W}(D_2)) \in \mathscr{L}(\mathbf{A}_K^*/K^*)$ ne dépend que de x, y et W et pas des choix de D_1, D_2 et L. Son image par $\dfrac{1}{[K:\mathbf{Q}]} \mathrm{Tr}_{K/\mathbf{Q}}$ dans $\prod_{p \leq \infty} \mathbf{Q}_p$ sera notée $\langle x, y \rangle_W$ et l'image de $\langle x, y \rangle_W$ dans $\mathbf{Q}_p$ sera notée $\langle x, y \rangle_{W,p}$

Théorème II.2.18. — *L'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ de $J(\overline{\mathbf{Q}}) \times J(\overline{\mathbf{Q}})$ à valeurs dans $\prod_{p \leq \infty} \mathbf{Q}_p$ ainsi construit est bilinéaire et symétrique. D'autre part, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W,p}$ coïncide avec l'accouplement de Néron-Tate quand $p = \infty$ et avec l'accouplement construit par Gross et Coleman dans le cas où X a bonne réduction en p.*

Démonstration. — Avant de faire la démonstration de ce théorème, remarquons qu'il nous fournit une construction des hauteurs classiques ne faisant pas appel à la théorie de l'intersection. En fait, comme on va le voir, les contributions locales fournies en général par la théorie de l'intersection sont ici absorbées par la composante $G_{D_1,W}(D_2)^{(1)}$ de $G_{D_1,W}(D_2)$. L'ingrédient principal de la construction classique des hauteurs comme somme de symboles locaux est la proposition suivante (due à Néron [**33**]).

Proposition II.2.19. — *Soient p une place de $\mathbf{Q}$, v une place de K ne divisant pas p si p est finie et $|\ |_v$ la norme usuelle sur K_v (choisie de manière à ce que la formule du produit soit vérifiée; ce qui fait d'ailleurs que si $K_v = \mathbf{C}$, alors $|\ |_v$ ne vérifie pas l'inégalité triangulaire). Il existe un unique accouplement $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,v}$ défini sur les couples de diviseurs de degré 0 de $X(K_v)$ dont les supports sont disjoints et qui vérifie les propriétés suivantes*

(i) $\langle D_1, D_2\rangle_{p,v} = \langle D_2, D_1\rangle_{p,v}$,

(ii) $\langle D_1, D_2 + D_3\rangle_{p,v} = \langle D_1, D_2\rangle_{p,v} + \langle D_1, D_3\rangle_{p,v}$ *(quand les 3 termes sont bien définis),*

(iii) $\langle \mathrm{Div}(f), D\rangle_{p,v} = \log_p |f(D)|_v$

(iv) $\langle (x) - (x_0), D\rangle_{p,v}$ *est une fonction continue de x.*

Démonstration. — Voir [**27**] par exemple. Notons que la propriété (i) est en fait une conséquence des 3 autres.

Pour définir un accouplement global, il reste à définir $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,v}$ dans le cas où p est finie et v divise p. La différence avec le cas précédent est qu'un accouplement vérifiant les 4 propriétés précédentes n'est pas uniquement déterminée (et la propriété (i) n'est pas une conséquence des 3 autres). Pour rétablir une unicité, Coleman et Gross choisissent un supplémentaire W_v de $H^0(X, \Omega^1_X)$ dans $K_v \otimes H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ (qu'il vaut mieux prendre totalement isotrope pour le cup-produit si l'on veut que la propriété (i) soit vérifiée) et associent à tout diviseur D de degré 0 une fonction de Green qui s'obtient à partir de G_{D,W_v} en donnant une valeur particulière à $\mathrm{Log}\, p$ (dans [**16**], le choix de $\mathrm{Log}\, p$ est dicté par le choix d'un caractère du groupe des idèles de K à valeurs dans $\mathbf{Q}_p^*$, mais ici, nous ne nous intéresserons qu'au caractère « norme » qui correspond au logarithme d'Iwasawa pour lequel on a $\mathrm{Log}\, p = 0$; la fonction de Green associée au diviseur D par Gross et Coleman (pour ce choix de caractère) n'est donc rien d'autre que la composante $\left(G_{D,W_v}\right)^{(0)}$ de G_{D,W_v}). On définit alors l'accouplement local $\langle\cdot,\cdot\rangle_{v,p}$ dans le cas $v|p$ et p finie, par la formule $\langle D_1, D_2\rangle_{v,p} = \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{Q}_p}\left(\left(G_{D_1,W}(D_2)\right)^{(0)}\right)$ et l'accouplement global $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ par la formule $\langle D_1, D_2\rangle_p = -\sum_v \langle D_1, D_2\rangle_{v,p}$.

Maintenant, si on utilise la formule II.2.15 pour identifier $\mathscr{L}(\mathbf{A}^*_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}^*)$ à $\prod_{p\leq\infty}\mathbf{Q}_p$, cela permet d'écrire $\langle D_1, D_2\rangle_{W,p}$ sous la forme

$$-\sum_{v|p}\mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{Q}_p}\Big(\big(G_{D_1,W_v}(D_2)\big)^{(0)}\Big)+\sum_{q<\infty}\sum_{v|q}[K_v:\mathbf{Q}_q]\big(G_{D_1,W_v}(D_2)\big)^{(1)}\log_p q$$

et pour vérifier que l'on a bien $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W,p}=\langle\cdot,\cdot\rangle_p$, il suffit de vérifier que l'on a

$$\langle D_1,D_2\rangle_{v,p}=-[K_v:\mathbf{Q}_q]\big(G_{D_1,W_v}(D_2)\big)^{(1)}\log_p q$$

et pour cela, il suffit de vérifier que le second membre de cette égalité vérifie les 4 propriétés de la proposition II.2.19, ce qui est assez clair.

7. Fonction de Green d'un point. — Soient toujours X une courbe de genre $g\geq 1$, W un supplémentaire totalement isotrope de $H^0(X,\Omega^1_X)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et soit P un point de X. Choisissons des points $Q_1,\dots,Q_g$ de X tels que les points

$$u_i=P\oplus Q_1\oplus\cdots\oplus Q_{i-1}\oplus Q_{i+1}\oplus\cdots Q_g$$

pour $1\leq i\leq g$ et $v=Q_1\oplus\cdots\oplus Q_g$ soient généraux. La fonction

$$\Big(\sum_{i=1}^{g}G_{\Theta,W}(x\ominus u_i)\Big)-(g-1)G_{\Theta,W}(x\ominus v)$$

peut se prolonger par continuité à $X-P$, a une singularité logarithmique en P et est, d'après le (ii) du lemme II.2.6 indépendante, à addition d'une constante près, du choix de $Q_1,\dots,Q_g$. Elle sera appelée la fonction de Green du point P et notée $G_{P,W}$ (elle dépend bien sûr du choix de W). Dans le cas classique, le choix de W est imposé, ce qui fait que l'on peut définir une fonction de Green G_P bien définie à addition d'une constante près et on peut fixer la constante en imposant la relation $\int_{X(\mathbf{C})}G_P(x)d\mu=0$, où μ est la métrique plate (*i.e.* $d\mu=\dfrac{1}{g}\sum_{i=1}^g\omega_i\wedge\overline{\omega}_i$, où les ω_i forment une base orthonormée de $H^0(X,\Omega^1_X)$ pour le produit scalaire hermitien $\langle\omega,\eta\rangle=\int_{X(\mathbf{C})}\omega\wedge\overline{\eta}$). Si X est une courbe elliptique, cette condition est équivalente aux formules

(1) $G_P(x)=G_0(x\ominus P)$, si G_0 est la fonction de Green de l'élément neutre de X.

(2) Si n est un entier supérieur ou égal à 1, alors $G_0(x)=\sum_{[n]y=x}G_0(y)$ quel que soit $x\in X$.

En p-adique, le problème de fixer la constante semble un peu délicat en général. La proposition suivante (due à Mazur-Tate **[35]**) montre comment le faire dans le cas où X est une courbe elliptique.

Proposition II.2.20. — *Soient X une courbe elliptique et W un supplémentaire de $H^0(X,\Omega^1_X)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ (totalement isotrope car de dimension 1). Il existe un unique choix de la fonction de Green $G_{0,W}$ de l'élément neutre de X tel que l'on ait $G_0(x)=\sum_{[n]y=x}G_0(y)$ quels que soient l'entier $n\geq 1$ et $x\in X$.*

Démonstration. — L'unicité est immédiate ; prouvons l'existence. Soit G un choix arbitraire de fonction de Green pour 0. Utilisant le fait que

$$G(a \oplus b \oplus c) - G(a \oplus b) - G(a \oplus c) - G(b \oplus c) + G(a) + G(b) + G(c)$$

est le logarithme d'une fonction rationnelle en a, b, c, on démontre, par récurrence sur n (en utilisant le triplet $(a, b, c) = ([n-1]x, x, x)$), que si $n \geq 1$, la fonction $G([n]x) - n^2 G(x)$ est le logarithme d'une fonction rationnelle. Ceci permet de montrer que la fonction $G([n]x) - \sum_{[n]Q=0} G(x \ominus Q)$ est constante sur X car c'est le logarithme d'une fonction rationnelle dont le diviseur est nul. Notons cette constante C_n. On doit poser $G_{0,W}(x) = G(x) + \dfrac{C_n}{n^2-1}$ et il s'agit donc de vérifier que $\dfrac{C_n}{n^2-1}$ ne dépend pas de n. Or on a

$$\begin{aligned} G(x) = C_n + \sum_{[n]y=x} G(y) &= C_n + \sum_{[n]y=x} (C_m + \sum_{[m]z=y} G(z)) \\ &= C_n + n^2 C_m + \sum_{[nm]z=x} G(z), \end{aligned}$$

ce qui, échangeant les rôles de n et de m, implique $C_n + n^2 C_m = C_m + m^2 C_n$ et permet de conclure.

II.3. Périodes p-adiques des variétés abéliennes

1. Construction de l'accouplement « périodes p-adiques ». — Rappelons que nous avons fixé un plongement de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ section du morphisme naturel θ : $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to \mathbf{C}_p$, ce qui nous permet de considérer une variété définie sur $\mathbf{C}_p$ comme un schéma séparé de type fini sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ par extension des scalaires. D'autre part, l'intégration p-adique s'étend naturellement à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. En effet, si X est une variété lisse sur $\mathbf{C}_p$, si ω est une 1-forme différentielle fermée sur X et $a, b \in X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, on peut poser

$$\int_a^b \omega = \int_a^{\theta(a)} \omega + \int_{\theta(a)}^{\theta(b)} \omega + \int_{\theta(b)}^b \omega$$

et dans le membre de droite, le terme du milieu est bien défini car tous les termes sont définis sur $\mathbf{C}_p$ et les deux autres termes sont définis par la série formelle primitive de ω au voisinage de $\theta(a)$ et $\theta(b)$ respectivement.

Si on se restreint à des variétés définies sur $\overline{\mathbf{Q}}_p$, comme $\overline{\mathbf{Q}}_p$ s'identifie à un sous-anneau dense de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, on n'a pas besoin de choisir de plongement de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui est moralement plus satisfaisant car il n'en existe pas de raisonnable et pour définir $\int_a^b \omega$, on remplace respectivement $\theta(a)$ et $\theta(b)$ dans la formule ci-dessus par des éléments de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ suffisamment proches de a et b.

Pour construire l'accouplement « périodes p-adiques », nous aurons besoin de 2 propriétés supplémentaires des ensembles bornés des variétés abéliennes.

B15 : Si X est une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}_p$ et E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ borné dans X, alors le sous-groupe $\langle E\rangle$ de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ engendré par E est borné dans X.

B16 : Soient X une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}_p$, $U \neq \varnothing$ un ouvert de Zariski de X.

(i) Si E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{C}_p)$ et si $E^{(n)}$ est un sous-ensemble fini de E, alors il existe une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ telle que l'ensemble

$$F = \cup_{n\in\mathbf{N}}\{a_n \oplus x \mid x \in E^{(n)}\}$$

soit borné dans $U(\mathbf{C}_p)$.

(ii) Si $\widetilde{E}$ est un sous-ensemble borné de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et si $n \in \mathbf{N}$, soit $\widetilde{E}^{(n)}$ un sous-ensemble fini de $\widetilde{E}$. Alors il existe une suite $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ telle que l'ensemble

$$\widetilde{F} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\{\widetilde{a}_n \oplus x \mid x \in \widetilde{E}^{(n)}\}$$

soit borné dans $U(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$.

Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$, appelons relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ toute suite bornée $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ telle que l'on ait $\theta(\widetilde{u}_n) = u_n$. Comme X est propre sur $\mathbf{C}_p$, $X(\mathbf{C}_p)$ est borné et l'existence de tels relèvements est un cas particulier de la propriété **B7**.

Lemme II.3.1. — *Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ et U est un ouvert de Zariski de X, alors*

(i) l'ensemble $A(u,U)$ des suites bornées $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $U(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ telles que la suite de terme général $u_n \oplus \theta(a_n)$ soit bornée dans $U(\mathbf{C}_p)$ est non vide.

(ii) Si $a \in A(u,U)$ et $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, alors la suite de terme général $a_n \oplus \widetilde{u}_n$ est bornée dans $U(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$.

Démonstration. — Le (i) est une application de la propriété **B16** au cas où $E = \{0\} \cup \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ et $E^{(n)} = \{0, u_n\}$ et le (ii) est une conséquence de la propriété **B8**.

Soit $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ telles que l'on ait $u_n = [p]u_{n+1}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, ce qui fait de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ un $\mathbf{Z}_p$-module muni d'une action de $\mathscr{G}_K$ et contenant le module de Tate $T_p(X(\mathbf{C}_p))$ de X. D'autre part, le groupe $X(\mathbf{C}_p)$ étant p-divisible, la suite

$$0 \longrightarrow T_p(X(\mathbf{C}_p)) \longrightarrow \mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p)) \longrightarrow X(\mathbf{C}_p) \longrightarrow 0$$

est exacte, l'application de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ dans $X(\mathbf{C}_p)$ étant celle qui à $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe u_0.

Théorème II.3.2. — *Soit X une variété abélienne définie sur un sous-corps fermé K de $\mathbf{C}_p$. Soient ω une forme différentielle de seconde espèce et U un ouvert sur lequel ω*

est holomorphe. Soient $u = (u_0, \dots, u_n, \dots)$ un élément de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$, $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de $A(u, U)$. Alors

(i) *la suite $-p^n \int_{a_n}^{a_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément $\int_u \omega$ qui ne dépend que de u et de la classe de ω dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ (et du plongement de K dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$) et pas des choix de U, $\widetilde{u}$ ou a.*

(ii) *L'application de $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \times \mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ainsi définie est bilinéaire et commute à l'action de Galois.*

(iii) *L'application «périodes p-adiques» de $H^1_{\mathrm{dR}}(X) \times T_p(X)$ à valeurs dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ que l'on obtient en utilisant l'inclusion de $T_p(X(\mathbf{C}_p))$ dans $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ respecte les filtrations (de Hodge sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, par les puissances de $\ker\theta$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$).*

Démonstration. — L'idée derrière la construction est que, si ω est une forme différentielle de seconde espèce sur X et F_ω est une de ses primitives, alors la fonction $F_{\omega,p}(x) = F_\omega([p]x) - pF_\omega(x)$ est rationnelle sur X donc essentiellement bornée. Si cette fonction était vraiment bornée, alors pour toute suite bornée d'éléments de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ vérifiant $[p]\theta(u_{n+1}) = \theta(u_n)$, la suite $p^n F_\omega(u_n)$ convergerait. Comme malheureusement, ω peut avoir des pôles, il faut prendre quelques précautions pour que la construction marche. En particulier, il faut se débrouiller pour ne pas s'approcher trop des pôles de ω ; c'est le rôle de la suite a.

Soient U un ouvert de Zariski de X, D le fermé complémentaire, $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un relèvement borné de u et $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A(u, U)$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme II.3.3

(i) *La suite x_1 de terme général*

$$x_{1,n} = \int_{a_n}^{a_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega - \int_{a_n}^{a_n\oplus[p]\widetilde{u}_{n+1}} \omega$$

est bornée.

(ii) *Si V est l'ouvert de Zariski de X complémentaire de $D \cup [p]^*D$ et $b \in A(u, V)$, alors les suites x_i pour $i \in \{2, 3, 4\}$ de termes généraux respectifs*

$$x_{2,n} = \int_{a_{n-1}}^{a_{n-1}\oplus[p]\widetilde{u}_n} \omega - \int_{[p]b_n}^{[p]b_n\oplus[p]\widetilde{u}_n} \omega$$

$$x_{3,n} = \int_{[p]b_n}^{[p]b_n\oplus[p]\widetilde{u}_n} \omega - p\int_{b_n}^{b_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega$$

$$x_{4,n} = \int_{b_n}^{b_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega - \int_{a_n}^{a_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega$$

sont bornées.

Démonstration. — Les suites de termes généraux respectifs $a_n \oplus \widetilde{u}_n$ et $a_n \oplus [p]\widetilde{u}_{n+1}$ sont bornées et vérifient de plus $\theta(a_n \oplus \widetilde{u}_n) = \theta(a_n \oplus [p]\widetilde{u}_{n+1})$; la propriété **B13** implique donc que la suite

$$\int_{a_n\oplus\widetilde{u}_n}^{a_n\oplus[p]\widetilde{u}_{n+1}} \omega$$

est bornée, ce qui permet de démontrer le (i).

Comme ω est de seconde espèce, si F_ω est une primitive de ω, alors la fonction qui à x associe $F_\omega([p]x) - pF_\omega(x)$ est rationnelle sur X et holomorphe sur V et on déduit le fait que la suite x_3 est bornée du fait que les suites $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n \oplus \widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont bornées dans V.

Soit W l'ouvert de Zariski de X^3 image réciproque de U^4 par l'application f : $X^3 \to X^4$ qui à (x, y, z) associe $(x, y, x\oplus z, y\oplus z)$. Comme ω est de seconde espèce, la fonction qui à (x, y, z) associe $\int_x^{x\oplus z} \omega - \int_y^{y\oplus z} \omega$ est rationnelle sur X^3 et holomorphe sur W par construction de W. On déduit alors le fait que x_2 [resp. x_4] est bornée du fait que la suite $(a_{n-1}, [p]b_n, [p]\widetilde{u}_n)$ [resp. $(a_n, b_n, \widetilde{u}_n)$] est bornée dans W car son image par f est bornée dans U^4 du fait que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $([p]b_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ appartiennent à $A(u, U)$.

On déduit de ce lemme et de ce que $A(u, V)$ est non vide le fait que la suite de terme général

$$\int_{a_n}^{a_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega - p\int_{a_{n+1}}^{a_{n+1}\oplus\widetilde{u}_{n+1}} \omega = x_{1,n} + x_{2,n+1} + x_{3,n+1} + px_{4,n+1}$$

est bornée, ce qui permet de prouver que la suite de terme général $-p^n \int_{a_n}^{a_n+\widetilde{u}_n}\omega$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Il reste à montrer que la limite ne dépend pas des choix de U, $\widetilde{u}$ et a. Notons $\langle\omega, \widetilde{u}\rangle_{U,a}$ la limite correspondant au choix de U, $\widetilde{u}$ et $a \in A(u, U)$. Fixons un ouvert U de Zariski de X. Si $\widetilde{u}_i = (\widetilde{u}_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ [resp. $a_i = (a_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$] pour $i \in \{1, 2\}$ sont deux relèvements bornés de u dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ [resp. deux éléments de $A(u, U)$], soit $\widetilde{u}_3 = (\widetilde{u}^{3,n})_{n\in\mathbf{N}}$ [resp. $a_3 = (a_{3,n})_{n\in\mathbf{N}}$] le relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ [resp. l'élément de $A(u, U)$] défini par $\widetilde{u}_{3,n} = \widetilde{u}_{1,n}$ [resp. $a_{3,n} = a_{1,n}$] si n est pair et $\widetilde{u}_{3,n} = \widetilde{u}_{2,n}$ [resp. $a_{3,n} = a_{2,n}$] si n est impair. Une comparaison des trois limites montre que l'on a

$$\langle\omega, \widetilde{u}_1\rangle_{U,a_1} = \langle\omega, \widetilde{u}_3\rangle_{U,a_3} = \langle\omega, \widetilde{u}_2\rangle_{U,a_2}$$

et donc que la limite, à U fixé ne dépend ni du choix de a ni de celui de $\widetilde{u}$. D'autre part, si U et U' sont deux ouverts de Zariski, alors $A(u, U\cap U') \subset A(u, U) \cap A(u, U')$, ce qui permet, en prenant $a \in A(u, U \cap U')$, d'obtenir l'égalité

$$\langle\omega, \widetilde{u}\rangle_{U,a} = \langle\omega, \widetilde{u}\rangle_{U\cap U',a} = \langle\omega, \widetilde{u}\rangle_{U',a}$$

et donc de montrer que la limite ne dépend pas non plus du choix de U. Finalement, si ω est exacte, sa primitive F_ω est une fonction holomorphe sur U et la suite $\int_{a_n}^{a_n\oplus\widetilde{u}_n} \omega =$

$F_\omega(a_n \oplus \widetilde{u}_n) - F_\omega(a_n)$ est bornée puisque l'image d'un ensemble borné par une fonction holomorphe est bornée. On en déduit le fait que la suite $-p^n \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n} \omega$ tend vers 0 et donc que $\int_u \omega$ ne dépend que de la classe de ω dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$.

Ceci termine la démonstration du (i) du théorème; passons au (ii). Si $\sigma \in \mathscr{G}_K$ et si $\widetilde{u}$ est un relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$, on peut prendre $\sigma(\widetilde{u}) = (\sigma(\widetilde{u}_n))_{n \in \mathbf{N}}$ comme relèvement borné de u dans $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ car σ envoie des ensembles bornés sur des ensemble bornés. De même, on peut supposer que U est défini sur K et donc que σ induit une bijection de $A(u, U)$ sur $A(\sigma(u), U)$. On en déduit le fait que si ω est définie sur K, alors $\int_{\sigma(u)} \omega = \sigma\big(\int_u \omega\big)$ et donc que l'application « périodes p-adiques » respecte l'action de Galois.

La linéarité par rapport à ω est une conséquence de la linéarité de l'intégration p-adique et pour montrer la linéarité par rapport à u, il suffit, si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont deux éléments de $T_p(X(\mathbf{C}_p))$ de prendre $\widetilde{u} \oplus \widetilde{v}$ comme relèvement borné de $u \oplus v$ dans $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ et de prendre $a \in A(u, U) \cap A(v, U) \cap A(u \oplus v, U)$ qui est un ensemble non vide. On peut alors écrire

$$p^n \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n \oplus \widetilde{v}_n} \omega = p^n \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n} \omega + p^n \int_{a_n \oplus \widetilde{u}_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n + \widetilde{v}_n} \omega \tag{II.3.4}$$

et les hypothèses faites sur a font que la suite de terme général $a_n \oplus \widetilde{u}_n$ est élément de $A(v, U)$, ce qui, passant à la limite dans l'identité II.3.4 montre que l'on a $\int_{u+v} \omega = \int_u \omega + \int_v \omega$ et termine la démonstration du (ii) du théorème II.3.2.

Finalement, pour prouver le (iii), il suffit de montrer que si $\omega \in F^1 H^1_{\mathrm{dR}}(X) = H^0(X, \Omega^1_X)$, c'est-à-dire si ω est invariante sur X et si $u \in T_p(X)$, alors $\int_u \omega \in F^1 \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ou, de manière équivalente, que $\theta\big(\int_u \omega\big) = 0$. Or dans ce cas, la primitive F_ω de ω s'annulant en 0 est un logarithme de X et donc $\theta\big(\int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n} \omega\big) = F_\omega(u_n) = p^{-n} F_\omega([p^n] u_n) = 0$, ce qui permet de conclure.

2. Relations de Riemann p-adiques. — Soient K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, X une variété abélienne définie sur K, $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ une base des formes différentielles holomorphes sur X, $(\partial_1, \dots, \partial_d)$ la base de l'espace des dérivations d'ordre 1 invariantes sur X duale de la base $(\omega_1, \dots, \omega_d)$. Soient D un diviseur de X défini sur K et G_D une fonction de Green associée à D. Soient $\omega_{D,1}, \dots, \omega_{D,d}$ les formes différentielles de seconde espèce définies par $\omega_{D,i} = d(\partial_i G_D)$. Si $\alpha \in X(\mathbf{C}_p)$ est un point de m-torsion, et si T_α désigne l'application $x \to x \oplus \alpha$, il existe, à multiplication par une constante non-nulle près, une seule fonction rationnelle $f_{D,\alpha}$ de diviseur $m(T^*_\alpha D - D)$ et on a $d(\partial_i f_{D,\alpha} / f_{D,\alpha}) = m(T^*_\alpha \omega_{D,i} - \omega_{D,i})$. Si α et β sont des points de m-torsion de $X(\mathbf{C}_p)$, la fonction

$$\frac{f_{D,\beta}(x \oplus \alpha) f_{D,\alpha}(x)}{f_{D,\beta}(x) f_{D,\alpha}(x \oplus \beta)}$$

est constante égale à une racine m-ième de l'unité que nous noterons $e_{D,m}(\alpha, \beta)$. Si l est un diviseur de m, on a $e_{D,l}([l]\alpha, [l]\beta) = \big(e_{D,m}(\alpha, \beta)\big)^{m/l}$. En particulier, si

$u = (0, \dots, u_n, \dots)$ et $v = (0, \dots, v_n, \dots)$ sont deux éléments de $T_p(X)$, la suite $(1, \dots, e_{D,p^n}(u_n, v_n), \dots)$ est un élément de $T_p(\mathbf{G}_m) \subset \mathscr{R}$ appelé accouplement de Weil de u et v déterminé par le diviseur D et que nous noterons $\varepsilon_D(u,v)$. Finalement, définissons la forme de Riemann p-adique $E_{D,p}$ associée à D par la formule $E_{D,p}(u,v) = -\log([\varepsilon_D(u,v)])$; c'est donc une forme bilinéaire antisymétrique sur $T_p(X)$ à valeurs dans $\mathbf{Z}_p t_p$.

Théorème II.3.5. — *Si u et v sont deux éléments de $T_p(X)$, alors*

$$E_{D,p}(u,v) = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_u \omega_{D,i} \int_v \omega_i - \int_v \omega_{D,i} \int_u \omega_i \Big).$$

Démonstration. — Nous allons utiliser la fonction $f_D^{(4)}$ apparaissant dans la construction de la fonction de Green G_D du diviseur D pour exprimer $e_{D,p^n}(u_n, v_n)$, ce qui nous permettra d'exprimer $E_D(u,v)$ en termes de la fonction G_D. Finalement, un développement de G_D en séries entières permettra de faire apparaître les périodes.

Si $a \in X$, le diviseur $T^*_{[m]a}D - mT^*_a D + (m-1)D$ est principal ; c'est donc le diviseur d'une fonction rationnelle $f_{D,m,a}$ bien définie à multiplication par une constante (dépendant de a) près et son logarithme est de la forme

$$\text{(II.3.6)} \qquad \operatorname{Log} f_{D,m,a} = G_D(x \oplus [m]a) - mG_D(x \oplus a) + (m-1)G_D(x) + C(a),$$

où $C(a)$ est une constante, comme on le voit en comparant les diviseurs des fonctions rationnelles dont on est en train de comparer les logarithmes.

Lemme II.3.7. — *Si $P_m(T) = \sum_{k=0}^{m-2} a_{k,m} T^k \in \mathbf{Z}[T]$ est le quotient de la division de $T^m - mT + m - 1$ par $(T-1)^2$, alors*

$$\frac{f_{D,m,a}(x \oplus b)}{f_{D,m,a}(x)} = \prod_{k=0}^{m-2} \Big(f_D^{(4)}(x \oplus [k]a, a, a, b) \Big)^{a_{k,m}}$$

Démonstration. — Si on fixe a, ces deux fonctions sont rationnelles en $(x,b) \in X^2$ et valent toutes les deux 1 si $b = 0$; il suffit donc de prouver que leurs logarithmes coïncident. Si F est une fonction sur X, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k \in \mathbf{Z}[T]$ et $a \in X$, notons $F_{|P}$ la fonction définie par $F_{|P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_K F(x \oplus [k]a)$. La formule II.3.6 permet d'écrire $\operatorname{Log} \dfrac{f_{D,m,a}(x \oplus b)}{f_{D,m,a}(x)}$ sous la forme $F_{|T^m - mT + m - 1}$, avec $F(x) = G_D(x \oplus b) - G_D(x)$. Comme $\operatorname{Log} f_D^{(4)}(x \oplus [k]a, a, a, b) = F_{|T^{k+2} - 2T^{k+1} + T^k}$, on déduit le résultat de la formule $F_{|P+Q} = F_{|P} + F_{|Q}$ et $(F_{|P})_{|Q} = F_{|PQ}$ valable si P et Q sont deux éléments de $\mathbf{Z}[T]$.

Lemme II.3.8. — *La fonction $f_{D,m}^{(3)}$ définie par*

$$\text{(II.3.9)} \quad f_{D,m}^{(3)}(x,a,b) = \frac{f_{D,m,a}(x \oplus b) f_{D,m,b}(x)}{f_{D,m,b}(x \oplus a) f_{D,m,a}(x)} = \prod_{k=0}^{m-2} \Big(\frac{f_D^{(4)}(x \oplus [k]a, a, a, b)}{f_D^{(4)}(x \oplus [k]b, b, b, a)} \Big)^{a_{k,m}}$$

est rationnelle sur X^3 ; son logarithme est donné par la formule

(II.3.10)

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} f^{(3)}_{D,m}(x,a,b) = \Big(&G_D(x\oplus b\oplus [m]a) - G_D(x\oplus b) - G_D(x\oplus [m]a) + G_D(x)\Big)\\ -\Big(&G_D(x\oplus a\oplus [m]b) - G_D(x\oplus a) - G_D(x\oplus [m]b) + G_D(x)\Big)\end{aligned}$$

et si α et β sont des points de m-torsion, alors la fonction $f^{(3)}_{D,m}(x,\alpha,\beta)$ est constante et égale à $e_{D,m}(\alpha,\beta)$ sur X.

Démonstration. — Le fait que $f^{(3)}_{D,m}$ est rationnelle sur X^3 est apparent sur l'identité II.3.9 qui résulte du lemme précédent ; la formule pour son logarithme est une conséquence immédiate de la formule II.3.6 et la formule pour l'accouplement de Weil de deux points de m-torsion suit du fait que si α est un point de m-torsion, alors $f_{D,\alpha} = f_{D,m,\alpha}$ à multiplication par une constante près.

Soit U l'ouvert de Zariski de X complémentaire de D et $U^{(4)}$ l'ouvert de Zariski de X^4 image réciproque de U^7 par l'application de X^4 dans X^7 qui à (x_0,x_1,x_2,x_3) associe $(x_0\oplus x_1, x_0\oplus x_2, x_0\oplus x_3, x_0\oplus x_1\oplus x_2, x_0\oplus x_2\oplus x_3, x_0\oplus x_1\oplus x_3, x_0\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3)$, ce qui fait que la fonction $f^{(4)}_D$ est inversible sur $U^{(4)}$.

Lemme II.3.11. — *Soient $\widetilde{u} = (\widetilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\widetilde{v} = (\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des relèvements bornés de u et v dans $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$. On peut trouver une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ telle que l'ensemble*

$$F = \{a_n \oplus [k]\widetilde{u}_n \oplus [l]\widetilde{v}_n \mid n\in\mathbf{N}, 0\le k,l\le p^n\}$$

soit borné dans $U(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ et alors, l'ensemble $F^{(4)}$ constitué des

$$y^{(n,k)} = (a_n\oplus [k]\widetilde{u}_n, \widetilde{u}_n, \widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n)$$

et des

$$z^{(n,k)} = (a_n\oplus [k]\widetilde{v}_n, \widetilde{v}_n, \widetilde{v}_n, \widetilde{u}_n)$$

pour $n\in\mathbf{N}$ et $0\ge k\ge p^n-2$, est borné dans $U^{(4)}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$.

Démonstration. — L'existence de a est un cas particulier de la propriété **B16** appliqué au cas où, E est le sous-groupe de $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ engendré par les suites $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ qui est borné dans $X(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ en vertu de la propriété **B15** puisque $\widetilde{u}$ et $\widetilde{v}$ le sont, et où $E^{(n)}$ est l'ensemble fini $\{[k]\widetilde{u}_n\oplus[l]\widetilde{v}_n \mid 0\le k,l,\le p^n\}$. Pour montrer que $F^{(4)}$ est borné dans $U^{(4)}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$, il suffit, en vertu de la propriété **B10** et de la définition de $U^{(4)}$ de montrer que si I est une partie non vide de $\{1,2,3\}$ et $m_I : X^4\to X$ est l'application qui à (x_0,x_1,x_2,x_3) associe $x_0\oplus\oplus_{i\in I}x_i$, alors l'image de $F^{(4)}$ par m_I est bornée dans $U(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$. Or cette image est incluse dans F, ce qui permet de conclure.

Choisissons une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfaisant les conclusions du lemme précédent et posons

$$x_n = f^{(3)}_{D,p^n}(a_n, \widetilde{u}_n, \widetilde{v}_n) = \prod_{k=0}^{p^n-2} \Big(f^{(4)}_D(y^{(n,k)})^{-1} f^{(4)}_D(z^{(n,k)})\Big)^{a_{k,p^n}}.$$

Lemme II.3.12. — *On a l'égalité suivante*

$$E_{D,p}(u,v) = \lim_{n\to\infty} -p^n \operatorname{Log} x_n.$$

Démonstration. — On a $\theta(x_n) = e_{D,p^n}(u_n, v_n)$; en particulier, $v_p\big(\theta(x_n)\big) = 0$. La suite de terme général x_n prend donc ses valeurs dans l'intersection du sous-groupe de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^*$ des éléments vérifiant $v_p(\theta(x)) = 0$ avec celui engendré par $f^{(4)}_D(F^{(4)})$ et comme $F^{(4)}$ est borné dans $U^{(4)}$ et $f^{(4)}_D$ est inversible sur $U^{(4)}$, ce sous-groupe est borné dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ (propriété **B2**). On en déduit le fait que la suite de terme général x_n est bornée dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et le résultat suit de la théorie des périodes p-adiques pour le groupe formel $\mathbf{G}_m$ (propriété **B3**).

Lemme II.3.13. — *Si $i \in \{1, \dots, d\}$, soient $F_{D,i} = \partial_i G_D$ une primitive de $\omega_{D,i}$ et λ_i le logarithme de X associé à ω_i et soient $x, y \in U(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})$ vérifiant $\theta(x) = \theta(y)$. Si $z_i = \lambda_i(y) - \lambda_i(x)$, alors*

$$G_D(y) = G_D(x) + \sum_{i=1}^{d} F_{D,i}(x) z_i + \sum_{k_1+\cdots+k_d\geq 2} a_{k_1,\dots,k_d}(x) z_1^{k_1}\cdots z_d^{k_d},$$

où $a_{k_1,\dots,k_d}$ est une fonction holomorphe sur U.

Démonstration. — $\partial_i\partial_j G_D = \partial_i F_{j,D}$ est une fonction holomorphe sur U. Comme les dérivations ∂_i sont invariantes par translation, elles sont holomorphes sur X ; en particulier, on en déduit le fait que si f est holomorphe sur U, alors $\partial_i f$ l'est aussi. On en déduit, par récurrence, le fait que si $k_1 + \cdots + k_d \geq d$, alors $\prod_{i=1}^{d} \partial_i^{k_i} G_D$ est holomorphe sur U. Finalement, la formule de Taylor plus le fait que G_D est localement analytique dans un voisinage de x nous donnent

$$a_{k_1,\dots,k_d} = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{k_i!} \partial_i^{k_i} G_D \in \mathcal{O}_U,$$

ce qui permet de conclure.

Proposition II.3.14. — *On a l'égalité suivante*

$$\lim_{n\to\infty} -p^n \operatorname{Log} x_n = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_u \omega_{D,i} \int_v \omega_i - \int_v \omega_{D,i} \int_u \omega_i\Big).$$

Démonstration. — Cette proposition permet, avec l'aide du lemme II.3.12 de terminer la démonstration du théorème II.3.5. Utilisant la formule II.3.10, on peut écrire $-\operatorname{Log} x_n$ sous la forme

$$\begin{aligned}\Big(G_D(a_n \oplus \widetilde{u}_n \oplus [p^n]\widetilde{v}_n) - G_D(a_n \oplus \widetilde{u}_n) - G_D(a_n \oplus [p^n]\widetilde{v}_n) + G_D(a_n)\Big)\\ - \Big(G_D(a_n \oplus \widetilde{v}_n \oplus [p^n]\widetilde{u}_n) - G_D(a_n \oplus \widetilde{v}_n) - G_D(a_n \oplus [p^n]\widetilde{u}_n) + G_D(a_n)\Big)\end{aligned}$$

Comme $[p^n]\widetilde{u}_n$ et $[p^n]\widetilde{v}_n$ ont pour image 0 par θ, on peut appliquer le lemme précédent aux couples

$$(a_n \oplus \widetilde{u}_n, a_n \oplus \widetilde{u}_n \oplus [p^n]\widetilde{v}_n),\ (a_n, a_n \oplus [p^n]\widetilde{v}_n),\ (a_n \oplus \widetilde{v}_n, a_n \oplus \widetilde{v}_n \oplus [p^n]\widetilde{u}_n)$$
$$\text{et } (a_n, a_n \oplus [p^n]\widetilde{u}_n).$$

Si $k_1 + \cdots + k_d \geq 2$, les suites $a_{k_1,\ldots,k_d}(a_n \oplus \widetilde{u}_n)$, $a_{k_1,\ldots,k_d}(a_n \oplus \widetilde{v}_n)$ et $a_{k_1,\ldots,k_d}(a_n)$ sont bornées puisque $a_n, a_n \oplus \widetilde{u}_n$ et $a_n \oplus \widetilde{v}_n$ varient dans un sous-ensemble borné de U et $a_{k_1,\ldots,k_d}$ est holomorphe sur U. D'autre part, les suites $\lambda_i([p^n]\widetilde{u}_n)$ et $\lambda_i([p^n]\widetilde{v}_n)$ sont bornées dans $F^1\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ car elles tendent respectivement vers $-\int_u \omega_i$ et $-\int_v \omega_i$. Comme de plus, $F_{D,i}$ est une primitive de $\omega_{D,i}$, on en déduit le fait que la suite

$$\operatorname{Log} x_n + \sum_{i=1}^d \Big(\lambda_i([p^n]\widetilde{v}_n) \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n} \omega_{D,i} - \lambda_i([p^n]\widetilde{u}_n) \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{v}_n} \omega_{D,i}\Big)$$

est bornée dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce qui, compte-tenu des formules

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_i([p^n]\widetilde{u}_n) = -\int_u \omega_i \qquad \lim_{n\to+\infty} \lambda_i([p^n]\widetilde{v}_n) = -\int_v \omega_i$$
$$\lim_{n\to+\infty} p^n \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{u}_n} \omega_{D,i} = -\int_u \omega_{D,i} \qquad \lim_{n\to+\infty} p^n \int_{a_n}^{a_n \oplus \widetilde{v}_n} \omega_{D,i} = -\int_v \omega_{D,i}$$

termine la démonstration de la proposition II.3.14 et donc du théorème II.3.5.

3. Formes de seconde espèce et formes exactes. — La non dégénérescence de l'accouplement de Weil pour un choix convenable de D permet de caractériser les formes différentielles exactes parmi les formes différentielles de seconde espèce (théorèmes II.3.15 et II.3.16).

Théorème II.3.15

(i) *Une forme différentielle de seconde espèce est exacte si et seulement si toutes ses périodes sont nulles.*

(ii) *Une forme différentielle de seconde espèce a une image nulle dans $H^1(X, \mathscr{O}_X)$ si et seulement si toutes ses périodes sont dans $F^1\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.*

Démonstration. — Si le diviseur D est choisi non dégénéré, la forme bilinéaire

$$t_p^{-1}E_{D,p}(u,v) : (\mathbf{Q}_p \otimes T_p(X)) \times (\mathbf{Q}_p \otimes T_p(X)) \longrightarrow \mathbf{Q}_p$$

est non dégénérée. Si $u_1, \ldots, u_{2d}$ est une base de $T_p(X)$, le déterminant de la matrice de coefficients $E_{D,p}(u_i, u_j)$ est donc de la forme at_p^{2d}, où $a \in \mathbf{Q}_p^*$. D'autre part, les relations de Riemann permettent d'écrire cette matrice sous la forme ${}^tA\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{smallmatrix}\right)A$, où A est la matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal à $\int_{u_j} \omega_i$ et où l'on a posé $\omega_{d+i} = \omega_{D,i}$.

Supposons que l'on puisse trouver $\eta_1 \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ non nul et dont toutes les périodes soient nulles. Complétons η_1 en une base $(\eta_1, \ldots, \eta_{2d})$ de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ et soit M la matrice exprimant les ω_i en terme des η_j et B la matrice dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal à $\int_{u_j} \eta_i$ de telle sorte que l'on a $A = MB$. On obtient une contradiction car le déterminant de B est nul puisque sa première ligne l'est alors que celui de ${}^tB^tM\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{smallmatrix}\right)MB$ ne l'est pas. On en déduit le (i).

Pour démontrer le (ii), supposons que l'on puisse trouver $\eta_{d+1} \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ non nul mais dont toutes les périodes appartiennent à $F^1\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Complétons η_{d+1} en une base $(\eta_1, \ldots, \eta_{2d})$ de telle sorte que $\eta_1, \ldots, \eta_d$ forment une base de $H^0(X, \Omega^1_X)$. Soient M et B les matrices définies comme précédemment. La matrice B a ses $d+1$ premières lignes divisibles par t_p dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui est en contradiction avec le fait que le déterminant de ${}^tB^tM\left(\begin{smallmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{smallmatrix}\right)MB$ n'est pas divisible par t_p^{2d+2} puisqu'il est de la forme at_p^{2d} avec $a \in \mathbf{Q}_p^*$. Ceci permet de conclure. Notons que la même démonstration montre que si une forme différentielle de seconde espèce sur X a toutes ses périodes divisibles par t_p^2, alors elle est exacte.

Théorème II.3.16. — *Soit X une variété propre et lisse définie sur $\mathbf{C}_p$. Soient ω une forme différentielle de seconde espèce et U un ouvert de Zariski de X non vide sur lequel ω est holomorphe. Alors ω est exacte si et seulement si une primitive de ω est bornée sur tout sous-ensemble borné de $U(\mathbf{C}_p)$.*

Démonstration. — Si ω est exacte, sa primitive est par définition une fonction rationnelle qui est holomorphe sur U puisque ω l'est et donc est bornée sur tout sous-ensemble borné de U (propriété **B9**). Pour montrer la réciproque, on va d'abord considérer le cas où X est une variété abélienne, cas dont la démonstration repose sur la proposition précédente, puis celui où X est une courbe en utilisant la jacobienne de X, et finalement le cas général en en considérant une courbe suffisamment générale tracée sur X.

Soient donc X une variété abélienne, ω une forme différentielle de seconde espèce sur X et U un ouvert de Zariski de X non vide sur lequel ω est holomorphe. Supposons que $\int \omega$ est bornée sur tout sous-ensemble borné de $U(\mathbf{C}_p)$. On déduit du théorème II.3.2 le fait que si $u \in T_p(X(\mathbf{C}_p))$, alors $\int_u \omega \in F^1\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et donc, d'après la proposition précédente, que l'image de ω dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ appartient à $H^0(X, \Omega^1_X)$; autrement dit que ω peut s'écrire sous la forme $\omega' + df$, où f est une fonction rationnelle sur X et ω' est une forme différentielle invariante sur X. Soit λ la primitive de ω' s'annulant en 0. Comme $\int \omega$ et f sont bornées sur tout sous-ensemble borné de $U(\mathbf{C}_p)$, il en est de même de λ. Soit $x \in X(\mathbf{C}_p)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $x_0 = x$ et $[p]x_{n+1} = x_n$. D'après le lemme II.3.1, on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ telle que les suites de termes généraux respectifs a_n et $a_n \oplus x_n$ soient bornées dans $U(\mathbf{C}_p)$. On en déduit le fait que les suites de termes généraux respectifs $p^n\lambda(a_n)$ et $p^n\lambda(a_n \oplus x_n)$ tendent vers 0 puis que

$$\lambda(x) = p^n\big(\lambda(a_n \oplus x_n) - \lambda(a_n)\big)$$

est nul et enfin que $\omega' = 0$, ce qui permet de conclure dans le cas où X est une variété abélienne.

Supposons maintenant que X est une courbe et soient J la jacobienne de X, P_0 un point de X, ι le plongement de X dans J déterminé par P_0, ω une forme différentielle de seconde espèce sur X et U un ouvert de Zariski de X non vide sur lequel ω est holomorphe. Soit $m : X^g \to J$ l'application qui à $P_1, \ldots, P_g$ associe $\oplus_{i=1}^g \iota(P_i)$ et, si $i \in \{1, \ldots, g\}$, soit $\pi_i : X^g \to X$ la projection sur le i-ème facteur. D'après le lemme II.2.1, il existe une (unique) forme différentielle ω_J de seconde espèce sur J telle que l'on ait

$$m^*\omega_J = \sum_{i=1}^{g} \pi_i^*\omega$$

et les formes différentielles ω et $\iota^*\omega_J$ ont alors même image dans $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. Soit V un ouvert de Zariski de J contenu dans l'ouvert des points généraux et dans le complémentaire de $m(X^{g-1} \times (X - U))$ et sur lequel ω_J est holomorphe. Par construction, on a $m^{-1}(V) \subset U^g$; en effet, comme on a supposé V inclus dans l'ouvert des points généraux, si $x \in V$, l'équation $m(P_1, \ldots, P_g) = x$ a, à permutation près, une unique solution et comme V est inclus dans le complémentaire de $m(X^{g-1} \times (X - U))$, aucun des P_i ne peut appartenir à U. La propriété **B10** implique que si E est borné dans V, alors $m^{-1}(E)$ est borné dans $m^{-1}(V)$ et donc dans U^g. Si on a supposé qu'une primitive de ω était bornée sur tout sous-ensemble borné de U, on déduit de l'égalité

$$m^*\omega_J = \sum_{i=1}^{g} \pi_i^*\omega$$

le fait que $\int m^*\omega_J$ est bornée sur $m^{-1}(E)$ et donc que $\int \omega_J$ est bornée sur E. Ceci implique, d'après l'étude du cas où X est une variété abélienne que ω_J est exacte puis que ω est exacte et permet de conclure dans le cas où X est une courbe.

Passons au cas général. Soient donc X une variété propre et lisse sur $\mathbf{C}_p$, ω une forme différentielle de seconde espèce sur X et U un ouvert de Zariski de X non vide sur lequel ω est holomorphe. On peut construire une courbe C et un morphisme $f : C \to X$ induisant une surjection de la jacobienne J de C sur la variété d'Albanese de X et tels que $f(C) \cap U \neq \varnothing$ (il suffit de choisir des points $P_0, \ldots, P_n$ de U tels que le sous-groupe de $\mathrm{Alb}(X)$ engendré par les images de $P_1, \ldots P_n$ soit Zariski dense dans $\mathrm{Alb}(X)$ et de prendre pour C la désingularisée d'une courbe irréductible de X passant par $P_0, \ldots, P_n$). L'application $f^* : H^1_{\mathrm{dR}}(X) \to H^1_{\mathrm{dR}}(C)$ est injective. D'autre part, $U_C = f^{-1}(U \cap f(C))$ est un ouvert de Zariski non vide de C sur lequel $f^*\omega$ est holomorphe et si la fonction $\int \omega$ est bornée sur tout borné de U, alors a fortiori, $\int f^*\omega$ est bornée sur tout borné de U_C puisque l'image d'un borné de U_C par f est borné dans U. On en déduit, utilisant le cas des courbes, le fait que $f^*\omega$ est exacte et donc que ω est exacte puisque f^* induit une injection de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $H^1_{\mathrm{dR}}(C)$. Ceci termine la démonstration du théorème II.3.16.

4. Théorie de Kummer et exponentielle de Bloch-Kato. — Dans ce paragraphe, on suppose que K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soient X une variété abélienne de dimension d définie sur K, $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ une base de $H^0(X, \Omega^1_X)$, D un diviseur non dégénéré défini sur K et $(\omega_{D,1}, \dots, \omega_{D,d})$ les formes différentielles de seconde espèce définies au §4.

Notons $\langle\ ,\ \rangle_D$ la forme bilinéaire $t_p^{-1}E_D$ de $V_p(X)\times V_p(X)$ dans $\mathbf{Q}_p$. On étend $\langle\ ,\ \rangle_D$ par bilinéarité à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_p(X)) \times (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_p(X))$, où l'on a posé $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}[\frac{1}{t_p}]$, ce qui fait de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps des fractions de $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$. Comme $\langle\ ,\ \rangle_D$ est non dégénérée, cela permet d'identifier $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V_p(X)$ à son dual ; en particulier, l'existence de l'application « périodes p-adiques » nous fournit une application de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ qui est injective d'après le (i) du théorème II.3.15. De manière explicite, si $(u_1, \dots, u_{2d})$ est une base de $V_p(X)$ et $(u_1^*, \dots, u_{2d}^*)$ est la base duale relativement à la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle_D$ et si $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$, alors

$$\omega = \sum_{i=1}^{2d} \Big(\int_{u_i} \omega\Big) u_i^* \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_p(X). \tag{II.3.17}$$

On pose $\omega_i = \omega_{D,i-d}$ si $d+1 \leq i \leq 2d$ et on définit $\omega^{(i)}$ pour $1 \leq i \leq 2d$ par $\omega^{(i)} = -\omega_{D,i}$ si $1 \leq i \leq d$ et $\omega^{(i)} = \omega_{i-d}$ si $d+1 \leq i \leq 2d$. Le théorème II.3.5 nous fournit la formule

$$\langle\ ,\ \rangle_D = t_p^{-1} \sum_{i=1}^{d} \omega_i \wedge \omega_{D,i} = t_p^{-1} \sum_{i=1}^{2g} \omega_1 \otimes \omega^{(i)}.$$

On en déduit le fait que $(t_p^{-1}\omega^{(1)}, \dots, t_p^{-1}\omega^{(2d)})$ est la base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ duale de $(\omega_1, \dots, \omega_{2d})$ et donc que si $u \in V_p(X)$, alors

$$u = t_p^{-1} \sum_{i=1}^{2g} \Big(\int_u \omega_i\Big) \omega^{(i)}. \tag{II.3.18}$$

Rappelons qu'une représentation p-adique V est dite être de de Rham si le K espace vectoriel $D_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V)^{\mathcal{G}_K}$ est de dimension $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$. La proposition suivante est bien connue ([**32**] par exemple).

Proposition II.3.19

(i) *La représentation $V_p(X)$ est de de Rham.*

(ii) *L'application* ι_X *qui à* $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ *associe* $t_p^{-1}\omega \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_p(X)$ *est un isomorphisme de* $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ *sur* $D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$.

(iii) *L'image de* $H^0(X,\Omega^1_X)$ *par cet isomorphisme est* $F^0D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence du (ii). Si $\tau \in \mathscr{G}_K$ et $u \in V_p(X)$, utilisant la formule II.3.18, on obtient

$$t_p^{-1}\sum_{i=1}^{2g}\Big(\int_u \omega_i\Big)\omega^{(i)} = u = \tau(\tau^{-1}(u)) = \sum_{i=1}^{2g}\Big(\int_u \omega_i\Big)\tau(t_p^{-1}\omega^{(i)})$$

et la non dégénérescence de l'application «périodes p-adiques» implique que $t^{-1}\omega^{(i)}$ est fixe par τ et donc élément de $D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$. On en déduit le fait que ι_X est une injection de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$ dans $D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$; c'est donc une bijection car la dimension du K-espace vectoriel $D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$ est inférieure ou égale à celle de $H^1_{\mathrm{dR}}(X)$.

On déduit de la formule II.3.17 le fait que $\iota_X(\omega) \in F^0D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$ si et seulement si $\int_{u_i}\omega \in F^1\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $1 \leq i \leq 2d$ et le (ii) du théorème II.3.15 permet de conclure.

Remarque II.3.20. — Cette proposition permet de montrer que ι_X induit un isomorphisme de $D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))/F^0D_{\mathrm{dR}}(V_p(X))$ sur $H^1_{\mathrm{dR}}(X)/H^0(X,\Omega^1_X) \cong H^1(X,\mathscr{O}_X)$.

Si $a \in X(K)$, la théorie de Kummer permet d'associer à a un élément ∂a de $H^1(K,T_p(X))$. De manière explicite, ∂a est représenté par le cocycle $\tau \to \partial a(\tau) = (\tau-1)u$, où $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est n'importe quel élément de $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ vérifiant $\pi(u) = u_0 = a$.

On note $\log_X$ l'application logarithme de $X(\mathbf{C}_p)$ dans l'espace tangent T_X de X à l'origine. Si X^* désigne la variété abélienne duale de X, cet espace tangent est canoniquement isomorphe à $H^1(X^*,\mathscr{O}_{X^*})$ et le choix de D nous fournit un isomorphisme entre $H^1(X^*,\mathscr{O}_{X^*})$ et $H^1(X,\mathscr{O}_X)$; on obtient la formule

$$\log_X(a) = \sum_{i=1}^{d}\lambda_{\omega_i}(a)\omega_{D,i}.$$

Bloch et Kato [**2**] ont défini des sous-groupes $H^1_e(K,V) \subset H^1_g(K,V)$ de $H^1(K,V)$. Le groupe $H^1_g(K,V)$ est le noyau de l'application naturelle

$$H^1(K,V) \longrightarrow H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V).$$

La définition de $H^1_e(K,V)$ utilise le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, anneau qui est est muni d'une action du Frobenius absolu φ et $H^1_e(K,V)$ est par définition le noyau de l'application naturelle de $H^1(K,V)$ dans $H^1(K,\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\otimes V)$. Les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ sont reliés par la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0.$$

Si V est une représentation de $\mathscr{G}_K$, on peut tensoriser cette suite exacte par V et passer à la suite exacte de cohomologie continue associée, ce qui permet de définir une application (surjective si V est de de Rham) de $D_{\mathrm{dR}}(V)/F^0D_{\mathrm{dR}}(V)$ dans $H^1_e(K,V)$ appelée exponentielle de Bloch-Kato. Si X est une variété abélienne, Bloch et Kato on démontré que l'application exponentielle coïncide avec l'exponentielle usuelle. Plus exactement, on a le théorème suivant, si

$$\log_{V_p(X)} : H^1_e(K,V) \longrightarrow D_{\mathrm{dR}}(V)/F^0D_{\mathrm{dR}}(V)$$

désigne l'inverse de l'exponentielle de Bloch-Kato (qui est un isomorphisme dans le cas d'une variété abélienne).

Théorème II.3.21

(i) *Si $a \in X(K)$, alors $\partial a \in H^1_e(K,V)$.*

(ii) $\log_{V_p(X)}(\partial a) = \iota_X(\log_X(a))$.

Démonstration. — Avec les méthodes développées dans ce volume, nous ne pourrons démontrer qu'une partie de ce théorème. Si $u \in \mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$, soit

$$\widetilde{\log}_X(u) = \sum_{i=1}^{2d} \left(\int_u \omega_i\right) \omega^{(i)} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V.$$

Comme $\omega_i \in F^1\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ si $1 \leq i \leq d$ et comme $\theta(\int_u \omega_i) = \lambda_{\omega_i}(\pi(u))$ si $1 \leq i \leq d$, on obtient

$$\theta(\widetilde{\log}_X(u)) = \log_X(\pi(u)). \tag{II.3.22}$$

Si $u \in T_p(X)$, la formule II.3.18 se traduit par $\widetilde{\log}_X(u) = tu$. D'autre part, si $\tau \in \mathscr{G}_K$, on a $\tau(t_p^{-1}\widetilde{\log}_X u) = t_p^{-1}\widetilde{\log}_X \tau(u)$ car $t_p^{-1}\omega^{(i)} \in D_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\tau(\int_u \omega) = \int_{\tau(u)} \omega$ quel que soit $\omega \in H^1_{\mathrm{dR}}(X)$. On en déduit le fait que si $u \in \mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$ vérifie $\pi(u) = a$, alors ∂a est représenté par le cocycle $\tau \to (\tau - 1)(t_p^{-1}\widetilde{\log}_X u)$. En particulier, $\partial a \in H^1_g(K,V)$.

Pour démontrer le théorème de Bloch et Kato dans sa totalité, il suffirait, grâce à la formule II.3.22, de prouver que $t_p^{-1}\widetilde{\log}_X u \in \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$, ce qui est formellement clair car φ agit sur t_p^{-1} par multiplication par p^{-1} et $\sum_{i=1}^{2d} \omega_i \otimes \omega^{(i)} = \sum_{i=1}^{d} \omega_i \wedge \omega_{D,i}$ représente la classe de cohomologie associée au diviseur D dans $H^2_{\mathrm{dR}}(X)$ et est donc multipliée par p sous l'action de Frobenius. Malheureusement, les méthodes développées dans ce volume ne permettent pas de mettre en oeuvre cette stratégie ; il faudrait prendre un modèle de X ayant de bonnes propriétés (ce qui est possible car X admet un modèle semi-stable après extension des scalaires) et faire agir le groupe de Weil-Deligne sur les formes différentielles (ce qui n'est pas possible en restant dans le cadre algébrique ; voir **[18]**, §7 pour le cas de bonne réduction).

APPENDICE A

ENSEMBLES BORNÉS

Cet appendice contient les principales propriétés des ensembles bornés ; on y trouve en particulier les démonstrations des propriétés **B1**, **B2**,..., **B14** et **B16**, la propriété **B15** étant démontrée dans l'appendice B. Certaines de ces propriétés se trouvent dans le livre [**3**] mais nous en avons reproduit la démonstration pour la commodité du lecteur.

A.1. Généralités sur les schémas

Si B est un anneau, un B-schéma sera par convention un schéma séparé et de type fini sur B. Si X est un B-schéma, nous appellerons présentation de X un recouvrement fini $\mathscr{U}$ de X par des ouverts affines, chaque $U \in \mathscr{U}$ étant muni d'une immersion fermée ι_U dans un espace affine $\mathbb{A}_B^{n_U}$.

Un ouvert de présentation lisse sera par définition un B-schéma affine U muni d'une immersion fermée ι_U dans un espace affine $\mathbb{A}_B^{m+d}$ telle que la composition de ι_U avec la projection de $\mathbb{A}_B^{m+d}$ sur $\mathbb{A}_B^d$ soit étale. De manière équivalente, un ouvert de présentation lisse est un ouvert U de la forme $\mathrm{Spec}(B[x,y]/(F_1,\dots,F_m))$ avec $x = (x_1,\dots,x_m)$ et $y = (y_1,\dots,y_d)$, tel que le jacobien $\mathrm{jac}_U = \det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{1\leq i,j\leq m}$ soit inversible sur U.

Si X est un B-schéma lisse, une présentation lisse de X sera par définition une présentation de X par des ouverts de présentation lisse. Tout B-schéma lisse admet des présentations lisses.

A.2. Ensembles bornés

Soient K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, $r \in \mathbf{N}$, $A = \mathscr{O}_K[\![S_1,\dots,S_r]\!]$ et $B = A[1/p]$ (si $r = 0$, on obtient $A = \mathscr{O}_K$ et $B = K$). Si $\eta > 0$, soit $B^r(0,\eta)$ l'ensemble des $s = (s_1,\dots,s_r) \in K^r$ tels que l'on ait $|s_i| < \eta$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$. Si $s \in B^r(0,1)$, soit $\theta_s : B \to K$ le morphisme donné par $\theta_s(S_i) = s_i$. Si X est un B schéma, on note X_s la fibre de X au-dessus de $s \in B^r(0,1)$ et on a $X(K) = \bigcup_{s \in B^r(0,1)} X_s(K)$.

Définition A.2.1

(i) On dit qu'un sous-ensemble E de K est borné si l'image de E par l'application $x \to |x|$ est bornée dans $\mathbf{R}$, c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $E \subset p^{-n}\mathscr{O}_K$.

(ii) Si X est un B-schéma affine, on dit qu'un sous-ensemble E de $X(K)$ est borné dans X si son image dans K par toute fonction holomorphe sur X est bornée

(iii) Si X est un B-schéma (pas nécessairement affine), on dit qu'un sous-ensemble E de $X(K)$ est borné dans X s'il existe un recouvrement fini $\mathscr{U}$ par des ouverts affines et une décomposition de E sous la forme $E = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} E_U$ telle que si $U \in \mathscr{U}$, alors E_U soit borné dans U (dans le sens du (ii)). Une famille $(E_U)_{U \in \mathscr{U}}$ telle que E_U soit bornée dans U et telle que l'on ait $E = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} E_U$ sera appelée une décomposition de E adaptée à $\mathscr{U}$.

Remarque A.2.2. — On verra un peu plus loin (proposition A.2.5) que l'existence d'une décomposition adaptée ne dépend pas du choix de $\mathscr{U}$ et que l'on pourrait aussi définir les ensembles bornés de la manière suivante : si X est un B-schéma (pas nécessairement affine), on dit qu'un sous-ensemble E de $X(K)$ est borné dans X si, quelque soit le recouvrement fini $\mathscr{U}$ de X par des ouverts affines, il existe une décomposition de E adaptée à $\mathscr{U}$, c'est-à-dire de la forme $E = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} E_U$ de telle sorte que si $U \in \mathscr{U}$, alors l'image de E_U par toute fonction holomorphe sur U est bornée dans K.

Exemple A.2.3

(i) Si $X = \operatorname{Spec} B$, alors $X(K) = B^r(0,1)$ est borné dans X.

(ii) Si $m \in \mathbf{N}$ et si $X = \mathbb{A}_B^m = \operatorname{Spec}(B[x_1, \dots, x_m])$, alors $X(K) = B^r(0,1) \times K^m$ et un sous-ensemble E de $X(K)$ est borné si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $E \subset B^r(0,1) \times (p^{-n}\mathscr{O}_K)^m$.

Lemme A.2.4. — *Soient X un B-schéma affine de type fini et E un sous-ensemble de $X(K)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $n \in \mathbf{N}$ et une immersion fermée $\iota : X \to \mathbb{A}_B^n$ tels que l'image de E par ι soit bornée dans $B^r(0,1) \times K^n$*

(ii) *Quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et l'immersion fermée $\iota : X \to \mathbb{A}_B^n$, l'image de E par ι est bornée dans $B^r(0,1) \times K^n$*

(iii) *E est borné dans X.*

Démonstration. — (ii)$\Rightarrow$(i) de manière évidente. D'autre part, (iii)$\Rightarrow$(ii), car si ι est une immersion fermée de X dans un espace affine, les applications coordonnées induisent des fonctions holomorphes sur X. Finalement, si ι est une immersion fermée de X dans $\mathbb{A}_B^n$, toute fonction holomorphe sur X est un polynôme en les fonctions coordonnées ce qui permet de prouver que (i)$\Rightarrow$ (iii) et permet de conclure.

Proposition A.2.5. — *Soient X un B-schéma, E un sous-ensemble de $X(K)$ borné dans X et $\mathscr{V}$ un recouvrement ouvert fini de X par des ouvert affines. Alors il existe une décomposition de E adaptée à $\mathscr{V}$.*

Démonstration. — La définition permet de montrer que si $V \subset U$ sont deux ouverts affines de X et si F est borné dans V alors il l'est dans U, ce qui permet, si nécessaire, de remplacer $\mathscr{V}$ par un recouvrement plus fin. En particulier, on peut supposer que $\mathscr{V}$ est plus fin que le recouvrement $\mathscr{U}$ permettant de prouver que E est borné dans X. D'autre part, quitte à remplacer X par U, E par E_U et à ne prendre que les éléments de $\mathscr{V}$ inclus dans U, on peut supposer que X est affine et donc de la forme $X = \operatorname{Spec} \Lambda$, où $\Lambda = B[x_1, \dots, x_m]/I$. Quitte à raffiner encore $\mathscr{V}$, on peut supposer que $\mathscr{V} = \{\operatorname{Spec} \Lambda[f_j^{-1}], j \in J\}$, où J est un ensemble fini et les f_j sont des éléments de Λ engendrant Λ. On peut donc trouver des éléments g_j de Λ tels que l'on ait $\sum_{j \in J} f_j g_j = 1$. Comme E est borné, il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $v_p(x_i) \geq n$ si $x \in E$ et $1 \leq i \leq n$, on en déduit l'existence de n' tel que $v_p(g_j(x)) \geq n'$ si $x \in E$ et $j \in J$. Soit $E_j = \{x \in E, v_p(f_j(x)) \geq -n'\}$. On tire de la majoration précédente et de l'identité $\sum_{j \in J} f_j g_j = 1$ le fait que $E = \cup_{j \in J} E_j$. D'autre part, l'application $\iota_j : V_j \to \mathbb{A}_B^{m+1}$ qui à x associe $(x_1, \dots, x_m, f_j(x)^{-1})$ est une immersion fermée et l'image de E_j par les fonctions x_i est bornée dans K puisque $E_j \subset E$ et que E est borné dans X et son image par f_j^{-1} est incluse dans $p^{-n'} \mathscr{O}_K$ et donc borné dans K, ce qui permet de conclure.

Proposition A.2.6. — *Si $f : X \to Y$ est un morphisme de B-schémas et E est un sous-ensemble de $X(K)$ borné dans X, alors $f(E)$ est borné dans Y.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{V}$ un recouvrement affine fini de Y et $\mathscr{U}$ un recouvrement affine fini de X assez fin pour que, si $U \in \mathscr{U}$, alors il existe $V_U \in \mathscr{V}$ contenant $f(U)$. Soit $(E_U)_{U \in \mathscr{U}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathscr{U}$. En revenant à la définition d'ensemble borné dans le cas affine, on voit que $f(E_U)$ est borné dans V_U puis que $f(E) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} f(E_U)$ est borné dans Y, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition A.2.7. — *Si $\iota : X \to Y$ est une immersion fermée, E est un sous-ensemble de $X(K)$ et $\iota(E)$ est borné dans Y, alors E est borné dans X.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert affine fini de Y, $\iota(E) = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} F_U$ une décomposition de $\iota(E)$ telle que F_U soit borné dans U pour tout $U \in \mathscr{U}$ et, si $U \in \mathscr{U}$, soit ι_U une immersion fermée de U dans un espace affine. Les $\iota^{-1}(U)$ pour $U \in \mathscr{U}$ forment un recouvrement ouvert affine fini de U et de plus, si $U \in \mathscr{U}$, alors $\iota_U \circ \iota$ est une immersion fermée de $\iota^{-1}(U)$ dans un espace affine. On en tire le fait que $\iota^{-1}(F_U)$ est borné dans $\iota^{-1}(U)$ (cf. lemme A.2.4) pour tout $U \in \mathscr{U}$ puis que E est borné dans X, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition A.2.8. — *Si X est propre sur B, alors $X(K)$ est borné dans X.*

Démonstration. — Le lemme de Chow et la proposition A.2.6 permettent de se ramener au cas où X est projectif, puis utilisant la proposition A.2.7, au cas où X est l'espace projectif. Il suffit alors de prendre le recouvrement ouvert standard de $\mathbb{P}_B^m$ par des ouverts $(U_i)_{0\leq i\leq m}$ isomorphes à $\mathbb{A}_B^m$ et de remarquer que $X(K)$ peut se décomposer sous la forme $\cup_{i=0}^n F_i$ où F_i est le sous-ensemble $B^r(0,1) \times (\mathscr{O}_K)^n$ de U_i qui est borné dans U_i puisque $B^r(0,1)$ est borné. Ceci permet de conclure.

Lemme A.2.9. — *Soient X un B-schéma, U et V deux ouverts de X et E un sous-ensemble de $U(K) \cap V(K)$. Alors E est borné dans $U \cap V$ si et seulement si il l'est dans U et dans V.*

Démonstration. — Le fait que si E est borné dans $U \cap V$, alors il l'est dans U et dans V résulte de la proposition A.2.6. Réciproquement, supposons que E est borné dans U et dans V et supposons de plus que U et V sont affines et munis d'immersions fermées ι_U et ι_V dans $\mathbb{A}^n$ et $\mathbb{A}^m$ respectivement. Comme X est séparé, l'application naturelle de $U \cap V$ dans $U \times V$ est une immersion fermée de $U \cap V$ dans la variété affine $U \times V$ que l'on peut composer avec l'immersion fermée $\iota_U \times \iota_V$ de $U \times V$ dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$. Comme E est borné dans U et V, son image par $\iota_U \times \iota_V$ est bornée dans $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ et E est borné dans $U \cap V$.

Dans le cas général, on peut recouvrir U par des ouverts affines U_i et V par des ouverts affines V_j et décomposer E sous la forme $E = \cup E_i$ et $E = \cup F_j$, où E_i est borné dans U_i et F_j dans V_j. D'après la discussion précédente, $E_i \cap F_j$ est borné dans $U_i \cap V_j$ et comme $\cup_{i,j}(E_i \cap F_j) = (\cup_i E_i) \cap (\cup_j F_j) = E$, cela implique que E est borné dans $U \cap V$.

Nous allons terminer ce paragraphe en donnant un critère très utile permettant de déterminer si un ensemble borné reste borné dans un ouvert. Si X est un B-schéma et $\mathscr{U}$ est une présentation de X, on peut munir $U(K)$ si $U \in \mathscr{U}$, d'une distance en posant $d_U(x,y) = d(\iota_U(x), \iota_U(y))$, où ι_U est l'immersion fermée de U dans l'espace affine $\mathbb{A}_B^m$ donné par la présentation et d est la distance sur $B^r(0,1) \times K^m \subset K^{r+m}$ induite par la norme du sup., c'est-à-dire donnée par la formule $d((s,x),(s',x')) = \sup(\sup_{1\leq i\leq r} |s_i - s'_i|, \sup_{1\leq j\leq m} |x_j - x'_j|)$.

Proposition A.2.10. — *Soient X un B-schéma, D un sous-schéma fermé de X, E un sous-ensemble borné de X, $\mathscr{U}$ une présentation de X et $(E_U)_{U\in\mathscr{U}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathscr{U}$. Alors E est borné dans $X - D$ si et seulement si, quel que soit $U \in \mathscr{U}$, la distance $d_U(E_U, D(K))$ est non nulle.*

Corollaire A.2.11. — *Si $D(K) = \varnothing$, alors E est borné dans $X - D$.*

Corollaire A.2.12. — *Soient X une variété propre sur K et $x \in X(K)$; alors un sous-ensemble E de $X(K) - \{x\}$ est borné dans $X - \{x\}$ si et seulement si x n'appartient pas à son adhérence.*

Remarque A.2.13. — Si K est localement compact, on peut obtenir une démonstration de la proposition par des méthodes classiques de compacité. On obtient en particulier l'énoncé suivant généralisant le corollaire A.2.12.

Proposition A.2.14. — *Soit K un sous-corps localement compact de $\mathbf{C}_p$. Soient X une variété algébrique propre définie sur K et D une sous-variété fermée de X et E un sous-ensemble de $X - D(K)$. Alors E est borné dans $X - D$ si et seulement si l'intersection de l'adhérence de E (pour la topologie p-adique) et de $D(K)$ est vide.*

Revenons à la démonstration de la proposition A.2.10. D'après le lemme A.2.9, E est borné dans $X - D$ si et seulement si, quel que soit $U \in \mathscr{U}$, E_U est borné dans $U - D$. Ceci permet, quitte à remplacer X par U et E par E_U, de se ramener au cas où X est affine et $\mathscr{U} = \{(X, \iota_X)\}$. D'autre part, l'image de D par l'immersion fermée ι_X est un un sous-schéma fermé de l'espace affine et ι_X induit une immersion fermée de $X - D$ dans $\mathbb{A}^n_B - \iota_X(D)$ et comme d'après la proposition A.2.7, E est borné dans $X - D$ si et seulement si $\iota_X(E)$ est borné dans $\mathbb{A}^n_B - \iota_X(D)$ et que, par définition de d_X, on a $d_X(E, D) = d(\iota_X(E), \iota_X(D))$, on peut, quitte à remplacer X par $\mathbb{A}^n_B$ et E par $\iota_X(E)$, supposer que X est l'espace affine $\mathbb{A}^n_B$ et $\mathscr{U} = \{(X, \mathrm{id})\}$. On peut d'autre part, quitte à faire une homothétie, supposer que E est inclus dans $B^r(0,1) \times B^n(0,1) = B^{r+n}(0,1)$.

Soient $F_1, \ldots, F_m \in B[X_1, \ldots, X_n]$ des générateurs de l'idéal de définition de D que l'on peut, quitte à les multiplier par une puissance de p, supposer appartenir à $A[X_1, \ldots, X_n] \subset A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$. Les $V_i = X - (F_i)$ forment un recouvrement affine de $X - D$ et l'application $\iota_i : U_i \to \mathbb{A}^{n+1}$ qui à x associe $(x_1, \ldots, x_n, F_i(x)^{-1})$ est une immersion fermée. On en tire le fait que E est borné dans $X - D$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit $x \in E$, il existe i tel que $|F_i(x)| > \varepsilon$. On est donc ramené à démontrer le lemme suivant :

Lemme A.2.15. — *Soient $F_1, \ldots, F_m$ des éléments de $\mathscr{O}_K[\![X_1, \ldots, X_{r+n}]\!]$ et D la sous-variété de $B^{r+n}(0,1)$ définie par l'idéal engendré par $F_1, \ldots, F_m$. Si E est un sous-ensemble $B^{r+n}(0,1)$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $d(E, D(K)) = 0$.

(ii) $\inf_{x \in E}(\sup_{1 \leq i \leq m} |F_i(x)|) = 0$.

Démonstration. — L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est immédiate car E étant borné, si $F \in \mathscr{O}_K[\![X_1, \ldots, X_{r+n}]\!]$ et $x, y \in B^{r+n}(0,1)$, alors $|F(x) - F(y)| \leq d(x,y)$ comme on peut le voir en développant F en série entière autour de x.

La démonstration de l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) se fait par récurrence sur la dimension de D (*i.e.* le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles). Si $D = \varnothing$, on peut trouver $G_1, \ldots, G_r \in \mathscr{O}_K[\![X_1, \ldots, X_{r+n}]\!] \otimes K$ tels que l'on ait $\sum_{i=1}^m F_i G_i = 1$. Comme E est borné, il existe $M > 0$ tel que l'on ait $|G_i(x)| \leq M$ quel que soit $x \in E$ et $1 \leq i \leq m$. On en déduit le fait que si $x \in E$, alors $\sup_{1 \leq i \leq m} |F_i(x)| \geq M^{-1}$ et donc que l'assertion (ii) est fausse, ce qui permet de conclure dans le cas où $D = \varnothing$.

Supposons maintenant D de dimension $d \geq 0$ et réduite. Si I est une partie à $n-d$ éléments de $\{1,\ldots,m\}$ et J une partie à $n-d$ éléments de $\{1,\ldots,n\}$, notons $\mathrm{Jac}_{I,J}$ la matrice de coefficients $\dfrac{\partial F_i}{\partial X_j}$ pour $i \in I$ et $j \in J$ et $\mathrm{jac}_{I,J}$ son déterminant. Soit Z le lieu singulier de D, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in D$ tels que l'on ait $\mathrm{jac}_{I,J}(x) = 0$ pour tout couple (I,J). Soit $(a_l)_{l\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E telle que la suite $\sup_{1\leq i\leq m}|F_i(a_l)|$ tende vers 0 quand l tend vers $+\infty$. De deux choses l'une : soit $\lim\limits_{l\to+\infty}(\sup_{I,J}|\mathrm{jac}_{I,J}(a_l)|) = 0$ quel que soit le couple (I,J) et comme on a supposé D réduite, Z est de dimension strictement inférieure à celle de D et l'hypothèse de récurrence implique $d(E,Z(K)) = 0$, ce qui implique $d(E,D(K)) = 0$ puisque $Z \subset D$; soit il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$ tels que quel que soit $l \geq l_0$, il existe I,J tel que l'on ait $|\mathrm{jac}_{I,J}(x)| \geq p^{-k}$ et l'algorithme de Newton (Lemme A.3.4 ou **[6]**, chap. III, §5) nous fournit une solution y_m du système d'équations $F_i(y) = 0$ si $i \in I$ vérifiant

$$d(x_l,y_l) \leq p^k \sup_{i\in I}|F_i(x_l)|$$

si cette dernière quantité est assez petite (strictement inférieure à p^{-k}). Il existe donc un couple (I,J) et une composante irréductible Y de la variété définie par les équations $F_i = 0$ pour $i \in I$ dans l'ouvert $\mathrm{jac}_{I,J} \neq 0$ contenant une infinité des y_l et, quitte à remplacer x_l par une sous-suite, on peut supposer que Y contient tous les y_l pour $l \in \mathbf{N}$. On en déduit le fait que si $\overline{Y}$ désigne l'adhérence de Y et si $(F_i)_{i\in I}, F_{m+1},\ldots,F_t$ sont des générateurs de l'idéal de définition de $\overline{Y}$, alors $\lim\limits_{l\to+\infty}(\sup_{1\leq i\leq t}|F_i(x_l)|) = 0$. Comme $\overline{Y}$ est irréductible et de dimension d, on a soit $\overline{Y} \subset D$ et donc $d(E,D(K)) \leq d(E,\overline{Y}(K))$ ce qui implique $d(E,D(K)) = 0$; soit $D\cap\overline{Y}$ est de dimension strictement inférieure à celle de D et l'hypothèse de récurrence implique $d(E,D(K)\cap\overline{Y}(K)) = 0$ et donc $d(E,D(K)) = 0$. Ceci permet de conclure si D est réduite.

Finalement, si D n'est pas réduite, soient $G_1,\ldots,G_s$ des générateurs du radical de l'idéal de $\mathscr{O}_K[\![X_1,\ldots,X_{r+n}]\!]\otimes K$ engendré par $F_1,\ldots,F_m$. On peut aussi voir D de manière réduite comme le lieu des zéros communs des G_i. Il existe alors $N \in \mathbf{N}$ et, si $i \in \{1,\ldots,s\}$, des éléments $H_{i,1},\ldots,H_{i,m}$ de $\mathscr{O}_K[\![X_1,\ldots,X_{r+n}]\!]\otimes K$ tels que l'on ait $G_i^N = \sum_{j=1}^m H_{i,j}F_j$. L'ensemble E étant borné, il existe $C > 0$ tel que $|H_{i,j}(x)| \leq C$ si $x \in E$ et le couple (i,j) parcourt $\{1,\ldots,s\}\times\{1,\ldots,m\}$. Maintenant, si $x \in E$ vérifie $\sup_i|F_i(x)| < C^{-1}\varepsilon^N$, alors $\sup_i|G_i(x)| < \varepsilon$, ce qui permet de montrer que

$$\inf_{x\in E}(\sup_{1\leq i\leq m}|F_i(x)|) = 0 \Longrightarrow \inf_{x\in E}(\sup_{1\leq i\leq s}|G_i(x)|) = 0$$

et permet de se ramener au cas où D est réduit puis de terminer la démonstration du lemme A.2.15 et celle de la proposition A.2.10.

Corollaire A.2.16. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés définies sur K. Soient U un ouvert de Y et E un sous-ensemble de $f^{-1}(U)$ borné dans X ; alors E est borné dans $f^{-1}(U)$ si et seulement si $f(E)$ est borné dans U.*

Démonstration. — Si E est borné dans $f^{-1}(U)$, alors $f(E)$ est borné dans U en vertu de la proposition A.2.6. Réciproquement, soit $\mathscr{V}$ une présentation de Y et $\mathscr{W}$ une présentation de X assez fine pour que si $W \in \mathscr{W}$, alors il existe $V \in \mathscr{V}$ contenant $f(W)$. Soit $(E_W)_{W\in\mathscr{W}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathscr{W}$. Si E n'est pas borné dans $f^{-1}(U)$, alors, d'après la proposition A.2.10, il existe $W \in \mathscr{W}$ pour lequel, $d_W(E_W, f^{-1}(D)) = 0$. Mais alors, si $W \in \mathscr{W}$ contient $f(V)$, comme E_W est borné dans W, il existe $C \geq 0$ tel que l'on ait $d_V(f(x), f(y)) \leq C d_W(x,y)$ si $x \in E_W$ et $d_W(x,y) \leq 1$. On en déduit le fait que $d_V(f(E_W), D) = 0$ et donc que $f(E_W)$ n'est pas borné dans $V \cap U$. Comme il l'est dans V, il ne l'est pas dans dans U d'après le lemme A.2.9 et, a fortiori, $f(E)$ n'est pas borné dans U, ce qui permet de conclure.

A.3. Épaississements p-adiques

Définition A.3.1. — Soient K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, $\mathscr{O}_K$ l'anneau de ses entiers, A un anneau et θ un morphisme de A dans $\mathscr{O}_K$. On dira que (A, θ) est un épaississement p-adique de $\mathscr{O}_K$ si

(i) θ est surjectif.

(ii) A est sans p-torsion et séparé et complet pour la topologie $(p, \ker\theta)$-adique (*i.e.* l'application naturelle de A dans $\varprojlim_n A/(p, \ker\theta)^n$ est un isomorphisme).

Remarque A.3.2. — Si (A, θ) est un épaississement p-adique de $\mathscr{O}_K$, alors A est un anneau local dont l'idéal maximal $\mathfrak{m}_A$ est constitué des éléments x de A vérifiant $v_p(\theta(x)) > 0$. On peut aussi décrire $\mathfrak{m}_A$ comme l'image réciproque de $\mathfrak{m}_{\mathscr{O}_K}$ par θ.

(ii) Si $x_1, \ldots, x_k$ sont des éléments de $\mathfrak{m}_A$, alors il existe $n \in N$ tel que la puissance n-ième de l'idéal de A engendré par $x_1, \ldots, x_k$ soit contenue dans l'idéal $(p, \ker\theta)$. Comme A est séparé pour la topologie $(p, \ker\theta)$-adique, on en déduit le fait que si $\mathfrak{m} \neq A$ est un idéal de A engendré par un nombre fini d'éléments, alors $\cap_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^n = \{0\}$.

Si (A, θ) est un épaississement p-adique de $\mathscr{O}_K$, posons $B = A[1/p]$. On prolonge θ linéairement en un morphisme surjectif de B sur K et on note $\widehat{B}(A, \theta)$ ou simplement $\widehat{B}$, s'il n'y a pas de risque de confusion, le séparé complété de B pour la topologie $\ker\theta$-adique. On peut alors prolonger θ par continuité en un morphisme surjectif de $\widehat{B}$ sur K. Si Λ est un sous-anneau de $\widehat{B}$, on notera $\mathfrak{n}_\Lambda$ le noyau de la restriction de θ à Λ. Comme on a supposé A sans torsion, il s'identifie naturellement à un sous-anneau fermé de $\widehat{B}$ et on munit $\widehat{B}$ de la topologie obtenue en prenant les $p^n A + (\mathfrak{n}_{\widehat{B}})^{k+1}$, où k et n décrivent $\mathbf{N}$, comme base de voisinages de 0 et pour laquelle $\widehat{B}$ est séparé et complet.

Exemple A.3.3

(i) $(\mathscr{O}_K, \mathrm{id})$ est un épaississement p-adique de $\mathscr{O}_K$ appelé épaississement trivial.

(ii) Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{O}_K^n$ avec $x_i \in \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_K}$ et θ_x est le morphisme de $A = \mathcal{O}[\![X_1, \dots, X_n]\!]$ dans $\mathcal{O}$ envoyant X_i sur x_i, alors (A, θ_x) est un épaississement p-adique de $\mathcal{O}_K$.

(iii) Soit $\mathbf{r} = (r_n)_{n \geq 0}$ une suite convexe d'éléments de $\mathbf{N}$ (c'est-à-dire vérifiant $r_{n+m} \geq r_n r_m$ pour tout couple (n, m) ; en particulier, on doit avoir $r_0 = 0$). Soit $A_{\mathbf{r}}$ le sous-anneau de $\widehat{B}$ constitué des éléments de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$, avec $a_n \in p^{-r_n} A$ et $b_n \in \mathfrak{n}_A{}^n$. Alors $(A_{\mathbf{r}}, \theta)$ est un épaississement p-adique de $\mathcal{O}_K$ et l'application canonique de $\widehat{B}(A_{\mathbf{r}}, \theta) = \varprojlim_n A_{\mathbf{r}}[1/p]/(\ker \theta)^{n+1}$ dans $\widehat{B}$ est un isomorphisme d'anneaux topologiques. L'anneau $A_{\mathbf{r}}[1/p]$ sera noté $B_{\mathbf{r}}$. Notons que si $\mathbf{r}$ et $\mathbf{s}$ sont deux suites convexes d'éléments de $\mathbf{N}$, alors leur somme est aussi convexe et que l'on a $(A_{\mathbf{r}})_{\mathbf{s}} = A_{\mathbf{r}+\mathbf{s}}$.

(iv) Si $k \in \mathbf{N}$, on notera encore k la suite d'éléments de $\mathbf{N}$ de terme général égal à nk. C'est une suite convexe et on notera A_k l'anneau obtenu par le procédé décrit dans l'exemple précédent. Dans le cas particulier où $A = \mathcal{O}_K[\![T_1, \dots, T_d]\!]$ et $\theta = \theta_x$, l'anneau $B_k = A_k[1/p]$ est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la boule ouverte $B^d(x, p^{-k})$ de centre x et de rayon p^{-k}.

(v) Si $d, k, l \in \mathbf{N}$, on notera $A_l^{(d,k)}$ l'épaississement p-adique de $\mathcal{O}_K$ donné par $A_l^{(d,k)} = A_l\,[[p^{-k}T_1, \dots, p^{-k}T_d]]$ et où on a prolongé θ en posant $\theta(T_i) = 0$. L'anneau $A_l^{(d,k)}[1/p]$ sera, comme d'habitude, noté $B_l^{(d,k)}$. Si $l = 0$, les anneaux $A_l^{(d,k)}$ et $B_l^{(d,k)}$ seront souvent notés respectivement $A^{(d,k)}$ et $B^{(d,k)}$.

(vi) L'anneau $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ admet un épaississement p-adique universel (cf. **[25]**) décrit ci-dessous.

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On munit $\mathcal{R}$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x + y = s$ où $s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x \cdot y = t$ avec $t^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$ ce qui fait de $\mathcal{R}$ un anneau de caractéristique p complet pour la valuation $v_{\mathcal{R}}$ définie par $v_{\mathcal{R}}(x) = v_p(x^{(0)})$. Soit $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)} \dots)$ un élément de $\mathcal{R}$ tel que $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, ce qui implique que si $n \geq 1$, alors $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité. Si $m \geq 1$, posons $\varepsilon_m = \varepsilon^{p^{-m}} = (\varepsilon^{(m)}, \dots, \varepsilon^{(n+m)}, \dots) \in \mathcal{R}$.

Soit $\mathbf{A}_{\inf} = W(\mathcal{R})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{R}$ et si $x \in \mathcal{R}$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $W(\mathcal{R})$. L'homomorphisme θ de $\mathbf{A}_{\inf}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$ est surjectif, son noyau est un idéal principal et $(\mathbf{A}_{\inf}, \theta)$ est l'épaississement p-adique universel de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$.

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ l'anneau $\widehat{B}(\mathbf{A}_{\inf}, \theta)$. La série $-\log[\varepsilon] = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}([\varepsilon]-1)^n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers un élément que nous noterons t_p, qui est un générateur de $\mathfrak{n}_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+}$ et qui peut être vu comme un analogue p-adique de $2i\pi$.

$\overline{\mathbf{Q}}_p$ s'identifie à la clôture séparable de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, la topologie de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ se décrivant comme suit. Définissons par récurrence une suite de sous-anneaux $\mathcal{O}^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ et de $\mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$-modules $\Omega^{(k)}$ en posant $\mathcal{O}^{(0)} = \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p}$ et, si $k \geq 1$, $\Omega^{(k)} = \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_p} \otimes \Omega^1_{\mathcal{O}^{(k-1)}/\mathbf{Z}_p}$ et en prenant pour $\mathcal{O}^{(k)}$ le noyau de la dérivation canonique $d^{(k)}$ de $\mathcal{O}^{(k-1)}$ à valeurs dans $\Omega^{(k)}$. Alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est le séparé complété de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ pour la topologie définie en prenant les $p^n\mathcal{O}^{(k)}$ avec $n, k \in \mathbf{N}$ pour base de voisinages de 0. De plus, l'adhérence de $\mathcal{O}^{(k)}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ de est égale à $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + \mathfrak{n}^{k+1}_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+}$ et si $k \geq 1$, la dérivation $d^{(k)}$ est surjective et $\Omega^{(k)}$ s'identifie à $\mathfrak{n}^k_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+}/(\mathfrak{n}^k_{\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}} + \mathfrak{n}^{k+1}_{\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+})$ qui lui-même s'identifie au twist à la Tate, par la puissance k-ième du caractère cyclotomique, du module galoisien $(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathfrak{a}^k)$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal fractionnaire de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ des éléments x vérifiant $v_p(x) \geq -\dfrac{1}{p-1}$.

Soit (A, θ) un épaississement de $\mathcal{O}_K$. Soient $m \geq 1$ et $d \geq 0$ deux entiers. Posons $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ et soient $F_1, \ldots, F_m$ des éléments de $A[\![x, y]\!]$. Notons F l'application de $(\mathfrak{m}_A)^m \times (\mathfrak{m}_A)^d$ dans $(A)^m$ qui à (x, y) associe $(F_1(x, y), \ldots, F_m(x, y))$ et $J(x, y)$ l'élément de $M(r, A)$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est égal à $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x, y)$. Soient $\mathfrak{m}$ un idéal fermé de A, $k \in \mathbf{N}$, $(a, b) \in (\mathfrak{m}_A)^m \times (\mathfrak{m}_A)^d$ et $M \in M_m(B)$ vérifiant

(i) $p^k M \in M_m(A)$,

(ii) $MJ(a, b) - \mathrm{id}$ et $J(a, b)M - \mathrm{id}$ sont à coefficients dans $\mathfrak{m}$,

(iii) $F(a, b)$ a ses coordonnées dans $p^{2k}\mathfrak{m}$,

où, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on écrit, pour ne pas alourdir les notations, $x \in a + \mathfrak{a}$ si $x \in (\widehat{B})^m$ (resp. $M_m(\widehat{B})$) pour signifier que $x - a$ a toutes ses coordonnées (resp. tous ses coefficients) dans $\mathfrak{a}$

***Lemme A.3.4* (Algorithme de Newton).** — *Sous les hypothèses précédentes, si l'on définit par récurrence, la suite d'éléments x_n de $\widehat{B}^m$ par*

$$x_0 = a \quad \textit{et} \quad x_{n+1} = x_n - MF(x_n, b),$$

alors la suite x_n converge dans $\widehat{B}^m$ vers l'unique solution de $F(x, b) = 0$ appartenant à $a + p^k\mathfrak{m}$.

Démonstration. — Si n est un entier, $\mathfrak{m}^n$ désignera systématiquement l'idéal de A puissance n-ième de l'idéal $\mathfrak{m}$, alors que le sous-ensemble $\mathfrak{m} \times \cdots \times \mathfrak{m}$ de $\widehat{B}^n$ sera noté $(\mathfrak{m})^n$. Quitte à remplacer $\mathfrak{m}$ par un idéal plus petit, on peut supposer que $\mathfrak{m}$ est engendré par un nombre fini d'éléments (il suffit de prendre l'idéal engendré par les coefficients de $MJ(a, b) - \mathrm{id}$, $J(a, b)M - \mathrm{id}$ et les coordonnées de $p^{-2k}F(a, b)$) et donc que $\bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathfrak{m}^n = \{0\}$.

Si a_1 et a_2 sont deux éléments de $a + p^k\mathfrak{m}$ vérifiant $a_2 - a_1 \in p^k\mathfrak{m}^n$, alors

$$F(a_1, b) - F(a_2, b) - J(a_2, b)(a_1 - a_2) \in p^{2k}\mathfrak{m}^{2n} \subset p^{2k}\mathfrak{m}^{n+1}, \tag{A.3.5}$$

comme le montre le développement de Taylor de F en (a_2, b). Maintenant, si a_1 et a_2 sont deux solutions de l'équation $F(x, b) = 0$ appartenant à $a + p^k\mathfrak{m}$ vérifiant

$a_1 - a_2 \in p^k\mathfrak{m}^n$, la congruence A.3.5 devient $J(a_2,b)(a_1-a_2) \in p^k\mathfrak{m}^{n+1}$. Comme d'autre part $(a_2,b)-(a,b) \in p^k\mathfrak{m}$, on a $J(a_2,b)-J(a,b) \in p^k\mathfrak{m}$ et comme $M \in p^{-k}M_m(A)$, on en déduit $MJ(a_2,b) - \mathrm{id} \in \mathfrak{m}$, ce qui implique $a_1 - a_2 \in p^k\mathfrak{m}^{n+1}$ comme on le voit en multipliant la congruence précédente par M. On en déduit le fait que $(a_1-a_2) \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^n$ et donc que $a_1 = a_2$, d'où l'unicité.

Comme on a $F(a,b) \in p^{2k}\mathfrak{m}$, on démontre par récurrence en utilisant l'identité A.3.5 avec $a_1 = x_n$ et $a_2 = x_{n+1} = x_n - MF(x_n,b)$ et en utilisant le fait que $J(a_2,b)M - \mathrm{id} \in \mathfrak{m}$ que l'on a $F(x_n,b) \in p^{2k}\mathfrak{m}^{n+1}$ et donc que $x_{n+1} - x_n \in p^k\mathfrak{m}^{n+1}$. On en déduit le fait que la suite x_n converge dans $a + p^k\mathfrak{m}$ et comme sa limite est clairement une solution de l'équation $F(x,b) = 0$, c'est d'après ce qui précède l'unique solution de l'équation $F(x,b) = 0$ appartenant à $a + p^k\mathfrak{m}$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire A.3.6. — *Soient $F_1,\dots,F_m \in \mathcal{O}_K[\![X_1,\dots,X_{m+d}]\!]$. Si $z \in B^{m+d}(0,1)$ est tel qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ et une partie I à m éléments de $\{1,\dots,m+d\}$ telle que si $\mathrm{jac}_I(z)$ désigne le déterminant de la matrice $\mathrm{Jac}_J(z)$ de coefficients $\dfrac{\partial F_i}{\partial X_j}(z)$ pour $1 \le i \le m$ et $j \in J$, on ait*

(i) $\sup_{1\le i\le m} |F_i(z)| < p^{-2k}$,

(ii) $|\mathrm{jac}_J(z)| \ge p^{-k}$,

alors il existe $z' \in B^{m+d}(0,1)$ vérifiant

$$F_1(z') = \cdots = F_m(z') = 0 \quad \textit{et} \quad d(z,z') \le p^k \sup_{1\le i\le m} |F_i(z)|.$$

Démonstration. — Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que $J = \{1,\dots,m\}$ et on peut appliquer le lemme précédent au cas où

$$A = \mathcal{O}_K, \quad a = (z_1,\dots,z_m), \quad b = (z_{m+1},\dots,z_{m+d}), \quad M = \mathrm{Jac}_I^{-1}$$

et où $\mathfrak{m}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_K$ engendré par $F_1(z),\dots,F_m(z)$.

A.4. Sous-ensembles bornés des épaississements p-adiques

Dans toute cette section, (A,θ) sera un épaississement p-adique de $\mathcal{O}_K$ et on notera $B = A[1/p]$ et $\widehat{B}$ le complété de B pour la topologie $\ker\theta$-adique.

Lemme A.4.1. — *Si E est un sous-ensemble de $\widehat{B}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Quelle que soit la suite x_m d'éléments de E et quelle que soit la suite y_m d'éléments d'éléments de $\widehat{B}$ tendant vers 0, la suite x_my_m tend vers 0.*

(ii) *Quelle que soit la suite x_m d'éléments de E, la suite p^mx_m tend vers 0.*

(iii) *Quel que soit $k \in \mathbf{N}$, il existe $n_k \in \mathbf{N}$ tel que $E \subset p^{-n_k}A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1}$.*

Démonstration. — (i)$\Rightarrow$(ii) de manière immédiate. Supposons que la propriété (iii) ne soit pas vérifiée ; il existe alors $k \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on puisse trouver $x_m \in E$ n'appartenant pas à $p^{-m}A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1}$. Mais alors la suite p^mx_m n'a aucun terme dans $A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1}$ et comme ce dernier ensemble est un voisinage de 0, on en tire le fait que la suite $p^m x_m$ ne tend pas vers 0 et donc que la propriété (ii) n'est pas vérifiée non plus. Il reste à montrer (iii)$\Rightarrow$(i). Soit y_m une suite d'éléments de $\widehat{B}$ tendant vers 0. Par définition de la topologie de $\widehat{B}$, ceci est équivalent au fait que, quel que soient $k, n \in \mathbf{N}$, il existe $N_{k,n} \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $y_m \in p^n A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1}$ si $m \geq N_{k,n}$. Mais alors, si x_m est une suite d'éléments de E, on a $x_m y_m \in p^n A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1}$ si $m \geq N_{k,n+n_k}$, ce qui montre que la suite $x_m y_m$ tend vers 0 et termine la démonstration du lemme.

Définition A.4.2. — Un sous-ensemble E de $\widehat{B}$ vérifiant une des 3 propriétés équivalentes du lemme A.4.1 sera dit borné dans $\widehat{B}$. Si $\mathbf{r}$ est une suite convexe d'éléments de $\mathbf{N}$, on dira que E est $A_{\mathbf{r}}$-borné s'il existe $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que E soit inclus dans $p^{-n} A_{\mathbf{r}+k}$.

Remarque A.4.3. — Dans le cas où $A = \mathscr{O}_K$, ces conditions sont équivalentes à l'existence de $n \in \mathbf{N}$ tel que E soit inclus dans $p^{-n}\mathscr{O}_K$ et on retombe sur la définition d'ensemble borné donnée au §2.

Lemme A.4.4. — *Un sous-ensemble E de $\widehat{B}$ est borné si et seulement si il existe une suite convexe $\mathbf{r}$ d'éléments de $\mathbf{N}$ telle que E soit $A_{\mathbf{r}}$-borné.*

Démonstration. — Un ensemble $A_{\mathbf{r}}$-borné est borné : il suffit d'utiliser la propriété (iii) des ensembles bornés. Réciproquement, soit E un sous-ensemble borné de $\widehat{B}$. L'ensemble $\theta(E)$ est borné dans K et il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\theta(E)$ soit inclus dans $p^{-n}\mathscr{O}_K$. L'ensemble $p^n E$ est borné dans $\widehat{B}$; il existe donc une suite d'éléments n_k de $\mathbf{N}$ telle que $p^n E$ soit inclus dans $\bigcap_{k=0}^{+\infty}(p^{-n_k} A + \mathfrak{n}_{\widehat{B}}{}^{k+1})$ et on s'est débrouillé pour pouvoir prendre $n_0 = 0$. Définissons une suite d'entiers par la formule

$$r_k = \sup_{k_1+\cdots+k_s=k} n_{k_1} + \cdots + n_{k_s}.$$

Par construction, on a $r_k \geq n_k$ et $r_{k_1+k_2} \geq r_{k_1} + r_{k_2}$. La seconde inégalité implique que la suite $\mathbf{r} = (r_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite convexe d'éléments de $\mathbf{N}$ et la première que $p^n E \subset A_{\mathbf{r}}$, ce qui permet de conclure.

Remarque A.4.5. — Ce lemme permet, dans un énoncé du type « telle construction transforme un ensemble A-borné (resp. borné) en un ensemble A-borné (resp. borné) », de ne démontrer que le cas des ensembles A-bornés. En effet, si E est un ensemble borné, on peut, quitte à remplacer A par $A_{\mathbf{r}}$ pour un choix approprié de $\mathbf{r}$ ce qui ne change pas $\widehat{B}$, supposer que E est A-borné et donc que son image par la construction est A-bornée donc bornée.

Lemme A.4.6

(i) *Un ensemble fini est borné (mais pas forcément A-borné).*

(ii) *Si E et F sont A-bornés (resp. bornés), les ensembles*

$$E \cup F, \quad E + F = \{x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F\} \quad \textit{et} \quad E \cdot F = \{xy \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

sont A-bornés (resp. bornés).

(iii) *Si E est A-borné (resp. borné) le sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\widehat{B}$ engendré par E est A-borné (resp. borné)et l'adhérence du sous-groupe additif de $\widehat{B}$ engendré par E est A-bornée (resp. bornée) dans $\widehat{B}$.*

(iv) *Si E est un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de $B^d(0,p^{-k})$ et F est un sous-ensemble de $p^{-m}A^{(d,k)}$, alors $\bigcup_{f\in F} f(E)$ est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$.*

(v) *Si E est un sous-ensemble de $\mathfrak{n}_{\widehat{B}}$ qui est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$ et $f \in \widehat{B}[\![X]\!]$, alors $f(E)$ est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$*

Démonstration. — Le (i) est évident et les points (ii) et (iii) découlent du lemme A.4.4. Pour démontrer le (iv) remarquons que par définition, si E est A-borné, alors il existe $l, n \in \mathbf{N}$ tels que E soit inclus dans $p^{-n}A_l$. Comme d'autre part, E est par hypothèse inclus dans $B^d(0,p^{-k})$, c'est un sous-ensemble de $p^k A_{n+l+k}$ et si $f \in F$, alors $f(E) \subset p^{-m}A_{n+l+k}$, ce qui permet de conclure.

Finalement, si E est un sous-ensemble borné de $\mathfrak{n}_{\widehat{B}}$, son image par f modulo ${\mathfrak{n}_{\widehat{B}}}^{k+1}$ est la même que celle par le polynôme obtenu en ne gardant que les termes de degré $\leq k$ dans le développement en série entière de f ; elle est donc bornée en vertu du (ii).

Lemme A.4.7. — *Soient $\widehat{\mathbf{G}}_m(\widehat{B}) = \{x \in \widehat{B} \mid \theta(x) = 1\}$ et $\widetilde{E}$ un sous-ensemble de $\widehat{\mathbf{G}}_m(\widehat{B})$ A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$. Alors le sous-groupe de $(\widehat{B})^*$ engendré par $\widetilde{E}$ est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$.*

Démonstration. — On se ramène au (iii) du lemme A.4.6 via le (iv) (resp. le (v)) de ce lemme appliqué aux applications log et exp qui induisent des isomorphismes analytiques de groupes entre $\widehat{\mathbf{G}}_m(\widehat{B})$ et $\mathfrak{n}_{\widehat{B}}$.

Lemme A.4.8. — *Soit E un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de $\widehat{B}$ inclus dans le sous-groupe $\widehat{B}^{**}$ de $\widehat{B}^*$ des éléments x vérifiant $|\theta(x)| = 1$. Alors le sous-groupe de $\widehat{B}^*$ engendré par E est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$.*

Démonstration. — Si $F = \widehat{\mathbf{G}}_m(\widehat{B}) \cap \{xy^{-1} \mid x \in E, y \in A^*\}$, alors F est un sous-ensemble de $\widehat{\mathbf{G}}_m(\widehat{B})$ borné dans $\widehat{B}$ et E est inclus dans $A^* \cdot F$ car θ induit une surjection de A^* sur $\mathscr{O}_K^*$. On en tire le fait que le sous-groupe engendré par E est inclus dans le produit du sous-groupe engendré par F qui est borné en vertu du lemme A.4.7 et de A^* qui est aussi borné ; cela permet de conclure.

Proposition A.4.9. — *Soit E un sous-ensemble A-borné de $\widehat{B}$ inclus dans $\widehat{B}^*$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'ensemble $E^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in E\}$ est A-borné dans $\widehat{B}$.*

(ii) *L'ensemble $\theta(E^{-1})$ est borné dans K.*

(iii) *Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $|\theta(x)| \geq p^{-k}$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. — Les conditions (ii) et (iii) sont clairement équivalentes. D'autre part, (i)⇒(ii) car θ est continue. Il reste à prouver (iii)⇒(i). Supposons donc que

E est A borné dans $\widehat{B}$ et qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $|\theta(x)| \geq p^{-k}$ quel que soit $x \in E$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ et $l \in \mathbf{N}$ tels que $E \subset p^{-n}A_l$ puisque E est A borné. Soient $x \in E$ et $y \in A$ tels que $\theta(y) = p^k\theta(x^{-1})$. Posons $z = -xy + p^k$ de telle sorte que $z \in (p^{-n}A_l \cap \mathfrak{n}_{\widehat{B}}) \subset \mathfrak{n}_{A_{l+n}}$. Un petit calcul nous montre que l'on a $x^{-1} = p^{-k}y\sum_{i=0}^{+\infty} p^{-ik}z^i$ et donc que $x^{-1} \in p^{-k}A_{l+k+n}$. Ceci prouve que E^{-1} est inclus dans $p^{-k}A_{l+k+n}$ et est donc A-borné, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition A.4.10. — *Soit E un sous-ensemble de $\widehat{B}^*$ tel que les ensembles E et E^{-1} soient A-bornés (resp. bornés) dans $\widehat{B}$. Alors l'intersection $\langle E\rangle \cap \widehat{B}^{**}$ du sous-groupe $\langle E\rangle$ de $\widehat{B}^*$ engendré par E et de $\widehat{B}^{**}$ est A-borné (resp. borné) dans $\widehat{B}$.*

Démonstration. — Les ensembles E et E^{-1} étant A-bornés, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que, si $x \in E$, alors $-n \leq v_p(\theta(x)) \leq n$. Choisissons pour tout $r \in\,]0,n]$ dans l'image de $\mathscr{O}_K$ par l'application v_p un élément ϖ_r de A vérifiant $v_p(\theta(\varpi_r)) = r$ et posons $\varpi_{-r} = \varpi_r^{-1}$ si $r > 0$. L'ensemble

$$F_1 = \{\varpi_r \mid r \in [-n,0[\,\cup\,]0,n]\}$$

est A-borné d'après la proposition précédente. L'ensemble

$$F_2 = \{x^{-1}\varpi_{v_p(\theta(x))} \mid x \in E\}$$

est A-borné dans $\widehat{B}$ puisqu'inclus dans $F_1 \cdot E^{-1}$ et inclus dans $\widehat{B}^{**}$. Comme $\langle E\rangle \cap \widehat{B}^{**}$ est inclus dans $\langle F_2\rangle \cdot \big(\langle F_1\rangle \cap \widehat{B}^{**}\big)$ et que $\langle F_2\rangle$ est A-borné d'après le lemme A.4.8, il suffit de prouver que $\langle F_1\rangle \cap \widehat{B}^{**}$ est A-borné dans $\widehat{B}$. Or ce dernier groupe est l'ensemble des éléments du type $\prod_{i=1}^{s} \varpi_{r_i}$, où s décrit $\mathbf{N}$ et $r_1, \ldots, r_s$ sont des éléments de $[-n,n]$ vérifiant $r_1 + \cdots + r_s = 0$ et une petite récurrence (sur s) montre que c'est aussi le sous-groupe de $\widehat{B}^*$ engendré par

$$\{\varpi_{r_1}\varpi_{-r_2}\varpi_{r_2-r_1} \mid r_1 \in\,]0,n],\ r_2 \in\,]0,n]\}$$

qui est un sous-ensemble A-borné de $\widehat{B}$ inclus dans $\widehat{B}^{**}$, ce qui, grâce au lemme A.4.8, permet de conclure.

A.5. Retour sur les ensembles bornés

Soient K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, (A,θ) un épaississement p-adique de $\mathscr{O}_K$, $B = A[1/p]$, et $\widehat{B} = \widehat{B}(A,\theta)$. Si X est un B-schéma, on note X_θ la fibre en θ et on note encore $\theta : X(\widehat{B}) \to X_\theta(K)$, la réduction modulo $\ker\theta$.

Définition A.5.1

(i) Si X est un B-schéma affine, on dit qu'un sous-ensemble E de $X(\widehat{B})$ est A-borné (resp. borné) dans X si son image dans $\widehat{B}$ par toute fonction holomorphe sur X est A-bornée (resp. bornée).

(ii) Si X est un B-schéma (pas nécessairement affine), on dit qu'un sous-ensemble E de $X(\widehat{B})$ est A-borné (resp. borné) dans X s'il existe un recouvrement fini $\mathscr{U}$ de

X par des ouverts affines et une décomposition de E sous la forme $E = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} E_U$ telle que si $U \in \mathscr{U}$, alors E_U est A-borné (resp. borné) dans U.

Les propositions et lemmes suivants se démontrent exactement de la même manière que les énoncés correspondants du §2 à condition d'utiliser le lemme A.4.9 de temps en temps.

Lemme A.5.2. — *Soient X un B-schéma affine de type fini et E un sous-ensemble de $X(\widehat{B})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe $n \in \mathbf{N}$ et une immersion fermée $\iota : X \to \mathbb{A}_B^n$ tels que l'image de E par ι soit A-bornée (resp. borné).*

(ii) *Quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et l'immersion fermée $\iota : X \to \mathbb{A}_B^n$, l'image de E par ι est A-bornée (resp. bornée).*

(iii) *E est A-borné (resp. borné) dans X.*

Proposition A.5.3. — *Soient X un B-schéma affine de type fini, E un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de $X(\widehat{B})$ et $\mathscr{V}$ un recouvrement ouvert fini de X par des ouvert affines. Alors il existe une décomposition de E adaptée à $\mathscr{V}$.*

Proposition A.5.4. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de B-schémas et E un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de $X(\widehat{B})$; alors $f(E)$ est A-borné (resp. borné) dans Y.*

Proposition A.5.5. — *Si $\iota : X \to Y$ est une immersion fermée et E est un sous-ensemble de $X(\widehat{B})$ et si $\iota(E)$ est A-borné (resp. borné) dans Y, alors E est A-borné (resp. borné) dans X.*

Lemme A.5.6. — *Soit X un schéma séparé de type fini sur B. Soient U et V deux ouverts de X et E un sous-ensemble de $U \cap V$. Alors E est A-borné (resp. borné) dans $U \cap V$ si et seulement si il l'est dans U et dans V.*

Si X est un B-schéma et $\mathscr{U}$ est une présentation de X, on peut munir $U(\widehat{B})$ si $U \in \mathscr{U}$, d'une pseudo-distance en posant $d_U(x,y) = d(\theta(\iota_U(x)), \theta(\iota_U(y)))$, où ι_U est l'immersion fermée de U dans l'espace affine $\mathbb{A}_B^m$ donné par la présentation et d est la distance sur $B^r(0,1) \times K^m \subset K^{r+m}$ induite par la norme du sup. Il s'agit d'une pseudo-distance et pas d'une distance car deux points ayant même image par θ sont à distance nulle alors qu'ils ne sont pas forcément égaux.

Proposition A.5.7. — *Soient X un B-schéma, D un sous-schéma fermé de X, E un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de X, $\mathscr{U}$ une présentation de X et $(E_U)_{U \in \mathscr{U}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathscr{U}$. Alors E est A-borné (resp. borné) dans $X - D$ si et seulement si, quel que soit $U \in \mathscr{U}$, la distance $d_U(E_U, D(\widehat{B}))$ est non nulle.*

Corollaire A.5.8. — *Soient X un B-schéma et D un sous-schéma fermé de X. Soit E un sous-ensemble A-borné (resp. borné) de $X(\widehat{B})$, alors E est A-borné (resp. borné) dans $X - D$ si et seulement si $\theta(E)$ est borné dans $X - D$.*

Démonstration. — Par construction, la distance $d_U(x, y)$ ne dépend que de $\theta(x)$ et $\theta(y)$ et le critère énoncé dans la proposition A.5.7 ne fait donc intervenir que $\theta(E)$.

Corollaire A.5.9. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés définies sur K. Soient U un ouvert de Y et E un sous-ensemble de $f^{-1}(U)$ A-borné (resp. borné) dans X ; alors E est A-borné (resp. borné) dans $f^{-1}(U)$ si et seulement si $f(E)$ est A-borné (resp. borné) dans U.*

Le seul énoncé du §2 qui ne se transpose pas dans la situation considérée ici est la proposition A.2.8 ; en effet, on vérifie facilement que même si X est propre sur B, $X(\widehat{B})$ n'est borné dans X que si (A, θ) est l'épaississement p-adique trivial de $\mathcal{O}_K$, autrement dit, que si $\widehat{B} = K$.

Proposition A.5.10. — *Soient X un B-schéma lisse et E un sous-ensemble borné de $X(K)$; alors il existe un sous-ensemble A-borné $\widetilde{E}$ de $X(\widehat{B})$ tel que l'application θ induise une surjection de $\widetilde{E}$ sur E.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{U}$ une présentation lisse de X et $(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathcal{U}$. Quitte à remplacer X par U et E par E_U, on peut supposer que X est affine et de présentation lisse, autrement dit de la forme $\operatorname{Spec} B[x, y]/(F_1, \ldots, F_m)$, où $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$, de telle sorte que la matrice Jac_X de coordonnées $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ soit inversible sur X. Comme E est borné dans $X(K)$, il existe $k_0 \in \mathbf{N}$ tel que E soit inclus dans $(p^{-k_0}\mathcal{O}_K)^{m+d}$ et quitte à faire le changement de variables $x_i = p^{-k_0}x_i'$, on peut supposer que E est inclus dans $\mathcal{O}_K^{m+d}$. Quitte à multiplier les F_i par une puissance convenable de p, on peut de même supposer que les F_i appartiennent à $A[x_1, \ldots, x_{m+d}]$. Il existe alors $k \in \mathbf{N}$ tel que $\operatorname{Jac}_X^{-1}$ ait ses coordonnées dans $p^{-k}A[x, y]$. Soient $z \in E$ et $c = (a, b) \in A \subset A_{2k}$ vérifiant $\theta(c) = z$. Par construction, on a $F_i(c) \in \mathfrak{n}_A \subset p^{2k}\mathfrak{n}_{A_{2k}}$ et $p^k \operatorname{Jac}_X^{-1}(c) \in M_m(A) \subset M_m(A_{2k})$. On est dans les conditions d'application de l'algorithme de Newton et l'équation $F_1(x, b) = \cdots = F_n(x, b) = 0$ a une unique solution $\widetilde{a}$ appartenant à $a + p^k\mathfrak{n}_{A_{2k}}$. Nous venons donc de construire un élément $\widetilde{c} = (\widetilde{a}, b)$ de $X(\widehat{B}) \cap (A_{2k})^{m+d}$ vérifiant $\theta(\widetilde{c}) = z$, ce qui montre que l'on peut prendre $\widetilde{E} = X(\widehat{B}) \cap (A_{2k})^{m+d}$.

Proposition A.5.11. — *Soit $X = \operatorname{Spec}(B[x, y]/(F_1, \ldots, F_m))$ un B-schéma affine de présentation lisse et soit E un sous-ensemble A-borné de $X(\widehat{B})$. Alors*

(i) *il existe $k_E > 0$ tel que, quel que soit $c = (a, b) \in E$, il existe un voisinage $V(c)$ de c dans $X(\widehat{B})$ tel que l'application $\pi : X(\widehat{B}) \to \widehat{B}^d$ soit un isomorphisme analytique de $V(c)$ sur $B^d(b, p^{-k_E})$. De plus, il existe $l_E, n_E \in N$ tel que, si ι_c désigne* *l'isomorphisme réciproque, alors* $\iota_c(y) = (x_c(y), y)$, *avec* $x_{c,i}(y) = x_{0,i} + f_{c,i}(y-b)$ *et* $f_{c,i}(T) \in p^{-n_E} A_{l_E}^{(d,k_E)}$.

(ii) *Si* $\omega \in \Omega^1_{X/A}$ *est une* 1*-forme différentielle fermée holomorphe sur* U *et si* $k > k_E$, *il existe* $n = n(E, \omega, \varepsilon)$ *tel que si* $c \in E$ *et si* $F_{\omega,c}$ *est la primitive formelle de* $\iota_c^* \omega$ *s'annulant en* b, *alors* $F_{\omega,c} \in p^{-n} A_{l_E}^{(d,k)}$.

Démonstration. — Le (i) de cette proposition indigeste est une version «uniforme» du théorème des fonctions implicites et le (ii) est une version uniforme du fait qu'une fonction analytique a même rayon de convergence que ses dérivées. Comme E est A-borné dans X, il existe $n, l \in \mathbf{N}$ tels que l'on ait $E \subset (p^{-n} A_l)^{m+d}$. Quitte à faire une homothétie, ce qui ne fait que changer les valeurs de n_E et l_E, on peut, comme dans la démonstration de la proposition A.2.10, supposer que l'on a $n = 0$. On peut de même supposer que les F_i appartiennent à $A[x, y]$. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel la matrice Jac_X^{-1} ait ses coordonnées dans $p^{-k} A[x, y]$ et $A' = A_l^{(d,2k)}$. Soient $c = (a, b) \in E$ et $G_i \in A'[x]$ défini par $G_i(x) = F_i(x, T + b)$. Comme $c \in E$, on a $F_i(a, b) = 0$ et $G_i(a)$ est un élément de $A_l[T_1, \dots, T_d]$ appartenant à l'idéal $(T_1, \dots, T_d)$ qui est contenu dans $p^{2k} \mathfrak{n}_{A'}$. D'autre part, $M = \mathrm{Jac}_X^{-1}(c)$ a ses coordonnées dans $p^{-k} A_l \subset p^{-k} A'$ et si on note $J'(a)$ la matrice de $M_m(A')$ de coefficients $\dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$, alors $J'(a) - J(a, b)$ est à coefficients dans l'idéal $(T_1, \dots, T_d) \subset p^{2k} \mathfrak{n}_{A'} \subset p^k \mathfrak{n}_{A'}$ et donc $MJ'(a) - \mathrm{id}$ et $J'(a)M - \mathrm{id}$ sont à coefficients dans $\mathfrak{n}_{A'}$. On est donc dans les conditions d'utilisation de l'algorithme de Newton et l'équation $G_1(x) = \cdots = G_m(x) = 0$ a une et une seule solution appartenant à $a + p^k \mathfrak{n}_{A'}$. Notons cette solution $(a_1 + p^k f_{c,1}, \dots, a_m + p^k f_{c,m})$, où les $f_{c,i}$ sont des éléments de $A' = A_l^{(d,2k)}$. Si $y \in B^d(b, p^{-2k})$, les séries $f_i(y - b)$ convergent dans $\widehat{B}$ et si l'on pose $x_c(y) = (x_{c,1}(y), \dots, x_{c,m}(y))$ avec $x_{c,i}(y) = a_i + p^k f_{c,i}(y - b)$, alors $x_c(y)$ est l'unique solution de l'équation $F(x, y) = 0$ appartenant à $B^m(a, p^{-k})$. Ceci permet de démontrer le (i) avec $k_E = 2k$, $l_E = l$ $n_E = k$ et $U(c) = X(\widehat{B}) \bigcap (B^m(a, p^{-k_E}) \times B^d(b, \varepsilon_E))$.

Finalement, le (i) implique qu'il existe $k' = k'(E, \omega) \in \mathbf{N}$ tel que, si $c \in E$, la forme différentielle $\iota_c^* \omega$ s'écrive sous la forme $\sum_{i=1}^d f_i(y - b) dy_i$ avec $f_i \in p^{-k'} A_{l_E}^{(d,k_E)}$ et le (ii) s'en déduit grâce à une majoration brutale des coefficients du développement en série entière d'une fonction par de ceux de ses dérivées.

Corollaire A.5.12. — *Soient* X *un* B*-schéma,* $\omega \in \Omega^1_{X/B}$ *une* 1*-forme différentielle fermée et* E *un sous-ensemble* A*-borné de* X. *Soit* $F = \{(x, y) \in E \times E \mid \theta(x) = \theta(y)\}$. *Alors l'image de* F *par l'application qui à* (x, y) *associe* $\int_x^y \omega$ *est* A*-bornée dans* $\widehat{B}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{U}$ une présentation lisse de X, $(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ une décomposition de E adaptée à $\mathcal{U}$ et, si $U \in \mathcal{U}$, soit $E'_U = \{x \in E \mid \theta(x) \in \theta(E_U)\}$. Comme E'_U est A-borné dans X et que son image par θ est bornée dans $U(K)$, on en déduit le fait (cf. corollaire A.5.8) que E'_U est A-borné dans U. D'autre part, si $F_U = \{(x, y) \in E'_U \times E'_U \mid \theta(x) = \theta(y)\}$ alors $F = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} F_U$ et on est ramené à démontrer le corollaire

A.5.12 en remplaçant X par U et E par E'_U. Autrement dit, on peut supposer que X est affine et de présentation lisse auquel cas le résultat se déduit du (ii) de la proposition A.5.11 et du (v) du lemme A.4.6.

A.6. Compléments dans le cas d'une boule

On se place de nouveau dans le cas où $A = \mathcal{O}_K[\![S_1, \dots, S_r]\!]$ et on pose $\widehat{B} = \widehat{B}(A, \theta_0)$.

Proposition A.6.1. — *Soient X un B-schéma, U un ouvert de Zariski de X, F un ensemble A-borné de $X(\widehat{B})$ et E un ensemble borné de $U(K)$. Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que, si $F_k = \{x \in F \mid \exists s \in B^r(0, p^{-k}) \text{ tel que } x(s) \in E\}$, alors F_k est A-borné dans U.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{V}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines et $(F_V)_{V \in \mathcal{V}}$ une décomposition de F adaptée à $\mathcal{V}$. Il existe alors $k_1 \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $F_V \subset V(B_{k_1})$ pour tout $V \in \mathcal{V}$. On en déduit le fait que $E_V = E \cap \{x(s) \mid x \in F_V,\ s \in B^r(0, p^{-k_1})\}$ est borné dans $V(K)$ et comme il est aussi borné dans $U(K)$, il l'est dans $U \cap V$. D'autre part, si $k \geq k_1$, on peut décomposer F_k sous la forme $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} F_{k,V}$, où l'on a posé $F_{k,V} = \{x \in F_V \mid \exists s \in B^r(0, p^{-k}) \text{ tel que } x(s) \in E_V\}$. Tout ceci fait que, quitte à remplacer X par V, F par F_V, E par E_V et U par $U \cap V$, on peut supposer que X est affine. Soit D le complémentaire de U dans X. Comme E est borné dans U, d'après la proposition A.2.10, on a $d_X(E, D) > 0$. D'autre part, comme F est A-borné dans $X(\widehat{B})$ et inclus dans $X(B_{k_1})$, il existe $C \geq 0$ tel que si $x \in F$ et $s \in B^r(0, p^{-k_1})$, alors $d_X(x(s), x(0)) \leq C d(0, s)$. On en déduit le fait que si $p^{-k} \leq \inf(p^{-k_1}, \dfrac{1}{2C} d_X(E, D))$ et si $x \in F_k$, alors $d_X(x(0), E) \geq \dfrac{1}{2} d_X(E, D)$, ce qui implique que $d_X(\theta_0(F_k), \theta_0(D))$ est non nul et donc que F_k est A-borné dans U.

Proposition A.6.2. — *Si X est un B-schéma propre et lisse, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ et un sous-ensemble A-borné E de X inclus dans $X(B_k)$ tel que l'application θ_s induise une surjection de E sur $X_s(K)$ pour tout $s \in B^r(0, p^{-k})$.*

Démonstration. — X étant propre sur B, l'ensemble $X(K)$ est borné (proposition A.2.8). Soient donc $\mathcal{U}$ une présentation lisse de X et $(E_U)_{U \in \mathcal{U}}$ une décomposition de $X(K)$ adaptée à $\mathcal{U}$. Soit $U \in \mathcal{U}$. Par définition de « présentation lisse », U est de la forme $\operatorname{Spec}(B[x, y]/(F_1, \dots, F_m))$, avec $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_d)$ de telle sorte que la matrice Jac_U de coefficients $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ soit inversible sur U. Ceci fait de E_U un sous-ensemble borné de $B^r(0,1) \times K^{m+d}$; il existe donc $n \in \mathbf{N}$ tel que E_U soit inclus dans $B^r(0,1) \times (p^{-n}\mathcal{O}_K)^{m+d}$. D'autre part, d'après la proposition A.5.11, il existe $k_U > 0$ tel que, quel que soit $c = (s_0, a, b) \in E_U$, l'application π qui à $(s, x, y) \in U(K)$ associe $(s, y) \in B^r(0,1) \times K^d$ induise un isomorphisme analytique d'un voisinage $V(c)$ sur $B^r(s_0, p^{-k_U}) \times B^d(b, p^{-k_U})$. De plus, il existe $l_U, n_U \in \mathbf{N}$ tels que, si $\iota_c(s, y)$ désigne l'isomorphisme réciproque, alors $\iota_c(s, y) = (s, x_c(s, y), y)$ et les coordonnées de $x_c(s, y)$

sont de la forme $x_{c,i}(s,y) = a_i + f_{c,i}(s - s_0, y - b)$ et $f_{c,i} \in p^{-n_U} A_{l_U}^{(d,k_U)}$. Soit alors $F_U = \{\iota_c(s,b) \mid c = (0,a,b) \in U_0(K) \bigcap (\{0\} \times (p^{-n}\mathcal{O}_K)^{m+d})\}$. D'après ce qui précède, F_U est inclus dans $B^r(0, p^{-k_U}) \times (p^{-n}\mathcal{O}_K + p^{-n_U} A_{l_U})^m \times (p^{-n}\mathcal{O}_K)^d$; c'est donc un sous-ensemble A-borné de U contenu dans $U(B_{l_U})$. Soit $h_U = \sup(k_U, n_U - n - l_U)$ de telle sorte que si $s_0 \in B^r(0, p^{-k_U})$ et $c = (s_0, a, b) \in E_U \cap U_{s_0}(K)$, alors $c_0 = \iota_c(0,b) \in U_0(K) \cap (\{0\} \times (p^{-n}\mathcal{O}_K)^{m+d})$ et $c = \iota_{c_0}(s_0, b)$. Ceci implique que si $s \in B^r(0, p^{-h_U})$, alors θ_s induit une surjection de F_U sur $U_s(K) \cap \{s\} \times (p^{-n}\mathcal{O}_K)^{m+d}$; en particulier, l'image de F_U par θ_s contient $U_s(K) \cap E_U$. Il suffit donc de prendre $k = \sup_{U \in \mathcal{U}} h_U$ et $F = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} F_U$ pour terminer la démonstration de la proposition.

A.7. Ensembles bornés sur les variétés abéliennes

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au cas particulier des variétés abéliennes et démontrons la proposition II.1.10 (proposition A.7.1) et les propriétés **14** et **16** (proposition A.7.5 et lemme A.7.7).

Proposition A.7.1. — *Soit X une variété abélienne de dimension d définie sur $\mathbf{C}_p$. Soient $\delta_0 > 0$ et V un sous-groupe ouvert de $X(\mathbf{C}_p)$ muni d'un isomorphisme analytique ι de V sur la boule ouvert $B^d(0, \delta_0)$ de $\mathbf{C}_p^g$ muni de la norme $\| \ \|$ du* sup. *Si $d : X(\mathbf{C}_p) \times X(\mathbf{C}_p) \to \mathbf{R}$ est la fonction définie par $d(x,y) = \|\iota(x \ominus y)\|$ si $x \ominus y \in V$ et $d(x,y) = \delta_0$ si $x \ominus y \notin V$, alors d est une distance ultramétrique sur $X(\mathbf{C}_p)$ invariante par translation.*

Démonstration. — La seule chose à vérifier est que la fonction d ainsi construite vérifie l'inégalité ultramétrique, le reste étant plus ou moins évident. Remarquons que si $d(x,y) = \delta_0$ ou si $d(y,z) = \delta_0$, alors l'inégalité $d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z))$ est évidente. On a donc seulement le cas où $x \ominus y$, $y \ominus z$ (et donc aussi $x \ominus z$) appartiennent à V à traiter. L'application de $B(0,\delta_0) \times B(0,\delta_0)$ dans $B(0,\delta_0)$ définie par $x +_{\hat{X}} y = \iota(\iota^{-1}(x) + \iota^{-1}(y))$ est une loi de groupe formel sur $B(0,\delta_0)$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme A.7.2. — *Si $F \in \mathbf{C}_p[\![T_1, \ldots, T_g]\!]$ converge sur la boule ouverte $B^g(0,\delta_0)$ et vérifie $\sup_{x \in B^g(0,\delta_0)} |F(x)| \leq \delta_0$ et si x et y sont 2 éléments de $B(0,\delta_0)$, alors $|F(x) - F(y)| \leq \|x - y\|$.*

Démonstration. — Remplacer F par la fonction $G(T) = F(T + x) - F(x)$ permet de supposer que $x = 0$ et que $F(0) = 0$. Les conditions de convergence mises sur F impliquent que si on écrit le développement de F sous la forme $F(T) = \sum_{k_1 + \cdots + k_g \geq 1} a_{k_1,\ldots,k_g} T_1^{k_1} \cdots T_g^{k_g}$, alors on a $|a_{k_1,\ldots,k_g}| \leq \delta_0^{1-(k_1+\cdots+k_g)}$ et comme $\|y\| < \delta_0$, on obtient $|F(y)| \leq \|y\|$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire A.7.3. — *si x, y et a sont des éléments quelconques de $B^g(0,\delta_0)$, alors $\|(x +_{\hat{X}} a) - (y +_{\hat{X}} a)\| = \|x - y\|$.*

Démonstration. — On applique le lemme précédent à chacune des coordonnées de $T \to T +_{\widehat{X}} a$, ce qui nous donne $\|(x+_{\widehat{X}}a) - (y+_{\widehat{X}}a)\| \leq \|x - y\|$ quels que soient x, y et a appartenant à $B^g(0, \delta_0)$. Il suffit d'appliquer cette inégalité au triplet obtenu en remplaçant x par $x+_{\widehat{X}}a$, y par $y+_{\widehat{X}}a$ et a par $-_{\widehat{X}}a$ pour obtenir l'égalité cherchée.

Corollaire A.7.4. — *Si x, y, z sont des éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $x \ominus y \in V$ et $y \ominus z \in V$, alors $d(x,z) \leq \sup(d(x,y), d(y,z))$.*

Démonstration. — Par définition, on a

$$\begin{aligned} d(x,z) = \|\iota(x-z)\| &= \big\|\big(\iota(x\ominus y)+_{\widehat{X}}\iota(y\ominus z)\big) - \big(\iota(z\ominus y)+_{\widehat{X}}\iota(y\ominus z)\big)\big\| \\ &= \|\iota(x\ominus y) - \iota(z\ominus y)\| \leq \sup(\|\iota(x\ominus y)\|, \|\iota(z\ominus y)\|) \\ &= \sup(d(x,y), d(y,z)). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on appelle distance admissible sur X une distance obtenue par le procédé décrit à la proposition A.7.1 et qu'il existe des distances admissibles sur n'importe quelle variété abélienne ((ii) de la remarque II.1.11).

Proposition A.7.5. — *Soient X une variété abélienne de dimension g définie sur $\mathbf{C}_p$, d une distance admissible sur X et D une sous-variété fermée de X.*

(i) *Si $\varepsilon > 0$, alors l'ensemble $E(D,\varepsilon) = \{x \in X(\mathbf{C}_p) \mid d(x,D) \geq \varepsilon\}$ est borné dans $X - D$.*

(ii) *Si E est un ensemble borné dans $X - D$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $E \subset E(D,\varepsilon)$.*

Démonstration. — Commençons par considérer le cas où $D = \{0\}$. Dans ce cas, il résulte de la propriété **B12** que E est borné dans $X - D$ si et seulement si il est contenu dans le complémentaire d'un voisinage de 0, ou, autrement dit, si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que E soit inclus dans $E(\{0\},\varepsilon)$. Ceci permet de traiter le cas $D = \{0\}$. Pour traiter le cas général, considérons l'application $f : (X - D) \times D \to X - \{0\}$ qui à (x, y) associe $x - y$ et soit π la projection de $(X - D) \times D$ sur $X - D$. Il résulte de la propriété **B10** que E est borné dans $X - D$ si et seulement si $f(E \times D)$ est borné dans $X - \{0\}$. D'après la discussion du cas $D = \{0\}$, ceci est équivalent à l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $f(E \times D)$ soit contenu dans $E(\{0\},\varepsilon)$ et donc à ce que E soit contenu dans $\pi\big(f^{-1}(E(\{0\},\varepsilon))\big) = E(D,\varepsilon)$, ce qui permet de conclure.

Lemme A.7.6. — *Soient X une variété abélienne définie sur un sous-corps K fermé de $\mathbf{C}_p$ et d une distance admissible sur $X(\mathbf{C}_p)$. Si D est une sous-variété fermée de X et δ_X est le diamètre de X, alors quels que soient $x_0 \in X(\mathbf{C}_p)$ et $\delta < \delta_X$, il existe $x \in X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $d(x,x_0) < \delta_X$ et $d(x,D) \geq \delta$.*

Démonstration. — Soit $x_0 \in X(\mathbf{C}_p)$. Comme d est une distance admissible sur $X(\mathbf{C}_p)$, cela implique que $\{x \in X(\mathbf{C}_p) \mid d(x,x_0) < \delta_X\}$ et la boule ouverte de centre 0 et de rayon δ_X sont anlytiquement isométriques. Quitte à agrandir D, on peut supposer que son image dans $B^g(0,\delta_X)$ est définie par une équation $f = 0$, où f est une série entière $\sum_{k_1,\dots,k_g} a_{k_1,\dots,k_g} z_1^{k_1} \dots z_g^{k_g}$ convergeant pour $\sup_i |z_i| < \delta_X$. D'autre part, si $\delta < \delta_X$, il existe z_0 vérifiant $\sup_i |z_{0,i}| = \delta$ et $|f(z_0)| = \sup_{k_1,\dots,k_g} |a_{k_1,\dots,k_g}| \delta^{k_1+\dots k_g}$. Un développement de f en série entière autour de z_0 montre alors que l'équation $f(z) = 0$ n'a pas de solution vérifiant $\sup |z_i - z_{0,i}| < \delta$; ceci implique que l'image réciproque de z_0 dans $X(\mathbf{C}_p)$ est à distance au moins égale à δ de D. On en tire le lemme.

Lemme A.7.7. — *Soient X une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}_p$ et U un ouvert de Zariski non vide de X.*

(i) *Si E est un sous-ensemble de $X(\mathbf{C}_p)$ et si $E^{(n)}$ est un sous-ensemble fini de E, alors il existe une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ telle que l'ensemble*

$$F = \cup_{n\in\mathbf{N}}\{a_n \oplus x \mid x \in E^{(n)}\}$$

soit borné dans $U(\mathbf{C}_p)$.

(ii) *Si $\widetilde{E}$ est un sous-ensemble borné de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et si $n \in \mathbf{N}$, soit $\widetilde{E}^{(n)}$ un sous-ensemble fini de $\widetilde{E}$. Alors il existe une suite $\widetilde{a} = (\widetilde{a}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ telle que l'ensemble*

$$\widetilde{F} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\{\widetilde{a}_n \oplus x \mid x \in \widetilde{E}^{(n)}\}$$

soit borné dans $U(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$.

Démonstration. — Soient D le fermé complémentaire de U dans X, d une distance admissible sur X, δ_X le diamètre de X et $\delta \in]0, \delta_X[$. Si $n \in \mathbf{N}$, soit $D^{(n)}$ le fermé de X réunion des translaté de D par les opposés des éléments de $E^{(n)}$. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $d(\theta(a_n), D^{(n)}) \geq \delta$ [l'existence de telles suites est une conséquence du lemme II.3.7]. Une telle suite répond aux conclusions du (i) car l'invariance de d par translation implique que l'on a $d(a_n \oplus x, D) \geq \delta$ si $x \in E^{(n)}$ et donc que F est borné dans $U(\mathbf{C}_p)$.

Pour démontrer le (ii), il suffit de prendre pour $\widetilde{a}$ un relèvement borné dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ (l'existence de tels relèvements est une conséquence du fait que $X(\mathbf{C}_p)$ est borné et de la propriété **B7**) d'une suite a satisfaisant aux conclusions du (i) pour $E = \theta(\widetilde{E})$ et $E^{(n)} = \theta(\widetilde{E}^{(n)})$ puisque dans ce cas, $\widetilde{F}$ est borné dans $X(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ et $\theta(F)$ est borné dans $U(\mathbf{C}_p)$ d'après le (i), ce qui implique que $\widetilde{F}$ est borné dans $U(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ d'après la propriété **B8** et permet de conclure.

APPENDICE B

REVÊTEMENTS UNIVERSELS p-ADIQUES

B.1. Revêtement universel d'un groupe algébrique

Soient (A,θ) un épaississement de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ et $\widehat{B}$ le complété de $B = A[1/p]$. Si G est un groupe algébrique commutatif défini sur $\widehat{B}$ et $\Lambda \in \{\mathbf{C}_p, \widehat{B}\}$, soit $\mathscr{R}(G(\Lambda))$ l'ensemble des suites bornées $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $G(\Lambda)$ vérifiant $[p]x_{n+1} = x_n$.

Théorème B.1.1

(i) *Si G est un groupe algébrique commutatif défini sur $\widehat{B}$, alors θ induit un isomorphisme de $\mathscr{R}(G(\widehat{B}))$ sur $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$.*

(ii) *Si G est isomorphe à $\mathbf{G}_a^d$, alors $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p)) = \{0\}$ et si G n'a pas de sous-groupe algébrique isomorphe à $\mathbf{G}_a$, alors la suite*

$$0 \to T_p(G(\mathbf{C}_p)) \to \mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p)) \to G(\mathbf{C}_p) \to 0$$

est exacte, l'application de $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$ dans $G(\mathbf{C}_p)$ étant celle qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe x_0.

(iii) *Si $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ est une suite exacte de groupes algébriques commutatifs connexes définis sur $\widehat{B}$, alors la suite induite*

$$0 \to \mathscr{R}(G_1(\mathbf{C}_p)) \to \mathscr{R}(G_2(\mathbf{C}_p)) \to \mathscr{R}(G_3(\mathbf{C}_p)) \to 0$$

est exacte.

Avant de faire la démonstration de ce théorème, remarquons que le (ii) permet, dans le cas où G n'a pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{G}_a$, de voir $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$ comme un analogue p-adique abstrait du revêtement universel de $G(\mathbf{C}_p)$, le rôle de $\pi_1(G(\mathbf{C}),0) = H_1(G(\mathbf{C}),\mathbf{Z})$ étant joué par $T_p(G(\mathbf{C}_p))$.

Lemme B.1.2. — *Si $\pi : G \to H$ est un morphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs définis sur $\widehat{B}$ dont le noyau est linéaire et connexe et si E est un sous-ensemble borné de $H(\mathbf{C}_p)$, il existe un sous-ensemble borné $\widetilde{E}$ de $G(\widehat{B})$ tel que l'application $\theta\circ\pi$ induise une surjection de $\widetilde{E}$ sur E.*

Démonstration. — D'après la proposition A.5.10, si E' est un sous-ensemble borné de $G(\mathbf{C}_p)$, il existe un sous-ensemble borné $\widetilde{E}'$ de $G(\widehat{B})$ tel que θ induise une surjection de $\widetilde{E}'$ sur E' ; il suffit donc de prouver que si E est un sous-ensemble borné de $H(\mathbf{C}_p)$, alors il existe un sous-ensemble borné E' de $G(\mathbf{C}_p)$ tel que π induise une surjection de E' sur E. La fibration $\pi : G \to H$ est localement triviale pour la topologie de Zariski et on peut donc trouver un recouvrement ouvert fini $\mathscr{U}$ de H et pour chaque $U \in \mathscr{U}$ une section $s_U : U \to G$ de π. Il suffit alors de choisir une décomposition $E = \cup_{U \in \mathscr{U}}$ de E de telle sorte que E_U soit borné dans U et de prendre $E' = \cup_{U \in \mathscr{U}} s_U(E_U)$.

Soit $\pi : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs définis sur $\widehat{B}$. Si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $H(\mathbf{C}_p)$, appelons relèvement borné de x dans $G(\widehat{B})$, toute suite bornée $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $G(\widehat{B})$ vérifiant $\theta(\widetilde{x}_n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. L'existence de relèvements bornés est une conséquence du lemme précédent.

Lemme B.1.3. — *Soit $\pi : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs définis sur $\widehat{B}$ tel que le noyau V de π est de type additif (i.e. isomorphe à $\mathbf{G}_a^r$ pour un certain r). Si E est un sous-ensemble borné de $G(\widehat{B})$ inclus dans $\ker \theta \circ \pi$, alors*

(i) *le sous-groupe fermé $\langle E \rangle$ de $G(\widehat{B})$ engendré par E est borné dans $G(\widehat{B})$.*

(ii) *Si a_n est une suite d'éléments de E, alors la suite $\oplus_{k=1}^{n}[p^{k-1}]a_k$ tend vers une limite dans $\langle E \rangle$ quand n tend vers $+\infty$.*

Démonstration. — Soit $\widehat{G}(\widehat{B})$ le noyau de $\theta : G(\widehat{B}) \to G(\mathbf{C}_p)$. On peut trouver un sous-ensemble borné F_1 de $V(\widehat{B})$ tel que θ induise une surjection de F_1 sur $\theta(E) \subset V(\mathbf{C}_p)$ et un sous-ensemble borné F_2 de $\widehat{G}(\widehat{B})$ tel que l'on puisse décomposer chaque élément de E sous la forme $x_1 \oplus x_2$, où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. Les propriétés (i) et (ii) sont immédiates si on remplace E par F_1 puisque F_1 est un sous-ensemble fermé d'un groupe isomorphe à $\widehat{B}^r$. D'autre part, $\widehat{G}(\widehat{B})$ a une structure de groupe formel et est isomorphe (en tant que groupe formel) sur $\widehat{B}$ à $(F^1\widehat{B})^d$ où d est la dimension de G. Comme un tel isomorphisme respecte les ensembles bornés ((v) du lemme A.4.6), on est ramené de nouveau à considérer le cas d'un sous-ensemble borné (l'image de F_2 par cet isomorphisme) de $\widehat{B}^d$. Finalement $\langle E \rangle$ est inclus dans $\langle F_1 \rangle + \langle F_2 \rangle$ et est donc borné et pour montrer le (ii), il suffit de décomposer les a_n comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 pour montrer que la suite converge dans $G(\widehat{B})$ vers une limite qui appartient à $\langle E \rangle$ par construction de $\langle E \rangle$.

Lemme B.1.4. — *Soit $\pi : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes algébriques commutatifs définis sur $\widehat{B}$ dont le noyau V est de type additif. Alors*

(i) *si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathscr{R}(H(\mathbf{C}_p))$ et si $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un relèvement borné de x dans $G(\widehat{B})$, la suite de terme général $[p^n]\widetilde{x}_n$ converge dans $G(\widehat{B})$ vers une limite $\psi(x)$ qui ne dépend que de x et pas du choix de $\widetilde{x}$.*

(ii) *ψ est un morphisme de groupes.*

(iii) *Si* $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(H(\mathbf{C}_p))$ *et* $m \in \mathbf{N}$, *soit* $x_m = (x_{n+m})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(H(\mathbf{C}_p))$ *et soit* $\widetilde{\psi}(x)$ *la suite de terme général* $\psi(x_n)$. *Alors* $\widetilde{\psi}(x) \in \mathscr{R}(G(\widehat{B}))$ *et* $\widetilde{\psi} : \mathscr{R}(H(\mathbf{C}_p)) \to \mathscr{R}(G(\widehat{B}))$ *est un morphisme de groupes inverse de* $\theta \circ \pi$.

Démonstration. — On peut écrire $[p^n]\widetilde{x}_n$ sous la forme

$$\widetilde{x}_0 \oplus \left(\oplus_{k=1}^{n}[p^{k-1}]([p]\widetilde{x}_k \ominus \widetilde{x}_{k-1})\right)$$

et on peut appliquer le lemme B.1.3 à la suite $a_n = [p]\widetilde{x}_n \ominus \widetilde{x}_{n-1}$ qui est une suite bornée d'éléments de $\ker\theta \circ \pi$ pour conclure à la convergence de la suite $[p^n]\widetilde{x}_n$. Finalement, si $\widetilde{x}_i = (\widetilde{x}_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ pour $i \in \{1,2\}$ sont deux relèvements bornés de x dans $G(\widehat{B})$, soit $\widetilde{x}_3$ la suite définie par $\widetilde{x}_{3,n} = \widetilde{x}_{1,n}$ si n est pair et $\widetilde{x}_{3,n} = \widetilde{x}_{2,n}$ si n est impair. La suite $\widetilde{x}_3$ est encore un relèvement borné de x. On en tire le fait que la suite $[p^n]\widetilde{x}_{3,n}$ converge et que les suites $[p^n]\widetilde{x}_{i,n}$, où $i \in \{1,2\}$ ont même limite et donc que cette limite ne dépend pas du choix de $\widetilde{x}$.

Le (ii) est une conséquence du fait que si x_1 et x_2 sont deux éléments de $\mathscr{R}(H(\mathbf{C}_p))$ et $\widetilde{x}_i$ est un relèvement borné de x_i dans $G(\widehat{B})$, alors on peut prendre $\widetilde{x}_1 \oplus \widetilde{x}_2$ comme relèvement borné de $x_1 \oplus x_2$ dans $G(\widehat{B})$.

Comme $[p]x_{n+1} = x_n$ et ψ est un morphisme de groupes, on a $[p]\psi(x_{n+1}) = \psi(x_n)$ et pour montrer que la suite $\widetilde{\psi}(x)$ appartient à $\mathscr{R}(G(\widehat{B}))$ il suffit de montrer qu'elle est bornée. Or si on note E l'image de $\mathbf{N}$ par la suite $\widetilde{x}$, F l'ensemble des $[p]\widetilde{x}_n \ominus \widetilde{x}_{n-1}$ et $\langle F\rangle$ le sous-groupe de $\ker\theta \circ \pi$ engendré par F, alors la démonstration du (i) montre que l'on a $\psi(x_n) \in E + \langle F\rangle$ qui est borné en vertu du lemme B.1.3. Finalement, le fait que $\theta \circ \pi \circ \widetilde{\psi} = \mathrm{id}$ est immédiat et le fait que $\widetilde{\psi} \circ \theta \circ \pi = \mathrm{id}$ suit de ce que si $x \in \mathscr{R}(G(\widehat{B}))$, alors on peut prendre x comme relèvement borné de $\theta \circ \pi(x)$.

Remarque B.1.5. — On peut appliquer la proposition précédente au cas où π est l'identité, ce qui nous fournit un morphisme de groupes $\widetilde{\psi}$ de $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$ dans $G(\widehat{B})$

Le lemme B.1.4 appliqué au cas particulier où π est l'identité permet de terminer la démonstration du (i) du théorème B.1.1. Passons au (ii). Remarquons que le (i) permet de ne traiter que le cas $\widehat{B} = \mathbf{C}_p$. Si $G = \mathbf{G}_a^d$, alors $G(\mathbf{C}_p) = \mathbf{C}_p^d$ et le fait que $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p)) = \{0\}$ est immédiat (c'est d'ailleurs une conséquence du cas particulier $H = 0$ du (iii) du lemme B.1.4). Il reste donc à traiter le cas où G ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{G}_a$.

Lemme B.1.6. — *Si G ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{G}_a$, alors toute suite $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $G(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $[p]x_{n+1} = x_n$ est bornée et donc appartient à $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$.*

Démonstration. — Si G ne contient pas de sous-groupe algébrique isomorphe à $\mathbf{G}_a$, alors il existe une suite exacte $0 \to T \to G \to X \to 0$, où X est une variété abélienne et $T \simeq \mathbf{G}_m^r$ est un tore. Nous allons faire la démonstration par récurrence sur r. Si $r = 0$, G est une variété abélienne et est donc propre, ce qui implique que $G(\mathbf{C}_p)$ est borné et donc a fortiori toute suite d'éléments de $G(\mathbf{C}_p)$ l'est. Si $r \geq 1$, choisissons une copie T_0 de $\mathbf{G}_m$ dans T et soit $H = G/T_0$ de telle sorte que H est une extension de X par $\mathbf{G}_m^{r-1}$, ce qui fait que l'on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $G(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $[p]x_{n+1} = x_n$. Si π désigne la projection de G sur H, l'image de x par π est une suite bornée de $H(\mathbf{C}_p)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un relèvement borné (cf. lemme B.1.2) de $\pi(x)$ dans $G(\mathbf{C}_p)$ et donc tel que $b_n = x_n \ominus a_n$ appartienne à $T(\mathbf{C}_p)$. Pour montrer que x est borné, il suffit de vérifier que $b = (b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée d'éléments de $T_0(\mathbf{C}_p) = \mathbf{C}_p^*$. Or on a $[p]b_{n+1} \ominus b_n = a_n \ominus [p]a_{n+1}$ et comme la suite a_n est bornée, on en déduit le fait que la suite de terme général $pv_p(b_{n+1}) - v_p(b_n)$ et donc celle de terme général $v_p(b_n)$ est bornée dans $\mathbf{R}$, ce qui permet de conclure.

Le (ii) du théorème B.1.1 est une conséquence du lemme B.1.6 et du fait que $G(\mathbf{C}_p)$ est p-divisible. Passons au (iii). Il y a deux choses qui ne sont pas claires a priori, à savoir l'exactitude en le terme du milieu et la surjectivité à droite. L'exactitude en le terme du milieu est une conséquence du fait qu'une suite d'éléments de $G_1(\mathbf{C}_p)$ qui est bornée dans $G_2(\mathbf{C}_p)$ l'est déjà dans $G_1(\mathbf{C}_p)$ car l'injection de G_1 dans G_2 est une immersion fermée (cf. proposition A.2.7).

D'autre part, le (iii) du lemme B.1.4 implique que si G est un groupe algébrique commutatif défini sur $\mathbf{C}_p$ et si V_G désigne le plus grand sous-groupe de G isomorphe à un produit de $\mathbf{G}_a$, alors $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p)) \simeq \mathscr{R}((G/V_G)(\mathbf{C}_p))$, ce qui fait que, quitte à remplacer G_i par G_i/V_{G_i}, l'on peut supposer que les G_i ne contiennent pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{G}_a$; auquel cas, la surjectivité de l'application de $\mathscr{R}(G_2(\mathbf{C}_p))$ dans $\mathscr{R}(G_3(\mathbf{C}_p))$ se déduit du lemme B.1.6 et de la p-divisibilité de $G_1(\mathbf{C}_p)$.

Proposition B.1.7. — *Soit $\varepsilon = (\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in T_p(\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_p)) \subset \mathscr{R}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vérifiant $\theta(x_n) = \varepsilon^{(n)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors la suite de terme général $p^n \log x_n$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ vers $\log[\varepsilon]$.*

Démonstration. — Comme les x_n sont éléments de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{**}$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{G}_m(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. Le lemme B.1.4 implique que la suite de terme général $(x_n)^{p^n}$ tend vers une limite ne dépendant que de ε et comme on peut prendre $x_n = [\varepsilon^{1/p^n}]$, cette limite n'est autre que $[\varepsilon]$, ce qui, prenant le logarithme de tous les termes concernés, permet de conclure.

B.2. Applications aux variétés abéliennes

1. Périodes p-adiques des formes de seconde espèce. — Soient X un B-schéma abélien et G une extension de X par un groupe de type additif. Notons π la projection de G sur X.

Lemme B.2.1

(i) *L'image de $\mathscr{R}(G(\widehat{B}))$ par l'application ι_G définie par $\iota_G((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = x_0$ est un sous-groupe borné de $G(\widehat{B})$.*

(ii) *Si E est un sous-ensemble borné de $G(\widehat{B})$, alors le sous-groupe $\langle E\rangle$ de $G(\widehat{B})$ engendré par E est borné.*

Démonstration. — Soit E' un sous-ensemble borné de $G(\widehat{B})$ tel que $\theta\circ\pi$ induise une surjection de E sur $X(\mathbf{C}_p)$ (il en existe d'après la proposition A.5.10 puisque $X(\mathbf{C}_p)$ est borné car X est propre sur $\mathbf{C}_p$). Soit $F = \{[p]x \ominus y \,|x \in E',\ y\in E',\ \theta\circ\pi([p]x) = \theta\circ\pi(y)\}$. La démonstration du lemme B.1.4 appliquée au cas où $H = X$ montre que $\widetilde{X} = \iota_G\circ\widetilde{\psi}(\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p)))$ est un sous-groupe de $X(\widehat{B})$ contenu dans $E'\oplus\langle F\rangle$ et est donc borné en vertu du lemme B.1.3 puisque F est inclus dans $\ker\theta\circ\pi$ par construction. On en déduit le (i).

D'autre part, l'application $\theta\circ\pi$ induit une surjection de $\widetilde{X}$ sur $X(\mathbf{C}_p)$ et donc, si $F' = \{x\ominus y \,|x\in E, y\in\widetilde{X}, \theta(x) = \theta(y)\}$, on a $E\subset\widetilde{X}\oplus F'$ et $\langle E\rangle\subset\widetilde{X}\oplus\langle F'\rangle$ et comme $\langle F'\rangle$ est borné d'après le lemme B.1.3 appliqué à $H = X$ puisque F' est inclus dans $\ker\theta\circ\pi$, on en déduit le (ii).

Plaçons nous maintenant dans le cas où $\widehat{B} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Soient X une variété abélienne définie sur $\mathbf{C}_p$ et $\widetilde{X}$ l'extension universelle de X par un groupe de type additif (cf. I.6, §1). Notons π la projection de $\widetilde{X}$ sur X. Si η est une forme différentielle de seconde espèce sur X, il existe (proposition I.7.4) une unique forme différentielle ω_η invariante sur $\widetilde{X}$ telle que $\pi^*\eta - \omega_\eta = df_\eta$, où f_η est une fonction rationnelle sur $\widetilde{X}$. Notons ℓ_η la primitive de ω_η s'annulant en 0 ; c'est un logarithme de $\widetilde{X}$ puisque ω_η est invariante. L'application $\widetilde{\psi}$ (cf. lemme B.1.4) permet de voit $T_p(X)$ comme un sous-groupe de $\mathscr{R}(\widetilde{X}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+))$.

Proposition B.2.2. — *Si η est une forme différentielle de seconde espèce sur X et $u\in T_p(X)$, alors $\int_u\eta = \ell_\eta(\iota_{\widetilde{X}}(u))$*

Démonstration. — Si $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $m\in\mathbf{N}$, soit $\widetilde{u}_m = \iota_{\widetilde{X}}((u_{m+n})_{n\in\mathbf{N}})$. La suite $(\widetilde{u}_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est donc une suite, bornée d'après le lemme B.2.1, d'éléments de $\widetilde{X}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ vérifiant $\theta\circ\pi(\widetilde{u}_m) = u_m$ si $m\in\mathbf{N}$. Soient U un ouvert de X sur lequel η est holomorphe et $(a_m)_{m\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\pi^{-1}U(\widehat{B})$ telle que les suites de termes généraux respectifs a_m et $a_m + \widetilde{u}_m$ soient bornées dans $\pi^{-1}(U)$ (pour qu'une telle suite soit bornée, il suffit qu'elle soit bornée dans X et que son image par π soit bornée dans U d'après le corollaire A.5.9 ; l'existence de telles suites résulte donc du lemme B.1.2 et du lemme II.3.1). Par construction de l'application « périodes p-adiques », on a

$$\begin{aligned}\int_u \eta &= \lim_{m\to+\infty} p^m \int_{\pi(a_m)}^{\pi(a_m)\oplus\pi(\widetilde{u}_m)} \eta = \lim_{m\to+\infty} p^m \int_{a_m}^{a_m\oplus\widetilde{u}_m} \pi^*\eta \\ &= \lim_{m\to+\infty} p^m \Big(f_\eta(a_m\oplus\widetilde{u}_m) + \ell_\eta(a_m\oplus\widetilde{u}_m) - f_\eta(a_m) - \ell_\eta(a_m)\Big)\end{aligned}$$

et comme d'une part ℓ_η est un morphisme de groupes et $[p^m]\widetilde{u}_m = \iota_{\widetilde{X}}(u)$, ce qui implique

$$p^m\big(\ell_\eta(a_m\oplus\widetilde{u}_m) - \ell_\eta(a_m)\big) = \ell_\eta(\iota_{\widetilde{X}}(u))$$

et que d'autre part

$$\lim_{m\to+\infty} p^m\big(f_\eta(a_m\oplus\widetilde{u}_m) - f_\eta(a_m)\big) = 0$$

puisque f_η est holomorphe sur $\pi^{-1}(U)$, on en tire le résultat.

Le théorème B.1.1 implique que $\theta\circ\pi$ induit un isomorphisme de $\mathscr{R}(\widetilde{X}(\widehat{B}))$ sur $\mathscr{R}(X(\mathbf{C}_p))$. D'autre part, la proposition B.2.2 et la non dégénérescence de l'application « périodes p-adiques » impliquent, que $\iota_{\widetilde{X}}$ est injective. Son image $\widehat{X}(\mathbf{C}_p)$ est donc un groupe sans p-torsion apparaissant dans la suite exacte

$$0 \to T_p(X(\mathbf{C}_p)) \to \widehat{X}(\mathbf{C}_p) \to X(\mathbf{C}_p) \to 0$$

et que l'on peut donc voir comme un analogue (un peu moins désincarné que le précédent) p-adique du revêtement universel de $X(\mathbf{C}_p)$.

2. Périodes p-adiques des formes de troisième espèce. — Si ω est une forme différentielle de troisième espèce sur X, il existe, d'après la remarque I.6.22 un groupe algébrique commutatif G extension de X par $\mathbf{G}_m$ tel que, si π désigne le morphisme de G sur X, alors $\pi^*\omega$ soit invariante sur G et si ι désigne l'injection de $\mathbf{G}_m$ dans G, alors $\iota^*\pi^*\omega = \dfrac{dt}{t}$. Soit ℓ_ω le logarithme de G dont la différentielle est $\pi^*\omega$. Si $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $X(\mathbf{C}_p)$ vérifiant $[p]x_{n+1} = x_n$ quel que soit $n\in\mathbf{N}$, on dispose comme ci-dessus d'une application naturelle $\widetilde{\psi}$: $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p)) \to G(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ (cf. remarque B.1.5), ce qui nous permet, compte-tenu du fait que $T_p(G(\mathbf{C}_p))$ est un sous-groupe de $\mathscr{R}(G(\mathbf{C}_p))$, de définir $\int_u \pi^*\omega$ par la formule

$$\int_u \pi^*\omega = \ell_\omega(\widetilde{\psi}(u)).$$

L'application qui à u associe $\int_u \pi^*\omega$ est additive car $\widetilde{\psi}$ et ℓ_ω le sont et commute à l'action de Galois de manière évidente. D'autre part, comme $\iota^*\pi^*\omega = \dfrac{dt}{t}$, la restriction de ℓ_ω à $\mathbf{G}_m$ est Log et la restriction de $u \to \int_u \pi^*\omega$ à $T_p(\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_p))$ est à valeurs dans $t_p\mathbf{Z}_p$. Comme de plus, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow T_p(\mathbf{G}_m(\mathbf{C}_p)) \longrightarrow T_p(G(\mathbf{C}_p)) \longrightarrow T_p(X(\mathbf{C}_p)) \longrightarrow 0,$$

cela permet de définir $\int_u \omega$ si $u \in T_p(X(\mathbf{C}_p))$ à un multiple de t_p près comme dans le cas classique.

B.3. Revêtement universel d'une famille de variétés abéliennes

Soient $A = \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}[\![S_1, \ldots, S_r]\!]$ et X un schéma abélien sur $B = A[1/p]$. La section nulle sera notée e ; c'est un morphisme de $\operatorname{Spec} B$ dans X. Si $s \in \mathbf{C}_p^r$ vérifie $\|s\| < 1$, on note θ_s le morphisme de B sur $\mathbf{C}_p$ défini par $\theta_s(S_i) = s_i$ et X_s la fibre de X au-dessus de s. Rappelons que si $k \in \mathbf{N}$, l'anneau B_k est l'anneau des fonctions analytiques bornées sur la boule $B^r(0, p^{-k})$ et donc qu'un élément x de $X(B_k)$ peut se voir comme une fonction de $B^r(0, p^{-k})$ à valeurs dans $X(\mathbf{C}_p)$ ce qui fait que, si $x \in X(B_k)$ et $s \in B^r(0, p^{-k})$, on notera souvent $x(s)$ l'image $\theta_s(x)$ de x dans $X_s(\mathbf{C}_p)$ par θ_s. En particulier, si $s \in B^r(0, 1)$, alors $e(s)$ est l'élément neutre de $X_s(\mathbf{C}_p)$.

Théorème B.3.1

(i) *Il existe $k_0 > 0$ tel que*

(a) si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X(\widehat{B}))$, alors $x_n \in X(B_{k_0})$.

(b) Si $s \in B^r(0, p^{-k_0})$, l'application θ_s induit un isomorphisme de groupes de $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))$ sur $\mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$.

(ii) *Si $s \in B^r(0, p^{-k_0})$, soit $\varphi_s : \mathscr{R}(X(\widehat{B})) \to X_s(\mathbf{C}_p)$ l'application qui à $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ associe $x_0(s)$. Si G un sous-groupe ouvert de $X_0(\mathbf{C}_p)$ et $\widetilde{G}$ désigne l'image réciproque de G dans $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))$ par φ_0, alors, il existe $k \geq k_0$ tel que pour tout $s \in B^r(0, p^{-k})$,*

(a) l'image G_s de $\widetilde{G}$ par φ_s est un sous-groupe ouvert de $X_s(\mathbf{C}_p)$,

(b) $T_p(X_s(\mathbf{C}_p)) \subset \widetilde{G}$,

(c) le morphisme naturel $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))/\widetilde{G} \to X_s(\mathbf{C}_p)/G_s$ induit par φ_s est un isomorphisme.

Remarque B.3.2. — Si on considère $\mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$ comme un analogue p-adique (abstrait) du revêtement universel de $X_s(\mathbf{C}_p)$, le (i) du théorème nous dit que les revêtements universels d'une famille de variétés abéliennes forment une famille localement constante et le (ii) exprime le fait que le « réseau des périodes » varie continument. D'autre part, le théorème admet le corollaire suivant qui est à la base de la démonstration du théorème II.1.9.

Corollaire B.3.3. — *Soit X un schéma abélien sur B. Quel que soit le sous-groupe ouvert G de $X_0(\mathbf{C}_p)$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que si $s \in B^r(0, p^{-k})$, il existe un sous-groupe ouvert G_s de $X_s(\mathbf{C}_p)$ tel que les groupes $X_s(\mathbf{C}_p)/G_s$ et $X_0(\mathbf{C}_p)/G$ soient isomorphes.*

Démonstration. — Le (c) du (ii) montre qu'il suffit de poser $G_s = \theta_s(\widetilde{G})$ et qu'alors $X_s(\mathbf{C}_p)/G_s$ est isomorphe à $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))/\widetilde{G}$ si $\|s\|$ est assez petit.

La démonstration du théorème B.3.1 est assez similaire à celle du théorème B.1.1 ; la différence est que comme on s'intéresse à ce qui se passe dans une petite boule au lieu de regarder ce qui se passe en un point, il faut arriver à contrôler ce qui se passe de manière uniforme sur la boule ; c'est le rôle de la discussion qui suit et du lemme B.3.6.

Soit $U \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}^d$ un ouvert de présentation lisse de X contenant $e(0)$. D'après le théorème des fonctions implicites (proposition A.5.11), il existe $k_1 \in \mathbf{N}$ et un voisinage V_{k_1} de $e(0)$ dans $U(\widehat{B})$ tel que π induise un isomorphisme analytique de V_{k_1} sur $B^d(0, p^{-k_1})$. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $\pi(e) = 0$, ce que nous ferons. Désignons par ι l'isomorphisme réciproque. Soient $(\omega_1, \dots, \omega_d)$ une base de $\Omega^1_{X/B}$ et λ_i la primitive formelle de $\iota^*\omega_i$ s'annulant en $\pi(e)$. Quitte à changer la base $(\omega_1, \dots, \omega_d)$, on peut supposer que $\lambda_i(T) = T_i$ à des termes de degré ≥ 2 près. D'après le (ii) de la proposition A.5.11, pour tout $k > k_1$, on a $\lambda_i \in B^{(d,k)}$; il existe donc $k_2 \geq k_1$ tel que l'on ait $\lambda_i \in A^{(d,k_2)}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. L'application $\lambda : B^d(0, p^{-k_2}) \to B^d(0, p^{-k_2})$ ainsi définie est un isomorphisme analytique et, si $V_{k_2} = \iota(B^d(0, p^{-k_2}))$, l'application Log_X de V_{k_2} sur $B^d(0, p^{-k_2})$ définie par $\mathrm{Log}_X = \lambda \circ \pi$ est un isomorphisme analytique de groupes. On note Exp_X son inverse.

On note Log_s et Exp_s les fibres en s respectives de Log_X et Exp_X. Si $l \geq k_2$ et $s \in B^r(0, p^{-k_2})$, alors Exp_s induit un isomorphisme de $B^d(0, p^{-l}, \mathbf{C}_p)$ sur un sous-groupe ouvert $V_l(s)$ de $X_s(\mathbf{C}_p)$.

Si $k \geq k_2$ et $l \geq k_2$, on note $V_{k,l}$ l'image de $(p^l A_k)^d \subset B^d(0, p^{-k_2})$ par Exp_X ; c'est un sous-groupe de $X(\widehat{B})$ qui est A-borné d'après le (iv) du lemme A.4.6. De plus, si $x \in V_{k,l}$, alors $x(s) \in V_l(s)$ quel que soit $s \in B^r(0, p^{-k})$ et si $s \in B^r(0, p^{-k})$, alors l'application θ_s induit une surjection de $V_{k,l}$ sur $V_l(s)$ comme on le constate facilement en utilisant Log_X pour se ramener à un problème dans $B^d(0, p^{-k_2})$.

Lemme B.3.4. — *Soit F un sous-ensemble A-borné de $X(\widehat{B})$. Alors quel que soit $l \in \mathbf{N}$, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que si $x \in F$ est tel qu'il existe $s \in B^r(0, p^{-k})$ tel que l'on ait $x(s) = e(s)$, alors $x \in V_{k,l}$.*

Démonstration. — L'idée derrière le lemme est que comme F est A-borné, ses éléments, vus comme fonctions de s, ne varient pas trop vite. En particulier, si en un point proche de 0 ils coïncident avec la section nulle, alors ils en restent proches dans un voisinage de 0. Soit $U \xrightarrow{\pi} \mathbf{A}^d$ l'ouvert de présentation lisse contenant $e(0)$ utilisé dans la construction de Log_X. Si $k \in \mathbf{N}$, notons F_k l'ensemble des $x \in F$ tels qu'il existe $s \in B^r(0, p^{-k})$ pour lequel $x(s) = e(s)$. D'après la proposition A.6.1 appliquée à $E = \{e\}$, il existe l_1 tel que F_{l_1} soit A-borné dans $U(\widehat{B})$. L'image de F_{l_1} par π est alors A-bornée dans $\widehat{B}^d$ et il existe donc $l_2 > 0$ et $n \in \mathbf{Z}$ tels que l'on ait $\pi(F_{l_1}) \in (p^n A_{l_2})^d$. Si $l \in \mathbf{N}$, soit $k \geq \sup(l_2, l + l_2 - n)$. Comme l'ensemble des $y \in p^n A_{l_2}$ tels qu'il existe $s \in B^r(0, p^{-k})$ vérifiant $y(s) \in B^r(0, p^{-l})$, est inclus dans $p^l A_k$, on en déduit le fait que $F_k \subset V_{k,l}$, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme B.3.5. — *Il existe $k_3 \in \mathbf{N}$ et un sous-ensemble A-borné E de $X(\widehat{B})$ tel que, quel que soit $s \in B^r(0, p^{-k_3})$, l'application $\theta_s : E \to X_s(\mathbf{C}_p)$ soit surjective.*

Démonstration. — X étant propre sur B, il s'agit d'un cas particulier de la proposition A.6.2.

Soit E un sous-ensemble A-borné de $X(\widehat{B})$ satisfaisant les conclusions du lemme B.3.5 ; quitte à remplacer E par $E \cup V_{k_2,k_2}$, on peut supposer que E contient V_{k_2,k_2}, ce que nous ferons. Soit F la réunion de E et de l'image de $E \times E$ par l'application qui à (x,y) associe $[p]x \ominus y$. L'ensemble F est donc un sous-ensemble A-borné de $X(\widehat{B})$. Fixons $l_0 > k_2$ et soit $k_0 > \sup(k_2, k_3)$ tel que $F \subset X(B_{k_0})$ et tel que si $x \in F$ est tel qu'il existe $s \in B^r(0, p^{-k_0})$ vérifiant $x(s) = e(s)$, alors $x \in V_{k_0,l_0}$ (l'existence d'un tel k_0 suit du lemme B.3.4).

Lemme B.3.6

(i) *Soient $s \in B^r(0, p^{-k_0})$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$. Si $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E vérifiant $\theta_s(\widetilde{x}_n) = x_n$, alors la suite de terme général $[p^n]\widetilde{x}_n$ converge dans $X(\widehat{B})$ vers un élément $\psi_s(x)$ vérifiant $\psi_s(x) \ominus \widetilde{x}_0 \in V_{k_0,l_0}$.*

(ii) *Quel que soit $l \in \mathbf{N}$, il existe $k > k_0$ tel que si $s \in B^r(0, p^{-k})$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$ vérifie $x_0 \in V_l(s)$, alors $\psi_s(x) \in V_{k,l}$.*

Démonstration. — (i) On peut écrire $[p^n]\widetilde{x}_n$ sous la forme

$$\widetilde{x}_0 \oplus \oplus_{k=1}^{n} [p^{k-1}]([p]\widetilde{x}_k \ominus \widetilde{x}_{k-1}).$$

Par construction, si $k \in N$, alors $[p]\widetilde{x}_k \ominus \widetilde{x}_{k-1}$ est un élément de F dont l'image par θ_s est égale à $e(s)$; c'est donc un élément de V_{k_0,l_0}. On peut alors appliquer Log_X à la somme $\oplus_{k=1}^{n} [p^{k-1}]([p]\widetilde{x}_k \ominus \widetilde{x}_{k-1})$ pour montrer que celle-ci tend vers une limite dans V_{k_0,l_0} quand n tend vers $+\infty$.

(ii) D'après le lemme B.3.4, il existe $k > k_2$ tel que si $x \in F$ est tel qu'il existe $s \in B^r(0, p^{-k})$ pour lequel $x(s) = e(s)$, alors $x \in V_{k,l}$. La même démonstration que pour le (i) montre que si $s \in B^r(0, p^{-k})$ et si $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$, alors $\psi_s(x) \ominus \widetilde{x}_0 \in V_{k,l}$, où $\widetilde{x}_0$ est n'importe quel élément de E vérifiant $\widetilde{x}_0(s) = x_0$. Comme on a supposé que E contient V_{k_2,k_2} qui contient $V_{k,l}$ et que θ_s induit une surjection de $V_{k,l}$ sur $V_l(s)$, on peut prendre $\widetilde{x}_0$ appartenant à $V_{k,l}$, ce qui permet de conclure.

On tire de ce lemme, en suivant la démonstration du (i) du théorème B.1.1, le fait que si $s \in B^r(0, p^{-k_0})$ et $x \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$, alors $\psi_s(x) \in \widetilde{E} \oplus V_{k_0,l_0}$ qui est un sous-ensemble borné de $X(\widehat{B})$ inclus dans $X(B_{k_0})$ et que d'autre part, l'application $\widetilde{\psi}_s : \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p)) \to \mathscr{R}(X(\widehat{B}))$ qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe $\widetilde{\psi}_s(x) = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où $y_n = \psi_s(x_n)$ et où, si $m \in \mathbf{N}$, l'on a posé $x_m = (x_{m+n})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$, est un morphisme de groupes inverse de θ_s. Ceci permet de terminer la démonstration du (i) du théorème B.3.1.

Passons à la démonstration du (ii). Si G est ouvert dans $X_0(\mathbf{C}_p)$, il existe $l \in \mathbf{N}$ tel que $V_l(0)$ soit inclus dans G. Si $k \in \mathbf{N}$ vérifie les conclusions du (ii) du lemme B.3.6, montrons que G_s contient $V_l(s)$ pour tout $s \in B^r(0, p^{-k})$. Soit $a \in V_l(s)$ et soit $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$ tel que $x_0 = a$. D'après la discussion précédente, l'élément $\widetilde{\psi}_s(x) = (y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))$ vérifie $y_0 = \psi_s(x)$. Le choix de k et le fait que $y_0(s) = a \in V_{k,l}$ implique que $y_0 \in V_{k,l}$ d'après le (ii) du lemme B.3.6. On en déduit le fait que $\varphi_0(\widetilde{\psi}_s(x)) = y_0(0)$ appartient à $V_l(0)$, ce qui, par définition de $\widetilde{G}$, implique $\widetilde{\psi}_s(x) \in \widetilde{G}$ et donc que $a = \varphi_s(\widetilde{\psi}_s(x))$ appartient à G_s. On a donc prouvé que G_s contient le voisinage $V_l(s)$ de $e(s)$ et comme c'est un groupe puisque c'est l'image d'un groupe par un morphisme de groupes, il est ouvert. Ceci termine la démonstration du (a).

D'autre part, si $s \in B^r(0,p^{-k})$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in T_p(X_s(\mathbf{C}_p))$, cela implique que $x_0(s) = e(s) \in V_l(s)$ et la discussion précédente implique que $x \in \widetilde{G}$ d'où l'on tire le (b).

Finalement, le noyau de φ_s est égal à $\varphi_s^{-1}(G_s)/\widetilde{G} = (\widetilde{G} + T_p(X_s(\mathbf{C}_p)))/\widetilde{G} = \{0\}$ d'après le (b) et φ_s est injective ; comme d'autre part, si $s \in B^r(0,p^{-k_0})$, alors φ_s est une surjection de $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))$ sur $X_s(\mathbf{C}_p)$ puisque c'est la composée de l'isomorphisme θ_s avec l'application de $\mathscr{R}(X_s(\mathbf{C}_p))$ dans $X_s(\mathbf{C}_p)$ qui à $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ associe x_0 et qui est surjective car $X_s(\mathbf{C}_p)$ est p-divisible, on en déduit le fait que φ_s induit une bijection de $\mathscr{R}(X(\widehat{B}))/\widetilde{G}$ sur $X_s(\mathbf{C}_p)/G_s$ pour tout $s \in B^r(0,p^{-k})$. Ceci termine la démonstration du théorème B.3.1.

APPENDICE C

RÉSULTATS DE THÉORIE DES GROUPES

Cet appendice est consacré principalement à la démonstration de la proposition II.1.23. Si G est un groupe abélien, nous noterons I_G l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Q}[G]$. Nous noterons la loi de groupe multiplicativement de manière à pouvoir écrire de la même manière la multiplication de deux éléments de G dans G et dans $\mathbf{Q}[G]$. La relation de cocycle II.1.15 devient donc

$$g(x, h_0 h_1, \dots, h_n) = g(xh_0, h_1, \dots, h_n) + g(x, h_0, h_2 \dots, h_n) \tag{C.1}$$

et la proposition à démontrer est la suivante.

Proposition C.2

Soient G un groupe abélien, W un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et $g(x, h_1, \dots, h_n)$ une application de G^{n+1} dans W symétrique en $h_1, \dots, h_n$ vérifiant la relation de cocycle C.1. Soient H un sous-groupe de G tel que le groupe G/H soit de torsion et $f : H \to W$ telle que la restriction de g à H^{n+1} soit égale à $f^{[n]}$. Alors f a un unique prolongement $f_G : G \to W$ dont la restriction à H est égale à f et qui vérifie $f_G^{[n]} = g$ sur G^{n+1}. De plus, si $x \in G$ et $l \in \mathbf{N} - \{0\}$ est tel que $x^n \in H$, alors $f_G(x)$ est donné par la formule

$$f_G(x) = \sum_k b_k g(x^k, x, \dots, x) - \sum_k a_k f(x^{kl})$$

où les $a_k \in \mathbf{Q}$ ont été choisis de telle sorte que le polynôme $T + \sum_k a_k T^{lk}$ ait un zéro d'ordre au moins n en $T = 1$ et $\sum_k b_k T^k$ est le quotient de $T + \sum_k a_k^{lk}$ par $(T-1)^n$.

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme C.3

Soient G un groupe abélien, W un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel et soit $g(x, h_1, \dots, h_n)$ une application de G^{n+1} dans W une application symétrique en $h_1, \dots, h_n$ vérifiant la relation de cocycle C.1. Alors il existe une unique application $\mathbf{Q}$-linéaire $\widetilde{g} : I_G^n \to W$

telle que pour tout $n+1$*-uplet* $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ *d'éléments de* G^{n+1}*, on ait*

$$\widetilde{g}(x_0(x_1-1)\cdots(x_n-1)) = g(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer cette proposition dans le cas où G est de type fini, le cas général s'en déduisant en écrivant G comme une limite inductive de groupes de type fini. Commençons par supposer que G est libre sur $\mathbf{Z}$ et soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de G sur $\mathbf{Z}$. Le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel I_G^n admet alors comme base les $e_{x,\mathbf{k}} = x(e_1-1)^{k_1}\cdots(e_r-1)^{k_r}$ où x décrit G et $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ les r-uplets d'éléments de $\mathbf{N}$ vérifiant $k_1 + \cdots + k_r \geq n$. Comme $k_1 + \cdots + k_r \geq n$, on peut écrire $e_{x,\mathbf{k}}$ sous la forme $(f_1-1)\cdots(f_n-1)(\sum_y a_y y)$ avec $f_1, \ldots, f_n \in \{e_1, \ldots, e_r\}$ et $a_y = 0$ pour presque tout $y \in G$. On peut définir une application $\mathbf{Q}$-linéaire $\widetilde{g} : I_G^n \to W$ par la formule $\widetilde{g}(e_{x,\mathbf{k}}) = \sum_y a_y g(y, f_1, \ldots, f_n)$ et il reste à vérifier que si $(x_0, \ldots, x_n) \in G^{n+1}$, alors $\widetilde{g}(x_0(x_1-1)\cdots(x_n-1)) = g(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Remarquons que la symétrie de g et la relation de cocycle C.1 entraîne les identités suivantes

$$\text{(C.4)} \qquad g(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \text{ s'il existe } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } x_i = 1,$$

$$\text{(C.5)} \qquad g(x_0, x_1, \ldots, x_i^{-1}, \ldots, x_n) = -g(x_0 x_i^{-1}, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

$$\text{(C.6)} \qquad \sum_{l=0}^{k} g(x_0 x_n^l, x_1, \ldots, x_n) = g(x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n^k).$$

Si $x = \prod_{j=1}^r a_j e_j$ est la décomposition de $x \in G$ dans la base $(e_1, \ldots, e_r)$, posons $\|x\| = \sum_{j=1}^r |a_j|$. Nous allons vérifier la relation

$$\widetilde{g}(x_0(x_1-1)\cdots(x_n-1)) = g(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

par récurrence sur $\sum_{i=1}^n \|x_i\|$. Si $\sum_{i=1}^n \|x_i\| \leq n$, alors de 2 choses l'une : soit l'un des x_i est égal à 1 et la formule devient $0 = 0$, soit on a $x_i = f_i^{\varepsilon_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ et $f_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. Dans ce dernier cas, si tous les ε_i sont égaux à 1, $x_0(x_1-1)\cdots(x_n-1)$ est élément de la base de I_G^n et la formule est une tautologie ; sinon, on utilise l'identité C.5 pour se ramener au cas où tous les ε_i sont égaux à 1.

Si $\sum_{i=1}^n \|x_i\| \geq n+1$, il existe i tel que $\|x_i\| \geq 2$ et donc tel que x_i puisse s'écrire sous la forme $x_i^{(1)} x_i^{(2)}$ avec $\|x_i^{(j)}\| < \|x_i\|$ si $j \in \{1, 2\}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}\big(x_0 \prod_{i=1}^n (x_i-1)\big) &= \widetilde{g}\big(x_0 x_i^{(1)}(x_i^{(2)}-1)\prod_{j\neq i}(x_j-1)\big) + \widetilde{g}\big(x_0(x_i^{(1)}-1)\prod_{j\neq i}(x_j-1)\big) \\
&= g(x_0 x_i^{(1)}, x_1, \ldots, x_i^{(2)}, \ldots, x_n) + g(x_0, x_1, \ldots, x_i^{(1)}, \ldots, x_n) \\
&= g(x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

la première égalité résultant de la linéarité de $\widetilde{g}$, la seconde de l'hypothèse de récurrence et la dernière de la relation de cocycle et de la symétrie de g en les n dernières variables.

Ceci termine la démonstration dans le cas où G est sans torsion. Dans le cas général, on peut écrire G sous la forme $\mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_r \oplus (\mathbf{Z}/k_1\mathbf{Z})f_1 \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}/k_s\mathbf{Z})f_s$ que l'on voit comme un quotient de $H = \mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_r \oplus \mathbf{Z}f_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}f_s$. Notons π l'application de G sur H ainsi que celle de $\mathbf{Q}[H]$ dans $\mathbf{Q}[G]$ qu'elle induit.

Lemme C.7. — *Le noyau de $\pi : I_H^n \to I_G^n$ est égal au produit des idéaux I_H^{n-1} et $(f_1^{k_1}-1,\dots,f_s^{k_s}-1)$.*

Démonstration. — Ce noyau est l'intersection de I_H^n avec l'idéal de $\mathbf{Q}[H]$ engendré par $f_1^{k_1}-1,\dots,f_s^{k_s}-1$. Comme pour vérifier que deux idéaux de $\mathbf{Q}[H]$ sont égaux, il suffit de vérifier que les idéaux de $\overline{\mathbf{Q}}[H]$ qu'ils engendrent sont égaux, nous travaillerons dans $\overline{\mathbf{Q}}[H]$. Si $k \in \mathbf{N}$, notons $\mu_k \subset \overline{\mathbf{Q}}^*$ le groupe des racines k-ièmes de l'unité. Si $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_s) \in \mu_{k_1} \times \cdots \times \mu_{k_s}$, soit $\mathfrak{p}_\varepsilon$ l'idéal premier $(f_1-\varepsilon_1,\dots,f_s-\varepsilon_s)$ de $\overline{\mathbf{Q}}[H]$. Les $\mathfrak{p}_\varepsilon$ sont premiers entre eux deux à deux et on a

$$(f_1^{k_1}-1,\dots,f_s^{k_s}-1) = \prod_\varepsilon \mathfrak{p}_\varepsilon = \bigcap_\varepsilon \mathfrak{p}_\varepsilon.$$

Un calcul immédiat utilisant la base de I_H^n constituée des

$$x\prod_{i+1}^{r}(e_i-1)^{a_i}\prod_{j=1}^{s}(f_j-1)^{b_j},$$

où x décrit H et $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s$ sont des éléments de $\mathbf{N}$ vérifiant $a_1+\cdots+a_r+b_1+\cdots+b_s \geq n$, montre que l'on a

$$I_H^n \cap \mathfrak{p}_{(1,\dots,1)} = I_H^{n-1}\cdot\mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}.$$

Comme d'autre part, l'idéal $I_H^n \bigcap \mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}$ est premier à $\mathfrak{p}_\varepsilon$ si $\varepsilon \neq (1,\dots,1)$ puisque $\mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}$ l'est et que $I_H \supset \mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} I_H^n \bigcap (f_1^{k_1}-1,\dots,f_s^{k_s}-1) &= I_H^n \bigcap \Big(\bigcap_\varepsilon \mathfrak{p}_\varepsilon\Big) = \Big(I_H^n \bigcap \mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\varepsilon\neq(1,\dots,1)} \mathfrak{p}_\varepsilon\Big) \\ &= \Big(I_H^{n-1}\cdot\mathfrak{p}_{(1,\dots,1)}\Big) \prod_{\varepsilon\neq(1,\dots,1)} \mathfrak{p}_\varepsilon = I_H^{n-1}\cdot(f_1^{k_1}-1,\dots,f_s^{k_s}-1), \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Composant g avec π, on obtient une application $h : H^{n+1} \to W$ vérifiant la formule C.1 et on déduit de la discussion précédente l'existence et l'unicité d'une application linéaire $\widetilde{h} : I_H^n \to W$ telle que l'on ait $\widetilde{h}(x_0(x_1-1)\cdots(x_n-1)) = h(x_0,x_1,\dots,x_n)$. Le problème est de montrer que l'on peut trouver $\widetilde{g} : I_G^n \to W$ telle que l'on ait $\widetilde{h} = \widetilde{g}\circ\pi$. Autrement dit, il s'agit de prouver que si $y \in I_H^n$ est dans le noyau de $\pi : I_H^n \to I_G^n$, alors $\widetilde{h}(y) = 0$. Or un élément de ce noyau peut s'écrire, d'après le lemme C.7, comme une combinaison linéaire de termes du type

$$x_0(f_j^{k_j}-1)\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-1) = \sum_{l=0}^{k_j-1}\Big(x_0 f_j^l(f_j-1)\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-1)\Big)$$

et comme $\pi(f_j^{k_j}) = 1$, on obtient, utilisant les formules C.6 et C.4

$$\begin{aligned}\widetilde{h}(x_0(f_j^{k_j}-1)\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-1)) &= \sum_{l=1}^{k_j-1} h(x_0 f_j^l, x_1, \ldots, x_{n-1}, f_j)\\ &= g(\pi(x_0), \pi(x_1), \ldots, \pi(x_{n-1}), \pi(f_j^{k_j})) = 0,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Lemme C.8. — *Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G tel que le groupe G/H soit de torsion. Si n est un entier ≥ 1, alors le morphisme $\iota_H^G : \mathbf{Q}[H]/I_H^n \to \mathbf{Q}[G]/I_G^n$ induit par l'inclusion de H dans G est un isomorphisme*

Démonstration. — On peut comme précédemment supposer que G est de type fini. Soit $x \in G$. Il existe $l \in \mathbf{N}$ non nul tel que l'on ait $x^l \in H$. Soit $P(T) = \sum_k a_k T^k \in \mathbf{Q}[T]$ tel que le polynôme $Q(T) = T + P(T^l)$ ait un zéro d'ordre au moins n en $T = 1$. On peut écrire $x \in \mathbf{Q}[G]$ sous la forme $Q(x) - \sum_k a_k x^{kl}$ et comme $Q(x) \in I_G^n$ puisque $Q(T)$ est divisible par $(T-1)^n$ et que $\sum_k a_k x^{kl} \in \mathbf{Q}[H]$ puisque $x^l \in H$, on voit que l'image de ι_H^G contient x et, par linéarité, que ι_H^G est surjective.

On déduit de la surjectivité le fait que si $K \subset H$ sont deux sous-groupes d'indice fini d'un groupe abélien de type fini G, alors la bijectivité de ι_K^G est équivalente au fait que ι_K^H et ι_H^G sont bijectives. Écrivons G sous la forme $G_1 \times \Delta$, où Δ est un groupe fini et G_1 est sans torsion et soit $H_1 = H \cap G_1$. La remarque précédente implique que la bijectivité de ι_H^G est une conséquence de celle de $\iota_{H_1}^G$ elle-même conséquence de celles de $\iota_{H_1}^{G_1}$ et $\iota_{G_1}^{G_1 \times \Delta}$. Ceci permet de ramener la démonstration du cas général à celle des deux cas particuliers suivants :

(i) $G = \mathbf{Z}^r$ et H d'indice fini dans G,

(ii) $H = \mathbf{Z}^r$ et $G = \mathbf{Z}^r \oplus (\mathbf{Z}/k_1\mathbf{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbf{Z}/k_r\mathbf{Z})$.

Dans le premier cas, les groupes G et H sont isomorphes et les modules $\mathbf{Q}[G]/I_G^n$ et $\mathbf{Q}[H]/I_H^n$ qui sont des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels de dimension finie, ont la même dimension, ce qui fait que l'on peut déduire la bijectivité de ι_H^G de sa surjectivité.

Dans le second cas, on a

$$\mathbf{Q}[G] = \mathbf{Q}[H][X_1, \ldots, X_r]/\big((1+X_1)^{k_1} - 1, \ldots, (1+X_r)^{k_r} - 1\big)$$

et $I_G = I_H + (X_1, \ldots, X_r)$ et donc $I_G^n \subset I_H^n + (X_1, \ldots, X_r)$. D'autre part, la restriction à $\mathbf{Q}[H]$ de la réduction $\pi : \mathbf{Q}[G] \to \mathbf{Q}[H]$ modulo l'idéal $(X_1, \ldots, X_r)$ est l'identité et donc

$$I_G^n \cap \mathbf{Q}[H] = \pi(I_G^n \cap \mathbf{Q}[H]) \subset \pi(I_G^n) \subset \pi(I_H^n + (X_1, \ldots, X_r)) = I_H^n,$$

ce qui implique l'injectivité de ι_H^G et termine la démonstration du lemme C.8.

On déduit la proposition C.2 des lemmes C.3 et C.8 en remarquant que la donnée de g est équivalente à la donnée de l'application linéaire $\widetilde{g} : I_G^n \to W$ d'après le lemme C.3 et que d'autre part, les solutions de l'équation $f^{[n]} = g$ sont en bijection avec les applications $\mathbf{Q}$-linéaires de $\mathbf{Q}[G]$ dans W coïncidant avec $\widetilde{g}$ sur I_G^n, ce qui permet d'utiliser le lemme C.8 pour conclure à l'existence et l'unicité de f_G. La formule explicite pour f_G, quant à elle, suit de la démonstration de la surjectivité de ι_H^G dans le lemme C.8.

Lemme C.9. — *Si G est un groupe abélien et I_G est l'idéal d'augmentation de $\mathbf{Z}[G]$, alors $\sum_g n_g g \in I_G^2$ si et seulement si $\sum_g n_g = 0$ et $\prod_p g^{n_g} = 1$.*

Démonstration. — L'identité $g_1 g_2 - 1 = (g_1 - 1) + (g_2 - 1) + (g_1 - 1)(g_2 - 1)$ montre que l'application qui à $g \in G$ associe $g - 1 \in I_G$ induit un morphisme de G sur I_G/I_G^2. Le lemme est équivalent à l'injectivité de ce morphisme. Utilisant le théorème de structure des groupes abéliens, on peut montrer que si $g \in G - \{1\}$, il existe un groupe cyclique H et un morphisme $\pi : G \to H$ tel que $\pi(g)$ soit non nul. Comme $g - 1 \in I_G^2$ implique $\pi(g) - 1 \in I_H^2$, ceci nous permet de nous ramener au cas où G est cyclique. Si $G = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}[G] = \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$ et $I_G^n = (T-1)^n \mathbf{Z}[T, T^{-1}]$, ce qui fait que $T^a - 1 \in I_G^2$ équivaut à $T^a - 1$ divisible par $(T-1)^2$ et donc à $a = 0$ et permet de conclure. Si $G = \mathbf{Z}/f\mathbf{Z}$, alors $\mathbf{Z}[G] = \mathbf{Z}[T]/(T^f - 1)$ et $I_G^n = (T-1)^n \mathbf{Z}[G]$. En particulier, $T^a - 1 \in I_G^2$ si et seulement si il existe $P, Q \in \mathbf{Z}[T]$ tels que l'on ait $T^a - 1 = (T-1)^2 P(T) + (T^f - 1) Q(T)$, ce qui, prenant la dérivée des deux membres en $T = 1$, implique $f | a$ et permet de conclure.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah M., Hodge W. : Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math. 62, 56-91, 1955.

[2] Bloch S., Kato K. : L functions and Tamagawa numbers of motives. Dans "The Grothendieck Fesschrift", vol. 1, 333-400, Prog. Math., vol. 86, Birkhaüser 1990.

[3] Bosch S., Lütkebohmert W., Raynaud M. : Néron models, Erg. Math. 3 Folge, 21, Springer-Verlag, 1990.

[4] Bost J.-B. : Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians and abelian varieties, dans "From number theory to physics (Les Houches,1989)", Springer, 64-211, 1992.

[5] Bost J.-B. : Green's currents and height pairing on complex tori, Duke Math. J. 61, 899-912, 1990.

[6] Bourbaki N. : Algèbre commutative chapitres 3 et 4, Hermann, 1967.

[7] Bourbaki N. : Algèbre commutative chapitres 5 et 6, Hermann, 1964.

[8] Bourbaki N. : Groupes et algèbres de Lie chapitres 2 et 3, Hermann, 1972.

[9] Candilera M., Cristante V. : Bi-extensions associated to divisors on abelian varieties and theta functions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa X, 437-491, 1983.

[10] Candilera M., Cristante V. : Witt realization of p-adic Barsotti-Tate groups. Barsotti Symposium in Algebraic Geometry (Abano Terme, 1991), 65-123, Academic Press, San Diego, CA, 1994..

[11] Coleman R. : Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions, Inv. Math. 69, 171-208, 1982.

[12] Coleman R. : Hodge-Tate periods and p-adic abelian integrals, Inv. Math. 78, 351-379, 1984.

[13] Coleman R. : Torsion points on curves and p-adic Abelian integrals, Ann. of Math., 121, 111-168, 1985.

[14] Coleman R., de Shalit E. : p-adic regulators on curves and special values of p-adic L-functions, Inv. Math. 93, 239-266, 1988.

[15] Coleman R. : Reciprocity Laws on Curves, Compos. Math. 72, 205-235, 1989.

[16] Coleman R., Gross B. : p-adic heights on curves, Adv. Math. 17, 73-81, 1989.

[17] Coleman R. : The universal bi-extension and p-adic heights, Inv. Math. 103, 631-650, 1991.

[18] Colmez P. : Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. 292, 629-644, 1992.

[19] Cristante V. : Theta functions and Barsotti-Tate groups, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa VII, 181-215, 1980.

[20] P. Deligne : Hodge cycles on abelian varieties, dans Springer Lect. Notes Math., vol. 900, 1982.

[21] Faltings G., Wüstholz G. : Einbettungen commutativer algebraischer Gruppen und einige ihrer Eigenschaften, J. reine angew. Math. 354, 175-205, 1984.

[22] Fontaine J.-M. : Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque 47-48, Soc.Math.de France, Paris 1977.

[23] Fontaine J.-M. : Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. 115, 529-577, 1982.

[24] Fontaine J.-M. : Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Inv. Math. 65, 379-409, 1982.

[25] Fontaine J.-M. : Le corps des périodes p-adiques, dans «Périodes p-adiques», exposé II, Astérisque 223, 59-111, 1994.

[26] Griffiths P., Harris J. : Principles of algebraic geometry, Wiley, 1978.

[27] Gross B. : Local heights on curves, dans Arithmetic Geometry, Ed. Cornell, Silverman, 327-340, Springer-Verlag 1986..

[28] Grothendieck A. : On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. I.H.E.S. 29, 95-103, 1966.

[29] Grothendieck A. et al. : S.G.A.1, exposé XII, Springer Lect. Notes in Math. 224, 1971.

[30] Lang S. : Abelian Varieties, Interscience, New-York, 1959.

[31] Lang S. : Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer-Verlag 1983.

[32] LeStum B. : Cohomologie rigide et variétés abéliennes, C. R. Acad. Sc. Paris, 303, Série I, 989-992, 1986.

[33] Néron A. : Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, Ann. of Math. 82, 249-331, 1965.

[34] Néron A. : Fonctions thêta p-adiques et hauteurs p-adiques, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1980-1981, Prog. in Math. 22, Birkhäuser, 1982.

[35] Mazur B., Tate J. : The p-adic sigma function, Duke Math. J. 62, 663-688, 1991.

[36] Messing W. : The universal extension of an abelian variety by a vector group. Symp. Math. XI (Convegno di Geometria, INDAM, Rome, 1972), 359-372, Academic Press, 1973.

[37] Messing W. : Differentials of the first, second and third kinds, dans "Algebraic geometry" (Proc. Symp. Pur Math. 29, Arcata, 1974), 547-561, Amer. Math. Soc., 1975..

[38] Mumford D. : Abelian Varieties, Oxford University Press, 1970.

[39] Mumford D. : Tata Lectures on Theta I, Progress in Math. 28, Birkhäuser, 1983.

[40] Raynaud M. : Variétés abéliennes et géométrie rigide, actes congrès intern. math. Tome 1, 473-477, 1970.

[41] Serre J.-P. : Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6, 1-42, 1956.

[42] Serre J.-P. : Morphismes universels et variétés d'Albanese, Séminaire Chevalley 1958/59, exposé 10.

[43] Serre J.-P. : Morphismes universels et différentielles de troisième espèce, Séminaire Chevalley 1958/59, exposé 11.

[44] Serre J.-P. : Groupes algébriques et corps de classes, Hermann, 1959.

[45] Swinnerton-Dyer H.P.F. : Analytic Theory of Abelian Varieties, Cambridge University Press, Cambridge 1974.

[46] Weil A. : Variétés abéliennes, [1950a] dans « œuvres scientifiques », vol. I, 437-440, Springer 1979.

[47] Wintenberger J.-P. : Un scindage de la filtration de Hodge pour certaines variétés algébriques sur les corps locaux, Ann. of Math. 119, 511-548, 1984.

[48] Wintenberger J.-P. : Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens. I : Construction de l'accouplement de périodes, dans « Périodes p-adiques », exposé IX, Astérisque 223, 349-397, 1994.

[49] Zarhin Y. : Local heights and abelian varieties, dans « groupe d'étude sur les problèmes diophantiens 1988-1989 », Publications math. de l'Univ. Pierre et Marie Curie N° 90.

[50] Zarhin Y. : p-adic abelian integrals and commutative Lie groups. Algebraic geometry, 4, J. Math. Sci. 81, no.3, 2744-2750, 1996.